UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Yuri Farias Lima

Números reais: uma abordagem voltada para a Educação Básica

Florianópolis
2021

Yuri Farias Lima

Números reais: uma abordagem voltada para a Educação Básica

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Regina Célia Grando, Dra.

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor.

Orientações em:

http://portalbu.ufsc.br/ficha

Yuri Farias Lima

Números reais: uma abordagem voltada para a Educação Básica

O presente trabalho em nível de Graduação foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Regina Célia Grando, Dr(a).
UFSC (orientadora)

Prof.(a) Jussara Brigo, Dr(a).
Prefeitura Municipal de Florianópolis

Prof. Francisco Caramello Junior, Dr.
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão de curso que foi julgado adequado para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Coordenadora do Curso

Regina Célia Grando, Dra.
Orientadora

Florianópolis, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus avós Júlia e
Ezequias (*in memoriam*), que me ensinaram com amor
o caminho do perdão e da justiça.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela sua boa, perfeita e agradável vontade.

Agradeço à minha mãe Norma e à minha irmã Keise Priscila pelo apoio familiar e financeiro dado ao longo desses anos.

Agradeço à minha querida Déia pelo companheirismo ao longo dessa jornada.

Agradeço aos meus amigos Lucas, Mateus e Vitor pelas diversas tramas em momentos oportunos.

Agradeço aos colegas de curso pelos muitos diálogos sobre as disciplinas e sobre a vida além da Matemática.

Agradeço aos bons professores que tive ao longo da minha formação, em especial à professora Regina Grando que apostou nas minhas ideias "absurdas" e segue me (des)orientando com muita insubordinação criativa.

“Sou um feio simpático que com o tempo acaba sendo bonito.
No conjunto, ao final, pareço bonito.”
(RONALDINHO GAÚCHO, 2019)

RESUMO

O conjunto dos números reais é presente em diversos conceitos da Educação Básica, entretanto a formação inicial dos futuros professores, tradicionalmente, não equilibra harmonicamente o rigor matemático com as devidas problematizações a respeito dos conceitos estudados. Como consequência tem-se que muitos estudantes da Educação Básica acabam construindo ideias inadequadas associadas, não poucas vezes, à dificuldades epistemológicas presentes nos assuntos relacionados ao $\mathbb{R}$ – em certos pontos nem seus professores de Matemática pararam para pensar a respeito. Assim, se faz necessário investigar quais ideias sobre números reais foram apropriadas por estudantes que tiveram contato com números reais na Educação Básica? Para tanto, o objetivo geral foi de Investigar o que sabem os estudantes do curso de Matemática e estudantes do Ensino Médio sobre os números reais, bem como os objetivos específicos foram conhecer as orientações curriculares brasileiras para a abordagem de números reais no contexto escolar; mapear as principais dificuldades epistemológicas acerca de conceitos relacionados com o conjunto dos números reais; identificar o que dizem os estudantes que já experienciaram o conjunto dos números reais e suas propriedades em sua formação. Posto isso, empregou-se uma pesquisa de campo, em forma de questionário anônimo, para investigar o grau de entendimento dos estudantes a respeito dos conceitos de número racional, número irracional, densidade e continuidade. Foram investigados 13 estudantes do 1º ano e 13 estudantes do 2º ano do Ensino Médio, além de 29 graduandos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFSC campus Florianópolis. Os alunos do 1º ano do Ensino Médio, na maior parte dos casos, apresentaram mais atributos interessantes sobre os números reais, em comparação com alunos do 2º ano. Os respondentes do Ensino Superior, em geral, conseguiram responder satisfatoriamente se considerarmos as definições e procedimentos próprios do Ensino Superior.

Palavras-chave: Números reais. Educação Básica. Números racionais. Números irracionais. Densidade. Continuidade.

ABSTRACT

The set of real numbers is present in several concepts of Basic Education, however, the initial training of future teachers, traditionally, does not balance harmonically the mathematical rigor with the proper problematizations regarding the concepts studied. As a consequence, many Basic Education students end up building inappropriate ideas associated, not infrequently, with epistemological difficulties present in matters related to $\mathbb{R}$ - in certain points even his math teachers didn't stop to think about it. Thus, it is necessary to investigate which ideas about real numbers were appropriated by students who had contact with real numbers in Basic Education? Therefore, the general objective was to investigate what the students of the Mathematics course know and high school students on the real numbers, as well as the specific objectives were to know the Brazilian curricular guidelines for the approach of real numbers in the school context; map the main epistemological difficulties about concepts related to the set of real numbers; Identify what say students who have already experienced the set of real numbers and their properties in their training. That said, a field research was done, in form of anonymous questionnaire, to investigate the degree of understanding of students about the concepts of rational number, irrational number, density and continuity. 13 students from the 1st year and 13 students from the 2nd year of the High School, in addition to 29 undergraduates from the Licentiate and Bachelor's Degree courses in Mathematics at UFSC campus Florianópolis. Students in the 1st year of high school, in most cases had more interesting attributes about the real numbers, compared to 2nd year students. Respondents from Higher Education, in general, they were able to respond satisfactorily if we consider the definitions and procedures proper to Higher Education.

Keywords: Real numbers. Basic education. Rational numbers. Irrational numbers. Density. Continuity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de construção de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de um estudante de Licenciatura em Matemática, em meu entendimento, deveria ter um olhar especial para com a Educação Básica, pois a habilitação profissional que se obterá ao final da graduação permite que o sujeito exerça uma das maiores das profissões: ser professor de Matemática na Educação Básica.

Ademais, propor uma investigação que busque contribuir com a escola, para além da universidade, é também uma responsabilidade social, principalmente quando a disciplina envolvida é a Matemática — a qual é tida como obscura por grande parte das pessoas que passaram pelo ambiente escolar.

O germe dessa pesquisa de TCC foi a disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, na qual realizei uma proposta de intervenção que envolvia números reais, a qual foi exposta para os demais colegas de turma. Embora a aula tenha acontecido tranquilamente, a inquietação sobre a efetividade do que pensei acabou por me acompanhar até essa pesquisa.

Em setembro de 2019 assumi vaga de professor substituto na rede estadual de ensino do estado de Santa Catarina e, dentre as diversas turmas pelas quais ministrei aula naquele ano, em boa parte delas tive que lidar com o ensino dos números reais, mas não conseguia iniciar a conversa sobre esse conjunto.

No ano seguinte foi diferente, pois consegui lecionar para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio desde o início do ano letivo, assim, pude experimentar (como professor) boa parte do que havia pensado a respeito de como abordar sobre o conjunto dos números reais de forma menos complexa.

Assim sendo, considero a minha experiência anterior como suporte de reflexão para a construção da problemática dessa pesquisa. Embora tais experiências ainda sejam iniciais, elas me permitiram (re)significar muitos pensamentos quanto ao ser professor, pois como indica Jorge Larrosa (2002), a experiência tem a ver com o que nos passa e não com o que se passa.

Paralelamente ao trabalho que venho realizando com estudantes do Ensino Médio, destaco as discussões que acontecem às quartas feiras no grupo de estudos de Insubordinações Criativas em Educação Matemática (ICEM). Sem dúvidas, as problematizações que ali acontecem, me fazem refletir muito sobre minhas práticas.

É relevante salientar que o ICEM é formado por professores de Matemática e Pedagogia, bem como por formadores de professores, pós-graduandos e graduandos das referidas áreas do conhecimento, os quais reúnem-se semanalmente para pensar uma Matemática voltada para a Educação Básica. Para além de um grupo de estudos, considero o ICEM como uma família e, sem as discussões que ali acontecem, não sei como seria um professor.

Valendo-me de um dos rituais insubordinados vividos no ICEM, trago minhas lembranças e desconfortos como ponto de partida sobre o tema. Dentre as muitas inquietações que me acometeram nesse primeiro ano de docência em escolas públicas estaduais, o conjunto dos números reais foi o assunto mais desafiador para se tratar com estudantes do Ensino Médio.

Em primeiro lugar, isso se deve ao pouco contato que tive com números reais no Ensino Fundamental e Médio, que foi restrito à definições, por exemplo, funções e matrizes, e exercícios de cunho operacional, como os que envolviam equações e inequações, os quais não me fizeram refletir sobre o que era esse conjunto.

Em segundo lugar, coloco em perspectiva a forma como os números reais foram abordados ao longo da minha licenciatura. Como boa parte dos assuntos que estudei em minha formação inicial, os números reais possuem uma conexão direta com a Escola Básica, mas a forma como lidei com tal conceito na graduação é totalmente inacessível à estudantes para os quais leciono — vale ressaltar que usamos esse conjunto em diferentes momentos no decorrer da graduação, mas construir a ideia de trabalhar com esse conjunto na Educação Básica ultrapassa a formalização rigorosa aplicada no referido curso.

Ademais, é interessante ponderar a forma como os livros didáticos abordam aspectos relacionados aos números reais. Ao longo desses anos, seja como professor ou aluno, tive contato com diversos livros que traziam uma seção sobre os números reais. A forma como o assunto é apresentado me parece muito breve e insuficiente para gerar uma boa ideia do que esse conjunto representa e das possibilidades que ele propicia.

A título de exemplo, a aparição dos números reais em subconjuntos na reta, em geral, não debate a diferença entre entre os conjuntos $A = [0, 1]$ e $B =]0, 1[$. Nessa problematização pode ser inserida a ideia de elementos de B chegarem tão perto quanto se queira dos elementos de A, mas nunca B será igual A. Essa é uma discussão que, ao meu ver, não cabe somente para a Educação Básica, cabe também ao Ensino Superior, como em uma disciplina de Introdução ao Cálculo.

De mais a mais, as noções de números reais, assim como os conceitos que são estruturados envolvendo o conjunto que eles constituem, podem ser observados em boa parte dos conteúdos que são apresentados à estudantes do Ensino Médio. Como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem de limites e continuidade de funções, a título de exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais (PENTEADO; SILVA, 2009).

Construir o conjunto dos números reais é uma problemática tanto do ponto de vista formal, quanto do ponto de vista do ensino. Embora o assunto em questão esteja presente em boa parte da Educação Básica, seu ensino vem tendo atenção no campo da Educação Matemática nos últimos anos (GOMES; ET AL, 2014).

Dentre as diversas razões para a ocorrência desse fenômeno, cabe destacar a argumentação de que na Educação Básica os números reais são tratados de maneira superficial, basicamente por exemplos, enquanto que na licenciatura, momento propício para fazer o sujeito conseguir tecer uma maior significação de conceitos já vistos na escola ainda permanece uma abordagem essencialmente formalista sobre o tema, o que não qualifica o futuro docente a discutir, de modo significativo, os números reais no ambiente escolar (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Sendo assim, optamos por uma abordagem ao longo do texto que possa ser discutida em salas de aula da Educação Básica, o que reflete numa simplificação consciente de notações e definições matemáticas.

Levando em consideração o exposto, formulei a seguinte questão de investigação: quais ideias sobre números reais foram apropriadas por estudantes que tiveram contato com números reais na Educação Básica?

1.1 OBJETIVOS

Visando responder a tal questionamento é que trazemos os seguintes objetivos.

1.1.1 Objetivo Geral

Investigar o que sabem os estudantes do curso de Matemática e estudantes do Ensino Médio sobre os números reais.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Conhecer as orientações curriculares brasileiras para a abordagem de números reais no contexto escolar;
- Mapear as principais dificuldades epistemológicas acerca de conceitos relacionados com o conjunto dos números reais;
- Identificar o que dizem os estudantes que já experienciaram o conjunto dos números reais e suas propriedades em sua formação.

Para tanto, a pesquisa está estruturada em: aspectos abordados sobre o conjunto dos números reais em documentos oficiais, buscando averiguar quais são as recomendações para se trabalhar com o conjunto $\mathbb{R}$; pressupostos teóricos no âmbito dos conceitos matemáticos. Nesta seção a ideia foi de estabelecer os conceitos formais de números racionais e irracionais, assim como as definições de continuidade e densidade; pressupostos epistemológicos envolvidos, buscando propor discussões a respeito dos conceitos formais, colocando em voga as principais dificuldades apontadas no estudo dos mesmos; a seção “o que revelou esta investigação?” busca expor as principais conclusões obtidas na pesquisa de campo; por fim, as conclusões e possíveis caminhos sintetizam as observações registradas e lançam novas possibilidades de investigação a partir deste trabalho.

2 ASPECTOS ABORDADOS SOBRE O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS EM DOCUMENTOS OFICIAIS

Buscando subsidiar conceitualmente a pesquisa, realizamos um levantamento bibliográfico documental sobre o conjunto dos números reais. Para tanto, consultamos: Repositório Institucional da UFSC, o Currículo do Território Catarinense (2019), os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), Base Nacional Comum Curricular (2017) e a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio (2018).

Em um levantamento inicial, procuramos entender o que outros estudantes do curso de Matemática da UFSC já pensaram (em Trabalhos de Conclusão de Curso) sobre números reais articulados com a Escola Básica. Para tanto, foi elaborada uma busca no Repertório Institucional da UFSC (cujo acervo contém os trabalhos de conclusão de curso da Matemática), no dia 5 de novembro de 2020, utilizando os seguintes descritores de busca:

- “números reais” resultou em 85 resultados;
- “números reais” + “ensino” resultou 49 resultados;
- “números reais” + “ensino” + “educação” resultou em 36 resultados;
- “números reais” + “ensino” + “educação” + “escola” resultou em 32 resultados;
- “números reais” + “ensino” + “educação” + “escola” + “educação matemática” resultou em 25 resultados.

Com base nos descritores, os resultados mostrados exibiam trabalhos que tinham as referidas palavras em alguma parte do texto. Sendo assim, os 25 resultados restantes foram examinados com o intuito de aferir a proximidade com nossa proposta de investigação. Sendo assim, segue no quadro 1, os trabalhos analisados.

Quadro 1 – Trabalhos de Conclusão de Curso analisados

Nome do autor	**Título das obras**	**Ano**
Adriana Aparecida Dambros	O valor didático da história da matemática	1997
Christiane Wenck Nogueira	Um pouco da história do departamento e do curso de matemática da Universidade Federal de Santa Catarina	1999
Protasio Kraieski	Abordagem de matrizes no ensino médio	1999
Ana Clara Caldas Fiel	O lugar da resolução de problemas nos parâmetros curriculares nacionais e na licenciatura em matemática da UFSC	2000
Josiane Marques Motta	Abordagem da equação do 2º grau através da resolução de problemas: uma aplicação no ensino fundamental	2000
Manoel Marino Martins	Logarítmos	2000
Sabrina Nunes Pires	Matrizes no ensino médio	2000
Marcia Maria Bernal	Frações: reflexões sobre conceitos e significados	2001
Juliano Espezim Soares Faria	Demonstrações no ensino fundamental e médio	2002
Narjara Boppré Philippi	Sistemas de equações lineares: um estudo didático	2003
Luciano Hammes	Tendências metodológicas atuais na prática dos ensinos dos estagiários do curso de matemática	2003
Karina Zolia Jacomelli	Polinômios de “saber a ensinar” a “saber ensinado” em 7ª série	2003
Edson Mayer	O currículo de 1994 do curso de licenciatura em matemática da UFSC na visão dos egressos	2004
Franciely Samistraro	Funções trigonométricas: senx, cosx e tgx estudo de proposições de abordagem no ensino médio	2004
Piersandra Simão dos Santos	Relação como o saber: Alunos de 8ª e 9ª fase do curso de matemática	2005
Marize Richartz	Potenciação: um estudo didático	2005
Taciana Zardo	Equações do 1º grau: um estudo didático	2005

Continua na próxima página...

Nome do autor	**Título das obras**	**Ano**
Valdir Damázio Júnior	O papel das representações semióticas na produção do conhecimento matemático e suas aplicações na educação	2006
Karla Aparecida Lovis	Atividade envolvendo tipos de softwares educacionais	2007
Mayna Volker dos Santos	Um estudo sobre demonstrações em livros de ensino médio	2008
Sabrina Leal	Matemática moderna: uma análise comparativa em livros didáticos	2008
Ana Paula Bombassaro	As novas diretrizes curriculares para a formação de professores: a experiência do curso de matemática da Universidade Federal de Santa Catarina	2009
Cássia Aline Schuck	O olho no infinito ou o infinito no olho? pensando matemática por meio de pinturas de Victor Meirelles	2012
Fernando Correia	O jogo como metodologia de ensino na matemática: Um acervo para os professores	2012
Alexsandro Schneider	A aprendizagem da álgebra nos anos finais do ensino fundamental	2013

Fonte – O autor

De modo geral o termo “números reais” esteve presente em trabalhos que explicitam o currículo do curso de Licenciatura em Matemática (nesse caso, o termo é somente um dos diversos conteúdos propostos no documento) e esteve presente em definições, como de funções e matrizes, bem como em exercícios que foram examinados ou propostos durante a produção dos trabalhos. Contudo, não foram localizados trabalhos que discutissem especificamente sobre os números reais relacionados com a escola de Educação Básica.

Partindo para um âmbito maior da pesquisa, visando explorar o que se entende por números reais na escola, foram investigadas no dia 7 de novembro de 2020 as palavras-chave "números”, "reais”, "racionais” e "irracionais” nos seguintes documentos oficiais: no Currículo do Território Catarinense (2019), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), nas Orientações Curriculares para o Ensino Básico (2006) e na Base Nacional Comum Curricular (2018). Vale ressaltar que a redução de palavras-chave na pesquisa se deve ao fato de que os documentos em questão já são construídos para a Educação Básica e, portanto, bastava aplicar os termos citados para se ter um panorama geral de como o conjunto dos reais foi pensado para ser trabalhado nas instituições de ensino.

O Currículo do Território Catarinense (2019), só tem disponível a versão que é destinada ao Ensino Fundamental. Nesse documento, o conjunto dos números reais é abordado somente no 9º ano, na unidade temática de *Números* (SANTA CATARINA, 2019).

Em linhas gerais, o documento prescreve que se aborde a importância dos números reais para mensurar qualquer segmento de reta. Ademais, expõe a importância dos números reais por meio de: cálculos de potências que tenham expoentes que racionais, bem como por meio da resolução e formulação de problemas (SANTA CATARINA, 2019). Nessa direção, cabe frisar a habilidade principal a ser desenvolvida no estudo desse conceito:

> Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica (SANTA CATARINA, 2019, p. 338).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), por sua vez, não falam explicitamente sobre números reais, entretanto, na seção que trata sobre *números e operações* recomenda para os anos finais do Ensino Fundamental que o estudante consiga ampliar seu entendimento sobre os conjuntos numéricos, bem como seu entendimento sobre número. Apesar de ser uma seção curta, os irracionais são mencionados juntamente com os racionais com o intuito de impulsionar o estudante da Escola Básica a lidar com as diferentes representações desses números (BRASIL, 1997).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), no bloco *Números e operações*, defendem que se proponham problemas que ampliem os campos numéricos até que se chegue aos números reais. Para tanto, ressaltam a relevância dos irracionais como uma solução para resolver o problema dos segmentos incomensuráveis (BRASIL, 2006).

No documento comentado anteriormente, há a ênfase para se trabalhar com as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e π, bem como ratificam a importância de se apresentar a representação decimal e localizar alguns números reais na reta numérica. Ademais, colocam uma possibilidade de contextualizar os irracionais por meio da História da Matemática, mais precisamente com a crise que os irracionais geraram no desenvolvimento da matemática grega (BRASIL, 2006).

A Base Nacional Comum Curricular (2017) voltada ao Ensino Fundamental, trata sobre a importância dos alunos lidarem com problemas que demandem uma ampliação de conjuntos numéricos, de forma que fique frisada a relevância dos irracionais. Posteriormente, o documento propõe uma estrutura de objetos de conhecimento e habilidades que são os mesmos adotados pelo Currículo do Território Catarinense, incluindo o público ao qual se destina (BRASIL, 2017).

A Base Nacional Comum Curricular destinada ao Ensino Médio (2018) é mais vaga quanto aos números reais. Nesse documento, estabelece-se a relevância de se trabalhar com problemas que envolvam os diversos conjuntos numéricos em diferentes contextualizações, como a formal, a social e a inter relacional com outras áreas do conhecimento – instrução essa que já aparece na Base Nacional do Ensino Fundamental. A instrução direcionada ao Ensino Médio encontra-se na sub seção *relações e inter relações*, da seguinte maneira: "A própria ideia de medida pode ser definida como uma função que associa um número real positivo (correspondente a certa quantidade de unidades) a um comprimento, área ou volume" (BRASIL, 2018).

Por meio dessa investigação inicial, fica evidente a preocupação dos documentos em ampliar a percepção do estudante da Escola Básica no que tange ao conceito de número. Nessa direção, apontam que os números irracionais devem ser abordados e sua representação decimal (infinita e não periódica) deve ser frisada, bem como as propriedades algébricas desse conjunto.

Por outro lado, apesar de existir breve comentário sobre o uso da reta numérica, os documentos legais deixam a desejar sobre a abordagem do conceito de continuidade na reta real.

A relevância de discutir sobre a continuidade da reta é fazer com que, de fato, os estudantes concebam que o objeto geométrico que possui infinitos pontos representa coerentemente os elementos do conjunto dos números reais, ou seja, cada número real pode ser representado na reta de modo a preenchê-la completamente, o que não é verdade, por exemplo, quando se trata apenas do conjunto dos números racionais. Embora todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ possam ser listados na reta, ainda sim, tais elementos não são o suficiente para cobrir a reta.

Outro conceito de igual importância e que também não é explicitado nos referidos documentos é o conceito de densidade do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números reais.

Discutir sobre a densidade propicia um entendimento de uma propriedade muito importante dos números reais. Quando um documento, que está intimamente ligado com o currículo pensado e praticado nas escolas, não explicita a necessidade de se dialogar sobre esse conceito, possivelmente as discussões nas salas de aula acabem por não acontecer e o que fica em voga são propriedades algébricas de modo breve — a título de exemplo, exercícios para determinar se dois números operados são racionais ou irracionais.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS NO ÂMBITO DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Visando demarcar um ponto de partida para a discussão que será tecida na sequência, se faz necessário propor, brevemente, uma conceituação para os objetos de estudo.

É importante salientar que para efeito de discussões posteriores, assume-se conhecido o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

Um pensamento que será assumido é o *Princípio da economia*, o qual sempre leva a optar — entre dois caminhos possíveis que levam para o mesmo fim — pelo caminho mais simples e menos complicado (CARAÇA, 1951).

Essa forma de raciocinar acarreta uma condição muito importante para o que esse trabalho proporá, uma vez que assume conhecidos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, assim como a inclusão que é trabalhada na Educação Básica: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ademais, já se pressupõe um conjunto de regras operatórias que advém de propriedades formais das operações nesses conjuntos, cabendo ressaltar que se forem usadas como base para outras extensões, essas mesmas propriedades num contexto amplificado não podem se contradizer com o que foi estabelecido no contexto mais reduzido (CARAÇA, 1951).

A título de exemplo, considere as seguintes operações: $a \cdot 0$ e b^0. Ora, no contexto de $\mathbb{Z}$, foi visto que a multiplicado por zero é igual a zero, bem como b elevado a zero é igual a 1 para $b \neq 0$.

Se propusermos um conjunto que considere sabida as operações e propriedades já válidas no conjunto dos números inteiros e, além disso, exija algo a mais, então será considerado válido nesse novo conjunto resultados como $a \cdot 0 = 0$ e $b^0 = 1$.

Ao fazermos uso do princípio descrito anteriormente, temos a vantagem de resgatar propriedades mais imediatas, tais como: associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro, existência de elemento oposto para as operações de adição (+) e de multiplicação ($\cdot$), bem como vale a distributividade — relação essa que envolve as operações comentadas.

Outro pressuposto em que o presente trabalho se fundamenta é a soma de segmentos[1]. Dados três pontos colineares (incidentes numa mesma reta) A, B e C, formando os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB} \cup \overline{BC}$, então consideraremos a soma das medidas dos segmentos $AB + BC = AC$.

Em termos de construções com régua e compasso, vamos assumir conhecido o traçado de retas perpendiculares e paralelas.

[1] Formalmente o comprimento de um segmento é associado com um número real positivo, entretanto resolvemos omitir essa questão para fins didáticos e, assim, consideraremos apenas as construções geométricas sem nos preocupar com a “natureza” do número associado a uma dada medida

3.1 NÚMEROS RACIONAIS

Do ponto de vista formal, o *conjunto dos números racionais* ($\mathbb{Q}$) surge da impossibilidade de se obter o inverso multiplicativo para números diferentes de 1 e –1 no conjunto dos números inteiros (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

O conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser entendido como frações na forma $\frac{a}{b}$, de forma que a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Mais formalmente, no produto cartesiano de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, consideraremos a relação de equivalência $(a, b) \sim (c, d)$ se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$. Definimos $\mathbb{Q} := \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\sim}$ e denotamos $(a, b) = \frac{a}{b}$. Perceba que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$.

Def: Para quaisquer a e c elementos de $\mathbb{Z}$ e para quaisquer b e d elementos de $\mathbb{Z}^*$, consideramos:

- Adição entre números racionais $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
- Multiplicação entre números racionais $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Para um número racional na forma $\frac{a}{b}$, o número a é chamado de *numerador* e o número b é chamado de *denominador*.

Considere $\mathbb{Q}^{\#}$ como sendo o conjunto dos números racionais cujo denominador é igual a 1, ou seja, $\mathbb{Q}^{\#} = \left\{\frac{q}{1} \in \mathbb{Q} \mid q \in \mathbb{Z}\right\}$. Vamos verificar as condições expostas anteriormente:

- Igualdade: $\frac{q}{1} = \frac{r}{1} \iff q = r$
- Adição: $\frac{q}{1} + \frac{r}{1} = \frac{q + r}{1} = q + r$
- Multiplicação: $\frac{q}{1} \cdot \frac{r}{1} = \frac{q \cdot r}{1 \cdot 1} = \frac{q \cdot r}{1} = q \cdot r$

Note que os elementos do conjunto apresentado possuem comportamento similar aos números inteiros. Daí, pode-se dizer que essencialmente $\mathbb{Q}^{\#}$ é o mesmo conjunto que $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Q}^{\#}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$, é razoável a seguinte inclusão: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Lembre-se da discussão inicial da seção, a qual aponta os números racionais como um “ambiente propício” para se pensar nos inversos multiplicativos, ou seja, um conjunto que amplia a operação de divisão. Sendo assim, veremos a propriedade que trata sobre inverso multiplicativo:

Prop: Dado um número fracionário qualquer, na forma $\frac{a}{b}$, onde $a \neq 0$, existe um único número racional $\frac{b}{a}$ de forma que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. O número $\frac{b}{a}$ é chamado de *simétrico* ou de *inverso multiplicativo*.

Prop: Vamos considerar, também, a seguinte igualdade:

$$(-1)\cdot\frac{a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Perceba, com base nas discussões apresentadas, que é possível definir a operação de divisão para o conjunto $\mathbb{Q}^*$, da seguinte maneira:

Def: Para quaisquer $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ (b e d não nulos), definimos $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Uma outra forma de visualizarmos os elementos dos números racionais é por meio de sua representação decimal.

Para representarmos um racional $\frac{a}{b}$ na forma decimal, basta dividirmos a por b. Nesse processo de troca de notação, pode acontecer duas situações.

- Os números podem ter *representação decimal e finita*, como por exemplo: $\frac{1}{2} = 0,5;\quad \frac{80}{100} = 0,8;\quad \frac{3}{2} = 1,5;\quad \frac{1}{16} = 0,0625.$
- Os números podem ter *representação decimal infinita e periódica*, isto é, a parte decimal é infinita e se repete de período em período, como por exemplo, $\frac{1}{3} = 0,33333...$. Nesses casos, vamos denotar a parte que se repete nos períodos através de um traço na parte superior. Assim, $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$.

Vejamos mais exemplos: $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857};\quad \frac{65}{48} = 0,3541\overline{6};\quad \frac{1}{22} = 0,0\overline{45}.$

Uma observação, que será problematizada posteriormente, é a seguinte: dados dois números racionais distintos, sempre conseguimos exibir um outro racional entre eles. Veja que isso é aceitável, pois podemos aplicar a média entre esses dois racionais.

Note que a observação anterior não é verdadeira para os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, basta considerar dois números consecutivos, por exemplo 0 e 1.

3.1.1 A articulação da geometria com a construção de segmentos de medida racional

Antes de efetuarmos a construção de um determinado segmento usando o Teorema de Tales, é importante discutir o motivo que nos levou a considerar importante construir, com régua e compasso, os números racionais.

A proposta dessa pesquisa olha para o conjunto dos números reais. Assim sendo, é interessante que os conceitos que alicerçam o entendimento sobre esse conjunto sejam expostos numa perspectiva que possibilitem o melhor entendimento possível.

Nessa direção, Pasquini e Baroni (2007) ratificam a importância de proporcionar um caráter geométrico para se introduzir o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, visando, assim, adentrar no conjunto dos números reais no contexto escolar (PASQUINI; BARONI, 2007).

Para mais, é interessante trabalhar os conceitos geometricamente, pois colabora para um melhor desenvolvimento cognitivo dos jovens (IMENES; LELLIS, 2007). Além disso, os autores enfatizam a questão ao afirmar que:

> Há indícios de que crianças que trabalham com formas geométricas, tornam-se mais organizadas, desenvolvem coordenação motora e visual, melhoram a leitura, compreendem mais rapidamente gráficos, mapas e outras informações visuais (IMENES; LELLIS, 2007, p. 28)

Outro benefício de se trabalhar no ambiente motivado pelo desenho geométrico é a formação de uma linguagem gráfica para os estudantes, linguagem essa que é uma maneira concisa, precisa e universal de comunicar ideias. Vale salientar que o sujeito, ao experienciar construções de medidas com régua e compasso, pode desfrutar de grande satisfação ao ver que o processo culminou numa figura que sintetiza as ideias perpassadas (ZUIN, 2001).

O próprio conceito de número, na história da humanidade, surgiu atrelado ao processo de medir e assim permaneceu até que membros da escola pitagórica acabaram promovendo uma desassociação entre número e mensuração. Passado esse processo, os gregos conceberam os números como *aritmos*, cujo sentido é mais estrito que o conceito de número natural, pois nem zero e nem um são considerados *aritmos* (FERNANDES, 2017). Posto isso, embora os gregos não lidassem com números na forma como abordaremos, ainda assim faz sentido usar o legado deixado por eles sobre a geometria plana, tendo como objetivo significar os conjuntos numéricos a serem abordados na perspectiva de construir segmentos.

Dada a discussão tecida, veremos como construir um segmento cuja medida é racional utilizando régua e compasso.

Considere um par de retas concorrentes (ilustrados na cor vermelha) cruzado por um feixe de retas paralelas (na cor preta), como ilustrado na figura 1 a seguir.

O Teorema de Tales nos garante que se as retas concorrentes são cuzadas por um feixe de retas paralelas, então a medida dos segmentos formados são proporcionais. Com base na ilustração exibida anteriormente, temos que $\frac{DF}{EG} = \frac{FH}{GI}$.

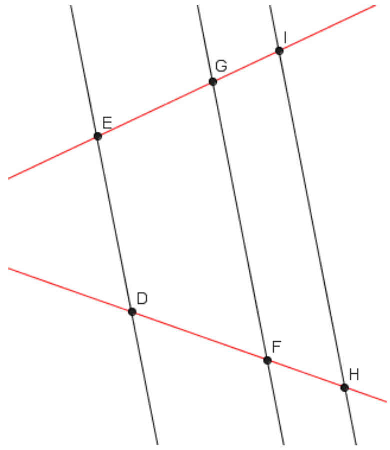
Usaremos esse teorema a seguir.

3.1.1.1 Construção de 1/n

Podemos usar o Teorema de Tales para construir (com régua e compasso) segmentos de tamanho $\frac{1}{n}$, onde n é um numero natural não nulo.

Para fixar ideias, vamos construir o segmento de tamanho $\frac{1}{5}$. Para tanto, é necessário estabelecer o que é o comprimento de medida unitária. Nesse caso, ilustraremos

Figura 1 – Ilustração do Teorema de Tales



Fonte – O autor

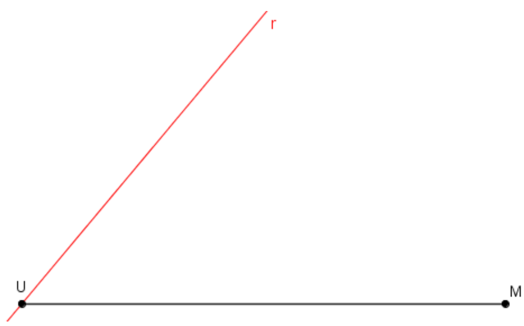
o segmento de tamanho 1 por meio de UM, na figura 2.

Figura 2 – Ilustração do segmento unitário

Fonte – O autor

Nosso objetivo é achar um ponto X de forma que XM tenha comprimento igual a $\frac{1}{5}$. Vamos iniciar a construção. Basta traçar uma reta r que incida no ponto U, de modo que r seja diferente de $\overleftrightarrow{UM}$, pois queremos usar o Teorema de Tales e, para tanto, as retas r e $\overleftrightarrow{UM}$ "farão o papel das retas concorrentes" no ponto U, como mostrado na figura 3.

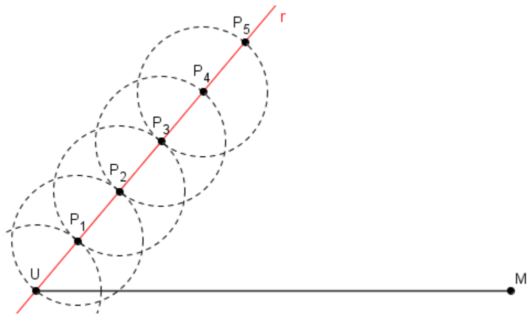
Figura 3 – Ilustração das retas concorrentes



Fonte – O autor

Em seguida, será marcado cinco vezes (com o compasso) um tamanho fixo qualquer nessa reta r, de modo sequencial, como ilustrado na figura 4. a seguir:

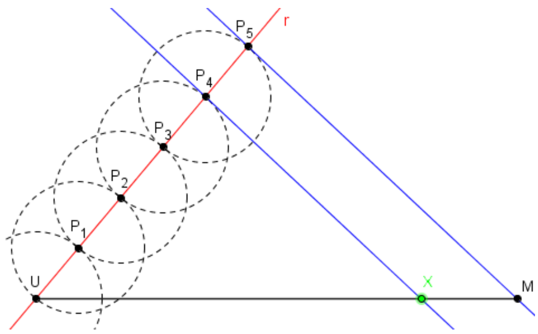
Figura 4 – Ilustração dos tamanhos sequenciais



Fonte – O autor

Perceba que a primeira marcação é centrada no ponto U, de maneira que $UP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$. Assim sendo, o comprimento P_4P_5 é, por construção, $\frac{1}{5}$ da medida do comprimento do segmento $\overline{UP_5}$. Logo, basta traçar a reta $\overleftrightarrow{P_5M}$ e, posteriormente, construir uma reta paralela à $\overleftrightarrow{P_5M}$, de modo que incida em P_4, conforme figura 5.

Figura 5 – Ilustração do segmento 1/5



Fonte – O autor

Veja que X foi o ponto de cruzamento da reta paralela construída com o segmento $\overline{UM}$. Por meio do Teorema de Tales, temos que $XM = \frac{1}{5} \cdot UM$. Lembre que $\overline{UM}$ possuía comprimento unitário, logo $XM = \frac{1}{5}$, que era o que gostaríamos de construir.

Observe que o exemplo exposto pode ser estendido para $\frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Para tanto, considere UM como segmento de comprimento unitário; o procedimento que seguirá é análogo ao caso anteriormente apresentado.

Construa uma reta r, de modo que a interseção entre r e $\overleftrightarrow{UM}$ seja o ponto U. Com o compasso, marque n vezes uma medida fixa na reta comentada, de modo que $UP_1 = P_1P_2 = \cdots = P_{n-1}P_n$, onde n é um índice fixado pelo mesmo número natural não nulo n.

Observe que a última construção nos fornece que $P_{n-1}P_n = \frac{1}{n} \cdot UP_n$

Posteriormente, basta traçar a reta P_nM e, em seguida, trace a reta paralela à P_nM que incide em P_{n-1}. Veja que essa construção produzirá uma interseção com o segmento UM, num ponto entre U e M; Chame esse ponto de X.

Pelo Teorema de Tales, temos que XM tem medida $\frac{1}{n}$ de UM. Como UM possui medida unitária, temos que $XM = \frac{1}{n}$, que era o que queríamos construir.

3.1.1.2 Construção de p/n

Perceba que construir um segmento do tipo $\frac{p}{n}$ é a mesma coisa que fazer p vezes o segmento $\frac{1}{n}$. Dito de outro modo, é a mesma coisa que somar segmentos de tamanho $\frac{1}{n}$ em p parcelas.

