



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS

Guilherme Luiz Minetto Fredo

**ESTRATÉGIAS PARA MELHORARIA DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL  
PARA RESOLVER O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO  
ENERGÉTICA DE MÉDIO PRAZO**

Florianópolis

2021

Guilherme Luiz Minetto Fredo

**ESTRATÉGIAS PARA MELHORARIA DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL  
PARA RESOLVER O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO  
ENERGÉTICA DE MÉDIO PRAZO**

Documento de defesa da Tese em engenharia elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina como pré-requisito para obter o grau de doutor em engenharia elétrica.

Orientador: Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fredo, Guilherme Luiz Minetto  
ESTRATÉGIAS PARA MELHORARIA DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL  
PARA RESOLVER O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO  
ENERGÉTICA DE MÉDIO PRAZO / Guilherme Luiz Minetto Fredo ;  
orientador, Erlon Cristian Finardi, coorientador, Paulo  
Vitor Larroyd, 2021.  
219 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Programação Dinâmica Dual  
Estocástica. 3. Centros de Chebyshev. 4. Métodos de  
regularização. 5. Energia Afluente Fio d'água. I. Finardi,  
Erlon Cristian . II. Larroyd, Paulo Vitor. III.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Guilherme Luiz Minetto Fredo

ESTRATÉGIAS PARA MELHORARIA DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL PARA  
RESOLVER O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA DE  
MÉDIO PRAZO

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora  
composta pelos seguintes membros:

Prof. André Luís Marques Marcato, Dr.  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Welington de Oliveira, Dr.  
École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Guilherme Matiussi Ramalho, D. Eng.  
Câmara de Comercialização de Energia Elétrica

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado  
adequado para obtenção do título de doutor em Engenharia Elétrica.

---

Prof. Teles Brunelli Lazzarin, Dr.  
Coordenador do Programa

---

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.  
Orientador

Florianópolis-SC, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais, Jair e Leoni,  
aos meus irmãos Fábio e Alexandre.

## AGRADECIMENTOS

A minha família, em primeiro lugar, a figura de meus pais, Leoni Minetto e Jair Fredo, sem eles com toda certeza este trabalho não poderia ter sido desenvolvido. Os pais são os principais responsáveis por incentivar e mostrar os caminhos para que os filhos busquem ser pessoas melhores e de certa forma contribuir com a ciência e com a comunidade científica. Aos meus irmão, Fábio e Alexandre, que sempre me incentivaram e me auxiliaram nos pontos em que estavam a seu alcance. A minha Madrinha Ivani e a Tia Nena.

Um parágrafo especial deve ser direcionado como forma de agradecimento a minha amada namorada Maria Carolina Rodrigues de Azevedo. Sem dúvida ela foi um dos pilares durante a etapa meio-final do trabalho, ela sempre esteve ao meu lado e me apoiou no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os Professores da Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSC, em especial aos da área de Sistemas de Energia pelos conhecimentos compartilhados. Agradecimento especial ao meu Orientador o Professor Erlon Finardi, pela orientação e por passar seus conhecimentos, sem sua primordial ajuda este trabalho não seria desenvolvido. Ao meu amigo Paulo Larroyd e aos colegas, Murilo Scuzziato e Vitor Luiz de Matos por sempre estarem disposto a passar seus conhecimentos.

Gostaria de agradecer aos membros da banca, D. Sc. André Luís Marcato, Dr. Welington de Oliveira e Dr, Eng. Guilherme Matiussi Ramalho, por aceitarem o convite para participar da minha defesa, e pelas sugestões para melhoria do nível do trabalho.

Um agradecimento especial a equipe da CCEE que me auxiliou no final do desenvolvimento do trabalho, Rodrigo S., Humberto, Rodrigo A, Regiane, Taina, Patrícia, Eduardo, Fernanda, Rodrigo M, Guilherme, Lucio, Eros, Erica, Gabriel, Cassio, Fabio, Leonel e Lucas.

Queria agradecer aos meus amigos de turma Felipe Beltrán, Brunno Brito, Renata Pedrini, Bruno Coloneti, Guilherme Ramalho e Gilseu Von Muhlen pelo apoio que de certa forma contribuiu para este trabalho. Aos demais amigos de laboratório, Gabriel Bolacel, Ivo Costa, Pedro Cesar, Valmor Zimmer, Marcelo Cordova, Fábio Mantelli, Kauana Palma, José Octávio Cesario. Aos demais amigos feitos na breve passagem em Florianópolis, Ricardo Schaefer, Karila Palma, Lucas Novelino, Ronie, Samir Fernades, Diogo Hart, Everton Macagnan, Bruno Begnini, Vinicius, João, Luiz Felipe e Paulo Gaspar.

Por Fim, ao PPGEEL da UFSC, a todos os servidores da secretaria da Pós, Marcelo, Wilson e Lis que sempre me auxiliaram prontamente, ao CNPQ e ao projeto de P&D SPARHTACUS II e a Norte Energia S.A na figura do Lucas Picarelli.

“As pessoas não serão capazes de olhar para a posteridade, se não tiverem em consideração a experiência dos seus antepassados.”

(BURKE, 1790)

## RESUMO

O problema do Planejamento da Operação Energética de Médio Prazo (POEMP) visa construir uma política operativa em um horizonte de planejamento plurianual, minimizando os custos de geração térmica e do déficit de energia. Obter uma solução para este problema não é uma tarefa trivial devido as suas complexidades, em especial, a grande participação das hidrelétricas e a alta dimensionalidade. Para resolvê-lo, o problema é modelado como um programa linear estocástico em multiestágios, e o método de solução mais utilizado no estado da arte é a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), o qual trata-se de um processo iterativo onde a etapa *forward* tem objetivo de calcular os pontos experimentais, e a *backward*, constrói os cortes baseado na decomposição de Benders, utilizando os pontos experimentais obtidos na *forward*. Uma das grandes desvantagens da PDDE é a convergência lenta quando utilizada em problemas de grande porte devido à elevada dimensionalidade. Este trabalho visa aplicar técnicas de regularização na PDDE e melhorar o *trade-off* entre os aspectos de modelagem, de modo que as políticas de operação obtidas considerando todos os aspectos do problema do POEMP sejam aperfeiçoadas, melhorando a eficiência da PDDE. Dentre as metodologias apresentadas neste trabalho destacam-se: (i) método de regularização que combina a PDDE com centros de Chebyshev; (ii) comparação entre diferentes métodos de regularização através da avaliação da política operativa pelo cálculo da brecha de otimalidade; (iii) modelo de afluência baseado na representação da variável aleatória por energia afluyente fio d'água e usinas individualizadas; (iv) modelagem da energia armazenada como variável de estado aplicada em modelos individualizados; (v) É proposto um método de avaliação das políticas operativas através do cálculo de um intervalo de confiança unilateral. Este método é empregado quando as variáveis que compõe as políticas operativas são distintas, como são os casos observados nos modelos das metodologias (iii) e (vi). Para avaliar as metodologias propostas, se dispõe de dois sistemas. Para os casos de (i) é utilizado o sistema interligado nacional como base. Para os estudos de (ii), (iii) e (iv) é usado um sistema reduzido com 30 usinas térmicas e 53 hidrelétricas distribuídas em 6 bacias hidrográficas. Ambos os sistemas são modelados de forma individualizada e consideram os dados oficiais de janeiro de 2016 a dezembro de 2020. Como resultado, destaca-se que os métodos de regularização dos centros de Chebyshev e o da decomposição regularizada multiestágio são eficientes em diminuir a brecha de otimalidade, e o modelo de energia afluyente fio d'água se mostrou capaz de melhorar a qualidade da política baseado no critério unilateral do intervalo de confiança.

**Palavras-chave:** Centros de Chebyshev, Métodos de regularização, Programação Dinâmica Dual Estocástica, Energia Afluyente Fio d'água, Energia Armazenada.

## ABSTRACT

The long-term generation scheduling (LTGS) problem aims to build an operating policy over a multi-year planning horizon, minimizing thermal generation and energy deficit costs with water storage. For this problem, it is not trivial to obtain a solution due the complexities, specially the number of hydro plant and the high dimensionality. Thus, the problem is modeled as a linear multistage stochastic program, and the most common method found in the state-of-art as a solution is the stochastic dual dynamic programming (SDDP), which employs a forward step for generating trial state variables, and a backward step to construct cuts based on Benders strategy. As the SDDP is a cutting-plane based method, it exhibits slow convergence in large-scale problems. The objective of this work is to apply regularization techniques in the SDDP and improve the trade-off among modelling aspects to obtain better operational policies, therefore, improving the SDDP efficiency. For this, four methodologies are highlighted: *(i)* regularization method that combines SDDP with Chebyshev centers to define trial points; *(ii)* comparison of different regularization methods through the evaluation of the operational policy using optimum gap calculation; *(iii)* inflow modelling based on random variable representation for each inflow run-of-the-river energy and hydro plant individual; *(iv)* modelling energy storage as state variable applied to individual models; *(v)* we propose a method to assess the operational policies based on one-sided confidence interval for expected cost estimation. This method is employed when the variables that compose the operational policies are different, as observed in methodologies *(iii)* and *(iv)*. To perform the proposed methodologies, two systems are considered. For cases in *(i)* is used the Interconnected Brazilian System as base. For the studies in *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* is used a reduced power system with 30 thermal plants and 53 geographically widespread hydro plants in six basins. Both systems are individually modeled and use data from January 2016 and December 2020. In the results, the Chebyshev centers and regularized decomposition has shown efficiency to reduce the optimum gap. Besides, the use of inflow aggregation and run-of-the-river energy inflow has shown better performance than the individualized inflows, considering the one-sided confidence interval evaluation.

**Keywords:** Chebyshev Centers, Regularization Methods, Stochastic Dual Dynamic Programming, Run-of-the-River Inflow Energy, Stored Energy.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa do Sistema brasileiro. A esquerda: Linhas de transmissão; A direita: principais troncos. ....	40
Figura 2 – Patamares de carga. ....	44
Figura 3 – Série Histórica de ENA do REE Sudeste (1931-2019). ....	50
Figura 4 – Coeficientes da FACP e intervalo de confiança. ....	53
Figura 5 – Árvore de cenários assimétrica. ....	62
Figura 6 – (a) árvore simétrica (b) árvore de amostras comuns ....	63
Figura 7 – Desenho da árvore de cenários originais e cenários amostrados. ....	65
Figura 8 – Amostragem dos cenários para a etapa forward. ....	66
Figura 9 – Desenho da etapa forward. ....	67
Figura 10 – Desenho da etapa backward. ....	68
Figura 11 – Ponto ótimo por Método de Kelley e Ponto ótimo por Chebyshev (77). ....	75
Figura 12 – Excursão dos custos superiores e inferiores das metodologias CC e CL. ....	83
Figura 13 – FCF da terceira iteração para $t=1$ . ....	84
Figura 14 – Evolução do custo superior e inferior para CC e CL. Com CC usando $KCC=0,5$ . .....	86
Figura 15 – Evolução dos custos inferiores e superiores para CC/CL. Em CC usando $KCC=10k$ . .....	87
Figura 16 – Árvore de cenários de amostras comuns com 4 estágios e 12 cenários. ....	96
Figura 17 – Sistema exemplo reduzido. ....	100
Figura 18 – Exemplo de bacias hidrográficas do SIN. ....	101
Figura 19 – Sistema hidráulico exemplo de pequeno porte. ....	109
Figura 20 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR individualizada. ....	112
Figura 21 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR por bacia. ....	114
Figura 22 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR EAFdA. ....	116
Figura 23 – Comparação de custo inferior e superior dos casos com ear e vh como variável de estado. ....	124
Figura 24 – Sistema interconectado brasileiro. ....	126

Figura 25 – (a) Demanda e (b) Curva de mérito utilizada no sistema reduzido no horizonte de $T=60$ . .....	127
Figura 26 – Cascata do Sistema reduzido.....	129
Figura 27 – Processo de avaliação da política operativa. ....	131
Figura 28 – Evolução do custo inferior para todos os casos executados na árvore de cenários 1, 2 e 3. ....	139
Figura 29 – Evolução do custo inferior para todos os casos executados na árvore de cenários 4. ....	144
Figura 30 – Evolução do custo inferior para todos os casos conjuntos executados na árvore de cenários 4.....	146
Figura 31 – Evolução do custo inferior para os casos CL e CL-CC com $K_{cc} = 1k, 10k$ e $500k$ . ....	146
Figura 32 – Custo inferior dos casos CL, 50CL-CC2-100k e 50CL-CC-100k. ....	147
Figura 33 – Custo inferior dos casos CL e 50CL-CC2 para $K_{cc} = 1k, 10k$ e $500k$ . ....	148
Figura 34 – Comparação de CI das metodologias de regularização e PDDE. ....	152
Figura 35 – Evolução do custo inferior dos casos com 20 aberturas. ....	162
Figura 36 – Evolução do custo inferior dos casos com 50 aberturas. ....	166
Figura 37 – Excursão do custo inferior Demanda 1 para os casos (a) com 20 aberturas, (b) 50 aberturas e (c) 100 aberturas. Todos com 50 cenários por iteração. ....	171
Figura 38 – Excursão do custo inferior Demanda 2 para os casos com 20 aberturas e modelo PAR(p) individualizado.....	174
Figura 39 – Etapa Backward do esquema assíncrono puro. ....	180
Figura 40 – Custo inferior dos casos considerando a árvore 5 com risco neutro. ....	191
Figura 41 – Custo inferior para os casos considerando a árvore 5 com aversão ao risco. ....	193
Figura 42 – Conjunto de pontos da FPH Furnas Agregada, considerando vertimento nulo. .	195
Figura 43 – Envoltória obtida pelos planos escolhidos pelo algoritmo do Convex Hull. ....	196
Figura 44 – Modelo côncavo linear por partes da FPH Furnas. ....	197
Figura 45 – FPH aproximada com destaque em um plano.....	198
Figura 46 – Cálculo do coeficiente angular associado com o vertimento para o ponto P2....	199
Figura 47 – Coeficientes PH3 referentes aos pontos P1 e P3.....	199
Figura 48 – Custo inferior dos casos com 20 aberturas.....	203
Figura 49 – Custo inferior dos casos com 50 aberturas.....	205
Figura 50 – Excursão do custo inferior Demanda 2 para os casos (a) com 20 aberturas, (b) 50 aberturas e (c) 100 aberturas. 50 cenários por iteração. ....	208

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados do parque hidráulico.....	79
Tabela 2 – Dados do parque térmicas.....	79
Tabela 3 – Resultado da etapa forward para k=1. ....	81
Tabela 4 – Etapa forward para k=2 para a metodologia CC. ....	82
Tabela 5 – Decisões da segunda iteração por estágio.....	84
Tabela 6 – Dados do parque térmico e demanda.....	109
Tabela 7 – Dados do parque hidrelétrico.....	109
Tabela 8 – Resíduos por usina (m <sup>3</sup> /s). ....	110
Tabela 9 – Coeficientes do modelo PAR(p) por usina até T=4.....	110
Tabela 10 – Resíduos da bacia (m <sup>3</sup> /s).....	112
Tabela 11– Coeficientes do modelo PAR(p) por bacia até T=4.....	112
Tabela 12 – Fator de conversão média da afluência da bacia para afluência por usina hidrelétrica.....	113
Tabela 13 – Resíduos da bacia por energia afluyente FdA (MW) e individualizado para UHE de reservatório (m <sup>3</sup> /s). ....	114
Tabela 14 – Coeficientes do modelo PAR(p) por energia afluyente FdA até T=4. ....	115
Tabela 15 – Fator de conversão média da energia afluyente FdA para afluência por usina hidrelétrica.....	115
Tabela 16 – Dados gerais das UHEs do sistema reduzido. ....	130
Tabela 17 – Crescimento do custo inferior para todas as árvores de cenários – Atualização 1. ....	141
Tabela 18 – Tempo de Eficiência (%) em relação ao CL para todos os casos – Atualização 1 ....	141
Tabela 19 – Custo esperado da simulação out-of-sample e a diferença de custo (DC) em relação ao caso CL em (%) – Atualização 1. ....	142
Tabela 20 – Custo esperado da simulação out-of-sample e a diferença em relação ao caso CL em (%) – Atualização 2. ....	144
Tabela 21 – Resultados da simulação out-of-sample dos casos combinados pelo número de iterações.....	147
Tabela 22 – Resultados da simulação out-of-sample dos casos combinados pelo número de cenários.....	148

Tabela 23 – Heurísticas utilizadas para regularizar o problema do sistema reduzido.....	149
Tabela 24 – Custo Inferior na última iteração. ....	150
Tabela 25 – Parâmetros para o cálculo da brecha de otimalidade.....	153
Tabela 26 – Tabela comparativa entre os métodos.....	154
Tabela 27 – Representação das variáveis de estado e FPH dos casos executados. ....	155
Tabela 28 – Número de planos e erro médio quadrático em relação a potência instalada total do sistema em (%). ....	156
Tabela 29 – Ordem do modelo PAR(p) por mês em cada modelo de afluência. ....	157
Tabela 30 – Número de variáveis de estado do algoritmo da PDDE. ....	158
Tabela 31 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas. ....	160
Tabela 32 – Simulação com políticas de 20 aberturas/t .....	163
Tabela 33 – Resultados da otimização casos com 50 aberturas/t.....	165
Tabela 34 – Resultados da otimização casos com 50 aberturas/t.....	167
Tabela 35 – Representação das variáveis de estado e FPH dos casos executados com a metodologia Earm. ....	168
Tabela 36 – Resultados da otimização casos com 20, 50 e 100 aberturas .....	169
Tabela 37 – Simulação com políticas de 20, 50 e 100 aberturas.....	172
Tabela 38 – Simulação com políticas de 20aberturas/t. ....	174
Tabela 39 – Crescimento do Custo inferior [%] e redução do tempo computacional para todos os casos neutro a risco. ....	192
Tabela 40 – Caso neutro a risco de custo esperado. ....	192
Tabela 41 – Crescimento do Custo inferior [%] e redução do tempo computacional para todos os casos com aversão a risco. ....	193
Tabela 42 – Custo esperado dos casos avessos ao risco.....	194
Tabela 43 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas/t.....	201
Tabela 44 – Simulação com políticas de 20 aberturas. ....	202
Tabela 45 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas. ....	204
Tabela 46 – Simulação com políticas de 50 aberturas. ....	206
Tabela 47 – Resultados da otimização casos com 20, 50 e 100 aberturas. ....	207
Tabela 48 – Simulação com políticas de 20, 50 e 100 aberturas/t.....	210

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACP	Análise das Componentes Principais
CC	Centros de Chebyshev
CCI	Crescimento do Custo Inferior
CMO	Custo Marginal de Operação
CL	PDDE Clássica
CVaR	<i>Conditional value at risk</i>
DR	Decomposição regularizada multiestágio
Earm	Energia Armazenada
FdA	Fio d'água
EAFdA	Energia Afluente Fio d'água
FAC	Funções de autocorrelações
FACP	Funções de autocorrelações parciais
FCF(s)	Função(ões) de Custo Futuro
IC	Intervalo de Confiança
ONS	Operador Nacional do Sistema
NL	Regularização de nível com base em soluções normais
PC	Produtibilidade Constante
PCH(s)	Pequena(s) Central(ais) Hidrelétrica(s)
PDD	Programação Dinâmica Dual
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PDE	Programação Dinâmica Estocástica
PDO	Programação Diária da Operação
PE	Problema Estocástico
PMO	Planejamento Mensal da Operação
PO	Planejamento da Operação
PEN	Planejamento Anual da Operação
PELM	Problema Estocástico Linear Multiestágio
PL(s)	Problema(s) Linear(es)
PLD	Preço de Curto Prazo
POECP	Planejamento da Operação Energética de Curto Prazo
POEMP	Planejamento da Operação Energética de Médio Prazo
PQ	Problema Quadrático
REE(s)	Reservatório(s) de Energia Equivalente(s)
SP	Sistema de Potência
SIN	Sistema Interligado Nacional
UHE(s)	Usina(s) Hidrelétrica(s)
UTE(s)	Usina(s) Termelétrica(s)

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	20
1.2	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO .....	27
1.3	ORGANIZAÇÃO DA TESE.....	31
1.4	PUBLICAÇÕES DA TESE.....	32
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DO PROBLEMA DO POEMP PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>33</b>
2.1	ASPECTOS DE MODELAGEM .....	33
<b>2.1.1</b>	<b>Usinas Termelétricas .....</b>	<b>33</b>
2.1.1.1	<i>A função matemática de geração térmica .....</i>	33
<b>2.1.2</b>	<b>Usinas Hidrelétricas.....</b>	<b>34</b>
2.1.2.1	<i>Geração hidráulica.....</i>	34
<b>2.1.3</b>	<b>Balanco Hídrico .....</b>	<b>37</b>
2.1.3.1	<i>Modelagem de afluência.....</i>	38
<b>2.1.4</b>	<b>Subsistemas Elétricos .....</b>	<b>40</b>
2.1.4.1	<i>Cálculo de déficit.....</i>	41
2.1.4.2	<i>Intercâmbio.....</i>	41
2.1.4.3	<i>Demanda.....</i>	42
2.1.4.4	<i>Balanco de energia.....</i>	42
2.1.4.5	<i>Patamares de carga.....</i>	43
2.1.4.6	<i>Taxa de desconto .....</i>	45
<b>2.1.5</b>	<b>O Problema Linear de Cada Nó da PDDE.....</b>	<b>45</b>
2.2	MODELO DE GERAÇÃO DE CENÁRIOS DE AFLUÊNCIA .....	48
<b>2.2.1</b>	<b>Modelo Com Dependência Temporal .....</b>	<b>49</b>
2.2.1.1	<i>Identificação da ordem do modelo .....</i>	51
<b>2.2.2</b>	<b>Modelo Sem Dependência Temporal .....</b>	<b>56</b>

2.2.3	<b>Correlação Espacial.....</b>	<b>56</b>
2.2.4	<b>Geração das Séries Sintéticas .....</b>	<b>58</b>
2.3	<b>PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>59</b>
2.3.1	<b>O Problema Estocástico Multiestágio .....</b>	<b>60</b>
2.3.2	<b>Árvore de Cenários.....</b>	<b>61</b>
2.3.2.1	<i>Arranjo das árvores de cenários .....</i>	<i>62</i>
2.3.3	<b>A Programação Dinâmica Dual Estocástica – PDDE.....</b>	<b>63</b>
2.3.3.1	<i>O Algoritmo da PDDE.....</i>	<i>72</i>
3	<b>MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO .....</b>	<b>73</b>
3.1	<b>A PDDE COM CENTROS DE CHEBYSHEV – CC .....</b>	<b>73</b>
3.1.1	<b>Algoritmo da PDDE com Centros de Chebyshev – CC.....</b>	<b>78</b>
3.1.2	<b>Aplicação prática dos Centros de Chebyshev .....</b>	<b>79</b>
3.2	<b>A DECOMPOSIÇÃO REGULARIZADA MULTIESTAGIO – DR .....</b>	<b>87</b>
3.2.1	<b>Algoritmo da Decomposição Regularizada Multiestágio .....</b>	<b>90</b>
3.3	<b>O MÉTODO DA Regularização DE NÍVEL COM SOLUÇÃO NORMAL – NL</b>	<b>90</b>
3.3.1	<b>Soluções normais e perturbação finita de problemas convexos .....</b>	<b>91</b>
3.3.2	<b>Decomposição Regularizada em problemas estocásticos multiestágio. ....</b>	<b>92</b>
3.3.2.1	<i>Algoritmo da regularização de nível com soluções normais .....</i>	<i>95</i>
3.3.2.2	<i>Determinação dos parâmetros de nível.....</i>	<i>95</i>
4	<b>REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE .....</b>	<b>98</b>
4.1	<b>REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE EM VARIÁVEIS DE ESTADO DE AFLUÊNCIA .....</b>	<b>100</b>
4.1.1	<b>Modelo de Afluência Agregada por Bacia.....</b>	<b>101</b>
4.1.2	<b>Representação por Energia Fio d’água (Modelo EAFda).....</b>	<b>104</b>
4.1.3	<b>Exemplo Prático da Modelagem das Afluências.....</b>	<b>108</b>
4.1.3.1	<i>Modelo individualizado .....</i>	<i>110</i>

4.1.3.2	<i>Modelo agregado por bacia</i> .....	112
4.1.3.3	<i>Modelo de EAFdA</i> .....	114
4.2	REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE EM VARIÁVEIS DE ESTADO DE VOLUME	117
<b>4.2.1</b>	<b>O Modelo Earm</b> .....	<b>118</b>
4.2.1.1	<i>Aplicação prática do modelo Earm</i> .....	121
<b>5</b>	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b> .....	<b>125</b>
5.1	SISTEMAS .....	125
<b>5.1.1</b>	<b>Sistema Interligado Brasileiro</b> .....	<b>126</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Sistema Reduzido</b> .....	<b>127</b>
5.2	SIMULAÇÃO DA POLÍTICA OPERATIVA.....	131
<b>5.2.1</b>	<b>Estimação da Brecha de Otimalidade no Problema Estocástico (<i>gap</i>)</b> .....	<b>132</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Estimação do Intervalo de Confiança no Problema Estocástico (IC)</b> .....	<b>133</b>
5.2.2.1	<i>Modelo de Simulação Individualizado</i> .....	134
5.2.2.2	<i>Modelo de Simulação Individualizado Considerando a Afluência por Bacia</i> ....	135
5.2.2.3	<i>Modelo de Simulação Individualizado Considerando EAFdA</i> .....	136
5.2.2.4	<i>Modelo de Simulação Individualizado do Modelo Earm</i> .....	136
5.3	MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO.....	137
<b>5.3.1</b>	<b>Centros de Chebyshev</b> .....	<b>137</b>
5.3.1.1	<i>Atualização 1 – CC</i> .....	138
5.3.1.1.1	<i>Simulação out-of-sample</i> .....	142
5.3.1.2	<i>Atualização 2 – CC2</i> .....	143
5.3.1.2.1	<i>Simulação out-of-sample</i> .....	144
5.3.1.3	<i>Estratégias Conjuntas</i> .....	145
5.3.1.3.1	Combinação de estratégias em número de iterações .....	145
5.3.1.3.2	Combinação de estratégias em número de cenários .....	147
<b>5.3.2</b>	<b>Comparação entre métodos de regularização</b> .....	<b>149</b>
5.4	REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE .....	154

<b>5.4.1</b>	<b>Variáveis de Afluência.....</b>	<b>155</b>
5.4.1.1	<i>A Ordem do modelo PAR(p).....</i>	<i>156</i>
5.4.1.2	<i>Casos Simulados.....</i>	<i>158</i>
5.4.1.2.1	Simulações com 20 aberturas .....	159
5.4.1.2.2	Simulações com 50 aberturas .....	164
<b>5.4.2</b>	<b>Variáveis de Volume – O Modelo Earm.....</b>	<b>168</b>
5.4.2.1	<i>Simulação com 20, 50 e 100 aberturas – Modelo independente.....</i>	<i>169</i>
5.4.2.2	<i>Simulação com 20 aberturas – Modelo PAR(p).....</i>	<i>173</i>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>175</b>
6.1	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS.....	178
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>181</b>
	<b>APÊNDICE A – Metodologia dos Centros de Chebyshev.....</b>	<b>191</b>
	<b>APÊNDICE B – Determinação da FPH.....</b>	<b>195</b>
	<b>APÊNDICE C – Modelo EAFda.....</b>	<b>200</b>
	<b>APÊNDICE D – Modelo Earm.....</b>	<b>207</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Países com maior renda per capita possuem uma tendência de consumir maiores quantidades de energia (BROWN et al., 2011) pois, entre outros fatores, o progresso de uma sociedade está diretamente ligado à capacidade de geração e consumo de energia em grande escala. Portanto, é muito importante a construção de um sistema de potência que seja confiável e operado de forma eficiente. Segundo dados coletados em 2016, em termos de energia elétrica, o sistema brasileiro, conhecido como Sistema Interligado Nacional (SIN) é o oitavo maior produtor de energia do mundo<sup>1</sup>, o terceiro<sup>2</sup> em produção de energia por hidroeletricidade (IEA, 2018), e na América do Sul é o maior importador e exportador de energia devido ao projeto de Itaipu.

O SIN é um dos maiores sistemas elétricos do mundo despachado centralizadamente, esse fato eleva o desafio do planejamento da operação. Com sua dimensão continental, aproximadamente 190 quilômetros de linhas de transmissão ligam mais de 20 diferentes empresas de distribuição de energia. Mais de 9300 geradores são responsáveis por 175GW de capacidade instalada a qual, destaca-se a predominância da fonte hídrica. Da potência instalada total, 58,21% são provenientes de hidrelétricas, 25,03% de termoeletricas<sup>3</sup>, 10,19% de eólica e 3,11% de Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCHs). Destaca-se ainda o crescimento da fonte solar que aparece com 1,86% (ANEEL, 2017). Assim, a presença majoritária das hidrelétricas insere dificuldades adicionais no planejamento e operação do SIN. Além disso, destaca-se que, com o crescimento da participação de fontes tais como eólica e solar as incertezas inerentes à operação é acrescida.

No Brasil, a histórica dominância de hidrelétricas pode ser explicada, em parte, pelo grande potencial de uso de energia hidráulica devido aos diversos rios de grande extensão localizados em todas as regiões do país. Além disso, em termos de geração, a fonte hidráulica é considerada de baixo custo de operação, renovável, de fácil produção em larga escala, e com máquinas de rápida sincronização.

Embora tenha muitas vantagens, um sistema puramente hidráulico é impraticável pois a produção depende essencialmente das vazões afluentes. Portanto, um sistema exposto a uma condição hidrológica adversa durante um longo período teria sua confiabilidade energética

---

<sup>1</sup> 1.China, 2.USA, 3. Índia, 4. Rússia, 5. Japão, 6. Canadá, 7. Alemanha.

<sup>2</sup> 1.China, 2. Canadá.

<sup>3</sup> Entre as fontes térmicas destacam-se combustível fóssil, biomassa e Gás Natural Liquefeito (GNL).

comprometida pois a produção e a eficiência do sistema estão diretamente ligadas aos níveis dos reservatórios. Logo, nesta configuração o atendimento confiável da demanda ficaria comprometido. Assim, este tipo de sistema é complementado com uma base de geração térmica formando um sistema hidrotérmico o qual é extensivamente usado pelo mundo em países como Nova Zelândia, Canadá, Noruega, Suíça, Áustria, Eslovênia, Islândia, Colômbia etc.

Um importante parâmetro do sistema hidrotérmico é a capacidade de regularização. Esse fator está associado à capacidade do sistema de entregar energia sem interrupção. Assim, sistemas com hidrelétricas de grande reservatório possuem alta capacidade de regularização. No Brasil, muitas usinas podem armazenar grande quantidade de água; contudo, a capacidade de regulação vem decrescendo ano após ano. Em (BEZERRA et al., 2010) é mostrado que em meados dos anos 2000, o SIN possuía uma capacidade de regularização de 5 anos para esvaziar seus reservatórios. Aproximadamente 8 anos depois, é citado que o sistema apresentava a metade da capacidade de regularização, ou seja, 2,5 anos. Alguns fatores podem ser elencados que justifiquem essa diminuição, entre eles, o excesso de leis, a dificuldade na obtenção de licenças para a construção de grandes reservatórios, o impacto ambiental e social negativo que tais empreendimentos causam e o elevado custo de construção. Neste contexto, são preferidas termelétricas e usinas sem capacidade de regularização, as quais são chamadas de Fio d'Água (FdA). Desta forma, é inserido um fator de variabilidade maior ao SIN, e por consequência, o planejamento da operação ganha mais relevância para compreender e lidar com esses novos desafios.

É importante destacar que um sistema com predominância hidrelétrica geralmente leva à necessidade de construir um sistema robusto e grande, uma vez que, a construção das maiores usinas está longe dos maiores centros consumidores. Neste contexto, dado as características únicas do mercado de energia brasileiro, adota-se um agente operador para coordenar o SIN, chamado de Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) o qual é responsável por garantir o bem-estar social e econômico do sistema através da definição da quantidade de energia que cada usina deve despachar definidas pela minimização do custo de operação das térmicas e do déficit. O processo de planejamento da operação energética possui um arcabouço de instruções estabelecidas pelo operador (ONS, 2018). Suscintamente, o Planejamento da Operação (PO) é feito em três etapas que serão detalhadas a diante. Sugere-se a leitura do módulo 4.3 (ONS, 2021) o qual descreve o Planejamento Mensal da Operação (PMO) e Planejamento Anual da Operação (PEN).

Neste contexto, o objetivo do PO de sistemas hidrotérmicos visa minimizar o custo de operação do sistema, através da mitigação do uso de termelétricas. Tal objetivo leva a um problema complexo, o qual possui características importantes, as quais:

- a) A dimensão territorial contribui para a complexidade do problema com um alto grau de sazonalidade nas afluências, o que pode contribuir para um elevado nível de incerteza. Neste sentido, a conexão entre os subsistemas deve suportar o intercâmbio de energia dos períodos hidrológicos favoráveis e desfavoráveis bem como importação e exportação de energia.
- b) A característica estocástica intrínseca ao sistema hidrotérmico a qual, passou a ser ainda mais predominante devido ao aumento da penetração de fontes renováveis tais como eólica e solar.
- c) O arranjo espacial das hidrelétricas nas bacias, isto é, a operação da usina hidrelétrica a montante tem influência direta na operação de todas as usinas a jusante. Geralmente, o número de usinas na cascata é alto, como pode ser observada na cascata do Grande, localizada no Sudeste, o qual possui 18 usinas.
- d) Não linearidades tais como a produção das usinas hidrelétricas, custos de operação das térmicas e restrições de rede de transmissão.
- e) Usos múltiplos da água, onde algumas regiões possuem agricultura dependente de irrigação ou são dependentes da navegação para transporte.
- f) Por fim, um sistema hidrotérmico possui forte acoplamento temporal das decisões. Isto é, uma vez que existe uma grande capacidade de armazenamento de água nos reservatórios, a decisão de usar essa água no presente ou armazenar para o futuro tem impacto nas futuras decisões de despacho do sistema (MARCATO, 2002). Assumindo que ONS decide usar a água armazenada e ocorre uma forte seca no futuro, provavelmente impactará em déficit de energia ou um elevado despacho térmico. Por outro lado, se a decisão for armazenar água e ocorrer uma forte estiagem o resultado é um desperdício de água através do vertimento.

Defronte deste problema, planejar a operação e otimizar os recursos de um sistema hidrotérmico de grande porte não é tarefa trivial; na realidade, é uma problema extremamente desafiador e se torna impensável obter soluções para o mesmo sem o auxílio de modelos de otimização baseados e técnicas avançadas de programação matemática e eficiência computacional.

Tradicionalmente, para resolver problemas matemáticos dessa dimensão geralmente é adotada a estratégia de dividir o problema em diferentes horizontes de planejamento através de uma cadeia de modelos computacionais. Todos esses pontos vêm sendo discutidos nas últimas décadas (GJELSVIK; MO; HAUGSTAD, 2010; KLIGERMAN; FILHO, 1992; PEREIRA; PINTO, 1983). De forma mais específica, no caso brasileiro, as etapas de planejamento são definidas como, (i) Planejamento da Operação Energética de Médio Prazo (POEMP); (ii) Planejamento da Operação Energética de Curto Prazo (POECP); (iii) Programação Diária da Operação (PDO).

Cada etapa está relacionada com a etapa subsequente através das políticas de operação, isto é, a solução do POEMP gera políticas que são acopladas ao POECP que por sua vez, obtém políticas que são usadas na PDO. Além disso, os problemas (i) e (ii) têm um comportamento estocástico devido principalmente à natureza das vazões afluentes e fontes renováveis. Por outro lado, (iii) geralmente trata o problema como determinístico. Como é o caso brasileiro (SANTOS et al., 2020), pois foca na modelagem das restrições operativas (STREET; MOREIRA; ARROYO, 2014), o qual incluem rede elétrica (MARTINS; AZEVEDO; SOARES, 2014), Função de Produção Hidrelétrica (FPH), tempo de ligamento/desligamento das Usinas Térmicas (UTES), entre outros. Contudo, atualmente, existem muitas discussões para a inclusão de incertezas em (iii) devido a imersão de novas fontes renováveis com alto grau de intermitência tal qual solar e eólica e incerteza na demanda (MOREIRA; STREET; ARROYO, 2014; NASROLAHPUR; GHASEMI, 2015; WANG; FU, 2016; WU; SHAHIDEHPOUR; LI, 2007).

Este trabalho é desenvolvido no âmbito do POEMP; para obter mais informações sobre as abordagens (ii) e (iii), sugere-se os trabalhos (DOS SANTOS et al., 2009; FINARDI; DA SILVA, 2006; GONÇALVES, 2011; GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2012; PEREIRA; PINTO, 1985; RODRIGUES, 2009; SCUZZIATO, 2016), portanto, deste ponto em diante a discussão é focado no horizonte de planejamento de médio prazo.

O POEMP possui pelo menos cinco anos de horizonte de planejamento discretizado mensalmente, e possui foco na modelagem das incertezas das vazões afluentes. Nesta etapa, alguns aspectos de modelagem são simplificados como, por exemplo, as não linearidades da produção hidrelétrica, dos custos de geração termelétrica e das equações de fluxo de potência. No entanto, o trabalho de (BRIGATTO; STREET; VALLADÃO, 2017; WERNER, 2020) abordam um *trade-off* entre uma melhoria na modelagem do sistema de transmissão e o tempo computacional nos problemas de POEMP.

Na maioria dos casos, não é possível solucionar o problema do POEMP por um modelo único de Programação Linear Estocástico Multiestágio (PLEM). Assim, é preferível usar técnicas de decomposição para solucionar este problema através da estimação da Função de Custo Futuro (FCF). Como será detalhado adiante, o estado da arte das técnicas de decomposição indica que, na prática, apenas soluções sub ótimas podem ser obtidas em problemas do POEMP. Portanto, é importante concentrar esforços para obter melhorias nas modelagens dos componentes do sistema ou nas estratégias de solução na cadeia de modelos para se conseguir melhores estimativas de resposta.

Baseado em discussões acima mencionadas, alguns autores exploram abordagens que têm por objetivo melhorar a modelagem do sistema. Por exemplo, (ARVANITIDITS; ROSING, 1970) propôs representar os multi-reservatórios em modelos com sistemas agregados. Essa antiga modelagem agregada é substituída por uma modelagem individual das usinas hidrelétricas em (LARROYD, 2016). Em termos do sorteio da variável aleatória, (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011) apresentam avanços. Na melhoria da performance computacional da metodologia de solução, em (MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2015; SHAPIRO, 2011) é proposta a metodologia da seleção de cortes. Ainda, outros trabalhos focam em estratégias eficientes de paralelismo computacional, conforme (CHENG et al., 2014; HELSETH; BRAATEN, 2015; PINTO; BORGES; MACEIRA, 2013; SANTOS; DINIZ; BORGES, 2017), (DOS SANTOS; DINIZ; SIMONETTI, 2018). Os trabalhos citados neste parágrafo serão detalhados na seção da revisão bibliográfica.

Pode-se afirmar que o problema do POEMP é bem conhecido na literatura, embora alguns aspectos ainda não sejam consentimento entre especialistas da área. No entanto, para lidar com este problema, o método de solução da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) é o mais utilizado. Portanto, este trabalho tem o objetivo de estudar e analisar estratégias promissoras para melhorar a eficiência de convergência da PDDE e a modelagem do problema, provendo um melhor *trade off* entre precisão da solução e tempo computacional. Os avanços para o problema do POEMP que este trabalho propõe serão melhor discutidas na seção 1.2.

Com o objetivo de contextualizar as principais motivações deste trabalho, na próxima seção é exposta uma revisão da literatura focada em aspectos de modelagem e metodologia de solução relacionados ao problema de POEMP.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção são apresentadas as principais referências usadas neste trabalho. Para melhorar a performance da PDDE, os trabalhos de (SHAPIRO, 2011) e (MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2015) propõe uma estratégia de seleção de cortes com o objetivo de eliminar cortes redundantes a cada iteração. Uma abordagem semelhante é discutida em (BRANDI et al., 2015) o qual os cortes são adicionados e removidos a cada iteração tanto na Programação Dinâmica Estocástica (PDE) quanto na PDDE. De fato, ambos apresentam significativa eficiência no peso computacional do problema retirando parte das restrições do problema. Em outro contexto, (DONOHUE; BIRGE, 2006) apresenta uma metodologia que alcança uma substancial redução computacional incorporando uma amostragem por combinação convexa aplicadas ao algoritmo da decomposição aninhada multiestágio com amostragem. O trabalho (BRANDÃO, 2010) apresenta uma comparação entre a operação de reservatório agregado e individual. Usando um sistema com seis reservatórios da bacia do São Francisco, o autor destaca que o modelo agregado pode ser uma alternativa quando se quer uma aproximação razoável do modelo individualizado com baixo custo computacional (no trabalho foi cerca de dez vezes menor). No entanto, ressalta que o modelo individualizado é mais preciso que o agregado. O trabalho de (MUKHOPADHYAY; SANKARASUBRAMANIAN; DE QUEIROZ, 2021) faz uma comparação entre modelo individualizado com outros dois tipos de modelos agregados de reservatórios no âmbito da coordenação mensal.

Os autores (SOARES; STREET; VALLADÃO, 2017) mostram que é possível reduzir a variabilidade da solução primal através de duas abordagens. Primeiramente, é proposto regular a variável primal da geração térmica adicionando uma penalidade caso haja uma alteração acentuada da mesma. Na sequência, para reduzir a variação do custo marginal de operação o autor propõe desconsiderar na FCF as variáveis de estado das influências passadas, neste caso, para compensar esta simplificação na FCF sugere-se aumentar a aversão ao risco. Para reduzir a volatilidade do preço de curto prazo, esta segunda metodologia foi extensivamente testada no modelo oficial usado no Brasil, o NEWAVE. O relatório técnico final pode ser consultado em (EPE; ONS; CCEE, 2020), onde o estudo mostra que a metodologia foi eficiente para diminuir a variação do preço de curto prazo ao longo do tempo, no entanto, os parâmetros da aversão ao risco aumentam de modo a comprometer a modelagem problema.

Os autores (ASAMOV; POWELL, 2018) apresentam uma regularização quadrática para problemas de otimização estocásticos multiestágio de grande escala. De acordo com os

autores, esta aproximação pode resultar em significativos ganhos computacionais em comparação a PDDE clássica mantendo os seus aspectos matemáticos tais quais a convergência e a otimalidade. Esta metodologia é uma extensão multiestágio do trabalho de (RUSZCZYŃSKI; ŚWIĘTANOWSKI, 1997).

Em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019) é proposto um novo esquema baseado na solução normal para estabilizar o processo de solução de técnicas de decomposição em problemas estocásticos multiestágio. Nesta abordagem, a etapa *forward* do método de decomposição é regularizada através de uma combinação de uma perturbação finita de um problema convexo com métodos de feixes. Os autores mostram resultados satisfatórios quando comparados com a PDDE clássica.

Aplicados em problemas de POEMP resolvido via PDDE em problemas de grande porte, os autores do trabalho (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011) apresentam as metodologias do *Latin Hypercube* e *Quasi-Monte Carlo* para geração e amostragem de cenários em alternativa à padrão de Monte Carlo. Ademais, os autores discutem um critério de parada em termos de teste de hipótese estatístico, segundo os autores, este critério é mais robusto que o original utilizado no setor elétrico brasileiro.

No trabalho de (PINTO; BORGES; MACEIRA, 2013) é apresentado um algoritmo de paralelização eficiente para resolver o problema do POEMP via PDDE. As principais características da estratégia são: balanço de carga dinâmico de modo que são minimizados os tempos de processamento de cada processo, paralelização assíncrona para agrupar o cortes de Benders, redução da comunicação entre processos através do uso de armazenamento local e a personalização da topologia de comunicação dos processadores. Em (SANTOS; DINIZ; BORGES, 2017) é proposto um esquema de paralelismo que resolve os estágios acoplados de forma simultânea, desta forma, é sugerido uma estratégia para compartilhar as condições iniciais de cada subproblema bem como dos cortes de Benders para os estágios anteriores, os autores mostram a eficiência do método aplicando em um problema hidrotérmico determinístico utilizando um sistema pequeno porte no horizonte do curto prazo. Uma nova estratégia para acelerar Programação Dinâmica Dual (PDD) em otimização estocástica em problemas programação hidrotérmica podem ser visto em (DOS SANTOS; DINIZ; SIMONETTI, 2018). A estratégia é baseada na convergência local de subárvores de cenários. Adicionalmente, o trabalho faz uma análise de estabilidade da variável de estado através dos nós e desta forma é capaz de evitar etapas *forward* e *backward* desnecessárias. Outros dois trabalhos pode ser citados que apresentam algoritmos de paralelização de forma eficiente. O

primeiro é (CHENG et al., 2014) o qual propõe uma programação dinâmica discreta diferencial paralelizada, como resultado, o autor apresenta um problema de POEMP com 13 UHEs. O segundo é o trabalho de (HELSETH; BRAATEN, 2015) apresenta um novo esquema de paralelização para o método da PDDE a qual a etapa *backward* onde geralmente possui um ponto de sincronização, onde são calculados e compartilhados os cortes de Benders, é parcialmente relaxada. O novo esquema é capaz de melhorar significativamente a eficiência computacional.

Em geral, o processo estocástico é aproximado por uma árvore de cenários finita para tornar o problema tratável. Contudo, uma discretização com um número elevado de aberturas ainda é um importante limitador em problemas de grande porte. Para contornar este problema, alguns autores têm proposto gerar uma grande quantidade de cenários e aplicar alguma métrica de probabilidade com o objetivo de obter uma árvore de cenários reduzida, porém representativa. Isso pode melhorar a convergência do método. Assim, (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003) usou a distância de Wasserstein/Kantorovich como medida probabilista. Para encontrar o valor da abertura reduzida, usa-se um problema de transporte que visa minimizar a distância entre as aberturas originais. Além disso, é apresentada uma eficiente solução para evitar a exaustiva combinação do método. Em (HEITSCH; RÖMISCH, 2009) é desenvolvida uma heurística baseada em redução por recursão usando a distância- $L_r$  e filtração. Este método pode ser estendido para o problema multiestágio.

No caso brasileiro, o trabalho (JARDIM; MACEIRA; FALCAO, 2001) usa as técnicas de clusterização para reduzir a árvore de cenários. Em (OLIVEIRA, 2007) é utilizado um algoritmo de redução ótima, chamado de ORA, o qual foi introduzido por (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003) que, por sua vez, é uma generalização da distância de Wasserstein/Kantorovich. Adicionalmente, com o objetivo de aumentar a eficiência computacional, uma melhoria ao ORA foi proposta. Um ano, mais tarde (OLIVEIRA et al., 2010) aplicou a técnica de redução de cenários ótimos em aflúências do modelo autorregressivo no âmbito do POEMP.

Por sua vez (KOVACEVIC; PICHLER, 2012) introduziu o conceito de distância aninhada o qual pode ser considerado uma forma geral da distância de Wasserstein/Kantorovich. De acordo com o autor, essa métrica é a mais apropriada para calcular a distância entre dois nós uma vez que essa abordagem utiliza uma estrutura de filtragem da árvore. Baseado na mesma ideia, no trabalho de (BELTRAN; OLIVEIRA; FINARDI, 2017) é aplicado este algoritmo de redução onde conseguiram alcançar uma diminuição no tempo computacional de aproximadamente de 90% aplicado a uma árvore de

cenário de 15 variáveis aleatórias. Como método de solução foi utilizado o algoritmo da decomposição aninhada.

Aplicado a programação estocástica com modelo recursivo (XU et al., 2015) usa rede neural para gerar árvore de cenários e aplica método de Monte Carlo para reduzir a mesma. Utilizou uma cascata real localizada na China com sistema teste. Como resultado, destacou que o método de redução de cenários preservou a média das histórica das aflúências, mas introduziu desvios na variância e covariância devido a perda de informações dos cenários originais. Adicionalmente, a redução de aproximadamente 40% no número de cenários da árvore original resulta em pequenas mudanças na qualidade da solução, porém significativas reduções no tempo computacional.

Por outro lado, no POEMP, uma representação precisa dos componentes do sistema elétrico leva a explosão da dimensionalidade devido ao elevado número de variáveis e restrições no problema. Portanto, com objetivo de superar este problema, algumas estratégias foram propostas por (TURGEON, 1981), o qual apresenta soluções para determinar uma operação semanal com incerteza das influências. A abordagem sugerida foi resolver um problema de  $n$  reservatórios em cascata criando  $n-1$  problemas com duas variáveis de estado usando PDE. Na época, mesmo com a correlação especial do problema desconsiderada, o método se mostrou atrativo pois o tempo computacional aumentava linearmente com número de reservatórios.

Em (SAAD, 1988) é proposto um método para reduzir o número de variáveis de estado de um problema hidrotérmico usando Análise das Componentes Principais (ACP). A redução pode ser realizada em variáveis com correlação estatística. Neste sentido, quanto maior a correlação, maior a capacidade do método de representar o comportamento de todas as variáveis. O método sugere a solução de uma sequência de problemas de otimização determinísticos; assim, o autor consegue estabelecer a correlação entre o comportamento dos reservatórios da cascata e transformar as variáveis de volume em componentes principais. Também, as variáveis de aflúência são convertidas em componentes principais com base nos dados observados no histórico. A solução foi obtida com aplicação da PDE.

De forma similar, em (TAHAN JÚNIOR, 2017) é utilizada a ACP para reduzir o espaço de estado das variáveis de aflúência para facilitar a construção da FCF. A estratégia foi testada em um sistema hidrotérmico com 15 hidrelétricas o qual obteve solução via PDDE. Como resultado, a metodologia conseguiu aproximadamente 20% de eficiência computacional e em média 1,5% menor custo esperado de operação. Outra alternativa é proposta por (CHEN et al., 2016), o qual usa Modelo de Otimização Espectral (MSE) em conjunto com um método

de redução chamado Karhunen-Love (KL). Como resultado, um problema com 3,360 variáveis foi reduzido consideravelmente.

Em aplicações práticas, para obter uma solução aceitável, o estado da arte para estudos de POEMP utiliza a PDDE como algoritmo de solução em conjunto com uma série de simplificações na modelagem do problema. Em oposição, (BRIGATTO; STREET; VALLADÃO, 2017) mostram que tais simplificações podem induzir políticas inconsistentes no tempo e levar a uma solução subótima. Neste sentido, utilizaram um problema pequeno de três barras cada uma com um gerador para analisar os efeitos da não inclusão da rede elétrica no sistema. No outro caso de estudo, utilizaram o SIN, com 4 reservatórios agregados, para mostrar a importância do critério de segurança  $n-1$  nas linhas de transmissão. Como resultado, mostraram que a falta de tais representações podem levar a um deplecionamento indesejável e pico de Custo Marginal de Operação (CMO).

Usando os mesmos sistemas teste que o trabalho anterior de (BRIGATTO; STREET; VALLADÃO, 2017), (WERNER, 2020) apresenta diversos modelos de linhas de transmissão incluídos no problema de planejamento hidrotérmico para obter diferentes FCFs. Após isso, para comparar as políticas obtidas com as aproximações na modelagem da rede de transmissão, o autor utiliza um modelo de otimização não linear com modelagem de linha de transmissão AC. O autor observa que desconsiderar uma modelagem mais acurada de linhas de transmissão pode ocorrer em inconsistências temporais que se acumulam ao longo do tempo, no entanto, os resultados mostram um maior tempo computacional conforme aumenta a complexidade da modelagem da linha de transmissão.

Um dos desafios mais críticos ao POEMP é a representação das aflúncias da forma mais precisa possível, sendo ponto crucial que o modelo adotado preserve os requisitos de convexidade demandados pela PDDE. Como conhecido, a série histórica de aflúncia possui correlação acentuada, fato que pode levar a necessidade da inclusão de muitas variáveis de estado extras na modelagem do PDDE. Neste contexto, o estado da arte mostra que é comum modelar as aflúncias via modelo Autorregressivo Periódico de ordem  $p$  – modelo PAR( $p$ ), assim, a seguir é feita uma revisão da literatura baseada em trabalhos que usam modelos de aflúncia com dependência temporal e a PDDE como estratégia de solução.

Em (GJERDEN et al., 2015) o autor apresenta um problema de POEMP com aproximadamente 500 usinas hidrelétricas no mercado de eletricidade do *NordPool*<sup>4</sup>. O objetivo deste trabalho é analisar dois modelos aflúncias, em que o primeiro é o PAR clássico onde os

---

<sup>4</sup> *Nord Pool* é o mercado que englobam 15 países Europeus entre eles Noruega, Suécia e Dinamarca.

resíduos são calculados via modelo de Monte Carlo clássico. Por outro lado, na segunda abordagem os resíduos são obtidos aplicando técnicas de ACP (JOLLIFFE, 2002). A FPH é representada da maneira simplificada, onde a geração depende exclusivamente da vazão turbinada. Outro trabalho que envolve uma comparação similar é (TAHAN JÚNIOR, 2017) o qual apresenta uma simplificação do modelo PAR(p) clássico por Produtibilidade Constante (PC). Usando um sistema hidrotérmico fictício de 15 usinas, é feita uma análise no impacto na FCF de modelar as afluições individuais com 1, 3 e 5 CPs.

Em (BRANDI et al., 2018) o caso brasileiro é usado como sistema base e é modelado com quatro REEs (HÄRTEL; KORPÁS, 2017) para representar as usinas hidrelétricas do sistema. Essa modelagem permite uso do modelo PAR(p) para gerar cenários Energias Naturais Afluentes (ENAs), o qual utiliza uma metodologia baseada em *bootstrap* (DE CASTRO et al., 2015) para calcular os resíduos. Nesta modelagem, a FPH é implicitamente considerada no problema energético. Embora o objetivo do trabalho não seja especificamente sobre comparação de modelos afluição, nota-se uma preferência na modelagem completa da afluição em detrimentos dos outros componentes do sistema.

Em (MACEIRA et al., 2018) é representado o sistema brasileiro através de 12 REEs. De forma similar a (BRANDI et al., 2018), este modelo dá ênfase na representação da ENAs de cada REE através do modelo PAR(p)(p) o qual possui ordem máxima seis. Neste trabalho, usam-se técnicas de redução de cenários para encontrar uma árvore reduzida, porém representativa do espaço amostral. Também são usadas técnicas da chamada amostra seletiva (PENNA; MACEIRA; DAMAZIO, 2011), a qual aplica técnica de estatística multivariada para definir uma subárvore cujo objetivo é obter cenários mais representativos na solução do POEMP via PDDE. Recentemente, em (TREISTMAN et al., 2020) é proposto uma melhoria no modelo PAR(p) usado em (MACEIRA et al., 2018) o qual trata da inclusão da memória da afluição ocorrida no último ano na determinação da ENA presente, no entanto, essa melhoria remete ao uso de um análogo ao modelo PAR(p) de ordem 12, fato que traz um impacto considerável na FCF. Outro trabalho que é baseado no sistema brasileiro por meio de REE é o de (GUIGUES, 2014) onde o modelo PAR(p) é alterado de modo a evitar energias afluentes negativas.

O estudo de (CARVALHO, 2002) mostra uma análise comparativa entre a representação individualizada da UHEs e o modelo por REE aplicado ao POEMP, neste trabalho foi considerando de forma simplificada tanto a representação da afluição como da FPH e utilizou um sistema reduzido de 15 usinas para as comparações. Em (DE MATOS, 2008)

é possível ver uma análise comparativa entre as modelagens de reservatório equivalente de energia agregado por subsistema e por cascata no problema do planejamento anual da operação energética. Assim como os outros, a modelagem da afluência é representada pelo modelo PAR(p) em detrimento a uma FPH simplificada.

O trabalho de (LARROYD, 2016) apresenta um modelo de reservatório individualizado no âmbito do POEMP no entanto, é proposto a agregação da variável aleatória da afluência pelas bacias que compõe o sistema utilizando o modelo PAR(p). Esta abordagem é interessante pois consegue diminuir a dimensão FCF de forma considerável. Como sistema base, o trabalho utiliza o SIN com 153 hidrelétricas distribuídas em 21 bacias. A FPH é tratada de forma simples por produtividade constante.

Poucos trabalhos comparam modelos de reservatórios individualizados com sistemas agregados no âmbito do POEMP. Neste sentido, destaca-se o trabalho de (MARCATO, 2002) feito no âmbito do POEMP, onde é apresentado um modelo com representação híbrida de sistemas equivalentes e usinas individualizadas de sistemas de potência de grande porte. Este trabalho mostra de forma detalhada o acoplamento temporal e hidráulico entre o sistema equivalentes, usinas individualizadas e sistemas equivalentes com usinas individualizadas. A FPH é representada de forma muito simplificada e a afluência é utilizada o modelo PAR(p). Como resultado, usando o caso brasileiro como base, mostra simulações a partir de FCF obtidas com 5 anos de horizonte de planejamento sendo o primeiro ano utilizando a modelagem híbrida depois sistemas equivalentes. Por fim, o autor destaca que a representação equivalente é mais adequada para estudos de longo prazo pois os resultados são próximos ao modelo de reservatórios individualizados.

Os autores acima destacados utilizam o modelo PAR(p) em seu estado da arte, conforme será exposto no capítulo 2. No entanto, em (OLIVEIRA et al., 2009) é mostrado que, no modelo PAR(p) clássico, a transformação linear da matriz de carga que faz a transformação exponencial em os ruídos normalmente distribuídos de modo a se evitar séries negativas pode degradar a correlação existente nos ruídos normais. Desta forma, os autores propõe uma nova transformação linear que reproduz de forma mais assertiva a correlação histórica, melhorando a geração de cenários. Como conclusão interessante, os autores demonstram que a tendência hidrológica desempenha um papel significativo na reprodução das correlações cruzadas pelas séries sintéticas geradas

No entanto, alguns autores estão utilizando abordagens não clássicas na previsão de vazão. Como não é o objetivo do trabalho, registra-se uma breve revisão para conhecimento do leitor. Em (SIQUEIRA et al., 2018) os autores propõe a aplicação de *unorganized machines* na

previsão de vazão mensal, utiliza 3 importantes UHEs do sistema brasileiro para expor os resultados, adicionalmente, faz um comparativo do método proposto com outros métodos clássicos. Em (DE FARIA et al., 2021) é proposto utilizar a metodologia da *perceptron* multicamadas para previsão de vazões em um horizonte curto de 2 semanas, para avaliar a metodologia usou-se 55 UHEs localizadas na bacia do Paraná do SIN. No trabalho de (SOARES, 2019) é utilizado *Generative Adversarial Networks* para geração de cenários mensais com o objetivo de substituir o modelo atual utilizado pelo setor elétrico, como resultado mostrou cenários gerados para a UHE de Sobradinho os quais utilizou dados mensal de janeiro de 1974 e dezembro de 2015. Embora outros trabalhos podem ser citados, nota-se que não foram encontrados referências sobre a aplicação direta dessas novas metodologias de geração/previsão de cenários em problemas de POEMP resolvido via PDDE.

Dado a extensa revisão bibliográfica, conclui-se que o estado da arte, no âmbito do POEMP, modela as aflúências via modelo Autorregressivo Periódico de ordem  $p$  – modelo PAR( $p$ ) em detrimento da simplificação de todos os outros aspectos de modelagem.

## 1.2 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho consiste em aumentar a eficiência da PDDE e assim obter soluções de melhor qualidade em comparação com os resultados obtidos com as metodologias encontradas no estado da arte. Para isso, se propõe uma alternativa de método de solução combinada com a PDDE clássica (PEREIRA; PINTO, 1991), e novas metodologias no contexto dos aspectos de modelagem do problema de POEMP. Inicialmente, é proposto solucionar o problema do POEMP usando a PDDE combinada com centros de Chebyshev, em complemento deste estudo, são comparados outros dois métodos de regularização existentes na literatura. Na sequência, utiliza-se parâmetros oriundos da modelagem por reservatórios equivalentes de energia para reduzir a dimensionalidade do problema individualizado. Mais especificamente, se propõe um modelo de aflúência baseado na energia aflúente fio d'água e um modelo baseado em energia armazenada, ambos aplicados em modelagem individualizada das usinas hidrelétricas.

Diante das grandes mudanças que os sistemas de energia vêm sofrendo com inserção energias renováveis, e um forte apelo pela diminuição na liberação de gases estufa, se torna cada vez mais importante coordenar as fontes de geração dos sistemas elétricos da melhor forma possível. Neste sentido, este trabalho vem a contribuir para que haja uma determinação das

políticas operativas mais eficientes, e para isso, a estratégia consiste em atacar os principais assuntos relacionados ao POEMP em duas áreas de estudo. A primeira é agregar na metodologia de solução e a segunda em aspectos de modelagem.

A seguir são evidenciadas as principais contribuições deste trabalho.

- Quanto ao assunto da metodologia de solução, obteve-se fundamental avanço em direção a construção de cortes que compõe a FCF em regiões mais próximas ao ponto ótimo da árvore otimizada. Isso foi alcançado propondo uma variante da PDDE inspirada no cálculo dos planos cortantes utilizando o algoritmo de (ELZINGA; MOORE, 1975) o qual o ponto experimental definido na etapa *forward*, é obtido através do Centros de Chebyshev de um conjunto poliedral. O método não é mais complexo que a PDDE clássica pois adiciona apenas uma nova variável nas equações dos cortes. Com esta nova abordagem, é notável o ganho de eficiência computacional em relação a PDDE clássica. Neste sentido, pode-se usufruir deste ganho computacional para focar em outros aspectos relacionados ao problema de POEMP dentro dos modelos matemáticos, como por exemplo, modelagem de outra incerteza, FPH ou rede elétrica.
- Faz uma avaliação da política e uma comparação de elevação de custo inferior entre alguns métodos de regularização existentes na literatura e o método CC proposto neste trabalho. Os dois métodos adicionais são, o método da decomposição regularizada multiestágio (ASAMOV; POWELL, 2018), e regularização de nível com solução normal (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019). No último, é proposto um termo adicional na heurística de atualização sugerida pelos autores afim de tornar a metodologia mais genérica.
- Quanto aos aspectos de modelagem, é mostrado que no estado da arte do problema de POEMP, prefere-se modelar a afluência de forma completa em detrimento a outros aspectos de modelagem do problema (e.g.: FPH, rede elétrica). Neste contexto, este trabalho estabelece uma discussão que não existe na literatura atual, a qual mostra-se que é possível simplificar a modelagem da afluência, e simultaneamente, focar na melhoria da representação da FPH e assim, obter uma melhoria na qualidade da política operativa.
- Através da afluência agregada e do conceito de energia fio d'água, é apresentada uma modelagem para reduzir a dimensionalidade FCF no algoritmo da PDDE. De forma mais específica, a afluência das usinas a fio d'água contidas em uma

determinada bacia são agregadas e representadas no modelo de otimização por energia afluente fio d'água. Por outro lado, as aflúências das usinas de reservatório continuam de forma individual. Uma vez que a característica individual das usinas hidrelétricas não é alterada, a estratégia proposta é a única na literatura que combina, na PDDE, aflúências individualizadas das usinas hidrelétricas com agregação na representação da FCF. Tendo em vista os ganhos em eficiência computacional obtida com a metodologia proposta, é proposto melhorar a modelagem da FPH para aumentar a qualidade da política obtida.

- Utilizando o conceito de energia armazenada, é proposto substituir as variáveis de volumes de cada subproblema por variáveis de energia armazenada para um dado conjunto de reservatórios, com o intuito de diminuir consideravelmente a dimensão da FCF e melhorar a eficiência da PDDE. Neste sentido, é mostrado duas configurações diferentes, a primeira modela a energia armazenada por sistema, isto é, as variáveis de volume são substituídas por uma única variável de energia armazenada. A segunda, modela energia armazenada por bacia. Os resultados indicam que a modelagem por bacia, nos casos simulados, possui resultados semelhantes aos individualizados.
- Como uma contribuição secundária, este trabalho apresenta uma nova estrutura para analisar as diferentes FCF obtidas colocando todas as modelagens na mesma base, isto é, no modelo individualizado. Assim, a simulação é feita com um processo complementar da PDDE com o objetivo de se estabelecer um intervalo de confiança unilateral com o custo de operação esperado.

Discorrendo de forma mais específica os pontos acima listado, como conhecido, a PDDE é um método baseado em planos cortantes o qual apresenta convergência lenta em problemas de grande escala. Uma estratégia para contornar esse problema é usar métodos para alterar os pontos onde se constroem as aproximações da FCF. Neste sentido, este trabalho combina a PDDE com Centros de Chebyshev para acelerar a convergência do método. O método visa definir o ponto experimental da variável de estado definidos na etapa *forward* da PDDE em CC levando ao alcance de um melhor Custo Inferior (CI) do algoritmo. O efeito dessa metodologia é semelhante a encontrada nos métodos de regularização exposto em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019).

Como complemento ao estudo do método de Centros de Chebyshev proposto neste trabalho, é apresentado a comparação entre a regularização CC e outras duas metodologias: (1)

decomposição regularizada multiestágio de (ASAMOV; POWELL, 2018); e (2) regularização de nível com soluções normais de (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019). Em (1) é usada uma função objetivo quadrática com uma heurística para encontrar novos pontos experimentais ao longo dos cenários. Este algoritmo é uma versão multiestágio do método da decomposição regularizada em dois estágios proposta por (RUSZCZYŃSKI; ŚWIĘTANOWSKI, 1997). Já o algoritmo (2) muda de forma drástica o Problema Linear (PL) padrão utilizado na PDDE, para encontrar melhores pontos experimentais, os autores se baseiam na combinação do método de feixes e nível com função de perturbação finita em problemas convexos.

O esforço computacional é um aspecto importante no problema do POEMP resolvido via PDDE. Assim, durante as décadas passadas muitas estratégias têm sido estudadas para contornar esta desvantagem. Uma das mais empregadas é aquela baseada nos conceitos de Reservatório de Energia Equivalentes (REE). Proposto por (ARVANITIDIS; ROSING, 1970), no REE algumas variáveis são agregadas por subsistema simplificando o problema de forma considerável. Em especial, muitas variáveis são necessárias na representação de sistema multi-reservatório individualizados em modelos de otimização. Assim, a complexidade do problema aumenta e conseqüentemente o espaço de estados tem uma explosão no tempo computacional. Com o objetivo de reduzir essa dimensionalidade, este trabalho compara duas formas de agregação da variável aleatória com a modelagem individualizada. De forma mais específica, o modelo individual é comparado com a modelagem proposta inspirada no parâmetro da Energia Afluente Fio d'água (EAFdA) da modelagem por REE, e com outra existente na literatura proposta em (LARROYD, 2016) agregada por bacia. Nesta nova, é proposto modelar a afluência das usinas a fio d'água agregadas por EAFdA por bacia. No POEMP a dimensão da FCF depende no número de reservatórios e das afluências passadas. Portanto, ambas as modelagens apresentadas nesta tese visam reduzir o espaço de estados da FCF empregada na PDDE. Outra abordagem proposta neste trabalho usa a energia armazenada para redução da dimensionalidade em modelagens individualizadas. Da mesma forma com que é feito com as afluências, é proposto substituir as variáveis de volume de cada UHE por uma variável associada a energia armazenada por um dado número de usinas.

A política operativa é um dos resultados mais relevantes do problema do POEMP e muitos métodos podem ser empregados para auferir a qualidade da solução. Um dos métodos encontrados na literatura é pelo cálculo da brecha de otimalidade exposto em (SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYNSKI, 2009). Este método indica qual política é estatisticamente mais estável considerando o problema resolvido. Neste trabalho, algumas metodologias não

solucionam o mesmo problema, por isso, é proposto um método de avaliação da política o qual é calculado de um intervalo de confiança unilateral com os resultados obtidos de um simulador comum a todas as metodologias, desta forma, considera-se que a melhor política é aquela que apresenta o menor custo de operação térmico.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Além deste, este trabalho possui mais cinco capítulos. No Capítulo 2 é mostrado a modelagem do sistema para problemas de POEMP utilizados nesta tese, tais como, geração térmica, função de produção hidrelétrica, demanda, modelagem de afluência, patamares de carga, entre outros. Na sequência, é discutido o problema matemático de otimização estocástica multiestágio e o método de solução utilizado para resolver este problema.

Por sua vez, o Capítulo 3 mostra os métodos de regularização comparados neste trabalho. Inicialmente, aborda-se a PDDE com Centros de Chebyshev, e na sequência são descritos os métodos da regularização de nível proposto por (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019) e a regularização quadrática vista em (ASAMOV; POWELL, 2018).

No Capítulo 4 são apresentadas as modelagens propostas nesta tese para a redução da dimensionalidade da FCF. Inicialmente, são abordados três modos de representar as afluências: o clássico modelo individualizado por usina, o modelo agregado por bacia hidrográfica (LARROYD, 2012) e, o modelo agregado por energia afluyente fio d'água. Por fim, é proposto a modelagem energia armazenada a qual substitui as variáveis individuais do volume por variáveis de energia armazenada na FCF. Com o objetivo de tornar a tese mais didática, são apresentados problemas práticos de cada metodologia em sistemas reduzidos de quatro usinas os quais são solucionados via decomposição aninhada com árvores de amostras comuns.

O Capítulo 5 apresenta os resultados acerca dos temas discutidos nos Capítulos 3 e 4. Dois sistemas são utilizados para apresentar os resultados. Na metodologia da CC foi utilizado o SIN como sistema base na conjectura de janeiro de 2016. Nas demais metodologias, os casos são executados com sistema reduzido de 53 usinas hidrelétricas e 6 bacias hidrográficas o qual é uma parte do SIN, mais especificamente, do submercado Sudeste e Sul.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões dos resultados obtidos e sugestões de trabalhos futuros.

#### 1.4 PUBLICAÇÕES DA TESE

Nesta seção são apresentados os artigos publicados em revistas científicas oriundos das pesquisas realizadas durante o período de elaboração deste trabalho. Ao todo, foram publicados dois artigos, o primeiro, mostrou importantes conclusões acerca dos estudos que envolveram o método de regularização dos Centros de Chebyshev onde serão mostrados com mais especificamente no Capítulo 3. O segundo, englobou os estudos de redução da dimensionalidade no que tange o método de agregação de usinas fio d'água a partir da energia a fio em modelos individualizados, mais detalhes serão exposto no Capítulo 4. Ambos os trabalhos podem ser encontrados pelas citações abaixo.

Beltrán, F., Finardi, E.C., Fredo, G.M. *et al.* Improving the performance of the stochastic dual dynamic programming algorithm using Chebyshev centers. *Optim Eng* (2020). <https://doi.org/10.1007/s11081-020-09558-z>

G. L. M. Fredo, E. C. Finardi, P. V. Larroyd and L. B. Picarelli, "Inflow Aggregation and Run-of-the-River Inflow Energy for Reducing Dimensionality in the Long-Term Generation Scheduling Problem," in *IEEE Access*, vol. 9, pp. 98542-98560, 2021, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3096143.

## 2 MODELAGEM DO PROBLEMA DO POEMP PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Este capítulo apresenta brevemente os principais aspectos de modelagem aplicados ao problema do POEMP. Adicionalmente, é mostrada a formulação matemática utilizada neste trabalho. Por fim, é feita uma discussão sobre a programação linear estocástica multiestágio apresentando o método de solução da PDDE o qual foi utilizado neste trabalho.

### 2.1 ASPECTOS DE MODELAGEM

Nesta subseção, é apresentada a modelagem dos principais componentes do sistema elétrico contidos no âmbito do problema matemático do POEMP, são eles, usinas termelétricas, usinas hidrelétricas, função de produção hidrelétricas, demanda, afluência.

#### 2.1.1 Usinas Termelétricas

Uma usina termelétrica utiliza as mais diversas fontes para gerar energia, como por exemplo, carvão, gás natural, óleo, cavaco de madeira etc. No Brasil, as principais fontes são gás natural, combustível fóssil e carvão mineral (ANEEL, 2017). As usinas termelétricas são largamente utilizadas no mundo todo compondo a principal fonte de geração em muitos países tais como, Estados Unidos, França e Alemanha. Pode se elencar duas grandes vantagens pelo sucesso desse tipo de fonte, é capaz de gerar grandes quantidades de energia próximas aos grandes centros consumidores e o fácil acesso a matéria prima.

##### 2.1.1.1 A função matemática de geração térmica

A função matemática de geração térmica estabelece a relação entre a quantidade de combustível em função do custo unitário por tempo de energia gerada. Essa é uma função bem conhecida, possui características não lineares e depende de muitos fatores tais como, custo de combustível, manutenção, custo do trabalho e fornecimento etc. Contudo, essa função é bem aproximada por uma função polinomial de segunda ordem (M. E.; G. S., 1979). O trabalho de (FILHO, 1987) utiliza uma função de custo térmico quadrático em problemas de longo prazo. No entanto, uma função de segunda ordem aumentaria os esforços computacionais, assim, em

problemas relacionados do POEMP a função quadrática é substituída por uma função linear tal qual vista abaixo:

$$cf_{it} = CT_i \cdot pt_{it}, \quad i = 1, \dots, NT_t, \quad (1)$$

onde,

$cf_{it}$  : custo térmico variável da termelétrica  $i$  e estágio  $t$  (R\$);

$CT_i$  : custo unitário da termelétrica  $i$  (R\$/MW);

$pt_{it}$  : geração da termelétrica  $i$  e estágio  $t$  (MW);

$NT_t$  : número de usinas térmica em estágio  $t$ .

Neste trabalho, para cada estágio  $t$  a decisão de geração termoelétrica é feita individualmente por usina  $i$ .

### 2.1.2 Usinas Hidrelétricas

As usinas hidrelétricas são capazes de converter energia potencial provenientes das quedas da água em eletricidade. Excluindo a discussão ambiental, esta fonte também se mostra vantajosa pois pode entregar grandes quantidades de energia a um custo baixo de geração. Devido ao melhor aproveitamento hidráulico, é usual que estes grandes empreendimentos sejam construídos longe dos principais centros de consumo. Idealmente, as hidrelétricas são classificadas em dois tipos: de acumulação ou reservatório e fio d'água. As de acumulação são aquelas que possuem reservatórios para armazenar água, pode ter um papel fundamental na segurança dos sistemas de potência quando usado para enchimento dos reservatórios em períodos úmidos e esvaziamento em períodos hidrológicos desfavoráveis, ademais, esses tipos de empreendimentos geralmente tem grande capacidade de geração de energia. Por outro lado, as usinas FdA possuem menor capacidade de armazenamento de água, com isso, toda a água que chega deve ser usada em poucas horas.

#### 2.1.2.1 Geração hidráulica

Um aspecto crucial nos problemas de POEMP é a Função de Produção Hidrelétrica. A FPH de uma unidade geradora é um produto da eficiência, altura líquida e vazão turbinada.

Sob o ponto de vista matemático, a FPH é uma função não linear e não convexa com descontinuidades relacionadas as zonas proibidas das turbinas (FINARDI; DA SILVA, 2006).

Matematicamente, a FPH de uma unidade geradora é dada por:

$$pu_{ut} = 9.81 \cdot 10^{-3} \cdot \eta_{ut} \cdot hl_{ut} \cdot u_{ut}, u = 1, \dots, NU_r, r = 1, \dots, NH_t, \quad (2)$$

onde,

- $pu_{ut}$  : geração da unidade  $u$  no estágio  $t$  (MW);
- $u_{ut}$  : vazão turbinada da unidade  $u$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s);
- $\eta_{ut}$  : eficiência da unidade  $u$  no estágio  $t$ ;
- $hl_{ut}$  : altura líquida da unidade  $u$  no estágio  $t$  (m);
- $NU_r$  : número de unidades da usina hidrelétrica  $r$  no estágio  $t$ ;
- $NH_t$  : número de usinas hidrelétricas  $r$  do estágio  $t$ .

A representação (2) não é apropriada em problemas de longo prazo pela explosão da dimensionalidade, além disso uma modelagem não linear e não convexa esbarra em limitações matemáticas do método de solução da PDDE. Por isso, em problemas de POEMP as unidades geradoras são tradicionalmente agregadas e a geração hidrelétrica deve ser representada por usina. Assim, para incluir a FPH nos problemas de longo prazo, se deve determinar uma expressão linear por usina hidrelétrica.

Antes de apresentar as equações matemáticas é importante destacar que, por questões didáticas que ficarão mais claras ao longo do documento, a modelagem das usinas hidrelétricas é sempre dividida nas usinas fio d'água e de reservatório.

Assim, neste trabalho duas modelagens para FPH serão utilizadas, a primeira é uma equação linear chamada de produtibilidade constante como pode ser vista:

$$ph_{rt} = EH_{rt} \cdot qh_{rt}, \quad r = 1, \dots, NH_t, \quad (3)$$

onde,

- $ph_{rt}$  : geração da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$  (MW);

$EH_{rt}$  : produtibilidade do reservatório  $r$  no estágio  $t$  MW/(m<sup>3</sup>/s);  
 $qh_{rt}$  : vazão turbinada total da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s).

Para usinas FdA a modelagem é a mesma mudando apenas nomenclatura:

$$pr_{rt} = ER_{rt} \cdot qr_{rt}, \quad r = 1, \dots, NR_t, \quad (4)$$

onde,

$pr_{rt}$  : geração da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  (MW);  
 $ER_{rt}$  : produtibilidade da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  MW/(m<sup>3</sup>/s);  
 $qr_{rt}$  : vazão turbinada total da usina de fio d'água  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s).

A segunda modelagem é dada por uma representação da FPH através uma função linear por partes, a qual é representada por um conjunto de restrições (DINIZ; MACEIRA, 2008), assim, para as usinas com reservatório:

$$ph_{tr} \leq C_{0n} \cdot qh_{tr} + C_{1n} \cdot vm_{tr} + C_{2n} \cdot sh_{tr} + C_{3n}, \quad n = 1, \dots, HH_r, \quad r = 1, \dots, NH_t, \quad (5)$$

onde,

$C_{xn}$  :  $x$ -ésimo coeficiente da  $n$ -ésima inequação da restrição da FPH da usina de reservatório  $r$ ;  
 $vm_{tr}$  : volume médio armazenado da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$ ;  
 $sh_{tr}$  : vazão vertida da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$ ;  
 $HH_r$  : número total de inequações das usinas de reservatório  $r$ ,

e para as usinas FdA o conjunto de restrições não depende do volume:

$$pr_r \leq D_{0n} \cdot qr_r + D_{1n} \cdot sr_r + D_{3n}, \quad n = 1, \dots, RR_r, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (6)$$

onde,

- $pr_{tr}$  : geração das usinas fio d'água  $r$  no estágio  $t$  (MW);  
 $D_{xn}$  :  $x$ -ésimo coeficiente da  $n$ -ésima inequação da restrição da FPH da usina fio d'água  $r$ ;  
 $sr_{tr}$  : vazão vertida da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s);  
 $RR_r$  : número total de inequações das usinas fio d'água  $r$ ;  
 $NR$  : número total de usinas fio d'água.

O foco deste trabalho não é na modelagens de FPH, contudo, em alguns casos, são usadas equações lineares por partes tais como apresentadas em (5)-(6) para representar a FPH. Tais equações foram obtidas conforme (FREDO; FINARDI; DE MATOS, 2019), e de forma sucinta, é colocada no APÊNCICE B – Determinação da FPH, a sequência de passos utilizadas para obter tais expressões.

### 2.1.3 Balanço Hídrico

As restrições de balanço hídrico devem garantir que o volume final de um reservatório, quando houver, seja igual a soma do volume inicial com a afluência menos a vazão turbinada e vertida da própria usina. Destaca-se que neste caso, a afluência é dada pelas incremental das chuvas mais as vazões vindas de usinas a montante, matematicamente é dado por:

$$v_{r,t+1} - va_{rt} + K_t \cdot [qh_{rt} + sh_{rt} - \sum_{m=1}^{MH} (qh_{mt} + sh_{mt} + qr_{mt} + sr_{mt}) - yh_{rt} - yhc_{rt}] = 0, \quad (7)$$

$$r = 1, \dots, NH,$$

onde,

- $v_{rt}$  : volume final da usina hidrelétrica  $r$  do estágio  $t$  (hm<sup>3</sup>);  
 $va_{rt}$  : volume inicial da usina hidrelétrica  $r$  do estágio  $t$  (hm<sup>3</sup>/s);  
 $K_t$  : fator de conversão de (m<sup>3</sup>/s) para (hm<sup>3</sup>);  
 $yh_{rt}$  : afluência incremental da usina  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s);  
 $MH$  : é o número de usinas a montante da usina  $r$ ;  
 $yhc_{rt}$  : afluência artificial da usina  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s).

Neste trabalho, é assumido que as usinas fio d'água não podem armazenar água, assim, toda a água que chega na usina hidrelétrica deve ser convertida em energia elétrica ou em vazão vertida. Portanto, no balanço hídrico a variável de volume é desconsiderada tal qual mostrada abaixo:

$$qr_{rt} + sr_{rt} - \sum_{m=1}^{MH} (qh_{mt} + sh_{mt} + qr_{mt} + sr_{mt}) - yr_{rt} - yrc_{rt} = 0, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (8)$$

onde,

$yrc_{rt}$  : afluência artificial da usina  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ ).

As variáveis artificiais  $yhc$  e  $yrc$  são adicionadas no problema com o objetivo de evitar inviabilidades caso a afluência incremental se torne negativa. Assim, se a afluência incremental seja positiva essa variável é nula, caso contrário, a variável artificial recebe exatamente o valor da afluência negativa tornando o somatório dessas duas parcelas nulo. Note que, neste trabalho é desconsiderado infiltrações e evaporação bem como tempo de viagem da água, isto é, a defluência observada na hidrelétrica a montante está disponível na usina a jusante.

### 2.1.3.1 Modelagem de afluência

Na maioria das vezes, em sistemas de grande porte, existe uma grande quantidade de usinas hidrelétricas na mesma cascata. Enquanto isso, uma cascata pode fazer parte de uma ou mais bacias. Por sua vez, uma bacia consiste em uma região específica que tem um ciclo de chuva definido. Portanto, uma alternativa para reduzir a dimensionalidade é usar uma representação por bacia (LARROYD, 2016) em contraposição a modelagem individual (DE MATOS, 2008; LIMA; POPOVA; DAMIEN, 2014; SUTLOVIC; CUJIC-COKO; MEDIC, 2014). Este trabalho apresenta algumas estratégias de modelagens da variável aleatória para reduzir a dimensionalidade em problemas do POEMP as quais serão detalhadas no Capítulo 4. Portanto, neste momento, é conveniente mostrar a modelagem individualizada por usina a qual é considerada o estado da arte e será comparada com as outras modelagens. Seguindo o mesmo critério da formulação apresentada no balanço hídrico, convém dividir as variáveis de afluência

em reservatório e fio d'água. Nesta modelagem é incluído um coeficiente chamado de grau de liberdade do histórico incremental para manter as propriedades estatísticas do processo original.

$$yh_{rt} = yhh_{rt} + \delta YH_r, \quad (9)$$

$$yr_{rt} = yrr_{rt} + \delta YR_r, \quad (10)$$

onde,

$yh_{rt}$  : afluência incremental da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

$yhh_{rt}$  : afluência total da usina de reservatório  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

$\delta YH_r$  : grau de liberdade da usina de reservatório  $r$  ( $m^3/s$ );

$yr_{rt}$  : afluência incremental da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

$yrr_{rt}$  : afluência total da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

$\delta YR_r$  : grau de liberdade da usina fio d'água  $r$  ( $m^3/s$ ).

Assim, a afluência total é calculada por:

$$yhh_{rt} - \sum_{p=1}^{HP_{rt}} \phi H_{prt} \cdot yha_{r,t-p} = \xi H_{rt}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (11)$$

$$yrr_{rt} - \sum_{p=1}^{RP_{rt}} \phi R_{prt} \cdot yra_{r,t-p} = \xi R_{rt}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (12)$$

onde,

$\phi H_{prt}$  :  $p$ -ésimo coeficiente do modelo PAR( $p$ ) no reservatório  $r$  e estágio  $t$ ;

$yha_{r,t-p}$  : afluência incremental do reservatório  $r$  no estágio  $t - p$  ( $m^3/s$ );

$HP_{rt}$  : ordem de afluência do modelo PAR( $p$ ) do reservatório  $r$  e estágio  $t$ ;

$\xi H_{rt}$  : resíduo do modelo PAR( $p$ ) do reservatório  $r$  e estágio  $t$ ;

$\phi R_{prt}$  :  $p$ -ésimo coeficiente do modelo PAR( $p$ ) na usina fio d'água  $r$  e estágio  $t$ ;

$yra_{r,t-p}$  : afluência incremental da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t - p$  ( $m^3/s$ );

$RP_{rt}$  : ordem de afluência do modelo PAR( $p$ ) da usina fio d'água  $r$  e estágio  $t$ ;

$\xi R_{rt}$  : resíduo do modelo PAR( $p$ ) da usina fio d'água  $r$  e estágio  $t$ .

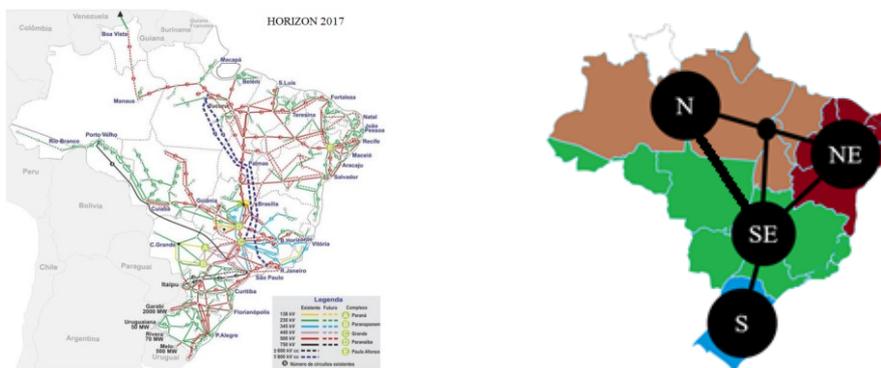
No caso brasileiro, usa-se o modelo autorregressivo periódico PAR para modelar as afluências, portanto, cada mês é ajustada uma função que correlaciona o mês atual com os meses passados.

### 2.1.4 Subsistemas Elétricos

Um sistema elétrico é construído por componentes incluindo geradores, linhas de transmissão e distribuição, transformadores e cargas. A conexão entre todos esses dispositivos estabelece uma complexa rede o qual o principal objetivo é o atendimento da demanda de forma confiável. Contudo, considerando a viabilidade para obter a solução em problemas de POEMP alguns aspectos precisam ser desconsiderados ou aproximados.

No caso brasileiro, o SIN é dividido em 4 grandes áreas chamadas de subsistemas, cada subsistema é representado por apenas uma barra elétrica. De forma ilustrativa, Figura 1 mostra o sistema brasileiro sob duas perspectivas distintas. O desenho da direita, é mostrado as principais linhas de transmissão que conectam o país inteiro, por outro lado, a esquerda, mostra o sistema agregado em subsistemas com as principais conexões conectando as regiões. Em problemas de POEMP, costuma-se usar a representação mais simplificada devido a dimensão do problema.

Figura 1 – Mapa do Sistema brasileiro. A esquerda: Linhas de transmissão; A direita: principais troncos.



Fonte: adaptado de (ONS, 2018).

Neste contexto, o sistema é representado por  $s$  subsistemas onde  $NY$  é o número total de subsistemas que podem ser considerados.

Ressalta-se que parte dos estudos produzidos nesta tese partem de um sistema reduzido, o mesmo considera apenas um sistema com barra única.

#### 2.1.4.1 Cálculo de déficit

Em sistemas hidrotérmicos, os recursos para atender a demanda são finitos e grande parte disso depende exclusivamente de fontes incertas (e.g. afluência das chuvas, ventos e sol ) (CARVALHO et al., 2018). Neste contexto, podem ocorrer alguns cenários em que os recursos energéticos disponíveis não sejam suficientes para atender a demanda, como resultado, uma falta de energia pode ocorrer, este fenômeno é comumente conhecido como déficit. A quantidade de energia que deixou de ser atendida deve ser vista pelo operador e é parte fundamental em problemas de POEMP. Neste trabalho, o déficit é representado por uma variável que uma função linear por partes com custos superiores a mais cara usina térmica:

$$cd_{st} = CD_i \cdot pd_{ist}, \quad i = 1, \dots, ND_t, \quad (13)$$

onde,

$cd_{st}$  : função linear por partes do déficit no subsistema  $s$  e estágio  $t$  (R\$);

$CD_i$  : valor unitário do patamar de déficit  $i$  (R\$/MW);

$pd_{ist}$  : déficit  $i$  no subsistema  $s$  e patamar  $l$  no estágio  $t$  (MW);

$ND_t$  : número de déficit no subsistema  $s$  no patamar  $l$  no estágio  $t$ .

#### 2.1.4.2 Intercâmbio

Em um sistema elétrico gigantesco como o brasileiro, os subsistemas são fisicamente conectados através de grandes quantidades de linhas de transmissão, neste sentido, alguns autores usam um modelo AC e outros preferem o uso de modelos DC de rede (FU; SHAHIDEHPOUR; LI, 2005). De maneira geral, em problemas de POEMP, usa-se um modelo mais simples. Alguns trabalhos analisam o impacto dessa modelagem simplificada, assim como pode ser visto em (BRIGATTO; STREET; VALLADÃO, 2017). Já em (WERNER, 2020) é proposto o uso de um modelo mais detalhado.

Neste trabalho, o intercâmbio de energia é representado por variáveis de transporte de energia vindo de submercados importadores e um déficit de potência em submercados exportadores. Nesta representação todas as perdas e os ângulos das barras são desconsiderados, resultando em um modelo mais simples que o modelo de rede DC. Nesta modelagem, a variável de intercambio está presente apenas no balanço de energia e será apresentada nas próximas seções. No entanto, o intercambio é limitado capacidade física das linhas de transmissão. Portanto, cada intercambio  $i$  possui limites superiores e inferiores que é dado por estágio  $t$ . Assim, a restrição abaixo deve ser incluída para representar este comportamento:

$$I_{it}^{\min} \leq pi_{it} \leq I_{it}^{\max}, \quad i=1,\dots,NI_t, \quad l=1,\dots,NL_t, \quad (14)$$

$$E_{it}^{\min} \leq pe_{it} \leq E_{it}^{\max}, \quad i=1,\dots,NE_t, \quad l=1,\dots,NL_t, \quad (15)$$

onde,

$pi_{it}$  : importação  $i$  no patamar  $l$  no estágio  $t$  (MW);

$I_{it}^{\min}$  : limite mínimo de importação  $i$  no estágio  $t$  (MW);

$I_{it}^{\max}$  : limite máximo de importação  $i$  no estágio  $t$  (MW);

NI : número de importações no estágio  $t$ ;

$pe_{it}$  : exportação  $i$  no patamar  $l$  no estágio  $t$  (MW);

$E_{it}^{\min}$  : limite mínimo de exportação  $i$  no estágio  $t$  (MW);

$E_{it}^{\max}$  : limite máximo de exportação  $i$  no estágio  $t$  (MW);

NE : número de exportações no estágio  $t$ .

#### 2.1.4.3 Demanda

Em problemas de POEMP a demanda de cada subsistema  $s$  é a soma de todas as cargas conectadas na barra. Ademais, a demanda líquida  $L_{st}$  no estágio  $t$  é a demanda na barra menos a soma da média da geração das pequenas usinas. Mesmo que as incertezas poderiam ser representadas na PDDE, no POEMP a carga é modelada como determinística a cada estágio. Esta consideração é feita para reduzir a dimensão do problema (PEREIRA; PINTO, 1983).

#### 2.1.4.4 Balanço de energia

O balanço de energia pode ser definido como sendo a soma de todas as fontes existentes no sistema para atender uma determinada demanda, a qual matematicamente é:

$$\sum_{r=1}^{NH} ph_{rst} + \sum_{r=1}^{NR} pr_{rst} + \sum_{i=1}^{NT} pt_{ist} + \sum_{i=1}^{ND} pd_{ist} + \sum_{i=1}^{NI} pi_{ist} - \sum_{i=1}^{NE} pe_{ist} = L_{st}, \quad s = 1, \dots, NY, \quad (16)$$

onde  $L_{st}$  é a demanda líquida no submercado  $s$  e estágio  $t$ . As demais variáveis da equação acima já foram discutidas anteriormente.

A equação (16) significa que a demanda líquida é atendida pela soma das gerações hídrica, termelétrica, déficit e importação menos a soma da exportação para outros submercados.

#### 2.1.4.5 Patamares de carga

Como destacado anteriormente, a demanda em sistemas elétricos está em constante variação ao longo do dia. Em problemas de longo prazo, a demanda é modelada em patamares de carga com o objetivo de capturar esta flutuação média ao longo do mês. Neste trabalho, são modelados três patamares de carga, são elas: carga baixa, média e alta.

Ao adicionar os patamares de carga, as variáveis na equação de balanço (17) deve ser representada por cada patamar  $l$  no estágio  $t$  com pode ser visto a seguir:

$$\sum_{r=1}^{NH} ph_{rlst} + \sum_{r=1}^{NR} pr_{rlst} + \sum_{i=1}^{NT} pt_{ilst} + \sum_{i=1}^{ND} pd_{ilst} + \sum_{i=1}^{NI} pi_{ilst} - \sum_{i=1}^{NE} pe_{ilst} = HL_{lt} \cdot L_{lst}, \quad (17)$$

$$s = 1, \dots, NY, \quad l = 1, \dots, NL,$$

$$PU_{il} \cdot L_{ts} = L_{lst}, \quad (18)$$

onde,

$HL_{lt}$  : tempo de duração do patamar de carga  $l$  no estágio  $t$  (%);

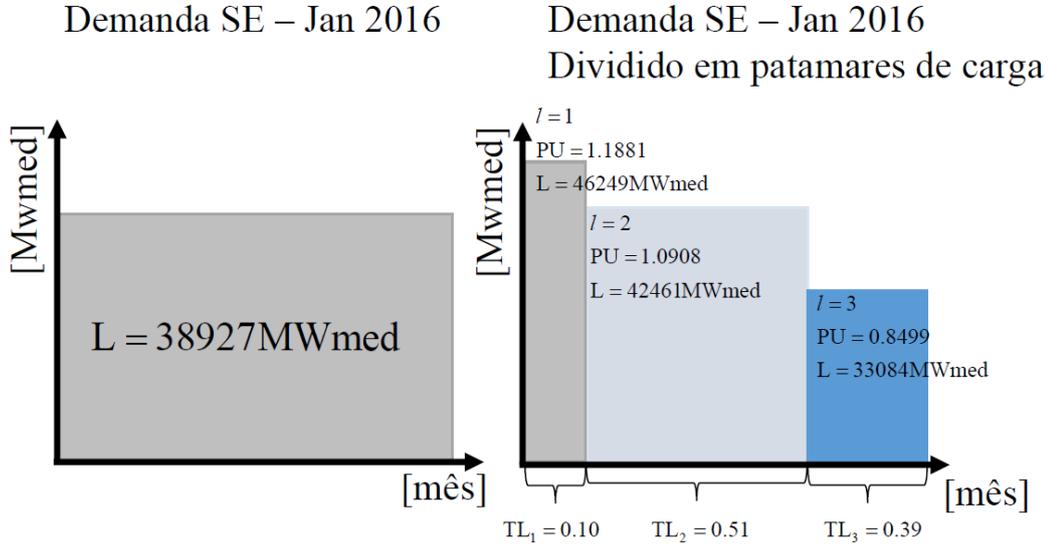
$PU_{lt}$  : fator de multiplicação do patamar de carga  $l$  no estágio  $t$ ;

$L_{lst}$  : demanda por patamar  $l$  (MW).

A Figura 2 ilustra a divisão da carga total ( $L_{st}$ ) em patamares de carga. Considerando valores oficiais do SIN referentes a janeiro de 2016, para melhor ilustrar a modelagem de

patamares de carga, a figura da esquerda mostra a carga total e a da direita como é feita a divisão em três patamares de carga.

Figura 2 – Patamares de carga.



Fonte: adaptado de (LARROYD, 2016)

Além da equação de balanço de potência, as outras variáveis, com exceção do volume e aflúncias, também são modeladas em função do número de patamares, assim a equação do balanço hídrico das usinas fio d'água modeladas por cada patamar, assim a (8) torna-se:

$$qr_{rlt} + sr_{rlt} - \sum_{m=1}^{MH} (qh_{mlt} + sh_{mlt} + qr_{mlt} + sr_{mlt}) - yr_{rt} - yrc_{rt} = 0, r = 1, \dots, NR, \quad (19)$$

$$l = 1, \dots, NL,$$

Por sua vez, a equação do balanço hídrico das usinas de reservatório é única por usina, portanto, a inclusão das variáveis por patamar é dada expandindo as variáveis de vazão turbinada e vertimento através de um somatório por patamares, desta forma de (7) torna-se:

$$v_{r,t+1} - va_{rt} + K \cdot \sum_{l=1}^{NL} \left[ qh_{rlt} + sh_{rlt} - \sum_{m=1}^{MH} (qh_{mlt} + sh_{mlt} + qr_{mlt} + sr_{mlt}) \right] - K \cdot (yh_{rt} + yhc_{rt}) = 0, \quad (20)$$

$$r = 1, \dots, NH,$$

Por fim, as FPHs também são modeladas por patamares de carga, nas usinas de reservatório:

$$ph_{rlt} \leq C_{0n} \cdot qh_{rlt} + C_{1n} \cdot vm_{rt} + C_{2n} \cdot sh_{rlt} + C_{3n}, \quad n = 1, \dots, \text{HH}, \quad r = 1, \dots, \text{NH}, \quad l = 1, \dots, \text{NL}, \quad (21)$$

para as fio d'água,

$$pr_{rlt} \leq D_{0n} \cdot qr_{rlt} + D_{1n} \cdot sr_{rlt} + D_{3n}, \quad n = 1, \dots, \text{RR}, \quad r = 1, \dots, \text{NR}, \quad l = 1, \dots, \text{NL}, \quad (22)$$

#### 2.1.4.6 Taxa de desconto

O estado da arte do problema do POEMP mostra que o seu custo total é composto por duas parcelas, o custo imediato, o qual é calculado pelo somatório do despacho térmico, e o custo futuro o qual significa os custos de operação incorridos nos estágios futuros do horizonte de planeamento em função da disponibilidade hidrelétrica. No modelo de otimização o custo futuro é balizado por um fator TX chamado de taxa de desconto, como ele é representado no problema será melhor detalhado na próxima seção. A utilização deste fator é explicada pela teoria econômica a qual versa que este parâmetro é um que estabelece o equilíbrio entre consumir o recurso disponível imediatamente ou poupa-lo para o uso futuro.

#### 2.1.5 O Problema Linear de Cada Nó da PDDE

Todos os aspectos de modelagem discutidos até o presente momento compõem o modelo matemático de otimização, assim, o PL a ser resolvido em cada nó no estágio  $t$  relacionado ao problema do POEMP para a modelagem individualizada é:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{\text{NL}} \text{HH}_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\text{NT}} \text{CT}_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{\text{NS}} \sum_{i=0}^{\text{ND}} \text{CD}_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1 + \text{TX})} \alpha_t \quad (23)$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^{\text{NH}} ph_{rlst} + \sum_{r=1}^{\text{NR}} pr_{rlst} + \sum_{i=1}^{\text{NT}} pt_{ilst} + \sum_{i=1}^{\text{ND}} pd_{ilst} + \sum_{i=1}^{\text{NI}} pi_{ilst} - \sum_{i=1}^{\text{NE}} pe_{ilst} = \text{HH}_{lt} \cdot L_{lst}, \quad (24)$$

$$s = 1, \dots, \text{NY}, \quad i = 1, \dots, \text{NL},$$

$$v_{r,t+1} - va_{rt} + K \cdot \sum_{l=1}^{NL} \left[ qh_{rlt} + sh_{rlt} - \sum_{m=1}^{MH} \left( qh_{mlt} + sh_{mlt} + \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right) \right] - K \cdot (yh_{rt} + yhc_{rt}) = 0, \quad (25)$$

$$r = 1, \dots, NH,$$

$$va_{rt} = V_{rt}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (26)$$

$$qr_{rlt} + sr_{rlt} - \sum_{m=1}^{MH} (qh_{mlt} + sh_{mlt} + qr_{mlt} + sr_{mlt}) - yr_{rt} - yrc_{rt} = 0, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (27)$$

$$l = 1, \dots, NL,$$

$$fh(q, vm, s)_{ilt}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad l = 1, \dots, NL, \quad (28)$$

$$fr(q, s)_{ilt}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad l = 1, \dots, NL,$$

$$vm_{rt} - 0.5 \cdot (v_{r,t+1} + va_{rt}) = 0, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (29)$$

$$yh_{rt} = yhh_{rt} + \delta YH_r, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (30)$$

$$yr_{rt} = yrr_{rt} + \delta YR_r, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (31)$$

$$yhh_{rt} - \sum_{p=1}^{HP_{rt}} \phi H_{prt} \cdot yha_{r,t-p} = \xi H_{rt}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (32)$$

$$yrr_{rt} - \sum_{p=1}^{RP_{rt}} \phi R_{prt} \cdot yra_{r,t-p} = \xi R_{rt}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (33)$$

$$yha_{r,t-p} = YH_{r,t-p}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad p = 1, \dots, HP_{rt}, \quad (34)$$

$$yra_{r,t-p} = YR_{r,t-p}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad p = 1, \dots, RP_{rt}, \quad (35)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{0rtj} \cdot v_{r,t+1} + M_{1rtj} \cdot yhh_{rtj} + \sum_{p=1}^{HP_{rt}-1} M_{3r,t-p,j} \cdot yah_{r,t-p} \right) \quad (36)$$

$$+ \sum_{r=1}^{NR} \left( M_{2rjt} \cdot yrr_{rjt} + \sum_{p=1}^{RP_{rt}-1} M_{4r,t-p,j} \cdot yar_{r,t-p} \right) \geq B_{0jt}, \quad j = 1, \dots, NC_t,$$

$$\begin{aligned}
0 \leq pt_{ilt} &\leq PT_{ilt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & i = 1, \dots, NT, & \quad l = 1, \dots, NL, \\
PD_{islt}^{\min} \cdot HH_{slt} &\leq pd_{islt} \leq PD_{islt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & i = 1, \dots, ND, & \quad l = 1, \dots, NL, \quad s = 1, \dots, NY, \\
I_{islt}^{\min} \cdot HH_{lt} &\leq pi_{islt} \leq I_{islt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & i = 1, \dots, NI, & \quad l = 1, \dots, NL, \quad s = 1, \dots, NY, \\
E_{islt}^{\min} \cdot HH_{lt} &\leq pe_{islt} \leq E_{islt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & i = 1, \dots, NE, & \quad l = 1, \dots, NL, \quad s = 1, \dots, NY, \\
0 \leq fh(q, vm, s)_{rlt} &\leq PH_{rlt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & r = 1, \dots, NH, & \quad l = 1, \dots, NL, \\
0 \leq fr(q, s)_{rlt} &\leq PH_{rlt}^{\max} \cdot HH_{lt}, & r = 1, \dots, NR, & \quad l = 1, \dots, NL, \\
V_r^{\min} &\leq v_{r,t+1} \leq V_r^{\max}, & r = 1, \dots, NH, & \\
V_r^{\min} &\leq vm_{r,t+1} \leq V_r^{\max}, & r = 1, \dots, NH, & \\
0 \leq qh_{rlt} &\leq QH_r^{\max} \cdot HH_{lt}, \quad 0 \leq sh_{rlt}, & r = 1, \dots, NH, & \quad l = 1, \dots, NL, \\
0 \leq qr_{rlt} &\leq QR_r^{\max} \cdot HH_{lt}, \quad 0 \leq sr_{rlt}, & r = 1, \dots, NR, & \quad l = 1, \dots, NL, \\
yhc_{rt} &\geq 0, & r = 1, \dots, NH, & \\
yrc_{rt} &\geq 0, & r = 1, \dots, NR, & \\
\alpha_t &\geq 0, & & 
\end{aligned} \tag{37}$$

onde,

- $M_{0rjt}$  : Valor da água do reservatório  $r$  do estágio  $t$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF(R\$/hm<sup>3</sup>);
- $M_{1rjt}$  : Valor da água da afluência do reservatório  $r$  do estágio  $t$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF (R\$/m<sup>3</sup>/s);
- $M_{2rjt}$  : Valor da água da afluência da usina FdA  $r$  do estágio  $t$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF (R\$/m<sup>3</sup>/s);
- $M_{3,r,j,t-p}$  : Valor da água da afluência do reservatório  $r$  do estágio  $t-p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF (R\$/m<sup>3</sup>/s);
- $M_{4,r,j,t-p}$  : Valor da água da afluência da usina FdA  $r$  do estágio  $t-p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF (R\$/m<sup>3</sup>/s);
- $B_{0jt}$  : Coeficiente linear do estágio  $t$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF (R\$).

A função objetivo (23) tem a finalidade de minimizar a soma dos custos envolvidos na geração térmica mais custo de déficit. A restrição (24) é a equação do atendimento a demanda. A equação de balanço hídrico para usinas de reservatório é dada por (25) e a (26) é referente ao volume inicial a qual é virtualmente usada para capturar a influência que o volume produz na função objetivo. A equação (27) é o balanço hidráulico das usinas fio d'água. A restrição (28) são as funções de produção a qual foi colocada de forma genérica, essas funções podem ser

substituídas por produtividade constante ou por função linear por partes. As equações (30) e a (31) são das aflúências incrementais, por outro lado, (32) e (33) são as aflúências iniciais totais. As equações (34) e (35) são as aflúências passadas. A função do custo futuro (BENDERS, 1962) é a equação (36), nota-se que as variáveis de estado são volume e as aflúências. Por fim, (37) apresenta os limites superiores e inferiores de todas as variáveis do problema.

## 2.2 MODELO DE GERAÇÃO DE CENÁRIOS DE AFLUÊNCIA

O estado da arte em problemas de POEMP, detalhado no Capítulo 1, mostra que de todas as incertezas relacionadas ao problema, é majoritariamente preferível concentrar esforços na representação da aflúência. Historicamente, esta tendência é justificável pela grande quantidade de usinas hidrelétricas no sistema e o tamanho horizonte de planejamento necessário. Assim, para calcular a política operativa de um sistema de forma confiável deve-se utilizar modelos de otimização apropriados, neste sentido, é possível através da simulação da operação de vários cenários calcular os critérios de suprimento que balizam o risco de atendimento a demanda do sistema. Na prática, a única informação disponível são os valores observados, ou seja, a chamada série histórica, a qual é insuficiente para compor uma amostra representativa dentro dos modelos de otimização. Por isso, é fundamental usar modelos estocásticos capazes de reproduzir séries sintéticas das aflúências, desta forma a otimização deve ser feita com uma quantidade de cenários suficiente para capturar a totalidade do espaço de estado. Assim, é comum o uso de modelos de aflúência com dependência temporal, pois as correlações entre as séries de chuvas são bem conhecidas, desta forma, em teoria, pode-se gerar cenários mais representativos.

Tais modelos são estimados pelo uso da série histórica. No caso brasileiro, constam registros das aflúências nas UHEs do SIN desde 1931. Desta forma, os principais parâmetros estatísticos das séries históricas são usados para estimar os atributos dos modelos de aflúência. Uma vez estimados, esses parâmetros são usados para gerar cenários sintéticos que são efetivamente utilizados como variável aleatória no modelo.

Por fim, no caso brasileiro os cenários sintéticos das aflúências são definidos por um modelo autorregressivo periódico, ajustado para cada mês e por usina uma função que indica a relação entre a aflúência do mês presente e os passados. A seguir, descreve-se com mais detalhes este modelo e em seguida também é detalhado o modelo sem dependência temporal pois ambos são usados para as análises contidas neste trabalho.

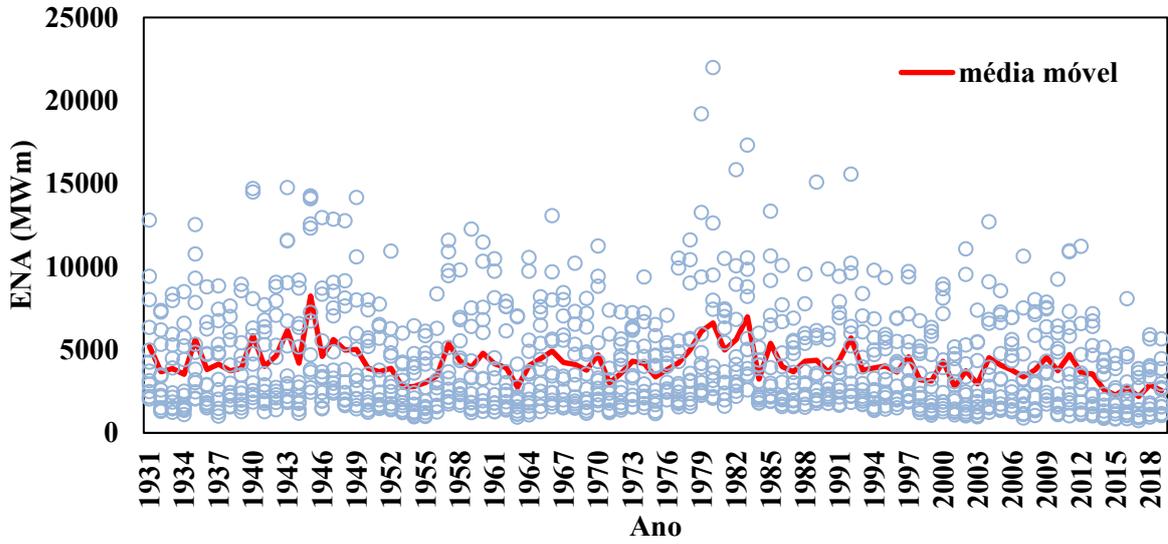
### 2.2.1 Modelo Com Dependência Temporal

Nesta seção é explicado matematicamente o modelo periódico autorregressivo (PAR) de ordem HP – comumente chamado de PAR(p) – o qual trata-se de um modelo de simulação de séries temporais sazonais bem conhecido na comunidade científica da área. Embora imprevisível, as séries hidrológicas possuem um comportamento cíclico com os parâmetros probabilísticos tais como média, desvio padrão, assimetria e autocorrelação, portanto, pode ser representado por modelos autorregressivos periódicos. O modelo usado neste trabalho é baseado nos trabalhos clássicos de (BOX et al., 2015; HIPEL; MCLEOD; LENNOX, 1977) o qual é denominado de BOX & JENKINS. Deste ponto para frente considere que o objetivo é gerar séries sintéticas para afluência incremental de uma UHE.

Antes entrar em detalhes do modelo é definido que  $yh_r$  é a afluência incremental da usina  $r$  ( $m^3/s$ ), NT o número total de estações (meses) no ano e  $\delta YH_r$  o grau de liberdade do histórico de afluência incremental da usina  $r$  ( $m^3/s$ ). Destaca-se que o grau de liberdade é usado para tornar os valores de afluência do histórico incremental positivo. Este fator é definido como sendo o menor valor encontrado no histórico incremental, quando negativo, assim, todos os demais valores são deslocados somando-se o módulo do grau de liberdade mais uma unidade. Por exemplo, considere uma amostra dada pelo conjunto  $\mathcal{L} = \{1, 3, 4, -2, 5\}$ , neste caso, o grau de liberdade seria -2. O novo conjunto é deslocado neste valor mais uma unidade, sendo a nova amostra dada pelo conjunto deslocado  $\mathcal{L} = \{4, 6, 7, 1, 8\}$ . Este processo é necessário pois toda a manipulação algébrica do modelo PAR(p) não admite valores negativos. Adicionalmente, este artifício matemático mantém as propriedades estatísticas da amostra.

Uma das premissas para poder utilizar os modelos autorregressivos na geração de cenários para o POEMP é que as séries de afluência sejam estacionárias no tempo. Uma série é dita estacionária quando sua distribuição de probabilidade é preservada ao longo do tempo. A Figura 3 ilustra este comportamento a qual é exibida a série histórica de Energia Natural Afluente do REE Sudeste para o período de 1931 a 2019 em círculos azuis, balizados pela média móvel em linha contínua vermelha. Nota-se que não se observa ao longo do histórico alguma componente crescente ou decrescente na série. Um Estudo recente sobre a estacionaridade da série histórica de afluência no Brasil pode ser encontrado em (EPE; ONS; CCEE, 2019).

Figura 3 – Série Histórica de ENA do REE Sudeste (1931-2019).



Fonte: O Autor.

Neste trabalho foi utilizado o modelo PAR(p) lognormal a três parâmetros. Por ser um assunto bem conhecido na comunidade científica (CHARBENEAU, 1978; DE MATOS; LARROYD; FINARDI, 2014; MACEIRA et al., 2018; PEREIRA et al., 1984), o detalhamento a seguir se restringe a contextualizar matematicamente como são obtidos os principais parâmetros deste modelo. Para um melhor entendimento, algumas nomenclaturas são redefinidas.

Um modelo periódico autorregressivo pode ser definido como:

$$\frac{yh_{rt} - \mu y h_{rt}}{\sigma y h_{rt}} = \sum_{p=1}^{HP_{rt}} fl_{rtp} \cdot \left( \frac{yh_{r,t-p} - \mu y h_{r,t-p}}{\sigma y h_{r,t-p}} \right) + rl_{rt} \quad (38)$$

em que,

$HP_{rt}$  : é a ordem do modelo PAR(p) da usina hidrelétrica  $r$  do mês  $t$ ;

$fl_{rtp}$  : é o coeficiente autorregressivo de lag  $p$  da usina hidrelétrica  $r$  do mês  $t$ ;

$rl_{rt}$  : é o resíduo aleatório do mês  $t$ , da usina hidrelétrica  $r$ , definido como um desvio padrão do resíduo multiplicado por um ruído branco, conforme detalhes adiante.

$\mu y h_{rt}$  : média dos valores observados em  $r$  do mês  $t$ .

$\sigma y h_{rt}$  : desvio padrão dos valores observados em  $r$  do mês  $t$ .

O modelo ajusta, portanto, um modelo autorregressivo de ordem HP para cada um dos meses da série hidrológica. Uma discussão mais profundada dos modelos autorregressivos podem ser encontrados em (HIPEL; MCLEOD, 1994; SOUZA; CAMARGO, 2004), a seguir é mostrado como identificar a ordem do modelo PAR(p).

### 2.2.1.1 Identificação da ordem do modelo

Tradicionalmente, a identificação das ordens de modelos PAR é feita através de funções de autocorrelações (FAC) e autocorrelações parciais (FACP) (MACEIRA et al., 2008). De forma simples, a ordem representa o número de períodos de dependência a ser utilizado no modelo de otimização, é necessário o cálculo da ordem de cada mês e UHE.

Seja a autocorrelação estimada  $\rho y h_{rkt}$  da usina  $r$  e mês  $t$  em relação a  $k$  meses anteriores expressa por:

$$\rho y h_{rkt} = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{y h_{rkt} - \mu y h_{rt}}{\sigma y h_{rt}} \right) \left( \frac{y h_{r,t-k} - \mu y h_{r,t-k}}{\sigma y h_{r,t-k}} \right) \right], \quad (39)$$

em que  $\mathbb{E}$  é o símbolo que denota valor esperado de toda a amostra observada,  $\mu y h_{rt}$  e  $\sigma y h_{rt}$  são os estimadores de média e desvio padrão das afluências  $y h$  para o mês  $t$ .

Conhecidos os valores de autocorrelação (39), a função autocorrelação pode ser expressa por uma combinação de decaimentos exponenciais (BOX et al., 2015; HIPEL; MCLEOD; LENNOX, 1977), fato que faz com que  $\rho y h_{rkt}$  tenda a zero a medida que  $k$  cresce.

Fixando  $t$  e variando  $k$  de 1 a  $HP_{rt}$  é possível formar as equações de Yule-Walker para um período qualquer  $t$ , as quais são matricialmente expressas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho y h_{r,t-1,1} & \cdots & \rho y h_{r,t-HP_{rt},1} \\ \rho y h_{r,t-1,1} & 1 & \rho y h_{r,t-3,2} & \rho y h_{r,t-HP_{rt},2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho y h_{r,t-1,HP_{rt}} & \rho y h_{r,t-2,HP_{rt}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} fl_{rt1} \\ fl_{rt2} \\ \vdots \\ fl_{rt,HP_{rt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho y h_{rt1} \\ \rho y h_{rt2} \\ \vdots \\ \rho y h_{rt,HP_{rt}} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Para exemplificar a matriz (40), quando  $t = p = 1$  a correlação é entre o mês de janeiro e dezembro do histórico, pois a defasagem é um mês. Neste ponto, atenção, é um erro

estabelecer correlação entre janeiro e dezembro do mesmo ano do histórico, pois o janeiro do ano corrente é correlacionado ao dezembro do ano anterior. O mesmo ocorre quando  $t=3$  e  $p=4$  por exemplo, a correlação é estabelecida entre março e novembro. Por fim, nota-se que a diagonal principal da matriz é unitária pois representa a autocorrelação entre os mesmos estágios.

O objetivo é resolver equação (40) para um  $t$  fixo e encontrar os coeficientes  $fl_{rtp}$ ,  $p=1, \dots, 12$ . O valor desses coeficientes são analisados estatisticamente e com base nisso é determinada a ordem no mês  $t$  para cada UHE e portanto, determinada a dependência temporal do processo estocástico. Como já dito no início desta seção, este processo estatístico é denominado avaliação da FACP, onde a ordem do modelo pode variar de 1 até 11 pois se trata de períodos mensais. A FACP é composta pelos coeficientes  $fl_{rtp}$  não nulos, mas geralmente próximos a zero. Com isso, é necessário incluir um critério para determinar o quanto o valor do coeficiente é significativo. Com base em estudos de (HIPEL; MCLEOD, 1994), o método de escolha da ordem do modelo é definido pelo último coeficiente da FACP a ficar fora do intervalo de confiança. Tal intervalo é determinado pela expressão (41):

$$IF = \pm \frac{1,96}{\sqrt{n}}, \quad (41)$$

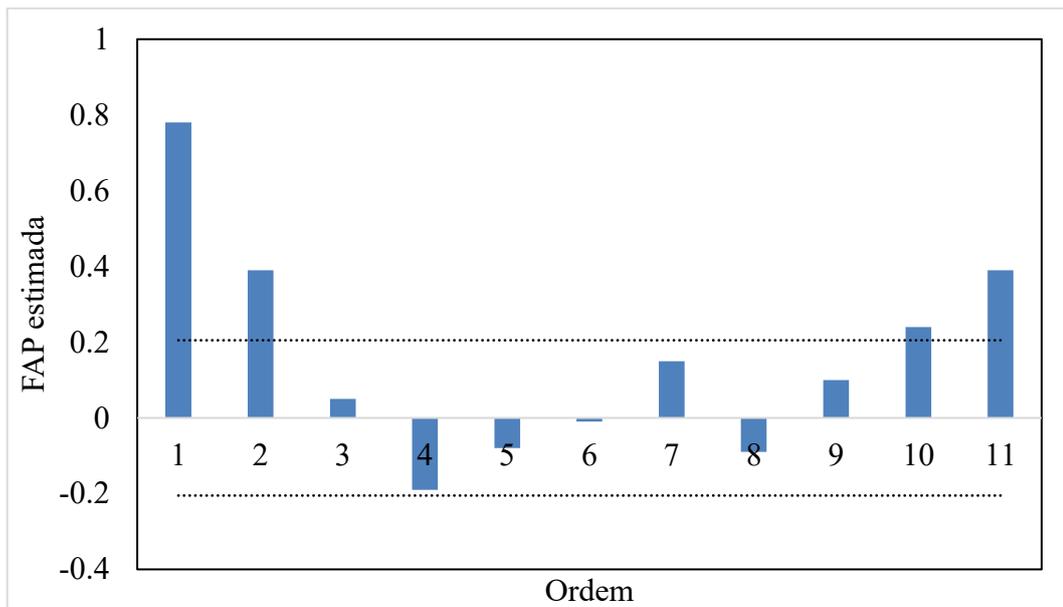
onde  $n$  é o número de amostras da série.