Observando isso, basicamente, temos três casos:

- Numerador ser igual ao denominador - esse caso é simples, pois como o denominador nunca pode ser zero, então um número natural dividido por ele próprio será igual a 1.
- Numerador ser menor que o denominador - é a ideia comentada de construir o segmento $\frac{1}{n}$ e adicionar p parcelas de comprimento $\frac{1}{n}$.
- Numerador ser maior que o denominador - nesse caso, a ideia é usar a divisão euclidiana. Para melhor entendimento, veremos um exemplo.

Como construiríamos $\frac{13}{5}$?

Veja que, com base na definição de soma de números racionais, agruparemos a maior quantidade possível “num único pacote” — o pacote é delimitado pelo denominador, que nesse caso é igual a 5. Posto isso, temos:

$$\begin{aligned}\frac{13}{5} &= \frac{5 \cdot 2 + 3}{5} \\ &= \frac{5 \cdot 2}{5} + \frac{3}{5} \\ &= 2 + \frac{3}{5} \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Veja que $\frac{13}{5}$ foi "desmembrado" de modo que se tornou igual a uma soma envolvendo um múltiplo da unidade adicionado com um múltiplo de $\frac{1}{5}$

Portanto, a dificuldade operacional recai em construir $\frac{1}{5}$ da unidade, somar tal comprimento três vezes e, posteriormente, adicionar com duas vezes o comprimento da unidade.

Com base no exemplo explorado, para efeito de numeradores maiores que os denominadores, a ideia é escrever o numerador como um múltiplo do denominador somado com um resto, podendo o resto ser ou não igual zero – veja que no nosso exemplo a divisão euclidiana revelou que $13 = 5 \cdot 2 + 3$. Posteriormente, usamos a definição de adição de números racionais para separarmos uma fração em duas: a que possui o múltiplo da unidade e a que possui o resto nos numeradores.

Na terceira igualdade apenas houve um simplificação, já que o 5 estava multiplicando e dividindo. Por fim, a quarta igualdade exibe a construção que deve ser efetivada com régua e compasso: adicionar duas vezes o tamanho unitário com o tripo do segmento que mede um quinto da unidade.

Na prática, nos apoiamos na definição de adição e multiplicação envolvendo racionais para recairmos em uma construção que envolva apenas múltiplos da unidade adicionados com múltiplos de uma fração de tamanho $\frac{1}{n}$.

Nesse momento o leitor pode se perguntar: a construção de números racionais até então apresentada se refere a números racionais positivos. E os racionais negativos? Ora, para construirmos um número racional positivo, se faz necessário estabelecer um tamanho de medida unitária. Lembre que um número negativo $-x$ é explicitado na reta numérica como simétrico, em relação à origem, ao número positivo x — isso significa que eles distam a mesma medida em relação à origem, mas diferem quanto a orientação, pois um está à esquerda e o outro está à direita do zero. Dito em outras palavras, os inteiros trazem consigo a ideia de posição simétrica em relação à origem e, tradicionalmente, os positivos ficam à direita do ponto de origem, que representa o número zero.

Tendo em vista o exposto, basta fixar à direita do zero o ponto que representa o número 1 e à esquerda do zero o ponto que representa número –1. Com isso, podemos fazer a construção do número racional de modo independente de sua orientação e, ao final, (dependendo se o racional em questão é positivo ou negativo) colocamos de um lado ou de outro do zero, na mesma reta.

Perceba que o procedimento apresentado acaba possibilitando a construção (com régua e compasso) de todos os números racionais, uma vez que todo número racional pode ser escrito como uma razão entre números inteiros na forma $\frac{a}{b}$.

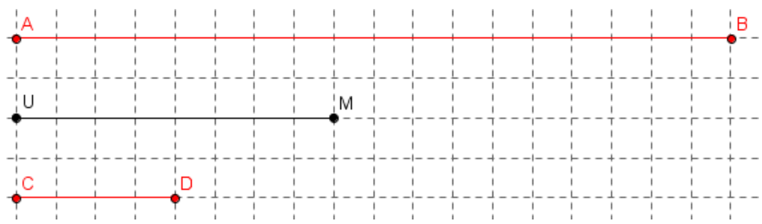
3.1.2 Segmentos (in)comensuráveis

Antes de adentrarmos em segmentos incomensuráveis especificamente, é importante observarmos um pequeno detalhe.

Para entender a construção do segmento $\frac{1}{n}$, é importante lembrar que primeiro foi fixado o segmento de tamanho unitário (UM) e, disso, seguiu a argumentação da seção anterior. Assim sendo, vamos formalizar o que se entende por medida de segmento, para que, na sequência, seja possível tratar a respeito dos segmentos comensuráveis.

Vamos explorar uma situação que envolve a ideia de medir segmentos com base na unidade UM. Considere $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos distintos que serão comparados com repeito a um segmento unitário $\overline{UM}$, conforme exibido na figura 6:

Figura 6 – Exemplo de segmentos comensuráveis



Fonte – O autor

Conforme a ilustração anterior, vemos que AB é maior que UM e CD é menor que UM (o caso em que AB e CD são os dois maiores que a unidade ou o caso em que AB e CD são menores que a unidade, gerará uma observação análoga). Portanto, no exemplo apresentado é razoável dizer que:

$$AB = 2 \cdot UM + 2 \cdot \frac{1}{8} UM,$$

e

$$CD = \frac{1}{2} UM.$$

Assim sendo, podemos dizer que AB e CD podem ser escritos em termos da mesma unidade UM. Observe que a unidade ser maior ou menor que o segmento não impede a comparação entre os segmentos — quando a unidade é menor que o segmento a ser comparado, acabamos tomando submúltiplos do segmento unitário e quando a unidade é maior que o segmento a ser comparado, acabamos tomando múltiplos do segmento unitário, como ilustrado no exemplo trabalhado.

Portanto, podemos dizer que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos *comensuráveis*. Com isso, a definição de segmentos comensuráveis parecerá razoável:

Def: Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos quaisquer. Se existir um segmento cujo múltiplo ou submúltiplo mede simultaneamente os dois primeiros, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Um observação que decorre desta definição é que uma vez estabelecida a comensurabilidade entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, podemos ajustar o comprimento unitário que estabelece essa propriedade entre tais segmentos, ou seja, podemos construir um novo segmento unitário (múltiplo ou submúltiplo do comprimento unitário já conhecido), de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ permanecem comensuráveis e podem ser escritos como múltiplos inteiros da novo comprimento unitário.

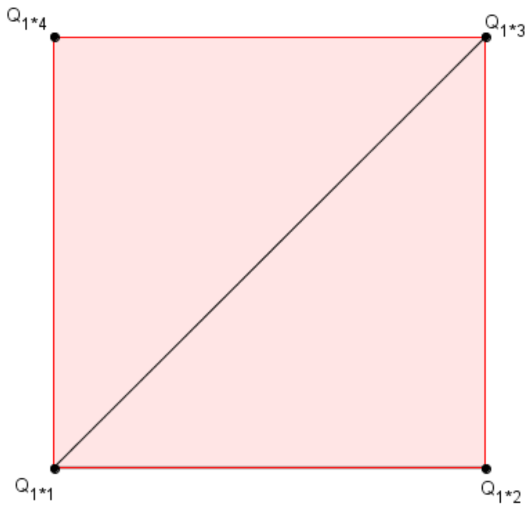
Assim sendo, bastariam os racionais para medir qualquer segmento na reta numérica? Como o próprio prefixo *in* sugere, existem segmentos que são incomensuráveis, isto é, que não satisfazem a definição apresentada no parágrafo anterior.

A título de exemplo, veremos que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis, de acordo com o trabalho *A descoberta dos incomensuráveis* (AZEVEDO; PATERLINI, 2004). Para justificarmos essa afirmação, vamos provar que sua negação é falsa. Isto é, suponha, por absurdo, que a diagonal e o lado de um quadrado sejam comensuráveis. Considere $Q_{1*1}, Q_{1*2}, Q_{1*3}$ e Q_{1*4} vértices de um quadrado (essa forma de denominar os pontos será útil posteriormente, por exemplo, Q_{1*3} significa que é o ponto Q do quadrado 1 na posição 3) e uma diagonal desse objeto geométrico, como ilustrado na imagem 7.

Não podemos esquecer a diagonal d_1 e o lado l_1 do quadrado são comensuráveis, temos que existe um segmento de medida unitária UM, tal que:

$$d_1 = k_1 \cdot UM, \text{ para algum } k_1 \in \mathbb{N}^* \text{ e}$$
$$l_1 = m_1 \cdot UM, \text{ para algum } m_1 \in \mathbb{N}^*.$$

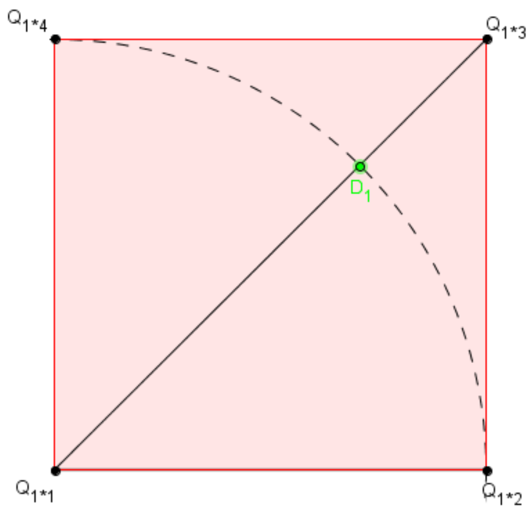
Figura 7 – Construção do primeiro quadrado



Fonte – O autor

Por outro lado, como os lados do quadrado possuem a mesma medida, sem perder generalidade vamos demarcar, por meio do compasso centrado em Q_{1*1} o ponto D_1, de forma que D_1Q_{1*1} tenha a mesma medida que o lado do quadrado, como segue na figura 8:

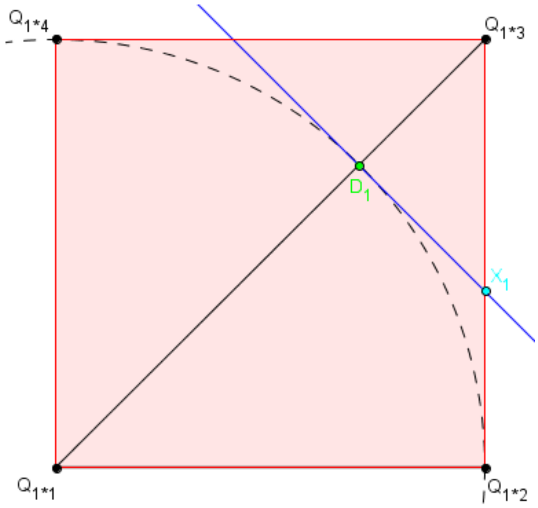
Figura 8 – Construção inicial no primeiro quadrado



Fonte – O autor

Agora, veja que podemos traçar uma reta perpendicular à diagonal mostrada, de modo que essa reta perpendicular incide em D_1. Chamaremos de X_1 o ponto de interseção entre a perpendicular traçada e o lado $Q_{1*2}Q_{1*3}$, como segue na figura 9.

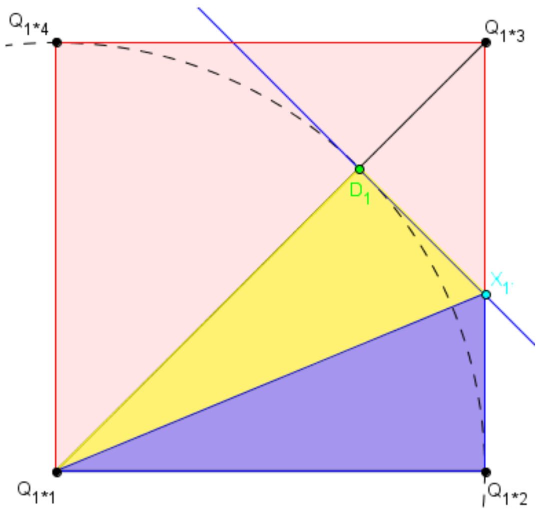
Figura 9 – Construção intermediária no primeiro quadrado



Fonte – O autor

Observe que o triângulo $\triangle Q_{1*3}D_1X_1$ é retângulo, de forma que: $\angle Q_{1*3}D_1X_1 = 90^\circ$ e $\angle D_1Q_{1*3}X_1 = 45^\circ$. Portanto, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, podemos nos assegurar que o ângulo $\angle Q_{1*3}X_1D_1 = 45^\circ$. Agora, trace o segmento Q_1X_{1*1}. Nosso objetivo é verificar que os triângulos coloridos ($\triangle X_1D_1Q_{1*1}$ e $\triangle X_1Q_{1*2}Q_{1*1}$) são congruentes, como ilustrado na figura 10.

Figura 10 – Construção final no primeiro quadrado



Fonte – O autor

De fato, tais triângulos são congruentes pelo caso hipotenusa cateto, já que:

- $Q_{1*1}X_1$ é congruente a si mesmo — hipotenusa comum aos dois triângulos.

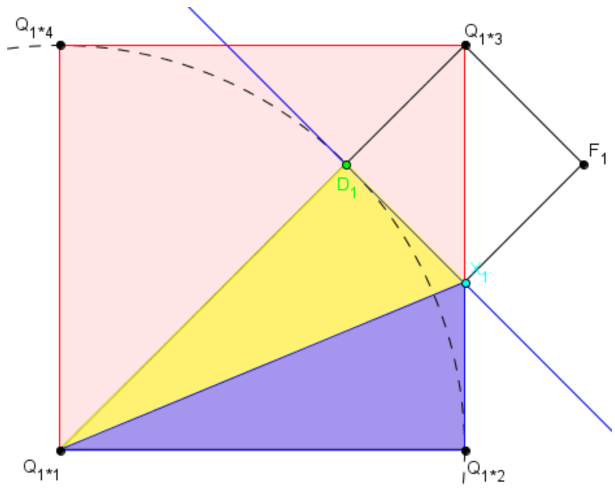
- $Q_{1*1}D_1$ é congruente a $Q_{1*1}Q_{1*2}$ — catetos congruentes por construção.

Observe como D_1Q_{1*3} pode ser escrito:

$$\begin{aligned} D_1Q_{1*3} &= Q_{1*1}Q_{1*3} - Q_{1*1}D_1 \\ &= d_1 - l_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Logo, podemos construir um novo quadrado, de forma que $Q_{1*3}X_1$ é sua diagonal, como será ilustrado a seguir na figura 11:

Figura 11 – Gerando a criação de um novo quadrado



Fonte – O autor

Observe, também, nesse novo quadrado que l_2 mede D_1Q_{1*3}. Substituindo em (1), temos:

$$l_2 = d_1 - l_1. \tag{2}$$

Por outro lado, observe que a diagonal d_2 relaciona-se com o lado do primeiro quadrado, da seguinte maneira:

$$d_2 = l_1 - l_2. \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3) temos:

$$\begin{aligned} d_2 &= l_1 - l_2 \\ &= l_1 - (d_1 - l_1) \\ &= 2l_1 - d_1. \end{aligned} \tag{4}$$

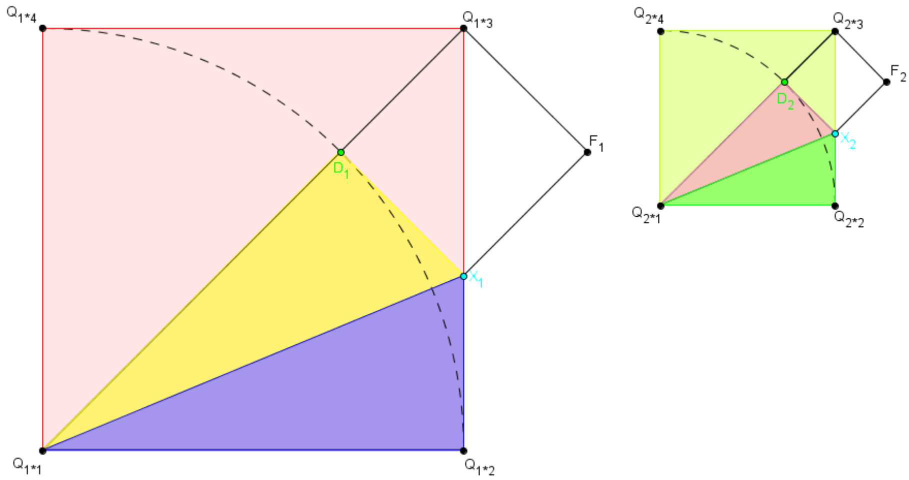
Agora, lembre que a hipotenusa é sempre maior que os lados de um triângulo retângulo. Daí, temos que $d_2 > l_2$. Adicionando l_2 em ambos os lados da desigualdade, segue que:

$$l_2 + d_2 > l_2 + l_2.$$

Note que o lado esquerdo da desigualdade é igual a l_1 e o lado direito é igual a $2l_2$. Portanto, $l_1 > 2l_2$ e, isolando l_2, temos a desigualdade: $l_2 < \dfrac{l_1}{2}(\heartsuit)$.

Agora, vamos realizar uma nova construção. Considere o quadrado de vértices Q_{2*1},Q_{2*2}, Q_{2*3} e Q_{2*4}, de forma que o mesmo l_2 comentado anteriormente seja a medida desse novo lado, como ilustrado na figura 12.

Figura 12 – Construção final do primeiro e segundo quadrado



Fonte – O autor

Observe que o quadrado novo (localizado à direita) respeita o que propomos no parágrafo anterior. Por uma questão de estilo, exibimos o quadrado anterior ao lado.

Não causaria espanto ao leitor (dado que a construção foi análoga à anterior) que a seguinte igualdade seja verdadeira:

$$\begin{aligned} l_3 = D_2Q_{2*3} &= Q_{2*1}Q_{2*3} - Q_{2*3}D_2 \\ &= d_2 - l_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Por outro lado, sabemos que:

$$d_3 = l_2 - l_3. \tag{6}$$

Realizando a substituição de (5) em (6), vamos concluir algo já esperado:

$$d_3 = 2l_2 - d_2. \tag{7}$$

Daí, temos que $l_3 + d_3 > l_3 + l_3 \iff l_2 > 2l_3 \iff l_3 < \dfrac{l_2}{2}(\heartsuit)$. Veja que temos duas desigualdades do tipo $(\heartsuit)$. Ademais, observe que cada quadrado novo vai ficando cada vez menor, entretanto, sempre é possível obter uma desigualdade do estilo $(\heartsuit)$.

Perceba que há um padrão nas desigualdades do estilo ($\heartsuit$), a saber:

$$l_2 < \frac{l_1}{2}$$
$$l_3 < \frac{l_2}{2}$$
$$\vdots$$
$$l_n < \frac{l_{n-1}}{2}$$
$$l_{n+1} < \frac{l_n}{2}$$

E veja que sempre podemos construir, de modo recursivo, um n-ésimo quadrado e verificar essa desigualdade listada anteriormente.

De acordo com Elivan de Azevedo e Roberto Ribeiro Paterlini (2014), a contradição que encontraremos é que $l_n < UM$ e, simultaneamente, $l_n > UM$.

Para justificar que $l_n < UM$, os autores recorrem ao Método da Exaustão [2]. Por outro lado, a construção de l_{n+1} foi feita respeitando a seguinte igualdade: $l_{n+1} = d_n - l_n$ (em termos de medidas de lados, o lado do novo quadrado é dado pela diferença entre a diagonal do quadrado anterior e o lado do quadrado anterior).

Como a diagonal e o lado são comensuráveis por hipótese do absurdo, ambas carregam a unidade UM; ademais, a medida da diagonal d_n é sempre maior do que a medida do lado l_n, o que nos permite dizer que $l_n > UM$ (AZEVEDO; PATERLINI, 2004).

Com base na discussão desenvolvida, temos uma justificativa sobre a impossibilidade do lado de um quadrado e da medida de sua diagonal serem comensuráveis, não importando o valor de tais medidas.

Vale ressaltar que nesta discussão podemos, de fato, dizer que existem grandezas incomensuráveis, as quais rompem com a circularidade entre definições de números irracionais e números reais, as quais serão debatidas na figura 22, mais à frente.

De mais a mais, é importante que o licenciando em Matemática perpasse por uma problematização como a que foi feita, com o intuito de, ao menos, conhecer outra possibilidade além da que já está posta nos livros didáticos.

A título de exemplo, a própria demonstração da irracionalidade do $\sqrt{2}$ já assume os irracionais como números não racionais. Por outro lado, a explicação apresentada

[2] O Método da Exaustão, também conhecido como Princípio de Eudoxo, é dado da seguinte maneira: Sejam $P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots$ números inteiros positivos tais que $P_0 < \frac{P_1}{2}$, $P_1 < \frac{P_2}{2}$, $P_2 < \frac{P_3}{2}$, $P_3 < \frac{P_4}{2}$ e assim por diante. Considere $\epsilon > 0$ um número qualquer. Então, existe um número natural n tal que $P_n < \epsilon$.

Para usarmos esse resultado, basta considerarmos $\epsilon = UM$ e a sequência dos P_n como a sequência construída com a medida dos lados l_n.

estabelece uma possibilidade, até então não conhecida para estudantes do Ensino Básico, de haver segmentos que não podem ser comensuráveis. Para a matemática escolar uma vez conhecido o conjunto $\mathbb{Q}$, é preciso suscitar um motivo para ampliar o conceito de número, valendo ressaltar que um dos principais motivos é a insuficiência dos racionais para realizar a medida de um segmento qualquer a partir de uma unidade de medida preestabelecida. Em termos técnicos, essa ideia recebe o nome de incomensurabilidade e o exemplo mais comumente utilizado é o da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao lado (BROETTO, 2016).

Ademais, a demonstração comum nos livros didáticos do $\sqrt{2}$ envolve argumentos majoritariamente aritméticos atrelados ao fato de o quadrado ter lado de medida 1. Em contrapartida, a argumentação apresentada buscou traduzir, em essência, propriedades geométricas e em uma linguagem algébrica, proporcionando uma generalização do resultado para um quadrado (e sua respectiva diagonal) que tenha medida qualquer.

Outra potencialidade que acaba sendo explorada é a própria discussão envolvendo segmentos comensuráveis e incomensuráveis, diálogo esse que pode fornecer um caráter menos artificial ao números irracionais.

Contudo, há de se considerar que algumas noções e justificativas trazidas anteriormente são próprias do contexto acadêmico de um curso de Matemática, como o Método da Exaustão e a representação de números por meio de letras com subíndices, exibição essa que é mais comum no estudo de sequências. Nesse sentido, o formalismo exagerado pode acabar implicando em problemas para um entendimento de estudantes da Educação Básica.

Assim, num contexto de Educação Básica é interessante que o professor invista em experimentações com os estudantes, assim como perpasse por diferentes tipos de representação de um mesmo objeto de conhecimento, quando possível.

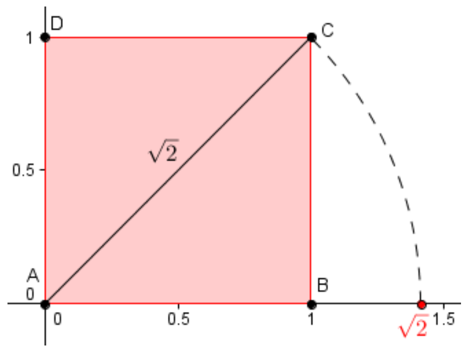
3.2 NÚMEROS IRRACIONAIS

No âmbito da Educação Básica, os primeiros exemplos de irracionais acabam sendo as raízes. Geralmente $\sqrt{2}$ e a possível generalização para $\sqrt{p}$, ode p é um número primo, são fortes candidatos. As demonstrações formais que eles são, de fato, números irracionais estarão alocadas no Apêndice A.

Uma observação a ser feita sobre irracionais do tipo $\sqrt{p}$ é a possibilidade de construí-los com régua e compasso. Nessa direção, construções com régua e compasso podem romper com a ideia de um número irracional ser sempre impreciso ou sem padrão. Para evidenciar tais ideias, vamos construir com régua e compasso a medida $\sqrt{5}$.

Temos diversas maneiras de construir com régua e compasso esse número. Vamos começar com a mais trabalhosa. Sabemos que com um quadrado cujo lado mede 1, é possível construir $\sqrt{2}$. Vamos usar o compasso para ilustrar a posição do ponto $\sqrt{2}$ no plano cartesiano, como segue na figura 13.

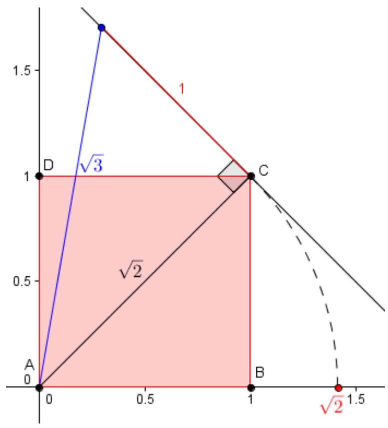
Figura 13 – Construção de $\sqrt{5}$ - localizando e marcando previamente $\sqrt{2}$



Fonte – O autor

Agora, vamos construir um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja em *D*. Ademais, queremos construir $\sqrt{3}$ e, portanto, temos que transferir a medida de tamanho 1 para para a reta perpendicular e fechar o triângulo de medida $\sqrt{3}$, como ilustrado na figura 14.

Figura 14 – Construção de $\sqrt{5}$ - construindo $\sqrt{3}$



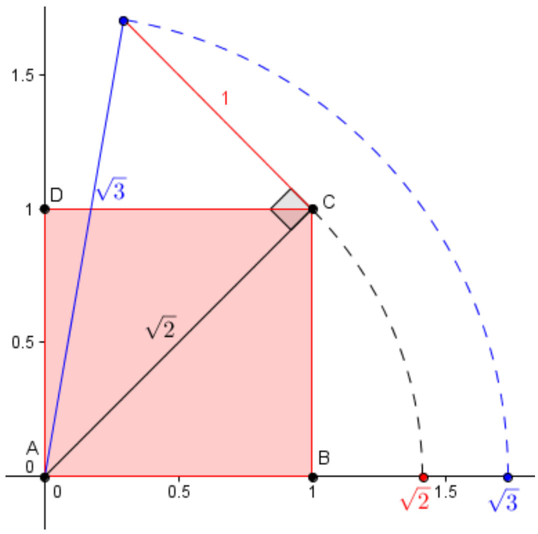
Fonte – O autor

Veja que isso faz sentido porque o Teorema de Pitágoras está sendo verificado. Para limpar a figura, esconderemos a reta perpendicular e marcaremos $\sqrt{3}$ na reta numérica evidenciada no eixo *x*, como mostra a figura 15.

Agora, veja que a ideia será análoga, isto é, traçaremos a perpendicular a $\sqrt{3}$ e transferiremos o tamanho 1 com o intuito de construir o triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{4}$. O resultado da construção, segue na figura 16.

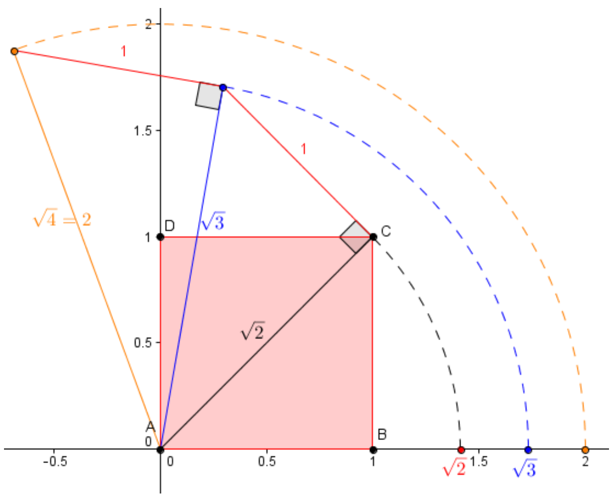
Por fim, realizando mais uma vez o procedimento, teremos um triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{4}$, daí, teremos o $\sqrt{5}$, como segue na figura 17.

Figura 15 – Construção de $\sqrt{5}$ - localizando previamente $\sqrt{3}$



Fonte – O autor

Figura 16 – Construção de $\sqrt{5}$ - localizando $\sqrt{4}$

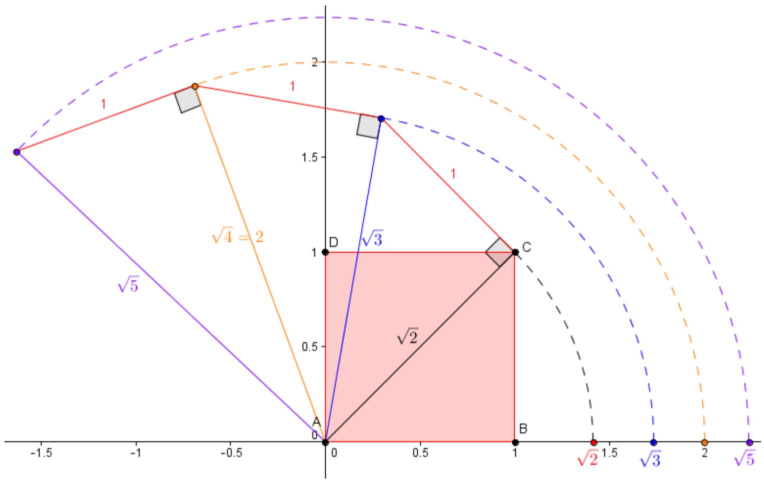


Fonte – O autor

Perceba que percorremos um longo caminho, entretanto, usando o Teorema de Pitágoras de modo conveniente podemos evitar o excesso de construções (como foi exibido), porque $\sqrt{5} = 2^2 + 1^2$. Logo, bastaria construir um triângulo retângulo cujo um dos catetos mede 1 e o outro mede 2. Isso significa que toda a construção feita, poderia ter sido bem mais econômica, entretanto essa escolha de ir pelo traçado mais difícil implica que é possível construir com régua e compasso qualquer raiz quadrada.

Observe que sempre é possível construir $\sqrt{n}$ não importando quão grande seja o n em questão. Veja que o procedimento de construção dessa espiral conhecida como

Figura 17 – Construção e localização de $\sqrt{5}$



Fonte – O autor

Espiral Pitagórica ou *Espiral de Teodoro de Cirene* nos fornece números racionais e irracionais.

Assim sendo, uma boa estratégia é ver a fatoração do número natural que está no radicando. A ideia é agrupar todos os números primos como potências e caso exista ao menos um número primo cuja potência não seja múltipla do índice da raiz, então o número será irracional.

É importante citar que não existem apenas raízes no conjunto dos números irracionais. Por exemplo, existem os irracionais clássicos que são apresentados na escola, como π (pi), e (número de Euler) e $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro).

Para falarmos da definição de números irracionais mais tranquilamente, precisamos discutir o que são números reais.

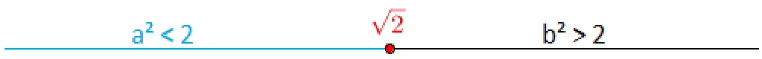
3.3 NÚMEROS REAIS

Como discutido anteriormente, podemos listar os números racionais na reta geométrica. Para tanto, basta escolher uma origem e um comprimento unitário, o que nos permitirá sempre localizar qualquer número racional na reta.

Def: Dado um par (A, B) sendo A e B subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tais que $A \cap B = \{\ \}$ e todo elemento de A é menor do que todo elemento de B, chamaremos (A, B) de corte na reta.

Vejamos um exemplo. Seja $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$, então $(A, B) = \sqrt{2}$. Veja que o ponto que representa o número $\sqrt{2}$ divide a reta em dois trechos, à esquerda do ponto e à direita do ponto. Melhor dizendo, no lado esquerdo, temos os números reais a tais que $a^2 < 2$, assim como do lado direito temos os números reais b tais que $b^2 > 2$, como ilustrado na figura 18.

Figura 18 – $\sqrt{2}$ e os trechos laterais A e B



Fonte – O autor

Os trechos, citados anteriormente, são chamados de *classes*. Note que as classes não se misturam, ou seja, elementos da classe A, compostos por elementos a não pertencem à classe B, que tem elementos do tipo b e vice-versa. Além disso, não há ponto de B entre dois pontos de A e vice-versa.

Se considerarmos a reta como um objeto contínuo, então sempre será possível selecionar um ponto e observar as classes laterais à esquerda e à direita do ponto em questão. Isso nos indica como definir o conjunto $\mathbb{R}$ de manira a obtermos uma identificação entre seus elementos e pontos em uma reta geométrica.

Sendo assim, temos os ingredientes para apresentarmos uma definição razoável para números reais.

Def: Definimos $\mathbb{R}$ como o conjunto dos cortes. Um número real $x = (A, B)$ fica representado na reta geométrica pelo ponto onde os conjuntos A e B se encontram[3].

Considerando uma reta, uma origem e um segmento de tamanho unitário, podemos observar que se o ponto que separa as classes represente um número racional, então este número real será racional. Por outro lado, caso o ponto que separa as classes não seja um número racional, diremos que esse número será irracional.

Nesse sentido, uma das definições mais conhecidas de números irracionais é: "um número real é dito irracional se ele não puder ser escrito como razão entre dois inteiros".

Além disso, note que dados dois números reais distintos quaisquer, sempre será possível estabelecer uma relação de ordem, ou seja, dizer qual número é menor e qual número é maior.

Outra decorrência da definição apresentada é conceber o conjunto dos números reais como o conjunto que contém todos os números decimais. Observe que não construiremos efetivamente o conjunto dos números reais, uma vez que destoaria muito da realidade da Matemática vivenciada nas escolas. Por outro lado, é interessante saber o que acontece quando operamos números racionais com irracionais.

[3] Equivalentemente, x seria o supremo do conjunto A.

3.3.1 Operações envolvendo números reais

Sejam $x = (A, B)$ e $y = (C, D)$ números quaisquer que pertencem ao conjunto dos números reais.

Def: formalmente, a soma de dois números reais $x + y = (A + C, B + D)$, de maneira que: $A + C = \{a + c \in \mathbb{Q} \mid a \in A, c \in C\}$ e $B + D = \{b + d \in \mathbb{Q} \mid b \in B, d \in D\}$.

O produto envolvendo números reais segue a ideia de trabalhar com as classes, mas um pouco mais delicadamente[4].

Não é de se espantar que as operações envolvendo os números reais não sejam aprofundadas nos livros didáticos, haja vista o graus de abstração exigido para empregar uma discussão teórica tão densa.

Por outro lado, podemos partir para uma abordagem mais próxima do ambiente da escola de Educação Básica. Por exemplo, a Soma de dois números racionais é também um número racional, pois a definição de como acontece a soma nos assegura isso: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

O produto de dois números racionais é também um número racional, também pela definição, já que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Veja que a soma de dois irracionais nem sempre gera um número irracional, por exemplo: $e + (-e) = 0$, que é um número racional.

Observe, também, que o produto de dois irracionais nem sempre é irracional, por exemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left[\sqrt{2}\right]^2 = 2$, que é um número racional.

Ao adicionarmos um número racional não nulo $\frac{a}{b}$ com um número irracional x, obteremos um número irracional.

Dem: Vamos provar que a negação da afirmação feita é falsa. Suponha, por absurdo, que $\frac{a}{b} + x$ resulte num número racional, na forma $\frac{p}{q}$.

Assim sendo, $\frac{a}{b} + x = \frac{p}{q}$. Como a e b são diferentes de zero, podemos isolar o x da seguinte maneira:

$$x = \frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{pb - aq}{qb}$$

Veja que $\frac{pb - aq}{qb}$ é um número racional e, dada a construção feita, x é igual a esse número racional, o que gera uma contradição.

Veja que essa contradição veio de fazermos a suposição de que um número racional somado com um irracional resultaria num número racional.

De modo análogo, vamos provar que um número racional não nulo $\frac{a}{b}$ quando multiplicado por um número irracional x gerará um número irracional.

---

4 De modo geral, é preciso primeiro definir $(A, B)(C, D)$ quando (A, B) e (C, D) são positivos, como sendo o corte determinado por $0 \cup \{a \cdot c \mid a \in A \text{ e } a > 0, c \in C \text{ e } c > 0\}$ e seu complementar. Depois, estende-se para todos os cortes (não necessariamente positivos) $x = (A, B)$, $y = (C, D)$, definindo $xy = -(-x)y$ quando $x < 0$ e $y > 0$; $xy = -x(-y)$ quando $x > 0$ e $y < 0$; $xy = (-x)(-y)$ quando $x < 0$ e $y < 0$; e $x \cdot 0 = y \cdot 0 = 0$ sempre.

Dem: Suponha, por absurdo, que $\frac{a}{b} \cdot x$ gere um número racional, do tipo $\frac{c}{d}$.

Sendo assim, temos $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d}$. Como $\frac{a}{b}$ é diferente de zero, podemos isolar x da seguinte maneira:

$$x = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$$

Perceba que $\frac{bc}{ad}$ é um número racional e x é igual a esse número racional, o que é um absurdo, pois tínhamos por hipótese que x era irracional.

3.4 DENSIDADE

Um conceito muito importante para pensar em números reais é a densidade. Veremos a definição proposta por Bento de Jesus Caraça.

Def: Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. X é dito denso se entre dois dos seus elementos quaisquer existir uma infinidade de elementos de X.

Observe, com base nessa definição, que podemos aceitar mais tranquilamente que o conjunto dos números racionais é denso, pois dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ quaisquer dois números racionais podemos usar a média e encontrar infinitos racionais entre eles.

Por outro lado, optamos por justificar que dados dois números reais quaisquer a e b, existirá racionais e irracionais entre a e b.

Nesse momento o leitor pode estar um pouco intrigado: gostaríamos de ver que entre dois números reais quaisquer existiria racionais e irracionais. Entretanto, apenas asseguraremos que entre dois números reais existe um número racional e irracional.

Veja que não haverá nada de especial no intervalo $]a, b[$. Logo, poderemos usar a mesma justificativa usando o racional e o irracional encontrado como um dos extremos do intervalo. Assim, vamos encontrar um segundo racional e um segundo irracional. E mais, poderemos usar as mesmas justificativas quantas vezes quisermos e encontraremos infinitos racionais e irracionais, o que justificará a densidade do conjunto dos números números reais.

Assim, vamos justificar, primeiro, que existe um número racional entre a e b.

Dem: Nosso objetivo é exibir um número $m \in \mathbb{Q}$ de forma que $a < m < b$.

Para tanto, veja que o intervalo aberto $]a, b[$, subconjunto real. Nesse caso, temos três possibilidades:

- a é negativo e b é positivo;
- a é positivo ou zero e b é positivo;
- a é negativo e b é negativo ou zero.

O primeiro caso é o caso fácil, pois entre um número positivo e um número negativo temos o zero, que é racional.

Como $b - a > 0$, temos pela propriedade arquimediana[5] que existe número natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$ ($\diamondsuit$).

Observe que números da forma $\frac{m}{p}$ (onde m é um número inteiro) acabam decompondo a reta numérica em intervalos de comprimento que possuem a medida $\frac{1}{p}$. Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo $]a, b[$, algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair dentro do referido intervalo.

Seja $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \cdot \frac{1}{p} \geq b\}$. Veja que esse conjunto não vazio é limitado na reta real pelo número real $b \cdot p$.

Sendo assim, considere m_0 como o menor inteiro positivo que pertença ao conjunto A. Daí temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$m_0 \geq b \cdot p \Longleftrightarrow m_0 \cdot \frac{1}{p} \geq b \Longleftrightarrow b \leq m_0 \cdot \frac{1}{p} \tag{8}$$

Sabemos por números inteiros que $m_0 - 1 < m_0$. Isso nos permite dizer que $\frac{m_0 - 1}{p}$ não satisfaz a desigualdade presente no conjunto A, o que implica na seguinte desigualdade: $\frac{m_0 - 1}{p} < b$.

Afirmamos que $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$. Veja que se assim não fosse, a única opção que nos restaria para relacionar as desigualdades seria a seguinte:

$$\frac{m_0 - 1}{p} \leq a < b < \frac{m_0}{p} \tag{9}$$

Da desigualdade acima, podemos extrair a seguinte desigualdade:

$$a \geq \frac{m_0 - 1}{p} \Longleftrightarrow -a \leq -\left[\frac{m_0 - 1}{p}\right] \tag{10}$$

Daí, veja que podemos construir por (8) e (10) a seguinte desigualdade:

$$b - a \leq \frac{m_0}{p} - \left[\frac{m_0 - 1}{p}\right] = \frac{1}{p} \tag{11}$$

Observe que chegamos a uma contradição com a desigualdade ($\diamondsuit$). Daí, segue que a afirmação desejada é verdadeira: $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$.

O terceiro caso, em que a e b são negativos, é uma espécie de reciclagem do segundo caso, já que $a < b < 0 \Longleftrightarrow 0 < -b < -a$.

Veja que $-a$ e $-b$ são números reais positivos, o qual já justificamos anteriormente. Vimos que existe um número q entre $-a$ e $-b$, logo, basta tomar o $-q$, o qual seguramente estará entre a e b.

[5] Propriedade arquimediana: para cada número real positivo a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Dem: Vamos justificar, agora, que existe um número irracional entre a e b. A ideia é construir um argumento similar ao que fizemos anteriormente.

Podemos quebrar em três casos, como foi feito anteriormente, mas basta provarmos o caso em que os dois são positivos para termos o caso em que os dois são negativos.

Considerando $a < b$, assim como a e b positivos, temos que $b - a > 0$.

Ademais, sabemos que $\sqrt{2} > 0$. Logo, nessa ocasião, podemos usar o Axioma de Eudoxo[6] e, com isso, existe um número natural p tal que $p \cdot (b - a) > \sqrt{2}$

Veja que a última desigualdade pode ser reajustada da seguinte maneira:

$$p \cdot (b-a) > \sqrt{2} \Longleftrightarrow p > \frac{\sqrt{2}}{b-a} \Longleftrightarrow \frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$$

Note que podemos multiplicar os dois lados da última desigualdade por $\sqrt{2}$, daí, segue:

$$\frac{1}{p} \cdot \sqrt{2} < \frac{b-a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = b - a$$

Observe que construímos a desigualdade $\dfrac{\sqrt{2}}{p} < b - a$ ($\clubsuit$). Assim sendo, temos que deve existir algum número irracional no formato $\dfrac{m\sqrt{2}}{p}$, onde m é um número inteiro não nulo, que pertencerá ao intervalo $]a, b[$, já que particionamos a reta em em intervalos de comprimento $\dfrac{\sqrt{2}}{p}$.

Vamos considerar o conjunto $G = \left\{ w \in \mathbb{N} \ \middle| \ w\dfrac{\sqrt{2}}{p} \geq b \right\}$.

Observe que o referido conjunto admite menor elemento, o qual chamaremos de $w_0\dfrac{\sqrt{2}}{p}$, para algum inteiro positivo w_0, de modo que:

$$w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{p} \geq \Longleftrightarrow b \leq \frac{w_0\sqrt{2}}{p} \tag{12}$$

Afirmamos que $a < \dfrac{(w_0 - 1) \cdot \sqrt{2}}{p} < b$. Explicando o motivo dessa afirmação ser verdadeira, concluímos a demonstração, já que o número que estará entre a e b certamente é irracional. Veja que se a afirmação for falsa, a única opção que nos restaria para relacionar as desigualdades seria:

$$(w_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p} \leq a < b \leq w_0\frac{\sqrt{2}}{p} \tag{13}$$

[6] Axioma de Eudoxo: Sejam α e β dois números positivos quaisquer. Então existe um número inteiro positivo n tal que $n \cdot \beta > \alpha$

Da desigualdade acima, podemos extrair a seguinte desigualdade:

$$a \geq (w_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p} \Longleftrightarrow -a \leq -\left[(w_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p}\right] \tag{14}$$

Relacionando (12) e (14), temos:

$$b - a \leq \frac{(w_0 - 1)\sqrt{2}}{p} - \left[\frac{(w_0 - 1)\sqrt{2}}{p}\right] = \frac{\sqrt{2}}{p} \tag{15}$$

Daí, podemos concluir que $\frac{\sqrt{2}}{p} \geq b - a$, o que contradiz (♣). Portanto, temos que a afirmação é verdadeira.

Veja que o caso em que a e b são negativos de modo que $a < b$, temos a seguinte desigualdade: $a < b < 0 \Longleftrightarrow 0 < -b < -a$.

Como $-b$ e $-a$ são positivos, temos o caso já justificado. Então, existe um número irracional $-s$ entre $-b$ e $-a$. Logo, basta tomar o irracional s que certamente estará entre a e b.

Agora, o caso em que a é negativo e b é positivo, acaba ficando mais simples, pois basta encontrarmos um número real positivo entre 0 e b, por exemplo, $\frac{b}{2}$. Perceba que entre $\frac{b}{2}$ e b existe um número irracional, logo existe um número irracional t.

Note que $a < 0 < \frac{b}{2} < t < b$, ou seja, encontramos o irracional desejado.

3.5 CONTINUIDADE

Segundo Caraça (1951) a imagem que devemos ter em mente para pensar a continuidade, é imaginar a linha reta. Posto isso, uma maneira de perceber a continuidade de um conjunto é verificar se ele tem a estrutura da reta.

Como foi abordado anteriormente, os números irracionais preenchem os "buracos" existentes entre os números racionais na reta e, por isso, a reta real não tem buracos (pontos de descontinuidade). Formalmente essa ideia é relacionada com a noção de corte, pois, como vimos antes, cada corte fica identificado como um ponto de uma reta que é um objeto contínuo.

Vale ressaltar que a continuidade foi postulada por Julius Wihelm Richard Dedekind (1831 - 1916) e assim estamos fazendo, ou seja, estamos considerando que a reta não possua lacunas e que os números reais podem ser identificados como pontos dessa reta (CARAÇA, 1951). No presente trabalho, na página 93, apresentamos uma fala atribuída a Dedekind sobre a relação da continuidade com a reta geométrica.

Além do que foi comentado, sabemos que sempre um ponto P produz uma separação da reta em duas classes (à direita de P e à esquerda de P). Agora, será que um corte na reta também produz um corte no conjunto dos números reais?

Perceba que dada a forma como construímos a ideia sobre o conjunto dos números reais (listados numa reta contínua), então é válido pensar que um corte na reta também produz uma partição no conjunto dos números reais.

A título de exemplo, suponha que o ponto P represente o número real x. Veja que a ordem entre os elementos da classe à esquerda de P podem ser entendidos como números reais menores que x, assim como os pontos da classe à direita de P representam números reais maiores que x.

Considerando a discussão feita sob o foco de uma perspectiva formal, se faz necessário conhecer maneiras de ressignificar esses conceitos para o ambiente escolar, haja vista que não é possível estabelecer uma comunicação com esse público apenas usando linguagem rigorosa e formal da Matemática Acadêmica. Sendo assim, o próximo capítulo dialogará a respeito de pressupostos epistemológicos que envolvem estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior a fim de propor o que seria uma tradução à Matemática Escolar.

4 PRESSUPOSTOS EPISTEMOLÓGICOS ENVOLVIDOS

Buscaremos explorar, nesta seção, questões que envolvem a compreensão dos números reais, para além das definições apresentadas. Assim sendo, discutiremos diversas problemáticas que envolvem números racionais, números irracionais, bem como os conceitos de densidade e de continuidade.

Para introduzir a discussão que será elucidada posteriormente, vejamos o seguinte exemplo. Em uma pesquisa realizada no final da década de 1990 na Universidade Federal de Minas Gerais com estudantes da 5ª fase de Licenciatura em Matemática, os autores Soares, Ferreira e Moreira (1999) propuseram que os estudantes assinalassem a alternativa correta:

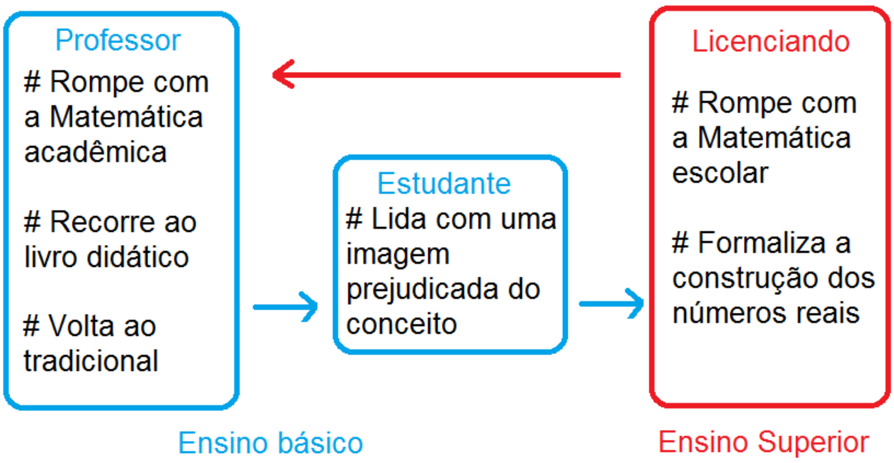
a) 0,99999... < 1 b) 0,99999... tende a 1 c) 0,99999... = 1

Um dos estudantes respondeu que sabia que a alternativa correta estava no item c), uma vez que havia lembrado de algum professor justificando em aula. Porém, mesmo sabendo disso, as demais alternativas lhe pareciam satisfatórias e, dentro do que é trabalhado na Educação Básica, tais alternativas pareciam bastante plausíveis (SOARES *et al.*, 1999).

Nesse sentido, o que fazia o aluno não estar seguro totalmente de que as outras questões eram incorretas? Com que grau de problematização o estudante lidou com números racionais na graduação? Os procedimentos algébricos foram mais contemplados do que a estruturação do conceito? O que apontam os estudos na área sobre esse tipo de equívoco?

Uma possibilidade é vislumbrar um sistema que se retroalimenta, já que os estudantes da Educação Básica que, em tese, não aprenderam adequadamente os conceitos chegam à universidade para cursarem Licenciatura em Matemática e, nesse espaço, acabam lançando mão da Matemática até então aprendida e acabam lidando fortemente com uma Matemática formal. Contudo, quando esses licenciandos chegam às salas de aula na posição de docentes, percebem que a Matemática acadêmica não é adequada para os discentes, o que gera uma segunda ruptura e, assim, o ciclo está fechado (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019). A seguir, na figura 19 será exibido um esquema que ilustra a problemática debatida.

Figura 19 – Números reais em um sistema de retroalimentação



Fonte – O autor

O processo ilustrado na figura anterior pode ser visto não somente na relação com o conceito de números reais, engloba muitos outros assuntos que estão presentes na Educação Básica e no Ensino Superior.

Dada a estrutura apresentada, seria ingenuidade crer que licenciandos vão ignorar as imagens formadas ao longo das suas vivências na Educação Básica. Não existe uma troca imediata das ideias vistas na escola para o universo das definições puras e corretas apresentadas na universidade. Assim, o que acontecerá é a construção, por parte do graduando, de um mosaico com várias representações, de forma que ele recorrerá a um ou a outro conforme a necessidade (SOARES *et al.*, 1999).

Ademais, a transposição didática da Matemática Acadêmica para o ensino de Matemática na Educação Básica não é direta. Existem processos de negociação de significados, reconstrução de conceitos, construção de linguagens, provas não formais, os quais constituem a Matemática escolar.

A primeira justificativa que pode ser destacada é que o pensamento matemático está relacionado com a criatividade, porque é por meio de um contexto criativo que surgem problemas e, posteriormente, estes são sistematizados ao ponto de tornarem-se conjecturas e, por fim, o processo final é demonstrar se o resultado é ou não verdadeiro. Majoritariamente, o que se percebe na graduação é o compartilhamento de produtos matemáticos, mas não o pensamento que estruturou tais resultados (TALL, 2002).

O segundo aspecto a ser posto em pauta é que uma apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do graduando. Na verdade, muito da teoria experimental desenvolvida no livro *Advanced Mathematical thinking* aponta que obstáculos cognitivos emergem à medida que tais estudantes tentam chegar a um acordo entre as ideias que desafiam e contrapõem sua estrutura de conhecimento atual (TALL, 2002).

Por outro lado, no livro anteriormente citado, há a defesa de que é possível criar experiências que conduzam os estudantes a construir os conceitos de modo exitoso (TALL, 2002). Cabe destacar a importância de visualizar o que as pesquisas destacam como entraves para que processo seja bem sucedido.

Assim sendo, nos propomos a perpassar por esses obstáculos numa perspectiva mais geral, com o intuito de gerar inquietações no leitor e, paralelamente, construirmos um repertório capaz de subsidiar as análises que serão tecidas na próxima seção.

4.1 NÚMEROS RACIONAIS

Algumas dificuldades que estudantes da Educação Básica enfrentam em sua trajetória para entender os números racionais e suas diversas representações são identificadas em literaturas com os diferentes significados que esse conjunto numérico comporta, bem como com o conceito de unidade e com o ensino precoce e sem contextualização dos símbolos e algoritmos (MONTEIRO; PINTO, 2005).

As frações constituem uma boa ilustração para essa questão, pois acabam precedendo o ensino dos números racionais e, em em muitas vezes, o conceito não é bem compreendido pelos estudantes em razão do seu caráter multifacetado.

Aprendizagem de frações, para a maioria dos sujeitos, acontece com definições prontas, nomenclaturas antigas e pseudo-problemas envolvendo pizzas e barras de chocolate. Posto isso, se faz necessário que os professores e futuros professores se atentem para as complexidades que envolvem esse conceito deveras complicado (LOPES, 2008).

Para exemplificar a problemática, Rodrigues e Campos (2005) propõem uma classificação para o uso de frações, de acordo com as suas características, a saber:

- Parte-todo: a ideia presente nesse tipo de raciocínio é a de particionar um determinado todo em *n* partes iguais, ou seja, cada parte pode ser ilustrada como $\frac{1}{n}$. Recomenda-se usar essa abordagem para procedimentos de dupla contagem para alcançar um representação correta. Por exemplo, se um todo foi dividido em sete partes e três foram marcadas, então a representação a ser feita é $\frac{3}{7}$;
- Quociente: o pensamento está presente em situações que envolvem a ideia de divisão. por exemplo, uma pizza para ser repartida igualmente entre oito pessoas. Veja que nas situações de quociente estão presentes duas variáveis (número de pizzas e número de pessoas), sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador, no caso $\frac{1}{8}$. Nessa situação a fração corresponde à divisão

(1 pizza dividida para 8 pessoas) e também ao resultado da divisão (cada pessoa recebe $\frac{1}{8}$ de pizza);

- Medida: algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é mensurada através da relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo número de casos favoráveis dividido pelo números de casos possíveis — podendo assumir valores entre 0 e 1;

- Número: nesse caso as frações não se referem a quantidades, mas o que fica em voga, são propriedades oriundas das definições e proposições do objeto matemático abstrato. Subdividem-se quanto a suas formas de representação: ordinária e decimal;

- Operador multiplicativo: aqui as frações podem ser vistas como valor escalar aplicados a uma quantidade. A ideia é que o número é um multiplicador de uma quantidade indicada, por exemplo, um copo de suco tinha 200 ml do líquido, mas alguém bebeu $\frac{1}{4}$. Quando de suco sobrou?

Com base nos exemplos abordados é possível termos uma ideia dos diversos usos que o número racional pode assumir. Além disso, podemos associar o aspecto relacional presente nos números racionais, o que acarreta em problemas de ensino, uma vez que, em muitas vezes, os professores desconhecem e/ou não abordam tais particularidades com os estudantes e, também, em problemas de aprendizagem, em que os alunos não conseguem compreender o conjunto numérico em questão (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007[1] apud PONTE; QUARESMA, 2014).

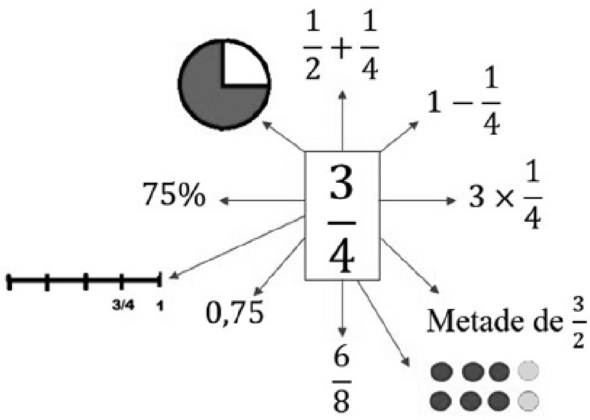
Entendemos que o uso do pensamento relacional centra-se na capacidade do sujeito em articular propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver problemas conforme o contexto apresentado. Se essa forma de pensamento fizer parte do repertório dos estudantes, então o conhecimento acerca da generalização de propriedades dos conjuntos numéricos e operações tenderão a ser mais explícitas, o que, por sua vez, fornece uma base para a aprendizagem de álgebra nos níveis de escolaridade seguintes (EMPSON *et al.*, 2010).

A título de exemplo, podemos pensar no número racional $\frac{3}{4}$. Considerando seus múltiplos significados, podemos pensar o número em questão de diferentes formas, a saber: medida na reta, porcentagem, fração equivalente, representação pictórica, entre outros, como ilustrado na figura 20 (CARVALHO; PONTE, 2017).

Ademais, é importante destacar a diferença entre o caráter de quociente e o de razão. Os números racionais quando são pensados como quociente, ele visa responder

[1] CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, Berlim, v. 64, n. 3, p. 293-316, mar. 2007

Figura 20 – Formas distintas de se pensar o número racional $\frac{3}{4}$



Fonte – http://www.apm.pt

às questões do tipo *quanto?* ao passo que quando esses mesmos números são vistos como razão a ideia presente é a de estabelecer uma relação entre a parte e o todo (RODRIGUES; CAMPOS, 2005),

Nos estudos de Post, Ber e Lesh (1986)[2] apud Ponte e Quaresma (2014) são debatidas dificuldades nos aspectos mais básicos, isto é, ao dividir o todo em partes iguais, não são poucos estudantes que desconsideram a importância de todas as partes serem iguais ou contam as partes de maneira incorreta. Outros, dada um parte, encontram dificuldades em relacionar com o todo correspondente.

Outra peculiaridade presente nos estudos dos números racionais é o fato de que esse conjunto numérico não pode ser considerado como uma simples extensão do conjunto dos números inteiros, uma vez que as operações de adição e multiplicação são independentes. Se considerarmos dois números inteiros positivos e efetuarmos a multiplicação entre eles, obteremos um número maior, ao passo que isso não se verifica no conjunto dos números racionais, por exemplo, multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$ tem o significado de dividir $\frac{1}{2}$ por 3 partes iguais e essa operação não pode ser reduzida a uma adição, como é possível em $\mathbb{Z}$ (RODRIGUES; CAMPOS, 2005).

Veremos a seguir outras diferenças entre números racionais e inteiros. No quadro 2, uma tabela que contém semelhanças e diferenças envolvendo números racionais (em forma decimal) e números inteiros.

[2] POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Research-based observations about children's learning of rational number concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 8, n. 1, p. 39-48, Winter Edition. 1986.

Quadro 2 – Comparação de conhecimentos envolvendo números racionais na representação decimal e números inteiros

Conhecimentos sobre números racionais na representação decimal	**Conhecimentos sobre números inteiros**	**Semelhantes (s) ou diferentes (d)**
A - valores posicionais	**A - valores posicionais**	
Valores passam a diminuir à medida que percorremos os algarismos da esquerda para a direita	Valores passam a diminuir à medida que percorremos os algarismos da esquerda para a direita	s
Cada algarismo comporta um fator multiplicativo que é 10 vezes maior do que o algarismo da coluna à sua direita	Cada algarismo comporta um fator multiplicativo que é 10 vezes maior do que o algarismo da coluna à sua direita	s
Zero quando acrescentado na posição mais à direita depois da vírgula não altera o valor total do número em questão	Zero quando acrescentado na posição mais à esquerda não altera o valor total do número em questão	d
Os valores dos números podem ou não crescer à medida que o último algarismo não nulo se afasta do ponto decimal	Os valores, em valores absolutos, apenas crescem à medida que o último algarismo não nulo está na posição mais distante possível em relação à posição das unidades	d
B - nomes dos valores posicionais	**B - nomes dos valores posicionais**	
Começa sua contagem na posição dos décimos	Começa sua contagem na posição das unidades	d
A sequência dos nomes (décimos, centésimos, milésimos, ...) acontece da esquerda para a direita	A sequência dos nomes (unidades, dezenas, centenas, ...) acontece da direita para a esquerda	d
A sequência dos nomes das posições termina com *-ésimos*	A sequência dos nomes das posições termina com *-ão* a partir de um milhão, somente com potências de três, isto é, (10^6 milhão, 10^9 bilhão, 10^{12} trilhão, ...)	d

Fonte – Resnick *et al* (1989)

O quadro 2 explanou duas seções. A primeira (A) está relacionada com elementos conceituais básicos sobre os valores das posições. Na sequência, a segunda seção (B) está atrelada ao conhecimento relacionado às questões notacionais e de nomenclatura, os quais podem interagir com o conhecimento conceitual e promover a construção de regras incorretas. Isso posto, se faz necessário discernir até que ponto o que se sabe sobre os números inteiros pode ser trazido para o contexto dos racionais (RESNICK; ET AL, 1989).

A discussão sobre números racionais não deve ser empregada apenas como uma generalização a partir de $\mathbb{Z}$, até mesmo porque existem estudantes de Licenciatura em Matemática que ainda confundem o conjunto dos números racionais com $\mathbb{Z}$. Para exemplificar, uma estudante do Ensino Superior, quando solicitada para dizer qual número era o maior entre 0,35 e 0,20, escreveu: “Eu estava pensando ao longo de uma reta numérica e considerando que os números decimais são equivalente a números negativos. Portanto, -20 era maior que -35" (STACEY; STEINLE, 1998).

Resnick et al (1989) apontam três extensões recorrentes nas investigações de Sackur-Grisvard e Leonard (1985)[3] sobre a forma como os estudantes lidam com números racionais como se fossem inteiros positivos: *quanto mais algarismos, maior será a grandeza*; *critério do zero mais à esquerda* e *quanto mais algarismos, menor será a grandeza*.

O pensamento de quanto mais algarismos, maior será o número, esteve presente em 40% dos estudantes consultados de turmas de 4ª série/5º ano. Nesse sentido, os alunos apontaram, a título de exemplo, que 3,214 seria maior que 3,8 por dois motivos. O primeiro número possuía mais algarismos do que o segundo número e o outro motivo seria que 214 (parte decimal do primeiro número) é maior do que 8 (parte decimal do segundo número) (RESNICK; ET AL, 1989).

A ideia presente no zero mais à esquerda está relacionada com situações que estudantes acreditam que o zero não influencia na parte decimal. Um exemplo disso é que muitas vezes o número 0,5 é entendido como igual ao número 0,05 (RESNICK; ET AL, 1989). Esta extensão resulta da junção do conhecimento de que, no conjunto dos números inteiros, o zero quando posto na ordem mais à esquerda não altera a grandeza do número representado, podendo, portanto, ser removido sem alterar o valor do número em questão (MORAIS; SERRAZINA, 2018).

Um desdobramento do pensamento anteriormente comentado é que os estudantes podem internalizar que um decimal com zero ou zeros na(s) primeira(s) coluna(s) após o ponto são "pequenos" e assim eles são capazes de tomar uma decisão correta no teste de comparação para itens como 4,08 e 4,5. Caso os números em questão não possuam zero, eles elegem o decimal mais longo, com a maior quantidade de algarismos (STACEY; STEINLE, 1998).

Na extensão de quanto mais algarismos, menor será a grandeza do número representado, temos o exemplo de estudantes que consideram 0,578 um número menor do que 0,3. Para tais discentes, essa justificativa está pautada na alegação de que um numeral com milésimos será menor do que um numeral que só tenha décimos, pois milésimos são partes menores da unidade do que décimos (MORAIS; SERRAZINA, 2018).

A própria representação por meio de frações, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem de números racionais, constitui um obstáculo para a compreensão do referido conjunto numérico, uma vez que envolve dois números inteiros e um traço (LOPES, 2008).

Uma possível consequência desse obstáculo epistemológico é evidenciado no

[3] SACKUR-GRISVARD, C.; LEONARD, F. (1985). Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. **Cognition and Instruction**, 2, 157-174.

trabalho de Monteiro e Pinto (2007)[4] apud Ponte e Quaresma (2014), o qual revelou que na comparação entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, estudantes diziam que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$ porque 4 é maior do que 3. Outros disseram, por exemplo, que $\frac{1}{2} = 1,2$, o que revela dificuldades na compreensão do sistema de numeração decimal, assim como não foram poucos os que não conseguiram diferenciar $2,5$ de $2,05$.

O pensamento por truncamento é bastante recorrente nas ações de crianças e adultos com números racionais. Basicamente, a ideia é contextualizar com o cotidiano, por exemplo, no sistema monetário ou unidades de comprimento, visando alcançar um sentido para a notação decimal — nesse modo de visualizar os números racionais decimais fica em voga apenas as duas primeiras casas após a vírgula. Entretanto, o problema reside justamente nessa limitação imposta pelo mundo real, a qual limita a compreensão do conceito.

A título de exemplo, o número racional 15,348, na linha de pensamento anteriormente citada, acaba assumindo a característica habitual, à qual sofre arredondamentos do tipo R$ 15,35 ou 15,35 cm, que pode não fazer sentido num outro contexto. Por outro lado, mesmo que uma dada contextualização faça sentido, o próprio processo de arredondamento gera efeitos sobre o número original, mas muitas vezes esse encadeamento torna-se obscuro para estudantes (STACEY; STEINLE, 1998).

Outra questão sutil, que pode ser decorrente da regra do zero de Resnick et al (1989), é o pensamento de estouro. Os discentes acabam construindo a sua própria versão decimal de estouro da posição e isso se deve ao fato de que, por exemplo, 120 é 12 dezenas e, por conseguinte, esses estudantes pensam que 0,12 é 12 décimos. Posto de outra forma, os estudantes "espremem" o numeral 12 na posição dos décimos, ao passo que deveriam considerar esse numeral como 12 centésimos (STACEY; STEINLE, 1998).

Existe, também, o problema do pensamento reverso, o qual leva os estudantes a acreditarem que as colunas dos decimais representam números inteiros, isto é, (ponto) dezenas, centenas, milhares etc. A evidência dessa confusão foi detectada num diálogo com uma aluna de 5º ano. Quando solicitada a ler 0,163 numa atividade, ela respondeu: "um cento e sessenta e três... porque quando fazemos isso na aula, tínhamos uma coluna de dezenas e um coluna de centenas e coluna de milhares... Não tenho certeza se é apenas cem e sessenta e três ou se é 1 dez, 6 centenas e 3 mil" (STACEY; STEINLE, 1998).

Existem equívocos que acabam passando desapercebidos no dia a dia das salas de aula, como o pensamento focado no denominador. Basicamente, os estudantes acabam usando o nome das colunas de valor de lugar para decidir sobre o tamanho dos números decimais; vale ressalvar que os alunos que raciocinam dessa maneira

[4] MONTEIRO, C.; PINTO, H. **Desenvolvendo o sentido do número racional**. Lisboa: APM, 2007.

sabem que um décimo sempre será maior do que um centésimo e eles generalizam, incorretamente, que qualquer número que tenha décimos será maior do que qualquer número que tenha centésimos, não importando se representam fração equivalente (STACEY; STEINLE, 1998).

Por outro lado, existem muitos estudantes que conseguem responder corretamente, mas sem entender o que estão fazendo, os quais são chamados aparentemente especialistas. Esse grupo de alunos são capazes de comparar corretamente a maioria dos pares decimais, seguindo a regra de anexar zeros ao número decimal mais curto e, em seguida, comparam os algarismos da esquerda para a direita. Outra estratégia que esses estudantes utilizam é a comparação dos algarismos da esquerda para a direita. É importante salientar que em ambas situações, um teste escrito não é capaz de detectar essa maneira de raciocinar, mas numa momento de entrevista sim (STACEY; STEINLE, 1998).

Lopes (2008) também comenta sobre pesquisas nas quais os estudantes conseguem chegar a resultados corretos apenas por uma memorização mecânica. Nesse sentido, o autor comenta o exemplo $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, nos quais os estudantes usam o mínimo múltiplo comum 12, mas não entendem o real motivo de fazer isso.

Por outro lado, existem estudantes que conseguem chegar a respostas corretas através de três modos de reflexão, utilizando: o raciocínio não-formal, o pré-formal ou o formal.

A ideia que fundamenta a compreensão dos tipos de pensamento citados anteriormente, assim como expõe como um tipo de raciocínio está relacionado com o outro, pode ser visto como um *iceberg*.

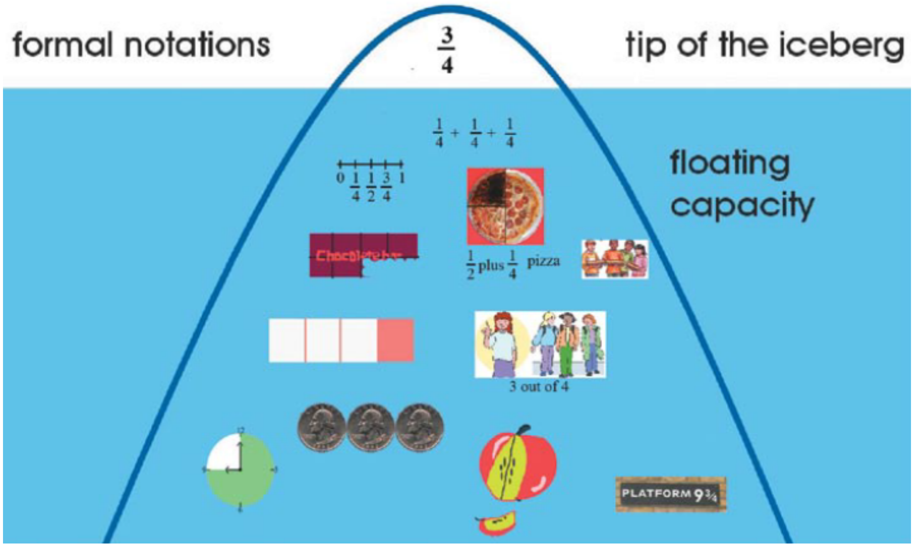
O modelo do *iceberg* foi desenvolvido por pesquisadores do Freudenthal Institute (na universidade de Utrecht), o qual tinha o objetivo de ampliar o repertório de professores holandeses e, consequentemente, fazer com que mais estudantes pudessem acessar a Matemática.

Em linhas gerais, a ideia central é partir de ideias **não formais**, podendo incluir alguma situação “real” (como moedas, pizza, chocolate, etc). Posteriormente, é possível adentrar em ideias **pré-formais**, as quais constituem uma fase de pensamento intermediário (usando tiras de fração, reta numérica, entre outros). Por fim, é plausível atingir o pensamento **formal**, o qual é o que geralmente os professores sabem lidar, tomando como parâmetro uma formação tradicional em Licenciatura em Matemática (WEBB *et al.*, 2008). Segue, na figura 21, uma ilustração desse pensamento.

Observe que o pensamento formal é a ponta do *iceberg*, ou seja, uma pequena parte que está aparecendo. Por outro lado, o que subsidia esse pensamento, segundo essa proposta, é a experimentação do que o “oceano deixa encoberto”, do pensamento não-formal e do pensamento pré-formal (WEBB *et al.*, 2008).

É importante salientar o fato de que não é porque o estudante tenha alcançado

Figura 21 – Pensamento do número racional $\frac{3}{4}$ no iceberg



Fonte – http://www.researchgate.net

um entendimento formal, nesse caso com os números racionais, que nunca mais precisará voltar aos estágios não formais. Entretanto, a tentativa é fazer com que o discente precise cada vez menos de recursos “concretos”, visando, assim, uma incorporação abstrata do conceito matemático (WEBB *et al.*, 2008).

Adentrando no tipo de raciocínio não formal, temos o trabalho de Post, Ber e Lesh (1986)[2] citado por Ponte e Quaresma (2014). Nessa investigação os estudantes resolveram atividades de comparação de frações e, para tanto, lançaram mão de diversos raciocínios, os quais abordaremos a seguir:

- *Raciocínio Residual*: tem relação com a quantidade que completa o todo, o número 1. Por exemplo, ao comparar $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, muitos estudantes acabam notando que no primeiro caso falta $\frac{1}{6}$ para completar $\frac{6}{6} = 1$, enquanto que o segundo caso falta $\frac{1}{8}$ para completar $\frac{8}{8} = 1$. Portanto, acabam concluindo que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$.
- *Utilização de pontos de referência*: nesse tipo de raciocínio a comparação entre duas frações se dá usando uma terceira - geralmente 1 ou $\frac{1}{2}$. Por exemplo, o aluno pode dizer que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, pois a primeira fração é maior e a segunda é menor *do que metade*.
- *Raciocínio Diferencial*: existem estudantes que afirmam que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque lhes falta apenas uma parte para formar o todo. Neste caso o

raciocínio está incorreto, uma vez que o aluno não pode focar-se apenas na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, sem considerar a grandeza da fração como um número - o que é uma forma característica de pensar quando se trabalha com números naturais.

Há a recomendação de que os números racionais devem ser ensinados através da articulação entre representações verbais, ativas (objetos) e pictóricas (desenhos ou esquemas), os quais, quando trabalhados numa perspectiva de resolução de problemas, permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução (PONTE; QUARESMA, 2014).

Outro ponto de extrema relevância está relacionado com a notação dos três pontos ao final dos números racionais, mais precisamente relacionados com dízimas periódicas. A título de exemplo, ao encontrarmos o número $0,23123...$ seria possível afirmar que se trata de uma dízima periódica? Em caso da resposta ser afirmativa, qual seria o período? Em caso de negativo, o que é preciso para ser considerada uma dízima periódica?

Buscando remediar essa situação, alguns autores estabelecem um acordo de repetir o período 3 vezes, como por exemplo: $0,111...$; $0,353535...$ e $7,002002002...$. Em outros casos a questão não é tratada de modo claro, mas acaba sendo exposta em exercícios e exemplos, de modo que os estudantes se envolvem com esse acordo tácito. Outros autores optam por denotar a parte que se repete por meio de um traço, como $0,\overline{1}$; $0,\overline{35}$ e $7,\overline{002}$ (BROETTO, 2016).