Uma vez definido o intervalo de confiança, para definir a ordem do modelo, é necessário determinar os coeficientes a serem analisados. Para descobrir os coeficientes se deve resolver a equação de Yule-Walker (40) de forma gradual, ou seja, inicialmente adota-se a ordem máxima 1 HP = 1, assim a matriz a ser resolvida é de dimensão 1x1, armazena-se o valor de  $fl$  obtido. Após isso, se adota HP = 2, por lógica, a estrutura da matriz Yule-Walker passa a ser 2x2, ao ser resolvida gera-se o vetor com 2 valores de coeficientes  $[fl_{rt1}, fl_{rt2}]$ , neste caso, armazena-se sempre o coeficiente da última posição do vetor. E o processo continua até HP = 12 até se estimarem 11 coeficientes.

Depois de estimado todos os coeficientes, eles são colocados em ordem e analisados conforme o desenho hipotético da Figura 4, as linhas pontilhadas representam o intervalo de confiança calculado por (41) as barras os coeficientes encontrados pela resolução da matriz de Yule-Walker. Neste ponto, várias estratégias podem ser utilizadas para se determinar a ordem do modelo PAR(p), neste trabalho, a estratégia foi iniciando a análise pelo primeiro valor,

adotar a ordem como sendo igual ao valor da sequência de coeficiente maior que IF, ou seja, nesta figura hipotética a ordem do modelo seria dois. Neste caso, obrigatoriamente a análise deve iniciar do primeiro valor, caso ele seja menor que IF, conclui-se que a ordem do modelo é nula e as afluições não têm dependência temporal.

Figura 4 – Coeficientes da FACP e intervalo de confiança.



Fonte: O autor.

Depois de determinada a ordem do modelo, para estimar os parâmetros  $fl_{rtp}$ , deve-se novamente resolver a matriz de Yule-Walker (40) com a dimensão da ordem determinada no processo descrito anteriormente, assim, o resultado dessa nova matriz são os coeficientes  $fl_{rtp}$  do modelo PAR(p).

Uma vez definida a ordem do modelo e o valor de  $fl_{rtp}$ , o próximo passo consiste em encontrar os resíduos de distribuição Lognormal  $rl_{rt}$ . Assim, o objetivo é encontrar os resíduos do modelo PAR(p) Lognormal, definidos pela variável  $rx_{rt}$  aplicando o logaritmo natural em  $rl_{rt}$ .

O comportamento natural da variável aleatória dos resíduos pode ser definido pela seguinte equação:

$$rx_{rt} = rb_{rt} \cdot \sigma rx_{rt} + \mu rx_{rt}, \quad (42)$$

em que  $\mu_{rx_{rt}}$  e  $\sigma_{rx_{rt}}$  é a média e o desvio padrão de  $rx_{rt}$  no mês  $t$  respectivamente. A partir de (42) e partindo do histórico de afluições, os resíduos de  $rl_{rt}$  relativos ao histórico podem ser estimados, obtendo-se assim um histórico de resíduos. Por sua vez, os valores de  $rx_{rt}$  são obtidos aplicando-se o logaritmo natural neste histórico, portanto, a média  $\mu_{rx_{rt}}$  e o desvio padrão  $\sigma_{rx_{rt}}$  podem ser igualmente calculados.

Uma vez computado esses valores, é dito que os resíduos  $rl_{rt}$  são calculados a partir de realizações do ruído branco  $rb_{rt}$  dados por:

$$rl_{rt} = \exp\left(rb_{rt} \cdot \sigma_{rx_{rt}} + \mu_{rx_{rt}}\right), \quad (43)$$

A distribuição Lognormal é assimétrica em relação a seu valor médio. Assim, além dos coeficientes  $\mu_{rx_{rt}}$  e  $\sigma_{rx_{rt}}$  se pode encontrar uma boa estimativa do valor da assimetria a partir dos valores estimados históricos de  $rl_{rt}$ . Este artifício é utilizado quando a amostra tem assimetria forte, como é o caso das afluições.

Assim, baseado nos trabalhos de (CHARBENEAU, 1978; DE MATOS; LARROYD; FINARDI, 2014; PEREIRA et al., 1984) a estimação dos resíduos recebe a incorporação da assimetria  $\delta_{rx_{rt}}$  e é definida como:

$$rl_{rt} = \exp\left(rb_{rt} \cdot \sigma_{rx_{rt}} + \mu_{rx_{rt}}\right) + \delta_{rx_{rt}}. \quad (44)$$

Desta maneira,  $\mu_{rx_{rt}}$ ,  $\sigma_{rx_{rt}}$ , e  $\delta_{rx_{rt}}$  são os parâmetros a serem estimados para cada mês e usina. Com a inserção da assimetria, os outros parâmetros devem ser redefinidos.

Por definição, é dito que o coeficiente de assimetria de uma distribuição Lognormal é:

$$\gamma_{rl_{rt}} = \frac{\left\{ \exp\left[3 \cdot (\sigma_{rx_{rt}})^2\right] - 3 \cdot \exp\left[(\sigma_{rx_{rt}})^2\right] + 2 \right\}}{\left\{ \exp\left[3 \cdot (\sigma_{rx_{rt}})^2\right] - 1 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (45)$$

Uma vez definido o valor da assimetria  $\gamma_{rl_{rt}}$ . Seja  $\Phi_{rt} = \exp(\sigma_{rx_{rt}})^2$ , então a equação (45) pode ser reescrita como:

$$(\Phi_{rt})^3 + 3 \cdot (\Phi_{rt})^2 - [4 + (\gamma r l_{rt})^2] = 0 \quad (46)$$

O modelo Lognormal a Três Parâmetros é aplicada apenas para distribuições com coeficiente de assimetria positivo, sendo  $\Phi_{rt}$  sempre maior ou igual a 1. Entretanto, deve-se excluir o caso de  $\Phi_{rt} = 1$ , pois o coeficiente de assimetria é nulo, o que aponta para uma distribuição simétrica em relação à média. Assim, para  $\gamma r l_{rt} < 0$ , a equação (46) possui apenas uma raiz real (ABRAMOWITZ; STEGUN; MILLER, 1964), dada por:

$$\Phi_{rt} = \left\{ \left[ 1 + \frac{(\gamma r l_{rt})^2}{2} \right] + \left[ (\gamma r l_{rt})^2 + \frac{(\gamma r l_{rt})^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \left[ 1 + \frac{(\gamma r l_{rt})^2}{2} \right] - \left[ (\gamma r l_{rt})^2 + \frac{(\gamma r l_{rt})^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} - 1. \quad (47)$$

De posse do valor de  $\Phi_{rt}$ , os parâmetros de  $rx$  são facilmente encontrados:

$$\sigma r x_{rt} = \sqrt{\ln(\Phi_{rt})}, \quad (48)$$

$$\mu r x_{rt} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ \frac{(\sigma r l_{rt})^2}{\Phi_{rt} \cdot (\Phi_{rt} - 1)} \right], \text{ e} \quad (49)$$

$$\delta r x_{rt} = \mu r l_{rt} - \left[ \frac{(\sigma r l_{rt})^2}{(\Phi_{rt} - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

Neste modelo, ainda segundo (CHARBENEAU, 1978), existem alguns valores de  $\Phi$  improváveis que na prática tornam este modelo indefinido. A distribuição *Gamma* deve ser utilizada nestes casos e não a Lognormal. Mas neste trabalho, para fins de simplificações, caso aconteça será utilizado a formulação Lognormal com apenas dois parâmetros (43).

### 2.2.2 Modelo Sem Dependência Temporal

O modelo sem dependência temporal é comumente chamado de modelo independente, como o próprio nome já sugere o valor da afluência  $yp_t$  não possui dependência direta dos valores dos estágios (FINARDI; DECKER; DE MATOS, 2013). O modelo usado neste trabalho, é denominado de independente Lognormal a três parâmetros em que, de forma similar ao apresentado anteriormente, a assimetria estimada de uma amostra é incluída no modelo de distribuição Lognormal. Assim, a  $yp_t$  pode ser definida como:

$$yh_t = EN(rb_t \cdot \sigma x_t + \mu x_t) + \delta x_t. \quad (51)$$

Assim pode-se usar as mesmas definições de (44)-(50) e com os valores estimados de assimetria  $\gamma y h_t$ , média  $\mu y h_t$  e desvio padrão  $\sigma y h_t$  dos valores históricos observados das afluências, os parâmetros do modelo podem ser definidos como:

$$ex_t = \left\{ \left[ 1 + \frac{(yh_t)^2}{2} \right] + \left[ (yh_t)^2 + \frac{(yh_t)^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \left[ 1 + \frac{(yh_t)^2}{2} \right] - \left[ (yh_t)^2 + \frac{(yh_t)^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} - 1, \quad (52)$$

$$\sigma x_t = \sqrt{\ln(ex_t)}, \quad (53)$$

$$\mu x_t = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ \frac{(\sigma y p_t)^2}{ex_t \cdot (ex_t - 1)} \right], \text{ e} \quad (54)$$

$$\delta x_t = \mu y p_t - \left[ \frac{(\sigma y p_t)^2}{(ex_t - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (55)$$

### 2.2.3 Correlação Espacial

Os aspectos discutidos até agora do modelo PAR(p) tratam apenas da dependência temporal, isto é, foram definidos coeficientes autorregressivos e estimam os parâmetros

necessários para gerar as séries sintéticas que correlacionam a afluência obtida no estágio  $t$  com as observadas nos estágios anteriores  $t-p$ . Entretanto, um aspecto muito relevante a ser considerado da representação de múltiplas afluências é que as usinas hidrelétricas que possuem proximidades geográfica tenham um comportamento hidrológico semelhante. Por isso, para melhorar a geração de cenários sintéticos, costuma-se incorporar ao cálculo a correlação espacial entre as hidrelétricas (PEREIRA; PINTO, 1985) .

Para fazer isso, é ponderado um fator ao ruído branco utilizado na geração das séries temporais tal qual exposto em (MACEIRA et al., 2008). Portanto, seja NE o número total de usinas hidrelétricas no sistema, é possível transformar um o ruído branco não espacialmente correlacionado por outro espacialmente correlacionado por:

$$rc_t = D_t rb_t, \quad (56)$$

onde,

$rc_t$  :Vetor de ruídos correlacionados de dimensão (NE,1);

$rb_t$  :Vetor de ruídos brancos de dimensão (NE,1),

$D_t$  :Matriz de carga triangular inferior de dimensão (NE, NE).

Calcula-se o valor esperado, multiplicando o transposto da matriz de ruídos correlacionados nos dois lados da equação (56). Assim:

$$\mathbb{E}[rc_t rc_t^T] = D_t \cdot \mathbb{E}[rb_t rb_t^T] D_t^T. \quad (57)$$

Substituindo o transposto de  $rc_t$  de (56) em (57), obtém-se:

$$\mathbb{E}[rc_t \cdot rc_t^T] = \mathbb{E}[D_t \cdot rb_t \cdot rb_t^T \cdot D_t^T]. \quad (58)$$

Os ruídos brancos são independentes entre eles e normalmente distribuídos, isto é, com média zero e desvio padrão unitário. Por isso,  $\mathbb{E}[rb_t \times rb_t^T]$  resulta na matriz identidade. Dessa maneira:

$$\mathbb{E}[rc_t \cdot rc_t^T] = D_t \cdot D_t^T. \quad (59)$$

Uma vez que  $rc_t$  representa a matriz que considera a correlação cruzada das UHEs, ao fazer  $\mathbb{E}[rc_t \times rc_t^T]$  é obtido como resposta uma estimativa da própria matriz de correlação espacial mensal entre as hidrelétricas  $\rho D_t$ .

Assim, para descobrir a matriz de carga  $D_t$ , que é uma matriz triangular inferior, deve-se fazer a inspeção dos elementos da matriz de correlação estimada.

$$\rho D_t = [D_t D_m^T]. \quad (60)$$

Uma vez encontrada a matriz de carga, esta é utilizada para correlacionar os ruídos brancos que são gerados de forma independente (56), resultando na matriz de ruídos correlacionados espacialmente. São obtidos os elementos da matriz de carga e multiplicados diretamente pelos ruídos brancos aleatórios como forma de correlacioná-los. Ressalta-se que pode ser melhorado o processo de correlação cruzada através de uma transformação linear aplicada a matriz carga, mais detalhes podem ser obtidos em (OLIVEIRA et al., 2009).

#### 2.2.4 Geração das Séries Sintéticas

A partir dos valores de coeficientes autorregressivos estimados  $fl_{rtp}$  para  $p=1, \dots, HP_{rt}$  por UHE e valor dos resíduos determinado em (44), a partir de um ruído branco correlacionado,  $a$  é dito o número de aberturas,  $yh_a$  é a afluência passada e  $\mu yha$  a média das afluências passadas, o modelo PAR(p) Lognormal a Três parâmetros utilizados neste trabalho podem ser determinados como:

$$yh_{rt} - \sum_{p=1}^{HP_{rt}} \phi H_{prt} \cdot yha_{r,t-p} = \xi H_{rt}, \quad (61)$$

em que:

$$\phi H_{prt} = fl_{rtp} \cdot \left( \frac{\sigma y h_{rt}}{\sigma y ha_{r,t-p}} \right), \quad p \leq HP_{rt}, \quad (62)$$

$$\xi H_{rta} = \mu y h_{rt} + \sigma y h_{rt} \cdot r l_{rta} - \sum_{p=1}^{HP} \phi H_{prt} \cdot \mu y h a_{r,t-p}. \quad (63)$$

### 2.3 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Em diversos problemas reais do cotidiano é desejado otimizar recursos dado um planejamento que seja necessário envolver dados incertos do futuro. Na maioria das vezes, tais problemas podem ser formulados através de modelos de otimização, no entanto, as informações do futuro devem ser estimadas de forma satisfatória. Neste contexto, a Programação Estocástica (PE) são programas matemáticos onde alguns dados incorporados apresentam incertezas. Tais incertezas são geralmente definidas através de uma ou várias funções de distribuição de probabilidade tal qual apresentado anteriormente na seção 2.2. Assim como na maioria dos trabalhos do estado da arte no âmbito do POEMP, as incertezas observadas neste trabalho estão presentes na modelagem das afluências, neste sentido, dentro do ambiente desses programas matemáticos, estas são tipicamente representadas por estruturas conhecidas como árvore de cenários.

Teoricamente, dado uma árvore de cenários, para obter uma solução é possível formular um problema linear e estocástico e resolvê-lo com apenas um PL. Contudo, na prática, esta estratégia se mostra possível apenas para problemas com um número reduzido de estágios e com poucas aberturas pois, quando se trata de problemas de grande porte ela é limitada pelo fator computacional. Outra opção, é adotar uma estratégia para se estimar a solução e assim tornando este problema tratável, neste sentido, diversos algoritmos foram propostos ao longo dos anos, destaca-se o CUPPS (CHEN; POWELL, 1999) e a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PEREIRA; PINTO, 1991). A PDDE é uma ferramenta muito utilizada para solucionar Problemas Estocásticos Lineares Multiestágio (PELM) a qual necessita da informação dual para construir uma FCF baseado na decomposição de Benders. Esta metodologia clássica é amplamente usada em problemas do POEMP. (BRANDI et al., 2018; DE MATOS, 2012; LARROYD, 2016; MACEIRA et al., 2018; MARCATO, 2002; SOARES; STREET; VALLADÃO, 2017) e também, outras áreas, como por exemplo em problemas de matemática financeira (VAN-ACKOOIJ; WARIN, 2017).

Neste contexto, esta seção apresenta uma discussão sobre os conceitos de teoria para problemas estocásticos multiestágio, são definidas nomenclaturas e estruturas de árvore de

cenários. E por fim, o foco é nas principais características da PDDE bem como a apresentação do um algoritmo para descrever o método.

### 2.3.1 O Problema Estocástico Multiestágio

A maioria dos problemas enfrentados diariamente envolvem, mesmo que de forma subjetiva, a tomada de decisões planejadas durante um período de tempo específico, em POEMP por exemplo, no caso brasileiro, as decisões têm base mensal e um horizonte de planejamento de 5 anos, fato que normalmente levam a um alto grau de incertezas visto que é difícil estimar afluências de chuva de forma acurada em uma perspectiva de poucos meses.

Desta forma, para uma modelagem de problemas dessa natureza, não seria adequado a abordagem por problemas estocásticos de dois estágios. Portanto, para lidar com essas complexas estruturas utiliza-se uma formulação de Problemas Estocástico Multiestágio (PEM), onde são considerados  $t=1, \dots, T$  estágios do horizonte de planejamento. Assim, ao longo dos estágios, as incertezas do processos estocástico  $\xi_{[T]} = (\xi_1, \dots, \xi_T)$  produzem uma decisão  $x_t$ , tal que  $t=2, \dots, T$ , com características não antecipativa<sup>5</sup>, isto é, as decisões de  $x_t$  dependem de  $\xi_{[t]}$ , onde  $t=1, \dots, t$ , e são independentes das incertezas futuras  $\xi_{[t+1]}$ . Uma notação clássica observada em (SHAPIRO, 2011) que visa representar o processo de decisões discutido anteriormente em modelos multiestágio é: decisão( $x_0$ )  $\rightarrow$  observação( $\xi_1$ )  $\rightarrow$  decisão( $x_1$ )  $\rightarrow$  observação( $\xi_2$ )  $\rightarrow$  decisão( $x_2$ )  $\rightarrow$  observação( $\xi_T$ )  $\rightarrow$  decisão( $x_T$ ).

Para definir a notação matemática de um PEM considere o espaço de probabilidade  $(\Xi, \mathcal{F}, P)$ , sendo o cenário definido pela realização da variável aleatória  $\xi$  para cada estágio  $t \in (1, \dots, T)$ , ou,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_T) \in \Xi$  e  $\mathcal{F}$  para  $\sigma$ -álgebra gerado por um conjunto  $\Xi = \Xi_1 \times \dots \times \Xi_T \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_T}$ .

De forma geral, uma notação clássica (SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYNSKI, 2009) do problema estocásticos multiestágio de  $t=1, \dots, T$  mostra a sequência de problemas lineares que devem ser resolvidos, também chamada de formulação aninhada:

$$\min_{\substack{A_1 x_1 = b_1 \\ x_1 \geq 0}} \mathbf{c}_1^\top x_1 + \mathbb{E} \left[ \min_{\substack{B_2 x_1 + A_2 x_2 = b_2 \\ x_2 \geq 0}} \mathbf{c}_2^\top x_2 + \mathbb{E} \left[ \dots + \mathbb{E} \left[ \min_{\substack{B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T \\ x_T \geq 0}} \mathbf{c}_T^\top x_T \right] \right] \right]. \quad (64)$$

<sup>5</sup> As decisões presentes não dependem de informações do futuro.

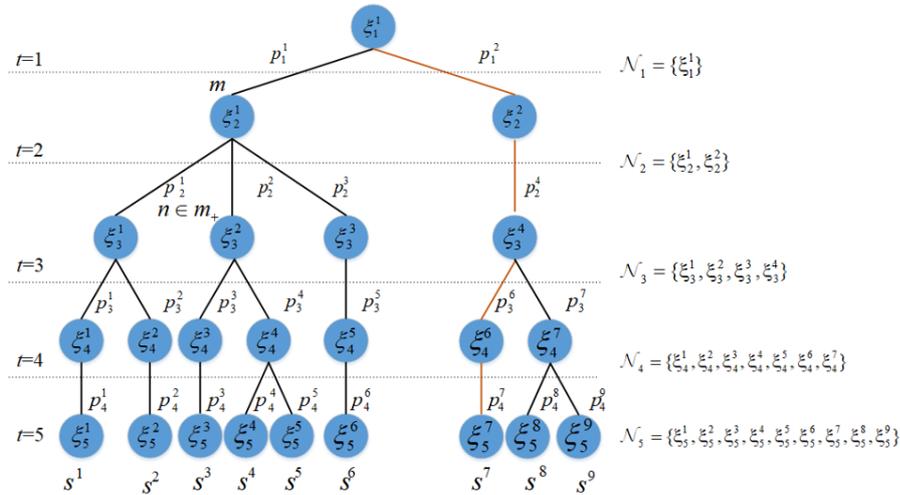
onde  $c_t^\top \in \mathbb{R}^{m_t}$  e  $b_t \in \mathbb{R}^{n_t}$  são vetores,  $A_t \in \mathbb{R}^{m_t \times m_t}$ ,  $B_t \in \mathbb{R}^{m_t \times n_t}$  são matrizes e o operador  $\mathbb{E}$  é o valor esperado. Todos esses componentes podem ser modelados como variáveis aleatórias o qual estabelece o processo estocástico  $\xi_t = (c_t, b_t, A_t, B_t) \in \Xi$  para  $t=2, \dots, T$ . Contudo, no caso deste trabalho é considerado com variável aleatória apenas o vetor  $b_t$ , assim, os outros elementos de  $\xi_t$  são fixos. Nota-se que, o primeiro estágio da equação (64) os parâmetros  $\xi_1 = (c_1, b_1, A_1)$  são determinísticos. A sequência de decisões  $x(\xi_{[t]}) = (x_1(\xi), \dots, x_t(\xi))$  é chamada de política operativa e é considerada viável se satisfaz todas as restrições do problema.

Um fato muito relevante quando trata-se de PEM é que, encontrar um valor esperado de (64) se a variável aleatória  $\xi$  for contínua significa resolver infinitos problemas lineares, fato que torna o problema impossível de ser solucionado. Por isso, costuma-se utilizar uma aproximação da função de distribuição contínua, através da discretização de cada elemento da variável aleatória em um número finito  $NA_t$  aberturas, matematicamente,  $\Xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^{NA_t})$  com as respectivas probabilidades  $p_t^i$  onde  $t=2, \dots, T$  e  $i=1, \dots, NA_t$ . O arranjo que organiza as aberturas é comumente chamado de árvore de cenários. Na próxima seção são discutidas como as árvores de cenários auxiliam na resolução do problema.

### 2.3.2 Árvore de Cenários

Uma árvore de cenários é uma estrutura que contém informações acerca as variáveis aleatórias. Neste contexto, algumas notações são definidas para organizar todas essas informações, considere a Figura 5 onde é representado o processo estocástico de  $T=5$  estágios com diferentes discretizações por estágio no mesmo espaço amostrado  $\Xi_t$ . Um nó individual é ilustrado pelo círculo azul, o qual internamente tem uma realização amostrada  $\xi_t^i$  com sua respectiva probabilidade  $p_t^i$  representada nos ramos que ligam os nós, onde  $i=1, \dots, NA_t$ .

Figura 5 – Árvore de cenários assimétrica.



Fonte: adaptado de (ABGOTTSPON, 2015)

É dito que NS é o número total de cenários, define-se um único cenário como o caminho percorrido por todas as aberturas, ou nós, conectadas ao longo do horizonte de planejamento, como pode ser visto na Figura 5, o caminho destacado em vermelho é referente ao cenário  $s^7 = (\xi_1^1, \xi_2^2, \xi_3^4, \xi_4^7, \xi_5^7)$ , além disso, a probabilidade de ocorrência desse cenário é dada pelo produto de todas as probabilidades  $p_1^2 \cdot p_2^4 \cdot p_3^6 \cdot p_4^6$ .

Considere um conjunto de nós  $\mathcal{N}$  determinado para cada estágio. O nó predecessor  $n$  tal que  $n \in \mathcal{N}_t$  é conectado com o nó antecessor  $m$  onde  $m \in \mathcal{N}_{t+1}$ , assim,  $n \subset m$  e  $m_+$  ser o conjunto de todos os nós sucessores do nó  $m$ .

Exemplo: De acordo com a figura acima, os nós filhos do nó  $m = \{\xi_2^1\}$  são  $m_+ = \{\xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3\}$ .

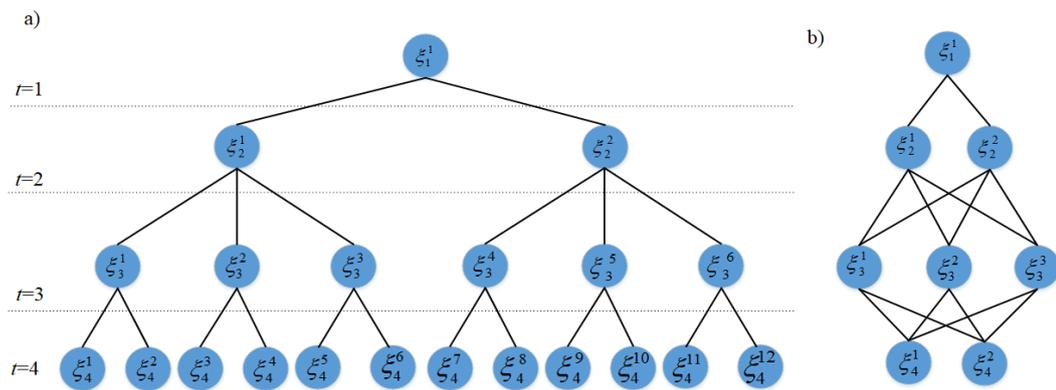
### 2.3.2.1 Arranjo das árvores de cenários

Na estrutura multiestágio, existem muitas estruturas de árvores aceitáveis. Geralmente, a configuração é determinada pelo tipo de problema ou pelo método de solução escolhido. Em termos gerais, a estrutura depende do número de estágios, e do conjunto  $m_+$  associado com cada nó, assim, pode ser dividido em dois tipos de estruturas: assimétrica, como mostrada na Figura 5, onde o número de nós no conjunto  $m_+$  é diferente em cada nó conectado no nó  $m$ ; e a estrutura simétrica, onde o número de nós no conjunto  $m_+$  é igual em cada nó. A estrutura simétrica é ilustrada na Figura 6(a).

Além disso, a estrutura simétrica pode ser de amostras comuns (SALVENDY, 2001) ou de diferentes amostras. Considerando a Figura 6(a) para  $t=3$  e  $\mathcal{A} = \{\xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3\}$  e  $\mathcal{B} =$

$\{\xi_3^4, \xi_3^5, \xi_3^6\}$  o conjunto de nós filhos de  $\xi_2^1$  e  $\xi_2^2$ , respectivamente. É definida amostras diferentes quando as aberturas filhas para todas os nós são diferentes, o que significa que  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ . Por outro lado, se  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  é definida uma estrutura de amostras comuns e pode ser representada por uma estrutura equivalente tal como mostrada na Figura 6(b). Considerando questões de convergência do método da PDDE, esta última estrutura deve ser utilizada para garantir a convergência do método (INFANGER; MORTON, 1996).

Figura 6 – (a) árvore simétrica (b) árvore de amostras comuns



Fonte: O Autor.

### 2.3.3 A Programação Dinâmica Dual Estocástica – PDDE

Esta seção aborda os principais aspectos do método de solução da Programação Dinâmica Dual Estocástica. Inicialmente é detalhado o mecanismo iterativo do algoritmo através de diagramas, na sequência, mostra-se a formulação necessária para calcular os cortes de Benders (BENDERS, 1962; GEOFFRION, 1972), e para finalizar é apresentado um passo-a-passo do algoritmo da PDDE.

A PDDE é um método iterativo amplamente utilizado para resolver PELM. Um dos seus princípios é a utilização da informação dual para construir uma função aproximada do custo futuro. Inicialmente, ele foi proposto por (PEREIRA, 1989; PEREIRA; PINTO, 1991) o qual baseou-se na introdução da amostragem de cenário no método da Decomposição Aninhada (DE QUEIROZ, 2016; DONOHUE; BIRGE, 2006). Com essa ideia, não é mais necessário a solução de todos os nós da árvore de cenários para encontrar uma estimativa da solução do problema de qualidade aceitável. Nota-se que, a PDDE significou um grande avanço na solução de PLEM, pois, os algoritmos até então propostos se limitavam a problemas de poucos estágios

com um número de cenários reduzido. Desta forma, esbarravam na chamada “maldição da dimensionalidade”, fato que foi melhorado na PDDE.

Ainda nos dias atuais, a PDDE pode ser considerada um dos métodos de solução mais eficiente para tratar de problemas de POEMP, no entanto, muitas contribuições e variantes ao longo dos anos foram propostas. Destacam-se a Decomposição Aninhada Abreviada (AND) (DONOHUE; BIRGE, 2006) , o método dos Planos Cortantes e Amostragem Parcial (CUPPS)(CHEN; POWELL, 1999) e Algoritmo da Amostragem Dinâmica por Aproximação Externa (DOASAs) (PHILPOTT; DE MATOS, 2012; PHILPOTT; GUAN, 2008; PHILPOTT; PRITCHARD, 2013) entre outros.

O principal objetivo da PDDE é encontrar uma política operativa construindo funções lineares que aproximam a Função de Custo Futuro. Para fazer isso, sem grandes pormenores, o processo iterativo do algoritmo é dividido em duas etapas: a *forward* e a *backward*. A *forward* é resolvida do estágio  $t=1, \dots, T$  e a *backward* de  $t=T, \dots, 2$ . Antes de entrar no processo iterativo, basicamente, deve-se determinar uma árvore de cenários finita a qual será utilizada para encontrar a FCF.

Para melhor descrever os passos iniciais do algoritmo, considere a Figura 7-1 onde mostra a árvore de cenários para um problema de quatro estágios  $T=4$ . Cada círculo representa um nó (i.e. PL) a ser resolvido. Além disso, as barras que conectam os nós indicam que as soluções do nó anterior são dados de entrada para nó a ele conectado.

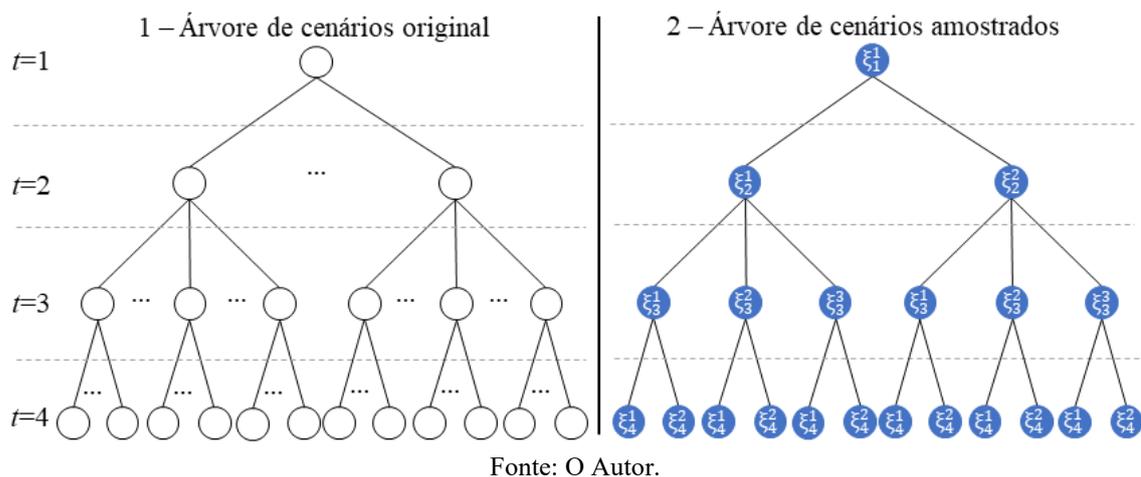
Inicialmente, a Figura 7-1 representa a árvore de cenários completa, a qual raramente é possível ter conhecimento sobre. Assume-se que o primeiro estágio é conhecido, pois se trata do estado presente em que se encontra o problema, no caso do POEMP, são os volumes iniciais dos reservatórios e a afluência do primeiro mês e as passadas, caso o modelo de afluência seja com dependência temporal. Para os demais estágios, existe uma probabilidade associada a cada caminho, que por sua vez é uma realização diferente.

Como já abordado anteriormente, em problemas reais uma variável aleatória é representada por uma distribuição de probabilidade contínua, fato que leva a incontáveis cenários tornando o problema impossível de ser solucionado. Para contornar isso, na prática, é criada uma árvore de cenários baseada na distribuição contínua da variável aleatória, tal qual ilustrada na Figura 7-2, onde cada estágio é representado por um número finito de aberturas. A criação desta árvore de cenários amostrados varia em tamanho, e os cenários podem ser feitos determinados considerando independência (DE QUEIROZ; MORTON, 2013) ou dependência temporal (DE CASTRO et al., 2015; HIPEL; MCLEOD, 1994). O mais comum quando se trata

de uma de POEMP é usar modelos de afliências com dependência temporal, também chamados de modelo PAR(p) como visto na seção 2.2.1. Existem várias metodologias para a determinação dos resíduos desta árvore de cenário, as quais é possível citar, (HOMEM-DE-MELLO; BAYRAKSAN, 2014). Com *Quasi-Monte Carlo* (QMC) (NIEDERREITER, 1978, 1992), e *Latin Hypercube Sampling* (LHS) (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979), são incorporados a concepção dos algoritmos Programação Estocástica, de maneira a reduzir a variância intrínseca a aleatoriedade da representação do processo estocástico das incertezas.

Ressalta-se ainda que outros cientistas contribuíram tanto na modelagem do problema quanto no algoritmo de solução da PDDE, assim, destaca-se (BRANDI et al., 2015; PHILPOTT; DE MATOS; FINARDI, 2013; SHAPIRO, 2011; SHAPIRO et al., 2013).

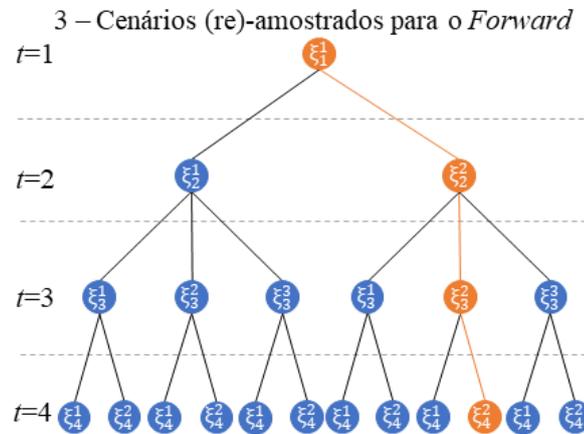
Figura 7 – Desenho da árvore de cenários originais e cenários amostrados.



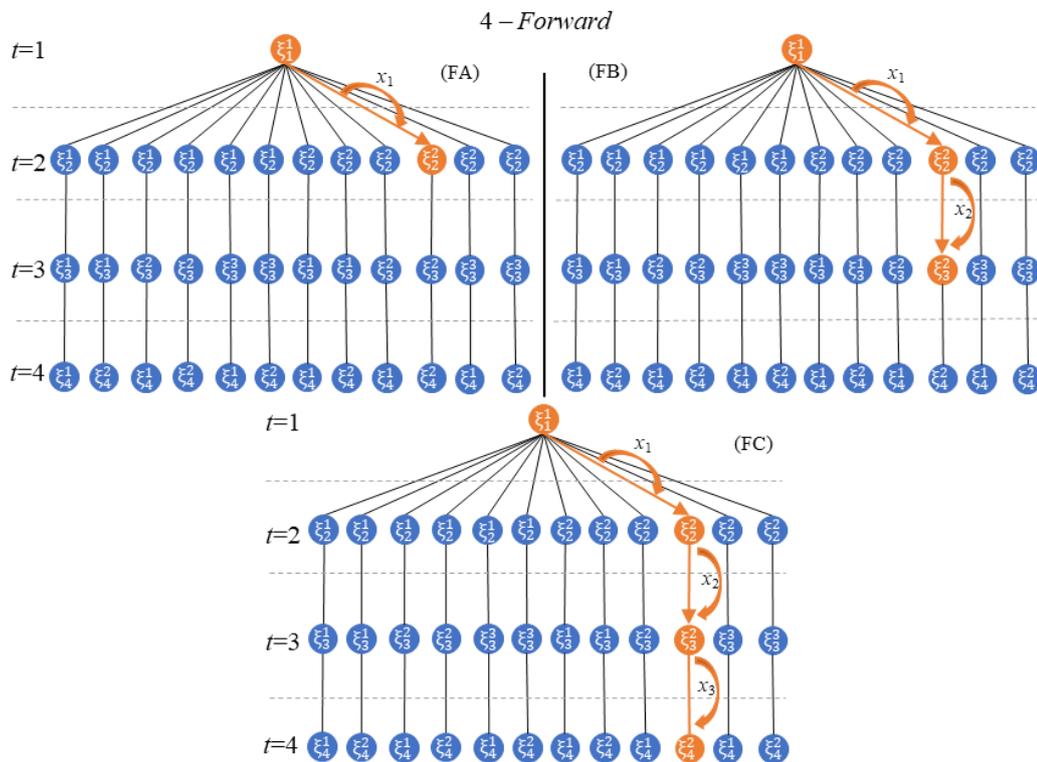
Fonte: O Autor.

Uma vez determinada a árvore de cenários com aberturas finitas Figura 7-2, ela se mantém a mesma até o final do processo iterativo. Após isso, escolhe-se um determinado número de cenários  $s=1, \dots, NS$  para serem percorridos a cada iteração. No exemplo didático, é definido que apenas um cenário  $s$  é amostrado por iteração e  $\xi_y^x$  é a variável aleatória no estágio  $y$  e nó  $x$ . Assim, na Figura 8 se pode observar o cenário amostrado em alaranjado, nota-se que o cenário escolhido vai percorrer os nós  $\{\xi_1^1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2\}$ . Existem vários métodos para amostrar os caminhos a serem percorridos na árvore de cenários, o clássico MC, e também outros discutidos em (DREW; HOMEM-DE-MELLO, 2006; HOMEM-DE-MELLO, 2008, p.; HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011, p.; JARDIM; MACEIRA; FALCAO, 2001).

Figura 8 – Amostragem dos cenários para a etapa *forward*.



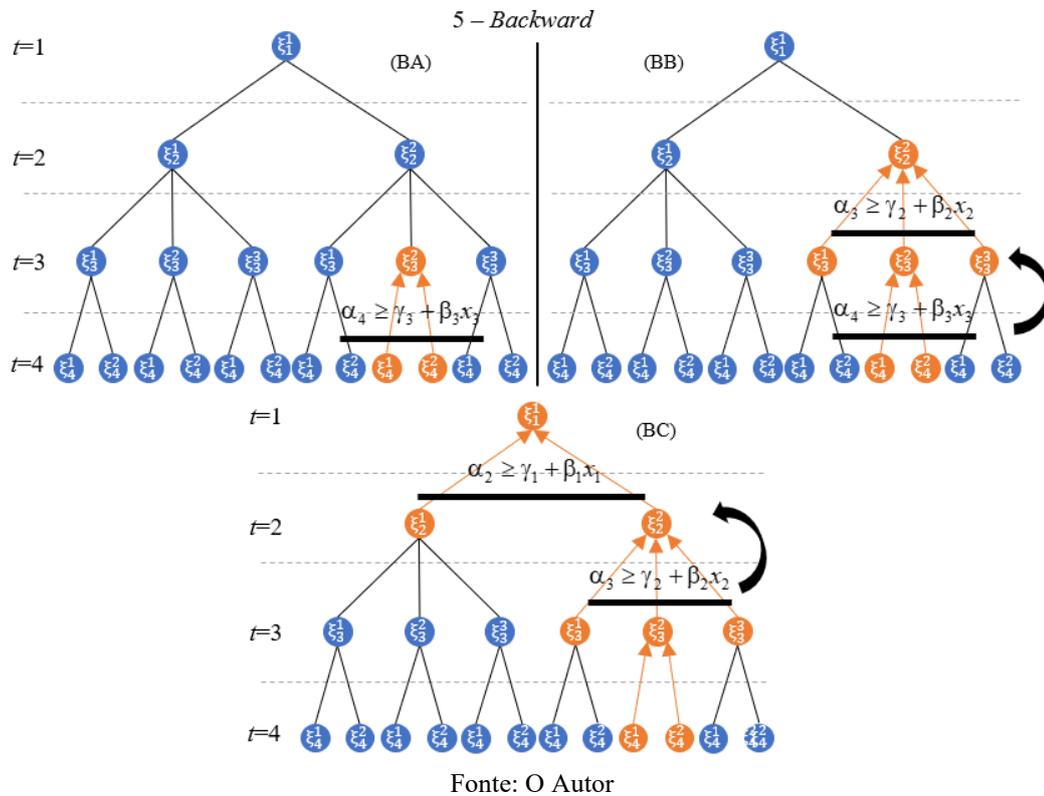
Após a amostragem dos cenários, a etapa *forward* é iniciada. Esta etapa é resolvida de forma progressiva, isto é, de  $t=1, \dots, T$  e tem por objetivo calcular uma sequência de decisões ou pontos experimentais  $x^s(\xi_{[t]}) = (x_t(\xi_1^1), \dots, x_t(\xi_4^2))$  ao longo do horizonte de planejamento  $T$ . Assim, a decisão em  $t$  serve como ponto inicial para o PL do estágio subsequente  $t+1$ . As decisões obtidas, são os pontos os quais serão calculadas aproximações lineares na etapa *backward*. A Figura 9 ilustra a etapa *forward* discutida até aqui. Na Figura 9 (FA)  $x_1$  representa a decisão em  $t=1$  a qual é dado de entrada para o nó  $\xi_2^2$ , por sua vez, na Figura 9 (FB)  $x_2$  é a decisão em  $t=2$  e dado de entrada para o PL do nó  $\xi_3^2$ . E para finalizar a etapa *forward*, a Figura 9 (FC)  $x_3$  é a decisão em  $t=3$ .

Figura 9 – Desenho da etapa *forward*.

Após finalizada a etapa *forward* é iniciada a *backward*, a qual é resolvida de forma recursiva, isto é, de  $t=T, \dots, 2$ . Os pontos experimentais de cada estágio obtidos na etapa anterior são usados para construir a aproximação linear da FCF, a qual é representada pela equação  $r_{t+1} \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1}x_t$ , ou também é comumente chamado de corte. Esses planos são calculados por estágio e cenários amostrados, e para obtê-los, é necessário resolver todos os PLs referentes as aberturas conectadas no nó ao qual está o ponto inicial. Por exemplo, o último nó do cenário  $s$  é  $\xi_4^2$ , assim, é usado o PL do nó  $\xi_4^1$  e  $\xi_4^2$  para construir o corte usado nos subproblemas no estágio seguinte  $\xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3$ . Em outras palavras, o corte calculado no estágio  $t$  é compartilhado e usado com todas as aberturas do estágio  $t-1$ .

Para ilustrar este processo considere a Figura 10, inicialmente em (BA) são resolvidos os PLs dos nós em  $t=4$   $\{\xi_4^1, \xi_4^2\}$ . Junto com o ponto inicial  $x_3$  é obtido o corte  $r_4 \geq \alpha_4 + \beta_4 x_3$ . Por sua vez, em  $t=3$ , ilustrado na Figura 10(BB), são resolvidos os PLs dos nós  $\{\xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3\}$  usando o corte anterior  $r_4 \geq \alpha_4 + \beta_4 x_3$  como restrição e  $x_2$  como ponto inicial, assim é obtido o corte  $r_3 \geq \alpha_3 + \beta_3 x_2$ . E por fim, Figura 10(BC) resolve  $\{\xi_2^1, \xi_2^2\}$  com o corte anterior e  $x_1$  para obter o corte para ser usado em  $t=1$ .

Figura 10 – Desenho da etapa *backward*.



Em cada iteração, cada cenário amostrado no *forward* gera um corte por estágio, com exceção de  $T$  que não possui cortes. Por fim, na ilustração apresentada na Figura 10 considera-se que cada corte é obtido pela pelas médias<sup>6</sup> dos coeficientes de cada nó. No entanto, existem outras metodologias tal qual mostrado em (BIRGE; LOUVEAUX, 1988) onde cada nó gera um corte.

O processo descrito acima, com apenas um cenário amostrado por iteração, é uma forma básica e resumida de descrever o processo da PDDE feita para o melhor entendimento do leitor. A complexidade do algoritmo pode crescer com o aumento da quantidade de cenários amostrados por iteração, assim, pode ser melhorada a aproximação da FCF. No entanto, tais melhorias resultam um aumento do tempo computacional para realizar cada iteração. Neste contexto, A PDDE é um algoritmo multifuncional que permite o uso de estratégias para melhorar sua performance, as quais podem-se destacar as técnicas avançadas de paralelismo e seleção de cortes. Em (SHAPIRO, 2011) é apresentada uma rica revisão sobre os principais nuances deste método de solução.

<sup>6</sup> A média é devido a consideração de que cada abertura é equiprovável. Portanto, na realidade cada corte deve ser multiplicado pela sua respectiva probabilidade de ocorrência.

A seguir, é apresentado matematicamente como encontrar um corte da FCF. Considere a desagregação de (64) para o estágio  $t=T-1$  o qual resulta em um problema linear dado pela equação (65) para um determinado cenário  $s$  e iteração  $k$ .

$$Q_{T-1}(x_{T-2}, \xi_{[T-1]}) = \begin{cases} \min_{x_{T-1} \geq 0} & c_{T-1}^\top x_{T-1} + Q(x_{T-1}, \xi_{[T]}) \\ \text{s.a.} & A_{T-1} x_{T-1} = b_{T-1} - B_{T-1} x_{T-2}, \end{cases} \quad (65)$$

onde a função recurso é dada por:

$$Q(x_{T-1}, \xi_{[T]}) = \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i Q_T(x_{T-1}, \xi_{[T]}), \quad (66)$$

para estágio  $t=T$  pode ser escrito uma equivalência entre o problema primal e dual:

$$Q_T(x_{T-1}, \xi_{[T]}) = \begin{cases} \min_{x_{iT} \geq 0} & c_{iT}^\top x_{iT} \\ \text{s.a.} & B_{iT} x_{T-1} + A_{iT} x_{iT} = b_{iT} \end{cases} = \begin{cases} \max_{\pi_{iT} \geq 0} & \pi_{iT}^\top (b_{iT} - B_{iT} x_{T-1}) \\ \text{s.a.} & A_{iT}^\top \pi_{iT} = c_{iT}, \end{cases} \quad (67)$$

sendo  $i$  uma determinada realização. Usando a solução dual (67) e substituindo em (66) tem-se:

$$Q(x_{T-1}, \xi_{[T]}) = \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \pi_{iT}^\top (b_{iT} - B_{iT} x_{T-1}), \quad (68)$$

sendo  $\beta = -\sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i B_{iT} \pi_{iT}^\top$  o subgradiente de (68). A convexidade de  $Q$  produz uma aproximação para o limite mínimo:

$$\begin{aligned} Q(x_{T-1}) &\geq Q(\bar{x}_{T-1}) + \beta^\top (x_{T-1} - \bar{x}_{T-1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \pi_{iT}^\top (b_{iT} - B_{iT} \bar{x}_{T-1}) - \left( \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i B_{iT} \pi_{iT}^\top \right) (x_{T-1} - \bar{x}_{T-1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \pi_{iT}^\top (b_{iT} - B_{iT} x_{T-1}). \end{aligned} \quad (69)$$

A última inequação de (69) é também conhecida como cortes de Benders, e indica que a aproximação é tangente ao ponto experimental  $\bar{x}$  na função recurso. Como bem conhecido, em problemas de grande porte,  $\mathcal{Q}$  é composto por uma enorme quantidade de vértices formando um poliedro, pois, iterativamente, o algoritmo calcula um novo subconjunto de vértices que aproximam a função recurso:

$$\mathcal{Q}(x_{T-1}) = \begin{cases} \min & \alpha_T \\ \text{s.a.} & \alpha_T \geq \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \pi_{jiT}^\top (b_{iT} - B_{iT} x_{T-1}), j = 1, \dots, \text{NC}, \end{cases} \quad (70)$$

organizando (70),  $\gamma_T$  é o termo constante e  $\beta_T$  a inclinação da reta os quais matematicamente são descritos por:

$$\gamma_T = \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \cdot b_{iT}^\top \cdot \pi_{iT}^\top, \quad \beta_T = \sum_{i=1}^{\text{NA}} p_i \cdot (B_{iT})^\top \cdot \pi_{iT}^\top. \quad (71)$$

Com o objetivo de organizar e descrever o algoritmo da PDDE de forma dinâmica, a formulação completa exposta na equação (64) pode ser dividida em estágios na forma recursiva, portanto, para  $t=T$  o PL é:

$$\mathcal{Q}_T(x_{T-1}, \xi_{[T]}) = \begin{cases} \min_{x_T \geq 0} & c_T^\top x_T \\ \text{s.a.} & B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T, \end{cases} \quad (72)$$

por sua vez, o PL para  $t=2, \dots, T-1$ :

$$\mathcal{Q}_t(x_{t-1}, \xi_{[t]}) = \begin{cases} \min_{x_t \geq 0} & c_t^\top x_t + \alpha_{t+1} \\ \text{s.a.} & B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t, \\ & \alpha_{t+1} \geq \gamma_{j,t+1} + \beta_{j,t+1}^\top x_t, \quad j = 1, \dots, \text{NC}_t, \end{cases} \quad (73)$$

e, para o estágio inicial  $t=1$ :

$$\underline{z} = \begin{cases} \min_{x_1 \geq 0} & c_1^\top x_1 + \alpha_2 \\ \text{s.a.} & A_1 x_1 = b_1, \\ & \alpha_2 \geq \gamma_{j2} + \beta_{j2} x_1, \quad j = 1, \dots, \text{NC}_t. \end{cases} \quad (74)$$

Note que, a equação (74) estabelece o custo inferior do algoritmo para cada iteração  $k$ . Por outro lado, pode ser calculado um custo superior obtendo a média de todos os custos de operação através dos cenários da etapa *forward* onde matematicamente é:

$$\bar{z} = c_1^\top x_1 + \sum_{t=2}^T \sum_{s=2}^{\text{NS}} \frac{c_t^\top x_{st}}{\text{NS}} \quad (75)$$

O critério de parada para o algoritmo da PDDE não é consenso no estado da arte, e é discutido em (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011; SHAPIRO, 2011). Com a inclusão da métrica de risco CVaR na PDDE (PHILPOTT; DE MATOS; FINARDI, 2013), este problema é intensificado. No trabalho de um dos precursores do método (PEREIRA; PINTO, 1991) é proposto utilizar o desvio padrão do custo superior como critério de parada, contudo, para efeito deste trabalho foi utilizado o tempo computacional. Na mesma temática, os autores de (BRANDI et al., 2018) sugerem um critério de parada para o algoritmo.

Na próxima seção é apresentado o passo a passo do algoritmo que sintetiza todos os aspectos discutidos até agora sobre a PDDE.

2.3.3.1 O Algoritmo da PDDE

Algoritmo 1 – PDDE:

- 1: Inicialização: Definir estágios  $t = 1, \dots, T$ . Definir critério de parada.  $k \leftarrow 1$ .  $\underline{z}_k = \text{inf}$ . Definir árvore de cenários simétrica com  $i=1, \dots, \text{NA}_t$  aberturas  $\forall t > 1$ . Definir conjunto de cortes  $\text{NC}_t = 0$ .
- 2: **enquanto** critério de parada = falso **faça**
- 3:   Amostrar cenários  $\xi_{[t]}, s=1, \dots, \text{NS}_k$
- 4:   *(Etapa Forward)*
- 5:    $\bar{x}_1 = \text{argmin}$  (74) e obter  $\underline{z}_k$ .
- 6:   **para**  $t=2, \dots, T$  **faça**
- 7:     **para**  $s=1, \dots, \text{NS}_k$  **faça**
- 8:       obter  $x_{st}(\xi_{st}, \bar{x}_{s,t-1})$  resolvendo o PL (73)
- 9:     **fim para**
- 10:   **fim para**
- 11:   *(Atualização do custo superior)*
- 12:   Calcular  $\bar{z}_k$  de acordo com (75)
- 13:   *(Etapa Backward)*
- 14:   **para**  $t=T, \dots, 2$  **faça**
- 15:     **para**  $s=1, \dots, \text{NS}_k$  **faça**
- 16:       **para**  $i=1, \dots, \text{NA}_t$  **faça**
- 17:         Resolver (73) com  $x_{st}(\xi_{st}, x_{s,t-1})$  e calcular  $\gamma_{it} = p_j \cdot b_{jt} \cdot \pi_{jt}$  e  
 $\beta_{it} = p_j \cdot (B_{jt})^T \cdot \pi_{jt}$
- 18:       **fim para**
- 19:        $\gamma_{jst} = \sum_{i=1}^{\text{NA}_t} \gamma_{it}; \beta_{jst} = \sum_{i=1}^{\text{NA}_t} \beta_{it}; \alpha_{s,t} \geq \gamma_{jst} + \beta_{jst} \cdot x_t$ . Adicionar  $\alpha_{st}$  no conjunto de cortes a serem compartilhados  $t-1; j_{t-1} \leftarrow j_{t-1} + 1, \text{NC}_{t-1} \leftarrow j_{t-1}$ .
- 17:     **fim para**
- 18:   **fim para**
- 19:   *(Verificar convergência)*
- 20:   Checar critério de convergência.
- 21:    $k \leftarrow k + 1$
- 22: **fim enquanto**

### 3 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

Este capítulo apresenta os métodos de regularização estudados neste trabalho. Inicialmente, é detalhado o método proposto nesta tese, a PDDE com Centros de Chebyshev (BELTRÁN et al., 2020), assim, apresenta-se as modificações necessárias para melhorar eficiência computacional na PDDE clássica (CL) (PEREIRA; PINTO, 1991). Neste sentido é apresentado um problema hidrotérmico de pequeno porte para tornar o entendimento do método mais didático. Por fim, é apresentado outros dois métodos, a regularização de nível com soluções normais (NL) proposta por (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019), e o método da decomposição regularizada multiestágio (DR) apresentado por (ASAMOV; POWELL, 2018). O estudo desses outros dois últimos métodos são feitos para ter uma comparação entre os três métodos de regularização e a metodologia clássica. A comparação não se restringe apenas a qualidade de solução, mas também a dificuldade de implementação e calibração desses métodos.

#### 3.1 A PDDE COM CENTROS DE CHEBYSHEV – CC

A PDDE é um dos algoritmos mais eficientes para lidar com incertezas em problemas de grande porte, o qual é muito atrativo devido a simplicidade de solucionar grandes quantidades de subproblemas lineares. Apesar disso, a PDDE apresenta alguns defeitos como a possibilidade da necessidade de grandes quantidades de iterações para alcançar uma FCF adequada. A necessidade de incluir um conjunto grande de inequações no problema resultando no carregamento elevado de cada subproblema, fato que na prática causa uma explosão da dimensionalidade deixando a solução lenta. Além disso, a PDDE é um método baseado em planos cortantes (KELLEY, 1960), o qual é bem conhecido pela convergência lenta e uma instabilidade própria (i.e. é um método não monotônico) quando existe um espaço de estados grande para ser visitado.

Neste contexto, a proposta dessa tese é combinar centros de Chebyshev (ELZINGA; MOORE, 1975) com a PDDE resultando na chamada CC, cujo o principal objetivo é de calcular melhores pontos experimentais na etapa *forward* o qual pode aumentar a eficiência do método de solução contornando suas desvantagens que foram discutidas no parágrafo anterior. Em termos de implementação, a CC não apresenta dificuldades maiores que as já observadas na implementação da CL. De forma mais específica, para implementar a CC são necessárias

apenas pequenas mudanças na etapa *forward*, onde a função de custo futuro é modificada através da adição de uma variável e uma restrição nos PLs. Por sua vez, a etapa *backward* não é alterada, portanto, preserva o tamanho e o peso computacional da CL. Além disso, uma importante contribuição deste trabalho é a aplicação do CC em problemas multiestágios.

A convergência lenta da CL é bem conhecida no estado da arte. Isso é consequência do cálculo dos pontos ótimos de cada PL longe da região de interesse na etapa *forward*, esses pontos são encontrados minimizando (73), principalmente nas iterações iniciais. Com o objetivo de melhorar a obtenção desses pontos, a CC é inspirada pela combinação do método dos planos cortantes (KELLEY, 1960) e centros de Chebyshev (ELZINGA; MOORE, 1975), desta forma, os pontos ótimos de cada PL são obtidos usando o centro do poliedro formado pelas aproximações da FCF ao invés do vértice. O conjunto de inequações lineares que compõe a função de custo futuro formam um poliedro, enquanto os centros de Chebyshev é o ponto que maximiza o maior círculo dentro dessa da figura geométrica. As seguintes definições ajudam o leitor a entender a estratégia:

Considere  $x \in \mathcal{R}^n$  o ponto em um conjunto convexo  $X$ . Assumindo que o conjunto de inequações lineares  $\beta_j^\top x + \gamma_j \leq 0$  forma um poliedro limitado, fechado e não vazio definido como:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{R}^n : \beta_j^\top x + \gamma_j \leq 0, j = 1, \dots, \text{NC}\} \quad (76)$$

Seja  $B(x_c, \sigma^*) = \{x_c + d : \|d\| \leq \sigma^*\}$  a maior esfera inscrita em  $\mathcal{P}$  onde  $x_c$  e  $\sigma^*$  são o centro da esfera e o raio, respectivamente. O ponto  $x_c$  é também conhecido como centro de Chebyshev de  $\mathcal{P}$ . Portanto, o maior círculo  $B$  inscrito no poliedro pode ser definido pela equação (77) e a interpretação geométrica é ilustrada na Figura 11.

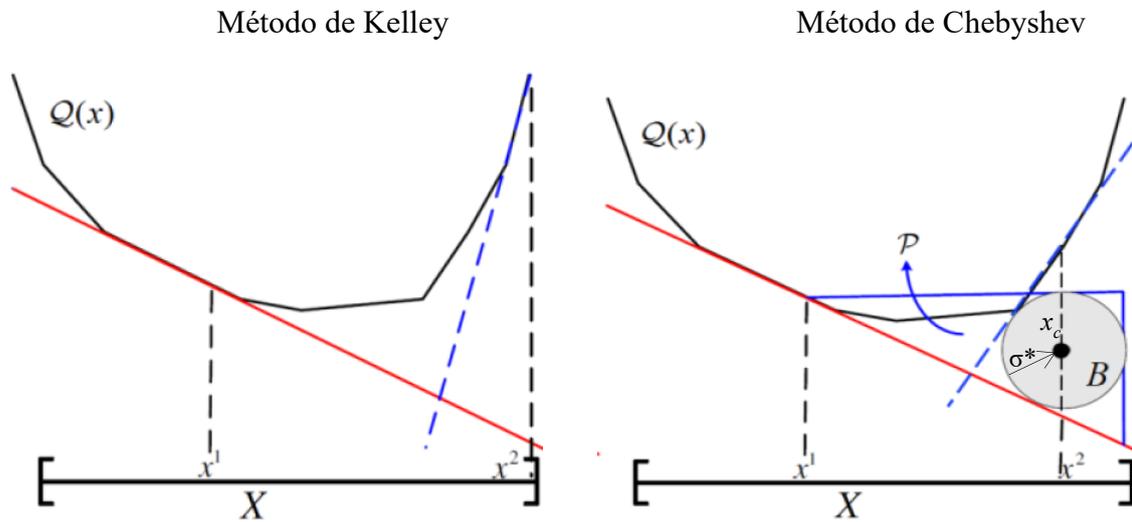
$$\max_{x, \sigma} \sigma \quad \text{s.a: } \beta_j^\top x + \gamma_j + \sigma \|\beta_j\| \leq 0, j = 1, \dots, \text{NC}, \quad (77)$$

onde  $\|\beta_j\|$  é a normal euclidiana.