Outra consideração que Broetto (2016) frisa é a respeito de uma igualdade do tipo $\frac{3}{11} = 0,272727... = 0,\overline{27}$, já que esses números racionais colocados em diferentes representações são, de fato, iguais. Com isso, queremos destacar o número $0,272727...$ pode ser visto como uma soma infinita, a saber:

$$\begin{aligned}\frac{3}{11} &= 0,\overline{27}\\ &= 0,272727...\\ &= \frac{2}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{7}{10^6} + ...\\ &= 0,2 + 0,07 + 0,002 + 0,0007 + 0,00002 + 0,000007 + ...\end{aligned}$$

Convém, ainda no exemplo anteriormente citado, comparar os números racionais $0,27$, assim como $0,2727$ e $0,272727$ (sem os pontos de reticências) com o número racional $0,272727... = \frac{3}{11}$. Posto de outra forma, os três primeiros números racionais possuem representação decimal finita, de modo que nenhum desses números podem ser iguais a $0,\overline{27}$ – cuja representação decimal é infinita. Sendo assim, a interpretação que podemos atribuir para $0,27$, bem como para $0,2727$ e $0,272727$ é que estes três são uma aproximação para o número $0,272727...$; vale ressaltar que quando melhoramos a aproximação (exibindo mais dígitos à direita da vírgula), menor será o erro cometido em relação ao número original, cuja representação é infinita e periódica (BROETTO, 2016).

Na investigação de Penteado (2004) foi solicitado aos professores participantes que indicassem se existia ou não um número real entre $\frac{1}{3}$ e $0,333...$; todos apontaram que como era o mesmo número, então não havia números entre eles, embora tenha ocorrido o seguinte comentário: “Entre $\frac{1}{3}$ e $0,333...$ não tem número real, tem irracional”. Parece apontar que para este grupo não está claro o significado de número racional, nem de irracional e real.

Posto isso, torna-se questionável a maneira como os professores de Matemática exploraram os números racionais em sua formação inicial na licenciatura. Ao longo da formação inicial o conjunto $\mathbb{Q}$ é visto e trabalhado de maneira muito superficial, ao passo que as pesquisas mostram que nas práticas escolarizadas a sua construção pode ser vista como uma das mais complexas em Matemática (MOREIRA; DAVID, 2004).

Para exemplificar essa lacuna no tratamento dos números racionais na graduação dos professores de Matemática no país, recorremos à pesquisa *Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática*, de Henrique Rizek Elias, Angela Marta Pereira das Dores Savioli e Alessandro Jacques Ribeiro.

A pesquisa investigou o Projeto Pedagógico do Curso e a Matriz Curricular e das Ementas das disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática de 14 instituições de Ensino Superior, contemplando todas as regiões do Brasil. Uma das conclusões apontam que o termo *racional/racionais* aparece em 11 das 14 instituições, “entretanto os números racionais, seus diferentes significados e representações e os conhecimentos matemáticos para seu ensino, não são foco de estudo nas disciplinas do primeiro ano (e também não serão nos demais anos, pelo menos se tomarmos as ementas como referência) (ELIAS *et al*, 2017, p. 196).

Além disso, nessa mesma pesquisa é sinalizado que o único momento em que o termo *racionais* surge é na disciplina de Estruturas Algébricas, na temática de “Extensões de corpos sobre os racionais”, o que revela que os números racionais são tomados como um “trampolim” para generalizações algébricas, entretanto não possui o devido espaço em termos de currículo para ser trabalhado de formas multifacetadas (ELIAS *et al.*, 2017).

Um possível reflexo dessa ideia generalista presente na formação inicial, é o momento quando esse professor vai desenvolver suas práticas profissionais. Não são poucos os professores de Matemática que querem abordar o conjunto dos números racionais o mais rápido possível, impacto esse que acaba sendo visto no Ensino Fundamental, na transição da ideia de relação parte-todo para a ideia da fração representando um número racional (LOPES, 2008).

Considerando o exposto, é visível a complexidade envolvida no conceito de número racional. Na sequência veremos que alguns desses obstáculos acabam se agravando no estudo dos números irracionais.

4.2 NÚMEROS IRRACIONAIS

Considerando que os números racionais podem ser conhecidos por estudantes da Educação Básica, ponderar a respeito dos números irracionais seria, num primeiro olhar, lidar com um número que não satisfaz a definição de um número racional. O próprio dicionário caracteriza número irracional pelo que ele não é, a saber: "número real que não é racional" (FERREIRA, 2001).

Perceba que se definíssemos números irracionais como o dicionário fez, teríamos um obstáculo, pois estaríamos definindo um número irracional dependendo de uma entidade que, no Ensino Fundamental, momento em que tais assuntos são abordados inicialmente, é pouco conhecida.

Entretanto, pouca atenção é dada ao conjunto dos números irracionais no ambiente escolar. Uma das principais razões é que os irracionais são tratados, essencialmente, para serem usados na resolução de alguns exercícios. Por outro lado, falar sobre esse conjunto, mais profundamente, pode trazer aspectos que incomodaram estudiosos durante bastante tempo, assim como pode revelar certa importância à Matemática como um corpo de conhecimento coerente e estruturalmente organizado (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

A propósito, Geraldo Broetto (2016) investigou, em sua tese de doutorado, as definições mais recorrentes (sobre números irracionais) em livros didáticos da disciplina de Matemática que são:

- Números que não podem ser representados como frações de inteiros;
- Números cuja representação decimal é infinita e não-periódica;
- Números reais que não são racionais.

Broetto (2016) aponta que não se trata de condenar tais definições, mas que é preciso realizar uma série de apontamentos, uma vez que muitos detalhes podem passar desapercebidos - tanto para professores, como para estudantes.

Um aspecto presente nas três definições apresentadas é a caracterização em termos do que ele NÃO é. Definir o número irracional pelo que ele NÃO é acaba tornando-o mais obscuro, um não-ser, a antimatéria do número racional. A título de exemplo, segundo as duas primeiras definições, seria plausível considerar números complexos da forma $a + b \cdot i$ (onde $b \neq 0$) como números irracionais, dado que não podem ser escritos como uma fração de inteiros (BROETTO, 2016).

Um número que não é uma fração ou uma dízima não-periódica são elementos um pouco estranhos para os estudantes, uma vez que, até então, o maior conjunto numérico conhecido é o $\mathbb{Q}$. Nesse sentido, estaríamos numa situação similar a procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra desconhecida e encontrar outras que também não sabemos o que significam (MOREIRA; DAVID, 2010).

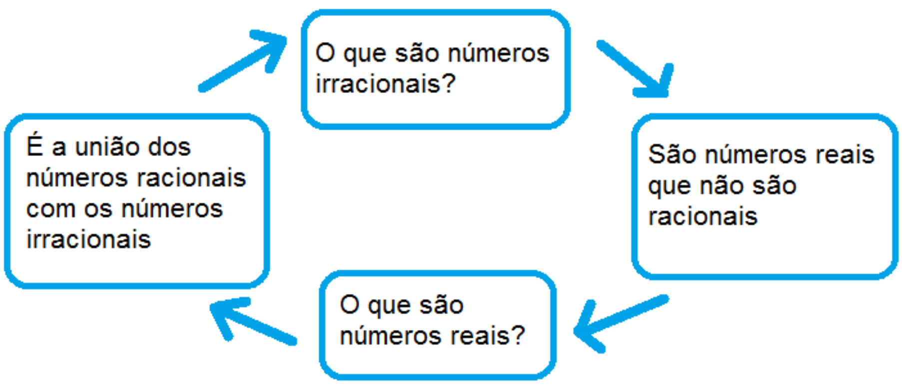
Embora tais definições sejam familiares e até mesmo convenientes, sua utilização prática acaba ficando restrita, por exemplo, como usá-las para definir a igualdade entre dois irracionais? Como realizar operações aritméticas entre dois irracionais? (HAVIL, 2012).

A problemática centra-se no fato de que apenas sabemos o que eles não são. Além disso, nessas definições os números irracionais estão sendo definidos em termos de uma de suas qualidades características, porém não como entidades em seu próprio direito. Quem pode dizer que eles, de fato, existem? (HAVIL, 2012). Nessa direção, há a defesa de que nós professores precisamos instigar os alunos a duvidarem dessas questões, uma vez que, até que se justifique o contrário, poderia ser apenas uma aberração teórica (BROETTO, 2016).

Especificamente na terceira definição, não são usados conceitos ou pensamentos estranhos para os discentes como dízima não-periódica. Em contrapartida, o conjunto dos números reais é mencionado, o que nos leva a inferir que tal definição seja apresentada após algum trabalho feito com os números reais (MOREIRA; DAVID, 2010).

Aí surge a pergunta: como são definidos os números reais? Em geral, como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números os irracionais. Nesse sentido, forma-se uma circularidade, como será ilustrada na figura 22.

Figura 22 – Circularidade na definição de números reais e irracionais



Fonte – O autor

Outro aspecto que pode contribuir para que o conjunto dos números irracionais tenha esse "ar misterioso" é o fato desse conjunto não possuir um símbolo consolidado como no caso dos naturais, inteiros, racionais e reais - respectivamente $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Alguns autores usam a letra $\mathbb{I}$, outros usam *Ir*, enquanto outros ainda representam os irracionais como $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, o que reforça ainda mais o irracional como um não-ser racional (BROETTO, 2016). Por outro lado, há de se considerar que do ponto de vista da matemática acadêmica essa notação pressupõe uma estrutura algébrica, característica não presente nesse conjunto porque não possui nem o fechamento para a soma.

É interessante observar o que aponta a pesquisa de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) com 30 estudantes da 9ª série (9º ano), 32 estudantes na 10ª série (1º ano do Ensino Médio) e 29 estudantes universitários, cujo foco era averiguar a situação atual sobre o conhecimento de números irracionais por discentes do Ensino Médio e futuros docentes.

Na investigação citada, a definição errônea mais frequente foi de que *um número irracional é um decimal que possui uma infinidade de dígitos* e, nesse contexto, os números racionais infinitos foram esquecidos. 40% dos estudantes da 9ª série, 38% da 10ª série e 3% de licenciandos deram essa resposta. Uma explicação característica dada por um estudante refere-se ao resultado não ser exato. Em outras palavras, um número ter infinitos dígitos acaba sendo relacionado com a impossibilidade de se atingir a exatidão, uma vez que nunca poderá ser expresso completamente. O problema é que esse pensamento além de conceber irracionais de modo incorreto, acaba reduzindo os racionais à números que possuem parte decimal finita (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

Outro equívoco a respeito de números irracionais é o exemplo do número $\frac{\sqrt{3}}{2}$, o que qual foi apontado como racional pelo simples fato de aparecer um símbolo de fração. Possivelmente essa ideia é fruto de como o conjunto dos números racionais são estudados ao longo da Educação Básica, isto é, a palavra razão é estudada como sinônimo de fração e, portanto, assume um sentido particular de razão entre inteiros. A extensão de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$, sendo feita sem as problematizações necessárias, pode acarretar em uma permanência da ideia de que razão entre quaisquer números reais resultará em um número racional (BROETTO, 2016).

Nesse sentido, cabe a reflexão se a representação por meio de fração é uma característica marcante para todos os elementos de $\mathbb{Q}$, haja vista que qualquer número racional pode ser escrito como razão entre dois números inteiros. Contudo, tal atributo não figura um critério válido para distinguir números racionais e números irracionais, já que qualquer número irracional pode ser escrito de forma fracionária (BROETTO, 2016).

Essa tentativa de relacionar o conceito de número irracional com algo que não é uma fração também aparece na investigação de Soares, Ferreira e Moreira (1999). Nesta investigação ainda foram obtidas respostas similares:

- Números que não podem ser escritos como $\frac{a}{b}$, não ressaltando que a e b deveriam ser números inteiros;
- Um número irracional é um número que não é possível escrever na forma $\frac{a}{b}$, com

$a, b \in \mathbb{R}$;

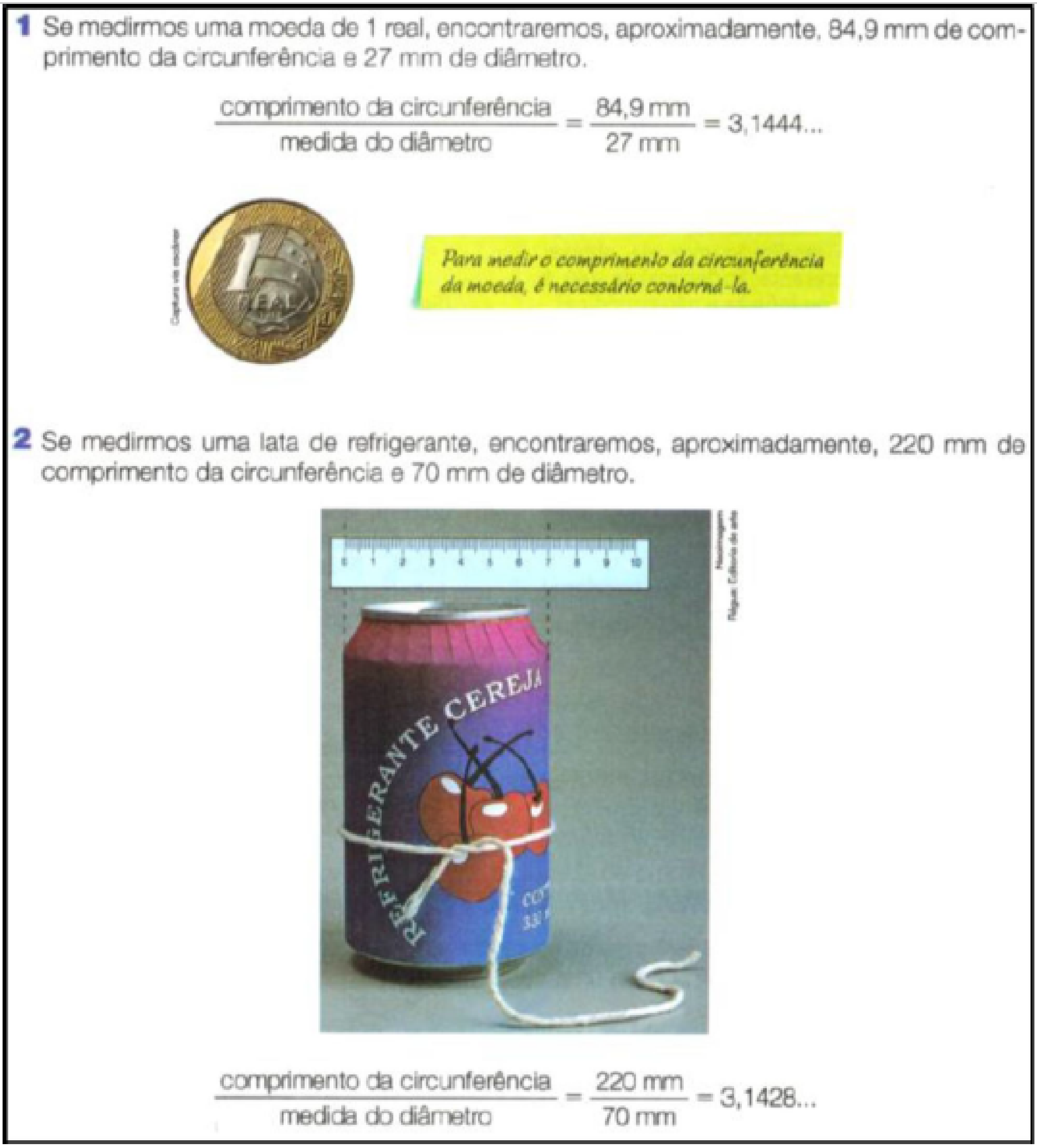
- é aquele que não pode ser escrito em forma de razão.

Posto isso, o contraste da racionalidade com a irracionalidade parece ser percebido como uma mera formalidade, haja vista que a diferença é nítida apenas na representação: fração versus não fração; decimal finito ou periódico versus decimal infinito não periódico. Como o significado da incomensurabilidade de dois segmentos passam longe das respostas a respeito dos irracionais, torna-se plausível que se pense que todo número que apresente infinitas casas decimais seja irracional. Além disso, se a distinção entre racionais e irracionais são apenas uma determinação sem significado, ou seja, se ela é apenas uma forma de separação arbitrária de números, faz mais sentido colocar de um lado os decimais infinitos e de outro os decimais finitos (SOARES *et al.*, 1999).

De mais a mais, cabe a problematização a respeito do número irracional π. O número irracional π é definido na Educação Básica como sendo a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro e, de acordo com essas possíveis definições, o π não poderia ser considerado número irracional (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Outro ponto que foi explorado por Broetto e Santos-Wagner (2019) diz respeito a experimentações empíricas para achar a constante π. Para tanto, eles se valem das seguintes situações, como segue na figura 23:

Figura 23 – Exemplos de experimentos envolvendo π



1 Se medirmos uma moeda de 1 real, encontraremos, aproximadamente, 84,9 mm de comprimento da circunferência e 27 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{84{,}9\text{ mm}}{27\text{ mm}} = 3{,}1444...$$

Para medir o comprimento da circunferência da moeda, é necessário contorná-la.

2 Se medirmos uma lata de refrigerante, encontraremos, aproximadamente, 220 mm de comprimento da circunferência e 70 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220\text{ mm}}{70\text{ mm}} = 3{,}1428...$$

Fonte – (GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009)

A defesa dos autores não é que não se façam tais experimentos em sala de aula, entretanto deve-se ressaltar as suas limitações para a construção do conceito de número irracional. Contudo, ao observarmos a figura anterior, em ambos os exemplos, a divisão do comprimento da circunferência pela medida do diâmetro (considerando a mesma unidade) resulta apenas em um número maior do que 3 - aproximadamente $3,14$ (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Posto isso, se faz necessário problematizar duas dificuldades presentes nesses experimentos:

A primeira é mostrar que se trata de uma constante, pois a medida obtida em cada objeto produziu resultados diferentes; a segunda é explicar que se obtém um número irracional, já que qualquer instrumento de medida sempre fornecerá um número racional para o comprimento e o diâmetro dos objetos, obtendo-se assim uma razão de números racionais, que é um número racional (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

É interessante perceber que para alguns estudantes o π é um exemplo protótipo de número irracional. Broetto (2016) em sua tese de doutorado detectou essa percepção presente em uma depoente, como segue no diálogo a seguir extraído da página 320:

Pesquisador: *Alguém te pergunta aí no corredor o que é um número irracional. Você falaria o que para essa pessoa?*

Agatha: *Se ele estiver em fração, se o resultado dele não der exato, exato assim, der uma dízima não-periódica, ele é irracional. Números irracionais podem ser escritos através de raiz, né? Se não forem quadrados perfeitos. Não sei. π é um número irracional, mas eu não sei te explicar, definir.*

Pesquisador: *O que te faz acreditar na existência de números irracionais?*

Agatha: *Olha, acho que a questão da circunferência, é por que usa π. Não, péra aí. O sr. deu um exemplo, acho que foi da mesa, que tinha que construir uma mesa, de 2 por ... agora não me recordo (sussurrando).*

Apesar de Agatha não conseguir explicar o que era um número irracional, porém o número π foi lembrado como um bom exemplo para ilustrar aquele conceito. Posto de outro modo, os exemplos-protótipos estão presentes na imagem conceitual da maioria das pessoas, os quais, em geral, reúnem a maior listagem de atributos presente num determinado conceito e que formam, assim, fortes características visuais - como o número π para a entrevistada Agatha (HERSHKOWITZ, 1994).

Em minhas práticas profissionais, ao questionar meus alunos do Ensino Médio se já ouviram falar de números irracionais, o número π foi o que mais ouvi como resposta. Contudo, o que acompanhou a maioria dessas respostas não é o fato de π ser um número irracional obtido pela definição envolvendo elementos da circunferência (os quais foi comentados anteriormente), mas a resposta campeã é que $\pi = 3,14$. Nesse sentido, penso que vale a pena investir em aproximações maiores envolvendo esse número, assim como salientar que se trata de uma aproximação para um número irracional que terá infinitas casas decimais: $\pi = 3,14159265358979323846....$

É muito comum a apresentação de $\pi = 3,1415...$, $\pi = 3,1416$ ou $\pi = 3,14$, o que acaba fixando e/ou reforçando as primeiras casas decimais do número, como em diversas questões de prova, nas quais o enunciado sugere o uso de π igual a $3,14$.

Com o tempo, o significado das reticências se perde, assim como a noção de que $3,14$ pode ser apenas uma aproximação para o π e, assim, esse número se torna, na cabeça dos estudantes, igual a 3,14 ou 3,1416 (BROETTO, 2016).

Uma possível associação incorreta a respeito de números irracionais pode ser ratificada com o número π: números irracionais são aqueles que não possuem padrão lógico na parte decimal, isto é, são associados à ideia de imprecisão e não exatidão – possivelmente esse pensamento está atrelado à falta de significação da representação decimal infinita e não periódica (SOARES *et al.*, 1999).

Com base nesse pensamento, muitos estudantes são levados a um pesamento equivocado de que se racional é aquele número que tem padrão, então irracional será o número que não possui padrão. Assim, os estudantes apontam que o número $0,1234567891011...$ é racional, já que apresenta padrão (BROETTO, 2016).

O pensamento comentado anteriormente também pode gerar confusão quando um estudante usa uma calculadora. A título de exemplo $\frac{1}{7}$ certamente é um número racional, mas se essa divisão for feita em uma calculadora, provavelmente, o resultado aparente não mostrará padrão de repetição, o que pode levar estudantes a concluírem que se trata de um número irracional (BROETTO, 2016).

Posto isso, a problematização a respeito desse pensamento deve ser exposta, ou seja, esse tipo de pensar não deve ser estimulado, haja vista que se pauta em atributos não críticos dos números irracionais, já que diversos números irracionais apresentam um padrão lógico na parte decimal, como $1,010010001...$, $1,1212212221...$, entre outros. Sendo assim, trata-se de uma associação que não é favorável à aprendizagem dos números irracionais (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

É importante destacar a produção de decimais com padrão, mas que esse padrão seja não periódico, tendo em vista a possibilidade de se construir diversos números irracionais. Para tanto, é imprescindível que a discussão sobre o que é uma dízima periódica e o que não é aconteça antes de um trabalho dessa natureza com os números irracionais (PENTEADO, 2004).

Como seria possível discutir os números irracionais com estudantes do Ensino Básico? Uma resposta viável é fornecida por Wagner Pommer:

> Especialmente no tocante aos números irracionais, tal tema carece de uma introdução conceitual que possa ser acessada não somente pela peculiar e complexa sintaxe matemática nas também por meio da palavra. Se o tema dos números irracionais é um assunto complexo e teórico, por natureza epistemológica, não devemos renegar as dificuldades de acessá-lo ocultando-o ou evitando-o. Ao contrário, um dos modos de superar tais empecilhos é explicitá-lo através do ato de significar a palavra (POMMER, 2012, p. 95).

O significado das palavras, para o autor citado anteriormente, está ligado com o fenômeno da linguagem e do pensamento. Para que aconteça essa construção de significados, uma possibilidade interessante é relacionar as discussões a respeito dos irracionais com as ideias historicamente construídas, uma vez que permite o sujeito perpassar por desconfortos de práticas já adquiridas, configurando, assim, uma consciência crítica – a qual é fundamental no processo de relacionar conceitos (POMMER, 2012).

Considerando que, de modo majoritário, não acontece problematização sobre os irracionais, é válida a reflexão de Broetto (2016) de que o tratamento dado aos números irracionais é superficial. Para ilustrar a problemática, segue o trecho de uma de suas entrevistas: “Ele [o professor] passou muito rápido, foi uma coisa assim, no susto. Ele falou irracionais, mostrou um exemplo ou outro e pronto, já foi para outra matéria” (p. 314).

Por outro lado, na formação inicial do professor de Matemática ainda permanece uma abordagem técnica e deveras formal, o que não capacita esse futuro docente a tecer diálogo correspondente ao seu público, o que acarreta em problemas no momento de ensinar os números irracionais na escola básica (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Um reflexo dessa não importância dada aos números irracionais também é evidenciada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) - no período de 2009 até 2013, como segue:

> Constatamos que não houve uma única questão envolvendo números irracionais que abordasse qualquer aspecto conceitual desse assunto. Ao invés disso, todas as questões que envolviam números irracionais propostas no período analisado o faziam de forma bastante superficial, exigindo apenas um conhecimento procedimental, como aplicação direta de fórmulas, utilização de aproximações racionais para números irracionais sem qualquer discussão, utilização de propriedades de radiciação, entre outras (BROETTO, 2016, p. 32).

Outro dado que reforça o distanciamento entre números irracionais e Ensino Médio é salientado no resultado da pesquisa de Fischbein e colaboradores (1995) de que menos da metade dos estudantes investigados nessa etapa de ensino consideraram $\sqrt{16}$ como um número racional. Curiosamente, os demais estudantes não classificaram o número em questão como irracional (a menos de um estudante do 9º ano e um do 10º), o que mostra que os termos racional e irracional não possuem significado para eles. O resultado para a mesma pergunta é melhor para licenciandos, mas por volta de 30% destes identificaram $\sqrt{16}$ como irracional. (FISCHBEIN *et al.*, 1995)

Em minhas aulas já propus exercícios envolvendo raízes quadradas de números naturais compostos, cuja fatoração em primos possuía expoente par. Entretanto, alguns alunos diziam que se tratava de um número irracional “porque tinha uma raiz envolvida”. Talvez, alguns dos estudantes comentados no trabalho anterior tenham criado uma espécie de *regra da raiz* - se tem raiz, automaticamente o número será irracional.

A regra da raiz também foi encontrada em uma investigação na Grécia. A pesquisa que contemplou 78 estudantes, de idades entre 13 e 14 anos do 1º Ginásio de

Pilotos de Atenas, e 106 alunos de idades entre 18 e 19 anos, da Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Educação de Patras apontou que os erros mais recorrentes foram: todo número que tem o símbolo de fração é racional e todo número que envolve raiz é irracional (VOSKOGLOU; KOSYVAS, 2012).

Para além do que foi debatido, o conceito de números irracionais é complexo, basicamente, por dois motivos. Em primeiro lugar, é preciso considerar a relação entre os números irracionais e a incomensurabilidade entre segmentos. É interessante considerar que a existência de segmentos incomensuráveis é datada desde a Grécia Antiga, entretanto só no século XIX, com a contribuição de Dedekind, Cantor e Weierstrass houve o estabelecimento teórico e rigoroso desse conjunto numérico. Possivelmente essa demora ao longo da história não revela apenas dificuldades formais, mas também obstáculos intuitivos. Os irracionais não são intuitivos como os modelos práticos que suscitaram o conceito de número (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

Em segundo lugar há uma dificuldade relativa à afirmação de que o poder da continuidade é maior do que o poder do conjunto dos números racionais. Pode parecer muito estranho e até paradoxal que o conjunto de pontos racionais não cobrem a reta toda, apesar de $\mathbb{Q}$ ser um conjunto denso, além do que, há a dificuldade em ver a diferença entre pontos irracionais e racionais (COURANT; ROBBINS, 1996).

Quanto à utilidade dos números irracionais, é interessante o ponto de vista de Klein (1932)[5] citado por Broetto (2016) que coloca em discussão dois tipos de Matemática: a de aproximação e a de exatidão. Essa divisão se justifica pelas formas diferentes de conceber o conhecimento, uma vez que a primeira é intuitiva e empírica (controlada pela medida), ao passo que a segunda é resultante de uma idealização que ultrapassa o senso de observação.

A título de exemplo, o olho humano, mesmo com auxílio de instrumentos altamente precisos, está sujeito a limitações impostas por propriedades físicas como o comprimento de onda da luz – que é da ordem de 1 mícron ($\frac{1}{1000}$mm). Objetos menores do que 1 mícron não podem ser vistos e isso implica que ao medirmos em milímetros somente as três primeiras casas decimais possuem um significado conhecido (BROETTO, 2016).

Considerando que em aplicações práticas só é necessária a matemática de aproximação, Klein (1932) citado por Broetto (2016) afirma que é o único ramo da Matemática que precisamos. Portanto, os números irracionais pertencem à Matemática de exatidão e são uma sofisticação intelectual, que está fundamentada em um pensamento abstrato.

[5] KLEIN, F. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**. Londres: Mcmillian and Co., 1932.

4.2.1 E a crise dos incomensuráveis?

Quando os incomensuráveis são trabalhados em sala de aula (realidade não comum à todas as instituições de ensino do Brasil), muitos professores optam, logo após a “descoberta” desses tipos de grandezas, por discutir uma certa crise no pensamento pitagórico da Grécia antiga (POSSANI; GONÇALVES, 2009).

Os docentes buscam promover um certo incômodo nos estudantes da Escola de Educação Básica, haja vista que os números racionais não preenchem a reta numérica que eles habitualmente estão acostumados a lidar há muito em sua trajetória escolar.

Uma das argumentações para a defesa de que a descoberta dos números irracionais tenham causado uma crise de fundamentos da Matemática produzida na Grécia Antiga é esta:

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. [...] Tão grande foi o ‘escândalo lógico’ que por algum tempo foram feitos esforços para manter a questão em sigilo, e há uma lenda que conta que o pitagórico Hipaso (ou um outro talvez) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto (EVES, 1969, p. 60).

Outra possibilidade que corrobora para a afirmação desse espanto gerado pelos incomensuráveis está presente na obra de Jâmblico (c. 285 - c. 330 E.C.). Na literatura é mencionado Hipaso, um pitagórico que morreu no mar porque expôs a esfera através do dodecaedro regular (POSSANI; GONÇALVES, 2009).

A incomensurabilidade de segmentos não parecia perturbar apenas a suposição da escola pitagórica de que tudo dependia de números inteiros, como também incidia sobre a definição de proporção. Assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, esse embasamento teórico fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis (EVES, 1969).

Na contramão da discussão feita, existe uma corrente histórica que alega de maneira contundente que as fontes históricas não são suficientes para sustentar a ideia de que grandezas incomensuráveis causaram inquietação nos gregos da época.

A título de exemplo, as próprias obras de Jâmblico não permitem aferir nenhuma junção entre a construção do dodecaedro e o problema da incomensurabilidade. Se existisse essa ligação e se ela fosse realmente fundamental, não deveria ser explicitada? (POSSANI; GONÇALVES, 2009).

Na obra de Aristóteles intitulada *Metafísica* não há afirmações a respeito da incomensurabilidade de segmentos ter acarretado numa crise na comunidade dos pitagóricos, embora nessa mesma obra o autor tenha criticado ferrenhamente os pitagóricos (POSSANI; GONÇALVES, 2009).

Em linhas gerais, os matemáticos gregos daquele tempo lidavam com a geometria sem associar, necessariamente, a um número. Sendo assim, os geômetras poderiam trabalhar tranquilamente com o lado e a diagonal de um quadrado sem ter que associar medidas a esses segmentos (FOWLER, 1999).

Outro aspecto importante é que quando consideramos que uma ideia que contrariou nosso pensamento nos dias de hoje (como a existência de grandezas incomensuráveis), também interferiu na maneira de pensar dos pitagóricos, assume-se uma postura inclinada à existência de uma "intuição humana". Em linhas gerais, tal ideia comporta uma concepção de que o pensamento humano possui uma certa linearidade e o que pensamos atualmente (neste exemplo, em matemática) é apenas um melhoramento natural de um pensamento pré-existente (BROETTO, 2016).

Com base no que foi discutido, podemos conceber incomensurabilidade não como uma geradora de crise, mas sim como um assunto da matemática que não era tão pertinente assim para as práticas sociais daquele povo. Por outro lado, caso tenha acarretado, sim, numa crise ao pensamento corrente na época, não foram descobertas fontes históricas capazes de poder sustentar tal afirmação (POSSANI; GONÇALVES, 2009).

4.3 DENSIDADE

De acordo com Ferreira (2001), a densidade pode expressar uma qualidade de denso, assim como pode representar uma relação envolvendo massa e volume. Assim, o dicionário acaba por canalizar o foco da palavra em seu uso no contexto da Física, embora exista, também, o emprego da palavra densidade em outras áreas do conhecimento, como na Geografia, no conceito de Densidade Demográfica.

Portanto, é visível que a densidade, enquanto conceito matemático, exige um acordo no jogo de palavras para que o estudante da Educação Básica consiga lhe atribuir uma ideia que faça sentido e esteja relacionada com o conceito em questão.

Relacionando a densidade trazida no dicionário com o seu significado nos números reais, podemos dizer que essa palavra está ligada com uma certa junção entre seus elementos, isto é, os números racionais e os números irracionais. Nesse sentido, trago uma recordação – que possui um caráter metafórico – de uma aula de cálculo do professor Cláudio Possani: os números reais estão num recipiente completamente cheio de sal e pimenta (números racionais e irracionais); não tem como pegar um porção desse recipiente sem trazer sal e pimenta junto; de outro modo, não tem como pegar um intervalo, por menor que seja, sem pegar números racionais e irracionais.

A preocupação da densidade acabar sendo empregada em contextos fora do mundo da Matemática esteve presente na pesquisa de Dias (2002). Isso se deve ao fato de que, normalmente, a densidade não é explorada nos livros didáticos.

Considerando o exposto anterior, foi proposto aos investigados: Você conhece a expressão densidade numérica? Se sim, escreva o que você conhece sobre esse assunto. O sublinhado foi um recurso proposital para saber o que os participantes entendiam da definição matemática de densidade usando uma expressão não usual (DIAS, 2002).

Dos 14 respondentes, oito não souberam apresentar respostas coerentes relativa ao questionamento anterior. Em uma etapa posterior da pesquisa, a pergunta sobre a densidade numérica foi reestruturada e perguntada para outros participantes. Dos 19 investigados, 10 disseram que não conheciam o termo (DIAS, 2002).

Quando se trata da densidade dos números irracionais e, por conseguinte, a densidade dos números reais, uma dificuldade precisa ser superada: a concepção de que os números racionais preenchem a reta numérica toda. Essa falsa impressão e/ou falsa conclusão está relacionada com ideia de que entre dois racionais existe um outro racional gerando, assim, uma intuição equivocada (BROETTO, 2016).

Uma questão que promoveu bastante discussão durante a produção do trabalho de Dias (2002) foi pedir para os participantes explicarem se existia um maior elemento para o conjunto $\{x \in \mathbb{I} \mid x \leq 1,25\}$ ($\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais).

Um participante questiona: *O conceito de número irracional é o quê? Aquele que não pode ser escrito na forma de p sobre q ..., então, x não pode ser 1,25*.

Na sequência, alguns irracionais foram ditos na tentativa de encontrar o máximo do conjunto: $\sqrt{\pi}$ *não...* $\frac{\pi}{2}$.

A incoerência com a definição de número irracional foi percebida pelo sujeito. Em uma questão similar, a mesma pessoa tentou apresentar o número $0,3334$ descartando-o em seguida, por ter, provavelmente, percebido que não era irracional. A discussão girou em torno da existência ou não de irracional entre $0,333$ e $0,333...$. Um participante foi resistente em afirmar:

Eu não consegui enxergar essa situação para número irracional. A apresentação por escrito do número $3,33301579321...$ pelo parceiro, explicando que os pontos de reticências não significavam periodicidade, não foi suficiente para considerá-lo irracional:

Eu entendi que esse número pode ser colocado na forma fracionária.

Outro participante retrucou: *Então coloca!*

Embora não tenha conseguido colocar na forma de fração, mesmo assim não admitiu a irracionalidade: *Dentro desse intervalo aqui não entendo que teria um irracional*

A existência de "alguns" entre dois números racionais não foi refutada, quando o parceiro disse existir infinitos (entre os números dados), sugerindo, até então, uma concepção resistente de uma "reta racional" (discreta).

A partir da contra-argumentação do parceiro, exemplificando com π entre os racionais $3,14$ e $3,15$, é que pareceu ter levado o professor a um fator de conflito cognitivo:

Gostei dessa questão preciso pesquisar sobre números irracionais.

Para uma compreensão conceitual a respeito da densidade dos números reais, como observamos no diálogo anterior, é necessário que se tenha uma compreensão aprofundada a respeito dos números irracionais para que, posteriormente, seja possível experimentar a ideia da densidade.

Um exemplo de trabalho que se constituiu nessa perspectiva de compreensão conceitual a respeito da densidade dos irracionais foi a dissertação de mestrado de Cristina Berndt Penteado (2004). Essa investigação foi estruturada em 10 atividades voltadas à onze professores da grande São Paulo, os quais participavam do Projeto de Educação Continuada – PEC.

Em linhas gerais, a sequência de ensino acabou abordando os critérios para classificar os números em racionais e irracionais, assim como explorou a densidade no conjunto dos números reais (PENTEADO, 2004).

Penteado (2004) pediu aos participantes da sua pesquisa que localizassem a média aritmética entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Na sequência foram exploradas outras médias entre os referidos números.

Como se tratava de um estágio inicial da pesquisa, se algum participante não se sentisse confortável em trabalhar com os números racionais na sua representação fracionária, então poderiam realizar a divisão e, assim, trabalhar com os números em sua representação decimal (PENTEADO, 2004).

A média aritmética entre números racionais direciona para um ponto crucial no estudo da densidade: o processo de extração de médias repetidamente tem fim? A ideia é que a maioria das pessoas acabe percebendo que sempre será possível tirar a média entre racionais quaisquer, haja vista que o ponto não possui dimensões e, assim, sempre será possível encontrar outro ponto nesse processo que pode ser repetido infinitamente. Uma resposta que indica essa compreensão foi ilustrada no seguinte comentário: “A média vai se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir” (PENTEADO, 2004).

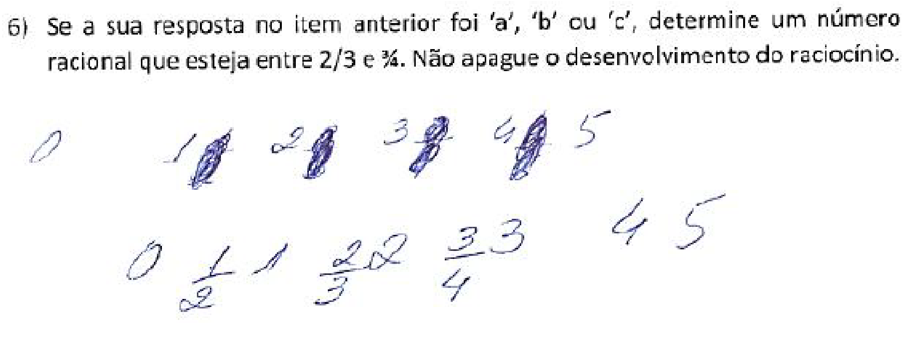
É cabível a problematização de que a densidade pode não ser entendida, em sua totalidade, por boa parte dos professores de Matemática que atuam na Educação Básica. Isso acaba se tornando visível quando um participante, ao ser questionado sobre a possibilidade de representar um número irracional entre $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$, não consegue, mesmo recorrendo à representação decimal, o que reflete uma compreensão insuficiente a respeito dos irracionais, o que compromete o entendimento conceitual sobre a densidade (DIAS, 2002).

Broetto (2016) questionou quantos números racionais existem entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$? apenas 11, dos 24 entrevistados, sinalizaram a resposta *infinitos* – vale ressaltar que apenas 3 converteram os racionais para decimais e, assim, tiraram suas conclusões. A segunda resposta mais recorrente nesta pesquisa foi *muitos*, o que revela uma forma de pensar a ser problematizada.

O equívoco, embora esteja em desacordo com a concepção formal de densidade dos números racionais, revela ideias próprias dos estudantes; eles construíram sequências como se para cada número racional houvesse o número racional sucessor – isso pode revelar uma extensão indevida de uma propriedade válida para números naturais e inteiros (BROETTO, 2016).

A título de exemplo, Broetto (2016), busca discutir a linha de pensamento de um dos participantes, o qual considera a reta como sendo discreta, como segue na figura 24.

Figura 24 – Estratégia para encontrar um racional entre 2/3 e 3/4



Fonte – (BROETTO, 2016)

A hipótese é que na primeira linha a pessoa investigada tenha escrito os números inteiros 0, 1, 2, 3, 4 e 5; Posteriormente, na segunda linha tenha formado frações nos intervalos (0,1), (1,2), (2,3) e (3,4), onde os numeradores são os extremos da esquerda e os denominadores são os extremos da direita de cada intervalo. Em seguida, escreveu novamente os inteiros entre as frações, começando com o 1 após o $\frac{1}{2}$, o que está matematicamente certo e pode ter influenciado seguir a sequência. Seguindo essa linha de pensamento, acabou concluindo que 2 após o $\frac{2}{3}$, e assim por diante, de modo que sua conclusão foi a de que entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ existe apenas um número, no caso, o número 2 (BROETTO, 2016).

Na pesquisa de Dias (2002) uma das questões propostas a professores de Matemática que estavam em formação continuada foi seguinte: *De todos os números menores que 1 existe um que esteja mais próximo dele? Se sim represente-o. Se não, escreva o porquê*. Dos 14 sujeitos que responderam, 8 apontaram que havia um número mais próximo de 1, o que revela uma ideia de “reta racional”, bem como denota a não consolidação da ideia de dízima periódica para esses professores, já que o argumento se pautava em $0,999...$ ser esse número, valendo ressaltar que houve, inclusive, até o caso de os três pontos nem serem colocados (DIAS, 2002).

Outro apontamento a ser feito, ainda com respeito à pergunta anterior, está relacionado com um conflito entre a existência de um número menor que 1, mas não é possível determiná-lo. A título de exemplo, a resposta “sim, mas não dá para saber qual é, menos ainda para representá-lo”; “existe, mas é difícil escrevê-lo, pois esse número é infinitamente pequeno...”'; “se esse número for real, não consigo representá-lo” (DIAS, 2002).

É válida a reflexão de que em muitas ocasiões o professor de Matemática se depara com a não compreensão ou com o não entendimento dos estudantes no tocante à densidade dos números reais. Isso se manifesta quando o aluno é convidado a indicar um número real que seja mais próximo de 1 e que se localize à sua direita; em diversas situações o número 1,1 é colocado como resposta, o que revela uma transferência de propriedades válidas para os números inteiros aos reais, como por exemplo a ideia de sucessor. Outro equívoco pode ser detectado quando se pergunta quantos números reais pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$ e o estudante aponta apenas dois, o número 2 e o número 3 (CHAVES; SOUZA, 2017).

Por outro lado, a ausência de *conceito definição* articulado com o nome densidade, para a maioria dos participantes, não impediu que fosse detectado o *conceito imagem*, ou seja, os estudantes poderiam não conhecer a definição formal, mas apresentaram ideias corretas sobre densidade. Em relação a esses conceitos, a autora aponta:

> O **conceito imagem** é constituído na estrutura cognitiva do indivíduo, associado a um certo conceito. Essa associação contém representações mentais como: imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades. Estas podem ser elaboradas pelo indivíduo por intermédio de processos de pensamento sobre as representações mentais. Conceito imagem pode revelar-se por palavras ou símbolos matemáticos. Por exemplo, quando o indivíduo expressa o conjunto de números reais menores que 1,25 desta forma: $A = \{...1,24..., 1,23..., 1,22...\}$ (DIAS, 2002, p. 2).
>
> O **conceito definição** pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ele e a definição do conceito tenham necessariamente significados coincidentes, ou ainda, o conceito definição pode ser uma descrição do conceito imagem (DIAS, 2002, p.3). A formação do conceito definição pode ocorrer no ato em que o indivíduo é questionado para explicar um conceito.

Por outro lado, a identificação de números distintos pela igualdade de um número com uma aproximação deste, e a dificuldade relativa à ordem encontrada naquela pesquisa, podem corroborar para uma elaboração de um conceito imagem não coerente com o conceito formal de densidade (DIAS, 2002).

A hipótese que se confirmou é deveras assustadora: a concepção geral de densidade que foi exposta por professores de Matemática é semelhante ao que foi detectado em estudantes da Educação Básica. Vale frisar que muitos termos expressos pelos professores eram idênticos aos termos que os estudantes apresentavam nas pesquisas tomadas como referência (DIAS, 2002).

Em uma investigação com 39 licenciandos, apenas cerca de 30% dos participantes apontaram que entre dois racionais existem infinitos racionais, valendo ressaltar que nenhum deles conseguiu apresentar um número como exemplo, o que revela que a densidade é aceita e memorizada, entretanto é pouco compreendida (BOFF, 2006).

Quanto à densidade dos irracionais, Broetto (2016) investigou o tema ao perguntar aos seus 23 entrevistados se existe algum número irracional no intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Caso a resposta fosse afirmativa, foi solicitado ao participante que ele escrevesse esse número em notação decimal. No caso da resposta ser negativa, foi pedida uma justificativa. Segue, na tabela 1, uma síntese das respostas obtidas.

Tabela 1 – Densidade dos irracionais

Respostas	**Ações**	**Sujeitos**
Sim	Apresentou um número irracional na forma decimal	$\frac{2}{23}$
	Apresentou um número irracional na forma decimal a partir de raiz quadrada ou π	$\frac{4}{23}$
	Não apresentou um número irracional	$\frac{7}{23}$
Não	Não apresentou justificativas	$\frac{2}{23}$
Não soube responder ou deixou em branco		$\frac{8}{23}$

Fonte – (BROETTO, 2016)

O índice de futuros professores que não souberam responder ou que deixaram em branco compõem, aproximadamente, 35% dos entrevistados. Também é importante frisar a reduzida quantidade de licenciandos que justificaram adequadamente, apenas seis de 23 (BROETTO, 2016).

Por outro lado, Penteado (2004) propôs que os participantes comparassem $1,232425...$ com o número $1,332425...$, pretendendo chamar a atenção para o fato de que embora houvesse uma modificação em um algarismo, ambos os números seriam irracionais.

Envolvendo, ainda, os números $1,232425...$ e $1,332425...$, foi solicitado que os participantes localizassem um número irracional entre os dois irracionais dados. É importante frisar que nem sempre o artifício da média aritmética entre os dois irracionais produz um número irracional (PENTEADO, 2004).

Em linhas gerais, Penteado (2004) buscou utilizar a representação decimal para que os participantes pudessem construir números racionais e irracionais entre dois números reais dados. Nesse sentido, houve a preocupação da autora em fornecer problemas com dois racionais, com dois irracionais e, também, com um racional e um irracional.

Outra potencialidade envolvida é a conversão do número para a sua representação via pontos na reta numérica. Isso se deve ao fato de que a maioria dos participantes sentiu a necessidade de aumentar a escala, visando uma melhor representação dos números, assim como uma melhor observação da relação de ordem entre os mesmos. Algumas falas ilustram a questão: "Quanto menor o número, tenho que aumentar minha escala"; "Na hora de representar na reta, vou colocar a média um pouco mais para frente"; "Vamos ter que aumentar ainda mais a escala" (PENTEADO, 2004).

Na investigação de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) houve o questionamento seguinte: dados dois pontos distintos numa reta, quantos números racionais pertenceriam a este intervalo? A mesma indagação foi feita a respeito dos números irracionais. Os estudantes que responderam, com respeito aos números racionais, apresentaram os seguintes índices de acerto: 54% dos alunos da 9ª série, 50% dos alunos da 10ª série e 90% dos licenciandos. Quanto aos irracionais, a reposta *infinitos* foi dada por 64% dos entrevistados da 9ª série, 69% dos entrevistados da 10ª série e 97% dos entrevistados universitários. (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

Com base nas pesquisas consultadas, é perceptível que o conceito de densidade ainda carece de maiores discussões, tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior. Não é suficiente que o professor do Ensino Médio apenas comunique que entre dois números reais existam infinitos racionais e irracionais, bem como não basta que tais propriedades sejam demonstradas formalmente em um curso de Análise.

É importante que o licenciando experiencie mais os números irracionais em suas diversas representações e, num segundo momento, a densidade, já que se essas informações não forem experimentadas, provavelmente, os estudantes não acreditarão que existem, por exemplo, infinitos números racionais entre dois números irracionais, o que pode acarretar em um retorno à intuição equivocada de que a reta é preenchida pelos racionais.

4.4 CONTINUIDADE

Ferreira (2001) aponta duas caracterizações que colocam a *continuidade* mais relacionada com a Matemática: qualidade de ser contínuo; propriedade especifica de uma função contínua. Nesse dicionário a palavra *contínuo* quer dizer que "não há interrupção; seguido, continuado". Assim, vemos que o significado para a continuidade trazido no dicionário está fortemente relacionado com o seu significado no mundo da Matemática. Como visto anteriormente, do ponto de vista formal essa noção está relacionada com os cortes de Dedekind porque cada corte fica identificado como um ponto na reta geométrica, que é um objeto contínuo.

A continuidade dos números reais, ao contrário dos outros conceitos tratados nesse capítulo, é um conceito ainda pouco explorado em trabalhos brasileiros na área da Educação Matemática, na perspectiva empregada no presente trabalho. O termo continuidade está relacionado, majoritariamente, com a ideia de continuidade de funções, numa perspectiva mais relacionada com o Ensino Superior. Sendo assim, optamos por realizar uma breve discussão histórica a respeito da continuidade, acreditando que essa argumentação pode contribuir positivamente com a Educação Básica e, ao final da seção, realizaremos alguns apontamentos a respeito da continuidade.

Para a breve discussão histórica sobre a continuidade, recorremos ao recente trabalho de Rafael Siqueira Silva (2019) intitulado *Um estudo sobre o movimento lógico-histórico do conceito de continuidade*. Essa escolha se justifica pelo fato de perpassar, ao longo dos tempos, por aspectos que se relacionam com diversas concepções a respeito da continuidade, as quais ajudaram a constituir o conjunto dos números reais. Na pesquisa o autor propôs quatro momentos de análise:

- A matemática na Antiguidade: período que está relacionado com as primeiras manifestações de um conhecimento estruturado coletivamente;
- O desenvolvimento de uma matemática elementar: período correspondente ao acúmulo e sistematização de métodos de estudo das magnitudes constantes;
- A criação da matemática das variáveis: período correspondente ao enfrentamento de problemas que relacionam magnitudes variáveis e a elaboração de uma linguagem própria;
- O início da matemática moderna: período correspondente ao desenvolvimento da matemática como área científica como conhecemos atualmente.

É valido o apontamento do autor a respeito do tratamento que ele empregou ao conceito de continuidade, uma vez que sua produção não é historiográfica, inclusive ele aponta outros trabalhos que seguem nessa linha. Em contrapartida, o foco da pesquisa é centrado na identificação e discussão sobre os elementos tensionadores em diferentes momentos históricos e que nos ajudam a entender as relações que possibilitaram o desenvolvimento da continuidade (SILVA, 2019).

O trabalho de Silva (2019) buscou dialogar as relações estabelecidas entre o lógico (manifestação do pensamento) e o histórico (práticas culturais) envolvendo o conceito de continuidade, sendo assim, o autor usou os elementos pedagógicos tensionadores na história propostos por Lanner de Moura (2003).

Em resumo, os elementos tensionadores na história estão ligados com a percepção de necessidades, motivações e condições objetivas que levaram à produção de determinado conhecimento. Desta forma, a estrutura dos argumentos utilizados tem como ponto inicial a discussão sobre os elementos tensionadores com base em recortes feitos nas obras analisadas, o que o autor chama de extratos (SILVA, 2019).

Conforme o que foi dialogado acima, as próximas subseções explanarão os quatro momentos supracitados.

4.4.1 Período de Desenvolvimento da Matemática na Antiguidade

As primeiras manifestações a respeito do avanço do conceito de continuidade remontam à Grécia Antiga por meio de problemas que envolvem a incomensurabilidade (COBIANCHI, 2010). Nesse sentido, esse período pode ser compreendido como os primórdios do desenvolvimento do pensamento matemático no trato com magnitudes constantes (SILVA, 2019).

A Grécia Antiga, segmentada em diferentes cidades-estado, ficou marcada pelo início de atividades científicas em função das relações sociais estabelecidas na época. O modo de produção baseado em uma cultura escravista e a própria questão territorial favoreceu o desenvolvimento de diversas atividades, como por exemplo, comércio, agricultura, navegações, exército, política, entre outros. Nesse contexto, os que homens que podiam usufruir seu tempo longe de atividades braçais puderam se dedicar a atividades intelectuais, entre elas, a produção de conhecimentos matemáticos (SILVA, 2019).

Quadro 3 – Extrato 1: A divisão do trabalho e a produção do conhecimento matemático

Descrição	**Elemento tensionador**
Na matemática dessa época os problemas eram de ordem prática, os quais estavam relacionados com a necessidade de cálculos numéricos, medições e construções geométricas. No entanto, o novo era que estes problemas pouco a pouco se desprenderam em um campo independente da matemática que obteve a denominação de logística. À logística foram atribuídas: as operações com números inteiros, a extração numérica de raízes, o cálculo com a ajuda de dispositivos auxiliares, do tipo do ábaco, o cálculo de frações, a resolução numérica de problemas que conduzem a equações de 1º e 2º graus, problemas práticos de cálculo e construtivos da arquitetura, agrimensura, etc (RÍBNIKOV, 2019, p. 51).	A complexificação das relações sociais que exigiu a divisão do trabalho e a existência de pessoas que tinham como atividade principal dedicada à filosofia, matemática, artes, entre outras, distanciadas do trabalho braçal (SILVA, 2019, p. 89).

Fonte – (SILVA, 2019)

Com base no extrato 1, há de se considerar que por mais que os problemas estivessem relacionados com problemas de ordem prática, nesse período começa um movimento de se pensar formas gerais na produção do pensamento, com a criação de um campo independente da Matemática (RÍBNIKOV, 2019).

Nessa linha de pensamento os autores Antony Marco Mota Polito e Olavo Leopoldino da Silva Filho (2013) complementam a discussão:

> Acompanhando as necessidades de rigor e objetividade, regras para a elaboração do discurso, para a correção do raciocínio e para a articulação conceitual dos elementos concretos da realidade sensível foram formuladas. Assim é que a lógica e a matemática foram criadas como disciplinas propriamente ditas, ambas passando por um desenvolvimento único entre os gregos. A primeira, como uma disciplina puramente linguística e conceitual, teve sua formulação plena nas obras de Aristóteles e da escola estoica. Já a matemática grega – a qual era constituída quase que inteiramente pela geometria (euclidiana) e pela aritmética –, foi concebida como paradigma de correção de pensamento e demonstração de verdades (POLITO; SILVA FILHO, 2013, p.330).

Na mente de muitos gregos foram manifestadas as primeiras tentativas de estabelecimento de características universais para a explicação e constituição de fenômenos ligados à vida humana. Tais características versavam a respeito da definição de uma estrutura rígida para a construção do pensamento, pautada em princípios elementares, os quais poderiam ser aceitados ou refutados por meio de uma análise coletiva (SILVA, 2019).

Por outro lado, é importante salientar que a sociedade grega era reconhecida por sua capacidade de trocas comerciais, realização de construções terrenas e marítimas, assim como apregoavam relações com os números baseados em suas atividades práticas. Nesse contexto, as atividades oriundas de atividades práticas não eram vistas atenciosamente pelos filósofos e registros da aritmética prática não apareciam nas bibliotecas dos estudiosos (BOYER, 1974).

Em suma, pode-se dizer que a atividade de produção de conhecimento vinda dos pitagóricos estava associada à sua motivação em buscar respostas para os fenômenos sobre o universo por meio de generalizações inteligíveis (SILVA, 2019).

Quadro 4 – Extrato 2: A crise sobre a incomensurabilidade

Descrição	**Elemento tensionador**
Mas que é feito, então, da afirmação de que os princípios dos números são os elementos de todos os seres, que o Céu inteiro é harmonia e número? Que valor tem ela, se os números não podem dar conta, sequer, desta coisa simples e elementar que é a razão dos comprimentos de dois segmentos de reta? Onde está o alcance universal dessa afirmação? No dia em que foi descoberto o fenômeno da incomensurabilidade de segmentos, a escola pitagórica estava ferida de morte (CARAÇA, 1951, p.74).	A crise nos fundamentos pitagóricos de enumerabilidade e ordenação, frente à formação da consciência sobre os incomensuráveis (SILVA, 2019, p. 93).

Fonte – (SILVA, 2019)

No extrato 2, a morte que se refere Caraça (1958) representa uma quebra de paradigmas experimentada pelos pitagóricos. Os segmentos incomensuráveis acabaram proporcionando uma abertura para a elaboração de conceitos fundamentais e predecessores do entendimento sobre continuidade (SILVA, 2019).

Para além das questões de cunho lógico e filosófico, existe, também, a figura reveladora entre os números e a interação humana manifestada, principalmente em ações de contagem e medição. Portanto, a “crise dos incomensuráveis” acabou, de certa maneira, evidenciando o contraste que havia entre contagem e medida, assim como entre o discreto e o contínuo (BROLEZZI, 1996).

Após a confrontação entre comensurável/incomensurável, surgiu com força a pergunta sobre outras formas de realidade dual, que são importantes para a formação do pensamento grego: a contraposição divisível/indivisível, presente nas discussões acerca da natureza e possibilidade do movimento, bem como as noções de espaço/tempo (BROLEZZI, 1996).

Ao tratar dessas formas de realidade dual, Brolezzi (1996) traz para a discussão a existência dos indivisíveis. Nesse sentido, também envolta de uma imprecisão histórica, a primeira manifestação sobre os indivisíveis é atribuída a Demócrito de Abdera (460–370 a.C.) (SILVA, 2019).

Assim, a importância de Demócrito ser mencionado nessa discussão se fundamenta na ideia de que ele foi, aparentemente, a primeira pessoa a falar sobre os infinitesimais, bem como considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno visando recompor o todo, como o caso de usar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones (BROLEZZI, 1996).

Não foram encontradas fontes históricas que assegurem relação entre as mônadas dos pitagóricos e a teoria atomística de Demócrito, nem que a segunda tenha sido baseada na primeira. Contudo, ambas nos ajudam a entender o modo como a atividade matemática estava sendo desenvolvida nessa época. Acompanhado por uma ideia de enumerabilidade, ordenação, indivisíveis e intuitivamente de infinitesimais, esse tipo de pensamento contribuiu de maneira satisfatória para descrição e explicação dos fenômenos da vida humana (SILVA, 2019).

O questionamento sobre sua capacidade lógica surgiria anos depois pela escola filosófica surgida em Elea, na Grécia Antiga. O Extrato 3, a seguir, se constitui a partir desse contexto.

Quadro 5 – Extrato 3: A crise sobre os indivisíveis

Descrição	Elemento tensionador
A teoria dos infinitesimais de Demócrito e seus seguidores foi combatida duramente por outra escola filosófica, nascida em Eléa (Magna Grécia), pelo influxo das ideias de Parmênides. A doutrina eleática chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. Propunha, em substituição, considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico (BROLEZZI, 1996, p. 22)	A crítica aos fundamentos da teoria atomística, sobretudo no que compete à existência dos infinitésimos e do movimento (SILVA, 2019, p. 95).

Fonte – (SILVA, 2019)

As ideias filosóficas da teoria atomística foram criticadas duramente pela escola eleática, sobretudo com referência às figuras de Parmênides (aproximadamente 530-460 a.C.) e seu discípulo Zenão (aproximadamente 495-425 a.C.). Baseados em uma corrente filosófica que pressupunha os seres como unidade indivisível e estática, os eleáticos combateram as ideias atomísticas sobre a existência da multiplicidade e, sobretudo, do movimento. Essas críticas se pautavam na perspectiva de que os infinitésimos eram totalmente absurdos, uma vez que se possuíssem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles poderia compor uma reta de comprimento infinito. Caso não tivessem comprimento algum, então uma quantidade infinita deles, também, não teria comprimento (BROLEZZI, 1996).

A forma como os eleatas expuseram seus questionamentos acabou por marcar a história do pensamento matemático, especialmente no que concerne aos paradoxos de Zenão sobre o movimento. Os mais famosos são os paradoxos[6] da Dicotomia, de Aquiles, da Flecha e do Estádio (BOYER, 1974).

De acordo com Brolezzi (1996), mesmo distante de sugerir alguma intuição a respeito do conceito de Continuidade, Zenão revelou que “espaço e tempo possuem a propriedade da Continuidade, e esses paradoxos deixam a descoberto as dificuldades de se imaginar ou intuir os fenômenos associados à Continuidade” (p. 22).

Os paradoxos revelaram não apenas a incapacidade de argumentação lógica das teorias atomísticas no que tange a explicação da ideia de movimento a partir duma noção intuitiva sobre os infinitésimos, mas também explicita as intenções de Zenão em argumentar que toda mudança é ilusória (SILVA, 2019).

A instabilidade provocada pelos paradoxos de Zenão revelam especificidades relevantes sobre a construção do pensamento matemático na Grécia Antiga. A busca por respostas a estes conflitos atravessou séculos e só conseguiu encontrar uma base sustentável com a futura relação entre discreto e contínuo, assim como a relação entre

[6] Sugestão de vídeo que explica de maneira ilustrativa os paradoxos de Zenão: `https://www.youtube.com/watch?v=i8dmA8T_Vr8`

infinito atual e infinito potencial (BROLEZZI, 1996).

O extrato 4 é uma saída adotada pelos filósofos/matemáticos gregos para lidarem com esse contexto.

Quadro 6 – Extrato 4: A saída pela criação do método de exaustão

Descrição	**Elemento tensionador**
Nessa Matemática grega, o conceito de curva estava limitado à reta, circunferências e cônicas. Nela aconteceu a fuga de tudo que estivesse relacionado com concepções quantitativas e dinâmicas; particularmente do conceito de infinito, não porque se banisse da filosofia esse conceito, mas porque se renunciou abordar um estudo quantitativo do infinito, e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos. E da Matemática grega veio um método de raciocínio, o “método de exaustão” (COBIANCHI[7], 2001, p. 88 apud SILVA 2019).	A saída proposta pelos gregos para a incapacidade de lidar com as questões dos incomensuráveis e infinitésimos: a criação do método de exaustão (SILVA, 2019, p. 98).

Visando responder os questionamentos levantados pelos eleáticos, houve a elaboração teórica de formulação do pensamento sobre a razão/proporção e a relação entre figuras curvas e retilíneas (BOYER, 1974). Nesse contexto, ressaltam-se os feitos de Eudoxo de Cnido (390-330 a.C.) (SILVA, 2019).

Eudoxo estava no movimento de separação da Aritmética e Geometria, cuja efetivação ocorria no uso de estratégias para evitar a “resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, isto é, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações” (BROLEZZI, 1996, p.24).

A teoria de proporção entre dois segmentos se pautava em procedimentos sucessivos indefinidamente[7], de modo que a sua estrutura lógica não conseguia se sustentar frente aos problemas levantados sobre incomensuráveis e infinitésimos (SILVA, 2019).

De acordo com Boyer (1974), a proposta de Eudoxo foi estabelecer uma nova definição que driblasse tais problemas. Para tanto, ele postulou: *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando equimúltilplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da terceira e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente*. Em linguagem simbólica, temos:

[7] Quatro entidades estão em proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se as duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ tem a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número [inteiro] de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Se } m \cdot a < n \cdot b & \Longrightarrow \quad m \cdot c < n \cdot d \\ \text{Se } m \cdot a = n \cdot b & \Longrightarrow \quad m \cdot c = n \cdot d \\ \text{Se } m \cdot a > n \cdot b & \Longrightarrow \quad m \cdot c > n \cdot d \end{cases}$$

Pela forma de definir Eudoxo não precisava comentar a respeito dos infinitesimais e acabava estabelecendo uma relação entre grandezas que permitia alcançar uma grandeza de espécie *tão pequena quanto se queira*. Tal contribuição proporcionou um momento de avanço no pensamento matemático, o qual foi uma semente que deu frutos posteriores na ideia de limites e no próprio conceito de integral (RÍBNIKOV, 2019).

Ríbinikov (1987) afirma que o método da exaustão foi um instrumento que ajudou a tratar diversos problemas que envolviam o cálculo de áreas de figuras, volume de corpos, comprimento de curvas, busca de tangentes de curvas, etc. Porém foi Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) com quem o método ganhou novas significações.

Embora Arquimedes não tenha sido o primeiro a buscar o enquadramento de curvas, ele foi o primeiro a conseguir estabelecer relações que sobreviveram às incoerências apontadas pelos eleátas (BROLEZZI, 1996).

4.4.2 Período de Desenvolvimento da Matemática Elementar

Recorrendo a uma observação histórica, até o século XVI prevaleciam as concepções gregas, as quais separavam o entendimento a respeito das quantidades de duas maneiras distintas: o discreto (número) e o contínuo (grandeza). A tradução desses componentes se deu pelo estudo das grandezas e dos números, ou seja, como o estudo da Geometria e da Aritmética. Assim, a ideia de número estava relacionada com um processo de abstração aplicado ao mundo material (PENTEADO; SILVA, 2009).

No que tange ao desenvolvimento do conceito de Continuidade, no período compreendido pelo Império Romano e pela Idade Média destacou a ampla difusão e aplicação dos trabalhos de Arquimedes e o desenvolvimento do pensamento algébrico em civilizações árabes (BROLEZZI, 1996).

O Renascimento, conforme Silva (2019), gerou diversas mudanças sociais e políticas, as quais foram influenciadas pelas necessidades do modo de produção capitalista. Sendo assim, o extrato 5 é estruturado a partir desse contexto:

O período de transição do Feudalismo Europeu para o Renascimento ficou frisado pela intensificação de relações comerciais, bem como pelo aumento da população nas cidades, impulsionados pela fuga do campo e pela vontade de viver em melhores condições (EVES, 1969). Além disso, o fim da escravidão e a exploração marítima de novas rotas acabaram provocando novos problemas, os quais demandavam uma matemática para além da escola grega clássica (SILVA, 2019).

Quadro 7 – Extrato 5: Necessidades advindas do modo de produção capitalista

Descrição	**Elemento tensionador**
Para uma nova ascensão da ciência matemática foi necessária uma nova ascensão das forças produtivas da sociedade humana. Na Europa e na região da bacia do Mediterrâneo, este novo princípio em ascensão apareceu somente muitos séculos depois, começando com a época do chamado Renascimento, época final do Feudalismo e começo do desenvolvimento do modo de produção capitalista. Ademais, uma das fontes mais importantes de novas ideias matemáticas foi a assimilação da herança clássica dos matemáticos da Grécia Antiga, Euclides, Arquimedes e outros (RÍBNIKOV, 2019, p. 106).	Mudanças em âmbitos sociais, políticos e econômicos que provocaram o surgimento de novas necessidades e a busca por sua satisfação através da ressignificação das bases do pensamento advindo da escola grega clássica (SILVA, 2019, p. 102).

A título de exemplo, os problemas que emergiram no contexto da navegação levaram os sujeitos a empregar investigações mais cuidadosas sobre o movimento dos astros, exigindo, a partir de então, um estudo quantitativo mais rigoroso - que permitisse medir e prever. Assim, diante de uma exigência nova, estava uma insuficiência antiga que a bloqueava, sendo uma barreira que deveria ser derrubada, e que se convertia em uma evolução necessária (COBIANCHI, 2001).

Um ponto crucial que alavancou a produção matemática da época é o fato de que essa construção de conhecimentos aconteceu fundamentada sobre os pensamentos da escola grega clássica, entretanto possuía um despendimento do rigor lógico tão profundo (EVES, 1969).

No desenvolvimento conceitual da continuidade, uma das principais manifestações do pensamento está ligada à (re)significação do Infinito/Infinitésimos tendo como partida os trabalhos de Simon Stevin (1548-1620), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647). As investigações citadas buscaram solucionar problemas da época, tais como a questão do centro de gravidade de figuras de Stevin, além da vasta produção de instrumentos de medida de Galilei e da medida do volume dos barris de Kepler; para cada problema foi usado o método de exaustão difundido por Arquimedes, mas com um novo tratamento dado às infinidades, as quais eram deixadas de lado pelo pensamento grego. O extrato 6 é formado por meio da produção de Cavilarei sobre a Teoria dos indivisíveis.

Quadro 8 – Extrato 6: A produção do conhecimento sobre os infinitésimos

Descrição	**Elemento tensionador**
[O argumento de Cavalieri se baseava em] que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos. Embora Cavalieri na época não pudesse tê-lo percebido, ele seguiu as pegadas realmente muito respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em O Método, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos (BOYER, 1974, p. 241).	A produção do conhecimento sobre os indivisíveis de Cavalieri frente à necessidade de lidar com a questão dos infinitésimos (SILVA, 2019, p. 105).

O método dos indivisíveis, proposto por Cavalieri, pode ser expresso por dois princípios:

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções de segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2004, p.426).

Tal método acarretou em um expressivo desenvolvimento da Matemática para a época haja vista que propiciou a resolução de diversos problemas que, frente ao pensamento grego, não foram resolvidos. O movimento de pensamento de Cavalieri não buscava aprofundar a lógica que sustentava a teoria grega, mas buscava romper as fronteiras epistemológicas que impediam o desdobramento de novas ideias, o que revela o modo particular da atividade matemática da época vinculadas a uma realidade em transformação (SILVA, 2019).

Sendo assim, houve um certo estabelecimento mais sólido a respeito dos infinitésimos. Esse movimento também permitiu que problemas relacionados ao movimento fossem enfrentados (SILVA, 2019). Para tratar dessa questão, segue o extrato 7.

Quadro 9 – Extrato 7: A compreensão matemática do movimento

Descrição	**Elemento tensionador**
A descoberta e a re-significação da física aristotélica nesse período irá provocar, sem dúvida, sensíveis mudanças na produção do conhecimento matemático. Foi o que aconteceu: para dar conta dos novos modelos e interpretações dos fenômenos físicos, a matemática precisará se despojar, de modo paulatino, de sua característica estática, finita e rigorosa herdada dos antigos (REZENDE, 2003, p. 123).	O desenvolvimento do pensamento a partir do estabelecimento da relação entre a Geometria e a Álgebra, e construção de uma teoria de explicação do movimento (SILVA, 2019, p. 107).

Esse elemento tensionador se estabelece a partir do momento que o pensamento geométrico se aproximou dos procedimentos algébricos, o que possibilitou um tratamento adequado para a dinamicidade dos fenômenos (SILVA, 2019).

Os conceitos de movimento não foram preponderantes no formalismo da Matemática da Grécia. O conceito de movimento, assim como o conceito de variabilidade e de funcionalidade se desenvolveram através da Filosofia (REZENDE, 2003).

Impulsionado pelo espírito revolucionário da época, René Descartes passou a utilizar estruturas algébricas em conjunto com métodos já estabelecidos pela Geometria. A título de exemplo, ao tratar das questões sobre a compreensão de área e volume, Descartes passou a conceber o produto de dois segmentos ou mais como segmento também, isto é, se pensarmos x como uma unidade de segmento, a multiplicação $x \cdot x$ (ou x^2) também resultará em segmento – não mais a área de um retângulo de base x e altura x. Essa maneira de pensar permitiu uma liberdade de pensamento, haja vista que não seria preciso recorrer à limitação figurativa dos instrumentos geométricos (BOYER, 1974).

Ao passo que os trabalhos de Descartes apontavam para a criação da geometria algébrica, outro matemático se destacou nessa época: Pierre de Fermat. Este se dedicou à construção de uma relação entre os conceitos geométricos e algébricos no enfrentamento de problemas que envolviam movimento (SILVA, 2019).

O destaque nos trabalhos de Fermat estavam na adoção de estratégias que relacionam-se aos infinitésimos, a partir da ideia do estudo da vizinhança de um certo ponto de máximo ou mínimo em problemas que envolviam otimização (EVES, 2004).

A título de exemplo, em curvas da forma $y = f(x)$ Fermat adotou um modo muito criativo para encontrar pontos nos quais a função assume um valor de máximo ou de mínimo. Ele comparava o valor de $f(x)$ e, em um ponto vizinho, $f(x + E)$. Em geral esses valores são diferentes, mas em um ponto alto ou baixo da curva lisa, a variação será bem pequena. Portanto, Fermat igualava $f(x)$ com $f(x + E)$, percebendo que quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto a igualdade passaria a ser verdadeira, de modo que ele dividia os dois lados por E e fazia $E = 0$. Os resultados lhe rendiam as abscissas dos pontos de máximo e de mínimo do polinômio (BOYER, 1974).

Em notação atual, a proposição de Fermat é uma interpretação algébrica embrionária da diferenciação e um método para determinar pontos de máximo e mínimo por meio da equação $lim_{E \longrightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E} = 0$. Contudo, esse método não estabelecia que a condição $f'(x) = 0$ é necessária, mas não suficiente para determinar o máximo ou mínimo, assim como não distinguia se o valor era de máximo ou de mínimo (EVES, 2004).

Nesse contexto, é interessante o apontamento de Rezende (2003):

> A primeira grande diferença, provocada pela introdução do simbolismo algébrico na geometria, ocorre no próprio conceito de infinitesimal. Enquanto quantidades infinitesimais estiveram associadas, ao longo da história, a linhas ou superfícies indivisíveis, ou mesmo números infinitamente pequenos, com Fermat, as quantidades infinitesimais passam a ser uma “constante indeter-

> minad", representada em geral pela letra "E", e que assume um papel mais próximo do nosso conceito de variável (REZENDE, 2003, p.166).

Portanto, a partir dos trabalhos de Fermat, é possível perceber que o conceito de indivisível e de quantidades infinitamente pequenas voltam ao cenário matemático, tornando os processos infinitos um instrumento normal da época: "é a geometria euclidiana caminhando na direção da invenção do Cálculo" (REZENDE, 2003, p.123).