A Figura 11 mostra uma comparação entre os pontos experimentais obtidos pelo método de Kelley e o por centros de Chebyshev. Considere que  $\mathcal{Q}(x)$  é a função aproximada através de planos cortantes a cada iteração. O método de Kelley obtém o ponto experimental ao minimizar a função objetivo de forma limitada ao máximo de  $X$ , por outro lado, o método de

Chebyshev define o ponto experimental pelo centro de  $B$  inscrito em  $\mathcal{P}$  fato que constrói o próximo corte em outra região.

Figura 11 – Ponto ótimo por Método de Kelley e Ponto ótimo por Chebyshev (77).



Fonte: adaptado de (BELTRÁN et al., 2020).

Em (ELZINGA; MOORE, 1975) é proposto que a definição do ponto ótimo com planos cortantes com os centros de Chebyshev do poliedro:

$$\mathcal{P}(\bar{z}) := \left\{ (x, \alpha) \in \mathfrak{R}^{n+1} \left| \begin{array}{l} \alpha \leq \bar{z}, \\ \beta_j^\top x + \gamma_j \leq \alpha, \quad j = 1, \dots, \text{NC} \end{array} \right. \right\}, \quad (78)$$

onde  $\bar{z}$  é o custo superior da FCF (73) dado o  $j$ -ésimo corte incluído no problema. Assim, matematicamente, o PL do subproblema (78) pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \max_{x, \sigma, \alpha} \quad & \sigma \\ \text{s.a.} \quad & \sigma + \alpha \leq \bar{z}, \\ & \beta_j x + \gamma_j + \sigma \|(1, \beta_j)\| \leq \alpha, \quad j = 1, \dots, \text{NC}, \\ & x \in X, \alpha \in \mathfrak{R}, \sigma \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \quad (79)$$

De forma semelhante tal qual neste trabalho, o método proposto em (ELZINGA; MOORE, 1975) tem sido explorado por outros autores. Por exemplo, (OUOROU, 2009) a metodologia é aplicada na perspectiva dos métodos dos feixes. (DE OLIVEIRA, 2017) propôs uma extensão para resolver problemas convexos não suaves. Dado o contexto de ambos os trabalhos citados, os métodos propostos são capazes de calcular um custo superior válido  $\bar{z}$  por se tratar de problemas de dois estágios.

Contudo, na PDDE não é possível calcular de forma precisa um custo superior determinístico. Geralmente, apenas uma estimativa  $\bar{z}$  por ser calculada, uma vez que este valor depende do número de cenários amostrados e, portanto, este valor pode ser menor que o custo inferior ao longo das iterações. Quando a diferença entre os custos é negativa o poliedro se torna um conjunto vazio, como consequência, o método dos CC não é bem definido, assim, essa questão torna proibitiva a aplicação direta de (ELZINGA; MOORE, 1975) em problemas estocásticos multiestágio. Note que, se  $\bar{z} < \min_{x \in X} \alpha$ , então  $\mathcal{P}(\bar{z})$  é um conjunto vazio e assim CC não é bem definido. No entanto, é proposto uma readaptação do trabalho de (ELZINGA; MOORE, 1975) para lidar com problemas multiestágio, esta é uma das contribuições deste trabalho e será melhor detalhada a seguir.

A equação (79) pode ser transformada em problema de minimização. Assim, o novo problema linear é formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_t, \alpha_{t+1}} c_t x_t + \alpha_{t+1} \\
 & \text{s.a.} \quad A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1}. \\
 & \quad \beta_{j,t+1} x_t + \gamma_{j,t+1} + w_t \left\| \left( 1, c_t + \beta_{j,t+1} \right) \right\| \leq \alpha_{t+1}, \quad j = 1, \dots, \text{NC}_t. \\
 & \quad \bar{z}_s(\xi_{[t]}) - (c_t x_t + \alpha_{t+1}) \leq w_t. \\
 & \quad x_t \geq 0, w_t \geq 0, \alpha_{t+1} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{80}$$

É proposto para usar a PDDE combinada com CC manter a etapa *backward* idêntica à da CL e modificar apenas a etapa *forward* pela substituição do PL (73) por outro que inclui a nova definição dos centros de Chebyshev. Como pode ser observado no subproblema (80), apenas uma variável e uma restrição são adicionadas no problema mestre em comparação com (73) da CL, assim o peso computacional adicionado ao problema é ínfimo.

O raio  $w_t$  é muito sensível a variabilidade do custo superior  $\bar{z}_s(\xi_{[t]})$  o qual experiências práticas (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011; PEREIRA; PINTO, 1991; SHAPIRO, 2011) mostram que não é tarefa trivial estimar o limite superior em problemas

estocásticos multiestágio de grande porte uma vez que uma enorme quantidade de PLs devem ser resolvidos a cada iteração  $k$  e, apenas uma estimativa pobre pode ser obtida na maioria dos casos. Portanto, os requisitos para obter um custo superior é uma desvantagem em oposição a etapa *forward* da CL. No entanto, como destacado em (BELTRÁN et al., 2020), uma alternativa simples e sem custo computacional para sobrepor essa desvantagem é tornar fixo o raio que inscreve a esfera, o qual, matematicamente, significa substituir a restrição  $\bar{z}_s(\xi_{[t]}) - (c_t x_t + \alpha_{t+1}) \leq w_t$  contida em (80) por  $\bar{\sigma}_t \leq w_t$  onde  $\bar{\sigma} \geq 0$ . Com esta notação, a restrição  $\bar{\sigma}_t \leq w_t$  é sempre ativa. Assim, a equação (80) é reescrita retirando a decisão da variável  $w_t$ , como mostrado em (81) e desta forma pode ser utilizada em um problema multi estágio.

$$\begin{aligned}
 \min_{x_t \geq 0, \alpha_{t+1} \geq 0} \quad & c_t^\top x_t + \alpha_{t+1} \\
 \text{s.a.} \quad & A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1} \\
 & \beta_{j,t+1} x_t + \gamma_{j,t+1} + \bar{\sigma}_t \left\| (1, c_t + \beta_{j,t+1}) \right\| \leq \alpha_{t+1}, j = 1, \dots, \text{NC}_t.
 \end{aligned} \tag{81}$$

O parâmetro  $\bar{\sigma}_t$  pode ser atualizado com várias heurísticas desejadas, o qual deve garantir que  $\bar{\sigma}_t \rightarrow 0$  se o número de iterações ( $k$ ) tende a zero e  $\bar{\sigma}_t = 0$  na convergência do método. Abaixo é apresentado o algoritmo da CC:

### 3.1.1 Algoritmo da PDDE com Centros de Chebyshev – CC

Algoritmo 2: PDDE com Centros de Chebyshev:

- 1: Inicialização: Idêntico a Inicialização do algoritmo 1 – PDDE.  
Definir regra de atualização de  $\bar{\sigma}_t$  e definir  $\bar{\sigma}_t = 0$ .
- 2: enquanto critério de parada = falso faça
- 3:   Amostrar cenários  $\xi_{[t]}$ ,  $s=1, \dots, NS_k$
- 4:   **(Etapa Forward)**
- 5:    $\bar{x}_1 = \text{argmin}$  (74) e obter  $\underline{z}_k$ .
- 6:   **para**  $t=2, \dots, T$  **faça**
- 7:     **para**  $s=1, \dots, NS_k$  **faça**
- 8:        $x_{st} = \text{argmin}$  (81) com  $(\xi_{st}, \bar{x}_{s,t-1})$  e atualização os cortes com  $\bar{\sigma}_t$  e a normal  $\|(1, c_t + \beta_{j,t+1})\|$ .
- 9:     **fim para**
- 10:   **fim para**
- 11:   **(Atualização do custo superior)**
- 12:   Calcular  $\bar{z}_k$  de acordo com (75)
- 13:   **(Etapa Backward)**
- ...       Idêntico a Etapa Backward do algoritmo 1 – PDDE
- 18:
- 19:   **(Chegar convergência)**
- 20:   Checar critério de convergência.
- 21:    $k \leftarrow k + 1$
- 22: **fim enquanto**

Na etapa *forward*, um novo PL deve ser resolvido ao invés de (73). Neste novo PL (81) cada corte recebe uma atualização da normal euclidiana do custo da função objetivo e dos multiplicadores de Lagrange dos cortes. Assim, em termos de tempo computacional a atualização a cada iteração se torna irrelevante no processo iterativo. Adicionalmente, destaca-se que, como já discutido anteriormente, apenas uma variável ou restrição precisa ser incluída no modelo, fato que torna peso computacional do PL praticamente idêntico quando comparado com a CL.

Além disso, ressalta-se que no passo 8 do Algoritmo 2 deve ser implementado uma métrica para atualização do raio da esfera de Chebyshev. Nas outras partes a CL e a CC são idênticas. É importante destacar que uma heurística de atualização do raio será explorada no capítulo de resultados. Ressalta-se que, a atualização do raio não é obrigatória no passo 8. A

depende da estratégia escolhida este passo pode ser dado em outro ponto do algoritmo. Por exemplo, se a estratégia for adotar diferentes raios em cada estágio o Algoritmo 2 se modificaria.

A próxima seção contém uma aplicação prática da metodologia CC em algoritmos de decomposição tal qual descritas ao longo desta seção.

### 3.1.2 Aplicação prática dos Centros de Chebyshev

Nesta seção, é solucionado um problema hidrotérmico via Programação Dinâmica Dual Determinística (PDDD) a qual pode ser considerado um caso particular da PDDE, onde apenas um cenário é considerado e  $NA_t = 1$ . Desta forma, é possível obter a solução exata do problema proposto. Como já exposto anteriormente a PDDD-CL são calculadas as aproximações que compõem a FCF como visto em (KELLEY, 1960) ou seção 3.1, e uma variante chamada de CC, a qual usa Centros de Chebyshev. Depois disso, é feita uma breve discussão sobre a nova metodologia.

Para ilustrar o impacto causado na metodologia CC no problema hidrotérmico de planejamento energético da operação, são apresentados dois casos: (i) usando a metodologia CC e (ii) usando a metodologia CL. Para ambos os modelos a principal diferença entre eles é destacada a seguir através de um exemplo prático:

**Exemplo 3.1:** Considere o sistema reduzido de barra única onde a demanda a ser atendida é ( $D=42$  MW). As fontes de geração são 1 usina hidrelétrica ( $ph$ ) e sete usinas térmicas ( $pt$ ). O horizonte de planejamento tem decisão mensal e  $T=5$ , a afluência é conhecida em cada estágio e representada no vetor  $y_t = \{386, 178, 336, 147, 90\}$  m<sup>3</sup>/s. Os demais dados relevantes sobre a hidrelétrica são expostos na e sobre as térmicas na Tabela 2. A taxa de desconto utilizada foi de 12% ao ano.

Tabela 1 – Dados do parque hidráulico.

$V^{\max} - V^{\min}$ (hm <sup>3</sup> )	$v_0$ (hm <sup>3</sup> )	$Q^{\max}$ (hm <sup>3</sup> )	PR(MW/m <sup>3</sup> /s)
792-120	403	220	0,17

Tabela 2 – Dados do parque térmicas.

$f$	1	2	3	4	5	6	7
$PT^{\max}$ [MW]	3	1	1	1	1	1	2

CT [R\$/MW]	30	50	75	125	200	250	300
-------------	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Como já exposto anteriormente, para aplicar CC, apenas na etapa *forward*, é necessário criar uma variável extra ( $w$ ) e uma restrição auxiliar para controlar seu valor. O valor  $\bar{\sigma}$  para esta nova variável deve ser calculado através do processo iterativo. Além do mais, a cada novo corte obtido na *backward* se deve atualizar o valor do raio do caminho central através da Norma Euclidiana. O PL do problema descrito anteriormente é traduzido em (82) e possui no total 12 variáveis (i.e. 7 térmicas, 1 déficit, 3 referentes a hidrelétrica, 1 Chebyshev e uma da FCF). Portanto, assim é o subproblema usado na *forward* usando a metodologia CC. Uma das grandes vantagens desse método, como destacado no capítulo anterior, é pela simplicidade de se adaptar ao modelo CL, neste caso, basta atribuir no subproblema (82)  $w_t=0$  que o problema é convertido para a metodologia CL.

$$\begin{aligned}
 z_t = \min \quad & 30 \cdot pt_1 + 35 \cdot pt_2 + 75 \cdot pt_3 + 125 \cdot pt_4 + 200 \cdot pt_5 \\
 & 250 \cdot pt_6 + 300 \cdot pt_7 + 500 \cdot d + 0,99 \cdot \alpha_{t+1} \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \sum_{i=1}^{NT} pt_i + d + 0,1782 \cdot q = 42, \\
 & v_t + 2,59 \cdot (q + s) = v_{t+1} + y, \\
 & w \geq \bar{\sigma}^k, \\
 & \alpha_{t+1} - \left\| (1, c_{it} + \pi_{j,t+1}) \right\| \cdot w \geq B_{j,t+1} + \pi_{j,t+1} \cdot v_t, \quad j = 1, \dots, NC_t, \\
 & V^{\max} \leq v_{t+1} \leq V^{\min}, \quad 0 \leq q \leq Q^{\max}, \quad 0 \leq s \leq \infty, \quad \infty \leq w, \\
 & 0 \leq pt_i \leq [3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2], \quad i = 1, \dots, NT,
 \end{aligned} \tag{82}$$

onde  $\bar{\sigma}^k$  é o raio estimado da iteração  $k$ ,  $B_{j,t+1}$  é o coeficiente linear do  $j$ -ésimo corte do estágio  $t=t+1$ ,  $\pi_{j,t+1}$  é o coeficiente angular do  $j$ -ésimo do estágio  $t=t+1$  e  $CT_{it}$  é o custo de geração da térmica  $i$  no estágio  $t=t$ . No exemplo, é atribuído como heurística de atualização do raio tal qual mostrado na equação (83).

$$\bar{\sigma}^k = \max(0, \Delta z) \cdot K_{CC}; \quad \Delta z = \left( \bar{z} - z_1 \right) / \bar{z} \tag{83}$$

$$\bar{z} = \sum_{t=1}^T z_t - \alpha_{t+1} \tag{84}$$

onde  $K_{CC} = 1$ ,  $\bar{z}$  é o custo superior e  $z_1$  é o custo inferior.

Por fim, durante o processo iterativo, por cada corte calculado, o coeficiente que multiplica o raio é alterado conforme a equação seguinte:

$$\pi w_{jt}(CT, \pi_j) = \|(1, CT + \pi_j)\|, \tag{85}$$

onde o vetor  $CT = [30 \ 50 \ 75 \ 125 \ 150 \ 250 \ 300]$  envolve os custos de geração térmica no estágio  $t$  e  $\pi$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange relacionados a restrição de balanço hídrico. Ademais, o algoritmo converge quando o custo total de operação  $\bar{z}$  é próximo o suficiente ao custo de otimização do PL de primeiro estágio ( $z_1$ ) (i.e  $\Delta z = \bar{z} - z_1 = 0$ ). Dentro desse contexto, a primeira iteração dos casos CC e CL é idêntica, assim, os principais resultados da *forward* em  $k=1$  é exposto na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultado da etapa *forward* para  $k=1$ .

$t$	<i>forward</i>	$v$
1	$z_t = 125,32$ [R\$]	$v_t = 120$ [hm <sup>3</sup> ]
2	$z_t = 1897,69$ [R\$]	$v_t = 120$ [hm <sup>3</sup> ]
3	$z_t = 125,32$ [R\$]	$v_t = 120$ [hm <sup>3</sup> ]
4	$z_t = 4660,82$ [R\$]	$v_t = 120$ [hm <sup>3</sup> ]

Como não há diferença entre as duas metodologias na *backward*, os cortes para  $k=1$  serão idênticos e estão expostos nas equações (86) - (89) em ordem crescente de estágio.

$$34,40 \cdot v_1 + \alpha_2 \geq 8122,7 \tag{86}$$

$$34,40 \cdot v_2 + \alpha_3 \geq 6206,2 \tag{87}$$

$$34,38 \cdot v_3 + \alpha_4 \geq 18437 \tag{88}$$

$$34,38 \cdot v_4 + \alpha_5 \geq 13868 \tag{89}$$

Na primeira iteração, obtém-se  $\bar{z} = 16038$  por meio da equação (84). A partir da segunda iteração, a etapa *forward* é diferente em ambas as metodologias, assim, a tabela abaixo apresenta a sequência de passos necessárias para realizar a iteração  $k=2$  para a metodologia CC.

Tabela 4 – Etapa *forward* para  $k=2$  para a metodologia CC.

$k=2$
<i>forward</i>
<p><i>cálculo do custo inferior:</i> Para <math>t=1</math> resolver (82) com <math>v_0 = 667,02</math> [hm<sup>3</sup>] e <math>y_{h_t} = 386</math> [m<sup>3</sup>/s] incluindo a restrição do corte (86) obtém-se.</p> <p><math>z_1 = 125,32</math></p> <p><i>estimação de <math>\bar{\sigma}</math>:</i> Substituindo <math>\bar{z} = 16038</math>, <math>z_1 = 125,32</math> na equação (83) obtém-se.</p> <p><math>\bar{\sigma} = 0,99</math></p>
$t=1$
<p><i>cálculo do raio de Chebshev e atualização do corte (86):</i> Substituindo CT e <math>\pi = 34,40</math> em (85) encontra-se o novo valor do raio <math>\pi w_t = 684,3</math>. Assim, o corte é atualizado com este novo valor:</p> $34,40.v_1 + \alpha_2 - 684,3.w_t \geq 8122,7 \quad (90)$ <p>Resolve-se o PL (82) incluindo a restrição (90) com os pontos iniciais <math>v_0 = 667,02</math> hm<sup>3</sup> <math>y_1 = 386</math> m<sup>3</sup>/s, <math>\bar{\sigma} = 0,99</math> para obter custo total do PL e as variáveis de volume e custo futuro:</p> <p style="text-align: center;"><math>z_1 = \text{R\\$}125,32</math>                      <math>v_1 = 255,95</math> hm<sup>3</sup>                      <math>\alpha_2 = \text{R\\$} 0,00</math></p>
$t=2$
<p><i>cálculo do raio de Chebshev e atualização do corte (87):</i> Substituindo <math>c</math> e <math>\pi = 34,06</math> em (85) encontra-se o novo valor do raio <math>\pi w_t = 684,3</math>. Assim, o corte é atualizado com este novo valor</p> $34,06.v_2 + \alpha_3 - 684,3.w_t \geq 6206,2 \quad (91)$ <p>Resolve-se o PL (82) incluindo a restrição (91) com <math>v_1 = 255,95</math> hm<sup>3</sup>, <math>y_2 = 178,85</math> m<sup>3</sup>/s e <math>\bar{\sigma} = 0,99</math> para obter:</p> <p style="text-align: center;"><math>z_2 = \text{R\\$} 618,22</math>                      <math>v_2 = 202,12</math> hm<sup>3</sup>                      <math>\alpha_3 = \text{R\\$} 0,00</math></p>
$t=3$
<p><i>cálculo do raio de Chebshev e atualização do corte (88):</i> Substituindo <math>c</math> e <math>\pi = 34,38</math> em (85) encontra-se o novo valor do raio <math>\pi w_t = 684,3</math>. Assim, o corte é atualizado com esta nova parcela</p> $34,38.v_3 + \alpha_4 - 684,3.w_t \geq 18437 \quad (92)$ <p>Resolve-se o PL (82) incluindo a restrição (92) com <math>v_2 = 202,12</math> hm<sup>3</sup>, <math>y_3 = 336,80</math> m<sup>3</sup>/s e <math>\bar{\sigma} = 0,99</math> para obter:</p> <p style="text-align: center;"><math>z_3 = \text{R\\$} 585,19</math>                      <math>v_3 = 555,90</math> hm<sup>3</sup>                      <math>\alpha_4 = \text{R\\$}0,00</math></p>
$t=4$

cálculo do raio de Chebyshev e atualização do corte (89): Substituindo  $c$  e  $\pi = 34,38$  em (85) encontra-se o novo valor do raio  $\pi w_t = 684,3$ . Assim, o corte é atualizado com esta nova parcela

$$34,38.v_4 + \alpha_5 - 684,3.w_t \geq 13868 \quad (93)$$

Resolve-se o PL (82) incluindo a restrição (93) com  $v_3 = 555,90 \text{ hm}^3$   $y_4 = 147,78 \text{ m}^3/\text{s}$  e  $\bar{\sigma} = 0,99$  para obter:

$$z_4 = \text{R\$}640,78 \quad v_4 = 423,02 \text{ hm}^3 \quad \alpha_5 = \text{R\$}0,00$$

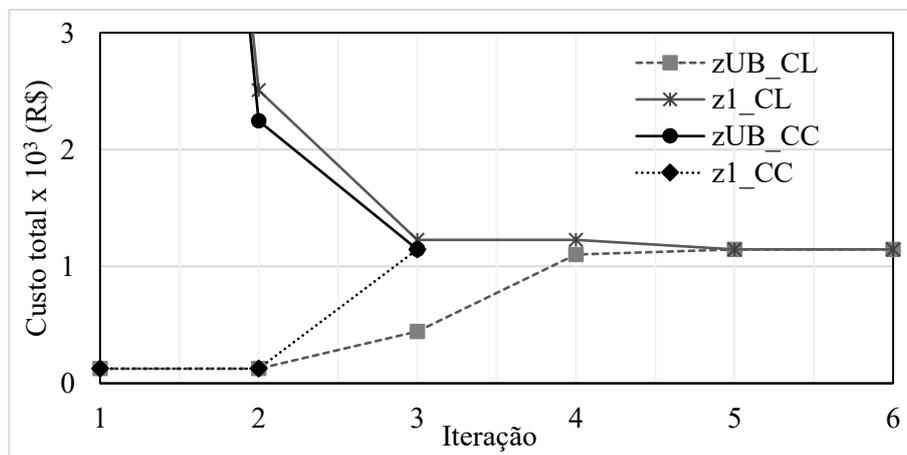
$$t=5$$

Resolve-se o PL (82) com  $v_4 = 423,02 \text{ hm}^3$   $y_5 = 90,49 \text{ m}^3/\text{s}$

$$z_5 = \text{R\$}322,74 \quad v_4 = 120 \text{ hm}^3 \quad r_{t+1} = \text{R\$}0,00$$

É válido lembrar que, a etapa *backward* é idêntica em ambas as estratégias. Neste exemplo, a CC levou três iterações para atingir a convergência enquanto que, o mesmo problema com CL teve que levar cinco iterações. A Figura 12 mostra a evolução do custo inferior ( $z1_{xx}$ ) e superior ( $zUB_{xx}$ ) ao longo de todas as iterações para ambas as metodologias.

Figura 12 – Excursão dos custos superiores e inferiores das metodologias CC e CL.



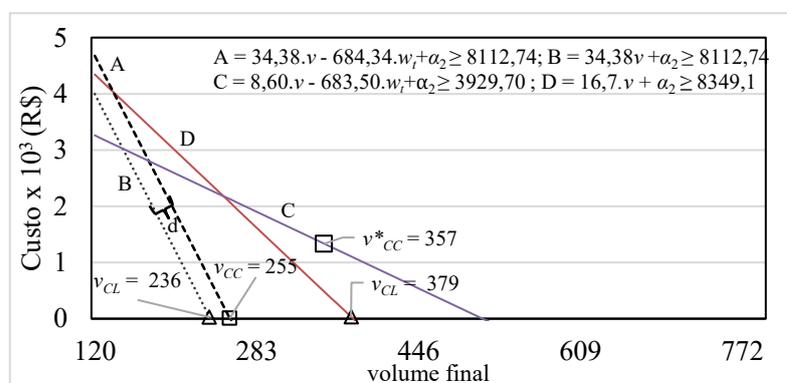
Nota-se que a convergência neste caso é dada quando o custo inferior e o superior possuem o mesmo valor. O fato de CC obter a convergência duas iterações antes do CL é o efeito do coeficiente  $\bar{\sigma}$  colocado na *forward* a qual impulsiona as decisões para pontos mais próximos a região de solução ótima do problema.

Para ilustrar a discussão acima, considere o início da iteração 2. Os termos são  $\bar{\sigma} = 0,99$ ,  $\pi v_2 = 34,4$  e  $CT=[30 \ 50 \ 75 \ 125 \ 150 \ 250 \ 300]$ . A atualização do raio de Chebyshev no corte em  $t=1$  é calculado por (85). Depois da atualização, os coeficientes são calculados para serem incluídos no modelo CC:

$$34,4.v_1 + \alpha_2 - 684,3.w_t \geq 8122,7 \tag{94}$$

O impacto causado pela FCF sobre o efeito de  $\bar{\sigma}$  pode ser visto em Figura 13. Na figura, as equações A e B são os cortes para  $k=2$  e, C e D indicam os cortes em  $k=3$  para os casos CC e CL respectivamente. Em  $k=2$ , o produto do raio de Chebyshev e o coeficiente  $w_t$  produz a distância entre as retas A e B de  $d=R\$679,5$  como observado na figura. Este fato, é capaz de mudar a decisão dado pela CL  $v_{CL} = 236 \text{ hm}^3$  para  $v_{CC} = 256 \text{ hm}^3$  alcançado com CC. Note que, a inclusão do termo  $\|(1, CT_t + \pi_{j,t+1})\| \cdot \bar{\sigma}$  no corte altera apenas o termo independente  $\alpha_{t+1}$ , assim, a inclinação do corte  $\pi_{j,t+1}$  permanece inalterada.

Figura 13 – FCF da terceira iteração para  $t=1$ .



Um comportamento similar é observado nos outros estágios, onde o termo  $\bar{\sigma}$  na FCF muda a decisão do problema. Na Tabela 5 observa-se todas as decisões.

Tabela 5 – Decisões da segunda iteração por estágio.

$t$	CL $v_t$ (hm³)	CC $v_t$ (hm³)
1	236,2	255,9
2	182,1	202,3
3	536,1	555,9

---

4	403,2	423
---	-------	-----

---

Note que, a tabela acima indica que existe uma diferença entre as duas metodologias onde as decisões de CC foram alteradas para outra região viável do problema. Assim, a partir de  $k=2$  CC e CL seguem diferentes caminhos até a convergência. Portanto, os novos cortes calculados na *backward* tem diferença na inclinação.

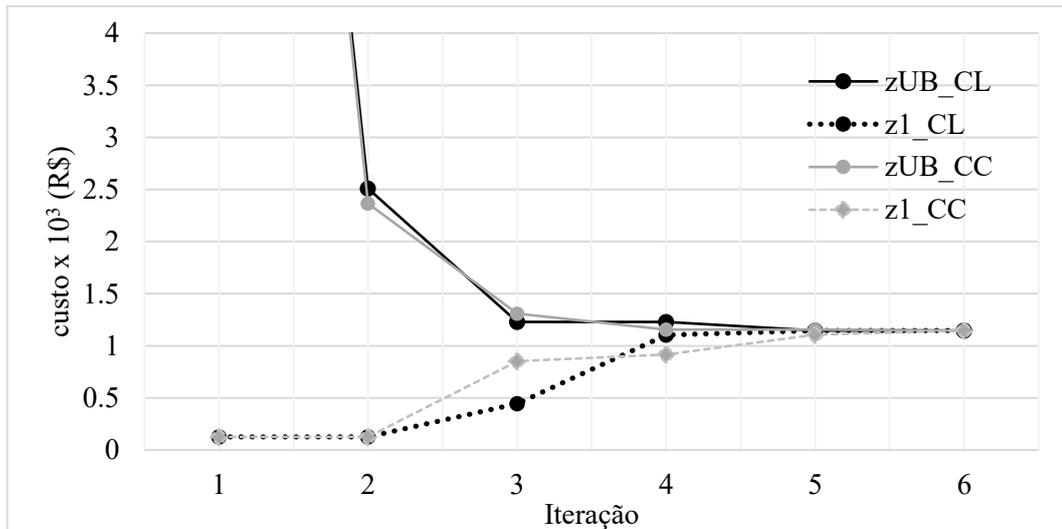
Em  $k=3$ , a aproximação do ponto ótimo força a diferença dos custos entre  $\bar{z}$  e  $z_1$  diminuir e, como consequência, a atualização do termo ficam em  $\bar{\sigma} = 0,48$ , assim, o corte no modelo CC torna-se:

$$8,6.v_2 + \alpha_3 - 684,3.w_t \geq 3.3928,7 \quad (95)$$

A Figura 13 mostra a função de custo futuro para os casos CL e CC. Como destacado anteriormente, a inclinação dos cortes na terceira iteração são diferentes. Nota-se que a metodologia CC atinge o ponto ótimo do problema  $v_{cc}=357 \text{ hm}^3$  enquanto CL precisa continuar a iteração pois atinge outro ponto viável  $v_{cl}=379 \text{ hm}^3$ .

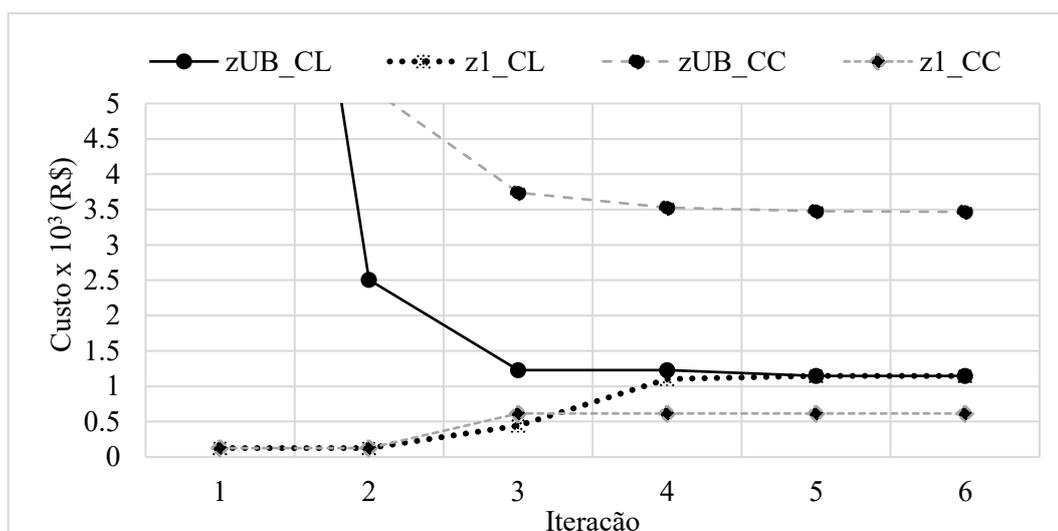
Na prática, o objetivo principal dos centros de Chebyshev é procurar uma nova decisão usando a máxima esfera inscrita no conjunto de cortes que forma o poliedro convexo, desta maneira, a metodologia é eficiente em acelerar o processo de convergência. Este objetivo foi atingido com o exemplo acima, no entanto, CC tem alguns parâmetros que devem ser calibrados e quando expandidos para um sistema de grande pode ser muito difícil encontrar esses termos para obter uma resposta satisfatória do algoritmo. No exemplo abaixo, esses pontos são discutidos de forma mais resumida onde apenas os gráficos de excursão do custo inferior e superior são mostrados.

Exemplo 3.2: Assumindo o mesmo sistema usado no Exemplo 3.1 e repetindo as execuções. Contudo, no caso do CC, é mudado apenas a constante  $K_{cc} = 1$  para  $K_{cc} = 0.5$ . A Figura 14 mostra a evolução do custo superior e inferior para ambos os casos CC e CL. Neste caso, ambos os métodos apresentam convergência baixa, isto é, 6 iterações para atingir o ponto ótimo.

Figura 14 – Evolução do custo superior e inferior para CC e CL. Com CC usando  $K_{CC}=0,5$ .

Mesmo que a metodologia CC não mostra um ganho significativo no número de iterações, neste caso, é evidente que os caminhos feitos por ambos os casos até a convergência são diferentes. Por exemplo, em  $k=3$   $z1\_CC = R\$ 855,00$  enquanto  $z1\_CL = R\$ 444,00$ . Esse fato indica que existiram diferenças entre as decisões que foram tomadas na *forward*, assim a metodologia CC atende a expectativa de alterar as decisões em cada PL.

Por fim, dependendo do termo  $K_{CC}$  adotado a metodologia CC pode ser prejudicial ao processo de convergência alcançando um maior número de iterações para atingir tal objetivo. Este parâmetro, se bem ajustado, pode melhorar a velocidade de convergência, portanto, encontrar um  $K_{CC}$  não é uma tarefa trivial em um problema de grande escala. Experiências práticas, para o problema pequeno contido neste exemplo, os limites de  $1 \leq K_{CC} \leq 1000$  tem mostrado efetividade para acelerar a convergência do método. É importante lembrar que, adotar valores para  $K_{CC}$  implica em modificar o tamanho do raio da esfera inscrita no poliedro convexo. Neste contexto, experiências práticas mostram que valores muito altos de  $K_{CC}$  devem ser evitados, uma vez que, o método de solução fica com um comportamento indesejável. Para ilustrar esse comportamento a Figura 15 apresenta a evolução do custo superior e inferior usando um  $K_{CC} = 10k$  em CC. Note que, a solução fica presa infinitamente na iteração  $k=3$  com  $z1\_CC = R\$ 614,00$  e, o custo superior tem irrelevantes decréscimo durante o processo iterativo. Em outras palavras, desde  $k=3$ , o valor elevado do raio força a etapa *forward* calcular a mesma decisão. Isto significa que o método pode levar a soluções não ótimas, ou até mesmo ineficazes, a depender a heurística utilizada na atualização do raio.

Figura 15 – Evolução dos custos inferiores e superiores para CC/CL. Em CC usando  $K_{cc}=10k$ .

Adicionalmente, a heurística utilizada para atualizar o raio, dada pela equação (83), usada neste exemplo pequeno também tem influência na velocidade do processo de convergência. Em problemas pequenos, onde é possível calcular de forma exata o limite inferior e superior faz sentido usar a diferença entre essas duas grandezas como estratégia de atualização do raio. Por outro lado, em problemas de grande porte não é trivial encontrar uma heurística que produza mudança nas decisões na *forward*. No capítulo de resultados é apresentado algumas formas eficientes de mudar o raio em problemas de grande escala.

### 3.2 A DECOMPOSIÇÃO REGULARIZADA MULTIESTAGIO – DR

Este método é proposto por (ASAMOV; POWELL, 2018) é baseado em técnicas eficientes para solucionar problemas quadráticos afim de regularizar problemas de otimização estocásticos de alta dimensionalidade. O método DR, estende uma ideia bem conhecida na comunidade científica de otimização não-diferenciável apresentada em (RUSZCZYNSKI, 1995) para um caso de dois estágios, no entanto, a grande contribuição de (ASAMOV; POWELL, 2018) foi ajustar o algoritmo para o caso multiestágio. Segundo o autor, o método pode levar a uma convergência de forma mais acelerada quando aplicado a problemas estocásticos multiestágio de grande porte, devido a redução da oscilação das soluções sub-ótimas em torno da distância dos vértices da região viável onde a adição de novos planos cortantes faz pouco efeito. De forma similar ao método CC, o método DR altera apenas a etapa *forward* deixando a etapa *backward* idêntica a PDDE.

Uma tentativa de acelerar a convergência da PDDE através de regularização foi proposta em (ASAMOV; POWELL, 2018):

$$\begin{aligned} \min_{x_t \geq 0, \alpha_{t+1} \geq 0} \quad & c_t x_t + \alpha_{t+1} + \frac{\upsilon^k}{2} \langle x_t - x_t^{k-1}, G_t (x_t - x_t^{k-1}) \rangle \\ \text{s.a.} \quad & A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1}, \\ & \beta_{j,t+1} x_t + \gamma_{j,t+1} \leq \alpha_{t+1}, j = 1, \dots, \text{NC}_t. \end{aligned} \quad (96)$$

onde  $\upsilon^k$  é um coeficiente de penalidade tal que  $\upsilon^k \geq 0$  e  $\lim_{\upsilon \rightarrow \infty} \upsilon^k = 0$ , em outras palavras, na convergência este parâmetro deve ser nulo.  $G_t \geq 0$  é uma matriz semi definida positiva. Note que, (96) comparando com o PL da etapa *forward* da PDDE (73) não apresenta mudanças significativas, exceto porquê (96) trata-se de um problema quadrático adicionando uma terceira parcela. No geral, não é trivial encontrar uma sequência de regularização que leva a convergência de forma mais rápida possível. Contudo, se considera o ajuste de uma série de parâmetros que podem auxiliar nesta tarefa. O autor sugere utilizar uma sequência geométrica para construir uma sequência de regularização. Dado  $\upsilon^0 > 0$  e  $a \in (0,1)$ , é definido que:

$$pg = a\upsilon^{k-1}, \text{ se } k > 0. \quad (97)$$

Neste caso, é necessário atribuir um valor inicial aos parâmetros  $\upsilon^0$  e  $a$ . Para tanto, uma estratégia para se ganhar conhecimento sobre quais parâmetros trariam importantes ganhos na regularização é resolver os problemas em uma escala menor com inúmeros pares  $(\upsilon^0, a)$  e assim analisar quais casos foram mais eficientes na regularização. Em (ASAMOV; POWELL, 2018) é mostrado que para calibrar os parâmetros  $(\upsilon^0, a)$  do problema dado, testes foram realizados com um sistema reduzido. O problema original possui 50 aberturas, no entanto, o problema foi executado com 25 aberturas e assim foi possível verificar os parâmetros mais eficientes. Os parâmetros mais eficientes encontrados nas simulações desenvolvidas neste trabalho são mostrados no Capítulo 5 de resultados.

Como base no mesmo sistema teste apresentado na seção 3.1.2, o QP na etapa *forward* para este pequeno problema é:

$$\begin{aligned}
z_t = \min & \quad 30 \cdot pt_1 + 35 \cdot pt_2 + 75 \cdot pt_3 + 125 \cdot pt_4 + 200 \cdot pt_5 + \\
& \quad 250 \cdot pt_6 + 300 \cdot pt_7 + 500 \cdot d + 0,99 \cdot \alpha_{t+1} + \\
& \quad \frac{v^k}{2} \cdot (v_t - V_t^{k-1})^2 \\
\text{s.a.:} & \\
& \quad \sum_{i=1}^{NP} pt_i + d + 0,1782 \cdot q = 42. \\
& \quad v_t + 2,59 \cdot (q + s) = v_{t-1} + y. \\
& \quad \alpha_{t+1} \geq \gamma_{jt+1} + \pi_{jt+1} \cdot v_t, \quad j = 1, \dots, NC_t. \\
& \quad V^{\max} \leq v_{t+1} \leq V^{\min}, \quad 0 \leq q \leq Q^{\max}, \quad 0 \leq s \leq \infty, \\
& \quad 0 \leq pt_i \leq [3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2], \quad i = 1, \dots, NT,
\end{aligned} \tag{98}$$

Observa-se que a única diferença entre o QP (98) e um PL da metodologia clássica, é a adição do último termo na função objetivo. Nota-se que  $V^{k-1}$  é o valor da solução do QP na iteração anterior. Nota-se que, pode-se utilizar outro valor em  $V^{k-1}$ , como por exemplo, o valor nulo ou o valor máximo da variável de volume.

A seguir é mostrado o algoritmo da PDDE com a Decomposição regularizada multiestagio.

### 3.2.1 Algoritmo da Decomposição Regularizada Multiestágio

Algoritmo 3: PDDE com Decomposição Regularizada

- 1: Inicialização: Idêntico a Inicialização do algoritmo 1 – PDDE.  
Definir regra para cálculo de  $v^k$
- 2: **enquanto** critério de parada = falso **faça**
- 3:   Amostrar cenários  $\xi_{[t]}, s=1, \dots, NS_k$
- 4:   *(Etapa Forward)*
- 5:    $\bar{x}_1 = \operatorname{argmin} (74)$  e obter  $\underline{z}_k$ .
- 6:   **para**  $t=2, \dots, T$  **faça**
- 7:     **para**  $s=1, \dots, NS_k$  **faça**
- 8:        $x_{st} = \operatorname{argmin} (96)$  com  $(\xi_{st}, \bar{x}_{s,t-1})$  e  $v^k$  de acordo com alguma regra.
- 9:     **fim para**
- 10:   **fim para**
- 11:   *(Atualização do custo superior)*
- 12:   Calcular  $\bar{z}_k$  de acordo com (75)
- 13:   *(Etapa Backward)*
- ...       Idêntico a Etapa Backward do algoritmo 1 – PDDE
- 18:
- 19:   *(Chegar convergência)*
- 20:   Checar critério de convergência.
- 21:    $k \leftarrow k + 1$
- 22: **fim enquanto**

### 3.3 O MÉTODO DA REGULARIZAÇÃO DE NÍVEL COM SOLUÇÃO NORMAL – NL

Esta seção apresenta uma breve discussão dos principais pontos teóricos do método de regularização baseado em soluções normais documentado em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019). O principal objetivo deste método é atuar na estabilização das variáveis de estado durante o processo iterativo no âmbito do problema estocástico multiestágio. O algoritmo proposto combina ideias da perturbação finita aplicada a funções convexas (FERRIS; MANGASARIAN, 1991) e os métodos de feixes (LEMARECHAL, 1986) para regularizar a etapa *forward* da PDDE. Assim como no método com CC, a etapa *backward* é idêntica a CL.

O NL será mais bem discutido em seções a frente, no entanto, como este método é baseado na perturbação finita de problemas convexos, na próxima seção é brevemente exposta esta metodologia.

### 3.3.1 Soluções normais e perturbação finita de problemas convexos

Considere um problema determinístico e convexo, o qual pode ser um PL de um nó individual resolvido na etapa *forward*, o qual pode ser definido como:

$$\min_{x \in X} f(x), \quad (99)$$

onde  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto do poliedro convexo e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa. Assume-se que  $f$  é limitada em  $X$  e (99) possui mínimo. Define-se o conjunto de soluções de (99) como  $X^*$ , e o seu valor ótimo  $f^*$ .

Denota-se outra função converso  $\varphi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\min_{x \in X^*} \varphi(x), \quad (100)$$

a qual é equivalente a  $\min_{x \in X} \varphi(x)$  s.a  $f(x) \leq f^*$ , considera-se quando  $\varphi(x) = x^T x$ , a única solução possível de (100) é dita solução normal do problema (99). Portanto, na tentativa de solucionar (100) considera-se solucionar este problema introduzindo uma perturbação ao como se segue:

$$\min_{x \in X} f(x) + \frac{1}{\tau} \varphi(x), \text{ com } \tau > 0, \quad (101)$$

onde  $\tau$  é um dado parâmetro.

O trabalho de (FERRIS; MANGASARIAN, 1991) estuda de forma completa o conceito de perturbação finita de problemas em problemas convexos como (100), neste trabalho podem ser verificadas considerações na função  $\varphi$  que garantem um parâmetro finito  $\bar{\tau} > 0$  tal que para todo  $\tau \geq \bar{\tau}$ , qualquer solução de (101) é também solução de (100). A perturbação finita é alcançada, quando  $f$  é polidral e  $\varphi$  é uma função fortemente convexa. Ressalta-se que as

deduções podem ser verificadas com mais detalhes no Lema 1, nas Proposições 1 e 2 e no apêndice do trabalho de (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019).

Considerando a necessidade da convexidade forte  $\varphi(x) = x^T x / 2$ , no trabalho de (KIWIEL, 1995) se propôs um algoritmo para resolver (100) baseado em um processo iterativo com sucessivas resoluções de (100) com uma regra apropriada de definição do parâmetro  $\tau$ .

Suponha que  $f$  é uma função convexa linear por partes,  $X$  é o conjunto poliedral,  $\varphi$  é uma função fortemente convexa e  $\ell \in \mathbb{R}$  é um dado parâmetro. Considere  $\tilde{f}(x) := \max\{f(x), \ell\}$  e  $X^*(\ell) \neq \emptyset$  é o conjunto de solução  $\min_{x \in X^*} \tilde{f}(x)$ . Considere o problema otimização a seguir  $\tilde{x} = \arg \min_{x \in X^*(\ell)} \varphi(x)$  então:

$$\tilde{x} = \begin{cases} \arg \min_{x \in X} \varphi(x) & \text{s.a.} & f(x) \leq \ell & \text{se } \ell \geq f^* \\ \arg \min_{x \in X} f(x) & & & \text{se } \ell < f^* \end{cases} \quad (102)$$

Além disso,  $\tilde{x}$  pode ser obtido solucionando o problema perturbado  $\min_{x \in X^*} \tilde{f}(x) + \varphi(x) / \bar{\tau}$  sendo o parâmetro  $\bar{\tau}$  grande o suficiente. Se  $X$  é limitado pelo conjunto poliedral, então, a função  $\varphi(x) = \|x\|_1$ , por exemplo, pode ser utilizada para perturbar um PL.

Na próxima seção será abordado com uma função de perturbação finita pode ser utilizada na etapa *forward* do algoritmo da PDDE para regularizar problemas estocásticos multiestágio de grande porte.

### 3.3.2 Decomposição Regularizada em problemas estocásticos multiestágio.

Assim como nos métodos CC e DR, a regularização NL mantém intacta na etapa *backward* e altera apenas a *forward*, assim, dado um parâmetro  $\ell_t \in \mathbb{R}$  e um ponto inicial  $x_{t-1}$ , o conjunto de soluções ótimas no método NL é dado pelo seguinte PL:

$$\chi_t(x_{t-1}, \ell_t) := \begin{cases} \arg \min_{x_t \geq 0, \alpha_{t+1} \geq 0} \max\{c_t x_t + \alpha_{t+1}, \ell_t\} \\ \text{s.a.} & A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1} \\ & \beta_{j,t+1} x_t + \gamma_{j,t+1} \leq \alpha_{t+1}, j = 1, \dots, NC_t. \end{cases} \quad (103)$$

Diferentemente do método DR a qual é proposto resolver um problema quadrático definido em (96), neste método, um ponto ótimo é definido como a solução ótima de:

$$\begin{cases} \min_{x_t \in \mathbb{R}^n} & \varphi(x_t) \\ \text{s.a.} & x_t \in \chi_t(x_{t-1}, \ell_t), \end{cases} \quad (104)$$

onde  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa e segundo exposto anteriormente pode ser resolvida pelo problema de perturbação:

$$\begin{aligned} \min_{(x_t, w_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} & w_t + \frac{1}{2\bar{\tau}} \varphi(x_t) \\ \text{s.a.} & A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1}, \\ & c_t x_t + \alpha_{t+1} \leq w_t, \\ & \ell_t \leq w_t, \end{aligned} \quad (105)$$

para um parâmetro grande o suficiente  $\bar{\tau} > 0$ . Para a escolha de  $\varphi(x) = x^T x$  a solução de (104) também se torna um problema quadrático e essa é dita a solução normal a qual é relacionada com o nome do método. Nota-se que ao incorporar (105) na PDDE ocorrerá uma mudança drástica no PL de cada nó, isso já pode ser considerado uma desvantagem frente a CL.

Abaixo é exposto o algoritmo que incorpora a regularização proposta dentro do algoritmo da PDDE. Ressalta-se que, o custo de operação na PDDE é dado por  $\bar{z}^k = (1/NS) \cdot \sum_{s \in S} \sum_{t=1}^T c_t x_{st}^k$ , sendo  $S$  o conjunto de todos os cenários, assim é possível estimar um *Delta* entre o custo inferior e o custo superior, tal qual dado por:

$$Delta^{k-1} = \max\{0, \bar{z}^k - \underline{z}^k\} \quad (106)$$

onde  $\underline{z}^k$  é o custo total calculado por (74), note que, em dada iteração a diferença dos custos  $\bar{z}^k - \underline{z}^k$  pode ser nula, assim o mínimo valor entre essa diferença e zero deve ser considerado *Delta*.

Como base no mesmo sistema teste apresentado na seção 3.1.2, neste caso o QP na etapa *forward* para este pequeno problema é:

$$\begin{aligned}
z_t = \min \quad & w_t + \frac{1}{2\bar{\tau}} \cdot (v_t - V_t^{k-1})^2 \\
\text{s.a.:} \quad & \\
& zp_t = 30 \cdot pt_1 + 35 \cdot pt_2 + 75 \cdot pt_3 + 125 \cdot pt_4 + \\
& 200 \cdot pt_5 + 250 \cdot pt_6 + 300 \cdot pt_7 + 500 \cdot d \\
& \sum_{i=1}^{\text{NP}} pt_i + d + 0,1782 \cdot q = 42. \\
& v_t + 2,59 \cdot (q + s) = v_{t-1} + y. \\
& w_t \geq \ell. \\
& zp_t \geq B_{jt+1} + \pi_{jt+1} \cdot v_t + w_t, j = 1, \dots, \text{NC}_t. \\
& V^{\max} \leq v_{t+1} \leq V^{\min}, 0 \leq q \leq Q^{\max}, 0 \leq s \leq \infty, \infty \leq w_t, \\
& 0 \leq pt_i \leq [3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2], i = 1, \dots, \text{NT},
\end{aligned} \tag{107}$$

Observa-se que neste caso, a mudança entre um PL clássico e o QP (107) é considerável. Na função objetivo existem 2 parcelas, a primeira é a variável  $w_t$  a qual é responsável por regularizar o problema, e a segunda, é a função convexa de perturbação. Da mesma forma que no algoritmo DR, o valor de  $V^{k-1}$  pode ser o valor da variável primal  $v$  na iteração passada. Nota-se também que  $zp_t$  é o custo mínimo de despacho térmico mais o déficit, o qual está posto de forma explícita nos cortes.

## 3.3.2.1 Algoritmo da regularização de nível com soluções normais

Algoritmo 4: Regularização de nível com soluções normais

1: Inicialização: Idêntico a Inicialização do algoritmo 1 – PDDE.

Definir regra para cálculo de  $\ell_t^k$

2: **enquanto** critério de parada = falso **faça**

3:   Amostrar cenários  $\xi_{[t]}$ ,  $s=1, \dots, NS_k$

4:   **(Etapa Forward)**

5:    $\bar{x}_1 = \text{argmin}$  (74) e obter  $\underline{z}_k$ .

6:   **para**  $t=2, \dots, T$  **faça**

7:     **para**  $s=1, \dots, NS_k$  **faça**

8:       obter  $x_{st}$  resolvendo o PL (105) com  $(\xi_{st}, \bar{x}_{s,t-1})$  e escolher o parâmetro de nível  $\ell_t^k$  de acordo com alguma regra.

9:     **fim para**

10:   **fim para**

11:   **(Atualização do custo superior)**

12:   Calcular  $\bar{z}_k$  de acordo com (75)

13:   **(Etapa Backward)**

...       Idêntico a Etapa Backward do algoritmo 1 – PDDE

18:

19:   **(Chegar convergência)**

20:   Checar critério de convergência.

21:    $k \leftarrow k + 1$

23:   Definir valor de  $\Delta^{k-1} = \max\{0, \bar{z}_k - \underline{z}_k\}$ ,

22: **fim enquanto**

Basicamente, o algoritmo 4 difere do algoritmo 1 – PDDE devido a solução de (105) ao invés de (74) na etapa *forward*. Com isso, é necessário no passo 4, neste trabalho o parâmetro de nível foi escolhido de acordo com a equação (113). De forma semelhante do exposto em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019), no entanto, a heurística de determinação do parâmetro  $\ell_t$  é outra de certa forma mais genérica pela adição de um termo, tornando o controle da medida do corte mais assertiva. A determinação deste parâmetros é melhor detalhada na próxima seção.

## 3.3.2.2 Determinação dos parâmetros de nível

A heurística proposta para atualização do parâmetro de nível, é baseado no cálculo estimado do custo superior de cada nó da árvore de cenário amostrada no *forward*. Assim, a estimativa para o custo superior de cada nó e dada por:

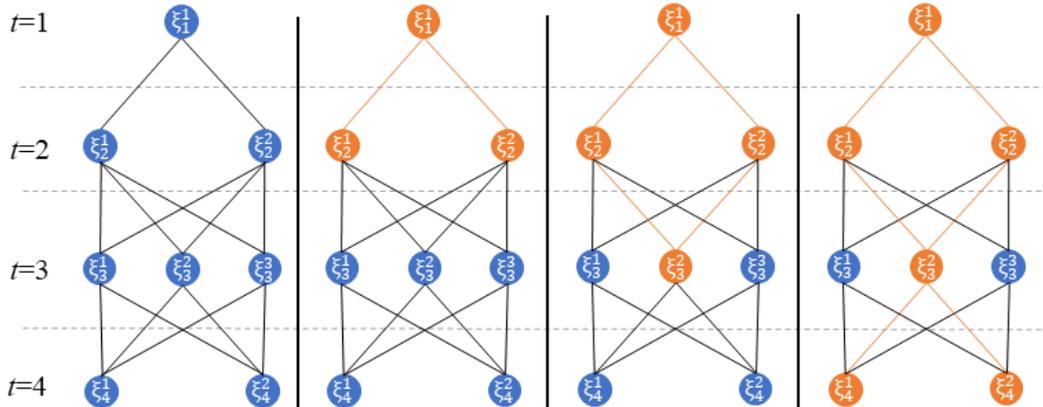
$$z_{\min, jt}^{k-1} = \min_{k \leq k-1} \{ \min_{\xi \in J} z_{\xi_{[t]}, j}^k \text{ s.a } (t, j) \text{ é um nó transversal} \} \quad (108)$$

onde,

$$z_{\xi_{[t]}}^k = c_t x_t(\xi_{[t]}) + E \left[ \sum_{\tau=t+1}^T c_\tau x_\tau(\xi_{[\tau]}) \right]. \quad (109)$$

A minimização interna da equação (108) é referente a todos os cenários que compartilham o nó  $(t, j)$ . Em outras palavras, o custo superior estimado  $z_{\min, jt}^{k-1}$  é o valor do custo presente em  $t$  mais o custo esperado do caminho de menor custo entre todos os cenários que compartilham aquele nó. A seguir, com auxílio da Figura 16 é ilustrado a definição (108), observa-se uma árvore de cenários de amostras comuns com 3 cenários amostrados o qual os caminhos são coloridos a cada estágio da *forward*.

Figura 16 – Árvore de cenários de amostras comuns com 4 estágios e 12 cenários.



Fonte: O Autor.

Considere a Figura 16, a qual foram amostrados 3 cenários na etapa *forward*  $\mathcal{L} = \{\xi^a, \xi^b, \xi^c\}$  onde  $\xi^a = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^2, \xi_4^1)$ ,  $\xi^b = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^2, \xi_4^2)$  e  $\xi^c = (\xi_1^1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2)$ . Seja  $\bar{x}_t(\xi_{[t]}^d)$  a decisão tomada no estágio  $t$  e cenário  $\xi^d$  depois da *forward*. Nota-se que no estágio  $t=3$  o mesmo nó  $\xi_3^2$  é compartilhado em todos os cenários amostrados. Para encontrar o custo superior

estimado do nó em  $t=3$  calcula-se o custo dos cenários que possuem a mesma memória, neste caso,  $\xi^a$  e  $\xi^b$ :

$$z_{\xi_{[3],1}}^k = c_3 x_3(\xi_{[3]}^a) + E \left[ c_4 x_4(\xi_{[4]}^a) + c_4 x_4(\xi_{[4]}^b) \right], \quad (110)$$

e individualmente o cenário  $\xi^c$ :

$$z_{\xi_{[3],2}}^k = c_3 x_3(\xi_{[3]}^c) + c_4 x_4(\xi_{[4]}^c), \quad (111)$$

assim, a seleção do custo superior estimado para o nó em  $t=3$  é dada pelo valor mínimo entre (110) (111):

$$z_{\xi_{[3]}}^k = \min \{ z_{\xi_{[3],1}}^k, z_{\xi_{[3],2}}^k \}. \quad (112)$$

Dado o custo superior estimado de cada nó, é definido a o parâmetro de nível por cada estágio, iteração e nó do cenário da árvore por:

$$\ell_{jt}^k = \theta \cdot \left( z_{\min,jt}^{k-1} - \gamma_t \cdot \Delta^{k-1} \right), \quad (113)$$

onde  $z_{jt}^{k-1}$  é o valor estimado do custo presente,  $\theta$  e  $\gamma_t$  são dois parâmetros necessariamente positivos e o  $\Delta^{k-1}$  é o valor máximo entre zero e diferença de custo superior e inferior, tal qual descrito em (106).

O parâmetro  $\theta$  é incluído para tornar a heurística proposta pelo autor genérica e assim ter mais sensibilidade e controle sobre a regularização. O valor de  $\gamma_t$ , segundo o autor, deve ser pequeno<sup>7</sup>. Nos experimentos numéricos desenvolvidos nesta tese, é proposto o valor de  $\gamma_t = \kappa/t$  com  $\kappa = 0,25$ .

---

<sup>7</sup> Nos experimentos numéricos do autor, é proposto o valor de  $\gamma_t = \kappa/t$  com  $\kappa=0,5$ .

#### 4 REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE

Quando se trata de representação das usinas hidrelétricas para o problema do POEMP, o estado da arte mostra que as variáveis de estado são geralmente representadas pela afluência, quando à dependência temporal, e pelo volume armazenado. Com isso, algumas formas de modelagem são utilizadas. Na representação da afluência, ganha notoriedade as modelagens individualizadas, por bacia e por energia afluenta. A modelagem individualizada é mais próxima da realidade pois é possível estimar com um boa acurácia o valor de afluência disponível em cada usina. A modelagem por bacia é justificada pela semelhança de ciclos hidrológicos verificados em usinas pertences a mesma bacia, assim esta representação tem por objetivo agregar todas as variáveis de afluência desta bacia em apenas uma. E finalmente, a modelagem por energia afluenta que é um parâmetro dos sistemas equivalentes de energia e também é capaz de agregar muitas variáveis em apenas uma. Na representação do volume, destacando-se a representação individualizada e por reservatórios equivalentes de energia. A individualizada se trata da modelagem mais fidedigna conhecida, a qual captura o comportamento real da variável hidráulica representada. Na modelagem por REE, o parque hidráulico é agregado em sistemas de energia e o parâmetro da energia armazenada e ENA em cada sistema é utilizado como variável de estado. Todas as modelagens com exceção da individualizada, são simplificações que visam reduzir a dimensionalidade do problema e deixar a sua solução mais rápida quando comparada com a representação por usina.