4.4.3 Período de Desenvolvimento da Matemática das Variáveis

O desenvolvimento do pensamento matemático que se pautasse na consideração da variabilidade dos fenômenos pode ser entendido como o momento de criação da análise infinitesimal. O elemento propulsor para a elaboração de teorias sobre o movimento foi o estabelecimento da relação entre os métodos integrais e diferenciais ao longo século XVII (SILVA, 2019).

Quadro 10 – Extrato 8: Os métodos infinitesimais na produção do pensamento

Descrição	**Elemento tensionador**
As causas que motivaram este processo [a criação da análise infinitesimal] foram em primeiro lugar as exigências da mecânica, a astronomia e a física. Estas ciências não somente projetavam à matemática as exigências da resolução de uma ou outra classe de problemas. Elas enriqueciam suas representações acerca das magnitudes contínuas e movimentos contínuos, acerca da essência e forma das dependências funcionais. Em uma estreita interação da matemática e as ciências próximas se elaboraram os métodos infinitesimais que são a base da matemática das variáveis (RÍBNIKOV, 2019).	A elaboração de métodos infinitesimais sobre a produção do pensamento matemático e no enfrentamento de problemas que envolvem o movimento. (SILVA, 2019, p. 111).

Com base no extrato apresentado é possível inferir uma efervescência na matemática com a elaboração de novas teorias que alcançassem o que, até então, havia sido acumulado, sobretudo no que diz respeito à consideração dos fenômenos em movimento, visando elaborar, à posteriori, teorias gerais para tratar variáveis e grandezas contínuas (SILVA, 2019).

A origem dos métodos integrais e diferenciáveis envolvem a resolução de problemas de natureza distinta. Contudo, o grande salto no desenvolvimento da análise infinitesimal foi o estabelecimento da relação de inversibilidade entre tais métodos. A construção desta relação é fruto de uma série de situações em que é recorrente ser atribuída à busca de soluções para problemas inversos envolvendo tangentes (SILVA, 2019).

O ponto de encontro esses métodos está imbricado na ideia de relacionar os infinitesimais com fenômenos da realidade (REZENDE, 2003). Posto isso, segue o próximo extrato, o qual foi construído com vistas à significar o contexto de criação do Cálculo e a relação entre diferencial e integral.

Quadro 11 – Extrato 9: A criação do Cálculo

Descrição	Elemento tensionador
O desenvolvimento dos cálculos matemáticos carrega um caráter dialético expressado claramente. No domínio dos cálculos já existente transcorre o processo de acumulação de premissas, elementos e partes componentes do novo Cálculo. A continuação alcança o momento quando ocorre a virada no método. Surgem trabalhos matemáticos, nos quais os feitos acumulados em um domínio dado se reconsideram desde um novo ponto de vista único. O centro da atenção passa dos esforços por resolver problemas independentes ao próprio método ou grupo de métodos, os quais se formulam explicitamente, se aperfeiçoam e se aplicam. O campo de aplicação do Cálculo surgido de tal maneira, como regra, resulta mais amplo que o campo de origem. Os trabalhos de I. Newton e G. W. Leibniz sobre a análise infinitesimal refletem precisamente este ponto de virada na história da Análise Matemática (RÍBNIKOV, 2019).	O aprofundamento da análise infinitesimal com a criação do Cálculo a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz. (SILVA, 2019, p. 112).

O aprofundamento sobre a análise infinitesimal acarretou mudanças profundas sobre a produção de conhecimentos matemáticos. Como abordado no Extrato 9, o que antes se baseava no acúmulo de soluções para problemas práticos, agora os esforços passam a se centrar na elaboração de leis gerais sobre os fenômenos e métodos (SILVA, 2019).

O destaque para as produções de Newton e Leibniz no século XVII se deve à forma como cada um deles conseguiu estabelecer a inversibilidade entre métodos integrais e diferenciais – o que se deve à concepção atribuída deles sobre os infinitésimos (SILVA, 2019).

De modo geral, a visão de Leibniz concebia os infinitésimos numa perspectiva discreta, ao passo que Newton considerava os mesmos continuamente. Tais divergências na explicação da natureza do "ser" das variáveis e dos fenômenos relacionados a elas serviram para dar sustentação teórica nesse período inicial do Cálculo, de modo que a matemática pudesse perpassar por maior estruturação ultrapassando, assim, a visão dicotômica entre o discreto e o contínuo (BROLEZZI, 1996).

4.4.4 Período de Desenvolvimento da Matemática Moderna

Nos séculos XVIII e XIX houve uma complexificação social advinda do capitalismo industrial, de modo que a atividade Matemática passou a se estruturar com objetivos em si mesma, seguindo a busca por uma formalização rigorosa de seus conceitos para estabelecer-se como um campo científico particular (SILVA, 2019). Sendo assim, segue o extrato 10 para tratar da necessidade de mudanças na atividade matemática.

Quadro 12 – Extrato 10: Necessidade de mudanças na atividade matemática

Descrição	**Elemento tensionador**
O cálculo, apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos matemáticos da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam. E só perto do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando, em suas várias ramificações, a maior parte dos cem anos seguintes. Como consequência desse empreendimento, verificou-se um trabalho e igualmente cuidadoso com os fundamentos de todos os ramos da matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes (EVES, 2004, p. 462).	A formalização rigorosa dos conceitos frente à superação do domínio da aplicabilidade e intuição (SILVA, 2019, p. 117).

O número de trabalhos nas ciências exatas sofreu um aumento, em razão da possibilidade de resolução via método da análise infinitesimal. Nesse sentido, houve uma convicção de que a resolução das equações diferenciais se tratavam de um método universal de conhecimento (RÍBNIKOV, 2019).

Por outro lado, havia um acirramento entre a aplicabilidade e a sua fundamentação lógica, já que as operações envolvendo infinitesimais não estava devidamente estruturada (SILVA, 2019).

Em meio a esse cenário, existiam matemáticos que se esforçaram para construir formalmente os conceitos de Cálculo, movimento este que se expandiu para outras áreas como Geometria, Aritmética e Álgebra. Foi através desse processo que se desenvolveu uma revisão da ideia de infinitesimal e a continuidade passou por mais elaboração (SILVA, 2019).

Um matemático que merece destaque nesse contexto histórico foi Leonhard Euler, pois uma de suas contribuições esteve relacionado com um desenvolvimento do Cálculo e da Análise, embora estivessem limitados ao estudo de funções que apresentam as mesmas propriedades de expressões analíticas (REZENDE, 2003). O avanço sobre esta questão culminou, em um segundo momento, na criação dos conceitos de limite e continuidade (SILVA, 2019).

A respeito dos infinitésimos, Euler considerava que uma quantidade infinitamente pequena ou evanescente era algo que em suma seria nulo. Mesmo que a ideia se aproxime do limite (quantidade que tende a zero), para Euler o que de fato existia era o valor zero e não uma certa aproximação (SILVA, 2019).

Em contrapartida, um outro matemático teve maior aceitabilidade quanto aos infinitésimos: Jean Le Rond D'Alembert. Ele considerava que os infinitésimos não podem ser vistos como uma certa quantidade fixa em um estágio localizado entre algo substancialmente positivo e zero, isto é, entre a possibilidade de existir e de não existir. Posto isso, se uma quantidade existe, ela não pode deixar de existir em certo momento. O infinitamente pequeno é algo que deve ser entendido via limite (SILVA, 2019).

Sendo assim, os estudos de Euler e D'Almbert acabaram penetrando profundamente o desenvolvimento do Cálculo e da Análise, principalmente na construção do conceito de continuidade, sobretudo na elaboração de teorias sobre limite, continuidade e diferenciação (SILVA, 2019). Assim, o extrato 11 se configura a partir desse contexto.

Quadro 13 – Extrato 11: Necessidades na elaboração de uma teoria sobre limites

Descrição	**Elemento tensionador**
[As] definições do conceito de limite e dos conceitos com ele relacionados podem servir somente para explicação, interpretação e finalmente justificação da validez dos resultados da análise infinitesimal. [...] Mas para a introdução na análise das considerações sobre o limite [...] teve que se superar grandes dificuldades relativas à: necessidade de determinar a existência dos limites; a ausência de um algoritmo do cálculo de limites; a ausência da expressão matemática dos limites que permitia operar com eles e o simbolismo correspondente (RÍBNIKOV, 2019, p. 359)	A formalização no tratamento dos infinitésimos/infinito por meio de uma teoria sobre Limites (SILVA, 2019, p. 121).

Durante o século XIX ainda persistia o problema de ordem lógica sobre os infinitésimos. Apesar de já existir definições sobre o conceito de limite, estas ainda precisavam de um tratamento formal e, portanto, o elemento tensionador estava relacionado com essa precisão de formalizar tal conceito (SILVA, 2019).

Nesse contexto é importante destacar os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy, os quais tentavam, de um ponto de vista lógico, formalizar o conceito de limite. A base teórica construída por este sujeito enxergava os infinitésimos como números fixos muito pequenos, de modo que a definição deles era considerada a partir do conceito de variável dependente usando a ideia de limite (SILVA, 2019).

A definição de limite proposta por Cauchy se aproxima da ideia de D'Alembert: "quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixado por uma diferença dele tão pequena quanto se queira, este último é então chamado o limite de todos os outros" (REZENDE, 2003, p. 242).

Contrariamente, Cauchy buscou considerar os infinitésimos a partir de uma aritmética rigorosa e não evitou o trabalho com tal noção. Em suas colocações, o infinitesimal não se trata de um número constante, tampouco possui um valor nulo (zero), porém é uma variável cuja aproximação tende a zero (SILVA, 2019).

Com esse feito, deu-se início a um novo campo de investigação para o desenvolvimento dos conhecimentos do Cálculo e da Análise, principalmente com respeito ao conceito de continuidade. Cabe destacar que, uma vez fundamentada a teoria de limites, Cauchy também acabou formando uma estrutura para definir continuidade de funções (SILVA, 2019).

Uma função $f(x)$ será contínua entre dois valores fixados x se para cada valor de x entre estes limites o valor numérico (absoluto) da diferença $f(x+\alpha)-f(x)$ decresce indefinidamente com α. De outro modo, a função $f(x)$ será contínua em relação a x, entre dois valores dados, se entre tais valores um incremento infinitamente pequeno de uma variável sempre produzir um incremento infinitamente pequeno da função dessa variável. Por outro lado, apesar de todo esse avanço no conceito de função, bem como na ideia de função contínua, carecia a formalização do conjunto dos números reais (COBIANCHI, 2001)[8].

Os limites, na proposta de Cauchy, estavam relacionados com os números racionais, mesmo aqueles ligados à sequências e séries. A questão que se coloca nesse contexto é fragilidade de garantir a existência do limite, o que mais à frente exigiria uma formalização da continuidade em termos de $\mathbb{R}$ (SILVA, 2019).

Com efeito desse processo para a significação da continuidade, pode-se destacar a contribuição do matemático Karl Weierstrass. Isso se deve ao fato deste matemático conceber uma teoria estática sobre o conceito de variável (SILVA, 2019).

Weierstrass criticou os trabalhos de Cauchy, pois este se pautava na noção de movimento contínuo da função, cuja variável se aproximava de um dado limite. A proposta de Weierstrass compreendia a variável como uma expressão genérica, em forma de letra, que se refere a qualquer número de conjuntos de valores numéricos (BOYER, 1974). Assim, um conjunto contínuo pode ser definido da seguinte maneira: "se para qualquer valor x_0 do conjunto e para qualquer sequência de números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_n$, entretanto pequenos, existem nos intervalos $(x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i)$ outros elementos do conjunto, então este conjunto será contínuo (REZENDE, 2003).

A mudança anunciada por Weierstrass acaba eliminando o comentário a respeito dos infinitesimais.

> Na teoria de limites de Weierstrass o conceito de limite não está associado a qualquer ideia de movimento contínuo, mas, ao contrário, é definido a partir de uma relação lógica entre duas desigualdades. O seu conceito de variável não representa uma passagem progressiva através de todos os valores de um intervalo, mas a suposição disjuntiva de qualquer um dos valores do intervalo.

[8] COBIANCHI, A. S. **Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores**. 2001. 433f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

> Portanto, não faz sentido perguntar na teoria de limites de Weierstrass “se uma variável alcança, ou não, o seu valor limite”, mesmo porque a questão que se coloca agora é “se o limite de uma função é, ou não, igual a L”. O conceito de limite de Weierstrass não envolve a ideia de aproximação, mas é tão somente um estado de coisas estáticas (REZENDE, 2003, p. 252).

Essa forma de lidar com o conceito de limite acaba se inserindo em um movimento de formalização e aritmetização da Análise. Sendo assim, as propostas de Weierstrass abriram portas para a construção de novas necessidades a respeito da construção dos conjuntos numéricos e, por conseguinte, do conceito de continuidade. Nesse sentido, os trabalhos de Georg Cantor e Richard Dedekind buscaram formalizar os conjuntos numéricos. O extrato 12 se constitui no aprofundamento da continuidade e na criação de número real (SILVA, 2019).

Quadro 14 – Extrato 11: Necessidades na elaboração de uma teoria sobre limites

Descrição	**Elemento tensionador**
A fundamentação dos conceitos da Análise trouxe de volta, então, os problemas de Zenão com respeito aos conceitos de infinito e continuidade. Para muitos matemáticos esses dois conceitos eram - assim como a própria operação de limite foi um dia – conceitos metafísicos, e se encontravam além da definição matemática. Por tal razão, suas definições eram muito mais objeto da Filosofia do que da Matemática. Mais uma vez, os matemáticos estavam enganados... (REZENDE, 2003, p. 253)	A formalização do conceito de Continuidade e a criação dos Números Reais com Dedekind (SILVA, 2019, p. 124).

Cabe destacar que durante a segunda metade do século XIX, por causa do movimento de aritmetização da análise, a grande motivação na elaboração de uma teoria sobre os conjuntos se alicerçou na definição de uma coleção de agregados numéricos infinitos e contínuos que não se pautavam na ideia de limite (SILVA, 2019).

A continuidade foi um dos assuntos mais discutidos no âmbito da ciência de todos os tempos, talvez isso se deva a uma certa noção intuitiva da continuidade como sendo a de uma variação que se faz por gradações insensíveis (CARAÇA, 1951).

Posto isso, seria necessário que os matemáticos imergissem em um afastamento dessas percepções sensíveis, para que assim pudessem construir argumentos teóricos devidamente coerentes sobre a continuidade. Esse processo teve como ponto de partida os trabalhos de Richard Dedekind, o qual reconheceu que a reta geométrica era contínua (SILVA, 2019). Na sequência, segue uma fala que é atribuída a Dedekind e que foi exposta por Caraça (1958) que trata a respeito da relação de continuidade com a reta:

> *nós atribuímos à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, de um modo vago,*

> *de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas; o que se procura é formular uma propriedade característica e precisa da continuidade que possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias. [...] [Assim] verificou-se que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo ponto de uma delas está à esquerda de todo ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo ponto de uma das classes está à esquerda de todo os pontos da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes. Como já disse, creio não errar admitindo que toda gente reconhecerá imediatamente a exatidão do princípio enunciado. [...] A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade (CARAÇA, 1951, p. 59).*

Assumindo o princípio de que a reta é contínua, Dedekind pode estudar a correspondência entre o conjunto dos números racionais e este objeto geométrico, mas atestou que não existia correspondência um a um entre os elementos dos números racionais e a reta. Tal percepção apontou para uma insuficiência dos racionais preencherem a reta, ou seja, existiam lacunas no conjunto dos números racionais (SILVA, 2019).

Sobre as ideias de estabelecimento da infinidade de um conjunto, Dedekind propôs a demonstração que a reta é constituída por infinitos pontos. De maneira geral, seu argumento está pautado no processo de divisões sucessivas de segmentos da reta, levando o raciocínio para a determinação de infinitos pontos que constituem a reta e de infinitos pontos que compõe qualquer de seus segmentos (SILVA, 2019).

A ideia de densidade, segundo Dedekind, se pautava no argumento geométrico de que entre dois pontos A e B pertencentes a uma certa reta, sempre é possível detectar uma infinidade de pontos entre eles, não importando a distância entre A e B (CARAÇA, 1951).

É importante destacar que o conceito de densidade já havia sido considerado por Galileu e por Leibniz, os quais visualizavam a continuidade diretamente relacionada com a densidade, pois a existência de infinitos pontos entre dois quaisquer do mesmo conjunto poderia garantir a formação do contínuo. Entretanto, Dedekind construiu argumentos que detectaram a possibilidade de um conjunto ser denso e, mesmo assim, possuir infinitas lacunas na reta (SILVA, 2019).

De mais a mais, a ideia anunciada por Dedekind buscava estabelecer uma bijeção entre um conjunto numérico e a reta, ou seja, procurava estabelecer rigorosamente a continuidade, o que implicou na construção de um novo conjunto numérico que tivesse essa propriedade. Com isso, $\mathbb{R}$ foi construído a partir da extensão da estrutura já existente nos números racionais (como relação de ordem e densidade) e os números irracionais passaram a ter uma interpretação que culminava na formação do *continuum* e, assim, o conjunto dos números reais passou a ter um significado próprio (SILVA, 2019).

Ao considerarmos a breve discussão sobre a continuidade é visível que se trata de uma discussão que perpassou por muitos períodos diferentes da história da humanidade, o que justifica a dificuldade em lidar com esse conceito do ponto de vista intrínseco à Matemática acadêmica.

O cenário exposto anteriormente também justifica uma menor quantidade de trabalhos que tratem a respeito da continuidade, entretanto conseguimos encontrar algumas pesquisas que foram averiguar o que diversos sujeitos pensam sobre tal conceito, como segue na próxima seção.

4.4.5 Ideias sobre a continuidade em pesquisas de campo

Cobianchi (2010) investigou como a continuidade é ensinada considerando uma possível articulação do conceito com a sua história. Sendo assim, buscou averiguar o tratamento dado aos números reais e a continuidade através de respostas de professores que trabalham no Ensino Fundamental, Médio e Superior. Para tanto, foram desenvolvidos dois instrumentos de pesquisa: um questionário com 15 perguntas e um roteiro de entrevistas com três perguntas.

O questionário foi respondido por 43 professores, os quais revelaram a vida estudantil do entrevistado, assim como a sua relação com a matemática envolvendo números reais e continuidade. Com base nas respostas obtidas foi possível observar um comportamento já debatido em outras seções: a introdução de números reais é dada pela fala de que $\mathbb{R}$ é o conjunto formado pela união do conjunto dos números racionais e dos números irracionais, sendo que o número irracional é definido como o contrário do racional. Além disso, tais docentes disseram que comentam em sala de aula que cada ponto da reta representa um número real, o que foi um indicativo de lacunas existentes na licenciatura e em livros didáticos (COBIANCHI, 2010).

A entrevista, por sua vez, foi realizada com 16 professores que participaram da etapa anterior. Na primeira pergunta foram apresentadas quatro justificativas para a continuidade, escolhidas em quatro períodos históricos, os quais visavam averiguar a opinião dos professores sobre qual dessas justificativas melhor explicava a continuidade, bem como saber se os mesmo tinham conhecimento a respeito dessas diferentes possibilidades (COBIANCHI, 2010).

A primeira justificativa apresentada se pautava nas ideias de Eudoxo (408-355 a.C.) para lidar com os incomensuráveis: *Dadas duas grandezas desiguais, se da maior se tira uma grandeza maior que sua metade e da que resta, outra grandeza maior que sua metade e se repete este processo, resta uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas* (COBIANCHI, 2010).

A segunda justificativa usa os princípios de Boaventura Cavalieri (1597-1647): *Um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível* *de um sólido dado é uma secção desse sólido. Uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e o volume pode ser considerado como composto de seções que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. Isto é, uma porção plana formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. De maneira análoga é o procedimento para volumes* (COBIANCHI, 2010).

A terceira justificativa está relacionada com algumas ideias de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que englobam seus estudos sobre infinitésimos, limites e função contínua. *Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero*. Há, também, o destaque para a definição verbal de limite: *Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros*. Na sequência é explicitado que uma função $f(x)$ é contínua em relação à x se, entre estes valores, um incremento infinitamente pequeno de uma variável sempre produz um incremento infinitamente pequeno da função dessa variável (COBIANCHI, 2010).

A quarta justificativa traz a ideia de Richard Dedekind (1831-1916), a qual tem como axioma a continuidade da reta. *Se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tais que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, esta separação da linha reta em duas porções* (COBIANCHI, 2010).

A segunda pergunta buscava saber se alguma das justificativas apresentadas eram usadas para discutir a respeito da continuidade em sala de aula – no caso da resposta ser positiva, então era pedido para os professores explicarem como faziam (COBIANCHI, 2010).

A terceira pergunta procurava observar se os respondentes usavam alguma outra justificativa ou estratégia de ensino diferente das que foram apresentadas na primeira pergunta para abordar a continuidade (COBIANCHI, 2010).

Em resumo, os professores do Ensino Superior associam imediatamente a continuidade com a ideia e definição de função contínua, preferindo a definição de Cauchy. É importante frisar que a justificativa de Dedekind é tida pelos mesmos como apenas um elemento experimental que pode ajudar no entendimento de função contínua. Alguns outros professores associam a reta com o conjunto $\mathbb{R}$, em uma noção intuitiva de bijeção entre tais objetos. Por outro lado, poucos entrevistados apontaram que a justificativa de Dedekind é mais do que uma mera noção intuitiva (COBIANCHI, 2010).

Professores que trabalham na Educação Básica optaram pela explicação de Cauchy, mas frisaram que o formalismo impõe que essa abordagem seja feita somente em cursos de Ensino Superior (COBIANCHI, 2010).

A primeira pergunta da entrevista revelou que somente dois professores associaram a definição de limite e função contínua com os cortes de Dedekind, justificando que para a definição de limite é necessário o conjunto $\mathbb{R}$, o qual foi construído segundo as justificativas fornecidas pelos cortes de Dedekind (COBIANCHI, 2010).

Outra conclusão foi que os professores que participaram das entrevistas, em sua maioria, acreditavam na possibilidade de junção das diversas justificativas para produzir um procedimento de ensino que relacionasse a continuidade e os números reais. No entanto, os participantes não saberiam explicar tais conceitos de uma forma diferente das justificativas apresentadas, situação que está ligada a maneira como o livro didático aborda esse tema (COBIANCHI, 2010).

De acordo com a análise feita em livros didáticos por Cobianchi (2010) temos um panorama de pouco aprofundamento conceitual a respeito dos números reais. Foram investigados 22 livros de Cálculo, 5 livros de Análise Real e 35 livros de Ensino Fundamental e Médio, os quais normalmente iniciam a apresentação de $\mathbb{R}$ começando por uma revisão de conjuntos numéricos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ e os irracionais como um conjunto diferente dos racionais; assim, o conjunto dos números reais é a união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Conforme essa abordagem, $\mathbb{R}$ foi construído quase sem dificuldades em toda a sua trajetória, uma vez que nessa ordem de apresentação os conjuntos são pedagogicamente encaixados um após o outro. Os autores de livros didáticos declaram que cada ponto da reta representa um número real, mas não há qualquer problematização a respeito dessa afirmação (COBIANCHI, 2010).

Na investigação de Dias (2002), houve o apontamento de resultados interessantes que sugerem benefícios de se debater a respeito dos conceitos que foram conversados ao longo dos capítulos. Os poucos participantes que manifestaram um conceito coerente com a definição de densidade possuíam a ideia de que a reta numérica e o conjunto dos números reais estão em bijeção. Em contrapartida, os estudantes que tinham um conhecimento vago a respeito dos números irracionais reproduziam uma generalização abusiva dos números racionais para os números reais, cenário esse que foi detectado no conceito imagem de *reta racional*.

Problemática semelhante também foi detectada por Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) ao questionarem se todos os pontos da reta numérica correspondem a um número racional. Apensar das expectativas dos autores em obterem a resposta “não”, tal retorno só foi dado por 40% dos estudantes da 9ª série, 47% dos estudantes da

10^a série e por 66% dos estudantes universitários.

Quando questionados se todos os números irracionais correspondem a um ponto na reta real, os investigados apresentaram os seguintes índices de acerto: 63% para estudantes da 9^a série, 56% para estudantes da 10^a série e de 80% de licenciandos(FISCHBEIN *et al.*, 1995).

Os alunos também foram questionados se todos os pontos da reta numérica correspondem a um número real. A resposta sim foi dada apenas por 37% dos estudantes da 9^a série, 63% dos estudantes da 10^a série e por 90% dos estudantes da licenciatura (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

A ideia de continuidade da reta numérica foi mencionada para justificar que existem infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais. Isso não é necessário, já que a densidade dos números reais garante tal propriedade (PENTEADO, 2004). Por outro lado, a continuidade dos números reais é, de fato, mais forte que o potencial de densidade dos racionais. Embora o conjunto $\mathbb{Q}$ seja denso e apresente essa propriedade na reta numérica, não é capaz de cobrir todos os pontos de um determinado intervalo (FISCHBEIN *et al.*, 1995).

Considerando tudo o que foi exposto neste capítulo, se faz necessário ver quais desses pressupostos discutidos aparecem nesta presente investigação, bem como outros tipos de pensamento que não foram detectados nessa revisão bibliográfica.

5 O QUE REVELOU A PRESENTE INVESTIGAÇÃO?

Inspirado por leituras que fundamentaram o presente trabalho de conclusão de curso, as quais envolviam estudantes do Ensino Médio e estudantes de Licenciatura em Matemática, busquei investigar através de uma pesquisa de campo, de cunho exploratório, o grau de entendimento dos estudantes a respeito de conceitos relacionados aos números reais.

Para coletar dados, optamos por dois questionários anônimos. O questionário intitulado *Números reais em uma abordagem para a Educação Básica - Formulário para o Ensino Superior* foi criado na plataforma *Google Forms* e compartilhado no Fórum de Graduação da Matemática da UFSC campus Florianópolis - SC, o qual abrange os estudantes da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática. Esse formulário compreendeu o período entre 08/07/2021 e 12/08/2021, totalizando 29 participantes.

No período de coleta de dados eu estava lecionando presencialmente em uma escola estadual no município de Balneário Camboriú - SC. Sendo assim, o questionário intitulado *Números reais em uma abordagem para a Educação Básica - Formulário para o Ensino Médio* foi oportunizado aos estudantes de modo impresso, haja vista que nem todos os discentes possuem acesso à internet. Sendo assim, os respondentes são de turmas de 1º e 2º ano do Ensino Médio, os quais também são estudantes de curso Técnico em Hospedagem. Esse formulário compreendeu o período entre 02/08/2021 e 12/08/2021, totalizando 26 respostas de alunos do 1º ano e 13 respostas de alunos do 2º ano.

As respostas abertas foram categorizadas em grupos que compartilhavam de características comuns, de acordo com os trabalhos de Broetto (2016) e de Soares, Ferreira e Moreira (1999). Os dados objetivos (nos quais as pessoas apenas assinalavam se acreditam naquela possibilidade) foram investigado por meio de tabelas de frequência.

Os questionários foram estruturados em três seções: *classificando os números*, *em busca de justificativas* e *imagens conceituais*. Para um melhor entendimento de cada etapa, usaremos essas divisões na sequência.

5.1 CLASSIFICANDO OS NÚMEROS

As perguntas desta seção foram pensadas e ajustadas segundo os trabalhos de Soares, Ferreira e Moreira (1999), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) e Broetto (2016).

5.1.1 Dados obtidos no Ensino Médio

Na questão eram apresentados cinco números reais e o objetivo era fazer com que os participantes do Ensino Médio apontassem as características de cada número. Sendo assim, foram apresentados os seguintes números: $-\frac{22}{7}$, $\sqrt{-6+150}$, $(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$, $0,12345678910111213 14...$, $0,1234567891011121314$. Ademais, os estudantes poderiam assinalar se cada número era natural, inteiro, racional, irracional, real, positivo, e/ou negativo, bem como poderiam assinalar que nenhuma das alternativas anteriores contempla o número em questão.

Considerando os números expostos, as respostas ideais que deveriam ser apontadas, seguem na tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Modelo de respostas esperado pelos alunos do Ensino Médio

Número	Natural	Inteiro	Racional	Irracional	Real	Positivo	Negativo	N.D.A.
$-\frac{22}{7}$			X		X		X	
$0,1234567891011...$				X	X	X		
$0,1234567891011$			X		X	X		
$\sqrt{-6+150}$	X	X	X		X	X		
$(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$				X	X	X		

Fonte – O autor

Adentrando nos itens, buscamos explorar a consideração que muitos estudantes do Ensino Médio possuem: π seria igual a $3,14$. Para tanto, disse para os estudantes que, se quisessem, poderiam usar a calculadora do celular na esperança de que $-\frac{22}{7}$ fosse apontado como irracional, haja vista que nos primeiros dígitos do número em sua expansão decimal aparece o $-3,14$; isso, consequentemente, estaria relacionado com pensamento por truncamento dos estudantes.

O número $0,1234567891011...$ e o número $0,1234567891011$ foram exibidos em sequência para aferir se os três pontos tinha algum significado para os estudantes e, assim, poderiam constituir números com características diferentes, o primeiro ser irracional e o segundo ser racional. Outra intenção foi verificar se os estudantes conseguiriam detectar alguma ideia de padrão representada nos três pontos e se associariam a um número racional.

O número $\sqrt{-6+150}$ está em um roupagem que dificulta a sua visualização: $\sqrt{-6+150}=\sqrt{144}=12$. A ideia seria aferir se a regra da raiz apareceria no critério de decisão dos estudantes para apontar se que o número é irracional.

Por fim, o número $(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$ trazia em foco explícito o número π no numerador da fração e a sua aproximação mais comum $3,14$ no denominador. Ora, partindo do raciocínio incorreto de que $\pi = 3,14$, então a razão entre eles seria igual a 1. Assim, uma ideia de resposta esperada seria $(-1)\cdot 1\cdot(-1) = 1$, que é um número natural, inteiro, racional e positivo.

Em relação ao número anteriormente comentado, outra possibilidade é que primeiro (-1) seja o bastante para que os alunos apontem que o número será negativo

– nesse contexto o segundo (–1) que está multiplicando não teria significado para os respondentes. Além disso, outra possibilidade que buscamos inferir é que a barra de fração suscite o pensamento incorreto de que o número como um todo seja racional.

Posto isso, nas tabela 3 e 4 segue a quantidade de pessoas que consideraram cada número com o respectivo atributo numérico.

Tabela 3 – Alunos do 1º ano que apontaram possíveis características dos números

Número	Natural	Inteiro	Racional	Irracional	Real	Positivo	Negativo	N.D.A.
$-\frac{22}{7}$	7	3	7	5	12	2	20	0
$0,1234567891011...$	8	13	5	11	11	9	2	0
$0,1234567891011$	8	14	7	6	13	8	1	0
$\sqrt{-6+150}$	10	4	10	6	12	4	12	4
$(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$	4	6	2	7	12	4	12	4

Fonte – O autor

Tabela 4 – Alunos do 2º ano que apontaram possíveis características dos números

Número	Natural	Inteiro	Racional	Irracional	Real	Positivo	Negativo	N.D.A.
$-\frac{22}{7}$	3	2	5	2	2	0	10	0
$0,1234567891011...$	4	3	5	3	3	7	1	0
$0,1234567891011$	7	2	4	2	2	7	1	0
$\sqrt{-6+150}$	4	3	3	4	2	5	1	1
$(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$	1	2	2	3	0	1	5	3

Fonte – O autor

A primeira constatação encontrada foi que embora todos os números apresentados pertenceram à $\mathbb{R}$, não houve pelo menos um estudante do 2º segundo ano que conseguiu fazer essa constatação. Os estudantes do 1º ano apresentaram um desempenho superior, pois 5 dos 26 estudantes respondentes conseguiram perceber que todos os números apresentados eram reais, embora ainda seja uma porcentagem muito baixa, menor do que 20%.

Outra consideração geral a ser feita é que nenhum dos estudantes da Educação Básica conseguiu apontar todas as características de cada número apresentado. Ao analisar cada número especificamente, todos os estudantes entrevistados atribuíram ao menos uma especificidades inadequada, como por exemplo dizer que um número é racional, mesmo ele sendo irracional. Dito de outra forma, $\mathbb{R}$ ser a união disjunta do conjunto dos racionais com o conjunto dos irracionais não tem significado para boa parte dos respondentes.

A relação de inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, de acordo com as respostas observadas,não tem uma significação considerável para respondentes. Apenas $\frac{4}{26}$ alunos do 1º ano e

$\frac{2}{13}$ alunos do 2º ano apresentou ao menos uma resposta coerente com essa ideia no processo de classificar os números.

Outra ideia ausente na maioria das respostas é que um número diferente de zero é positivo ou, exclusivamente, é negativo.

Em relação ao número $-\frac{22}{7}$, ficou visível que a característica de ser negativo é mais marcante para os estudantes do que ser racional. Vale ressaltar que esse atributo foi o mais elencado em ambas as turmas, totalizando 20 dos 26 alunos do 1º ano, assim como 10 dos 13 alunos investigados do 2º ano.

Sobre o número $0,123456789101112...$ podemos verificar que o desempenho do 1º ano foi proporcionalmente superior ao desempenho do 2º ano no tocante ao reconhecimento da característica do número ser irracional – o índice de aceto do 1º ano foi quase que o dobro do índice de acerto do 2º ano. 11 dos 26 alunos do 1º ano fizeram esse apontamento, ao passo que apenas 3 dos 13 alunos do 2º ano reconheceram essa característica. É interessante frisar que embora as mesmas quantidades se repetiram no tocante ao atributo de ser um número real, as respostas vieram de pessoas diferentes.

O número $0,1234567891011$ foi pouco assinalado como racional, mas o desempenho do 2º ano foi ligeiramente superior. Dos estudantes respondentes na turma do 2º ano, 4 de 13 apontaram que o número é racional, ao passo que apenas 7 de 26 estudantes do 1º ano consideraram o número como racional.

É importante salientar que durante o envio dos questionários na turma do 1º ano, alguns estudantes não viam diferença no número ter ou não os três pontos ao final e conversavam que se tratava do conjunto dos números naturais. Isso quiçá justifique a considerável inserção do atributo *natural* e *inteiro*.

Quanto ao número $\sqrt{-6+150}$, o 1º ano apresentou resultado (10 de 26) um pouco melhor do que o 2º ano (3 de 13). Recordo-me que nas turmas do 1º ano houve um uso de calculadoras para auxiliar a decisão dos respondentes. Curiosamente uma parcela considerável de estudantes desta turma (9 de 26) apontou que o número era negativo, pois viram o –6 e, portanto, não desenvolveram os cálculos para aferir sua intuição.

O número $(-1) \cdot \frac{\pi}{3,14} \cdot (-1)$ foi o que mais rendeu respostas do tipo *nenhuma das alternativas anteriores* em ambas as turmas, totalizando $\frac{4}{26}$ alunos do 1º ano e $\frac{3}{13}$ alunos do 2º ano. Houve, também, considerável apontamento por parte dos estudantes de que esse número era negativo, totalizando $\frac{12}{26}$ alunos do 1ºano e $\frac{5}{13}$ alunos do 2º ano.

Por fim, cabe o destaque de que não houve ao menos um estudante do 2º ano que considerasse o número anterior como um número real.

5.1.2 Dados obtidos no Ensino Superior

Para o Ensino Superior foram apresentados quatro números: $0,1234567891011$, $0,1234567891011...$, $-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, de modo que poderiam assinalar se se cada número era natural, inteiro, racional, irracional, real, positivo, e/ou negativo, bem como poderiam assinalar que nenhuma das alternativas anteriores contempla o número em questão. É interessante salientar que este último não se trata de um número real, haja vista que não cumpre a definição de função exponencial[1], isto é, possui uma base negativa.

Considerando os números expostos, as respostas ideais que deveriam ser apontadas, seguem na tabela 5 a seguir:

Tabela 5 – Modelo de respostas esperado pelos alunos do Ensino Superior

Número	Natural	Inteiro	Racional	Irracional	Real	Positivo	Negativo	N.D.A.
$-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$				X	X		X	
$(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$								X
$0,1234567891011...$				X	X	X		
$0,1234567891011$			X		X	X		

Fonte – O autor

A intencionalidade em abordar os dois últimos números apresentados na tabela anterior foi a mesma que a elencada para os estudantes do Ensino Médio. Por outro lado, quanto aos números $-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ a expectativa era a de que a simples troca de posição do sinal da subtração passasse desapercebida para os futuros professores. Essa parte do questionário buscava ser mais breve, haja vista que as respostas discursivas buscavam abordar aspectos mais aprofundados para os universitários.

Posto isso, segue na tabela 6 a quantidade de pessoas que consideraram cada número com o respectivo atributo numérico.

Tabela 6 – Alunos de graduação que apontaram possíveis características dos números

Número	Natural	Inteiro	Racional	Irracional	Real	Positivo	Negativo	N.D.A.
$-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$	0	0	4	22	21	1	26	0
$(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$	0	0	2	12	12	4	8	12
$0,1234567891011...$	0	0	0	26	20	25	0	0
$0,1234567891011$	0	0	24	4	22	24	1	0

Fonte – O autor

Em um primeiro olhar, o desempenho dos estudantes do Ensino Superior foi bastante satisfatório. O que se esperava obter (ilustrado na tabela 5) apareceu na tabela 6. Entretanto, é importante averiguarmos cada um dos números para perceber o cenário que se desenha de maneira mais aprofundada.