Portanto, basicamente, as principais fontes de alta dimensionalidade em problemas de POEMP são as afluências e volume armazenado. A inclusão dessas variáveis em problemas de POEMP aumenta dimensionalidade da FCF no algoritmo da PDDE. A elevada dimensão da FCF causa dois problemas principais. O primeiro é que o espaço de estado que deve ser visitado se torna muito grande e, assim, muitos cortes são necessários para se obter uma aproximação da FCF. O segundo ponto, é que a alta dimensionalidade das restrições da FCF aumenta o tamanho do PL em cada nó, dificultando a agilidade de resposta por parte do *solver* e assim podendo resultar em tempos computacionais proibitivos. Como exemplo, é mostrado abaixo a dimensão da FCF em cada estágio  $t$  no modelo individualizado:

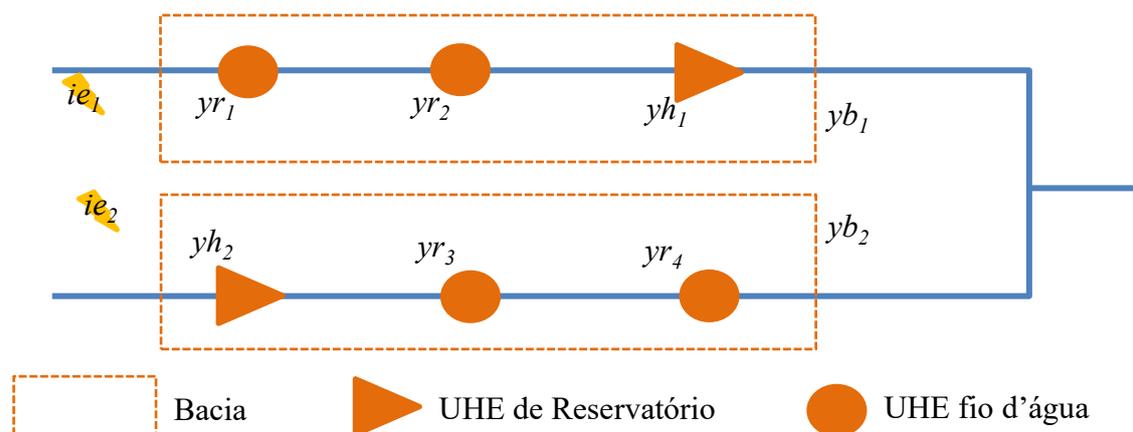
$$NH + \sum_{r=1}^{NH} HP_{rt} + \sum_{r=1}^{NR} RP_{rt}, \quad (114)$$

onde,  $NH$  é o número de usinas,  $NR$  o número de reservatórios,  $HP_{rt}$  é o número da ordem do modelo  $PAR(p)$  para a usinas de reservatório  $r$  no estágio  $t$  e  $RP_{rt}$  é o número da ordem do modelo  $PAR(p)$  para a usinas FdA  $r$  no estágio  $t$ . De forma ilustrativa, se considerarmos o caso brasileiro com  $NH = 162$  e  $NR = 80$ . Em novembro de 2020, os dados oficiais indicam que a FCF possui 448 afluições passadas, o que representa 85% das variáveis de estado. Recentes avanços na modelagem de afluição presentes em (TREISTMAN et al., 2020) indicam que o modelo  $PAR(p)$  sempre irá carregar informações de todo último ano do horizonte de planejamento. Contudo, em termos de solução da PDDE, equivale a representar todas as variáveis aleatórias com ordem 11. Assim, considerando o exemplo acima, a FCF tem 1782 variáveis de afluições passadas, o que representa um peso maior em cada PL ao comparado com a modelagem atual. Neste caso, fica ainda mais evidente a necessidade de se estudar simplificações que não tornem o problema proibitivo e assim comprometam a qualidade da política obtida.

Portanto, para lidar com o esforço computacional que a elevada dimensionalidade produz, tipicamente é dado foco na modelagem das afluições em detrimento a outras modelagens (FPH e a rede de transmissão). Em termos de modelagem de afluição, neste trabalho é proposto: (i) a representação individualizada em usinas de reservatório com modelagem agregada por energia afluyente fio d'água por bacia nas usinas FdA. Para comparar com a metodologia proposta, usa-se outras duas modelagens detalhadas no estado da arte para problemas de POEMP: (ii) a modelagem individualizada a qual é detalhada na seção 2.1.3.1; e (iii) agregação por bacia proposta em (LARROYD, 2016).

Exemplificando a diferença entre as modelagens analisadas neste trabalho, considere o sistema da Figura 17 composto por duas UHEs de reservatório e quatro fio d'água, as quais estão distribuídas em duas bacias,  $yh$  é afluição nas UHEs de reservatório,  $yr$  é a afluição nas usinas do tipo FdA,  $yb$  a afluição na bacia e  $ie$  é a energia afluyente fio d'água. Em (ii) o vetor de variável aleatória é  $[yh_1, yh_2, yr_1, yr_2, yr_3, yr_4]$  tendo seis dimensões. A modelagem proposta (i) agrega as variáveis das usinas FdA  $[yr_1, yr_2]$  em uma outra variável de energia afluyente fio d'água  $ie_1$  da bacia um e,  $[yr_3, yr_4]$  é convertida em  $ie_2$ . Assim, a modelagem de cada PL engloba as variáveis de estado  $[yh_1, yh_2, ie_1, ie_2]$ , portanto, 4 dimensões. Por outro lado, (iii) substituí em cada PL da PDDE as variáveis de afluições individuais  $[yh_1, yh_2, yr_1, yr_2, yr_3, yr_4]$  por  $[yb_1, yb_2]$ , isto é, duas dimensões.

Figura 17 – Sistema exemplo reduzido.



Em termos de modelagem da variável de volume armazenado, é proposto uma metodologia para substituir variáveis de volume de cada UHE pela variável da energia armazenada no sistema ou bacia a qual a UHE pertence, assim, as demais variáveis do sistema são mantidas de forma individualizada. Assim, dado o exemplo da Figura 17, a modelagem individualizada representa como variável de estado os volumes dos reservatórios 1 e 2 [ $v_1$ ,  $v_2$ ]. Pela proposta deste trabalho, as variáveis individuais de volume são substituídas por variáveis de  $ear$ , sendo  $ear$  a energia armazenada do sistema. Neste trabalho, esta metodologia é chamada de modelo Earm.

Nas seguintes subseções, são detalhadas e mostradas através de um sistema reduzido as metodologias brevemente descritas nos parágrafos anteriores. Basicamente, ela está dividida em dois blocos, o primeiro mostra as modelagens de simplificação de afluência, isto é, a modelagem da afluência agregada por bacia e a modelagem por energia afluenta fio d'água. No segundo bloco, detalha a proposta do modelo Earm, o qual visa substituir as variáveis de volume individualizados por energia armazenada do sistema.

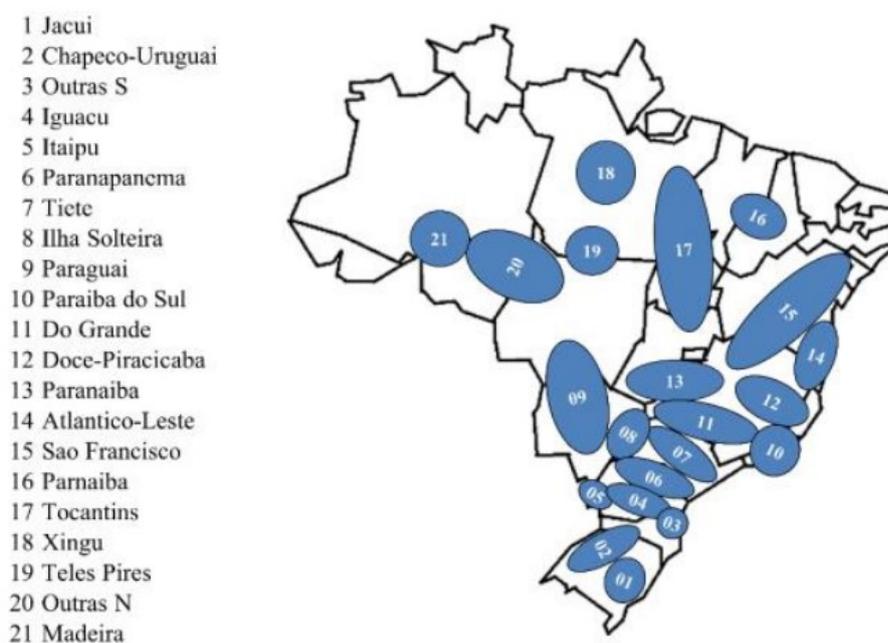
#### 4.1 REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE EM VARIÁVEIS DE ESTADO DE AFLUÊNCIA

Na sequência são apresentados os modelos que reduzem a dimensionalidade das variáveis de estado da afluência, na sequência são apresentadas aplicações práticas em sistema pequeno.

#### 4.1.1 Modelo de Afluência Agregada por Bacia

Um país de dimensões continentais tal qual o Brasil com uma geografia diversificada e natureza abundante possui um número elevado de bacias hidrográficas. Bacias hidrográficas são áreas ou regiões que drenam água para um rio principal e seus afluentes. Neste caso, é natural pensar que usinas que estejam em uma mesma bacia hidrográfica possuem ciclos de afluências semelhantes. Assim, alguns modelos da literatura já fazem essa distinção e uma aglutinação por áreas na representação da variável aleatória afluência. O modelo oficial usado no sistema elétrico brasileiro (MACEIRA et al., 2018) faz uma simplificação maior, dividindo o SIN em 12 REEs e representa a variável aleatória por sistemas agregados que, ao final dentro de PL, se transforma em energia afluente. No caso de (LARROYD, 2016), usam-se 21 bacias as quais podem ser observadas na Figura 18.

Figura 18 – Exemplo de bacias hidrográficas do SIN.



fonte: (LARROYD, 2016)

A modelagem da afluência por bacia usada para comparação neste trabalho é semelhante a apresentada na tese de (LARROYD, 2016). Relembrando que, usando a mesma nomenclatura da seção 2.1.3.1, convém separar as variáveis quanto ao tipo da usina. O primeiro passo na agregação em bacias é a inclusão de uma variável artificial que representa a soma de todas as afluências do grupo de usinas que pertencem a determinada bacia como:

$$ya_{bt} - \sum_{r=1}^{NH_b} yh_{rt} - \sum_{r=1}^{NR_b} yr_{rt} = 0, \quad (115)$$

onde:

$ya_{bt}$  : é a afluência incremental agregada da bacia  $b$  no estágio  $t$ .

Da equação (115) é calculado um histórico de afluência por bacia. A partir deste histórico, aplicam-se as mesmas equações (38)-(63) para gerar uma série sintética de afluência agregada baseado nos valores históricos  $yh_{rt}$  e  $yr_{rt}$ . De forma semelhante ao modelo individualizado, as correlações parciais e as equações de Yule-Walker são usadas para identificar a ordem e determinar os coeficientes do modelo PAR(p) agregado, respectivamente. Assim, um novo modelo de afluências é obtido o qual a formulação é dada por:

$$ya_{bt} - \sum_{p=1}^{OA_t} \phi G_{bpt} \cdot yaa_{b,t-p} = \xi G_t, \quad (116)$$

onde:

$ya_{bt}$  : é a afluência agregada total da bacia  $b$  no estágio  $t$ ;

$OA_t$  : o número da ordem do modelo de afluência PAR(p) agregado no estágio  $t$ ;

$\phi G_{bpt}$  : coeficiente  $p$  do modelo PAR(p) relacionado com a afluência agregada na bacia  $b$  no estágio  $t$ ;

$yaa_{b,t-p}$  : afluência agregada anterior da bacia  $b$  do estágio  $t-p$  ( $m^3/s$ );

$\xi G_t$  : resíduo o modelo de afluência PAR(p) agregado no estágio  $t$ .

Dentro do modelo de otimização, é necessário converter afluência agregada total por bacia em afluência incremental para cada usina que pertence a bacia. Para isso, é calculado um fator de participação o qual é feito uma desagregação da afluência por bacia e abatidos pelo grau de liberdade da respectiva usina, assim como já mostrado no modelo individualizado. Assim, as equações anteriormente modeladas (30)-(31) são substituídas por:

$$yh_{rt} = \phi H_{rt} \cdot ya_{bt} + \delta YH_r, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (117)$$

$$yr_{rt} = \phi R_{rt} \cdot ya_{bt} + \delta YR_r, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (118)$$

onde:

$\phi H_{brt}$  : fator de participação da usina de reservatório  $r$  na bacia  $b$  no estágio  $t$ ;

$\phi R_{brt}$  : fator de participação da usina fio d'água  $r$  na bacia  $b$  no estágio  $t$ .

Não é trivial encontrar um fator de participação que divide exatamente a quantidade de afluência que cada usina recebe da vazão total da bacia. Neste trabalho, é utilizado uma heurística baseada no histórico total de cada UHE. Assim, em (LIMA; POPOVA; DAMIEN, 2014) um coeficiente de participação é definido em cada estação como sendo a proporção da afluência observada de cada hidrelétrica  $h$  em relação ao total da respectiva bacia  $b$ :

$$rh_{rt} = \frac{yhh_{rt} - \delta YH_r}{ya_{bt}}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (119)$$

$$rr_{rt} = \frac{yrr_{rt} - \delta YR_r}{ya_{bt}}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (120)$$

onde:

$rh_{rt}$  : fator de participação da usina de reservatório  $r$  na bacia  $b$  no estágio  $t$ ;

$rr_{rt}$  : fator de participação da usina fio d'água  $r$  na bacia  $b$  no estágio  $t$ .

As equações (119)-(120) estabelecem um fator de participação para cada mês e cenário do histórico, portanto, os fatores de cada UHE  $\phi H_{rt}$  e  $\phi R_{rt}$ , são obtidos pela média de  $rh$  e  $rr$  de todos os cenários para determinada estação.

Depois de apresentada a modelagem agregada por bacia, convém apresentar como ela será incluída no problema de POEMP, conforme mostrado na sequência.

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+TX)} \alpha_t \quad (121)$$

s.a.:

$$yh_{rt} = \phi H_{rt} \cdot ya_{bt} + \delta YH_r, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (122)$$

$$y_{r_t} = \varphi R_{r_t} \cdot ya_{b_t} + \delta YR_{r_t}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (123)$$

$$ya_{b_t} - \sum_{p=1}^{OA_t} \phi G_{bpt} \cdot yaa_{b,t-p} = \xi G_t, \quad b=1, \dots, NB, \quad (124)$$

$$yaa_{t-p} = YA_{t-p}, \quad p = 1, \dots, OA_t, \quad (125)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} M_{5rtj} \cdot v_{r,t+1} + \sum_{b=1}^{NB} \left( M_{6btj} \cdot ya_{b_t} + \sum_{p=1}^{OA_t-1} M_{7b,t-p,j} \cdot yaa_{b,t-p} \right) \geq B_{1jt}, \quad j = 1, \dots, NC_t, \quad (126)$$

$$(24)-(29), (37), \quad (127)$$

em que:

$YA_{t-p}$  : Afluência agregada anterior do estágio  $t - p$  ( $m^3/s$ );

$M_{5rtj}$  : coeficiente do volume  $r$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  ( $\$/hm^3$ );

$M_{6btj}$  : coeficiente da afluência  $b$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [ $\$/m^3/s$ ].

$M_{7b,t-p,j}$  : coeficiente da afluência  $b$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t - p$  [ $\$/m^3/s$ ].

A principais diferenças do nó no PL clássico individualizado apresentado em (23)-(37) são descritas a seguir, em que as variáveis de estado no problema individualizado são  $V_{rt}$ ,  $YH_{rt}$  e  $YR_{rt}$ . Considerando o conjunto de restrições acima, (122) e (123) dividem o total da afluência por bacia em cada UHE obedecendo o seu respectivo fator médio de participação. A equação (124) representa o modelo PAR(p) das afluências agregadas. Assim, durante a PDDE, os valores de  $\xi G_t$  serão sorteados ao invés de  $\xi H_t$  e  $\xi R_t$ . As equações (125) são restrições artificiais usadas no modelo PAR(p) a capturar a sensibilidade da função objetivo em função das variações das afluências passadas. Por fim, (126) representa a FCF do modelo agregado que depende de  $V_{rt}$  e  $YA_{rt}$ .

#### 4.1.2 Representação por Energia Fio d'água (Modelo EAFda)

A energia afluyente fio d'água é um dos vários parâmetros empregados na modelagem por reservatório equivalente de energia (REE). O REE é uma metodologia clássica proposta por

(ARVANITIDIS; ROSING, 1970) que se mostrou uma alternativa interessante para reduzir a dimensão do problema de POMP na utilização da programação dinâmica. Por isso, ainda é aplicada quando se trata de sistemas de grande porte. No Brasil por exemplo, que é um dos maiores sistemas despachados de forma centralizada do mundo, esta modelagem ainda é utilizada de forma oficial nos modelos que determinam despacho térmico e preço do mercado de curto prazo. Assim, o SIN contém aproximadamente 160 usinas as quais são agregadas em 12 REEs.

Neste sentido, a metodologia apresentada a seguir utiliza a modelagem de afluência individualizada para as usinas de reservatório e, para as usinas fio d'água, é usado um dos parâmetros ligados à REEs a qual se trata da energia afluenta a fio d'água, nomeado de modelo EAFdA. Esse último conceito, assume que toda a afluência disponível nas usinas FdA de um determinado sistema é agregada e convertida em energia através da produtividade da UHE. Essa abordagem traz uma vantagem a frente da abordagem clássica de REE, cujo a energia afluenta FdA deve ser corrigida por um fator devido a possibilidade de exceder a capacidade máxima de geração do conjunto das usinas FdA. Na metodologia proposta, essa simplificação não é necessária uma vez que a geração ainda continua sendo determinada de forma individual para todas as UHE dentro de cada PL.

Inicialmente, considere a equação abaixo a qual representa o somatório da energia afluenta fio d'água de cada UHE em  $t$ . Assim, de forma similar a apresentada na agregada (115), pode ser considerado uma energia única por sistema ou bacia como:

$$ie_{bt} = \sum_{r=1}^{NR_b} ER_{rt} \cdot yr_{rt}, \quad (128)$$

onde:

$ie_{bt}$  : é a energia afluenta FdA na bacia  $b$  no estágio  $t$  (MWmês);  
 $ER_{rt}$  : é a produtividade na usina  $r$  no estágio  $t$  (MWmês/m<sup>3</sup>/s).

O processo a partir daqui é muito semelhante ao apresentado na metodologia agregada. Por (128) é calculado um histórico de EAFdA. A partir deste histórico, aplicam-se as mesmas equações (38)-(63) para gerar uma série sintética de EAFdA. Deste modo, usam-se as correlações parciais e as equações de Yule-Walker para identificar a ordem e determinar os

coeficientes do modelo PAR(p) de energia afluyente fio d'água, respectivamente. Assim, um novo modelo de afluências é obtido o qual a formulação é dada por:

$$ie_{bt} - \sum_{p=1}^{OE_t} \phi E_{bpt} \cdot iea_{b,t-p} = \xi E_t, \quad (129)$$

onde,

$ie_{bt}$  : é a energia afluyente fio d'água total na bacia  $b$  no estágio  $t$ ;

$OE_t$  : o número da ordem do modelo PAR(p) da energia afluyente fio d'água no estágio  $t$ ;

$\phi E_{bpt}$  : coeficiente  $p$  do modelo PAR(p) da energia afluyente fio d'água na bacia  $b$  no estágio  $t$

$iea_{t-p}$  : energia afluyente fio d'água do estágio  $t-p$  (m<sup>3</sup>/s);

$\xi E_t$  : resíduo do modelo PAR(p) da energia afluyente fio d'água no estágio  $t$ .

Dentro do modelo de otimização, é necessário converter energia afluyente fio d'água por bacia em afluência incremental para cada usina que pertence a bacia. Para isso, é calculado um fator de participação o qual é feito uma desagregação da afluência por bacia, assim as equações anteriormente modeladas (30)-(31) são substituídas por:

$$yr_{rt} - \phi I_{rt} \cdot ie_t - \delta YR_r = 0, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (130)$$

onde,

$\phi I_{rt}$  : fator de participação da usina fio d'água  $r$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s)/MW.

Como já detalhado na metodologia por bacia, não é trivial encontrar um fator de participação que divide exatamente a quantidade de afluência que cada usina recebe da vazão total da bacia. Portanto, uma heurística semelhante é utilizada a partir do histórico total de energia afluyente de cada UHE (128). Um coeficiente de participação é definido em cada estação como sendo a proporção da energia afluyente observada de cada hidrelétrica  $r$  em relação ao total da respectiva bacia  $b$ :

$$re_{rt} = \frac{ER_{rt} \cdot (yr_{rt} - \delta YR_r)}{ie_{bt}}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (131)$$

onde,

$re_{rt}$  : fator de participação da usina FdA  $r$  na estação  $t$ ;

Para obter  $\phi I_{rt}$  basta calcular a média e todos os cenários de (131) dividido pela respectiva produtibilidade da usina  $r$ .

Depois de apresentada a modelagem da EAFdA, abaixo mostra-se como é incluída em cada PL do problema de POEMP.:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+TX)} \alpha_t \quad (132)$$

s.a.:

$$ie_t - \sum_{p=1}^{OE_t} \phi E_{pt} \cdot iea_{t-p} = \xi E_t, \quad (133)$$

$$iea_{t-p} = IE_{t-p}, \quad p = 1, \dots, OE_t, \quad (134)$$

$$yr_{rt} - \phi I_{rt} \cdot ie_t - \delta YR_r = 0, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (135)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{8rtj} v_{r,t+1} + M_{9rtj} \cdot y h_{rt} + \sum_{p=1}^{HP_r-1} M_{11r,t-p,j} \cdot yah_{r,t-p} \right) + \sum_{b=1}^{NB} \left( M_{10btj} \cdot ie_{bt} + \sum_{p=1}^{OE_t-1} M_{12b,t-p,j} \cdot iea_{b,t-p} \right) \geq B_{2jt}, \quad j = 1, \dots, NC_t, \quad (136)$$

$$(24)-(29), (30) (37), \quad (137)$$

onde:

$IE_{t-p}$  : Energia Afluyente FdA anterior do estágio  $t - p$  (MW);

$M_{8rtj}$  : coeficiente do volume  $r$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  (\$/hm<sup>3</sup>);

$M_{9rtj}$  : coeficiente da afluência  $r$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$(m<sup>3</sup>/s)].

$M_{10bj}$  : coeficiente da EAFda  $b$  em  $t$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/ (MW)].

$M_{11r,t-p,j}$  : coeficiente da afluência  $r$  em  $t - p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/ (m<sup>3</sup>/s)].

$M_{12b,t-p,j}$  : coeficiente da EAFda  $b$  em  $t - p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/ (MW)].

Observa-se que as variáveis de estado deste modelo são  $V_{rt}$ ,  $YH_{r,t-p}$ , e  $IE_{b,t-p}$ . As mudanças em relação PL clássico em (23)-(37) são menores neste caso, basicamente são mudanças nas restrições de afluência das FdA as quais, no PL clássico são individualizadas. A equação (133) representa as restrições do modelo PAR(p) por energia afluente FdA e substitui (33) no PL clássico. Portanto, durante o processo da PDDE  $\xi E_{bt}$  é amostrada ao invés de  $\xi R_{rt}$ . As equações (134) é artificialmente incorporada no modelo PAR(p) a capturar a influência de  $IE_{t-p}$  na função objetivo. Por outro lado a restrição (135) é a que transforma e divide a energia afluente da bacia na afluência individualizada da usina. Por fim (136) é a FCF o qual nota-se que existe a dependência de  $V_{rt}$ ,  $YH_{r,t-p}$ , e  $IE_{b,t-p}$ .

### 4.1.3 Exemplo Prático da Modelagem das Afluências

Nesta seção são apresentadas as metodologias de redução da dimensionalidade quando aplicadas na modelagem de afluência; para tanto, é usado um sistema de pequeno porte para mostrar a diferença entre as formulações, e na sequência, cada problema é solucionado via Programação Dinâmica Dual (PDD), onde é resolvido uma árvore de cenário fixa de amostras comuns, com um número total de 8 cenários, duas aberturas por estágio, e horizonte de planejamento de  $T=4$ . Desta forma, é possível obter a solução exata do problema proposto. Para esses casos, todos são solucionados da forma clássica onde as aproximações que compõe a FCF são calculadas como visto na subseção 2.3.3. Depois disso uma breve discussão sobre as abordagens é feita.

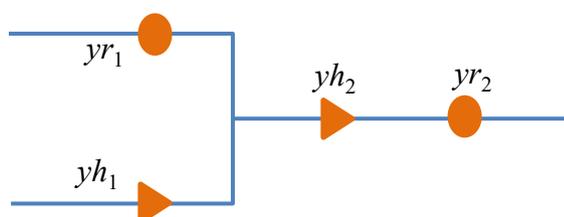
O sistema utilizado para exemplificar as metodologias é composto por 4 usinas hidrelétricas e 6 térmicas e tem o objetivo de atender uma demanda de 4000 MW em um barramento único, a Tabela 6 mostra os principais dados das usinas termelétricas tais como custo unitário de geração e a energia máxima disponível.

Tabela 6 – Dados do parque térmico e demanda.

Térmica	1	2	3	4	5	6
CT/CD (R\$/MW)	1	2	4	8	15	50
Pot. máxima (MW)	200	200	200	200	200	4000

Por sua vez, o acoplamento hidráulico desse sistema teste pode ser visto na Figura 19, onde duas usinas são de reservatório e duas a fio d'água localizadas na mesma bacia hidrográfica. Na figura também se destaca as variáveis da afluência a qual será objeto de discussão nos próximos parágrafos.

Figura 19 – Sistema hidráulico exemplo de pequeno porte.



A Tabela 7 apresenta os demais dados referentes ao parque hidrelétrico, tais como, limites de armazenamento, vazão turbinada e a produtividade.

Tabela 7 – Dados do parque hidrelétrico.

UHE	$V^{\min}$ (hm <sup>3</sup> )	$V^{\max}$ (hm <sup>3</sup> )	$Q^{\max}$ (m <sup>3</sup> /s)	EH/(ER) MW/(m <sup>3</sup> /s)
1 ( $yr_1$ )	1.450	1.450	500	(1,60)
2 ( $yh_1$ )	3.000	5.000	500	1,40
3 ( $yh_2$ )	2.300	3.300	1.300	0,90
4 ( $yr_2$ )	5.100	5.100	1.450	(0,95)

Portanto, de forma geral estes são os dados utilizados para resolver este problema de pequeno porte. Por fim, os dados que pertencem exclusivamente a uma determinada modelagem serão expostos conforme a necessidade na sua respectiva subseção. Assim, as próximas seções tratam de apresentar a modelagem individual, agregada por bacia e energia afluente FdA.

## 4.1.3.1 Modelo individualizado

A Tabela 8 mostra os resíduos por usina que compõe a árvore de cenário e que foram utilizados na PDD, os dados estão expostos por estágio e abertura. Por exemplo, o resíduo  $\xi R_{111} = 34 \text{ m}^3/\text{s}$  é referente usina fio d'água 1 no estágio  $t=1$  e abertura 1, portanto, este é o nó inicial, por isso ele é igual ao valor de  $\xi R_{112}$  para a abertura 2.

Tabela 8 – Resíduos por usina ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

$t$	UHE 1		UHE 2		UHE 3		UHE 4	
	$\xi R_{1t1}$	$\xi R_{1t2}$	$\xi H_{1t1}$	$\xi H_{1t2}$	$\xi H_{2t1}$	$\xi H_{2t2}$	$\xi R_{2t1}$	$\xi R_{2t2}$
1	34	34	224	224	163	163	312	312
2	38	16	185	412	88	206	174	365
3	4	26	43	309	17	133	52	283
4	30	6	322	21	148	36	321	72

A Tabela 9 mostra os coeficientes do modelo PAR(p) para cada usina hidrelétrica, por exemplo, considere a UHE 1 em  $t=1$  o coeficiente  $\phi R_{t-1}=0,2612$  significa que, em  $t=1$  a afluência depende da afluência em  $t=0$  balizada pelo coeficiente 0,2612. Agora, considere a mesma usina em  $t=4$ , existem dois coeficientes  $\phi R_{t-1}=0,2454$  E  $\phi R_{t-2}=0,2863$ , isto significa que a afluência em  $t=4$  depende das afluências em  $t=\{3,2\}$  proporcionais aos respectivos coeficientes.

Tabela 9 – Coeficientes do modelo PAR(p) por usina até  $T=4$ .

UHE	$t$	1	2	3	4
1	$\phi R_{t-1}$	0,2612	0,9535	0,3863	0,2454
	$\phi R_{t-2}$				0,2863
2	$\phi H_{t-1}$	0,4264	1,1030	0,2945	0,4107
	$\phi H_{t-2}$				0,2534
3	$\phi H_{t-1}$	0,4382	0,9638	0,2839	0,4068
	$\phi H_{t-2}$			0,2794	0,2434
4	$\phi R_{t-1}$	0,3037	1,0024	0,3402	0,2955
	$\phi R_{t-2}$				0,3114

Observa-se na Tabela acima que a ordem máxima do modelo PAR(p) foi dois a qual foi encontrada em  $t=4$  para todas as usinas, e para UHE 3, também foi observada em  $t=3$ . Diante de todos os dados de entrada expostos até o presente momento, é possível mostrar como se configura o PL inicial referente ao estágio  $t=1$  o qual pode ser observado abaixo:

$$\omega_1 = \min \sum_{i=1}^5 CT_i \cdot pt_{i1} + 50 \cdot pd_1 + \alpha_1 \quad (138)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^5 pt_{i1} + \sum_{r=1}^2 EH_{r1} \cdot qh_{r1} + \sum_{r=1}^2 ER_{r1} \cdot pr_{r1} + pd_1 = 4000,$$

$$qr_{11} + sr_{11} - yr_{11} = 0,$$

$$v_{11} - va_{11} + qh_{11} + sh_{11} - yh_{11} = 0,$$

$$v_{21} - va_{21} + qh_{21} + sh_{21} - [qh_{11} + sh_{11} + qr_{11} + sr_{11}] - yh_{21} = 0,$$

$$qr_{21} + sr_{21} - [qh_{21} + sh_{21}] - yr_{21} = 0,$$

$$yr_{11} - 0,2612 \cdot yra_{10} = 34,$$

$$yh_{11} - 0,4264 \cdot yha_{10} = 224,$$

$$yh_{21} - 0,3036 \cdot yha_{20} = 163,$$

$$yr_{21} - 0,4383 \cdot yra_{20} = 312,$$

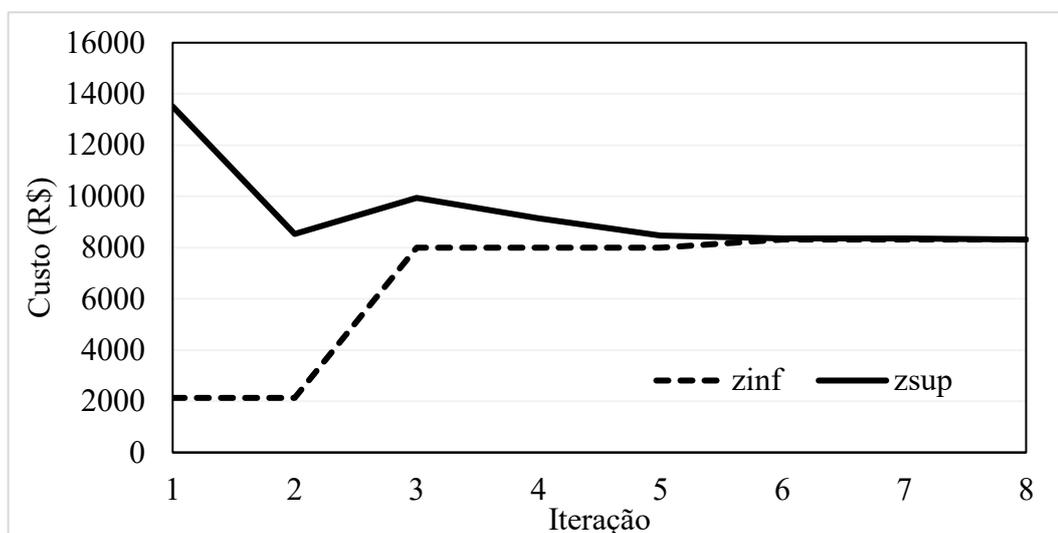
$$\alpha_1 + M_{01j1} \cdot v_{2,2} + M_{02j1} \cdot v_{3,2} + M_{11j} \cdot yh_1 + M_{12j} \cdot yh_2 + M_{21,j} \cdot yr_1 + M_{22,j} \cdot yr_2 \geq B_{1j1} \quad (139)$$

$$0 \leq pt_{i1} \leq 200, i = 1, \dots, 5, pd_1 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, 0 \leq qr_{11} \leq 500, 0 \leq sr_{11}, 3000 \leq v_{1,2} \leq 5000, 0 \leq qh_{11} \leq 500,$$

$$0 \leq sh_{11}, 2300 \leq v_{2,2} \leq 3300, 0 \leq qh_{21} \leq 1300, 0 \leq sh_{21}, 0 \leq qr_{21} \leq 1450, 0 \leq sr_{21}.$$

Baseado no PL (138) resolve-se por PDD usando os usando os 8 cenários de afluência expostos na Tabela 8 com os parâmetros do modelo PAR(p) da Tabela 9. Como resultado, a Figura 20 mostra o comportamento do custo inferior e superior ao longo do processo iterativo. Nota-se os custos possuem valores iguais na oitava iteração, assim considera-se que o método atingiu a convergência.

Figura 20 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR individualizada.



#### 4.1.3.2 Modelo agregado por bacia

Baseado no histórico de afluência por bacia, os parâmetros do modelo PAR(p) podem ser observados na Tabela 10. Nota-se que a ordem máxima do modelo PAR(p) é dois obtido em  $t=4$ , os demais estágios apresentam ordem 1. Por fim, o fator de conversão médio da afluência por bacia na afluência individualizada em cada estágio  $t$  é mostrada na Tabela 12.

Tabela 10 – Resíduos da bacia ( $m^3/s$ ).

$t$	$\xi G_{1t1}$	$\xi G_{1t2}$
1	733	
2	463	1021
3	116	751
4	821	135

Tabela 11 – Coeficientes do modelo PAR(p) por bacia até T=4.

$t$	1	2	3	4
$\phi R_{t-1}$	0,3420	1,0418	0,3727	0,3380
$\phi R_{t-2}$				0,2816

Tabela 12 – Fator de conversão média da afluência da bacia para afluência por usina hidrelétrica.

$t/UHE$	$\varphi R_{1T}$	$\varphi H_{1T}$	$\varphi H_{2T}$	$\varphi R_{2T}$
$t=1$	0,1463	0,2143	0,2391	0,1333
$t=2$	0,0976	0,0714	0,1087	0,2667
$t=3$	0,3659	0,4286	0,4783	0,5333
$t=4$	0,3902	0,2857	0,1739	0,0667

Com base nos dados de entrada expostos até o presente momento, o PL inicial referente ao estágio  $t=1$  é:

$$\omega_1 = \min \sum_{i=1}^5 CT_i \cdot pt_{i1} + 50 \cdot pd_1 + \alpha_1 \quad (140)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^5 pt_{i1} + \sum_{r=1}^2 EH_{r1} \cdot qh_{r1} + \sum_{r=1}^2 ER_{r1} \cdot pr_{r1} + pd_1 = 4000,$$

$$qr_{11} + sr_{11} - yr_{11} = 0,$$

$$v_{11} - va_{11} + qh_{11} + sh_{11} - yh_{11} = 0,$$

$$v_{21} - va_{21} + qh_{21} + sh_{21} - [qh_{11} + sh_{11} + qr_{11} + sr_{11}] - yh_{21} = 0,$$

$$qr_{21} + sr_{21} - [qh_{21} + sh_{21}] - yr_{21} = 0,$$

$$ya_1 - 0.3420 \cdot yaa_0 = 733$$

$$yr_{11} - 0.1463 \cdot ya_1 = 0$$

$$yh_{21} - 0.2143 \cdot ya_1 = 0$$

$$yh_{31} - 0.2391 \cdot ya_1 = 0$$

$$yr_{41} - 0.1333 \cdot ya_1 = 0$$

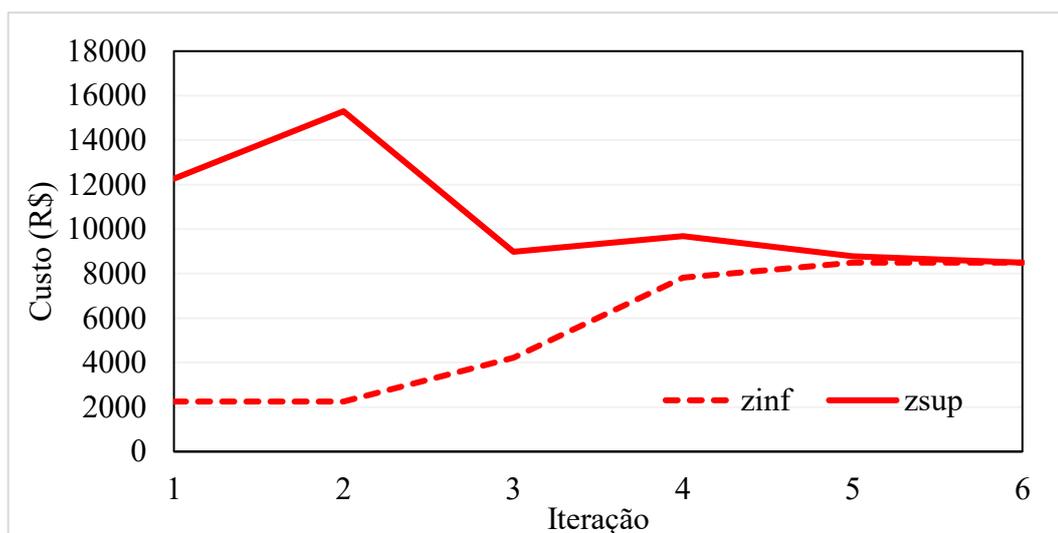
$$\alpha_1 + M_{51,j1} \cdot v_{1,1} + M_{52,j1} \cdot v_{21} + M_{61,j1} \cdot ya_{11} \geq B_{1,j1} \quad (141)$$

$$0 \leq pt_{i1} \leq 1000, pd_1 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, 0 \leq qr_{11} \leq 500, 0 \leq sr_{11}, 3000 \leq v_{1,2} \leq 5000, 0 \leq qh_{11} \leq 500, 0 \leq sh_{11}, 2300 \leq v_{2,2} \leq 3300, 0 \leq qh_{21} \leq 1300, 0 \leq sh_{21}, 0 \leq qr_{21} \leq 1450, 0 \leq sr_{21}.$$

Baseado no PL mostrado acima, resolve-se por PDD usando os 8 cenários de afluência, os parâmetros do modelo PAR(p) por bacia e o fator médio de conversão mostrados em sequência nas Tabela 10, Tabela 11 e Tabela 12. Assim a Figura 21 mostra evolução do custo

inferior e superior ao longo do processo iterativo, nota-se que o valor do custo inferior e superior é igual na sexta iteração. Observa-se que a metodologia reduzida obteve convergência em 2 iterações a menos que modelagem individualizada mostrada na Figura 20.

Figura 21 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR por bacia.



#### 4.1.3.3 Modelo de EAFdA

Por sua vez, a Tabela 13 mostra os resíduos sorteados da árvore de cenário referentes a energia afluyente FdA os quais são dados pela variável  $\xi_{E_{xxx}}$ , e ao lado foram replicados os mesmos resíduos das duas usinas de reservatório existentes no sistema base e contidos na Tabela 8 pois elas fazem parte da metodologia proposta. Baseado no histórico de afluência por EAFdA, os parâmetros encontrados no modelo PAR(p) são expostos na Tabela 13, neste caso, a ordem máxima do modelo PAR(p) é 2 obtido em  $t=4$ , os demais estágios apresentam ordem 1. E por fim, o fator de conversão médio da afluência por bacia na afluência individualizada em cada estágio  $t$  é mostrada na Tabela 15.

Tabela 13 – Resíduos da bacia por energia afluyente FdA (MWm) e individualizado para UHE de reservatório (m<sup>3</sup>/s).

	EAFdA		UHE 2		UHE 3	
$t$	$\xi_{E_{1t1}}$	$\xi_{E_{1t2}}$	$\xi_{H_{1t1}}$	$\xi_{H_{1t2}}$	$\xi_{H_{2t1}}$	$\xi_{H_{2t2}}$
1	350,80		224		312	

2	407,55	190,90	185	412	174	365
3	310,45	55,80	43	309	52	283
4	352,95	78,00	322	21	321	72

Tabela 14 – Coeficientes do modelo PAR(p) por energia afluyente FdA até T=4.

$t$	1	2	3	4
$\phi E_{t-1}$	0,3420	1,0418	0,3727	0,3380
$\phi E_{t-2}$				0,2816

Tabela 15 – Fator de conversão média da energia afluyente FdA para afluência por usina hidrelétrica.

UHE	$t=1$	$t=4$	$t=3$	$t=4$
$\phi I_{1t}$	0,3871	0,5581	0,6984	0,7711
$\phi I_{4t}$	0,6129	0,4419	0,3016	0,2289

Da mesma forma que as metodologias anteriores, com base nos dados de entrada expostos até o presente momento, o PL inicial referente ao estágio  $t=1$  é:

$$\omega_1 = \min \sum_{i=1}^5 CT_i \cdot pt_{i1} + 50 \cdot pd_1 + \alpha_1 \quad (142)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^5 pt_{i1} + \sum_{r=1}^2 EH_{r1} \cdot qh_{r1} + \sum_{r=1}^2 ER_{r1} \cdot pr_{r1} + pd_1 = 4000,$$

$$qr_{11} + sr_{11} - yr_{11} = 0,$$

$$v_{1,1} - va_{11} + qh_{11} + sh_{11} - yh_{11} = 0,$$

$$v_{2,1} - va_{21} + qh_{21} + sh_{21} - [qh_{11} + sh_{11} + qr_{11} + sr_{11}] - yh_{21} = 0,$$

$$qr_{21} + sr_{21} - [qh_{21} + sh_{21}] - yr_{21} = 0,$$

$$ie_1 - 0,3224 \cdot iea_0 = 350,80,$$

$$yr_{11} - 0,3871 \cdot ie_1 = 0,$$

$$yh_{11} - 0,4264 \cdot yha_{1,0} = 224,$$

$$yh_{21} - 0,3036 \cdot yha_{2,0} = 312,$$

$$yr_{21} - 0,6129 \cdot ie_1 = 0,$$

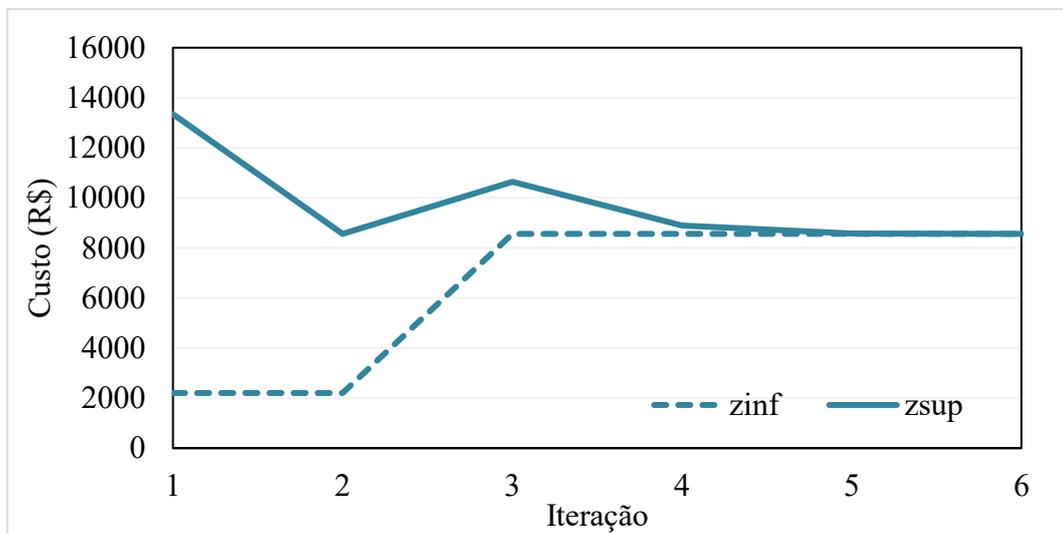
$$\alpha_1 + M_{81,j1} \cdot v_{12} + M_{82,j1} \cdot v_{22} + M_{91,j1} \cdot yh_{11} + M_{92,j1} \cdot yh_{21} + M_{10,j1} \cdot ie_{11} \geq B_{1,j1}, \quad (143)$$

$$0 \leq pr_{11} \leq 1000, pd_1 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, 0 \leq qr_{11} \leq 500, 0 \leq sr_{11}, 3000 \leq v_{1,2} \leq 5000, 0 \leq qh_{11} \leq 500, 0 \leq sh_{11},$$

$$2300 \leq v_{2,2} \leq 3300, 0 \leq qh_{21} \leq 1300, 0 \leq sh_{21}, 0 \leq qr_{21} \leq 1450, 0 \leq sr_{21}.$$

Baseado no PL mostrado acima, resolve-se por PDD de amostras comum usando os usando os 8 cenários de afluência, os parâmetros do modelo PAR(p) por bacia e o fator médio de conversão mostrados em sequência na Tabela 13, Tabela 14 e Tabela 15. Como resultado, a Figura 22 mostra a evolução do custo inferior e superior, onde o encontro do custo inferior e superior se deu na sexta iteração. De forma análoga ao caso com afluência por bacia, a metodologia reduzida de energia afluenta FdA levou 2 iterações a menos que a metodologia individualizada para obter a convergência.

Figura 22 – Excursão do custo inferior (linha pontilhada) e superior (linha contínua) da modelagem PAR EAFdA.



Vale destacar que mesmo no sistema pequeno é possível observar uma vantagem das metodologias simplificadas as quais um menor número de iterações para o modelo atingir a convergência foi observado, este fato se deve ao menor espaço de estado a ser percorrido nas metodologias reduzidas. Considerando ordem 1 no modelo PAR(p), a equação do corte do modelo individualizado (139) possui 6 variáveis de estado – 2 referentes aos volumes dos reservatórios e 4 referentes as afluências, entre as últimas 4, duas são de UHE de reservatório e as outras duas UHE fio d’água. Já no modelo por bacia o corte (141) tem 3 variáveis de estado,

2 referente aos volumes do reservatórios e apenas 1 de afluência da bacia em substituição das 4 vistas no modelo individualizado. Por fim, na FCF do modelo por energia afluenta FdA (143) verifica-se 5 variáveis de estado – 2 referentes aos volumes dos reservatórios e 3 referentes as afluências, entre as 3 de afluência, duas são das UHEs de reservatório e uma da energia FdA. Nota-se que em comparação com o individualizado houve uma substituição de 2 variáveis de estado das usinas individualizadas fio d'água por 1 da energia afluenta FdA. Quanto a custo total de cada problema, destaca-se sua semelhança entre os casos pois as energias afluentes foram calculadas com base nas afluências individualizadas sorteadas.

Diante dos pontos discutidos no parágrafo anterior, verifica-se que no sistema pequeno, a redução da dimensão em relação ao número de variáveis de estado é pequena, por outro lado, em um sistema maior essas reduções ganham mais relevância acelerando o processo iterativo da PDDE, assim a simplificação tem impacto direto na quantidade de cortes para compor a política calcula.

#### 4.2 REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE EM VARIÁVEIS DE ESTADO DE VOLUME

O principal objetivo do problema do POEMP é calcular uma política de operação que estima um custo associado a quantidade de água armazenada em cada reservatórios do sistema. Tais políticas são determinadas através de modelos matemáticos de otimização cujo objetivo é minimizar os custos de operação das usinas térmicas e do custo de déficit, assim, uma modelagem mais detalhada possivelmente contribui para uma estimativa melhor do valor da água. Neste sentido, é importante que cada reservatório seja inserido no modelo matemático de forma explícita para que seus recursos sejam otimizados de forma própria. No entanto, na prática, isso nem sempre é possível pois uma modelagem individualizada pode levar a uma explosão dimensional do problema e assim o custo computacional para encontrar uma solução suficientemente boa torna-se proibitivo.

Por isso, uma estratégia para evitar o crescimento elevado da dimensionalidade muito utilizada na literatura (DE MATOS, 2012; GUIGUES, 2014; MACEIRA et al., 2018; MARCATO, 2002) é a modelagem por REE (ARVANITIDIS; ROSING, 1970) a qual é uma forma simplificada de representar os reservatórios do sistema. Mais especificamente, o objetivo é agregar todos os reservatórios do sistema e seus parâmetros em um único reservatório equivalente de energia. Um dos parâmetros mais importantes da modelagem por REE é a energia armazenável máxima a qual reflete a capacidade total de armazenamento do sistema.

Para calcular esta grandeza, adota-se a premissa que todos os reservatórios estão sendo operados em paralelo, além disso, a água utilizada nos reservatórios a montante viajará ao longo de todo o rio, e também contribuirá para a geração de todas as usinas a jusante. Assim, matematicamente, a energia armazenada máxima do sistema é dada pela soma do produto da produtibilidade acumulada pelo volume útil máximo de cada reservatório ao longo da cascata. Caso uma usina nova é colocada em operação, a energia armazenada máxima é ajustada por um fator de correção. Desta maneira, esta modelagem simplificada permite reduzir a explosão dimensional do problema. Em contrapartida, a operação individual da usina hidrelétrica é simplificada, podendo perder algumas características que são determinantes para se obter um ponto de operação viável.

Diante do exposto, é proposto utilizar o parâmetro da energia armazenada em substituição das variáveis individualizadas de volume com o objetivo de reduzir a dimensionalidade do problema. Ressalta-se que no PL de cada nó continua sendo representado todas as variáveis do problema de forma individualizada, exceto o volume. Assim, em cada equação do balanço hídrico o volume será proporcional a uma parcela vinda da decisão em termos de energia armazenada. Para melhor detalhar esta metodologia, na próxima seção é mostrada as simplificações matemáticas para fazer a equivalência entre volume de cada usina e energia armazenada do sistema.

#### 4.2.1 O Modelo Earm

O modelo dado pelas equações (23)-(36) é individualizado. Como já discutido anteriormente, quanto maior o número de variáveis de estado, maior o espaço de estados que o algoritmo deve percorrer para obter uma solução aproximada. Assim, para diminuir a dimensão do problema, é adotada a estratégia de representar a energia armazenada do sistema como variável de estado em detrimento do volume armazenado de cada UHE, desta forma, diminuindo a quantidade de variáveis necessárias na composição da FCF. A energia armazenada reflete a quantidade de energia produzida através do esvaziamento dos reservatórios que compõem o sistema, ou seja, mede a capacidade total de armazenamento do conjunto de reservatórios.

Assim sendo, a energia armazenada ao final do estágio  $t$  no reservatório  $r$  é expressa por:

$$ear_{rt} = (v_{r,t+1} - V_r^{\min}) \cdot \sum_{r=0}^{JH_r} ER_{rt}, \quad (144)$$

onde:

$ear_{rt}$  : energia armazenada no reservatório  $r$  no estágio  $t$  (MWm);

$JH_r$  : número de usinas a jusante da usina  $r$  inclusive;

A equação (144) significa que energia armazenada no reservatório  $r$  em  $t$  é dado pela multiplicação da produtibilidade acumulada pelo volume útil verificado no instante  $t$ . Por sua vez, a produtibilidade acumulada é o somatório de todas as produtibilidades a jusante de  $r$ , incluindo  $r$ . Note que, para calcular a energia máxima do sistema basta substituir  $v_{r,t+1}$  em (144) pela capacidade máxima de armazenamento do reservatório e somar cada parcela referente aos demais reservatórios do sistema:

$$EAM_{st}^{\max} = \sum_{r=0}^{NR} \left[ (V_r^{\max} - V_r^{\min}) \cdot \sum_{r=0}^{JH_r} ER_{rt} \right], \quad (145)$$

Uma modelagem simples pode ser construída considerando fixa a repartição entre  $ear_{st}$  para cada reservatório com base no armazenamento máximo:

$$FE_{rt} = \sum_{r=0}^{JH_r} ER_{rt} \cdot (V_{rt}^{\max} - V_{rt}^{\min}) / EAM_{st}^{\max}, \quad (146)$$

onde:

$FE_{rt}$  : fator de repartição da energia armazenada no sistema  $s$  de cada usina  $r$  no estágio  $t$ .

Assim, com (146) é possível escrever uma relação entre a energia armazenada total  $ear_{st}$  e o volume  $v_{r,t+1}$  de cada reservatório:

$$FE_{rt} \cdot ear_{st} = (v_{r,t+1} - V_{rt}^{\min}) \cdot \sum_{r=0}^{JH} ER_{rt}, \quad (147)$$

isolando o volume, tem -se:

$$v_{r,t+1} - V_{rt}^{\min} = FE_{rt} \cdot ear_{rt} / \sum_{r=0}^{JH} ER_{rt}, \quad (148)$$

$$v_{r,t+1} = KE_{rt} \cdot ear_{rt} + V_{rt}^{\min}, \quad (149)$$

onde  $KE_{rt}$  é fator de conversão da energia armazenada total em volume do reservatório  $r$  dada em ( $hm^3/MW$ ), e pode ser calculada como:

$$KE_{rt} = FE_{rt} / \sum_{r=0}^{JH} ER_{rt}. \quad (150)$$

Agora, pode-se eliminar as variáveis de volume armazenado do problema principal, usando a relação encontrada em (149) nas equações de balanço hídrico (25) e volume médio (29), assim o PL de cada nó nessa proposta de redução de dimensionalidade pode ser observado abaixo:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+TX)} \alpha_t \quad (151)$$

s.a.:

$$KE_{r,t+1} \cdot ear_{s,t+1} + V_{rt}^{\min} - ear_{st} \cdot KE_{rt} + K \cdot \sum_{l=1}^{NL} \sum_{m=1}^{MH} [qh_{rlt} + sh_{rlt} - (qh_{mlt} + sh_{mlt} + qr_{mlt} + sr_{mlt})] \quad (152)$$

$$-K \cdot (yh_{rt} + yhc_{rt}) = 0, \quad r = 1, \dots, NH,$$

$$vm_{rt} - 0.5 \cdot (KE_{r,t+1} \cdot ear_{s,t+1} + V_{rt}^{\min} + ear_{st} \cdot KE_{rt}) = 0, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (153)$$

$$ear_{st} = EA_{st}, \quad s = 1, \dots, NS, \quad (154)$$

$$\alpha_t + \sum_{s=1}^{NS} M_{13sjt} \cdot ear_{s,t+1} + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{14rjt} \cdot yh_{rt} + \sum_{p=1}^{HP_{rt}} M_{16r,j,t-p} \cdot yah_{r,t-p} \right) + \sum_{r=1}^{NR} \left( M_{15rjt} \cdot yr_{rt} + \sum_{p=1}^{RP_{rt}} M_{17r,t-p,j} \cdot yar_{r,t-p} \right) \geq B_{6jt}, \quad j = 1, \dots, NC_t, \quad (155)$$

$$(24)-(29), (30) (37). \quad (156)$$

onde:

- $M_{13stj}$  : coeficiente da energia armazenada no sistema  $s$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/ $hm^3$ ];
- $M_{14rt,j}$  : coeficiente da afluência da usina de reservatório  $r$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/( $m^3/s$ )].
- $M_{15rtj}$  : coeficiente da afluência da usina a fio d'água  $r$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/( $m^3/s$ )].
- $M_{16r,t-p,j}$  : coeficiente da afluência da usina de reservatório  $r$  em  $t - p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/( $m^3/s$ )].
- $M_{17r,t-p,j}$  : coeficiente da afluência da usina fio d'água  $r$  em  $t - p$  da inequação linear por partes  $j$  que representa a FCF do estágio  $t$  [\$/( $MW$ )].

Observa-se que as variáveis de estado neste caso são  $EA_{st}$ ,  $YH_{r,t-p}$  e  $YR_{r,t-p}$ . Basicamente, as mudanças frente ao PL clássico mostrado em (23)-(37) é a substituição da variável de volume  $v_{rt}$  pela energia armazenada  $ear_{st}$ , para isso muda-se o balanço hídrico, assim (152) representa as novas restrições de balanço hídrico e (153) as novas equações de volume médio, em complemento (154) é a equação artificial para capturar a influência da  $ear_{st}$  na função objetivo do problema. Na equação da FCF (155) nota-se que existe a dependência de  $EA_{st}$ ,  $YH_{r,t-p}$  e  $YR_{r,t-p}$ .

Esta metodologia apresentada tem uma vantagem em relação a clássica de (ARVANITIDIS; ROSING, 1970) a qual também se adota a hipótese de gerenciamento de reservatórios em paralelo, no entanto, este cálculo é feito sem a consideração de novas afluências individualizadas. Na proposta deste trabalho, as afluências individualizadas são consideradas devido a modelagem de cada PL continuar sendo por usina.

A seguir é apresentado um exemplo prático da modelagem proposta.

#### 4.2.1.1 Aplicação prática do modelo *Earm*

O mesmo sistema base visto nos exemplos dos modelos de afluência é utilizado nesta seção. Como o foco é a redução da variável de estado de volume, usa-se o modelo independente de afluência, neste sentido, os resíduos da Tabela 8 são usados como afluência individualizada. Adicionalmente, os dados de entrada do sistema de volume e produtividade estão na Tabela 7, assim, a produtividade acumulada convertida em  $hm^3$

são  $HP_1=5,3737$  MW/hm<sup>3</sup> e  $HP_2=3,0588$  MW/hm<sup>3</sup> para a usina 1 e 2 respectivamente. A energia armazenada inicial e máxima podem ser calculadas por:

$$EAM^{\max} = 2000 \cdot HP_1 + 1000 \cdot HP_2 = 13806,21 \text{ MW} \quad (157)$$

onde a contribuição de energia de cada é:

$$\begin{aligned} EAM_1^{\max} &= 2000 \cdot HP_1 = 10747,35 \quad \text{MW} \\ EAM_2^{\max} &= 1000 \cdot HP_2 = 3058,86 \quad \text{MW} \end{aligned} \quad (158)$$

Assim o cálculo do fator de conversão de energia MW em hm<sup>3</sup> é:

$$\begin{aligned} FE_1 &= EAM_1^{\max} / (EAM^{\max} \cdot HP_1) = 0,1448 \text{ hm}^3/\text{MW} \\ FE_2 &= EAM_2^{\max} / (EAM^{\max} \cdot HP_2) = 0,0724 \text{ hm}^3/\text{MW} \end{aligned} \quad (159)$$

A energia armazenada inicial é calculada usando o volume inicial e final e é dado por:

$$eaa = 1000 \cdot HP_1 + 800 \cdot HP_2 = 7820,76 \text{ MW} \quad (160)$$

Assim, o PL do estágio  $t=1$  é mostrado a seguir:

$$\omega_1 = \min \sum_{i=1}^5 CT_i \cdot pt_{i1} + 50 \cdot pd_1 + \alpha_1 \quad (161)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^5 pt_{i1} + \sum_{r=1}^2 EH_{r1} \cdot qh_{r1} + \sum_{r=1}^2 ER_{r1} \cdot pr_{r1} + pd_1 = 4000, \quad (162)$$

$$qr_{11} + sr_{11} - yr_{11} = 0,$$

$$FE_1 \cdot [ea_{11} - eaa_{11}] + qh_{11} + sh_{11} - yh_{11} = 0, \quad (163)$$

$$FE_2 \cdot [ea_{11} - eaa_{11}] + qh_{21} + sh_{21} - [qh_{11} + sh_{11} + qr_{11} + sr_{11}] - yh_{21} = 0, \quad (164)$$

$$qr_{21} + sr_{21} - [qh_{21} + sh_{21}] - yr_{21} = 0, \quad (165)$$

$$yr_{11} = 34, \quad yh_{11} = 224, \quad yh_{21} = 163, \quad yr_{21} = 312, \quad (166)$$

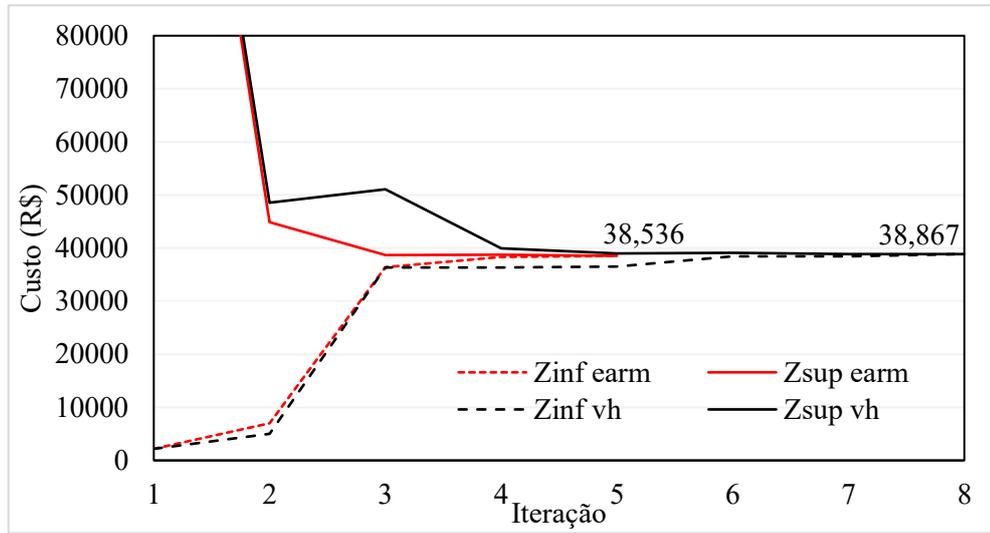
$$0 \leq pt_{11} \leq 1000, pd_1 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, 0 \leq qr_{11} \leq 500, 0 \leq sr_{11}, 3000 \leq v_{1,2} \leq 5000, 0 \leq qh_{11} \leq 500, 0 \leq sh_{11}, \\ 2300 \leq v_{2,2} \leq 3300, 0 \leq qh_{21} \leq 1300, 0 \leq sh_{21}, 0 \leq qr_{21} \leq 1450, 0 \leq sr_{21}. \quad (167)$$

Neste sentido, foi resolvido via PDD de amostras comuns com 2 aberturas e  $T=4$  totalizando 8 cenários com os dois casos:

- Modelo Earm: Aplicada a modelagem acima (161)-(167) a qual contém apenas 1 variável de estado da energia armazenada;
- Modelo vh: Modelagem individualizada onde cada usina de reservatório gera uma variável de estado, neste caso, tem-se duas variáveis de estado;

A figura abaixo mostra a comparação entre a evolução do custo inferior e superior entre os casos 1 e 2 acima descritos. Nota-se que o modelo earm convergiu em 4 iterações com o custo total de R\$38,990.00 indicado na figura. Por outro lado, o modelo individualizado convergiu em 8 iterações com custo total de R\$38,867.00. Observa-se que o modelo earm foi capaz de convergir em 4 iterações a menos que o modelo vh, com uma diferença de custo de R\$137 o que representa uma diferença de 0,352% em relação ao custo do modelo vh. Destaca-se que essa pequena diferença era esperada em sistemas de pequeno porte pois a decisão de *ear* pode se ajustar de forma que a operação em paralelo se aproxime da real solução ótima dada pelo modelo vh. Com o crescimento do sistema e com uma maior quantidade de UHE de reservatório incluídas no problema de otimização, equilibrar esta decisão de *ear* para mais próximo do ótimo de cada reservatório passa ser uma tarefa não trivial.

Figura 23 – Comparação de custo inferior e superior dos casos com *ear* e *vh* como variável de estado.



## 5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo destina-se a apresentação dos resultados da aplicação prática das metodologias expostas ao longo deste trabalho em sistemas de grande porte, onde serão analisadas as políticas operativas da maioria dos casos simulados. Os resultados numéricos estão divididos em duas áreas de trabalho: (I) métodos de regularização; (II) redução da dimensionalidade. Em (I) mostra-se os resultados do método de regularização dos Centros de Chebyshev. Adicionalmente, é desenvolvida uma comparação entre o CC e outros dois métodos de regularização que existem na literatura – a decomposição regularizada multiestágio (ASAMOV; POWELL, 2018) e a regularização de nível baseada em soluções normais (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019). Em (II), são mostrados os resultados do modelo de afluência baseado em agregação e energia afluenta fio d'água. E para finalizar, são apresentados os efeitos de uma metodologia que representa variáveis de estado de energia armazenada, aplicada a modelos individualizados.

Para avaliar a qualidade da política operativa, neste trabalho, são utilizados dois critérios. O primeiro é através do cálculo da brecha de otimalidade ou *gap*, e o segundo, é dado pela determinação de um intervalo de confiança (IC) unilateral. O cálculo do *gap* é utilizado nos casos referentes a comparação dos métodos de regularização. Por outro lado, usa-se o IC nos casos em que as FCFs possuem variáveis de estado distintas. Há, no entanto, alguns casos da metodologia CC que são executadas instâncias individuais para avaliar a política operativa. Todas as características de ambos os critérios serão mais bem detalhadas em seção posterior.

Computacionalmente, são usadas estratégias de paralelismo as quais são executadas em computadores Xeon CPU com 2.60GHz usando 8 threads e 128 GB RAM. O *solver* Gurobi® é utilizado na versão estudantil 8.0 e 9.1 em um ambiente de programação C++. Adicionalmente, alguns casos são rodados em computador pessoal Intel Core i7-2600 CPU 3.4 GHz, 4GB RAM, usando 4 threads.

Dois sistemas foram utilizados para executar todos os casos contidos neste capítulo. As principais características de cada um deles são descritas na seção a seguir.

### 5.1 SISTEMAS

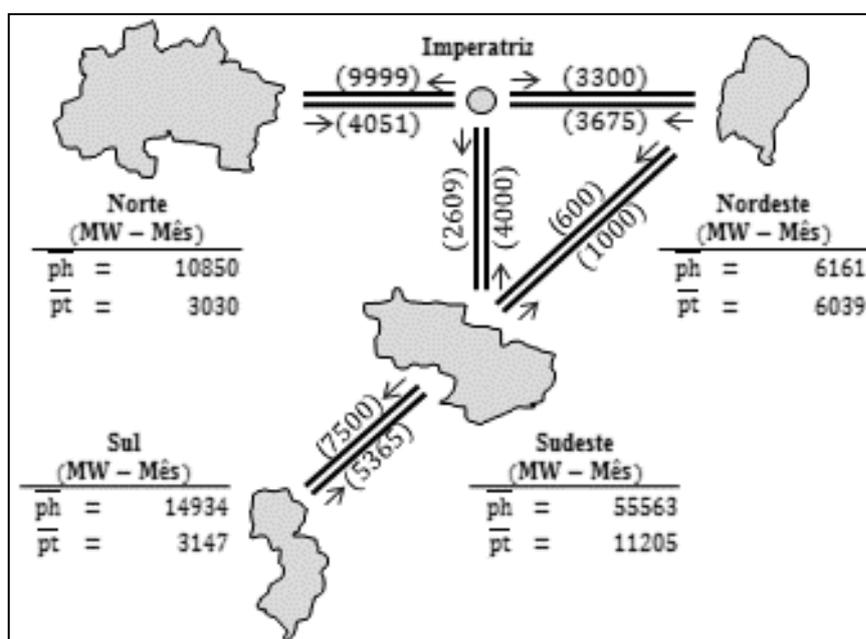
Esta seção contém informações sobre os dois sistemas usados neste trabalho. O primeiro trata-se do o SIN, e o segundo, é um sistema reduzido.

### 5.1.1 Sistema Interligado Brasileiro

A configuração hidrotérmica do SIN utilizada é proveniente dos dados oficiais de janeiro de 2016. O parque gerador é composto de 153 usinas hidrelétricas e 117 térmicas. Todos os empreendimentos de geração estão distribuídos em quatro submercados. Outras características também são consideradas no problema, como por exemplo, geração de pequenas usinas, renováveis, importação e exportação de energia, e interconexão de fluxo entre os submercados. O horizonte de planejamento considerado é de cinco anos em base mensal totalizando  $T=60$  estágios. Durante os anos de planejamento, algumas usinas hidrelétricas e térmicas podem sofrer alterações de operação, isto é, estão sujeitas a mudanças nos limites de geração, vazão turbinada máxima e mínima, entrada de novas máquinas em operação ou a saída delas por manutenções programadas.

Na Figura 24 é desenhado o sistema conectado o qual mostra os quatro submercados modelados, são eles: Sul, Sudeste, Norte e Nordeste. Adicionalmente, os limites máximos e mínimos de fluxo de energia são expostos na figura. Além disso, o déficit de energia é penalizado e modelado por quatro níveis de déficit. Caso a demanda não seja suprida as porcentagens penalizadas são **0-5%**, **5-10%**, **10-20%**, **20-100%** a valores de R\$1.364, 2.943, 6.151, 6.989 respectivamente.

Figura 24 – Sistema interconectado brasileiro.



Fonte: adaptado de (LARROYD, 2016)

Considerando o sistema hidráulico, 21 bacias são distribuídas ao longo dos quatro submercados.

Também são considerados três patamares de carga.

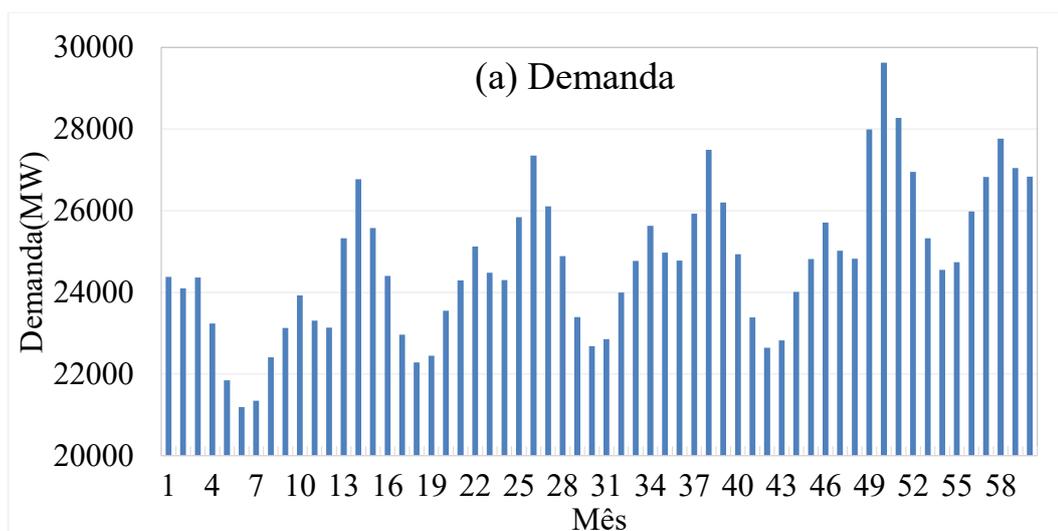
Em conclusão, a cada estágio  $t$  e nó de da árvore de cenários o modelo matemático é um PL com aproximadamente 2886 variáveis primais e 1459 restrições. Vale destacar que esses valores podem mudar dependendo da estratégia de solução escolhida. Por fim, a produtividade constante é usada como FPH.

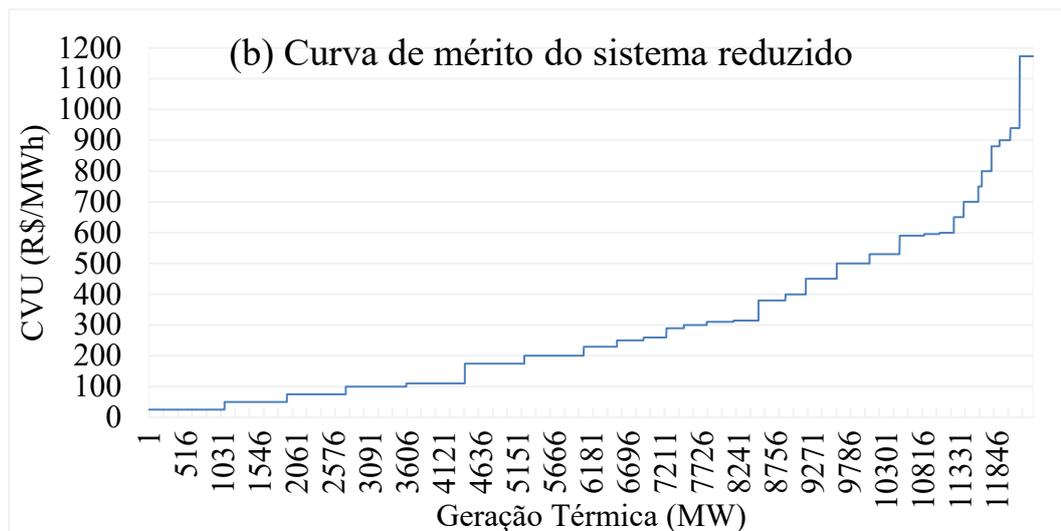
### 5.1.2 Sistema Reduzido

O Sistema hidrotérmico reduzido neste trabalho é uma parte do submercado Sudeste e Sul do SIN. Este sistema foi utilizado para apresentar a comparação entre os métodos de regularização e as metodologias de redução da dimensionalidade. Em termos médios, a demanda do sistema reduzido é de 24.248 (MW) ao longo dos 5 anos de horizonte de planejamento, a evolução da demanda média mensal por estágio pode ser observada na Figura 25(a). Ademais, é considerado na modelagem da demanda três patamares de carga.

O parque térmico é composto por 30 usinas fictícias, a Figura 25(b) exhibe a curva de mérito onde é exposto o custo CT (R\$/MWh) pela potência despachada (MW).

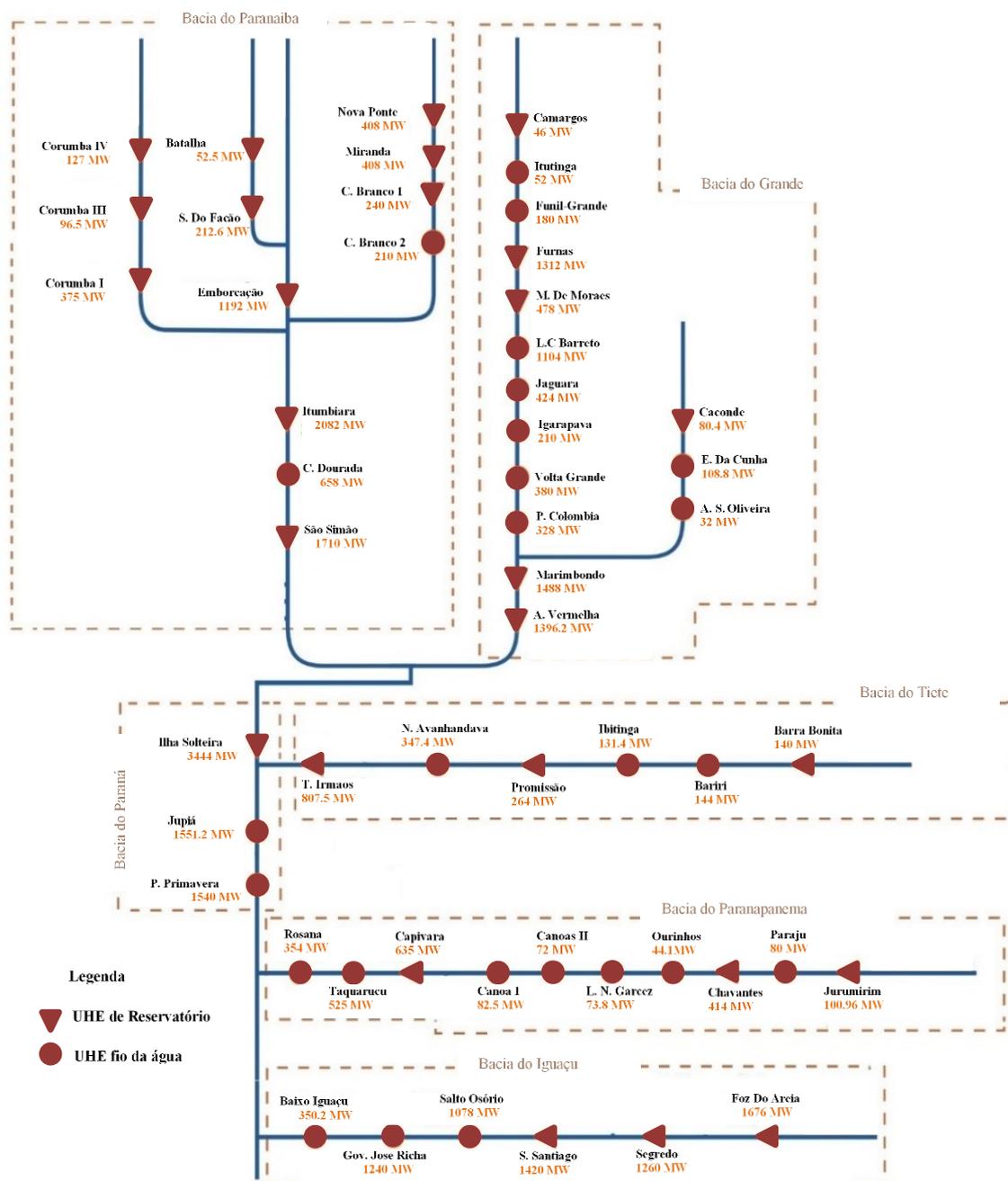
Figura 25 – (a) Demanda e (b) Curva de mérito utilizada no sistema reduzido no horizonte de  $T=60$ .





Em termos de geração de hidrelétrica, 53 hidrelétricas são utilizadas, sendo 28 de reservatório e 25 fios d'água. A composição do sistema hidráulico e a potência de cada usina é mostrada na Figura 26.

Figura 26 – Cascata do Sistema reduzido.



Fonte: Adaptado de (ONS, 2018)

Adicionalmente, a Tabela 16 mostra a produtibilidade, vazão turbinada máxima ( $Q^{\max}$ ) e limites máximos e mínimos de volume para cada usina do sistema reduzido.

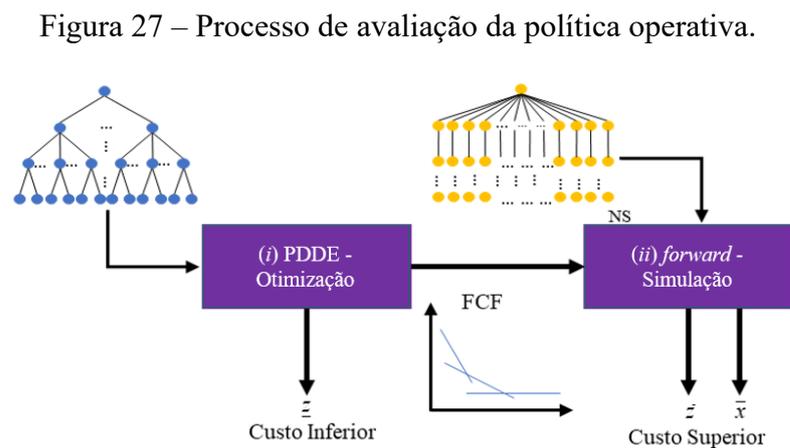
Tabela 16 – Dados gerais das UHEs do sistema reduzido.

UHE	Produtibilidade (m <sup>3</sup> /s)/MW	Q <sup>max</sup> (m <sup>3</sup> /s)	Volume (hm <sup>3</sup> )	
			Mínimo	Máximo
Funil-Grande	0,353	585		
Batalha	0,334	154	430,05	1.781,61
Serra Facão	0,653	324	1.752	5.199
Capim Branco 1	0,495	495	228,27	241,13
Capim Branco 2	0,415	537		
Corumbá IV	0,613	208	2.936,6	3.708
Piraju	0,239	362		
Corumbá III	0,355	278	709	972
Ourinhos	0,104	486		
Camargos	0,173	220	120	792
Itutinga	0,259	236		
Furnas	0,752	1.692	5.733	22.950
M. De Moraes	0,325	1.328	1.540	4.040
Estreito	0,575	2.028		
Jaguará	0,428	1.076		
Igapava	0,158	1.480		
Volta Grande	0,257	1.584		
P. Colômbia	0,183	1.988		
Caconde	0,744	94	51	555
E. Da Cunha	0,755	148		
A.S. Oliveira	0,222	178		
Marimondo	0,449	2.944	890	6.150
A. Vermelha	0,480	2.958	5.856	11.025
Emborcação	1,043	1.048	4.669	17.725
Nova Ponte	0,928	576	2.412	12.792
Miranda	0,617	675	974	1.120
Corumbá I	0,602	570	470	1.500
Itumbiara	0,639	2.940	4.573	17.027
C. Dourada	0,297	2.513		
São Simão	0,645	2.670	7.000	12.540
Barra Bonita	0,154	756	569	3.135
A.S. Lima	0,197	771		
Ibitinga	0,213	702		
Promissão	0,197	1.293	5.280	7.408
Navanhandava	0,297	1.431		
Três Irmãos	0,400	11.604	9.923	13.372
I. Solteira	0,375	8.344	25.467	34.432
Jupia	0,218	8.904		
P. Primavera	0,179	364	14.400	20.000
A.A. Laydner	0,283	644	3.843	7.008
Chavantes	0,614	580	5.754	8.795
L.N. Garcez	0,157	561		
Canoas II	0,131	567		
Canoas I	0,155	1.686		
Capivara	0,355	2.550	4.816	10.540
Taquaruçu	0,236	2.468		
Rosana	0,199	1.376		
Foz Do Areia	1,084	2.502	1.974	5.779
Baixo Iguaçu	0,162	1.268	183	211,92
Segredo	1,021	1.576	2.562	2.950
S. Santiago	0,858	1.784	2.662	6.775
Salto Osorio	0,654	2.100		
Gov. Jose Richa	0,602	2.180		

## 5.2 SIMULAÇÃO DA POLÍTICA OPERATIVA

A política operativa é um dos principais resultados a serem obtidos da solução de problemas de POEMP. Cada política é determinada a partir das metodologias expostas neste trabalho, na realidade elas são um conjunto de inequações lineares ou cortes, a este conjunto dá-se o nome de função de custo futuro. Os cortes de cada política operativa carregam em si de maneira implícita um conjunto de parâmetros tais como geração térmica, armazenamento, custo de operação, déficit, entre outros. Para se extrair estes fatores utiliza-se um simulador de políticas. Ao final, estas grandezas são comparadas com os parâmetros de outra FCF afim de avaliar qual política é melhor. De forma esquemática a estrutura completa de determinação e simulação da política pode ser vista na Figura 27.

Assim como já exposto anteriormente, neste trabalho são utilizados dois critérios de avaliação da política operativa e ambos possuem etapas semelhantes. Assim, para verificar a qualidade da política, o processo é dividido em duas partes: (i) PDDE - Otimização e (ii) *forward* - Simulação. Em (i) o objetivo é a determinação da FCF via PDDE ou outro método de regularização, desta etapa pode ser estimado o custo inferior. A etapa (ii) consiste em resolver a etapa *forward* usando a FCF obtida em (i) com um determinado número de cenários sintéticos ( $NS^{out}$ ) *out-of-sample* gerados. No processo (ii) com a média dos cenários executados é obtido o custo esperado de operação (Custo Superior) e as variáveis primais desejadas.



Comparar diferentes políticas não é uma tarefa trivial e muitas vezes é muito custoso computacionalmente. Alguns autores usam o cálculo da brecha de otimalidade como caráter avaliativo da FCF (DE MATOS, 2012; LARROYD, 2012; TAHAN JÚNIOR, 2017). De forma

resumida, a brecha de otimalidade é estimada através de um cálculo probabilístico utilizando os parâmetros do processo (i) e (ii). Ao final, a política com menor *gap* é considerada melhor. Ademais, outra análise que pode ser feita, é a determinação do intervalo de confiança o qual é estimado por um cálculo estatístico com os parâmetros obtidos em (ii). Nesta última análise, considera-se a melhor política aquela que atingir menor IC. Além disso, é uma comparação mais justa quando se tem casos em que os aspectos de modelagem são distintos. A seguir ambos os critérios de avaliação da política são detalhados.

### 5.2.1 Estimação da Brecha de Otimalidade no Problema Estocástico (*gap*)

O objetivo de avaliar a qualidade da solução pelo cálculo da brecha de otimalidade, ou *gap*, é estimar a distância entre a solução da PDDE encontrada com árvore de cenários de  $NA_t$  aberturas por estágio, com a solução do problema original obtido pelo processo estocástico contínuo. Portanto, quanto menor a diferença entre o resultado estimado e o real melhor a solução estimada obtida. Dessa forma, obtém-se um intervalo com no qual o valor do *gap* está inserido considerando um certo nível de confiança. Os conceitos utilizados nesta seção seguem o proposto por (SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYNSKI, 2009). Assim a brecha de otimalidade é dada por:

$$gap(x_1^i) = z(x_1^i) - z^*, \quad (168)$$

onde,  $z^*$  é o valor ótimo do problema real e  $z(x_1^i)$  é a média dos cenários e obtidos de forma independente e com função de densidade de probabilidade original em que  $x_1$  é um ponto viável, ou seja, é uma parte do processo de (i). No entanto, nota-se que é impossível calcular exatamente  $z^*$  pois uma árvore de 20 aberturas e 60 estágios teria um número de cenários igual a  $20^{59}$ . Assim, ambas as parcelas da equação (168) deve ser estimadas considerando os processos (i) e (ii). Portanto, o *gap* é calculado por:

$$gap(x_1^i) = \bar{\mu}_{Z_{NS}} + v_{1-\alpha} \cdot \bar{\sigma}_{Z_{NS}} - \bar{\mu}_{Z_{NU}} + t_{\alpha, v} \cdot \bar{\sigma}_{Z_{NU}}, \quad (169)$$

sendo  $v_{1-\alpha} = \Phi(1-\alpha)$ , onde:

NS : Número de cenários simulados;

- $\mu_{\bar{z}_{NS}}$  : Média dos custos de operação dos NS cenários simulados;  
 $\sigma_{\bar{z}_{NS}}$  : Desvio padrão do custo de operação dos NS cenários simulados;  
 $\Phi(1-\alpha)$  : é a Função de Distribuição Acumulada da Distribuição Normal Padrão;  
 NU : Número de amostras otimizadas;  
 $\mu_{\underline{z}_{NU}}$  : Média do custo inferior na convergência das NU árvores de cenários otimizadas;  
 $\sigma_{\underline{z}_{NU}}$  : Desvio padrão do custo inferior na convergência das NU árvores de cenários otimizadas;  
 $t_{\alpha, \nu}$  : valor crítico da distribuição *t-student* com  $\nu$  graus de liberdade sendo  $\nu=NU-1$ ;

Os primeiros dois termos de (169) são referentes a estimação de custo superior, revisitando a Figura 27 é análogo ao processar (ii). Portanto, é o resultado da simulação de uma FCF com NS cenários *out-of-sample* amostrados. Assim calcula-se a média  $\mu_{\bar{z}_{NS}}$  e o desvio padrão  $\sigma_{\bar{z}_{NS}}$  dos valores dos custos de operação da amostra. Destaca-se que, o número de amostras NS geralmente é elevado, devido a maior agilidade de se obter os resultados. Por outro lado, os dois últimos termos da equação acima dizem respeito a estimação custo inferior, a qual é semelhante a fazer a etapa (i) várias vezes. Portanto, otimiza-se uma quantidade NU de árvores de cenários para obter o valor do custo inferior no atendimento do critério de parada, e assim calcular a média  $\mu_{\underline{z}_{NU}}$  e o desvio padrão  $\sigma_{\underline{z}_{NU}}$  de cada uma das amostras. Devido ao enorme esforço computacional para desenvolver esta etapa, geralmente NU é feito com até 10 amostras.

### 5.2.2 Estimação do Intervalo de Confiança no Problema Estocástico (IC)

A estratégia proposta neste trabalho para avaliar as políticas operativas consiste em comparar o custo esperado estimado por cada FCF calculado via simulações *out-of-sample*. Do processo visto na Figura 27, de (i) usa-se apenas a FCF, ignorando o valor do custo do inferior. Considere que  $fc$  é o custo esperado do problema real, como já discutido anteriormente, é um valor impossível de calcular devido a grandeza a árvore de cenários. Assim, é estimado este valor usando um intervalo de confiança por amostragem. Define-se  $fc_{NS}$  como o estimador do custo esperado  $fc$  calculado pela média do NS cenários amostrados da árvore de cenários. Assim IC é dado por:

$$IC = fc_{NS} + t_{\beta, NS-1} \sigma_{NS} \cdot \quad (170)$$

onde  $t_{\beta, NC-1}$  é um valor de probabilidade  $\beta$  dada uma distribuição na tabela *t-student* com  $NS-1$  graus de liberdade, e  $\sigma_{NC}$  é o desvio padrão relacionado as amostras que compõe  $fc_{NC}$ . A equação (170) significa que, embora seja impossível calcular o valor exato de  $fc$ , se adota com  $(1 - \beta) \%$  de confiança, que o valor é menor que IC.

Para o valor de IC ser comparável entre diferentes FCFs, as simulações devem ser feitas na mesma base. Assim é necessário utilizar o mesmo PL em todos os casos. Ressalta-se que, as avaliações feitas nos métodos de regularização não precisam de ajuste no PL base, pois se trata de métodos que modificam a forma de solução, e não alteram as variáveis da FCF. Por outro lado, as metodologias de redução de dimensionalidade apresentadas no Capítulo 4 precisam de pequenas modificações para serem ajustadas na mesma base. No geral, se considera que o modelo individualizado é o mais próximo da realidade, portanto, para adequar os modelos individualizados aos simplificados basta incluir uma restrição que represente a grandeza simplificada. Nas próximas seções este processo é mais bem detalhado.

### 5.2.2.1 Modelo de simulação individualizado

Este modelo já foi largamente discutido ao longo do documento, é colocado neste ponto do trabalho para facilitar o entendimento. Assim, o modelo individualizado é:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1 + DR)} \alpha_t \quad (171)$$

s.a.:

$$YHH_{rt} - \sum_{p=1}^{HP_{rt}} \phi H_{prt} \cdot YHA_{r,t-p} = \xi H_{rt}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad (172)$$

$$YRR_{rt} - \sum_{p=1}^{RP_{rt}} \phi R_{prt} \cdot YRA_{r,t-p} = \xi R_{rt}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad (173)$$

$$YHA_{r,t-p} = YH_{r,t-p}, \quad r = 1, \dots, NH, \quad p = 1, \dots, HP_{rt}, \quad (174)$$

$$YRA_{r,t-p} = YR_{r,t-p}, \quad r = 1, \dots, NR, \quad p = 1, \dots, RP_{rt}, \quad (175)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{0rtj} \cdot v_{r,t+1} + M_{1rtj} \cdot YHH_{rtj} + \sum_{p=1}^{HP_{rt}-1} M_{3r,t-p,j} \cdot YHA_{r,t-p} \right) + \sum_{r=1}^{NR} \left( M_{2rtj} \cdot YRR_{rtj} + \sum_{p=1}^{RP_{rt}-1} M_{3r,t-p,j} \cdot YAR_{r,t-p} \right) \geq B_{0jt}, \quad j = 1, \dots, NC_t \quad (176)$$

(24)-(31)- (37)

Os cenários são determinados a partir de valores sorteados de  $[\xi R_t, \xi H_t]$  assim as equações de afluência (172)-(175) tornam-se constantes e portanto são ilustradas em letra maiúscula. Nota-se que os valores constantes de afluência têm impacto na FCF (176).

### 5.2.2.2 Modelo de simulação individualizado considerando a afluência por bacia

No caso da afluência por bacia, o PL base do processo de simulação contém a maioria das equações exposta anteriormente (171)-(175) com os cortes Benders da afluência por bacia (126). Assim, quando a FCF é proveniente do modelo agregado por bacia, são adicionadas restrições para calcular a afluência por bacia com base nos sorteios das afluências individualizadas. Por questões de simplificação, abaixo mostra-se apenas as restrições modificadas, e as demais são apenas referenciadas.

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+DR)} \alpha_t \quad (177)$$

s.a.:

$$YA_{bt} - \sum_{r=1}^{NH_b} YHH_{rt} - \sum_{r=1}^{NR_b} YRR_{rt} = 0, \quad b = 1, \dots, NB, \quad (178)$$

$$YAA_{b,t-p} - \sum_{r=1}^{NH_b} YHA_{r,t-p} - \sum_{r=1}^{NR_b} YRA_{r,t-p} = 0, \quad p = 1, \dots, HP_{rt}, \quad b = 1, \dots, NB, \quad (179)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} M_{5rtj} \cdot v_{r,t+1} + \sum_{b=1}^{NB} \left( M_{6btj} \cdot YA_{bt} + \sum_{p=1}^{OA_{r-1}} M_{7b,t-p,j} \cdot YAA_{b,t-p} \right) \geq B_{1jt}, \quad (180)$$

$j = 1, \dots, NC_t,$

(24)-(35) - (37)

As equações (24)-(35) incluem o balanço de potência e hídrico, modelagem de afluências individualizadas PAR e FPH, a (37) são os limites das variáveis dos modelos. As equações (178)-(179) são a afluência por bacia de t até t-p calculada com base nos cenários de afluência gerados individualmente  $[\xi R_t, \xi H_t]$ , assim os termos  $YA_{bt}$  e  $YAA_{b,t-p}$  entram na equação do corte gerado (180) pelo modelo agregado.

### 5.2.2.3 Modelo de simulação individualizado considerando EAFdA

Da mesma maneira, quando usado cortes provenientes do modelo EAFdA, deve-se calcular toda a energia fio d'água a partir das mesmas afluências sorteadas  $\xi R_t$ , assim o PL para simulação individualizada do modelo de energia afluyente FdA é:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+DR)} \alpha_t \quad (181)$$

s.a.:

$$IE_{b,t-p} - \sum_{r=1}^{NR_b} HP_r \cdot YRR_{rt} = 0, \quad b=1, \dots, NB, \quad (182)$$

$$IEA_{b,t-p} - \sum_{r=1}^{NR_b} HP_r \cdot YRA_{r,t-p} = 0, \quad p=1, \dots, HP_{rt}, \quad b=1, \dots, NB, \quad (183)$$

$$\alpha_t + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{8rj} V_{r,t+1} + M_{9rj} \cdot YHH_{rt} + \sum_{p=1}^{HP_{rt}-1} M_{11r,t-p,j} \cdot YHA_{r,t-p} \right) + \sum_{b=1}^{NB} \left( M_{10bj} \cdot IE_{bt} + \sum_{p=1}^{OE_{jt}-1} M_{12b,t-p,j} \cdot IEA_{b,t-p} \right) \geq B_{3jt}, \quad j=1, \dots, NC_t, \quad (184)$$

(24)-(35) - (37)

Assim as equações (24)-(35) são inalteradas do modelo individual e englobam balanço de potência, balanço hídrico, FPH e modelo PAR(p) de afluência individual. E (182)-(183) são adicionadas para o cálculo da energia afluyente FdA com base no sorteio de  $\xi R_t$ .

### 5.2.2.4 Modelo de simulação individualizado do modelo Earm

O mesmo raciocínio pode ser empregado no modelo Earm, assim o PL para simulação neste caso é exposto abaixo:

$$\omega_t = \min \sum_{l=0}^{NL} HH_{lt} \cdot \left( \sum_{i=1}^{NT} CT_i \cdot pt_{ilt} + \sum_{s=0}^{NS} \sum_{i=0}^{ND} CD_i \cdot pd_{ilst} \right) + \frac{1}{(1+DR)} \alpha_t \quad (185)$$

s.a.:

$$ear_{st} = \sum_{r=0}^{NR_s} \left[ (v_{r,t+1} - V_r^{\min}) \cdot \sum_{r=0}^{JH_r} ER_{rt} \right], \quad s = 1, \dots, NS, \quad (186)$$

$$\alpha_t + \sum_{s=1}^{NS} M_{0bjt} \cdot ear_{bt} + \sum_{r=1}^{NH} \left( M_{1rjt} \cdot YHH_{rt} + \sum_{p=1}^{HP_{rt}-1} M_{1r,j,t-p} \cdot YHA_{r,t-p} \right) + \sum_{r=1}^{NR} \left( M_{2rjt} \cdot YRR_{rt} + \sum_{p=1}^{RP_{rt}-1} M_{2r,t-p,j} \cdot YRA_{r,t-p} \right) \geq B_{4tj}, \quad j = 1, \dots, NC_t, \quad (187)$$

(24)-(35) - (37)

A equação (186) é o cálculo da energia armazenada por subsistema modelado, nota-se que neste caso  $ear_{st}$  é uma variável que vai depender da decisão dos volumes individualizados. Assim, as decisões tomadas em (186) tem impacto direto na FCF (187).

### 5.3 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos referentes aos casos utilizando os métodos de regularização, os quais podem ser divididos em dois blocos: Inicialmente é detalhado resultados relacionados ao método dos centros de Chebyshev e, na sequência, são expostos os resultados da avaliação da política operativa com os todos métodos de regularização analisados neste trabalho. Como base de comparação, nesta seção utiliza-se a PDDE clássica, aqui abreviada por CL e implementada conforme mostrado no Algoritmo 1 na seção 2.3.3.1.

#### 5.3.1 Centros de Chebyshev

O objetivo desta seção é apresentar os resultados da metodologia Centros de Chebyshev, as simulações apresentadas foram feitas utilizando o SIN como sistema base. Os casos executados com CC reproduzem a implementação descrita no Algoritmo 2 apresentado na seção 3.1.1. São propostas duas atualização do raio distintas, ademais, mostra-se um combinado de estratégia de solução, isto é, CL com CC no cálculo da mesma FCF com o objetivo de encontrar melhores políticas operativas em termos de custo esperado de operação.

Considerando o método de solução, a sua política operativa é determinada. Para isso, foram utilizados 216 cenários por iteração com reamostragem. Quando a aversão ao risco é considerada, os parâmetros são ajustados em  $\lambda = 0,1$  e  $\rho = 10\%$ . As simulações das políticas

obtidas são feitas com  $NS^{out}=10000$ . Informações adicionais são tratadas ao longo da discussão dos casos.

### 5.3.1.1 Atualização 1 – CC

Neste primeiro estudo, as variáveis aleatórias foram modeladas através do modelo PAR(p) com 50 aberturas por estágio. A sua finalidade é apresentar uma atualização do raio que é capaz de elevar o custo inferior do problema do POEMP em comparação com a CL. Para isso, os seguintes casos foram executados (i) CL; (ii) CC; e suas versões, usando a técnica da partida quente, o qual consiste em incrementar o número de cenários percorridos por iteração (iii) CL-I e (iv) CC-I. A heurística considerada para a atualização do raio  $\bar{\sigma}_t$  é exposta em (188)

$$\bar{\sigma}_t = K_{cc} \cdot \frac{\underline{z}_k - \underline{z}_{k-1}}{\sum_{\substack{NK \\ \text{if } NK < 10, k=0 \text{ else } k=NK-10}} (\underline{z}_k - \underline{z}_{k-1})} \cdot \left(1 - e^{-10(\underline{z}_k - \underline{z}_{k-1})}\right), \quad (188)$$

sendo  $K_{cc}$  uma constante<sup>8</sup> no valor de  $1 \cdot 10^5$  e  $\underline{z}^k$  o custo inferior na iteração  $k$ . Verifica-se que o parâmetro  $\bar{\sigma}_t$  é função do custo inferior em relação as últimas dez iterações do método de solução. Uma vez que o custo inferior é a única grandeza confiável utilizada na PDDE, pode-se concluir que, caso haja uma elevação de  $\bar{\sigma}_t$ , a variação do custo inferior ainda é elevada, portanto, o algoritmo está longe de sua convergência. Assim, faz sentido expandir a área de exploração de novas regiões da FCF. Por outro lado, se é atingido uma estabilização de  $\underline{z}$ , o valor de  $\bar{\sigma}_t$  é reduzido, o que significa um forte indicativo que o algoritmo está próximo a área de convergência e explorar novas regiões da FCF pode trazer pouca melhora para o algoritmo. Portanto, para atender os requisitos de convergência,  $\bar{\sigma}_t$  deve diminuir ao longo do processo iterativo. Neste sentido, a última parcela de (188) garante que  $\bar{\sigma}_t = 0$  quando o custo inferior se torna estável. Por fim, uma das vantagens desse algoritmo é a versatilidade, pois podem ser definidas outras regras simples de atualização do raio mantendo os requisitos de convergência do algoritmo.

A seguir é apresentada uma análise comparativa feita para três árvores de cenários distintas. Devido ao tamanho gigantesco do problema e com o propósito de obter uma

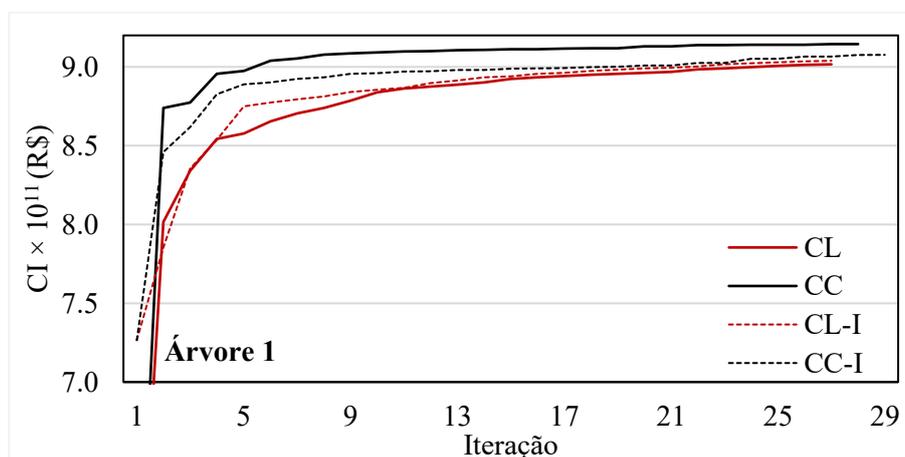
<sup>8</sup> valor estimado por tentativa para melhor ajustar o problema.

estabilização do  $\underline{z}$  razoável, o critério de parada utilizado foi o de tempo de processamento de 48 horas. Ao final, usando um esforço computacional grande uma FCF é obtida e o seu respectivo custo inferior  $\underline{z}$  (CI). Nesses casos foi considerado aversão ao risco.

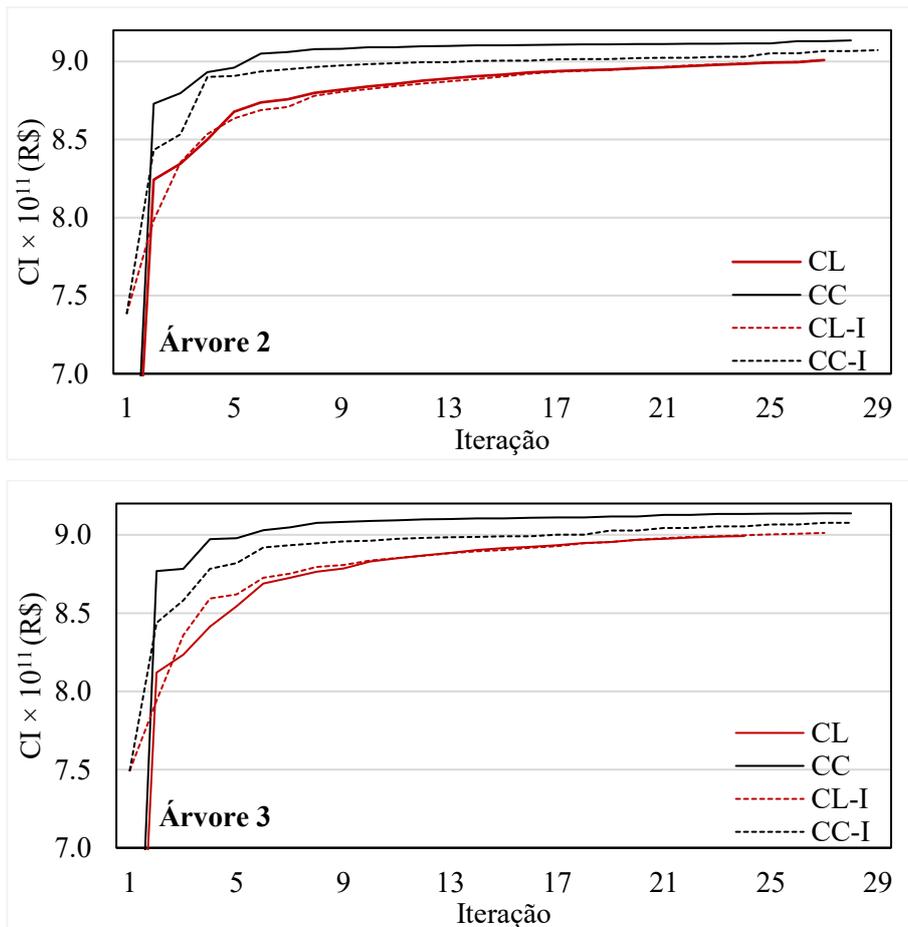
A Figura 28 mostra a evolução do CI para as três árvores de cenários. Nota-se que, em respeito a otimalidade do problema resolvido, quanto maior o valor de  $\underline{z}$  maior a proximidade ao ponto ótimo do problema. O valor da taxa de crescimento<sup>9</sup> de  $\underline{z}$  em todos os casos obtidos nas últimas 10 iterações é abaixo de 0,07%.

No geral, a metodologia CC proposta é consistente ao apresentar maiores valores  $\underline{z}$  ao longo das iterações, como pode ser visto nos gráficos abaixo. Vale lembrar que, as estratégias CL-I e CC-I utilizam a partida quente, o qual uma menor quantidade de cenários é percorrida nas primeiras iterações. Desta forma, nota-se usando este tipo de estratégias, no caso CC, a qual possui número de cenários igual em todas as iterações, é preferível para encontrar maiores valores de  $\underline{z}$  ao final das 48 horas. Os resultados mostram que a partir da segunda iteração o valor de  $\underline{z}$  com CC ultrapassam os outros casos. Este fato confirma o respaldo e eficiência da metodologia proposta.

Figura 28 – Evolução do custo inferior para todos os casos executados na árvore de cenários 1, 2 e 3.



<sup>9</sup> O valor médio nas últimas 10 iterações de  $(\underline{z}_k - \underline{z}_{k-1})/\underline{z}_k$ .



Para quantificar o Crescimento do Custo Inferior (CCI) das estratégias exibidas nas figuras acima, comparadas a CL, é utilizada a equação (189):

$$CCI = \frac{\underline{z}_{NK} - \underline{z}_{CL}}{\underline{z}_{CL}} \cdot 100 [\%], \quad (189)$$

onde  $\underline{z}_{NK}$  é o maior custo inferior (i.e. obtido na última iteração) do caso determinado, e  $\underline{z}_{CL}$  é a base de comparação na última iteração do custo inferior do CL.

Como observado na Tabela 17, os resultados de CCI indicam que a metodologia CC teve o melhor desempenho com aproximadamente 1,43% maior na árvore 1, 1,40% na árvore 2 e 1,61% na árvore 3. Adicionalmente, CL-I e CC-I também melhoraram os valores de  $\underline{z}$  em 0,25% e 0,67% maiores que o CL na árvore 1. Nota-se que, as metodologias baseadas em CC alcançam maiores valores de  $\underline{z}$  na comparação com CL ao longo das 48 horas de processamento.

Tabela 17 – Crescimento do custo inferior para todas as árvores de cenários – Atualização 1.

<i>i</i>	Crescimento do custo inferior em respeito ao CL (%)		
	Árvore		
	1	2	3
CC	1,43	1,40	1,61
CL-I	0,25	0,01	0,22
CC-I	0,67	0,71	0,94

Com respeito a Tempo de Eficiência (TE) das estratégias propostas, são comparadas a CL, através da expressão abaixo (190):

$$TE = \frac{CPU(s) - CPU(s)_{CL}}{CPU(s)_{CL}} \cdot 100 [\%], \quad (190)$$

onde  $CPU(s)_{CL}$  é o tempo da última iteração do caso CL, e  $CPU(s)$  é o tempo que determinada estratégia leva para alcançar o mesmo valor de  $\underline{z}_{CL}$ .

Na Tabela 18 contém os resultados de TE para todos os casos simulados. Dos resultados observados, nota-se uma expressiva redução de tempo computacional nas estratégias com centros de Chebyshev. O tempo de redução de 96.34% significa que, para a árvore de cenários 1, o caso CC obtém o mesmo valor de  $\underline{z}$  que o caso CL em 1,83 horas, ou após 6 iterações (ver Figura 28 Árvore 1). Em concordância com o primeiro caso analisado, para a árvore de cenário 2 e 3, CC alcança uma redução similar com 96.36% e 96.28%, respectivamente. As outras estratégias também apresentam vantagens em termos de TE ao comparado com CL, para a árvore de cenários 1, 2 e 3, CC-I alcança proporcionais ganhos com 44.83%, 68.29% e 67.38% respectivamente. O menor ganho se deu no caso CL-I onde passa em 0.42% CL, na árvore de cenários 2.

Tabela 18 – Tempo de Eficiência (%) em relação ao CL para todos os casos – Atualização 1

<i>i</i>	Árvore		
	1	2	3
CC	96,34	96,36	96,28
CL-I	31,62	0,42	73,14

CC-I	44,83	68,29	67,38
------	-------	-------	-------

---

Em conclusão, todos os casos reportados nesta seção que empregam CC na estratégia de solução apresentaram consistentes melhorias considerando uma evolução no custo inferior e também na redução do tempo computacional, assim, a próxima seção analisa a simulação das políticas obtidas com todos os casos.

#### 5.3.1.1.1 Simulação *out-of-sample*

O objetivo dessa seção é apresentar os resultados da simulação *out-of-sample*<sup>10</sup> das FCFs obtidas na seção anterior. Foram utilizados  $NS^{out} = 10000$  cenários sintéticos. Como se pode observar na Tabela 19 são expostos o custo esperado de simulação associado a árvore de cenários 1, 2 e 3. Ademais, a Diferença de Custo (DC), com respeito ao custo esperado obtido no caso CL é dado matematicamente pela equação (191):

$$DC = \frac{\bar{z}_{CL} - \bar{z}_i}{\bar{z}_{CL}} \cdot 100 [\%], \quad (191)$$

onde  $\bar{z}_{CL}$  é o custo esperado para o caso CL, e  $\bar{z}_i$  é o custo esperado do caso  $i$ .

Tabela 19 – Custo esperado da simulação *out-of-sample* e a diferença de custo (DC) em relação ao caso CL em (%) – Atualização 1.

i	Custo esperado $\times 10^{10}$ (R\$)			DC (%)		
	Árvore de cenário					
	1	2	3	1	2	3
CL	1,71	1,90	1,79	-	-	-
CC	1,83	2,03	1,97	6,91	6,83	9,58
CL-I	1,70	1,89	1,81	-0,97	-0,18	1,04
CC-I	1,84	2,03	1,94	7,49	6,93	8,24

<sup>10</sup> A simulação *out-of-sample* é desenvolvida tal qual o procedimento explicado no passo (ii) da seção 5.2. Vale a pena lembrar que, os mesmos cenários *out-of-sample* foram utilizados com cada política que é originada da mesma árvore de cenários.

Com respeito ao custo esperado, em média, as execuções com o método CC obtiveram um valor maior em 7,7% em relação ao caso CL; Destaca-se a FCF calculada com a árvore 3, apresentou o maior custo com 9,58% de diferença.

A discrepância observada no valor da simulação *out-of-sample* pode ser justificada pelo método dos planos cortantes usado na CC. Como resultado, ele cria cortes mais próximos a região de interesse com o objetivo de alcançar valores mais elevados de  $\underline{z}$ , conseqüentemente, ele inibe as próximas iterações de excursionar em regiões mais longe a região de interesse da própria árvore de cenários. Assim, quando a FCF é visitada em outras regiões, pela simulação *out-of-sample*, maiores custos de operação podem ser alcançados pois a FCF está pouco detalhada neste local. Portanto, a FCF tende a ser construída em uma pequena região mais próxima da ótima. No longo prazo, isso pode ser uma desvantagem quando o cenário real se concretiza menos severo, pois neste caso, é um gasto maior com os mesmos recursos. Esta é uma característica do método de regularização CC com essa atualização do raio proposta.

Em conclusão, o CL é preferível quando se deseja um cálculo de política mais abrangente, como por exemplo, em estudos de projeção de preço ou prospecção para futuros investimentos. Contudo, do ponto de vista do operador, políticas que geram metas de geração mais próximas a realidade são preferíveis para traçar estratégias de operação de curto prazo e despacho horário, uma vez que o sinal econômico do custo da água é mais fidedigno com valores de  $\underline{z}$  próximos ao valor ótimo.

### 5.3.1.2 Atualização 2 – CC2

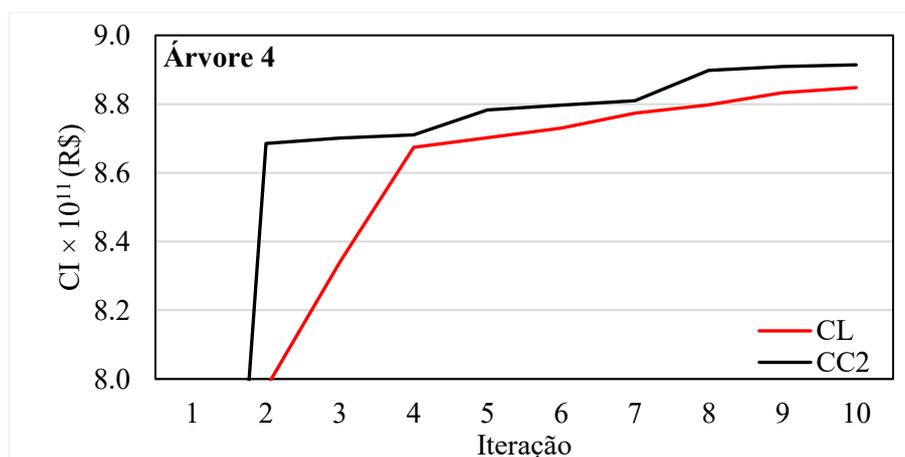
Nos casos apresentados a seguir, a variável aleatória é representada pelo modelo PAR(p) com 100 aberturas por estágio (o número de cenários total desta árvore é  $100^{59}$ ). A aversão ao risco pela métrica do CVaR também é considerado neste caso, Uma única árvore de cenário é considerada com os seguintes casos: (i) o CL; (ii) com Centro de Chebyshev – atualização 2 (CC2); A heurística para atualização do parâmetro do raio  $\bar{\sigma}_t$  é matematicamente exposta em (192):

$$\bar{\sigma}_t = K_{cc} \cdot \frac{\bar{z}_k - \underline{z}_k}{t} \cdot (1 - e^{-10(\bar{\sigma}_k - \underline{z}_k)}). \quad (192)$$

O objetivo de (192) é usar os valores do custo inferior e superior para mensurar o tamanho do raio. Assim, a segunda parte de (192) é a diferença entre o custo superior e inferior dividido pelo estágio  $t$ . Teoricamente, o termo independente de  $\alpha$  da FCF tem uma tendência de decrescer ao longo dos estágios, conseqüentemente, um menor raio  $\bar{\sigma}_t$  é necessário conforme o estágio cresce.

A Figura 29 apresenta a evolução do custo inferior ao longo do processo iterativo para ambos os casos, nota-se que o CC2 possui um valor de  $\underline{z}$  superior ao comparado com o CL, provando que para este problema o método se mostra consistente para atualização (192).

Figura 29 – Evolução do custo inferior para todos os casos executados na árvore de cenários 4.



Para este caso, houve um ganho do CCI de 0,44% com um TE de 31,67%.

#### 5.3.1.2.1 Simulação *out-of-sample*

O objetivo desta seção é apresentar os resultados da simulação *out-of-sample* para as FCFs dos casos CC2 e CL. A Tabela 20 mostra o custo esperado com diferença ao CL. Com pode ser observado, a CC2 apresenta uma política com valor mais elevado em aproximadamente 2,45% em relação ao CL.

Tabela 20 – Custo esperado da simulação *out-of-sample* e a diferença em relação ao caso CL em (%) – Atualização 2.

i	Custo esperado × 10 <sup>10</sup> (R\$)	DC (%)
CL	1,67	-

---

CC2	1,71	2,45
-----	------	------

---

### 5.3.1.3 Estratégias Conjuntas

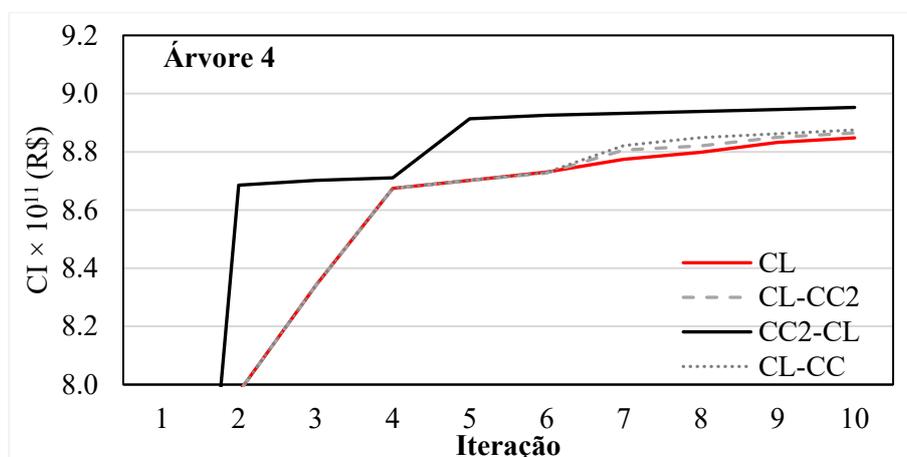
O objetivo desse conjunto de casos é combinar as estratégias dos métodos CC e CL no cálculo da mesma FCF, de modo que na simulação *out-of-sample* o custo esperado diminua em relação a CL. As heurísticas de atualização de raio das seções anteriores são mantidas, isto é (188) e (192). Além disso, as estratégias podem ser separadas pelo número de iterações e cenários. Os casos são processados no mesmo sistema base: utiliza 216 cenários por iteração com reamostragem, e 100 aberturas por estágio. O critério de parada é de 12 horas e a aversão ao risco é considerada.

#### 5.3.1.3.1 Combinação de estratégias em número de iterações

O objetivo desse estudo é utilizar duas estratégias com o mesmo número de iterações para ambas, isto é, a primeira metade do processo iterativo é feita com uma estratégia e a segunda metade é com a outra. Pode-se usar algumas variantes alterando o parâmetro  $K_{cc}$ . Por exemplo, o caso CL-CC-1k significa que se usa CL na primeira metade das iterações, e CC na segunda metade das iterações, com  $K_{cc} = 1000$ .

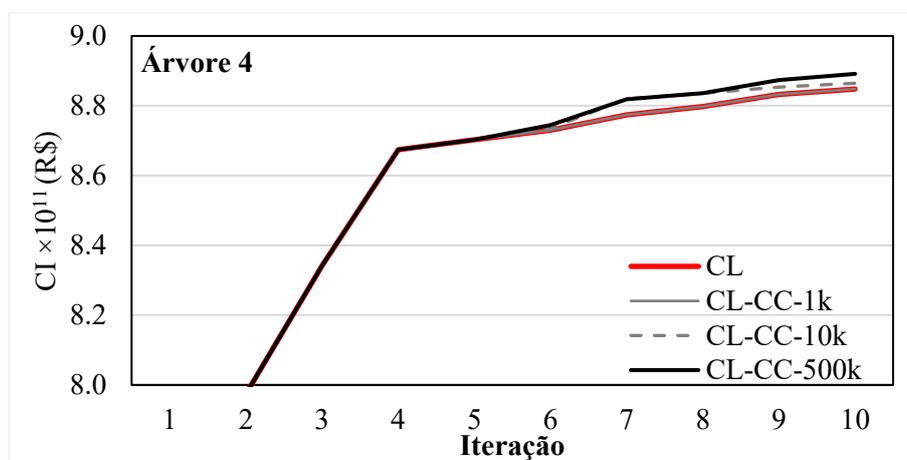
A Figura 30 mostra a evolução do custo inferior para os casos CL, CL-CC2, CC2-CL e CL-CC com  $K_{cc}=1 \cdot 10^5$ . Observa-se que, ao final das 12 horas do processo iterativo todos os casos atingiram maior valores de custo inferior ao comparados com CL.

Figura 30 – Evolução do custo inferior para todos os casos conjuntos executados na árvore de cenários 4.



A Figura 31 apresenta o custo inferior para os casos CL-CC-1k, CL-CC-10k e CL-CC-500k. Observa-se que ao final das 12 horas de processamento os custos inferiores são similares.