[1] A função exponencial f é definida por uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de modo que $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$, $0 < a$ e $a \neq 1$.

Sobre o número $-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, houve 15 estudantes de graduação de um total de 29 respondentes que apontaram todas as características do número em questão, o que revela um panorama preocupante ao considerarmos que se tratam de alunos oriundos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.

Ao observarmos os dados obtidos a respeito de $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, encontramos 12 graduandos do total de 29 que conseguiram perceber que não se tratava de um número real, a porcentagem é aproximadamente 40%.

Sobre o número $0,1234567891011...$ obtivemos 17 estudantes do Ensino Superior que detectaram todas as características do número em questão, o que é algo em torno dos 60% dos respondentes. Esse caso revelou, a princípio, que a ideia do número ter padrão não foi o suficiente para que ele seja apontado como racional pelos futuros professores, haja vista que ninguém apontou esse número com este atributo.

A respeito do número $0,1234567891011$, obtivemos 18 estudantes do total dos 29 respondentes assinalando todas as características deste número, o que revela uma porcentagem em torno dos 60%. Por outro lado, é curiosa a relação que envolve as pessoas que conseguiram apontar todas as características do número $0,1234567891011$ e do número $0,1234567891011...$, somente 14 sujeitos.

Sobre os três números reais apresentados, existiram 18 estudantes que apontaram tal característica aos números de maneira correta. Ademais, é importante frisar apenas 5 estudantes apresentaram respostas insatisfatórias, isto é, que não consideravam os três atributos dos números mostrados: ser real, ser racional/irracional e ser positivo/negativo. Por fim, é importante destacar somente 6 indivíduos conseguiram apontar corretamente todos os atributos dos números apresentados.

5.2 EM BUSCA DE JUSTIFICATIVAS

As perguntas desta seção foram extraídas dos trabalhos de Soares, Ferreira e Moreira (1999), Chaves e Souza (2017) e Broetto (2016).

5.2.1 Dados obtidos no Ensino Médio

Nessa seção foram apresentadas quatro perguntas, as quais estavam estruturadas aos pares, uma vez que elas abordavam duas problemáticas pertinentes para o entendimento a respeito de números reais: a relação do discreto/contínuo e a relação do número racional/irracional.

Para tanto, foi exposta um reta numérica e nela apenas o número zero foi destacado, de modo que os estudantes poderiam usá-la para explicar se existiria um **número inteiro** maior do que o número destacado e que fosse o mais próximo dele. A pergunta seguinte foi estruturada de modo similar, mas com a troca da expressão **número inteiro** pela expressão **número real**.

Em relação a primeira pergunta, era esperado que o número 1 fosse apontado pela maioria dos estudantes, haja vista que esse conjunto numérico é bastante conhecido pelos mesmos. Para a segunda pergunta, era esperado que os estudantes acabassem nem percebendo que essa simples troca de palavras fosse o suficiente para haver troca de conclusão e, nesse caso, os estudantes apontariam o número 1. Outra possibilidade era que os estudantes percebessem que deveria existir uma modificação, mas que recorressem incorretamente aos número racionais como 0,5 ou 0,005, ou até mesmo escrevessem algo do tipo $0,000...01$ – este último revelaria uma ideia de ter muitos/infinitos zeros e, na última casa decimal, o número 1.

Com base no exposto, seguem as tabelas 7 e 8, os resultados do 1º ano e 2º ano respectivamente.

Tabela 7 – Respostas de alunos do 1º ano sobre a existência de um número inteiro maior do que 0 e mais perto de dele

Respostas	**Ações**	**Sujeitos**
Sim	Apenas desenhou na reta ou disse que é o número 1	$\frac{12}{26}$
	Desenhou o número 1 na reta e buscou explicar	$\frac{4}{26}$
	Apresentou o número racional 0,1 e buscou explicar	$\frac{1}{26}$
Não	Não apresentou justificativas	$\frac{0}{26}$
	Buscou explicar	$\frac{2}{26}$
Disse que não sabia responder ou deixou em branco		$\frac{7}{26}$

Fonte – O autor

Tabela 8 – Respostas de alunos do 2º ano sobre a existência de um número inteiro maior do que 0 e mais perto de dele

Respostas	**Ações**	**Sujeitos**
Sim	Apenas desenhou na reta ou disse que é o número 1	$\frac{7}{13}$
	Desenhou o número 1 na reta e buscou explicar	$\frac{0}{13}$
	Apresentou o número racional 10 e não apresentou justificativas	$\frac{1}{13}$
Não	Não apresentou justificativas	$\frac{1}{13}$
	Buscou explicar	$\frac{0}{13}$
Disse que não sabia responder ou deixou em branco		$\frac{4}{13}$

Fonte – O autor

Sobre a resposta esperada sim, vemos que cerca de 50% dos respondentes de 1º e 2º ano conseguiram apenas identificar o número 1 como sucessor, mas não conseguiram dissertar o motivo disso. Por outro lado, nenhum estudante do 2º conseguiu esboçar o número 1 na reta e tentou explicar, ao passo que apenas 4 dos 26 alunos do 1º ano tentaram esboçar uma justificativa.

Dentre as 4 respostas anteriormente citadas, seguem as respectivas explicações:

- *Sim, pois ele é apenas um dos números inteiros da reta numérica. O 1, por exemplo, está perto dele [número zero] e é um número inteiro.*
- *Sim, pois todos os números além do zero são positivos*. Essa resposta apareceu duas vezes.
- *Sim, existem vários números inteiros maiores do que o zero, por exemplo,* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...$

Com base nessas respostas, vemos que apenas uma única pessoa conseguiu entender completamente o questionamento. Os outros três estudantes conseguiram expressar que todos os inteiros positivos são maiores do que o zero, mas não apontaram qual destes seria o que está localizado, na reta numérica, mais próximo de 0. Entretanto, é possível inferir que para estes estudantes o 1 seria, de fato, o número mais perto, uma vez que nesse processo de listagem mental dos números inteiros, o 1 seria o primeiro número a aparecer.

Por fim, cabe o destaque para a resposta 0,1, uma vez que o número não é inteiro, assim como ele não foi dado como resposta quando perguntado se existiria um número real maior do que zero e mais próximo dele, o que revela um pensamento bastante curioso: números inteiros e reais podem ser ilustrados na reta, mas isso não significa, para o estudante, que eles tenham alguma ligação.

Adentrando na questão envolvendo a existência de um número real maior do que zero e mais perto dele, seguem as tabelas 9 e 10, as quais possuem respostas relativas ao 1º e 2º ano respectivamente.

Tabela 9 – Respostas de alunos do 1º ano sobre a existência de um número real maior do que 0 e mais perto de dele

Respostas	**Ações**	**Sujeitos**
Sim	Apenas desenhou na reta ou disse que é um número racional (-1 ou -0,5 ou 0,5 ou 1)	$\frac{11}{26}$
	Buscou explicar usando a ideia dos números positivos	$\frac{3}{26}$
	Apresentou o 0,0000...1	$\frac{1}{26}$
Não	Não apresentou justificativas	$\frac{1}{26}$
	Buscou explicar	$\frac{3}{26}$
Disse que não sabia responder ou deixou em branco		$\frac{7}{26}$

Fonte – O autor

Tabela 10 – Respostas de alunos do 2º ano sobre a existência de um número real maior do que 0 e mais perto de dele

Respostas	**Ações**	**Sujeitos**
Sim	Apenas desenhou na reta ou disse que é um número racional (-10 ou -1 ou 0,1 ou 0,5 ou 1)	$\frac{8}{13}$
	Buscou explicar usando a ideia dos números positivos	$\frac{0}{26}$
	Apresentou o 0,0000...1	$\frac{0}{13}$
Não	Não apresentou justificativas	$\frac{0}{13}$
	Buscou explicar	$\frac{0}{13}$
Disse que não sabia responder ou deixou em branco		$\frac{5}{13}$

Fonte – O autor

Ao observamos os dados contidos nas tabelas anteriores, vemos que a maioria dos alunos de 1º e 2º ano acreditam que exista um número real maior e mais próximo do que zero na reta, o que revela um certo abuso de generalização de uma ideia oriunda de $\mathbb{Z}$: todo número possui sucessor. Para tanto, os estudantes usaram, majoritariamente, a representação por meio de desenhos na reta, mas não conseguiram explicar por meio de palavras seu pensamento.

Quanto aos quatro estudantes do 1º ano que usaram a ideia dos números positivos, o que pode estar relacionado com esta maneira de pensar diz respeito a existência de um número real maior do que zero, mas que eles não sabem dizer quem é. Outra possibilidade é que nesse pensamento os estudantes apontaram apenas os números que são maiores do que zero e ignoraram a exigência de apresentar o número real mais próximo de 0.

A explicação dos três estudantes que acreditavam que existia um número real mais próximo de zero e maior do que ele, segue abaixo:

- *Todos os números depois do zero*. Esse estudante cobriu a reta para ilustrar esse pensamento.
- *Sim, pois o zero é apenas o início dos números reais positivos e existem mais muitas opções de números*.
- *Sim, pois os números reais podem ser positivos, podendo ser maior que zero*.

Particularmente, penso que talvez a visão destes estudantes esteja bastante influenciada pelas observações que venho fazendo ao longo das aulas, uma vez que sempre ressalto que para realizar o produto cartesiano é importante que os conjuntos respeitem a relação de ordem de $\mathbb{R}$, visando uma ilustração boa o suficiente para eles entenderem a operação que estão exercitando, principalmente a comparação entre os números.

Por outro lado, esse mesmo pensamento oriundo do produto cartesiano pode ter feito com que uma pessoa apontasse que não haveria a possibilidade, já que *só tem o zero na reta*. Nesse caso, o sujeito pode ter visualizado o zero como um elemento de um conjunto unitário. As outras duas tentativas de explicação para a resposta negativa foram iguais: *Não, pois são negativos atrás do zero*.

De mais a mais, é importante frisar que houve certa confusão em relação às duas perguntas apresentadas – elas diferiam só pelas palavras **inteiro** e **real** – de modo que precisei frisar oralmente tal diferença. Dos respondentes do 1º ano, $\frac{5}{26}$ colocaram o mesmo número em ambas as situações, o numero 1. Comportamento semelhante também foi detectado na turma de 2º ano por 3 dos 13 investigados.

Apenas dois estudantes apresentaram representação condizente com a ideia de reta racional, um de cada uma das turmas do Ensino Médio. Na ocasião, eles escreveram alguns números inteiros, o que pode estar atrelado aos primeiros usos da reta, ainda no Ensino Fundamental, para demarcar números inteiros igualmente espaçados e, geralmente, em torno do zero.

Com base nas respostas obtidas poderíamos ver um comportamento mais generalizado de a reta ser preenchida apenas por racionais? Penso que não, uma vez que as ideias debatidas em seções anteriores não apareceram nas respostas nem nas ilustrações por meio de desenhos, o que compromete um apontamento do tipo: a maioria dos estudantes observa a reta como discreta e possuem essa concepção pois são influenciados pela régua graduada.

As outras duas perguntas tinham como objetivo extrair o entendimento dos alunos do Ensino Médio sobre números racionais e sobre números irracionais. Para tanto, foi perguntado o que eles seriam e se o respondente conseguiria dar um exemplo desses tipos de números.

Assim, seguem os dados na tabela 11 e 12, os quais dizem respeito ao entendimento de números racionais por estudantes de 1º e 2º ano respectivamente.

Tabela 11 – Respostas de estudantes do 1º ano sobre o que são números racionais e respectivos exemplos

Respostas	**Exemplos**	**Sujeitos**
Números que podem ser escritos na forma de fração	$-2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0,333...$	$\frac{4}{26}$
Números naturais e inteiros	1, 2, 3	$\frac{3}{26}$
Números finitos e legíveis	1,1234567	$\frac{1}{26}$
Números com os quais podem ser feitas as quatro operações $(+, -, \times, \div)$		$\frac{1}{26}$
Contrário do irracional		$\frac{2}{26}$
Números reais que seguem um padrão constante	1, 2, 3...	$\frac{1}{26}$
Números que possuem raízes	$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...	$\frac{4}{26}$
Não lembram ou deixaram em branco		$\frac{10}{26}$

Fonte – O autor

Com base nos dados apresentados, vemos que pelo menos $\frac{4}{26}$ estudantes do 1º e $\frac{1}{13}$ estudantes do 2º ano associam, incorretamente, a presença da barra da fração com o fato de o número ser racional. Provavelmente os estudantes do segundo ano que apenas apresentaram números na representação fracionária apontariam esse atributo como suficiente.

Dizer que um número racional é composto por apenas números inteiros ou por somente números não inteiros ilustra problemas graves na formação dos estudantes do Ensino Médio, assim como o alto índice de respondentes que acabaram não conseguindo emitir parecer a respeito do que foi perguntado. Se o estudante não consegue ter uma boa compreensão sobre os números racionais, diversos conteúdos estarão sujeitos à instabilidades no percurso do final da Educação Básica desses sujeitos.

Outro acontecimento curioso que se revelou por meio da presente investigação diz respeito à existência de uma ideia de regra da raiz contrária ao que foi debatido em capítulos anteriores. Isso significa que, ao menos para 4 estudantes do 1º ano, qualquer número que tenha raiz será racional. Uma possibilidade para a persistência desse pensamento é que quando a raiz quadrada é apresentada, tradicionalmente no 6º ano, os estudantes trabalham com raízes quadradas exatas, o que pode enraizar a ideia equivocada de que só existem raízes quadradas exatas.

Tabela 12 – Respostas de estudantes do 2º ano sobre o que são números racionais e respectivos exemplos

Respostas	**Exemplos**	**Sujeitos**
Números que podem ser escritos na forma de fração		$\frac{1}{13}$
Apenas apresentaram exemplo	$-8, 27, \frac{-4}{2}, -1, \frac{-1}{3}, 0,005, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{2}{13}$
Números que não são inteiros	$\frac{1}{2}, 1,2$	$\frac{2}{13}$
Números inteiros		$\frac{1}{13}$
Números Calculáveis e, de alguma maneira, representáveis	$\sqrt{3}, 1, 0,2$	$\frac{1}{13}$
Não lembram ou deixaram em branco		$\frac{6}{13}$

Fonte – O autor

Apenas um único estudante do 1º ano apresentou a possibilidade de um número racional ter representação decimal infinita, o que pode indicar que boa parte desses estudantes nem tenham perpassado por discussões a respeito dessa possibilidade de visualizar um número racional.

Posto isso, seguem os dados na tabela 13 e 14 a respeito do entendimento de números irracionais por estudantes de 1º e 2º ano respectivamente.

Considerando que o grau de entendimento dos estudantes do Ensino Médio sobre números racionais foi superficial, adentar no que pensam esses estudantes sobre números irracionais revelou um cenário igualmente precário.

Ao observarmos os dados das tabelas 13 e 14 vemos que a maioria dos respondentes ficou enquadrada no tópico dos que disseram não lembrar/deixaram em branco. Desta quantidade, existem estudantes que também se enquadraram na mesma situação em relação à pergunta anterior, mas não constituem a maioria. A turma de 1º ano apresentou novos entendimentos incorretos, os quais merecem uma certa atenção. Ao agruparmos os estudantes que consideram os números fracionários, os números com vírgulas e os números ímpares, temos um total de $\frac{2}{26}$ respondentes.

Observamos, também, comportamentos anunciados na teoria discutida anteriormente, uma vez que 2 de 26 respondentes apontaram que são números negativos. Ademais, houve 1 estudante que disse que seriam números que não seguem um padrão, possivelmente a ideia envolta nesse pensamento é associar o número irracional com a sua representação decimal infinita e não periódica – embora os três exemplos trazidos não ilustram isso.

Ademais, essa dualidade (números racionais são os números que possuem

Tabela 13 – Respostas de estudantes do 1º ano sobre o que são números irracionais e respectivos exemplos

Respostas	**Exemplos**	**Sujeitos**
Números que não podem ser escritos na forma de fração		$\frac{3}{26}$
Números negativos	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{26}$
Números fracionários		$\frac{2}{26}$
Números com vírgulas	$\sqrt{-190}$, $1,05$	$\frac{2}{26}$
Números ímpares		$\frac{2}{26}$
Números que não seguem um padrão	$1,5$, $2,5$, $3,3$	$\frac{1}{26}$
Números infinitos e incontáveis	$0,4640198...$	$\frac{1}{26}$
Contrário do racional		$\frac{1}{26}$
São números que não se encaixam nos grupos de números mais simples	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{26}$
Não lembram ou deixaram em branco		$\frac{11}{26}$

Fonte – O autor

Tabela 14 – Respostas de estudantes do 2º ano sobre o que são números irracionais e respectivos exemplos

Respostas	**Exemplos**	**Sujeitos**
Números que possuem o símbolo da raiz quadrada	$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$	$\frac{2}{13}$
Não exatos	π	$\frac{1}{13}$
Não possuem raiz quadrada exata		$\frac{1}{13}$
Apenas apresentou exemplo	1, 2, 3, 4	$\frac{1}{13}$
Não lembram ou deixaram em branco		$\frac{8}{13}$

Fonte – O autor

padrão e os irracionais são números que não possuem padrão) talvez seja fruto de um diálogo pouco significativo para esses respondentes, uma vez que o número $0,12456789101112...$ seria um contraexemplo para esse pensamento e estava exposto no formulário.

Outro apontamento interessante feito por um dos respondentes está relacionado com o fato de considerar $\sqrt{-190}$ como sendo irracional. Observa-se que para este estudante não está claro a frase típica no estudo dos números reais: *Não existem raízes quadradas de números negativos*.

Uma circularidade diferente das denunciadas em capítulos anteriores também surgiu nesta investigação: números racionais são números que não são irracionais e números irracionais são números que não são racionais. Provavelmente o respondente que sinalizou essa circularidade recorreu à estrutura das palavras e apontou que uma é a negação da outra; de qualquer modo, ambas palavras não tem um significado matemático coerente para este sujeito.

Podemos inferir que para a maioria dos estudantes investigados do Ensino Médio não existe significado a frase: cada número real pode ser listado em um único ponto na reta numérica e, reciprocamente, cada ponto da reta pode ser associado a um único número real. Isso se deve ao fato de que os estudantes tiveram dificuldades profundas para exibir os números irracionais e, em alguns casos, também os números racionais.

Posto isso, observamos que os números com raízes e o número π constituem o principal referencial de números irracionais para os estudantes do Ensino Médio; os números com representação decimal infinita e não periódica (sem padrão) também apareceram nas respostas obtidas.

Por fim, é interessante frisar o fato dos estudantes investigados não fazerem uso dos números fornecidos no início do questionário, ou seja, embora estes sujeitos tenham apontado que os números poderiam ser, por exemplo, racionais ou irracionais, não foi o suficiente para serem invocados nestas últimas perguntas. Isso pode significar que, embora os estudantes tenham feito diversos apontamentos, eles não acreditam nas suas respostas ou não conseguiram associar que estas duas últimas perguntas estavam diretamente associadas com a escolha feita na primeira seção do questionário.

5.2.2 Dados obtidos no Ensino Superior

Nessa seção foram apresentadas cinco perguntas, de modo que duas delas foram as mesmas que as aplicadas para estudantes do Ensino Médio, as quais visavam conhecer a concepção dos universitários sobre a relação dos racionais/irracionais, mas foi inserido uma problemática diferente: o que faz o sujeito acreditar que esses objetos matemáticos existam?

Outras duas perguntas foram lançadas com o intuito de explorar ideias relacionadas com os conceitos de densidade e de continuidade. A última pergunta visava ver se os graduandos reconheciam o acordo de repetir, ao menos 3 vezes, o período de um número exibido por meio de sua representação decimal – ferramenta interessante para detectar números irracionais.

A primeira pergunta desta seção foi a seguinte: *No número 1,01001000100001... o que significam os três pontinhos? E no número 2,71821882845904...? Existe alguma semelhança/diferença no uso dos três pontinhos nos casos apresentados? Explique seu ponto de vista*. A expectativa para essa pergunta era que os universitários apontassem que os três pontos designavam infinitas casas decimais, de modo a constituir dois números irracionais.

O primeiro número irracional possui um padrão, já que a quantidade de zeros aumenta e cada aumento na parte decimal está separado por 1. O segundo número irracional é a constante *e*, o qual é usado em diversos momentos ao longo da formação dos universitários sujeitos da pesquisa, assim do fato de não ter um padrão em sua representação decimal. Essas últimas características não foram frisadas na pergunta, entretanto seria desejável que algo dessa natureza aparecesse, assim como ideias equivocadas, como a de o primeiro número ser racional por ter padrão.

Posto isso, segue, no quadro 9, o que pensam os universitários sobre os três pontos na representação decimal dos números irracionais apresentados.

Quadro 15 – Ideias gerais e resumo das respostas sobre o uso dos três pontos na parte decimal dos números irracionais mostrados

Ideias gerais	**Resumo das respostas**	**Sujeitos**
Dependência do contexto	- Visualizou no primeiro número uma sequência, mas alegou falta de clareza por parte de quem propôs o questionamento.	$\frac{1}{29}$
	- Frisou que existem mais algarismos para ser mostrados.	$\frac{1}{29}$
	- Especificou que depende da maneira como o número foi definido, mas os distinguiu pela existência ou não de padrão.	$\frac{1}{29}$
Ligação com a palavra sequência	- Apontou existência de dízima infinita e periódica em relação ao número decimal que apresenta padrão.	$\frac{3}{29}$
	- Destacou a representação decimal finita e não periódica, de modo que o primeiro número possui padrão e o segundo não.	$\frac{9}{29}$
Números que continuam indefinidamente	- Alegou a possibilidade de escrever tantas casas decimais quanto quiser seguindo, ou não, um padrão observado.	$\frac{8}{29}$
	- Caracterizou apenas a possibilidade de o número tender ao infinito.	$\frac{1}{29}$
Números incompletos	- Analisou que havia mais números para ser escrito.	$\frac{2}{29}$
	- Anunciou que só foi exibido uma parte de cada um dos números, assim como constatou que no primeiro número havia padrão e no segundo não.	$\frac{1}{29}$
Reconhecimento de apenas um dos atributos	- Entendeu que apenas os números possuem infinitas casas decimais.	$\frac{1}{29}$
Não souberam responder ou deixaram em branco		$\frac{1}{29}$.

Fonte – O autor

Considerando os dados explorados no quadro 9, é possível inferir que a grande maioria dos estudantes considerou o acordo tácito de que os três pontos indicavam que a quantidade de casas decimais tendia ao infinito.

As duas respostas mais sinalizadas constituem um total de $\frac{17}{29}$, aproximadamente 60%. A primeira está no âmbito da ideia geral da ligação com a palavra sequência, cujo resumo das respostas apontou para a representação decimal finita e não periódica, de modo que o primeiro número possui padrão e o segundo não – totalizando $\frac{9}{29}$ dos respondentes. A segunda está centrada na ideia dos números continuarem, em sua parte decimal, indefinidamente – totalizando $\frac{8}{29}$ dos respondentes.

Aproximadamente 10% dos estudantes de graduação associaram a ideia de um número ter padrão com a característica de ele ser irracional. Isso revela que para esses estudantes, possivelmente, não há uma compreensão adequada para a representação infinita e periódica.

É importante salientar que 3 dos 29 respondentes apontaram respostas que compõe uma ideia de que os números estavam incompletos. É uma questão que merece aprofundamento na formação universitária, uma vez que todo número real pode ser apontado por meio de representação decimal infinita e não somente os números irracionais, o que possivelmente colocará em xeque o pensamento desses sujeitos.

Por fim, é válido ressaltar que a análise dos dados revelou que, aproximadamente, 50% dos respondentes utilizaram a palavra padrão para explicar suas respostas. Particularmente acreditava que essa palavra seria mais utilizada para elucidar a diferença entre os números propostos.

Outra particularidade intrigante foi a baixa quantidade de estudantes escrevendo que se tratava do número de Euler, apenas uma pessoa apontou esse número em toda as respostas do Ensino Superior e foi nesta pergunta. Além desse comentário sobre a base dos logaritmos naturais, houve uma segunda menção a tal número na pergunta que será debatida na sequência.

O fato comentado nos leva a refletir que, embora o número "*e*" esteja em boa parte da formação de licenciandos e bacharéis em Matemática, a forma como esse contato acontece não é suficiente para que tal número seja, ao menos, reconhecido em sua representação decimal, assim como não é considerado como um número que exemplifique a existência dos números irracionais.

A segunda pergunta desta seção foi a seguinte: *O que é um número irracional? O que leva você a acreditar na existência desses números?* A expectativa era a de averiguar de que maneira os estudantes universitários entendem e definem os números irracionais, assim como desejávamos ver equívocos conceituais apontados na discussão teórica. Além disso, gostaríamos de saber se a problemática dos segmentos incomensuráveis seriam mencionada pelos respondentes.

Assim, segue no quadro 10 o que pensam os graduandos sobre o que são números irracionais e o que os leva a acreditar na existência dos mesmos.

Quadro 16 – Ideias gerais e resumo das respostas sobre o que leva a acreditar que existam números irracionais

Ideias gerais	**Resumo das respostas**	**Sujeitos**
Irracionais aparecem na própria Matemática	- Conceituam como números reais que não podem ser escritos como razão entre dois números inteiros e se apoiam somente em demonstrações para aceitar sua existência.	$\frac{5}{29}$
	- Números que apresentam dízimas não periódicas e/ou são números reais que não são racionais.	$\frac{2}{29}$
	- Não podem ser obtidos pela divisão de dois números reais.	$\frac{1}{29}$
	- Número que pode ser representado por uma fração (x/y).	$\frac{1}{29}$
	- É uma sequência de números racionais.	$\frac{1}{29}$
Irracionais são a expressão da inexatidão	- Forma numérica que não se pode escrever por completo, já que possui infinitas casas.	$\frac{1}{29}$
	- Número que não pode ser definido, tais como números infinitos ou raízes de negativos.	$\frac{1}{29}$
	- Resultado de cálculos e existência raízes não exatas.	$\frac{1}{29}$
	- Infinitos números decimais que não seguem uma sequência e/ou uma divisão não exata.	$\frac{2}{29}$
Irracionais existem relacionados com a geometria	- Números que são escritos por meio de dízima infinita e não periódica, cuja existência pode ser testada por exaustão.	$\frac{1}{29}$
	- Números que possuem representação decimal infinita e não periódica.	$\frac{1}{29}$
	- Não podem ser escritos em formato de fração.	$\frac{3}{29}$
	- Números reais que não podem ser expressos pela razão de dois números inteiros.	$\frac{3}{29}$
	- É uma fração entre dois números que não são inteiros	$\frac{1}{29}$
Irracionais preenchem lacunas	- Os irracionais completam os racionais em sequências, de modo que a convergência poderá convergir para um racional ou irracional.	$\frac{1}{29}$
	- Os números irracionais são reais que não podem ser escritos como razão entre inteiros, de modo que os reais estão relacionados com noções de continuidade e da reta real; os irracionais surgem da necessidade de não haver lacunas no conjunto dos números reais.	$\frac{1}{29}$
Irracionais existem na natureza	- Diversos fenômenos naturais só podem ser estudados utilizando números irracionais.	$\frac{1}{29}$
Não souberam responder ou deixaram em branco		$\frac{2}{29}$

Fonte – O autor

Ao observarmos o quadro 10, vemos que o aparecimento dos irracionais está, em sua maioria, ligado à própria Matemática, cabendo expor que dentre estes só houve três exemplos dados: o número $\sqrt{2}$ e o π. Outro dado que deve ser considerado é que as respostas que apresentaram maior frequência apoiam-se exclusivamente em demostrações, isto é, somente acreditam na existência de números irracionais porque viram uma demonstração associada a esse número.

Este cenário deve ser visto com bastante cautela, haja vista que muitos destes respondentes serão professores de Matemática que conseguem apenas se amparar em demonstrações e definições para construir uma imagem conceitual de números irracionais.

Além disso, é importante destacar que, da forma como os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFSC estão estruturados, provavelmente o estudante de graduação estudará a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{p}$, onde p é um número natural primo. Com isso, quero frisar que até mesmo os indiscutíveis números irracionais π e e, seguindo essa linha de pensamento, estariam em xeque quanto à sua existência porque não são vistas, tradicionalmente, as demonstrações de irracionalidade de tais números devido ao elevado nível de complexidade.

Outra percepção a ser feita é que embora muitos sujeitos tenham replicado que os números irracionais tenham representação decimal infinita e não periódica, essa característica parece esvaziada, uma vez que tais respondentes não conseguiram se valer desse fato para exemplificar números irracionais.

O próprio número $0,123456789101112...$, que obteve 26 apontamentos de ser um número irracional na questão anterior, não foi mencionado ao menos uma vez nas justificativas sobre a existência dos números irracionais. Tampouco houve algum outro número irracional, em sua forma decimal infinita e não periódica, mencionado. Isso passa uma ideia de que os sujeitos conseguem reconhecer números com essa qualidade, possivelmente fruto de uma memorização, mas não acreditam neste atributo como satisfatório, a fim de pensar na existência dos números irracionais para além de uma definição.

Por outro lado, é importante destacar o atributo relacional proposto por nove sujeitos, os quais buscaram apontar a existência dos irracionais com aspectos geométricos. A ideia de testar os números irracionais por meio da exaustão é interessante e pode ajudar muito aos futuros professores no diálogo a respeito de números irracionais com estudantes de Ensino Médio, mas infelizmente essa possibilidade foi apontada por um único respondente, o qual levou a ideia para sinalizar *uma sequência que continua e [que seja] sem repetição*.

É importante ressaltar as respostas que foram agrupadas na categoria que relacionava os irracionais com a geometria. Elas apontavam diversos exemplos que envolviam construções com régua e compasso, principalmente as raízes quadradas[2].

Como foi discutido nos pressupostos epistemológicos, a maioria dos apontamentos dos sujeitos sobre o que são os números irracionais se pauta em atributos

[2] tais exemplos não foram colocados na tabela por questão de espaço, mas eles pautavam o motivo dos sujeitos acreditarem na existência dos números irracionais, isto é, por meio da construção e/ou relação entre segmentos, a título de exemplo: o lado e a diagonal de um quadrado

que ilustram justamente o que eles não são. A discussão sobre segmentos incomensuráveis e toda a sua importância histórica não foi mencionada. Provavelmente isso se deve ao fato de que, em boa parte das disciplinas da graduação, a *história relativa ao conteúdo*, presente em quase todos os tópicos do currículo da Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFSC, seja reduzida à curiosidades sobre o tema, os quais propõem problematizações que façam os futuros professores ressignificar concepções presentes desde o Ensino Básico.

Outro dado intrigante diz respeito ao número π. Apenas 6 de 29 sujeitos apontaram esse número como exemplo de número irracional, o que é aproximadamente 20% dos futuros professores. Se o π, que é um dos números irracionais estudados desde o Ensino Fundamental, não está no repertório dos respondentes, então falta uma abordagem diferente sobre o tema, pois o *número real que não é racional* está longe de ser suficiente.

A terceira pergunta desta seção foi a seguinte: *O que é um número real? O que leva você a acreditar na existência desses números?* A expectativa era a de detectar a circularidade entre irracionais e reais, a qual foi debatida nos pressupostos epistemológicos. Por outro lado, gostaríamos de ver se a reta numérica, os cortes de Dedekind e/ou as sequências de Cauchy estariam presentes nas ideias dos estudantes.

Posto isso, segue no quadro 11 o que ponderam os graduandos sobre o que são números reais e o que os leva a acreditar na existência dos mesmos.

Quadro 17 – Ideias gerais e resumo das respostas sobre o que leva a acreditar que existam números reais

Ideias gerais	**Resumo das respostas**	**Sujeitos**
Reais aparecem na própria Matemática $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	- A existência de $\mathbb{R}$ foi relacionada com a ideia de representação operações, bem como com a exploração do comércio no mundo.	$\frac{1}{29}$
	- Não são passíveis de aceitação.	$\frac{1}{29}$
	- A existência de $\mathbb{R}$ foi assegurada pela existência de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{I}$.	$\frac{1}{29}$
	- A existência de $\mathbb{R}$ foi considerada pelos cortes de Dedekind.	$\frac{2}{29}$
	- A existência de $\mathbb{R}$ foi associada à convergência de sequências.	$\frac{2}{29}$
	- Os reais existem devido ao avanço da Matemática.	$\frac{1}{29}$
	- Os reais existem por causa dos cálculos envolvendo circunferências – número π.	$\frac{1}{29}$
	- Não apresentou comentário complementar.	$\frac{2}{29}$
Reais constituem um conjunto numérico dominante	- São os números que não são naturais, inteiros ou racionais, cuja existência se apoia nos números $\sqrt{3}$ e π.	$\frac{1}{29}$
	- Todos os números, exceto os imaginários/complexos.	$\frac{2}{29}$
	- Qualquer número existente.	$\frac{3}{29}$
	- São números que representam um todo e uma parte de um todo em um só número.	$\frac{1}{29}$
Reais estão listados ao longo da reta	- Frisou a necessidade de cobrir os furos deixados pelo conjunto dos números racionais.	$\frac{1}{29}$
	- Apontou que os números reais são cortes de Dedekind.	$\frac{1}{29}$
	- Ressaltou a propriedade dos intervalos encaixantes.	$\frac{1}{29}$
	- Revelou a possibilidade de ser infinitamente grande (positivo ou negativo), pequeno ou nulo, cuja existência esta associada às funções e medidas.	$\frac{1}{29}$
	- Não apresentou comentário complementar.	$\frac{2}{29}$
O conjunto dos números reais engloba outros conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	- Existência dos reais foi associada à diversidade de números que podem ser obtidos no processo de medir.	$\frac{1}{29}$
	- Existência dos reais foi relacionada com a natureza.	$\frac{1}{29}$
Outras respostas	- Um número real é um número que se relaciona com noções de reta e comensurabilidade, assim como representam estruturas que atendem bem aos axiomas desejados.	$\frac{1}{29}$
	- Um número que pode ser representado na forma de fração.	$\frac{1}{29}$
Não souberam responder ou deixaram em branco		$\frac{1}{29}$

Fonte – O autor

Ao analisarmos o quadro 11, vemos que os números reais estão ligados, novamente, à própria Matemática, totalizando $\frac{11}{29}$ das respostas obtidas. Tais apontamentos foram agrupadas porque houve uma recorrência no argumento da igualdade de conjuntos: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Dada a quantidade de respostas apontadas anteriormente (sobre $\mathbb{R}$ ser construído por meio de uma união de conjuntos), percebemos que é importante que os números irracionais sejam trabalhados numa perspectiva própria, a qual se esquive do problema da circularidade de definição e de significado apontado na figura 22.

Outra particularidade que esses dados revelam é que a frase $\mathbb{R}$ *é um corpo ordenado completo e, a menos de isomorfismos, é único* não foi dada por nenhum dos respondentes.

Isso é curioso, pois os participantes da pesquisa deram argumentos teóricos que exigem conhecimentos matemáticos muito similares e igualmente aprofundados, tais como: a construção dos números reais por meio dos cortes de Dedekind, assim como $\mathbb{R}$ está relacionado com convergência de sequências e a propriedade dos intervalos encaixantes.

Um par de termos que poderia ter surgido para explicar a crença dos estudantes a respeito dos números reais, mas que não apareceu em nenhuma das respostas, foi o *supremo/ínfimo*. Coloco esse ponto em perspectiva, pois em disciplinas que introduzem a Análise são feitas diversas demonstrações usando esses termos, de modo que seria justo pensar que essas palavras fundamentariam, pelo menos do ponto de vista da Matemática acadêmica, as respostas dos universitários. Como observamos, é só mais uma frase que contém bastante conceitos/informações, mas que não produzem a significação potencial para os futuros professores.

De mais a mais, é interessante aprofundar a noção de que os números reais constituem um conjunto numérico dominante, haja vista que isso só é verdade se o considerarmos como o conjunto universo em relação aos demais conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números irracionais. Entretanto, podemos generalizar ainda mais o que se entende por número usando, por exemplo, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, os quatérnions $\mathbb{H}$ e os octônions $\mathbb{O}$, entre outros, de modo que esse pensamento passa a ser incoerente em contextos matemáticos de conjuntos numéricos mais gerais.

Por outro lado, é interessante observar a associação do conjunto dos números reais com a reta numérica, totalizando 6 dos 29 respondentes totais. A reta comporta aspectos interessantes ao estudo de números reais, como por exemplo ordem entre elementos, densidade dos racionais e dos irracionais e a própria ideia de continuidade.

Houve apenas um graduando que sinalizou o conceito de comensurabilidade, o qual é a base para adentrar no diálogo sobre segmentos incomensuráveis e, assim, dar um significado mais genuíno ao conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$.