Figura 31 – Evolução do custo inferior para os casos CL e CL-CC com  $K_{cc} = 1k, 10k$  e  $500k$ .



A Tabela 21 mostra os resultados do processo de simulação *out-of-sample*. O valor de DC em cada caso é calculado em relação ao CL. Como pode ser observado, nenhum dos casos proposto é capaz de obter custo esperado mais barato que o CL. Os casos CC-CL-10k e CL-CC2-100k possuem as menores diferenças com aproximadamente 1,66%. Além disso, a mudança da constante  $K_{cc}$  produz diferentes custos esperados os quais não são diretamente proporcionais ao seu incremento, isto é, considere o caso CC-CL com  $K_{cc} = 1000$  e  $10000$  os quais aumenta-se o valor de  $K_{cc}$  e é verificado uma diminuição do custo esperado de  $R\$1,71 \times 10^{10}$  para  $R\$1,70 \times 10^{10}$ .

Tabela 21 – Resultados da simulação out-of-sample dos casos combinados pelo número de iterações.

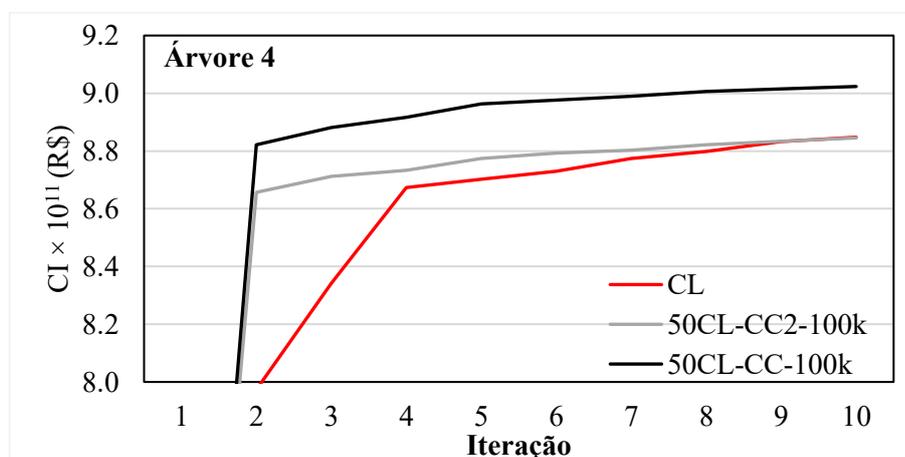
$i$	$K_{cc}$	Custo esperado $1 \times 10^{10}$ (R\$)	DC (%)
CL	100000	1,67	-
CL-CC2	100000	1,71	1,96
CL-CC	100000	1,70	1,66
CC2-CL	100000	1,72	2,88
CC-CL	1000	1,71	1,96
CC-CL	10000	1,70	1,66
CC-CL	500000	1,72	2,88

## 5.3.1.3.2 Combinação de estratégias em número de cenários

Nesta combinação de estratégias, metade dos cenários *forward* são performados para cada estratégia. Também, algumas variantes são processadas mudando o termo  $K_{cc}$ . Por exemplo, na estratégia denominada 50CL-CC-100k, significa que, 108 cenários usando CL, e 108 cenários usando CC, com  $K_{cc} = 1 \cdot 10^5$ .

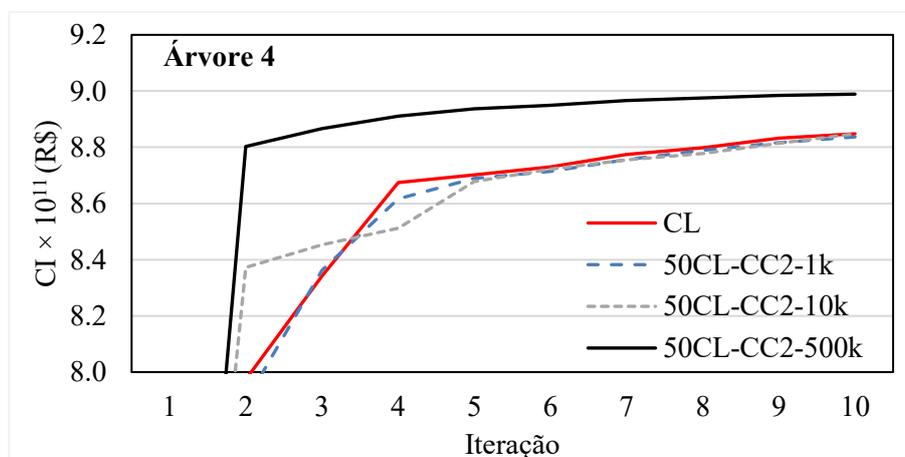
A Figura 32 mostra a evolução do custo inferior para os casos CL, 50CL-CC2 e 50CL-CC ambos com  $K_{cc} = 1 \cdot 10^5$ . Nota-se, que o caso com CC obtém maiores valores de  $\underline{z}$  em comparação com os outros casos. Observa-se que, após a oitava iteração, o caso CC2 tem se mostrado mais eficiente quando comparado com CL. Após isso, ambas as curvas são similares.

Figura 32 – Custo inferior dos casos CL, 50CL-CC2-100k e 50CL-CC-100k.



A Figura 33 mostra a evolução do custo inferior para os casos 50CL-CC2-1k, 50CL-CC2-10k e 50CL-CC2-500k. Como pode ser observado, os casos com  $K_{cc} = 500k$  alcançam maiores valores de custo inferior ao final do processo iterativo. Os outros casos com CC2 tem se mostrado ineficiente ao final das 12 horas de processamento, quando comparados com CL. Vale lembrar que para esta bateria de simulações, o termo  $K_{cc}$  foi variado para tentar alcançar melhores pontos experimentais.

Figura 33 – Custo inferior dos casos CL e 50CL-CC2 para  $K_{cc} = 1k, 10k$  e  $500k$ .



A Tabela 22 exibe os resultados da simulação *out-of-sample* para os casos propostos nesta seção. Dentro deste contexto, o caso 50CL-CC2-100k foi capaz de melhorar a política operativa com um menor custo esperado. Enquanto a diferença de custo provoca um ganho de aproximadamente 0,05% (célula marcada), considerando o custo inferior a mostra que este caso foi ineficiente para alcançar melhores pontos iniciais.

O caso 50CL-CC-100k alcança um maior custo inferior com aproximadamente  $R\$1,791 \times 10^{10}$ , resultando em uma diferença de custo 7,0125%, contudo, tem quase 1,67% de crescimento de custo inferior e aproximadamente 88% de eficiência computacional quando comparado com CL. Adicionalmente, o caso 50CL-CC-500k tem uma diferença de custo de 4,18%, e de forma similar, um custo inferior de 1,28% com um tempo computacional considerável.

Tabela 22 – Resultados da simulação *out-of-sample* dos casos combinados pelo número de cenários.

Casos	$K_{cc}$	Custo Esperado $1 \times 10^{10}$ (R\$)	DC (%)
-------	----------	---	--------

CL	-	1,673	0,000
50CL-CC2	1k	1,706	1,964
50CL-CC2	10k	1,675	0,106
50CL-CC2	100k	1,673	-0,046
50CL-CC2	500k	1,744	4,188
50CL-CC	100k	1,791	7,025

Mais casos e simulações neste sentido de estratégias de soluções conjuntas estão presentes no – Metodologia dos Centros de Chebyshev. A próxima seção mostra uma comparação entre métodos de regularização.

### 5.3.2 Comparação entre métodos de regularização

Esta seção mostra os resultados referentes a comparação dos três métodos de regularização e a PDDE clássica. Para desenvolver esse estudo é utilizado o sistema reduzido como base. Além dos métodos CL e CC já explicados em seções anteriores, são analisados os métodos descritos abaixo:

- DR: É o método da decomposição regularizada multiestágio implementado de conforme exposto no Algoritmo 3 da seção 3.2.1;
- NL: O método da regularização de nível com soluções normais apresentado no Algoritmo 4 da seção 3.3.2.1;

Assim como detalhado no Capítulo 3, em determinado grau todos os métodos de regularização necessitam de heurísticas para atualizar seus parâmetros com o objetivo de acelerar o processo iterativo, a Tabela 23 mostra as heurísticas utilizadas em cada método para obter os resultados mostrados a seguir. No geral, nota-se que todos os métodos foram eficientes para alcançar maiores níveis de custo inferior que o CL.

Tabela 23 – Heurísticas utilizadas para regularizar o problema do sistema reduzido.

Método	Heurística de atualização
CC	$w_t^k = 1 \cdot 10^7 \cdot 0,99^k / t, \bar{\sigma} = 1,$
NL	$l_{jt}^k = \theta \cdot (z_{\min, jt}^{k-1} - \gamma_t \cdot \text{Delta}^{k-1}), \theta = 5 \cdot 10^{-3}, \gamma_t = 0,25 / t,$

DR

$$v^k = v^0 a^k = a v^{k-1}, \quad v^0 = 0,48, \quad a = 1,$$

onde o *Delta* é calculado conforme (106) e  $z_{\min, jt}^{k-1}$  conforme exposto em (108) e  $k$  é a iteração ao longo do processo iterativo.

Neste sentido foram processadas quatro árvores de cenários distintas para cada um dos quatro métodos apresentados. Portanto, ao todo são 16 políticas obtidas. Utiliza-se o modelo PAR(p) de afluência de ordem máxima seis de forma individualizada. O critério de parada utilizado foi 4 horas de processamento. No quesito número de restrições e variáveis, observa-se que problema matemático dos métodos não possuem diferenças relevantes, no CL, o PL possui 983 variáveis e 399 restrições, no CC é verificado 984 variáveis e 400 restrições. No DR, é resolvido um problema quadrático (PQ) com 983 variáveis e 399 restrições. No NL, o PQ tem 984 variáveis e 400 restrições. Assim, as quatro árvores de cenários processadas apresentam as seguintes configurações:

- Árvore 1: 50 cenários por iteração e 20 aberturas por estágio;
- Árvore 2: 50 cenários por iteração e 50 aberturas por estágio;
- Árvore 3: 100 cenários por iteração e 20 aberturas por estágio;
- Árvore 4: 100 cenários por iteração e 50 aberturas por estágio;

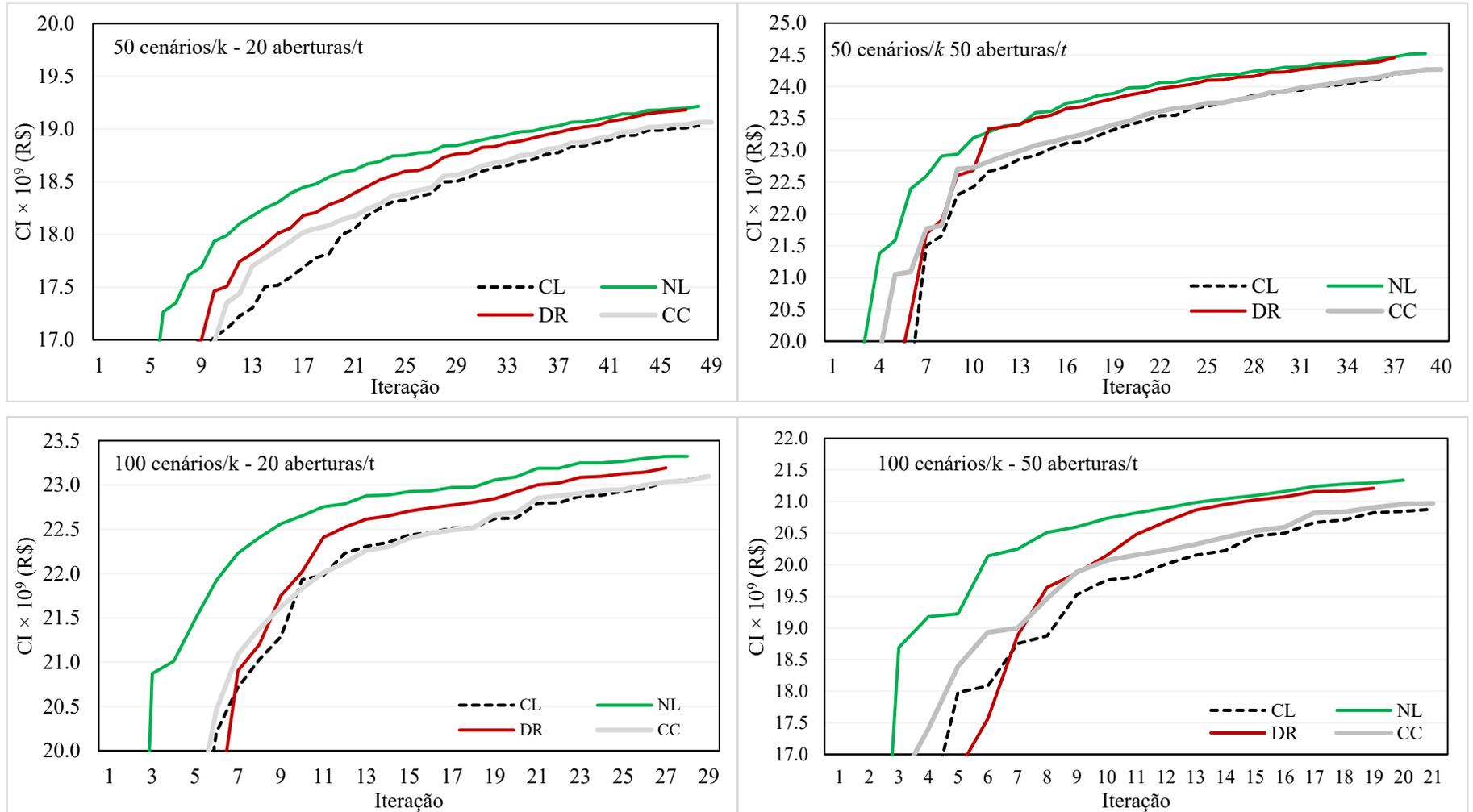
Nota-se que, para as heurísticas adotadas neste estudo, todos os métodos apresentaram custo inferior maior ou igual ao caso CL. Destaca-se neste sentido as metodologias de NL e DR as quais em todos os casos obtiveram valores de custo inferior superiores. A Tabela 24 mostra o valor do custo inferior na última iteração de cada caso, nota-se que na árvore 3 CC e CL tiveram o mesmo valor. Observa-se ainda, que as metodologias de NL e DR performam um número de iterações menor que CC e a PDDE, isto é, devido a função objetivo de ambas as metodologias que utiliza uma função quadrática, desta forma cada PQ tem um tempo mais elevado de solução que o PL.

Tabela 24 – Custo Inferior na última iteração.

Árvore	Custo Inferior $1 \times 10^9$ (R\$)			
	CL	NL	DR	CC
1	19,05	19,22	19,18	19,06
2	24,27	24,52	24,46	24,27
3	23,10	23,32	23,19	23,10
4	20,88	21,34	21,21	20,97

A Figura 34 mostra o comportamento do custo inferior para todos os 16 casos executados. A linha pontilhada mostra o caso base, isto é, o CL. As demais linhas contínuas são referentes aos métodos de regularização. Destaca-se, entre todos os casos o método NL a qual possui valores de custo inferior sempre muito superiores ao caso CL.

Figura 34 – Comparação de CI das metodologias de regularização e PDDE.



Observa-se que as metodologias de regularização com as heurísticas sugeridas, são efetivas no cálculo de melhores custos inferiores, isto é, elas são capazes de obter FCFs mais próximas à região ótima da árvore de cenários que está sendo otimizada. Para complementar o trabalho, é avaliado a qualidade da FCF obtida em cada caso.

Para isso, foi feita uma extensa bateria de simulações afim de estimar a qualidade da política pelo cálculo da brecha de otimalidade resolvendo a equação (169). Usando como base a configuração de 20 aberturas por estágio e 50 cenários por iteração, foram otimizadas cinco ( $NU=5$ ) árvores de cenários distintas, isto é, obtidas cinco FCFs. E para o processo de simulação,  $NS^{out} = 25000$  cenários foram considerados. A Tabela 25 mostra os resultados obtidos no cálculo da brecha de otimalidade para todos os métodos de regularização, e também para o CL o qual é a base de comparação. A coluna da esquerda mostra o nome dos parâmetros e na respectiva linha é possível observar os valores obtidos em cada método. Os parâmetros estatísticos utilizados no cálculo dos resultados apresentados na tabela abaixo são  $\alpha=5\%$ ,  $t_{\alpha,v}=2,776$  e  $v_{1-\alpha} = 1,652$ .

Observa-se que, em comparação com o CL, os métodos de DC e CC foram capazes de diminuir o *gap*. Destaca-se o método DC que diminuiu o *gap* em aproximadamente 2,07% em comparação com o modelo clássico. Em sequência, corroborando com os estudos publicados em (BELTRÁN et al., 2020) o método CC foi eficiente em reduzir a brecha de otimalidade chegando a um valor de 0,44% menor que o caso referência. Por fim, o caso NL apresentou um *gap* de otimalidade maior que o CL em aproximadamente 3,97%. Todos os resultados discutidos acima podem ser observados na última linha (em destaque) da tabela abaixo.

Tabela 25 – Parâmetros para o cálculo da brecha de otimalidade.

Parâmetros	CL	NL	DC	CC
$\mu_{\bar{z}_{NS}}$	26,84	27,55	26,74	26,82
$\sigma_{\bar{z}_{NS}}$	0,22	0,21	0,22	0,22
$\mu_{\underline{z}_{NU}}$	21,74	21,99	21,93	21,73
$\sigma_{\underline{z}_{NU}}$	2,38	2,39	2,39	2,36
<i>gap</i> 10 <sup>9</sup> (R\$)	12,06	12,54	11,81	12,01
<i>gap</i> (%)	-	3,97%	-2,07%	-0,44%

Nota-se que a média do custo inferior calculado pelo modelo CC acabou ficando abaixo do método CL. Isso deve-se ao fato de que o valor apresentado na tabela é a média dos valores do custo inferior de 5 árvores de cenário na iteração que atendeu o critério de parada. Ao contrário do que se observou nos outros métodos, o método CC obteve custo inferior menor em três árvores de cenários, ao final das 4 horas de processamento.

Por fim, na tabela abaixo faz um breve resumo dos pontos positivos e negativos de cada metodologia.

Tabela 26 – Tabela comparativa entre os métodos

Método	Desvantagem	Vantagem
CC	Heurística de difícil calibração.	Implementação muito simples comparada a PDDE.
DR	Implementação média.	Heurística de calibração fácil.
NL	Implementação complexa.	Grande potencial em termos de custo inferior.

#### 5.4 REDUÇÃO DA DIMENSIONALIDADE

Nesta seção são mostrados os resultados acerca das metodologias expostas no Capítulo 4 que tratam da redução da dimensionalidade em problemas de POEMP. A apresentação está dividida em duas partes, primeiramente mostra-se a redução do espaço de estado a partir de modelos simplificados de afluência, em seguida, mostra-se os impactos obtidos com a substituição da variável de volume de cada UHE por uma variável de energia armazenada do sistema. Todas as metodologias são comparadas com o modelo individualizado, o qual entende-se como o mais próximo a realidade.

No estudo das afluências, ao implementar as simplificações, é proposto aumentar a exatidão na modelagem da geração das UHEs através do uso de FPHs. Assim, mostra-se que é possível melhorar a qualidade da política ao utilizar um modelo mais simplificado de afluência e aumentar a precisão da resposta dos recursos de geração hídrica, essa é uma contribuição relevante que vai em direção oposta ao que o estado da arte mostra.

Por outro lado, no estudo da variável de energia armazenada, é analisado dois esquemas de modelagem, o primeiro substitui-se todas as variáveis de estado do sistema por uma única que representa a energia armazenada do sistema total. Na sequência, modela-se a energia armazenada por bacia. Será mostrado que, conforme aumenta-se o número de variáveis

de estado a resposta tende a se aproximar do modelo individualizado. No entanto, a metodologia se mostra eficiente para diminuir a dimensão do problema.

Todas as simulações apresentadas no estudo da redução da dimensionalidade usam o sistema reduzido como base.

#### 5.4.1 Variáveis de Afluência

Um desafio crucial em problemas de POEMP é representar a dependência temporal das afluências dos rios de forma exata. Apesar dos recentes avanços, modelagens simplificadas muitas vezes são necessárias sobretudo para viabilizar a tratabilidade computacional do POEMP via PDDE, uma vez que, é preciso aumentar a dimensão do espaço de estado para incluir as variáveis de dependência temporal de forma mais fidedigna. Desta forma, muito trabalhos da literatura ignoram outros aspectos de modelagem (i.e. FPH e rede elétrica) para concentrar esforços na representação da afluência. No entanto, esse *trade-off* entre encontrar um modelo estocástico de afluência e a representação própria da FPH não existe na literatura. Por tanto, os resultados das simulações apresentadas a seguir tem o objetivo de analisar este *trade-off* utilizando afluência agregada e energia afluenta fio d'água ao invés de afluência individualizada na PDDE.

A Tabela 27 apresenta as diferentes combinações de casos analisadas nesta primeira etapa da análise da redução da dimensionalidade. A coluna da esquerda indica quais as variáveis de estado que são representadas na FCF, nota-se que, essas simulações iniciais são referentes as modelagens de afluência, portanto todos os casos são individualizados em termos de reservatório.

Tabela 27 – Representação das variáveis de estado e FPH dos casos executados.

Variáveis de estado	Função de Produção Hidrelétrica
1) $v_{rt}, yah_{r,t-p}, yar_{r,t-p}$	A. PC
2) $v_{rt}, yaa_{t-p}$	B. FPH-E <sub>1</sub>
3) $v_{rt}, yah_{r,t-p}, iea_{t-p}$	C. FPH-E <sub>2</sub>
	D. FPH-E <sub>3</sub>

Assim, cada caso é dado por: 1) considera modelo individualizado por UHE de afluências; 2) considera a modelagem agregada por bacia de afluência; 3) o modelo EAFdA, o

qual aplica o conceito de energia afluyente FdA em usinas a fio d'água junto com a modelagem individualizada por UHE nas usinas de reservatório. Por outro lado, a coluna da direita indica qual FPH foi incorporada ao problema: A. a geração hidrelétrica é dada por Produtibilidade Constante (PC), B. usa uma função linear por partes para representar a geração hidráulica a qual considera todas as usinas com erro médio quadrático  $E_1$ . Seguindo o mesmo raciocínio o modelo C e D é identífico ao B mas usando funções lineares por parte com menor erro. Ressalta-se que as FPH foram determinadas com base no trabalho de (FREDO; FINARDI; DE MATOS, 2019) e o algoritmo é exposto no APÊNCICE B – Determinação da FPH. Observa-se na tabela abaixo que a magnitude do Erro Médio Quadrático (EMQ) em ordem são  $E_1 > E_2 > E_3$ .

Tabela 28 – Número de planos e erro médio quadrático em relação a potência instalada total do sistema em (%).

FPH	Nº de Planos	EMQ (E) (%)
FPH-E <sub>1</sub>	106	3,52
FPH-E <sub>2</sub>	501	1,68
FPH-E <sub>3</sub>	1045	1,27

A Tabela 28 mostra o número funções lineares por partes que compõe cada modelagem da FPH e o respectivo erro médio quadrático, assim, o aumento do número de restrições para representar de forma mais exata a FPH terá um preço a ser pago, e este preço será refletido no crescimento do esforço computacional para resolver cada PL de cada nó da árvore de cenários.

Na próxima seção é mostrado os resultados referentes ao modelo PAR(p) de cada uma das modelagens 1), 2) e 3), mais especificamente, quanto a sua ordem. E na sequência, os resultados das simulações via PDDE juntamente com a avaliação da política operativa.

#### 5.4.1.1 A Ordem do modelo PAR(p)

Esta seção contém os resultados sobre a redução da dimensionalidade vista no modelo PAR(p) ao serem gerados os cenários com cada uma das três metodologias estudadas neste trabalho. Conforme amplamente discutido na seção 2.2. Devido a bem conhecida forte correlação temporal (LITTLE, 1955; STEDINGER; SULE; LOUCKS, 1984; TEJADA-GUIBERT; JOHNSON; STEDINGER, 1995; TERRY et al., 1986), este trabalho usa na maioria dos casos o modelo PAR(p) para representar as incertezas no problema de POEMP. A Tabela 29 mostra o número de usinas hidrelétricas/bacias do sistema reduzido e a respectiva ordem

obtida em cada mês do modelo PAR(p). As informações contidas na tabela estão divididas em três partes, a primeira coluna HP<sub>rt</sub> / RP<sub>rt</sub> remete informações do modelo PAR(p) individualizado 1), onde por exemplo, no mês de abril possui 14 usinas de reservatório e 8 fios da água com ordem máxima 1. A segunda coluna OA<sub>t</sub> aflúências por bacia 2), o qual majoritariamente tem ordem máxima 1. E Por fim a terceira coluna OE<sub>t</sub> também mostra informações por bacia, mas do modelo EAFdA 3). De acordo com o valor destacado na Tabela 29, a maior correlação temporal foi observada em abril de ordem máxima 6 encontrada no modelo individualizado.

Tabela 29 – Ordem do modelo PAR(p) por mês em cada modelo de aflúência.

Mês	HP <sub>rt</sub> / RP <sub>rt</sub>							OA <sub>t</sub>			OE <sub>t</sub>			
	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	1	2	3	4
Jan	0/8	25/17	3/0	0	0	0	0	5	0	1	6	0	0	0
Feb	0/8	27/13	1/4	0	0	0	0	6	0	0	4	2	0	0
Mar	0/7	22/17	6/1	0	0	0	0	6	0	0	5	1	0	0
Abr	0/7	14/8	13/10	0	0	0	1/0	3	3	0	3	3	0	0
Mai	6/3	20/19	1/10	0	0/1	0	0	5	0	1	4	1	1	0
Jun	1/8	26/13	1/3	0	0/1	0	0	6	0	0	4	2	0	0
Jul	1/8	14/6	13/8	0/3	0	0	0	2	4	0	1	5	0	0
Ago	1/8	25/14	2/2	0/1	0	0	0	6	0	0	6	0	0	0
Set	1/8	20/8	4/8	3/1	0	0	0	5	1	0	4	2	0	0
Out	1/8	14/9	8/4	4/3	1/1	0	0	4	2	0	3	2	0	1
Nov	1/8	19/10	8/7	0	0	0	0	5	1	0	4	2	0	0
Dez	0/9	20/10	7/4	1/2	0	0	0	6	0	0	4	1	1	0

Para um melhor entendimento da tabela acima, considere o mês de fevereiro. No modelo individualizado, a ordem PAR é descrita como: 8 usinas FdA não possuem correlação com mês anterior, ou seja, ordem 0; 27 de reservatório e 13 FdA possuem ordem 1; uma de reservatório e 4 FdA possuem ordem 2. Dado que o número de usinas de reservatório no sistema reduzido é  $NR = 28$ , o número de variáveis de estado neste caso é  $28 + 40 + 5 \times 2 = 78$ . Para o modelo agregado por bacia, as 6 bacias possuem ordem máxima 1, assim o número de variáveis de estado é  $28 + 6 = 34$ . E por fim, no modelo EAFdA, 4 bacias possuem ordem 1 e outra 2

ordem 2. Neste caso, o número de variáveis de estado é  $28 + 4 + 2 \times 2 + 27 \times 1 + 1 \times 2 = 65$  (os último 2 produtos se referem as usinas de reservatório individualizadas).

A Tabela 30 apresenta a dimensão em termos de variáveis de estado em cada do PL de cada nó resolvido pelo algoritmo da PDDE para cada mês e abordagem de modelagem da afluência. Nota-se que o modelo individualizado possui 89 variáveis de estado em média, em contrapartida, este número cai para 35 e 60 nos modelos por bacia e EAFdA respectivamente. Como resultado, o modelo agregado e o baseado e o modelo EAFdA obtém em média 60% e 33% de redução na dimensão da FCF respectivamente.

Tabela 30 – Número de variáveis de estado do algoritmo da PDDE.

Mês	$v_{rt}, yah_{r,t-p}, yar_{r,t-p}$	$v_{rt}, yaa_{t-p}$	$v_{rt}, yah_{r,t-p}, iea_{t-p}$
Jan	76	36	51
Feb	78	34	57
Mar	81	34	54
Abr	102	37	65
Mai	97	36	64
Jun	79	34	59
Jul	99	38	70
Ago	78	34	55
Set	92	35	63
Out	104	36	69
Nov	87	35	60
Dez	89	34	61

#### 5.4.1.2 Casos Simulados

Ao analisar a Tabela 27 conclui-se que pode ser representado 12 diferentes casos para serem resolvidos no problema de POEMP. Assim, por exemplo, o caso 1A, 2A e 3A contemplam modelos com todas as representações das afluências estudadas neste trabalho enquanto mantém a FPH por produtividade constante. Assim, dos 12 casos possíveis foram processados nas variantes com o 20 e 50 aberturas por estágio na *backward* da PDDE e com 2 valores da demanda distintos. Portanto, ao todo, foram calculadas 48 políticas operativas e para avaliar a qualidade de cada FCF foram simulados  $NS^{out} = 50000$  cenários de afluências de acordo com o processo de determinação de IC tratado na seção 5.2.2. Salienta-se que o IC da

simulação *out-of-sample* foi estimado com 3 anos de simulação para evitar o fenômeno do final do mundo.

De acordo com a determinação da ordem e a escolha da FPH visto até aqui, cada nó da árvore de cenários resolvido na PDDE possui dimensões distintas em cada estágio  $t$ , considerando o modelo com produtividade constante, tem-se que o modelo matemático de um PL no modelo individualizado possui 983 variáveis e 399 restrições, o modelo agregado possui 624 variáveis e 353 restrições, por fim, o modelo EAFdA tem 857 variáveis e 380 restrições. Considerando os três patamares, as FPHs-1, 2 e 3 mostradas na Tabela 28 adiciona 318, 1505 e 3135 novas restrições no PL, respectivamente.

Em termos da PDDE, as FCFs de todos os casos foram obtidas usando uma amostragem com 50 cenários distintos por iteração, e como critério, 4 horas de processamento. São utilizadas técnicas de processamento paralelo considerando 5 anos de otimização  $T=60$ . Todas as simulações foram feitas com um computador pessoal com a configuração de Intel(R) Core(TM) i7-6700K CPU @ 4.00GHz com 16.0 GB de RAM.

#### 5.4.1.2.1 Simulações com 20 aberturas

Esta seção mostra os resultados acima descritos com 20 aberturas por estágio. A Tabela 31 mostra um compilado de todos os 12 casos executados. Na tabela, são expostas as grandezas do custo inferior, um delta do custo inferior nas últimas 3 iterações em relação a última, o número de iterações e a quantidade de cortes que cada metodologia alcançou ao longo das 4 horas de processamento.

Inicialmente, considere apenas o caso com produtividade constante (A), como já era esperado, a metodologia individualizada 1A alcançou o menor número de iterações chegando a 56, como consequência, um menor número de cortes foi calculado nesta política, ao todo, 2800. Por outro lado, a modelagem agregada (2A) obtém um número maior de cortes com o valor de 3550. E por fim, a modelagem EAFdA (3A), em termos de número de cortes/iterações, ficou entre o valor das outras modelagens, isto é, 60 iterações com 3000 cortes no total. Nota-se que, o aumento no número de iterações/cortes é reflexo de uma quantidade menor de variáveis de estado contidas nas modelagens simplificadas – 2A e 3A, assim uma menor dimensão é observada em cada PL resolvido.

O mesmo raciocínio discutido no parágrafo anterior não se restringe apenas as metodologias xA sendo  $x=1, \dots, 3$ , pode ser interpretado da mesma maneira os casos com xB,

$x_C$  e  $x_D$ . No entanto, nota-se que ao melhorar as modelagens da FPH, isto é, mais restrições são adicionadas aumentando o peso computacional de cada PL, as simplificações –  $2y$  e  $3y$ , sendo  $y=C,D$  foram perdendo eficiência, em comparação com  $1y$ . Para exemplificar, o caso 2A fez 15 iterações a mais que o caso 1A. Por outro lado, o caso 2D fez 5 iterações a mais que o caso 1D. Isto é, foram adicionadas tantas restrições de FPH que o benefício da diminuição da dimensionalidade foi minimizado, em termos de número de iterações.

Outro parâmetro exposto na Tabela 31 é a variação do custo inferior ( $\Delta_{CI}$ ) na última iteração. Com ele, pode-se auferir se os cortes adicionados na última iteração continuam sendo relevantes ou se já atingiram níveis estáveis a ponto de a política operativa já estar bem aproximada para a árvore de cenários resolvida. Por tanto, no ponto ótimo este número tende a ser zero. Para níveis de comparação, no modelo oficial em vigência no Brasil (MACEIRA et al., 2018) o modelo tem número de iterações máximo de 45 ou um  $\Delta_{CI}$  nas últimas 3 iterações de 0,2%. Diante disso, com a FPH A e B, se nota que o modelo independente teve  $\Delta_{CI}$  mais elevado, com um valor de aproximadamente 0,13%. Enquanto o menor ficou sendo o modelo agregado por bacia 2A e 2B com 0,02%. De todos os casos contidos na tabela, o maior  $\Delta_{CI}$  ficou por conta do caso 3D com valor de aproximadamente 0,19%.

Por fim, observa-se que o custo inferior segue uma ordem de valor, os casos com afluência individualizada, isto é  $1z$ , sendo  $z=A,B,C$ , possuem custo maior ao serem comparados com os seus pares de modelagem de FPH. Naturalmente, a modelagem mais completa possui um custo esperado maior dado que as outras simplificações não distribuem a afluência de forma exata para cada usina. Assim, de certa forma a distribuição de afluência aproximada acaba favorecendo usinas com maior capacidade de geração refletindo em custo menores ao longo do tempo.

Tabela 31 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas.

Caso	Custo Inferior $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{CI}$ (%)	Iterações	Cortes
1A	27,20	0,13	56	2800
2A	22,15	0,02	71	3550
3A	24,66	0,08	60	3000
1B	28,21	0,13	50	2500
2B	22,15	0,02	60	3000
3B	25,81	0,08	53	2650
1C	22,50	0,08	39	1950

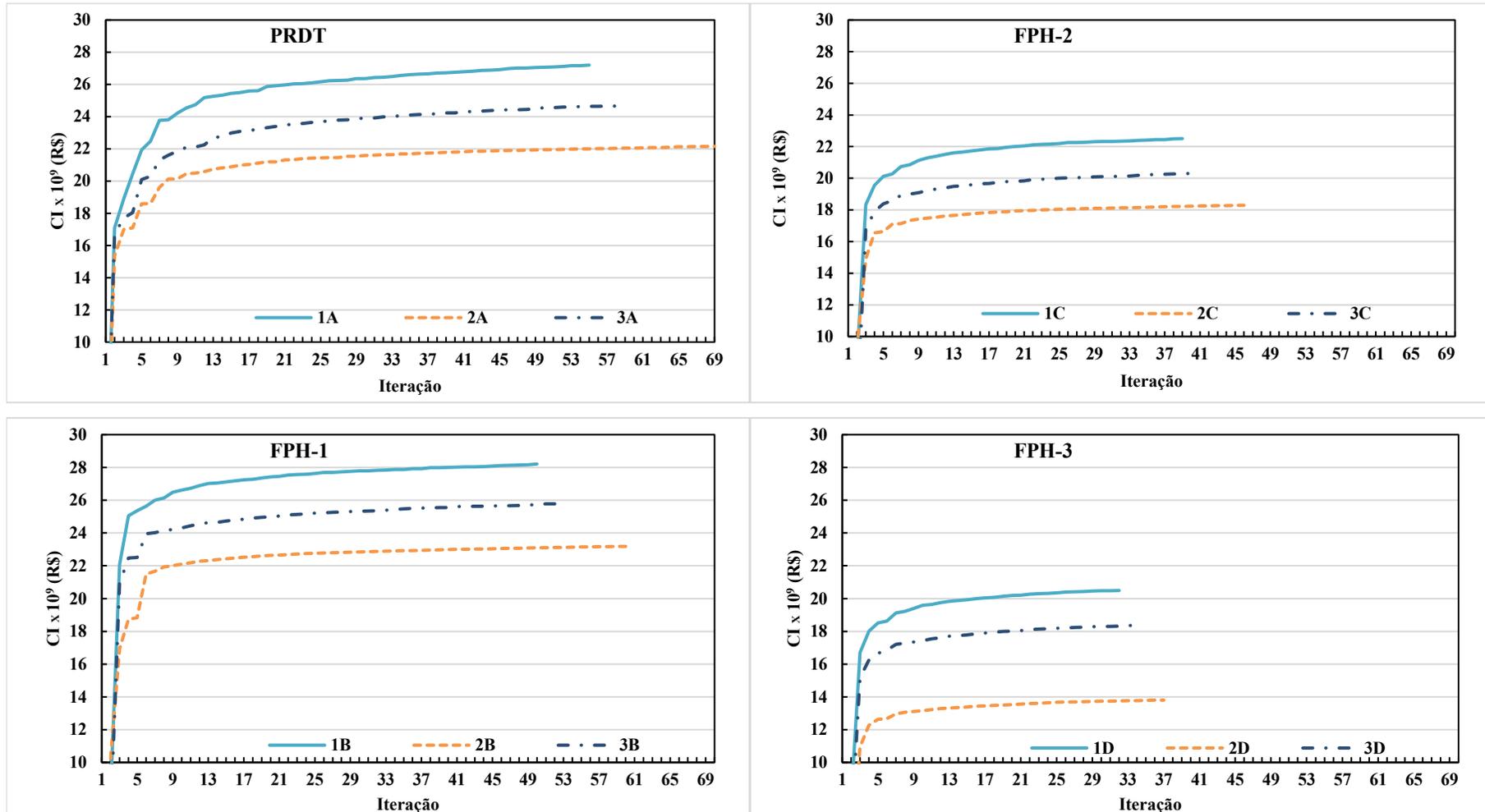
---

2C	18,29	0,05	46	2300
3C	20,33	0,17	41	2050
1D	20,49	0,07	32	1600
2D	16,61	0,09	37	1850
3D	18,38	0,19	34	1700

---

Na figura abaixo são apresentados os gráficos dos 12 primeiros casos em relação a evolução do custo inferior ao longo do processo iterativo da PDDE. No eixo das ordenadas estão mostrados os custos em bilhões de reais e os eixos das abcissas o número de iteração. A linha contínua em azul é referente ao modelo individualizado (1), a linha pontilhada em alaranjado (2) é o modelo agregado por bacia, a pontilhada mista é o modelo EAFdA (3). No título de cada gráfico estão indicados qual a FPH que a simulação se refere, isto é – A, B, C ou D. Basicamente, a figura mostra de forma visual os principais pontos que já foram explorados na tabela acima. Nota-se de forma clara que, conforme cresce a precisão da modelagem da FPH o número de iterações vai diminuindo, uma vez que cada PL fica mais pesado para se resolver. Adicionalmente, o custo inferior é maior na modelagem mais exata, seguidas pela simplificação EAFdA e da afluência agregada por bacia.

Figura 35 – Evolução do custo inferior dos casos com 20 aberturas.



Na Tabela 32 observa-se os principais dados obtidos pela simulação das políticas operativa mostradas na Figura 35 e Tabela 31. O termo  $fc$  é a média dos 50k cenários simulados,  $\sigma$  é o desvio padrão desses cenários e IC é o intervalo de confiança, todos os parâmetros são dados em bilhões de reais. E a última coluna, é mostrado a diferença percentual do intervalo de confiança do caso em questão em relação ao caso cujo a afluência é dada de forma mais próxima a realidade, ou seja, a modelagem individualizada por usina. Ressalta-se que todos os resultados de simulação são obtidos com o mesmo modelo de otimização, isto é, o individualizado por usina. No entanto, as comparações ficaram limitadas entre políticas obtidas com a mesma FPH.

No geral, para este nível de demanda, e com 20 aberturas estágio, as políticas calculadas com os modelos simplificados foram eficientes em baixar o custo de operação do sistema. A maior diferença se deu no uso da produtividade constante entre a modelagem agregada por bacia (2A) e a individualizada (1A) o qual diminuiu aproximadamente 6,13%. Para o mesmo caso, o caso 3A diminuiu em aproximadamente 2,93% o custo de operação do sistema. Para os demais casos, com afluência a energia afluenta fio d'água nota-se que ao incluir a FPH mais exata, existe uma tendência de diminuir o ganho em custo de operação, isto é, na comparação de 3B–1B, 3C–1C e 3D–1D a diminuição do custo de operação foi em média 1,45%. Mesma conclusão pode ser observada para o caso com afluências agregadas, onde os casos com 2B, 2C e 2D obtiveram em média uma diminuição de 3,95% no custo de operação.

Portanto, observa-se que ao incluir uma FPH mais acurada no problema, as simplificações por percorrer um número menor de iterações e portanto, calcular uma FCF com menos cortes o modelo individualizado tende a se beneficiar disso diminuindo as diferenças de custo de operação na simulação *out-of-sample* mostrada na tabela abaixo. No entanto, prova-se que é possível obter uma política mais bem estimada ao simplificar o modelo de afluência e melhorar o aspecto de modelagem da FPH.

Tabela 32 – Simulação com políticas de 20 aberturas/t

Caso	$fc \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença de IC em relação ao 1A (%)
1A	16,93	0,08	16,97	-
2A	15,95	0,09	15,99	-6,13%
3A	16,44	0,10	16,49	-2,93%

1B	18,27	0,10	18,32	-
2B	17,55	0,10	17,60	-4,07%
3B	18,02	0,11	18,08	-1,33%
1C	14,66	0,09	14,71	-
2C	14,08	0,09	14,13	-4,09%
3C	14,43	0,10	14,49	-1,52%
1D	13,38	0,09	13,43	-
2D	12,90	0,09	12,95	-3,70%
3D	13,18	0,10	13,23	-1,49%

Por fim, o desvio padrão dos 50000 cenários é baixo comparado ao custo total da política operativa.

#### 5.4.1.2.2 Simulações com 50 aberturas

Nas simulações apresentadas nesta seção, aumenta-se o espaço de estado da árvore de cenários de 20 para 50 aberturas para avaliar se as metodologias continuam a responder positivamente no sentido de melhorar a qualidade da política. Ao final nota-se que problemas de maior escala prejudicam a modelagem simplificada em comparação com a individualizada, no entanto, a modelagem EAFdA passa a ser uma proposta mais vantajosa, pois simplifica parte da afluência e assim não difere tanto do modelo individualizado, mais detalhes são descritos a seguir.

Iniciando pelos resultados do cálculo das FCFs da Tabela 33. As primeiras interpretações frente aos resultados já mostrados, no geral, não sofrem alterações relevantes, assim, fixando uma modelagem de FPH – A, B, C ou D. Ao aderir a modelagem individualizada, se obtém um número de iterações inferior ao comparar com as modelagens de afluência simplificadas. Por exemplo, 1B chegando a 33 iterações com 1650 cortes na FCF. 3B chega a 35 iterações com 1750 cortes calculados. E por fim, a mais eficiente em termos de número de iterações, 2B alcança 2000 cortes na quadragésima iteração.

Nota-se que ao melhorar as modelagens da FPF, a simplificação – 2y e 3y, sendo y=C,D foram perdendo eficiência, em termos de número de iteração, em relação a 1y respectivamente. Os casos mais críticos são na comparação dos casos 1,3y onde a diferença no número de iterações é de uma unidade. Isto é, foram adicionadas tantas restrições de FPH que o benefício da diminuição da dimensionalidade foi minimizado.

Em relação a variação do custo inferior ( $\Delta_{CI}$ ) observa-se que o caso menos estável é o 3D com  $\Delta_{CI}$  mais elevado com valor de aproximadamente 0,35%. Enquanto o menor ficou sendo o modelo agregado por bacia 2,A/B com 0,04%. Conclui-se que todas as políticas possuíram estabilidade satisfatória com 4 horas de processamento.

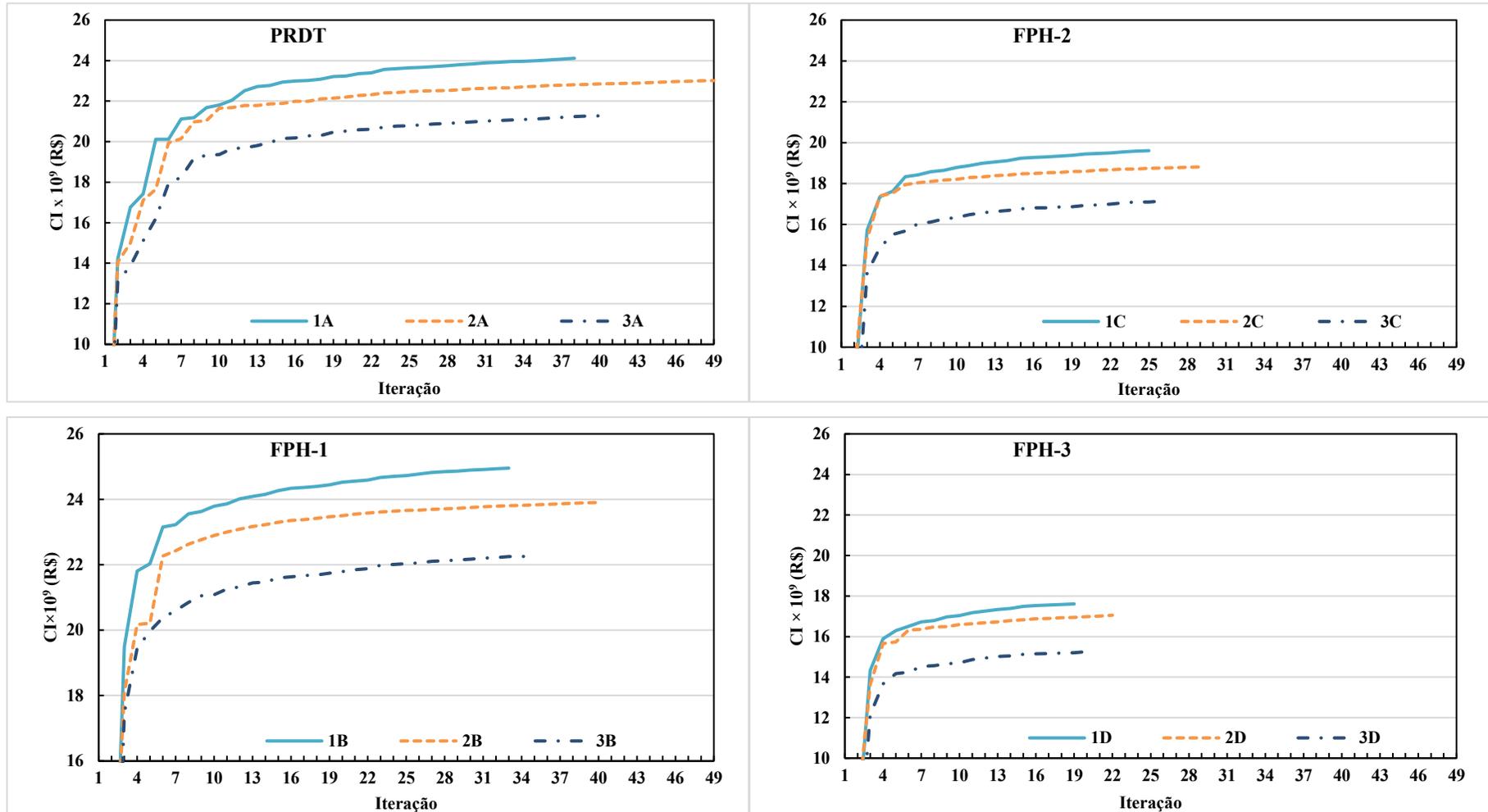
Por fim, observa-se que a ordem de valor das políticas operativas com modelo individualizado obteve custo inferior maior que as simplificações comparadas, em sequência, é verificado as políticas com modelo agregado e com modelo EAFdA. A modelagem mais completa possui um custo inferior maior dado que as outras simplificações não distribuem a afluência de forma exata para cada usina. Assim, a distribuição de afluência pelo modelo de afluência acaba se aproximando mais do modelo individualizado, mesmo sendo mais simplificada.

Tabela 33 – Resultados da otimização casos com 50 aberturas/*t*.

Caso	Custo Inferior $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{LB}$ (%)	Iterações	Cortes
1A	24,12	0,19	38	1900
2A	23,01	0,06	49	2450
3A	21,27	0,07	40	2000
1B	24,95	0,08	33	1650
2B	23,90	0,04	40	2000
3B	22,27	0,09	35	1750
1C	19,61	0,12	25	1250
2C	18,81	0,08	29	1450
3C	17,15	0,24	26	1300
1D	17,61	0,18	19	950
2D	17,05	0,25	22	1100
3D	15,26	0,35	20	1000

A Figura 36 mostra o comportamento do custo inferior no processo iterativo da PDDE de cálculo da FCF para os 12 casos simulados nesta configuração de demanda

Figura 36 – Evolução do custo inferior dos casos com 50 aberturas.



Conforme brevemente discutido no início desta seção, o fato de ter aumentado o tamanho do problema prejudicou as metodologias simplificadas sugeridas neste trabalho, no entanto, a maioria das políticas ainda se mostrou eficiente em baixar o custo de operação do sistema quando comparado com as FCF com modelo individualizado. A Tabela 34 mostra os principais parâmetros simulação das políticas operativas na determinação de IC (170). A maior diferença se deu entre a modelagem 3A e a individualizada 1A o qual diminuiu o custo em aproximadamente 2,45% enquanto o caso 2A diminuiu em aproximadamente 1,19% o custo de operação do sistema.

A inclusão da FPH neste caso aumenta ainda mais a dimensão do problema pela inclusão de um número maior de restrições PL para ser resolvido em cada nó. Ambas as metodologias sugeridas têm uma tendência de diminuir o ganho em custo de operação, ou até mesmo aumentar o custo de operação. Em outras palavras, na comparação de 3B - 1B, 3C-1C e 3D – 1D a diminuição do custo de operação foi em média 1,01%. Por outro lado, com aflúncias agregadas os casos com 2B e 2C e teve um ganho marginal de 0,12% no custo de operação. No entanto a metodologia 4B foi auferido um aumento no custo de operação em 0,47%.

Assim, constatou-se que, o modelo EAFdA proposto é uma metodologia robusta na simplificação da aflúncia para se obter custos de operação menor quando comparado com a individualizada, pois mesmo com um aumento substancial na dimensão do problema ela continua obtendo custos de operação menores.

Tabela 34 – Resultados da otimização casos com 50 aberturas/t.

Caso	$fc \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença de IC em relação ao 1A
1A	16,80	0,24	16,92	
2A	16,56	0,10	16,61	-1,19%
3A	16,38	0,42	16,60	-2,45%
1B	18,15	0,11	18,21	
2B	18,11	0,11	18,16	-0,19%
3B	17,97	0,12	18,03	-1,10%
1C		0,10	14,64	
2C	14,59	0,10	14,64	-0,05%
3C	14,43	0,12	14,49	-0,94%
1D	13,33	0,09	13,38	
2D	13,38	0,09	13,43	0,47%
3D	13,20	0,10	13,25	-0,99%

Além de todas as simulações presentes até aqui, o processo foi repetido com as mesmas configurações da PDDE com outro nível de demanda, no geral, os resultados foram muito semelhantes, afirmando a consistência da metodologia proposta. Assim, os resultados complementares são apresentados no APÊNDICE C – Modelo EAFdA.

#### 5.4.2 Variáveis de Volume – O Modelo Earm

Esta seção mostra os resultados da determinação da FCF e avaliação da política obtidos com o modelo Earm. São estabelecidos dois casos: (i) Modelo Earm por sistema, onde apenas uma variável de estado é colocada no modelo PAR(p) a representar a energia armazenada e (ii) Modelo Earm por bacia, onde as 6 variáveis – uma para cada bacia – são representadas no modelo. Ambos os modelos são comparados com a modelagem individualizada. De maneira geral, as metodologias são eficientes na redução da dimensionalidade. A Tabela 35 apresenta as diferentes combinações analisadas.

Tabela 35 – Representação das variáveis de estado e FPH dos casos executados com a metodologia Earm.

Variáveis de estado	Função de Produção Hidrelétrica
4) $v_{rt}$ ,	A. CP
5) $ear_{st}$	
6) $ear_{bt}$	

A nomenclatura dos casos segue a mesma lógica apresentada anteriormente. A coluna da esquerda indica a variáveis de estado que são representadas na FCF, nota-se que apenas variáveis referentes a volume são mostradas, portanto todos os casos utilizam o modelo independente de afluência. Os casos são dados por: 4) considera modelo individualizado por UHE; 5) modelo de energia armazenada por sistema; 6) modelo de energia armazenada por bacia. A coluna da direita indica que apenas a FPH por Produtibilidade Constante é considerada nesta bateria de simulações.

Pela tabela acima são 3 diferentes casos para serem resolvidos no problema de POEMP. Assim, por exemplo, o caso 4A, 5A e 6A contemplam modelos com todas as representações do espaço de estado pelo volume com a FPH dada por PC. Assim, dos 3 casos possíveis foram processadas variantes com o 20, 50 e 100 aberturas por estágio na *backward* da PDDE e com 2 valores da demanda distintos. Portanto, ao todo, foram calculadas 18 políticas operativas. Na avaliação da qualidade de cada FCF foram simulados  $NS^{out} = 50000$  cenários de afluências de acordo com o processo de determinação de IC (170). Da mesma forma, o IC da simulação *out-of-sample* foi estimado com 3 anos de simulação para evitar o fenômeno do final do mundo.

De acordo com caso de determinação do volume armazenado, tem-se que o PL no modelo individualizado tem 665 variáveis e 399 restrições, o modelo Earm por sistema possui 638 variáveis e 399 restrições e, o modelo Earm por bacia tem 643 variáveis e 399 restrições. Por fim, os modelos anteriormente mencionados possuem 28, 1 e 6 variáveis de estado respectivamente.

Em termos da PDDE, as configurações continuam as mesmas, as políticas de todos os casos foram feitas usando uma amostragem com 50 cenários por iteração e utilizado como critério de para 4 horas de processamento utilizando técnicas de processamento paralelo considerando 5 anos de otimização  $T=60$ . Todas as simulações foram feitas com um computador pessoal com a configuração de Intel(R) Core(TM) i7-6700K CPU @ 4.00GHz com 16.0 GB de RAM.

#### 5.4.2.1 Simulação com 20, 50 e 100 aberturas – Modelo independente

Como era esperado, a redução do número de variáveis de estado trouxe uma eficiência grande na PDDE em termos de número de iterações e cálculo de cortes na política. No entanto, mesmo calculando uma FCF com um maior número de cortes, não foi suficiente para diminuir o custo de operação quando calculado o IC, assim como será detalhado mais à frente.

A Tabela 36 mostra os principais resultados acerca das metodologias comparadas nesta seção. Na coluna, o caso mnemônico 4A-20a significa que é o caso de modelo individualizado com 20 aberturas. Por simplicidade foram colocados todos os casos com 20, 50 e 100 aberturas e demanda 1 na mesma tabela.

Observa-se que em termos de número de iterações, como o esperado, os casos com modelo Earm percorrem um número maior de iterações ao comparar com o modelo individualizado. De forma natural, o caso 5A-20a possui apenas 1 variável de estado, assim alcança 97 iterações a mais em comparação com o 4A-20a permitindo o cálculo de uma FCF com 8450 cortes, por sua vez, o caso 6A-20a é capaz de superar o caso 4A-20a em aproximadamente 80% no número de iterações, com 2000 cortes a mais.

Quando aumenta o espaço de estado de 20 para 50 e 100 aberturas, as modelagens simplificadas perdem uma parcela de eficiência. Focando no caso Earm por bacia, há uma melhora de aproximadamente de 70% e 58% respectivamente.

Tabela 36 – Resultados da otimização casos com 20, 50 e 100 aberturas

Caso	CI $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{LB}$ (%)	Iterações	Cortes
4A-20a	10,29	0,078	72	3600
5A-20a	15,88	0,000	169	8450
6A-20a	10,99	0,010	129	6450

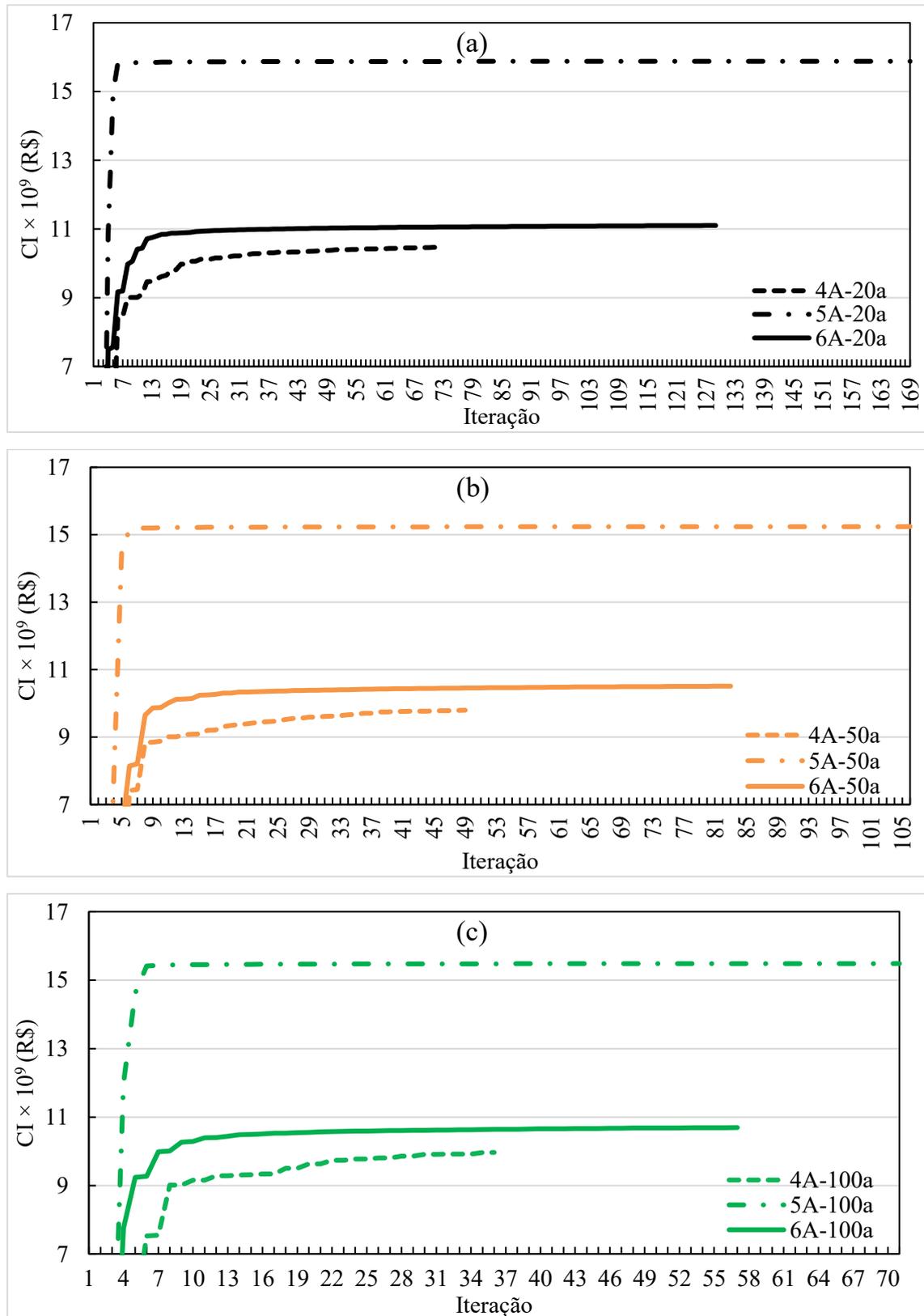
4A-50a	9,70	0,078	49	2450
5A-50a	15,23	0,000	106	5300
6A-50a	10,42	0,010	83	4150
4A-100a	9,97	0,033	36	1800
5A-100a	15,88	0,001	71	3550
6A-100a	10,29	0,021	57	2850

---

Problemas com um número de variáveis de estado menor tendem a alcançar a convergência de forma mais rápida, assim, nota-se que para o caso de Earm por sistema com 20, 50 e 100 aberturas uma estabilidade do custo inferior praticamente nula. Neste mesmo sentido, o modelo Earm por bacia alcança em média 0,015%. Ambas as metodologias simplificadas de energia armazenada, por terem um menor número de variáveis, atingem uma maior estabilidade em comparação com o modelo individualizado 4A.