Considerando a ideia de que os números reais aparecem na própria Matemática por meio da igualdade $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, podemos destacar a seguinte resposta:

> *Um número real é um número que pode ser tanto racional quanto irracional. A existência desses números é o que há de mais elementar, talvez, na matemática. A ideia de representar quantidades, somar, dividir, é um pensamento bem primordial para, por exemplo, a exploração do comércio no mundo. Refinando essa ideia, é natural que os números acabem se relacionando com uns, e com outros. Por exemplo, é natural que números positivos sejam uma quantidade semelhante, assim como negativos, assim como racionais, e mais pra frente, irracionais. Então essa forma de organizar soa pra mim como um olhar um pouco mais aguçado para os números*.

Na resposta apresentada há uma tentativa de justificar a existência dos números reais a partir de problemas cotidianos, para além da própria Matemática. Um exemplo disso é o conceito histórico de continuidade apresentado anteriormente. Contudo, percebemos uma tentativa de justificar a formalização dos conjuntos numéricos explorados ao longo deste trabalho como algo “tranquilo” e “natural”, o que não é uma verdade incontestável.

Considerando a forma como as disciplinas específicas de Matemática são tratadas ao longo da graduação, há uma falsa impressão aos futuros professores de que todos os conceitos vistos nada mais são do que uma mera consequência do processo lógico-formal sempre existente nessa área de conhecimento.

A resposta trazida ratifica isso, haja vista que não considera o processo histórico de construção dos conjuntos, o qual não segue essa ordem dada, mas considera o que se conhece após o processo de formalização. Com isso, muitas dúvidas e incertezas são excluídas no pensamento de construção, o que compromete a formação dos graduandos.

Por fim, gostaria de salientar comentários que ouvi de alguns colegas do curso depois de responderem o questionário. O ponto central é que muitos deles se viram numa situação ligeiramente desconfortável, pois não haviam parado para pensar se acreditam ou não no objeto de estudo com o qual trabalham quase todos os dias, como o conjunto dos números reais.

Arrisco-me a dizer que esse foi um dos poucos momentos em que a subjetividade dos universitários foi confrontada frente aos objetos matemáticos estudados. Nesse mesmo processo de responder a um simples questionário, as imagens conceituais e os conceitos se mesclaram formando, ao menos, alguns pontos de dúvidas para esses futuros professores. Há que se esperar que esses conflitos se resolvam quando o professor adentrar a sala de aula. Mas o que temos constatado é o inverso disso. Esses equívocos ou ausências de reflexões levam, muitas vezes, à reprodução de discursos equivocados em relação aos conceitos, o que podemos evidenciar pelas respostas dos estudantes.

A quarta pergunta desta seção foi pautada na apresentação do conjunto abaixo:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$$

Em seguida, os respondentes deveriam explicar se para o mesmo existia ou não um maior elemento.

Com respeito a essa pergunta, aguardávamos respostas coerentes com o conceito de densidade, assim como gostaríamos de detectar se surgiria alguma resposta do tipo $0,999...$, o que revelaria uma incompreensão a respeito da representação decimal nos números racionais.

Assim sendo, segue no quadro 12 a síntese das respostas obtidas.

Quadro 18 – Ideias gerais e explicações sobre a existência de maior elemento no conjunto apresentado

Ideias gerais	**Resumo das respostas**	**Sujeitos**
Sim, possui um maior elemento	- Existem infinitos números racionais entre 0 e 1.	$\frac{1}{29}$
	- Existem infinitos elementos maiores	$\frac{1}{29}$
	- Pode ser $0,99999999...$	$\frac{1}{29}$
	- Sendo Q irracional, possui um maior elemento que não pode ser representado na íntegra.	$\frac{1}{29}$
	- Possui um maior elemento porque x é racional	$\frac{1}{29}$
Não possui um maior elemento	- Justificou por meio do processo de tirar médias sucessivas para ficar cada vez mais próximo de 1.	$\frac{3}{29}$
	- Apresentou a ideia de ir chegando cada vez mais próximo de 1 usando números racionais.	$\frac{6}{29}$
	- Usou explicitamente o conceito de densidade.	$\frac{3}{29}$
	- Considerou a sequência $(0,9; 0,99; 0,999; ...)$, mas reconheceu que $0,999... = 1$	$\frac{2}{29}$
	- Explicou porque existem infinitos racionais entre 0 e 1.	$\frac{3}{29}$
	- Exibiu uma demonstração que envolvia supor $q < 1$ e, em seguida, explicou a impossibilidade do conjunto ter maior elemento por meio da desigualdade: $q < q + (1 - q)/2 < 1$.	$\frac{1}{29}$
	- Não apresentou comentário complementar	$\frac{3}{29}$
Outras respostas	- Não possui um maior elemento, pois em cada intervalo existe um x pertencente aos Racionais.	$\frac{1}{29}$
	- Dentro dos racionais não se pode definir um maior, pois sempre pode-se adicionar um número à fração.	$\frac{1}{29}$
Não souberam responder ou deixaram em branco		$\frac{1}{29}$

Fonte – O autor

Com base no quadro 12, vemos que a característica que mais se apresentou foi a de que o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$, de fato, não possui maior elemento, o que totalizou 21 respostas. Nesse sentido, temos um cenário animador, pois aproximadamente 72% dos entrevistados possuem, ao menos, uma intuição correta a respeito de uma aplicação do conceito de densidade.

A resposta mais apontada pelos universitários se pautava na ideia de sempre ser possível detectar números racionais cada vez mais próximos de 1, o que correspondeu a aproximadamente 20% dos participantes.

A justificativa de ser possível tirar sucessivas médias para cada vez mais ficar perto de 1, assim como o uso explícito do conceito de continuidade totalizaram, cada um, 3 das 29 respostas obtidas.

Por outro lado, apenas um estudante apontou o $0,999...$ como sendo o maior elemento, o que revelou um cenário inesperado. A ideia de que existe um maior elemento, mas que não pode ser exibido em sua íntegra também só apareceu em uma única resposta, o que também revela um bom entendimento a respeito da densidade presente no conjunto dos números racionais.

Quanto à resposta de que o referido conjunto não possui maior elemento, haja vista que em cada intervalo existe um número racional, uma possibilidade é que o respondente estava querendo construir intervalos encaixados de modo que em cada novo intervalo real fosse possível detectar um número racional, mais próximo de 1 que o intervalo real anterior.

Contudo, essa ideia não foi explicitada, embora seja interessante porque articula a ideia de intervalos encaixantes com a densidade dos números racionais em intervalos de $\mathbb{R}$, ideia essa que não foi apontada por nenhum dos respondentes.

A quinta pergunta da presente seção envolvia o conceito de continuidade. Para tanto, foi apresentado aos graduandos o seguinte conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Nessa pegunta foi explicitado que a e b se tratavam de dois números reais distintos. Daí, foi questionado o motivo de ser possível ou não que esse conjunto tivesse apenas números racionais.

Esse conjunto é um intervalo que está contido na reta real, logo possuirá infinitos números racionais e irracionais, logo não é possível que o mesmo possua somente números racionais.

Nesse sentido, seria interessante que os universitários apontassem justificativas como a de que os números irracionais preenchem as lacunas deixadas pelos números racionais na reta numérica, bem como indicassem a densidade de números racionais e irracionais na reta. Caso os estudantes apontassem que seria possível obter somente números racionais, isso indicaria uma visão discreta da reta real, uma vez que só números pertencentes à $\mathbb{Q}$ conseguiriam preencher todo o intervalo.

Dito isto, segue no quadro 13 a síntese das respostas obtidas.

Quadro 19 – Ideias gerais e explicações sobre a possibilidade de haver apenas números racionais no conjunto apresentado

Ideias gerais	**Resumo das respostas**	**Sujeitos**
É possível haver só números racionais	- Como o conjunto dos números racionais está contido no conjunto dos números reais, x pode assumir qualquer valor racional.	$\frac{1}{29}$
	- Porque os números racionais podem ser escritos na forma p/q.	$\frac{1}{29}$
	- Porque todo número real pode ser descrito por um número racional.	$\frac{1}{29}$
Não é possível haver apenas números racionais	- Entre dois números reais existem infinitos números racionais e irracionais.	$\frac{4}{29}$
	- O conjunto é do tipo não contável.	$\frac{1}{29}$
	- É sempre possível achar um número irracional entre dois racionais.	$\frac{1}{29}$
	- Se apoiou na definição de números reais por meio dos cortes de Dedekind.	$\frac{1}{29}$
	- O referido conjunto possui elementos além do universo dos números racionais.	$\frac{1}{29}$
	- O conjunto dos números reais é formado por números racionais e irracionais.	$\frac{1}{29}$
	- Entre dois números reais existe um número irracional.	$\frac{2}{29}$
	- Apresentou a ideia de particionar a reta em comprimentos de tamanho $\frac{(b-a)\cdot\sqrt{2}}{2}$ e por explicou por meio de desigualdades.	$\frac{1}{29}$
	- Pode haver número com continuação infinita.	$\frac{1}{29}$
	- Não apresentou comentário complementar.	$\frac{1}{29}$
Outras respostas	- Considerou a densidade de $\mathbb{R}$ e disse que existiriam diversos números reais no conjunto.	$\frac{1}{29}$
	- Mencionou a pergunta anterior e disse que bastaria fazer uma adaptação da explicação já dada.	$\frac{1}{29}$
	- Dependendo de quem for *a* e *b*, é possível tirar a média e dizer se o número será racional ou irracional.	$\frac{1}{29}$
	- Toda sequência de números racionais, tem como limite um número irracional. Ou seja, todo racional tem um irracional em uma vizinhança.	$\frac{1}{29}$
	Qualquer dízima não periódica pode existir entre *a* e *b*	$\frac{1}{29}$
Não souberam responder ou deixaram em branco		$\frac{7}{29}$

Fonte – O autor

A maioria dos respondentes esteve na categoria que diz não ser possível existir apenas números racionais no conjunto dado, o que totaliza 14 dos 29 respondentes. Nessa categoria a resposta com maior frequência foi a de entre dois números reais existem infinitos números racionais e irracionais, abarcando 4 respondentes.

Duas pessoas apontaram que entre dois números reais existe um número irracional; uma outra pessoa destacou que é sempre possível encontrar um número irracional entre dois racionais. Um respondente explicitou que o conjunto dos números reais é formado por racionais e irracionais.

Embora as respostas comentadas anteriormente sejam adequadas, fica a dúvida quanto à compreensão, por parte dos graduandos, a respeito da continuidade e da densidade – propriedades essenciais na construção de $\mathbb{R}$. Uma coisa é falar que existe um ou alguns números irracionais em $]a, b[$, isso passa a ideia de que os irracionais estão inseridos no intervalo formando um conjunto discreto; outra coisa é ratificar que existem infinitos racionais e irracionais (listados ininterruptamente no intervalo), nesse caso a ideia envolvida é de continuidade.

Uma resposta curiosa diz respeito à possibilidade de haver só números racionais no conjunto dado. *Como o conjunto dos números racionais está contido no conjunto dos números reais, x pode assumir qualquer valor racional*. Nessa resposta o conjunto dos números reais não foi considerado em sua plenitude, o que pode revelar que nem a igualdade tão conhecida $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, talvez, faça parte do repertório do respondente. Ao observar as respostas anteriores desse mesmo sujeito, a não compreensão a respeito dos reais e suas propriedades foi ratificada.

Outra resposta que me intrigou foi a seguinte: *Toda sequência de números racionais, tem como limite um número irracional. Ou seja, todo racional tem um irracional em uma vizinhança*. É visível que nessa resposta que o sujeito respondente teve acesso a noções básicas de cálculo e, mesmo assim, isso não significou uma compreensão adequada do suposto conjunto conhecido $\mathbb{R}$.

A ideia da média é interessante se os extremos do intervalo são números racionais e o que se deseja localizar são números racionais. Agora, se é inserido algum irracional na observação, a média não é tão interessante assim de ser usada. A esse estudante não ocorreu que seria possível localizar racionais e irracionais através da expansão decimal dos números reais.

Por outro lado, houve um graduando que provavelmente tateou a ideia de ver a expansão decimal dos números reais, pois relacionou com a existência de continuação infinita ao apontar a impossibilidade de haver apenas números racionais no intervalo dado. Por outro lado, esse mesmo comentário pode estar ligado com a ideia incorreta de que só número irracional tem representação decimal infinita.

Por fim, é intrigante a quantidade de estudantes universitários que não conseguiram responder o questionamento, totalizando quase 25% dos respondentes. Essa foi a pergunta que apresentou maior índice de “não respondentes” da universidade. Esse cenário nos leva a refletir sobre a necessidade de aprofundar a experimentação sobre a densidade e sobre a continuidade, visando construir significados para além das definições formais, bem como expandir o entendimento de futuros professores sobre $\mathbb{R}$ e suas propriedades.

5.3 IMAGENS CONCEITUAIS

Nesta seção a ideia era construir uma árvore de palavras por meio da seguinte pergunta: *Ao refletir sobre números reais, quais palavras lhe surgem no pensamento?*

As respostas foram reunidas de acordo com a sua origem: respostas do 1º ano, resposta do 2º ano e respostas de estudantes universitários. Posteriormente, algumas respostas em formato de frases foram reestruturadas, de modo a obter somente as palavras-chave da mesma.

Para reunir as palavras foi escolhido o site *https://www.wordclouds.com/*, o qual se apresentou bastante satisfatório em sua interface e por ser totalmente *on-line*.

O sistema de pesos em que o *software* agrupa as palavras que mais aparecem e lhes proporciona um tamanho correspondente, ou seja, a palavra que mais aparece será a maior, de modo a seguir esse decrescimento até as palavras que apareceram uma única vez.

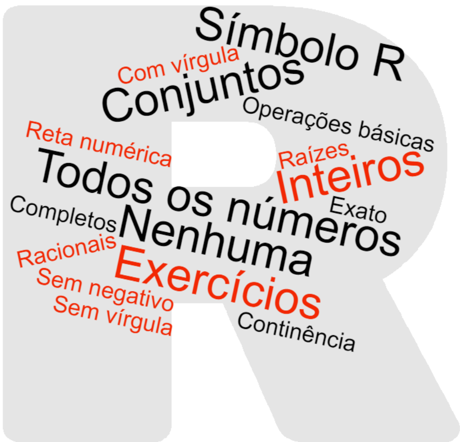
A expectativa era a de que os estudantes do Ensino Médio apresentassem uma visão mais restrita dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Possivelmente tais estudantes poderiam mencionar os decimais, a reta, raízes e o número π.

Quanto aos estudantes do Ensino Superior, era esperado que as respostas mais frequentes se pautassem nos subconjuntos de $\mathbb{R}$, bem como em alguns conceitos que são vistos nessa etapa de ensino, como por exemplo, enumerabilidade, completude, densidade e alguma menção a respeito do infinito.

5.3.1 Dados obtidos no Ensino Médio

Os dados que foram obtidos em turmas de 1º e 2º ano seguem, respectivamente, nas figuras 25 e 26.

Figura 25 – Nuvem de palavras construída por respostas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de números reais



Fonte – O autor

Figura 26 – Nuvem de palavras construída por respostas de alunos do 2º ano do Ensino Médio a respeito de números reais

Fonte – O autor

Ao observarmos as respostas dos estudantes do Ensino Médio, é interessante perceber que estudantes do primeiro ano, de modo geral, apresentam uma imagem conceitual mais rica do que estudantes do segundo ano, embora em ambas as turmas *todos os números* e *nenhuma* acabem protagonizando as respostas.

Por outro lado, há uma grande associação com o símbolo $\mathbb{R}$ e com conjuntos, o que revela uma certa ampliação de concepções a respeito dos números reais.

Particularmente eu esperava que *intervalos* fossem aparecer, o que acabou não se confirmando.

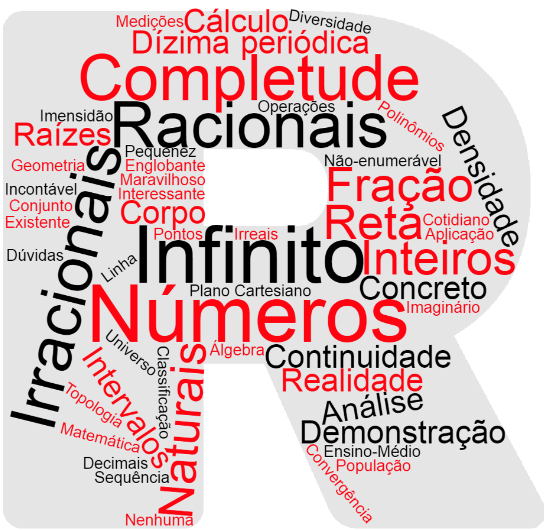
As raízes, os números racionais e números com/sem vírgula, acabaram aparecendo com uma frequência muito baixa. A própria reta numérica figurou poucas respostas, embora os estudantes do 1º ano já tivessem contato com intervalos na reta numérica.

Nas respostas, não ficou claro o que os estudantes entendem por *números completos*, embora seja possível inferir que se tratam de números inteiros não negativos, assim como *números exatos*. Por outro lado, é possível que para boa parte desses estudantes o número racional $\frac{1}{3}$ seria considerado exato, ao passo que sua representação decimal infinita $0,333...$ acabaria sendo considerada não exata e, provavelmente, a igualdade desse número em suas diferentes representações será difícil de ser acolhida e aceita por esses estudantes.

5.3.2 Dados obtidos no Ensino Superior

Os dados que foram obtidos pelos alunos de graduação de Matemática seguem na figura 27.

Figura 27 – Nuvem de palavras construída por respostas de alunos do Ensino Superior a respeito de números reais



Fonte – O autor

Ao observarmos as respostas dos estudantes do Ensino Superior é visível a gama de palavras que acabam se relacionando com números reais. Além de *números*, o referido conjunto é associado fortemente com a ideia de *infinito*, o que superou a expectativa inicial de que poucas pessoas fariam tal associação.

A relação de inclusão que envolve naturais, inteiros, racionais e irracionais não constitui uma imagem conceitual para alguns estudantes. *Dízima periódica* e *raízes* apareceram com uma frequência relativamente baixa, assim com o conceito de *densidade* e a ideia de conjunto *não-enumerável*. Vale ressaltar que as palavras acima sublinhadas estão diretamente ligadas com diversas aplicações ao longo da graduação e com um provável uso profissional dos futuros professores de Matemática, entretanto não estão

O termo *fração* recebeu um bom número de apontamentos, mas não ficou claro se para esses respondentes a fração é ou não um atributo exclusivo dos números racionais, isto é, se ao aparecer a barra da fração o estudante já pensa que o número é racional, independente da natureza do número que aparece no numerador e no denominador.

Os termos *decimais* e *sequências* apareceram em uma frequência muito baixa, talvez isso se deva porque o primeiro não é muito frisado ao longo da formação universitária, ao passo que a segunda palavra, mesmo sendo muito utilizada ao longo do Ensino Superior, não constitui uma associação para as pessoas que responderam.

Embora não houvesse uma pessoa que deixou de responder, é importante sinalizar que nessa seção foi explicitado por um indivíduo que ele nunca havia pensado sobre a existência dos números reais, o que revela uma necessidade de se abordar os conceitos de maneira mais relacional, indo além do que já está escrito nos livros de cálculo e análise.

Por fim, gostaria de destacar a *completude*, pois foi uma palavra que recebeu forte apontamento, mas que não apareceu como um constituinte para que os mesmos respondentes acreditassem na existência dos números reais.

6 CONCLUSÕES E POSSÍVEIS CAMINHOS

Com base no trabalho desenvolvido obtivemos um panorama geral (não em quantidade de participantes e sim pelos aspectos teóricos abordados nos questionários) a respeito do que pensam os estudantes do Ensino Básico e Superior que participaram da presente pesquisa sobre os conceitos de números racionais, números irracionais, densidade e continuidade, os quais são aspectos de extrema importância para um entendimento aprofundado sobre números reais.

Os aspectos abordados sobre $\mathbb{R}$ em documentos legais brasileiros mostraram-se superficiais, uma vez que não é explicitado de que forma os números reais podem ser dialogados no Ensino Fundamental e Médio, nem explicitam as principais dificuldades e como elas podem ser superadas para que aconteça um bom entendimento dos conceitos principais que permeiam o estudo desse conjunto numérico.

Outro ponto a ser levado em consideração é que os números reais, tradicionalmente, são abordados por livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio, nas primeiras seções. Geralmente esse tratamento é feito muito rapidamente, o que impacta negativamente o entendimento de número pelos estudantes, assim como compromete a compreensão de demais assuntos a serem tratados no Ensino Médio – que consideram o referido conjunto como conhecido.

Quanto ao que disseram os entrevistados sobre o conjunto dos números reais, podemos destacar que os estudantes do 1º ano do Ensino Médio, de modo geral, apresentaram mais atributos interessantes sobre os números reais, em comparação com estudantes do 2º ano. Por outro lado, foram detectados diversos pensamentos incoerentes nessas turmas em estou lecionando, revelando, por exemplo, que os conceitos de números racionais e irracionais carecem de discussões mais aprofundadas na formação desses sujeitos.

Os estudantes do curso de Matemática da UFSC, em geral, conseguiram responder satisfatoriamente se considerarmos as definições e procedimentos próprios do Ensino Superior. Contudo, se considerarmos o cenário de que boa parte desses sujeitos terão que desenvolver suas atividades laborais no Ensino Básico ou na própria universidade, recebendo sujeitos vindo do Ensino Médio, vemos que há uma falta de entendimento sobre abordagens que dialoguem com a Matemática Escolar, para além do que já está posto nos livros de cálculo e análise.

Observando o campo de pesquisas em Educação Matemática, podemos notar que os quatro conceitos tratados ao longo desta pesquisa (números racionais, números irracionais, densidade e continuidade) poderiam ser tratados individualmente, de modo a comportar outros trabalhos de conclusão de curso, assim como teses e dissertações, tamanha a riqueza e complexidade que cada um dos assuntos abarca. Uma potencialidade, em termos de pesquisas, é investigar os temas por um viés histórico, buscando conhecer as origens e desdobramentos dos conceitos ao longo dos tempos; ademais, também é interessante a elaboração de intervenções pedagógicas para fazer os futuros professores experimentarem refletir/problematizar sobre os assuntos.

Considerando uma perspectiva mais geral, muitos colegas relatam que acham interessantes os assuntos discutidos na Matemática do Ensino Superior, entretanto não conseguem conceber uma abordagem além da tradicional, ou seja, além do que já "está estabelecido" sobre os respectivos temas. Nesse cenário, pesquisas como esta revelam dois pontos positivos: o rigor da Matemática estudada na universidade não garante compreensão conceitual plena e que é possível ver a mesma Matemática com outros olhos.

O choque que alguns estudantes do Ensino Superior experienciaram ao responder o questionário eu também vivi na produção desta pesquisa, a saber, muitas coisas que foram estudadas intensamente ao longo da graduação – principalmente para conseguir reproduzir técnicas seguindo o critério de correção do professor – não me fizeram parar para refletir, efetivamente, a respeito do conceito estudado. Talvez agora é que realmente faça sentido a frase que já ouvi diversas vezes pela professora Regina Grando: "o conceito vai além das definições".

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, E. de; PATERLINI, R. R. **A descoberta da incomensurabilidade**. [*S.l.*: *s.n.*], 2004. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270012/hp5270012.html. Acesso em: 1 dez. 2020.

BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2006.

BOYER, C. B. **Historia da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 1 dez. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 1 dez. 2020.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 1 dez. 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 1 dez. 2020.

BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. Vitória: Centro de Educação, 2016.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. O Ensino de números irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, v. 33, n. 64, p. 728–747, 2019. Disponível em:

https://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n64/1980-4415-bolema-33-64-0728.pdf. Acesso em: 8 dez. 2020.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 1996.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARVALHO, P.; PONTE, J. P. da. Desenvolver o pensamento relacional na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico. **Educação e Matemática**, n. 143, p. 33–37, 2017. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_33_Desenvolver_o_pensamento_59f1fcb7d22b5.pdf. Acesso em: 2 jan. 2021.

CHAVES, G. G.; SOUZA, V. H. G. de. Concepções de formandos do ensino médio sobre a densidade dos números reais. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 496–504, 2017. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/12226/1/Chaves2017Concepciones.pdf. Acesso em: 28 ago. 2020.

COBIANCHI, A. S. Continuidade e números reais: descobertas e justificativas de professores. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 163–173, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2779/2110. Acesso em: 29 jul. 2020.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **What is Mathematics?** 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1996.

DIAS, M. da S. **Reta real: conceito imagem e conceito definição**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 2002.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. das D.; RIBEIRO, A. J. Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 3, p. 182–208, 2017. Disponível em:

https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/33081/pdf. Acesso em: 30 mar. 2021.

EMPSON, S. B.; LEVI, L.; CARPENTER, T. P. **The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School**. New York: Springer, 2010.

EVES, H. **An introduction to the history of mathematics**. 3. ed. New York: Holt Rinehart Winston, 1969.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FERNANDES, D. P. Do Conceito de Número e Magnitude na Matemática Grega Antiga. **Revista de Humanidades de Valparaíso**, n. 9, p. 7–23, 2017. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6057775. Acesso em: 8 dez. 2020.

FERREIRA, A. B. de H. **Miniaurélio Século XXI Escolar: o minidicionário da língua portuguesa**. 4. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. v. 29, n. 1, p. 110–113, 1995. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/3482830?seq=1. Acesso em: 10 abr. 2021.

FOWLER, D. **The mathematics of Platos Academy: A new Reconstruction**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1999.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

GOMES, A. C. F. N; ET AL. A construção dos números reais no Ensino Médio: algumas propostas e reflexões. **XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul**, p. 80–87, 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1860/1808. Acesso em: 8 dez. 2020.

HAVIL, J. **The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On**. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. v. 32, p. 3–31, 1994. Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/50/33. Acesso em: 10 abr. 2021.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: Conjuntos e Funções. 9. ed. Lisboa: Atual editora, 2013.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Conversa de professor: Matemática**. Brasília: Secretaria de Educação à distância, 2007. Acesso em: 1 dez. 2020.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes Ensinar frações. **Bolema**, v. 21, n. 31, p. 1–22, 2008. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2102. Acesso em: 2 jan. 2021.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A Aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, v. 14, n. 1, p. 89–107, 2005. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/244/205. Acesso em: 2 jan. 2021.

MORAIS, C.; SERRAZINA, M. de L. Extensões de Conhecimentos na Construção da Compreensão de Numeral Decimal. **Bolema**, v. 32, n. 61, p. 631–652, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2018000200631. Acesso em: 2 jan. 2021.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. **Bolema**, v. 17, n. 21, p. 1–19, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10534. Acesso em: 2 jan. 2021.

PASQUINI, R. C. G.; BARONI, R. L. S. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007.

PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas relações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 2004.

PENTEADO, C. B.; SILVA, B. A. da. Fundamentos dos Números Reais: Concepções de Professores e Viabilidade de Início do Estudo da Densidade no Ensino Médio. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 11, n. 2, p. 351–371, 2009. Disponível em: `https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1860/1808`. Acesso em: 8 dez. 2020.

POLITO, A. M. M.; SILVA FILHO, O. L. A Filosofia da Natureza do Pré-Socráticos. **Cadernos Brasileiros de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 323–361, 2013. Disponível em: `https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2013v30n2p323/24929`. Acesso em: 29 ago. 2020.

POMMER, M. P. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 2012.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. **Bolema**, v. 28, n. 50, p. 1464–1484, 2014. Disponível em: `https://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n50/1980-4415-bolema-28-50-1464.pdf`. Acesso em: 2 jan. 2021.

POSSANI, C.; GONÇALVES, C. H. B. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. **Revista Matemática Universitária**, n. 47, p. 16–24, 2009. Disponível em: `https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47_Artigo02.pdf`. Acesso em: 8 dez. 2020.

RESNICK, L. B.; ET AL. Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 1, p. 8–272, 1989. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/749095?seq=1#metadata_info_tab_contents`. Acesso em: 2 jan. 2021.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 2003.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas**. Moscou: Editorial Mir, 2019.

RODRIGUES, W. R.; CAMPOS, T. M. M. de. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal**. São Paulo: [*s.n.*], 2005.

SANTA CATARINA. **Currículo base da Educação infantil e Ensino Fundamental**. 21. ed. Florianópolis: Secretaria de Estado da Educação, 2019. Disponível em: http://uaw.com.br/pagflip/pdf.php?pag=portifolio&cod=35. Acesso em: 1 dez. 2020.

SILVA, R. S. **Um estudo sobre o movimento lógico-histórico do conceito de continuidade**. São Carlos: Programa Pós-Graduação em Educação, 2019.

SOARES, E. F; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetike**, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646776/13678. Acesso em: 2 jan. 2021.

STACEY, K.; STEINLE, V. The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. **Teaching Mathematics in New Times**, v. 2, p. 1–9, 1998. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749095?seq=1#metadata_info_tab_contents. Acesso em: 2 jan. 2021.

TALL, D. **Advanced Mathematical thinking**. 11. ed. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Plublishers, 2002.

VOSKOGLOU, M.; KOSYVAS, G. D. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. **REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education**, v. 1, n. 3, p. 301–336, 2012. Disponível em: https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/229/pdf. Acesso em: 29 jul. 2020.

WEBB, D. C.; BOSWINKEL, N.; DEKKER, T. Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 14, n. 2, p. 110–113, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/317953665_Beneath_the_Tip_of_the_Iceberg_Using_Representations_to_Support_Student_Understanding. Acesso em: 30 mar. 2021.

ZUIN, E. de S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 2001.

Apêndices

APÊNDICE A – IRRACIONALIDADE DE RAÍZES QUADRADAS

A seguir, serão expostas as demonstrações a respeito da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{p}$

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $1^2 + 1^2 = d^2 \iff 2 = d^2 \iff \sqrt{2} = d$.

Afirmamos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Para justificar tal suposição, vamos explicar que sua negação é falsa.

Dem 1: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Sem perder generalidade, podemos dizer que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, de modo que essa fração seja irredutível, ou seja, $MDC(a, b) = 1$.

Daí, temos:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \iff 2 = \frac{a^2}{b^2} \iff 2 \cdot b^2 = a^2 \tag{16}$$

Nosso objetivo é chegar que a e b são múltiplos de 2, logo 2 dividiria a e b simultaneamente, o que acarretaria uma contradição com a hipótese inicial de que o Máximo Divisor Comum entre a e b seria 1.

Note que como $2b^2 = a^2$, temos que a^2 é par. Para prosseguirmos o pensamento, precisamos do seguinte resultado auxiliar: um número natural n é par $\iff n^2$ é par. Para não confundir o leitor, justificaremos isso posteriormente.

Ora, sabemos que a^2 é par, portanto, usando a proposição anteriormente comentada, temos que a é par. Todo número par pode ser escrito como $2k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Usando essa informação na igualdade (8).

Daí, tememos que $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Disso, observamos que $2b^2 = 2(2k^2) \iff b^2 = 2k^2$ e, portanto, b^2 é par. Usando mais uma vez a proposição, concluímos que b é par.

Dado que a e b são pares, temos que ambos são divisíveis por 2, o que é uma contradição com o fato de que $MDC(a, b) = 1$.

Disso, segue que a e b não podem ser racionais. Logo, são irracionais.

Vamos provar a proposição: um número n é par $\iff n^2$ é par.

($\Longrightarrow$) Temos por hipótese que n é par.

Portanto, como n é par, temos que $n = 2p$, onde $p \in \mathbb{N}$. Assim sendo, podemos elevar ambos os lados ao quadrado e, com isso, temos $n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. Com isso, temos que n^2 é escrito como duas vezes um número inteiro, logo n^2 é par.

($\Longleftarrow$) Temos por hipótese que n^2 é par.

Como todo número natural é par ou é impar (exclusivamente), vamos provar que n não é impar.

Suponha, por absurdo, que n seja ímpar. Logo, $n = 2j + 1$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos: $n^2 = (2j + 1)^2 = (2j + 1)(2j + 1) =$

$4j^2 = 2j + 2j + 1 = 2(2j) + 1$. Observe que n^2 acabou ficando igual a duas vezes um número inteiro mais 1, o que caracteriza um número ímpar, o que contradiz a hipótese inicial de que n^2 seria par.

Disso, segue que n não é impar, logo n é par.

Dem 2: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Logo, existem inteiros a e b, com b não nulo, tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Elevando os dois lados ao quadrado, temos que:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Longleftrightarrow 2b^2 = a^2 \tag{17}$$

Agora, vamos usar o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), o qual diz que todo número inteiro maior que 1, pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos.

Com base nesse no TFA, temos que a pode ser escrito de modo único como produto de primos da seguinte maneira: $a = a_1 a_2 a_3 \cdots a_p$.

Analogamente, temos que b pode ser escrito da seguinte maneira como produto de primos: $b_1 b_2 b_3 \cdots b_q$.

Usando as informações elencadas na igualdade (9), temos que:

$$2(b_1 b_2 b_3 \cdots b_q)^2 = (a_1 a_2 a_3 \cdots a_p)^2 \tag{18}$$

Observe que o fator 2 aparece uma quantidade par de vezes do lado direito e impar do lado esquerdo, o que contradiz o TFA. Logo, não é verdade que $\sqrt{2}$ seja racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional. Observe que a segunda demonstração pode ser generalizada para $\sqrt{p}$, onde p é um número primo.

O procedimento é análogo. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{p}$ seja racional. Então existem inteiros c e d, d não nulo, tais que $\sqrt{p} = \frac{c}{d}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos que:

$$p = \frac{c^2}{d^2} \Longleftrightarrow pd^2 = c^2 \tag{19}$$

Usando o TFA, temos que d pode ser escrito de modo único como produto de primos $d = d_1 d_2 d_3 \cdots d_f$. Analogamente, temos que c pode ser escrito como produto de primos da seguinte maneira: $c = c_1 c_2 c_3 \cdots c_g$.

Usando as informações anteriores em (11), temos:

$$\begin{aligned} p(d_1 d_2 d_3 \cdots d_f)^2 &= (c_1 c_2 c_3 \cdots c_g)^2 \\ pd_1^2 d_2^2 d_3^2 \cdots d_f^2 &= c_1^2 c_2^2 c_3^2 \cdots c_g^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Perceba que em (20) o fator p aparece uma quantidade ímpar de vezes do lado esquerdo e par do lado direito, o que contradiz o TFA.

Daí, segue que $\sqrt{p}$, com p primo não pode ser racional. Logo, $\sqrt{p}$ é irracional.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PARA ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Números reais em uma abordagem para a Educação Básica - Formulário para o Ensino Médio

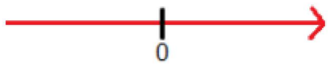
Seção 1 - Classificando os números...

Assinale uma ou mais opções nas questões a seguir, as quais contemplam o que os números são:

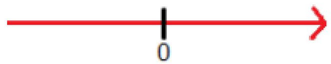
	$-\frac{22}{7}$	$0,1234567891011121314...$	$0,1234567891011121314$	$\sqrt{-6+150}$	$(-1)\cdot\frac{\pi}{3,14}\cdot(-1)$
Natural					
Inteiro					
Racional					
Irracional					
Real					
Positivo					
Negativo					
N.D.A.					

Seção 2 – Em busca de justificativas

Considere, na reta numérica abaixo, o número destacado. Explique se existe um número inteiro maior do que o número destacado e que seja o mais próximo dele.



Considere, na reta numérica abaixo, o número destacado. Explique se existe um número real maior do que o número destacado e que seja o mais próximo dele.



Explique com suas palavras o que você entende por:

O que são números racionais? Você consegue dar um exemplo de número deste tipo?

O que são números irracionais? Você consegue dar um exemplo de número deste tipo?

Seção 3 – Imagens conceituais

Ao refletir sobre números reais, quais palavras lhe surgem no pensamento?

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO PARA ESTUDANTES DO ENSINO SUPERIOR

Números reais em uma abordagem para a Educação Básica - Formulário para o Ensino Superior

Seção 1 - Classificando os números...

Assinale uma ou mais opções nas questões a seguir, as quais contemplam o que os números são:

	$-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$	$0,1234567891011121314...$	$0,1234567891011121314$	$(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
Natural				
Inteiro				
Racional				
Irracional				
Real				
Positivo				
Negativo				
N.D.A.				

Seção 2 – Em busca de justificativas

Questão 5 - No número 1,01001000100001... o que significam os três pontinhos? E no número 2,71821882845904...? Existe alguma semelhança/diferença no uso dos três pontinhos nos casos apresentados? Explique seu ponto de vista.

____

____

Questão 6 - O que é um número irracional? O que leva você a acreditar na existência desses números?

____

____

____

____

Questão 7 - O que é um número real? O que leva você a acreditar na existência desses números?

Questão 8 - Considere o conjunto a seguir e explique se ele possui ou não um maior elemento

$\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$

Questão 9 - Considere o conjunto a seguir - a e b são números reais distintos. Explique o motivo de ser possível ou não que esse conjunto tenha apenas números racionais.

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Seção 3 – Imagens conceituais

Ao refletir sobre números reais, quais palavras lhe surgem no pensamento?