Por fim, as políticas com custo mais elevado se verificam com o modelo Earm por sistema, esse resultado era esperado pois uma vez que a FCF é calculada na mesma árvore de cenários as decisões ótimas são tomadas através do modelo individualizado. As simplificações “desotimizam” a água dos reservatórios em detrimento a política operacional sobretudo devido a adoção da operação dos reservatórios em paralelo. A Figura 37 mostra os pontos discutidos neste parágrafo. Nota-se que, o modelo Earm por sistema (5A-20/50/100 aberturas) possui uma variação de custo ínfima ao longo das iterações podendo ser considerada uma reta em torno do valor do custo inferior.

Figura 37 – Excursão do custo inferior Demanda 1 para os casos (a) com 20 aberturas, (b) 50 aberturas e (c) 100 aberturas. Todos com 50 cenários por iteração.



Na sequência dos resultados, apresenta-se as simulações das 12 políticas calculadas, a Tabela 37 apresenta a estimativa de IC referentes a  $NS^{out}=50000$  cenários. No geral, as simplificações representadas pelo modelo Earm por sistema e por bacia, embora sejam eficientes para reduzir a dimensão do problema e calcular o FCF com uma maior quantidade de cortes, não foram capazes de diminuir o custo de operação esperado. Em todas as simulações, elas apresentaram custo esperado maior, em comparação com o modelo individualizado. Destaca-se a representação do Earm por sistema a qual obteve um custo de operação esperado em média 20,54% maior, por outro lado, o modelo Earm por bacia apresentou políticas com custo em média 1,98% mais elevado. Esses valores são obtidos pela média dos valores da última coluna da Tabela 37.

Constatou-se que a redução de dimensionalidade através da inclusão de variáveis de energia armazenada agregada em substituição das variáveis individuais das UHEs não é capaz de obter uma operação média do sistema elétrico com custos menores. Quando utilizado o modelo Earm por sistema, onde as 28 variáveis de volume foram reduzidas a uma, o erro observado foi considerável (na casa dos 20%) provando que existem determinados acoplamentos hidráulicos, principalmente em UHEs distantes umas das outras, e bacias que possuem o ciclo hidrológico distinto que não podem ser desconsiderados ou simplificados através da premissa adotada de gerenciamento dos reservatórios em paralelo. Neste sentido, ao modelar as variáveis por bacia, isto é, ao simplificar 28 variáveis de volume armazenado em 6 de energia armazenada, a diferença de custo esperado em relação ao modelo individualizado diminui consideravelmente para aproximadamente 2%.

Tabela 37 – Simulação com políticas de 20, 50 e 100 aberturas

Caso	$fc \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença de IC em relação ao 4A (%)
4A-20a	6,49	0,03	6,51	
5A-20a	7,80	0,03	7,82	20,11%
6A-20a	6,62	0,03	6,64	1,95%
4A-50a	6,49	0,03	6,51	
5A-50a	7,84	0,03	7,86	20,68%
6A-50a	6,62	0,03	6,64	1,95%
4A-100a	6,49	0,03	6,51	

5A-20a	7,85	0,03	7,86	20,85%
6A-100a	6,62	0,03	6,64	2,00%

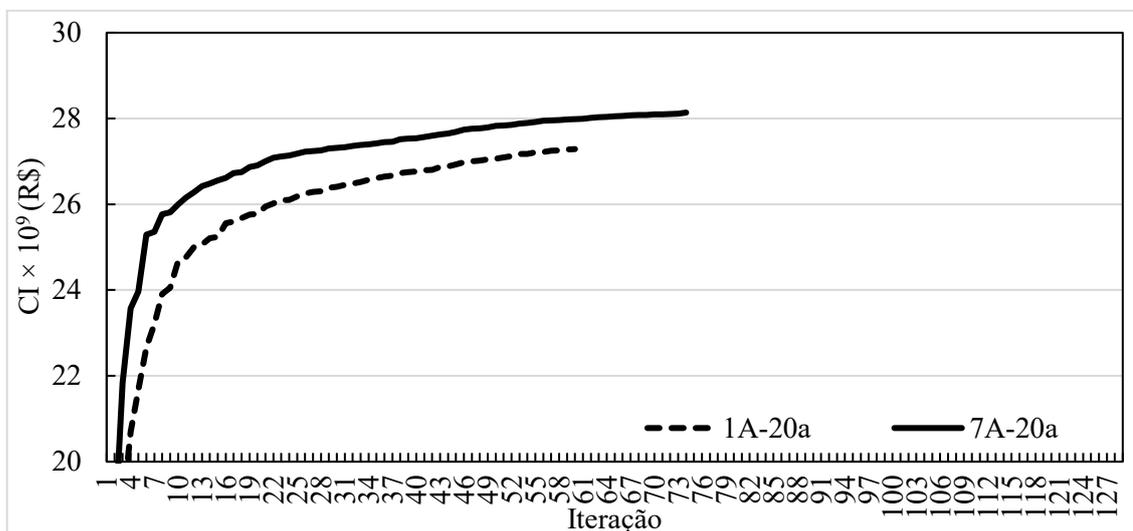
Da mesma forma, foi simulado os mesmos casos com +500MW de demanda e no geral, os resultados não têm mudanças significativas, resultado adicionais podem ser verificados no APÊNDICE D – Modelo Earm.

#### 5.4.2.2 Simulação com 20 aberturas – Modelo PAR(p)

Focando nos casos mais promissores, esta seção mostra o que acontece ao se aumentar a precisão da modelagem da afluência. Assim, os dois casos são analisados: 1A variáveis de estado de volume e modelo PAR(p) individualizados e; 7A) Modelo Earm por bacia com modelo PAR(p) individualizado. Devido a eficiência computacional mostrada nos resultados discutidos até aqui, esta seção mostra que é possível se utilizar desse ponto positivo da metodologia simplificada e aumentar a precisão da modelagem de algum aspecto antes negligenciado, neste caso, foi decidido pela melhoria da modelagem da afluência. O modelo Earm por sistema, embora fosse o melhor em termos de eficiência se mostrou muito aquém na simulação das políticas, por isso, usa-se apenas a modelagem por bacia nestas novas simulações.

Optou-se por seguir com a configuração da PDDE de 20 aberturas por estágio e 50 cenários por iteração pois nos resultados anteriores não é perceptível mudanças relevantes ao incluir um espaço de estados maior. Assim, a Figura 38 mostra a evolução do custo inferior ao longo das iterações para ambas as metodologias. Como o esperado a metodologia 7A alcançou um maior número de iterações com 74 e com um total de 6450 cortes contra 60 iterações e 3000 cortes em 1A. Um ponto interessante a se observar é que depois de 4 horas e processamento 7A obteve 0,089% de variação de custo inferior contra 0,043% de 1A. No caso, ambas as políticas mostram estabilização.

Figura 38 – Excursão do custo inferior Demanda 2 para os casos com 20 aberturas e modelo PAR(p) individualizado.



Na simulação das duas FCF observa-se que há uma melhoria no custo médio de operação esperado. Dos 50000 cenários simulados a diferença de IC foi de apenas 0,41%. Como já abordado anteriormente, o carregamento pelo modelo PAR(p) dos PLs prejudica a eficácia da redução da dimensionalidade onde foi observado um aumento de 25% no número de iterações (75 contra 60). No entanto, os pontos calculados de energia armazenada geram uma alteração no valor da água nos cenários amostrados de tal forma que ao final a quantidade de iterações superior foi benéfica e contribuiu para o que o modelo Earm por bacia obtivesse uma política operativa com custo elevado em apenas 0,41% de diferença em relação ao modelo individualizado.

Tabela 38 – Simulação com políticas de 20aberturas/t.

Caso	$f_c \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença em relação ao 1A
1A	16,79	0,15	16,87	-
7A	16,86	0,15	16,94	0,41%

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os temas abordados neste trabalho são problemáticas reais no âmbito do POEMP, o qual o seu principal objetivo é encontrar uma política operativa que minimize os custos de operação térmica e déficit de energia no atendimento da demanda em um horizonte de planeamento de 5 anos. Neste trabalho, é proposto obter as políticas operativas de duas maneiras. Na primeira, são propostas alterações no método de solução da PDDE. E na segunda, ataca os aspectos de modelagem de problemas do POEMP. Em ambas as estratégias, o objetivo das metodologias propostas é encontrar avanços frente a performance do modelo tidos como do estado da arte.

Considerando o método de solução, como explicado no capítulo 3, é proposto o método de regularização da PDDE chamado de centros de Chebyshev o qual o principal objetivo é calcular outros pontos experimentais na etapa *forward* definidos no centro de Chebyshev de certo poliedro. Ademais, é apresentado uma comparação com outros métodos de regularização existentes na literatura, os quais são: o método da decomposição regularizada multiestágio proposto em (ASAMOV; POWELL, 2018) e a decomposição de nível com soluções normais, apresentado em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019).

Quanto aos aspectos de modelagem, tal qual mostrado no Capítulo 4, o objetivo foi reduzir a dimensionalidade da FCF baseado em parâmetros peculiares dos Reservatórios Equivalentes de Energia e incorporá-los a modelagem individualizada. Neste sentido, foram usadas duas estratégias, a primeira foi na simplificação dos modelos de afluência, e segunda, usou-se a energia armazenada em substituição das variáveis de volume. Quanto aos modelos de afluência, é proposto o modelo EAFdA o qual modela por energia afluente a afluência das usinas fio d'água que compõe as bacias. Essa metodologia foi comparada com a representação das afluências por bacia proposta em (LARROYD, 2016) e às usinas individuais, das quais, a última é considerada o estado da arte.

Inicialmente, os resultados mostram que a metodologia CC foi testada com várias heurísticas para determinar o raio, entre elas, destaca-se o esquema combinatório para obter uma FCF ao executar simultaneamente a PDDE clássica com CC. Em termos do processo de otimização, a metodologia tem se mostrada consistente uma vez que a maioria dos cenários testados com o sistema brasileiro atingiram melhores cotas inferiores para o custo de operação que a PDDE clássica. No entanto, em termos de simulação da política operativa, para os cenários *out-of-sample* testados, com as heurísticas apresentadas, os resultados indicaram que

a metodologia CC puramente aplicada não melhora o custo de operação esperado. Este fato ocorre devido aos cortes calculados com CC serem construídos sobretudo em regiões mais próximas a ótima, em relação a árvore de cenários amostrada. Ocorre que, uma vez que o algoritmo chega a este ponto ele não é capaz de percorrer outras regiões fora desta última. Portanto, nas simulações *out-of-sample* mostradas com CC puro o método apresenta esta desvantagem. No entanto, uma simulação apresentada neste trabalho, mostrou que é possível intercalar CC com CL e calcular políticas operativas mais baratas em relação a CL.

Dentro deste contexto, a metodologia CC com as heurísticas propostas pode ser usada em todos os âmbitos, por exemplo, se o desejo é ter uma visão mais robusta do futuro tanto em estudos de preço ou de investimentos, sugere-se usar CC combinado com CL. Caso a necessidade vem sob a ótica do operador, é preferível utilizar CC puro em estudos encadeados, uma vez que a FCF calculada possui uma melhoria no valor da água.

Além da metodologia CC outros dois métodos de regularização presentes na literatura foram avaliados em comparação com CL, o NL apresentado em (VAN ACKOOIJ; DE OLIVEIRA; SONG, 2019) e o DR exposto em (ASAMOV; POWELL, 2018). Em todos os métodos de regularização as heurísticas foram adaptadas para o problema do sistema reduzido. Desta maneira, no método NL, foi proposto um termo adicional em comparação com a heurística proposta pelos autores do método, com objetivo de tornar a heurística original mais genérica. No método CC também é proposta outra heurística ao invés da sugerida na primeira etapa do documento. No DR, foram alterados apenas valores frente a sugerida originalmente. O estudo mostrou que todos os métodos são capazes de atingir melhores de custos inferiores para o custo de operação que os observados na PDDE clássica. Em termos da avaliação da política operativa, foi calculada da brecha de otimalidade, neste contexto, observa-se que as FCFs calculadas com os métodos DR e CC são de melhor qualidade pois apresentam um gap menor. Destaque para o método DR, que obteve um gap de aproximadamente 2,07% menor que a CL. Portanto, das heurísticas tratadas neste trabalho, pode-se concluir que os métodos DR e CC se mostraram mais efetivo no cálculo de políticas com menor custo. Contudo, o método NL se mostrou mais efetivo sob a ótica do operador onde se pretende uma política mais próxima a realidade. Por fim, ressalta-se que, todos os métodos de regularização funcionam para o objetivo o qual é proposto, no entanto dependem de calibração de heurísticas para melhor performar. Sem dúvidas, quanto a implementação, o método CC é o mais vantajoso pela simplicidade, no entanto, em termos de calibração da heurística o método DR se mostra mais vantajoso.

Quanto a propostas de alteração nos aspectos de modelagem, a qual foi tratada no capítulo 4. Em primeiro lugar, mostrou-se uma robusta revisão bibliográfica de trabalhos que usam modelagens das afluições com dependência temporal no âmbito do POEMP. O objetivo deste estudo é mostrar que é possível simplificar a modelagem de afluição, a qual no problema do POEMP é priorizada, e com o ganho de eficiência computacional, canalizar esforços no aumento a exatidão FPH, fato que é preterido pelos principais autores do POEMP, melhorando assim, a qualidade da FCF obtida. A análise desse *trade-off* não é encontrada na literatura, por isso, é proposta neste trabalho. De maneira geral, é feita a comparação entre 2 modelos simplificados com o estado da arte (modelo individualizado), o primeiro modelo simplificado é proposto em (LARROYD, 2016) e consiste em agregar as afluições de uma mesma bacia e representar por uma variável aleatória. O modelo EAFdA, proposto neste trabalho, agrega as afluições das UHEs FdA de uma mesma bacia e representa por uma variável aleatória de energia afluente, neste caso, as UHEs de reservatórios continuam sendo individualizadas. Mostra-se que para uma árvore de cenários com 20 aberturas por estágio, tanto a modelagem por bacia quanto a modelagem EAFdA obtiveram custo de operação esperado menor em média 4% e 2% ao comparado com o modelo individualizado, respectivamente. Ao aumentar o problema para 50 aberturas por estágio, nota-se que este peso computacional adicional foi prejudicial as modelagens simplificadas, mesmo assim a modelagem EAFdA se mostrou robusta como alternativa para simplificar as afluições e permitir a entrada da modelagem mais acurada da FPH melhorando a política operativa obtida em aproximadamente 1% em média. Ao mesmo tempo, o modelo por bacia se mostrou com custo maior quando simulado com 50 aberturas.

Por fim, o último estudo, tem por objetivo a reduzir a dimensionalidade do problema através da substituição das variáveis de volume de cada UHE por variáveis de energia armazenada. Neste sentido, é proposto dois esquemas de modelagem, o primeiro, Modelo Earm por sistema, onde são substituídas todas as variáveis de volume de cada UHE por uma única que representa a energia armazenada do sistema. Na sequência, o modelo Earm por bacia, onde são substituídas todas as variáveis de volume de UHE por uma variável de energia armazenada por bacia. No geral, os resultados indicam que o aumento do número de variáveis de estado leva a resultados semelhantes do modelo individualizado. Assim, as metodologias se mostraram eficientes para diminuir a dimensão do problema calculando FCF com um maior número de cortes, em média, é observado um aumento no número de iterações em 120% no modelo Earm por sistema, e 71% no Earm por bacia, em relação ao modelo individualizado. No entanto, não

foi possível obter melhores políticas com tais simplificações, assim, o modelo Earm por sistema apresenta políticas com valor em aproximadamente 20% mais elevado, e o Earm por bacia tem acréscimo de 2% no valor de IC. Esta maior diferença de custo observada no modelo Earm por sistema, é devido à simplificação de determinados acoplamentos hidráulicos, principalmente em UHEs espacialmente distantes e localizadas em bacias que possuem ciclos hidrológicos distintos e, por este motivo, não podem ser desconsideradas ou simplificadas através da premissa de gerenciamento dos reservatórios em paralelo. Devido a isso, ao modelar as variáveis por bacia tais acoplamentos são mais bem capturados e a diferença de custo esperado em relação ao modelo individualizado diminui consideravelmente. No entanto estas metodologias podem ser interessantes em estágios futuros do POEMP onde o montante de geração aproximado já tem um alto grau de incerteza, assim uma estimativa de custo e geração do sistema total já seria suficiente.

## 6.1 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Dando continuidade ao tema sobre a redução da dimensionalidade, os resultados da tese mostraram que as variáveis de volume não podem ser desconsideradas totalmente frente a inclusão das variáveis de energia armazenada. Isto se deve porquê existem acoplamentos hidráulicos importantes que não pode ser simplificados, adicionalmente, quando inclui-se a variável de energia armazenada é necessário criar uma estratégia de gestão dos reservatórios que sempre será subótima em relação ao estado da arte, neste sentido, uma continuação deste trabalho seria identificar as variáveis de reservatórios mais importantes e incluí-las no modelo de forma explícita, desta forma, um certo ganho na redução da dimensionalidade permanece e ainda aproximaria mais o custo de operação esperado. Estabelecer normas claras para determinar quais usinas são importantes, como por exemplo, maior energia armazenada, ou maior capacidade de regularização.

Os resultados apresentados na redução da dimensionalidade a partir da agregação em variáveis de energia armazenada são fortemente influenciadas pelo fator de distribuição o qual divide a cada parcela de energia armazenada que será distribuída para cada UHE. No caso deste trabalho foi utilizado a filosofia da operação do reservatórios em paralelo. No entanto, como continuação do trabalho sugere-se estabelecer uma metodologia para determinar um fator de distribuição mais assertivo, pode ser feito pela simulação de uma quantidade grande de cenários pré processados utilizando o modelo individualizado ou até mesmo pelo treinamento de uma rede neural.

Ainda no tema da redução da dimensionalidade pode-se usar a metodologia da Análise de Componentes Principais para tal objetivo. Em (GJERDEN et al., 2015; TAHAN JÚNIOR, 2017) utilizou-se ACP de forma eficiente na simplificação do espaço de estado das variáveis de afluência. No entanto, a proposta seria utilizar ACP nas variáveis de volume. Nota-se que a utilização da ACP em variáveis de afluência é teoricamente simples pois existe um histórico em que seria utilizado para gerar cenários sintéticos, a determinação da ACP portanto, seria também utilizando este mesmo histórico de afluência. Agora, o volume é uma grandeza de decisão e o histórico de não pode ser utilizado por ser pouco confiável. Uma opção é fazer uma simulação a priori com um elevado número de cenários utilizando uma FCF bem completa, assim as decisões dessa simulação compõem uma amostra mais confiável de utilização dos reservatórios.

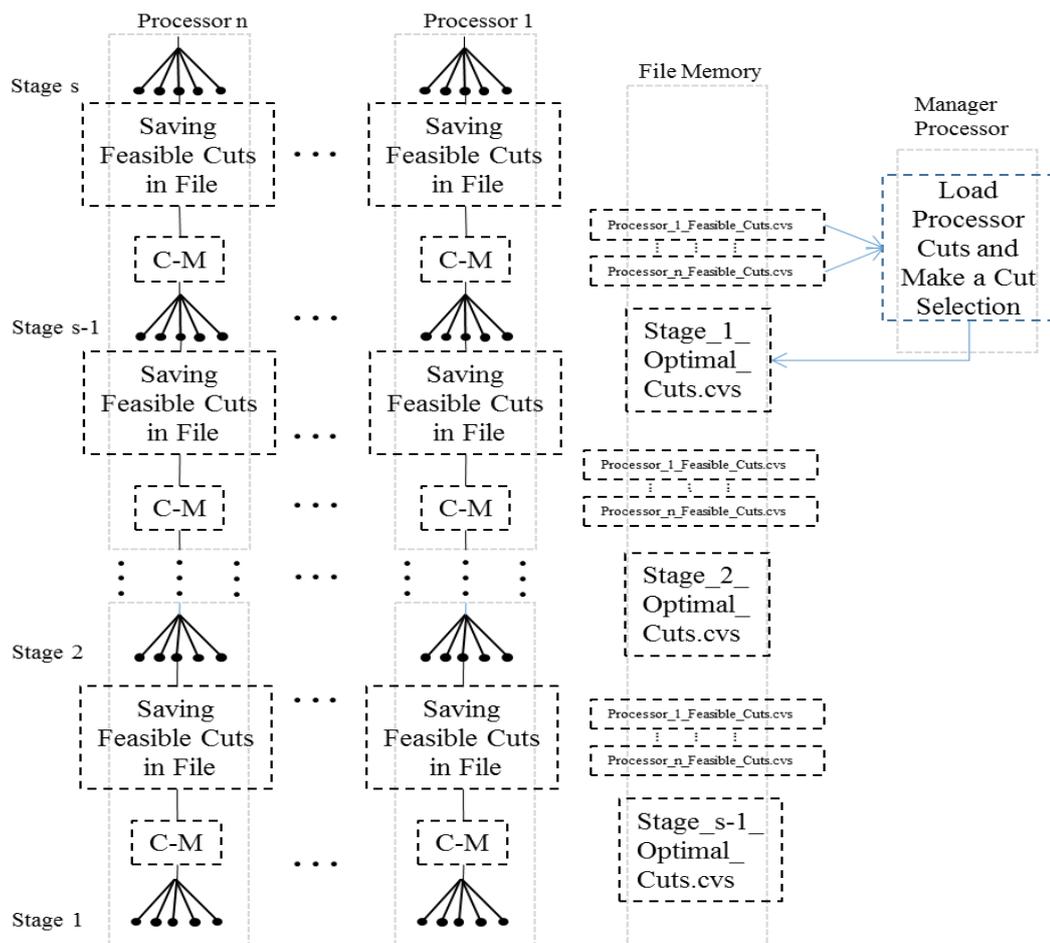
A incerteza em PE é modelada através da variável aleatória definida por uma função de distribuição contínua no espaço. Com o objetivo de obter soluções práticas, uma amostragem dessa função continua é discretizada formando uma estrutura bem conhecida em problemas estocásticos chamada de árvore de cenário. No POEMP, a quantidade de cenários amostrados é um aspecto muito importante para tornar o problema tratável. Assim, para diminuir o tamanho da árvore de cenários a ser percorrida é aplicado um algoritmo de redução de cenários proposto por (KOVACEVIC; PICHLER, 2012) na árvore original. Este algoritmo foi testado em (BELTRAN; OLIVEIRA; FINARDI, 2017); contudo, os autores focaram no âmbito da performance do método da decomposição aninhada (DONOHUE; BIRGE, 2006) o qual o modelo de afluências é independente. Sugere-se, que esta metodologia seja aplicada no estado da arte do POEMP, ou seja, em um modelo de afluência PAR.

Dado o tempo computacional indesejado que uma FPH linear por partes completa produz na PDDE, e devido a imprecisão obtida com a formulação por produtibilidade constante, sugere-se estabelecer regras operativas que relacionam o período hidrológico com o rendimento da UHE para encontrar um valor de produtibilidade constante sazonal, e, portanto, poderia ser uma formação intermediária entre uma formulação de produtibilidade constante e uma FPH linear por partes.

Para aumentar a velocidade de processamento avaliar a implementação de paralelização assíncrona puro do algoritmo da PDDE. Entende-se por assíncrono puro um esquema de solução sem ponto de sincronização. Observa-se que conforme existe o aumento do número de cenários amostrados no *forward* um dos grandes gargalos da paralelização dos do algoritmo da PDDE é a velocidade de troca de informações entre os processos em cada

estágio, uma vez que os cortes são compartilhados, um ou mais processos devem ficar com essa função de distribuir as informações para todos os outros processos, assim o algoritmo sempre fica balizado pelo processo mais lento. Sob a justificativa que todo corte é viável então não seria necessária troca de informação entre os processos para compartilhá-los, assim cada processo carregaria os cortes por estágios que estariam disponíveis no banco de dados. A Figura 39 mostra de forma resumida como seria o esquema proposto, A etapa *forward* continua não precisando de sincronização, portanto ela é muito semelhante de como é atualmente. Na etapa *backward* há uma mudança considerável, um processo é determinado como gerenciador, este processo é responsável por receber as informações dos demais cortes e manipulá-las, esta é sua única função. Os outros processos utilizam os cortes já disponíveis no banco de dados, calculam os cortes novos e imprimem em um arquivo. O gerenciador pega os novos cortes e junta com os demais neste banco de dados e já deixando pronto para outros processos utilizarem.

Figura 39 – Etapa *Backward* do esquema assíncrono puro.



## REFERÊNCIAS

- ABGOTTSPON, H. **Hydro power planning: Multi-horizon modeling and its applications**. Doctoral Thesis—[s.l.] ETH Zurich, 2015.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.; MILLER, D. **Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. 10. ed. [s.l.] Courier Coporation, 1964.
- ANEEL. **BIG - Banco de Informações de Geração**. Disponível em: <<http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>>.
- ARVANITIDIS, N. V.; ROSING, J. Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-89, n. 2, p. 327–335, fev. 1970.
- ARVANITIDITS, N. V.; ROSING, J. Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-89, n. 2, p. 319–326, fev. 1970.
- ASAMOV, T.; POWELL, W. B. Regularized Decomposition of High-Dimensional Multistage Stochastic Programs with Markov Uncertainty. **SIAM Journal on Optimization**, 6 mar. 2018.
- BELTRÁN, F. et al. Improving the performance of the stochastic dual dynamic programming algorithm using Chebyshev centers. **Optimization and Engineering**, 7 set. 2020.
- BELTRAN, F.; OLIVEIRA, W. DE; FINARDI, E. C. Application of Scenario Tree Reduction via Quadratic Process to Medium-Term Hydrothermal Scheduling Problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. PP, n. 99, p. 1–1, 2017.
- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, n. 1, p. 238–252, 1 dez. 1962.
- BEZERRA, B. et al. **Measuring the hydroelectric regularization capacity of the Brazilian hydrothermal system**. IEEE PES General Meeting. **Anais...** In: IEEE PES GENERAL MEETING. jul. 2010.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. V. **A Multicut Algorithm for Two-Stage Stochastic Linear Programs**. 1988.
- BOX, G. E. P. et al. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2015.
- BRANDÃO, J. L. B. Performance of the Equivalent Reservoir Modelling Technique for Multi-Reservoir Hydropower Systems. **Water Resources Management**, v. 24, n. 12, p. 3101–3114, 1 set. 2010.
- BRANDI, R. B. S. et al. Improving stochastic dynamic programming on hydrothermal systems through an iterative process. **Electric Power Systems Research**, v. 123, p. 147–153, 1 jun. 2015.

BRANDI, R. B. S. et al. A Convergence Criterion for Stochastic Dual Dynamic Programming: Application to the Long-Term Operation Planning Problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 33, n. 4, p. 3678–3690, jul. 2018.

BRIGATTO, A.; STREET, A.; VALLADÃO, D. M. Assessing the Cost of Time-Inconsistent Operation Policies in Hydrothermal Power Systems. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 32, n. 6, p. 4541–4550, nov. 2017.

BROWN, J. H. et al. Energetic Limits to Economic Growth. **BioScience**, v. 61, n. 1, p. 19–26, 1 jan. 2011.

CARVALHO, L. C. X. DE. **Planejamento de sistemas hidrotérmicos: uma análise comparativa entre as representações a usinas individualizadas e a reservatórios equivalentes de energia**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2002.

CARVALHO, M. R. et al. **Methodology for determining the energy deficit penalty function for hydrothermal dispatch**. 2018 Simposio Brasileiro de Sistemas Eletricos (SBSE). **Anais...** In: 2018 SIMPOSIO BRASILEIRO DE SISTEMAS ELETRICOS (SBSE). maio 2018.

CHARBENEAU, R. J. Comparison of the two- and three-parameter log normal distributions used in streamflow synthesis. **Water Resources Research**, v. 14, n. 1, p. 149–150, 1978.

CHEN, D. et al. Dimension reduction of decision variables for multireservoir operation: A spectral optimization model. **Water Resources Research**, v. 52, n. 1, p. 36–51, 1 jan. 2016.

CHEN, Z. L.; POWELL, W. B. Convergent Cutting-Plane and Partial-Sampling Algorithm for Multistage Stochastic Linear Programs with Recourse. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 102, n. 3, p. 497–524, 1999.

CHENG, C. et al. Parallel discrete differential dynamic programming for multireservoir operation. **Environmental Modelling & Software**, v. 57, 1 jul. 2014.

DE CASTRO, C. M. B. et al. The generation of synthetic inflows via bootstrap to increase the energy efficiency of long-term hydrothermal dispatches. **Electric Power Systems Research**, v. 124, p. 33–46, 1 jul. 2015.

DE FARIA, V. A. D. et al. An assessment of multi-layer perceptron networks for streamflow forecasting in large-scale interconnected hydrosystems. **International Journal of Environmental Science and Technology**, 23 jul. 2021.

DE MATOS, V. L. **Análise comparativa entre as modelagens de reservatório equivalente de energia agregado por subsistema e por cascata no problema do planejamento anual da operação energética**. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2008.

DE MATOS, V. L. **Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica**. [s.l.] Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

DE MATOS, V. L.; LARROYD, P. V.; FINARDI, E. C. **Assessment of the Long-Term Hydrothermal Scheduling operation polices with alternative inflow modeling**. 2014 Power Systems Computation Conference. **Anais...** In: 2014 POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. ago. 2014.

DE OLIVEIRA, W. Target radius methods for nonsmooth convex optimization. **Operations Research Letters**, v. 45, n. 6, p. 659–664, 1 nov. 2017.

DE QUEIROZ, A. R. Stochastic hydro-thermal scheduling optimization: An overview. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 62, p. 382–395, 1 set. 2016.

DE QUEIROZ, A. R.; MORTON, D. P. Sharing cuts under aggregated forecasts when decomposing multi-stage stochastic programs. **Operations Research Letters**, v. 41, n. 3, p. 311–316, 1 maio 2013.

DINIZ, A. L.; MACEIRA, M. E. P. A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for the Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 23, n. 3, p. 1298–1308, ago. 2008.

DONOHUE, C. J.; BIRGE, J. R. The Abridged Nested Decomposition Method for Multistage Stochastic Linear Programs with Relatively Complete Recourse. **Algorithmic Operations Research**, v. 1, 2006.

DOS SANTOS, L. C. B.; DINIZ, A. L.; SIMONETTI, L. Accelerating Dual Dynamic Programming for Stochastic Hydrothermal Coordination Problems. **2018 Power Systems Computation Conference (PSCC)**, p. 1–7, 2018.

DOS SANTOS, M. L. L. et al. Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 31, n. 9, p. 546–552, 2009.

DREW, S. S.; HOMEM-DE-MELLO, T. **Quas-Monte Carlo Strategies for Stochastic Optimization**. Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference. **Anais...** In: PROCEEDINGS OF THE 2006 WINTER SIMULATION CONFERENCE. dez. 2006.

DUPAČOVÁ, J.; GRÖWE-KUSKA, N.; RÖMISCH, W. Scenario Reduction in Stochastic Programming: An Approach Using Probability Metrics. **Springer-Verlag**, 2003.

ELZINGA, J.; MOORE, T. G. A central cutting plane algorithm for the convex programming problem. **Mathematical Programming**, v. 8, n. 1, p. 134–145, 1 dez. 1975.

EPE; ONS; CCEE. **Representação Hidrológica: Geração de cenários**: Relatório Técnico do GT Metodologia da CPAMP. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.].

EPE; ONS; CCEE. **Análise de alternativas para mitigação da volatilidade do CMO/PLD**: Relatório Técnico do GT Metodologia da CPAMP. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.].

FERRIS, M.; MANGASARIAN, O. Finite perturbation of convex programs. **Applied Mathematics & Optimization**, v. 23, p. 263–273, 1 abr. 1991.

FILHO, S. S. PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS. **Controle e Automação**, v. 1, p. 122–131, 1987.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 21, n. 2, p. 835–844, maio 2006.

FINARDI, E. C.; DECKER, B. U.; DE MATOS, V. L. An Introductory Tutorial on Stochastic Programming Using a Long-term Hydrothermal Scheduling Problem. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 24, n. 3, p. 361–376, 1 jun. 2013.

FREDO, G. L. M.; FINARDI, E. C.; DE MATOS, V. L. Assessing solution quality and computational performance in the long-term generation scheduling problem considering different hydro production function approaches. **Renewable Energy**, v. 131, p. 45–54, 1 fev. 2019.

FU, Y.; SHAHIDEHPOUR, M.; LI, Z. Security-Constrained Unit Commitment With AC Constraints\*. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 20, n. 3, p. 1538–1550, ago. 2005.

GEOFFRION, A. M. Generalized Benders decomposition. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 10, n. 4, p. 237–260, out. 1972.

GJELSVIK, A.; MO, B.; HAUGSTAD, A. Long- and Medium-term Operations Planning and Stochastic Modelling in Hydro-dominated Power Systems Based on Stochastic Dual Dynamic Programming. v. 1, n. 1, 2010.

GJERDEN, K. S. et al. **Hydrothermal scheduling in Norway using stochastic dual dynamic programming; a large-scale case study**. 2015 IEEE Eindhoven PowerTech. **Anais...** In: 2015 IEEE EINDHOVEN POWERTECH. jun. 2015.

GONÇALVES, R. E. C. **Desenvolvimento de modelos de programação estocástica aplicados à programação mensal da operação energética**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2011.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v. 83, n. 1, p. 19–27, 2012.

GUIGUES, V. SDDP for some interstage dependent risk-averse problems and application to hydro-thermal planning. **Computational Optimization and Applications**, v. 57, n. 1, p. 167–203, 1 jan. 2014.

HÄRTEL, P.; KORPÁS, M. Aggregation Methods for Modelling Hydropower and Its Implications for a Highly Decarbonised Energy System in Europe. **Energies**, v. 10, n. 11, p. 1841, nov. 2017.

HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario tree reduction for multistage stochastic programs. **Computational Management Science**, v. 6, n. 2, p. 117–133, 1 maio 2009.

HELSETH, A.; BRAATEN, H. Efficient Parallelization of the Stochastic Dual Dynamic Programming Algorithm Applied to Hydropower Scheduling. **Energies**, v. 8, n. 12, p. 14287–14297, 18 dez. 2015.

HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. **Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems**. 1. ed. Canada: Elsevier Science, 1994. v. 45

HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I.; LENNOX, W. C. Advances in Box-Jenkins modeling: 1. Model construction. **Water Resources Research**, v. 13, n. 3, p. 567–575, 1977.

HOMEM-DE-MELLO, T. On Rates of Convergence for Stochastic Optimization Problems Under Non-Independent and Identically Distributed Sampling. **SIAM Journal on Optimization**, v. 19, n. 2, p. 524–551, 1 jan. 2008.

HOMEM-DE-MELLO, T.; BAYRAKSAN, G. Monte Carlo sampling-based methods for stochastic optimization. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v. 19, n. 1, p. 56–85, 1 jan. 2014.

HOMEM-DE-MELLO, T.; MATOS, V. L. DE; FINARDI, E. C. Sampling strategies and stopping criteria for stochastic dual dynamic programming: a case study in long-term hydrothermal scheduling. **Energy Systems**, v. 2, n. 1, p. 1–31, 22 jan. 2011.

IEA. **IEA**. Disponível em: <<https://www.iea.org/countries/Brazil/>>. Acesso em: 17 dez. 2018.

INFANGER, G.; MORTON, D. P. Cut sharing for multistage stochastic linear programs with interstage dependency. **Mathematical Programming**, v. 75, n. 2, p. 241–256, nov. 1996.

JARDIM, D. L. D. D.; MACEIRA, M. E. P.; FALCAO, D. M. **Stochastic streamflow model for hydroelectric systems using clustering techniques**. 2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings (Cat. No.01EX502). **Anais...** In: 2001 IEEE PORTO POWER TECH PROCEEDINGS (CAT. NO.01EX502). set. 2001.

JOLLIFFE, I. T. **Principal Component Analysis**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2002.

KELLEY, JR., J. The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 8, n. 4, p. 703–712, 1 dez. 1960.

KIWIEL, K. C. Finding normal solutions in piecewise linear programming. **Applied Mathematics and Optimization**, v. 32, n. 3, p. 235–254, 1 nov. 1995.

KLIGERMAN, A. S.; FILHO, S. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotermicos interligados utilizando programação dinamica estocastica dual**. Dissertação de Mestrado—[s.l: s.n.].

KOVACEVIC, R. M.; PICHLER, A. Scenario Trees - A Process Distance Approach. **Eprints for the Optimization Community**, 2012.

LARROYD, P. V. **Comparação de políticas com aversão a risco para o planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC:

Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

LARROYD, P. V. **Um modelo de otimização estocástica com representação individualizada das usinas hidrelétricas no planejamento de médio prazo da operação hidrotérmica.** Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

LEMARECHAL, C. Constructing Bundle Methods for Convex Optimization. In: HIRIART-URRUTY, J.-B. (Ed.). **North-Holland Mathematics Studies.** Fermat Days 85: Mathematics for Optimization. [s.l.] North-Holland, 1986. v. 129p. 201–240.

LIMA, L. M. M.; POPOVA, E.; DAMIEN, P. Modeling and forecasting of Brazilian reservoir inflows via dynamic linear models. **International Journal of Forecasting**, v. 30, n. 3, p. 464–476, 1 jul. 2014.

LITTLE, J. D. C. The Use of Storage Water in a Hydroelectric System. **Journal of the Operations Research Society of America**, v. 3, n. 2, p. 187–197, 1 maio 1955.

M. E., E.; G. S., C. **Optimal Economic Operation of Electric Power Systems.** 1. ed. [s.l.] Academic Press, 1979. v. 142

MACEIRA, M. et al. **Ten years application of stochastic dual dynamic programming in official and agent studies.** . In: POWER SYSTEM COMPUTATIONAL CONFERENCE (PSCC). Glasgow, Scotland, Tech. Rep.: 2008.

MACEIRA, M. E. P. et al. Twenty Years of Application of Stochastic Dual Dynamic Programming in Official and Agent Studies in Brazil-Main Features and Improvements on the NEWAVE Model. **2018 Power Systems Computation Conference (PSCC)**, p. 1–7, 2018.

MARCATO, A. L. M. **REPRESENTAÇÃO HÍBRIDA DE SISTEMAS EQUIVALENTES E INDIVIDUALIZADOS PARA O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE MÉDIO PRAZO DE SISTEMAS DE POTÊNCIA DE GRANDE PORTE.** Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

MARTINS, L. S. A.; AZEVEDO, A. T.; SOARES, S. Nonlinear Medium-Term Hydro-Thermal Scheduling With Transmission Constraints. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 29, n. 4, p. 1623–1633, jul. 2014.

MATOS, V. L. DE; PHILPOTT, A. B.; FINARDI, E. C. Improving the performance of Stochastic Dual Dynamic Programming. **J. Computational Applied Mathematics**, v. 290, p. 196–208, 2015.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, v. 21, n. 2, p. 239–245, 1979.

MOREIRA, A.; STREET, A.; ARROYO, J. M. **Energy and reserve scheduling under correlated nodal demand uncertainty: An adjustable robust optimization approach.** 2014 Power Systems Computation Conference. **Anais...** In: 2014 POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. ago. 2014.

MUKHOPADHYAY, S.; SANKARASUBRAMANIAN, A.; DE QUEIROZ, A. R. Performance Comparison of Equivalent Reservoir and Multireservoir Models in Forecasting Hydropower Potential for Linking Water and Power Systems. **Journal of Water Resources Planning and Management**, v. 147, n. 4, p. 04021005, 1 abr. 2021.

NASROLAHPOUR, E.; GHASEMI, H. A stochastic security constrained unit commitment model for reconfigurable networks with high wind power penetration. **Electric Power Systems Research**, v. 121, p. 341–350, 1 abr. 2015.

NIEDERREITER, H. Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 84, n. 6, p. 957–1041, 1978.

NIEDERREITER, H. **Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods**. [s.l.] Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

OLIVEIRA, W. DE. **Redução ótima de cenários em programação estocástica. Aplicação às vazões afluentes aos aproveitamentos hidroelétricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007.

OLIVEIRA, W. DE et al. **Análise da Correlação Cruzada Através da Distribuição Lognormal Três Parâmetros**. . In: XVII ABRH - SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS. Campo Grande, Brasil: 2009.

OLIVEIRA, W. L. DE et al. Optimal scenario tree reduction for stochastic streamflows in power generation planning problems. **Optimization Methods and Software**, v. 25, n. 6, p. 917–936, 1 dez. 2010.

ONS. **ONS - Operador Nacional do Sistema Elétrico**. Disponível em: <<http://ons.org.br:80/paginas/sobre-o-ons/procedimentos-de-rede/vigentes>>. Acesso em: 17 dez. 2018.

ONS. **Módulo 4 - Programação da Operação**. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.]. Disponível em: <<http://www.ons.org.br/procedimentos/index.aspx>>.

OUOROU, A. A Proximal Cutting Plane Method Using Chebychev Center for Nonsmooth Convex Optimization. **Math. Program.**, v. 119, n. 2, p. 239–271, mar. 2009.

PENNA, D. D. J.; MACEIRA, M. E. P.; DAMAZIO, J. **Selective sampling applied to long-term hydrothermal generation planning**. 17th PSCC - Power Systems Computation Conference. **Anais...** In: 17TH PSCC - POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. Stockholm, Sweden: 2011.

PEREIRA, M. V. F. et al. Stochastic Streamflow Models for Hydroelectric Systems. **Water Resources Research**, v. 20, n. 3, p. 379–390, 1984.

PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 161–169, jul. 1989.

- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Application of Decomposition Techniques to the Mid - and Short - Term Scheduling of Hydrothermal Systems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-102, n. 11, p. 3611–3618, nov. 1983.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. **Water Resources Research**, v. 21, n. 6, p. 779–792, 1985.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v. 52, n. 1–3, p. 359–375, maio 1991.
- PHILPOTT, A. B.; DE MATOS, V. L. Dynamic sampling algorithms for multi-stage stochastic programs with risk aversion. **European Journal of Operational Research**, v. 218, n. 2, p. 470–483, 16 abr. 2012.
- PHILPOTT, A. B.; GUAN, Z. On the convergence of stochastic dual dynamic programming and related methods. **Operations Research Letters**, v. 36, n. 4, p. 450–455, 1 jul. 2008.
- PHILPOTT, A.; DE MATOS, V.; FINARDI, E. On Solving Multistage Stochastic Programs with Coherent Risk Measures. **Operations Research**, v. 61, n. 4, p. 957–970, 19 jul. 2013.
- PHILPOTT, A.; PRITCHARD, G. **EMI-DOASA**. [s.l.] EMI, 2013.
- PINTO, R. J.; BORGES, C. T.; MACEIRA, M. E. P. An Efficient Parallel Algorithm for Large Scale Hydrothermal System Operation Planning. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 4, p. 4888–4896, nov. 2013.
- RODRIGUES, R. N. **Um modelo para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos baseado em relaxação lagrangeana**. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2009.
- RUSZCZYNSKI, A. On the regularized decomposition method for stochastic programming problems. In: MARTI, K.; KALL, P. (Eds.). Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
- RUSZCZYŃSKI, A.; ŚWIĘTANOWSKI, A. Accelerating the regularized decomposition method for two stage stochastic linear problems. **European Journal of Operational Research**, v. 101, n. 2, p. 328–342, 1 set. 1997.
- SAAD, M. **Application of principal components analysis to long-term reservoir management**. Montreal: Montreal University, 1988.
- SALVENDY, G. **Handbook of Industrial Engineering: Technology and Operations Management**. 3. ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001. v. 1
- SANTOS, T. N. et al. Hourly pricing and day-ahead dispatch setting in Brazil: The dessem model. **Electric Power Systems Research**, v. 189, p. 106709, 1 dez. 2020.
- SANTOS, T. N.; DINIZ, A. L.; BORGES, C. L. T. A New Nested Benders Decomposition Strategy for Parallel Processing Applied to the Hydrothermal Scheduling Problem. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 8, n. 3, p. 1504–1512, maio 2017.

SCUZZIATO, M. R. **MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS PARA O PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO ELETROENERGÉTICA**. Florianópolis, SC: UFSC, 2016.

SHAPIRO, A. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. **European Journal of Operational Research**, v. 209, n. 1, p. 63–72, 2011.

SHAPIRO, A. et al. Worst-Case-Expectation Approach to Optimization Under Uncertainty. **Operations Research**, p. 1435–1449, 2013.

SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A. **Lectures on Stochastic Programming**. [s.l.] Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

SIQUEIRA, H. et al. Performance analysis of unorganized machines in streamflow forecasting of Brazilian plants. **Appl. Soft Comput.**, 2018.

SOARES, E. S. DE M. **Geração de séries sintéticas mensais de vazão utilizando Generative Adversarial Networks**. Pernambuco: Universidade de Pernambuco - UPE, 2019.

SOARES, M. P.; STREET, A.; VALLADÃO, D. M. On the solution variability reduction of Stochastic Dual Dynamic Programming applied to energy planning. **European Journal of Operational Research**, v. 258, n. 2, p. 743–760, 16 abr. 2017.

SOUZA, R. C.; CAMARGO, M. C. **Análise e Previsão de Séries Temporais: Os Modelos Arima**. 2. ed. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.].

STEDINGER, J. R.; SULE, B. F.; LOUCKS, D. P. Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. **Water Resources Research**, v. 20, n. 11, p. 1499–1505, 1984.

STREET, A.; MOREIRA, A.; ARROYO, J. M. Energy and Reserve Scheduling Under a Joint Generation and Transmission Security Criterion: An Adjustable Robust Optimization Approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 29, n. 1, p. 3–14, jan. 2014.

SUTLOVIC, E.; CUJIC-COKO, S.; MEDIC, I. Characteristics of basin inflows a statistical analysis for long-term/mid-term hydrothermal scheduling. **Thermal Science**, p. 799–809, 2014.

TAHAN JÚNIOR, C. R. V. **Aplicação da análise de componentes principais no problema do planejamento da operação energética de médio prazo**. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2017.

TEJADA-GUIBERT, J. A.; JOHNSON, S. A.; STEDINGER, J. R. The Value of Hydrologic Information in Stochastic Dynamic Programming Models of a Multireservoir System. **Water Resources Research**, v. 31, n. 10, p. 2571–2579, 1995.

TERRY, L. A. et al. Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electrical Generating System. **Interfaces**, v. 16, n. 1, p. 16–38, 1 jan. 1986.

TREISTMAN, F. et al. **Periodic Time Series Model with Annual Component Applied to Operation Planning of Hydrothermal Systems**. 2020 International Conference on

Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS). **Anais...** In: 2020 INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROBABILISTIC METHODS APPLIED TO POWER SYSTEMS (PMAPS). ago. 2020.

TURGEON, A. A decomposition method for the long-term scheduling of reservoirs in series. **Water Resources Research**, v. 17, n. 6, p. 1565–1570, 1981.

VAN ACKOOIJ, W.; DE OLIVEIRA, W.; SONG, Y. On level regularization with normal solutions in decomposition methods for multistage stochastic programming problems. **Computational Optimization and Applications**, v. 74, n. 1, p. 1–42, set. 2019.

VAN-ACKOOIJ, W.; WARIN, X. On conditional cuts for Stochastic Dual Dynamic Programming. **arXiv:1704.06205 [math]**, 20 abr. 2017.

WANG, C.; FU, Y. Fully Parallel Stochastic Security-Constrained Unit Commitment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 31, n. 5, p. 3561–3571, set. 2016.

WERNER, R. A. **A Framework for Assessing the Impacts of Network Formulations in the Operation of Hydrothermal Power Systems**. Dissertação de Mestrado—Rio de Janeiro, Brazil: Pontifícia Universidade Católica, 2020.

WU, L.; SHAHIDEHPOUR, M.; LI, T. Stochastic Security-Constrained Unit Commitment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 22, n. 2, p. 800–811, maio 2007.

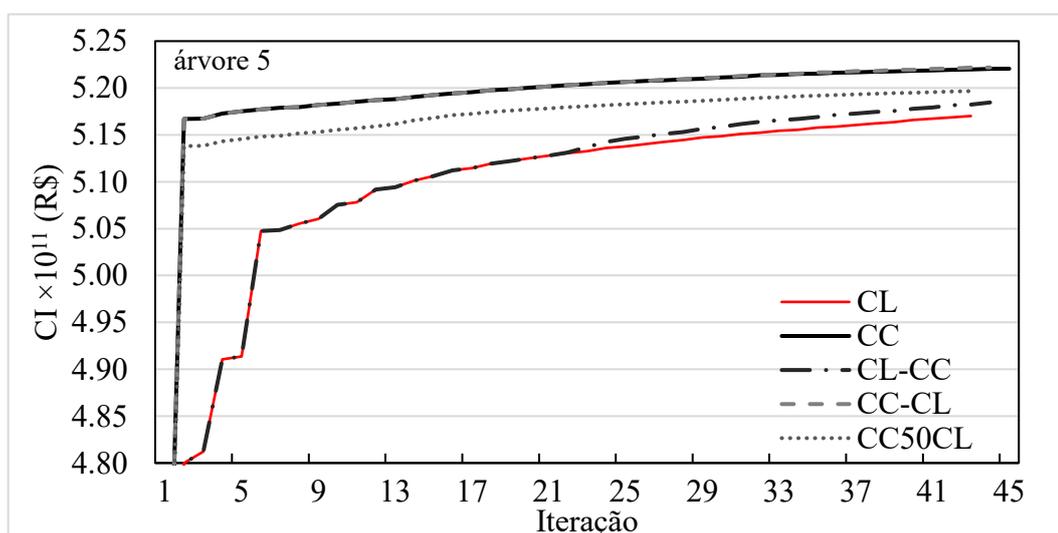
XU, B. et al. Scenario tree reduction in stochastic programming with recourse for hydropower operations. **Water Resources Research**, v. 51, n. 8, p. 6359–6380, 2015.

### APÊNDICE A – Metodologia dos Centros de Chebyshev

O objetivo desse conjunto de simulações é encontrar uma estratégia que melhore a política operativa qual melhora o custo de operação esperado na *out-of-sample* comparado com o CL. Considerando o sistema brasileiro, a modelagem da afluência PAR por bacia penalizada. Os casos são processados com a seguinte configuração da PDDE: a etapa *forward* com 216 cenários por iteração com reamostragem e 20 aberturas. Foi considerado 48 horas de tempo de processamento. Foi considerado 3 árvores de cenários com o caso neutro e avesso a risco. As configurações do *solvers* utilizados são as mesmas apresentadas no corpo do capítulo de resultados seção 5.3.1.

A Figura 40 mostra o custo inferior dos casos com a árvore de cenário 5, devido a similaridade entre os casos, os resultados das outras árvores são omitidos. Nota-se que a metodologia CC é eficiente e se mostra consistente em melhorar o custo inferior, fato que já tinha sido confirmado pelas simulações apresentadas na seção de resultados. Todos os casos envolvendo CC ultrapassam CL em termos de custo inferior.

Figura 40 – Custo inferior dos casos considerando a árvore 5 com risco neutro.



A Figura 40 exibe um comparativo entre o crescimento do custo inferior e o tempo de redução de cada caso. Considerando os resultados de redução no tempo computacional, pode ser visto que há um padrão nos casos simulados. Os casos com CC apresentam 99,34%, 98,32% e 96,10% de redução computacional observados na árvore 5, 6 e 7, respectivamente. Como esperado, para os casos 50CL-CC, a árvore 7 atinge um valor fora da ordem em 60,17%.

Tabela 39 – Crescimento do Custo inferior [%] e redução do tempo computacional para todos os casos neutro a risco.

i	Crescimento do Custo Inferior (%)			Tempo de redução (%)		
	Árvore					
	5	6	7	5	6	7
CC	0,98	0,86	0,73	99,34	98,32	96,10
CL-CC	0,28	0,27	0,13	37,39	37,58	36,85
CC-CL	1,00	0,90	0,75	99,34	98,15	96,09
50CL-CC	0,51	0,38	0,24	89,10	88,93	60,17

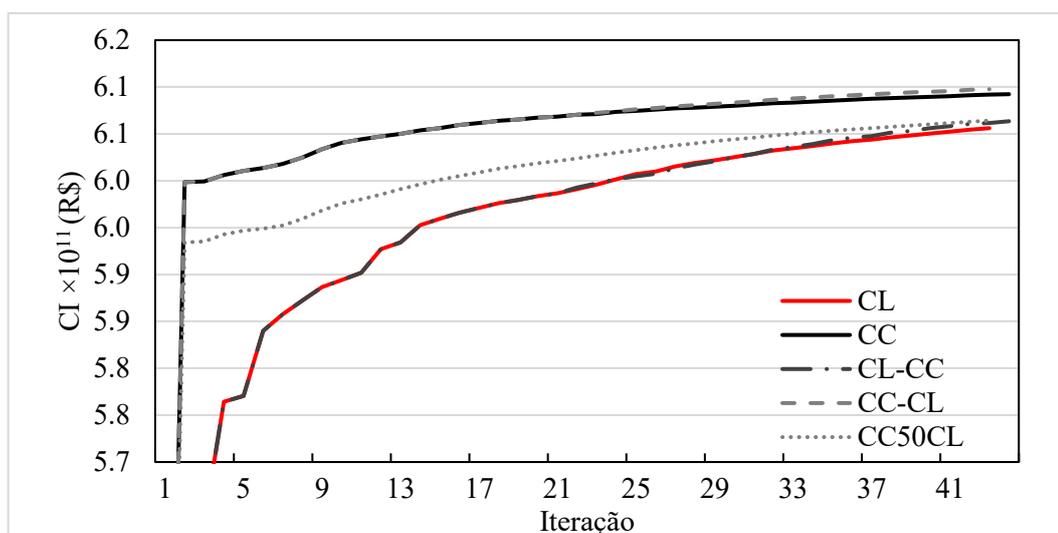
A tabela abaixo mostra a diferença de custo esperado para cada caso, com respeito ao caso CL. Nota-se que, nas células destacadas indicam quais FCFs foram capazes de melhorar o custo esperado de operação em relação ao CL, isto significa que para a árvore 6 foram os casos CC e 50CL-CC, já para a árvore 7, CL-CC e 50CL-CC.

Tabela 40 – Caso neutro a risco de custo esperado.

i	Diferença de custo esperado (%)		
	Árvore		
	5	6	7
CC	0,22	-1,03	0,01
CL-CC	1,05	0,75	-0,03
CC-CL	0,64	0,21	0,01
50CL-CC	0,32	-0,29	-0,04

A Figura 41 mostra o custo inferior para os casos com a árvore de cenários 5, da mesma forma, as outras árvores são omitidas pois os resultados são muito semelhantes. Os resultados obtidos indicam uma consistência da metodologia CC onde todos os casos os quais CC é implementada ultrapassam o custo inferior do CL.

Figura 41 – Custo inferior para os casos considerando a árvore 5 com aversão ao risco.



A tabela abaixo mostra a comparação em termos de custo inferior e tempo redução de tempo computacional para todos os casos com aversão ao risco. Neste contexto, os resultados evidenciam a eficiência da metodologia CC os quais apresentam melhor custo inferior e consequentemente redução de tempo computacional.

Tabela 41 – Crescimento do Custo inferior [%] e redução do tempo computacional para todos os casos com aversão ao risco.

i	Crescimento do custo inferior (%)			Redução de tempo (%)		
	árvore			árvore		
	5	6	7	5	6	7
CC	0,60	0,51	0,46	92,02	78,19	78,93
CL-CC	0,12	0,05	0,04	21,05	20,31	11,39
CC-CL	0,69	0,62	0,55	90,64	85,77	78,85
CC50CL	0,13	0,15	0,10	26,32	26,55	18,03

A tabela abaixo mostra o a diferença de custo esperado entre os casos com aversão ao risco em relação ao CL. Os resultados indicam que a árvore 7 alcança uma política melhor. Destaca-se o caso CL-CC, o qual apresenta a FCF mais barata em aproximadamente 0,55%. Também, esta estratégia é capaz de melhorar a política da árvore 5 provando ser mais barata em 0,078%.

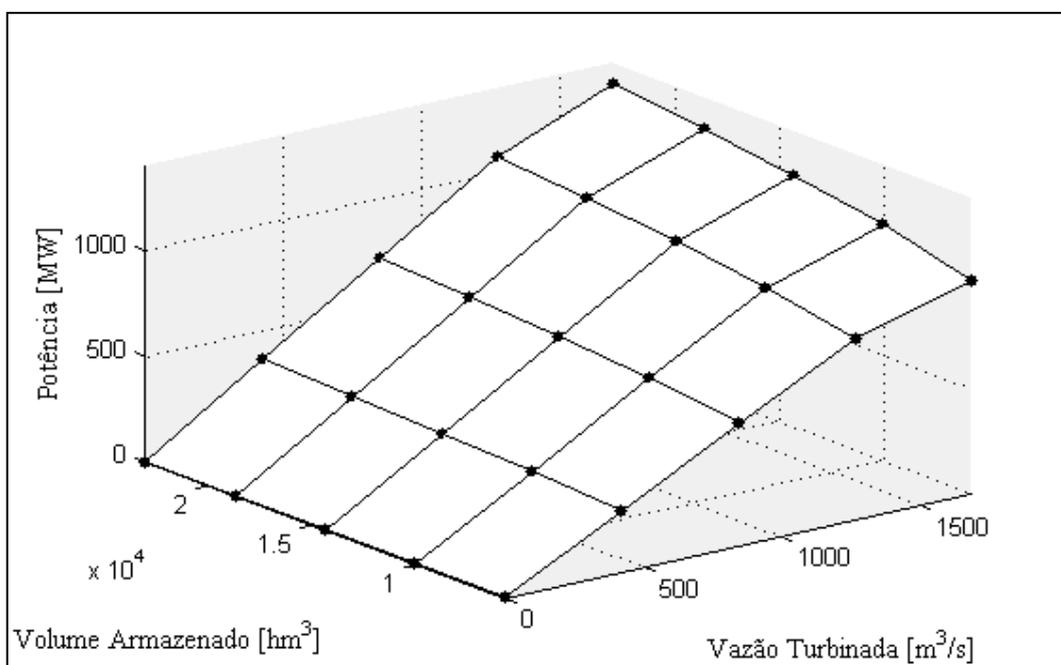
Tabela 42 – Custo esperado dos casos avessos ao risco.

i	Diferença de custo esperado (%)		
	Árvore		
	5	6	7
CC	0,361	1,239	-0,083
CL-CC	-0,078	0,707	-0,551
CC-CL	0,09	1,19	-0,09
50CL-CC	0,51	0,36	-0,48

### APÊNDICE B – Determinação da FPH

A primeira etapa consiste em definir a FPH agregada para a UHE, em vez de representar a função para cada unidade geradora tal qual em (2) deve-se fazer um somatório de todas as unidades pertencentes a UHE. Inicialmente selecionam-se os pontos com  $s^m = 0^{11}$ , isto é, escolhe-se uma quantidade de pontos igualmente espaçados de  $v^j$  e  $q^k$ , formando uma grade de pontos com número total NI. Para exemplificar, considere uma grade de pontos ( $k = j = 1, \dots, 5$ ) para a UHE Furnas a qual está mostrada na Figura 42. Note-se que as linhas que unem os pontos são apenas ilustrativas, pois na verdade nesta etapa só estão disponíveis os pontos.

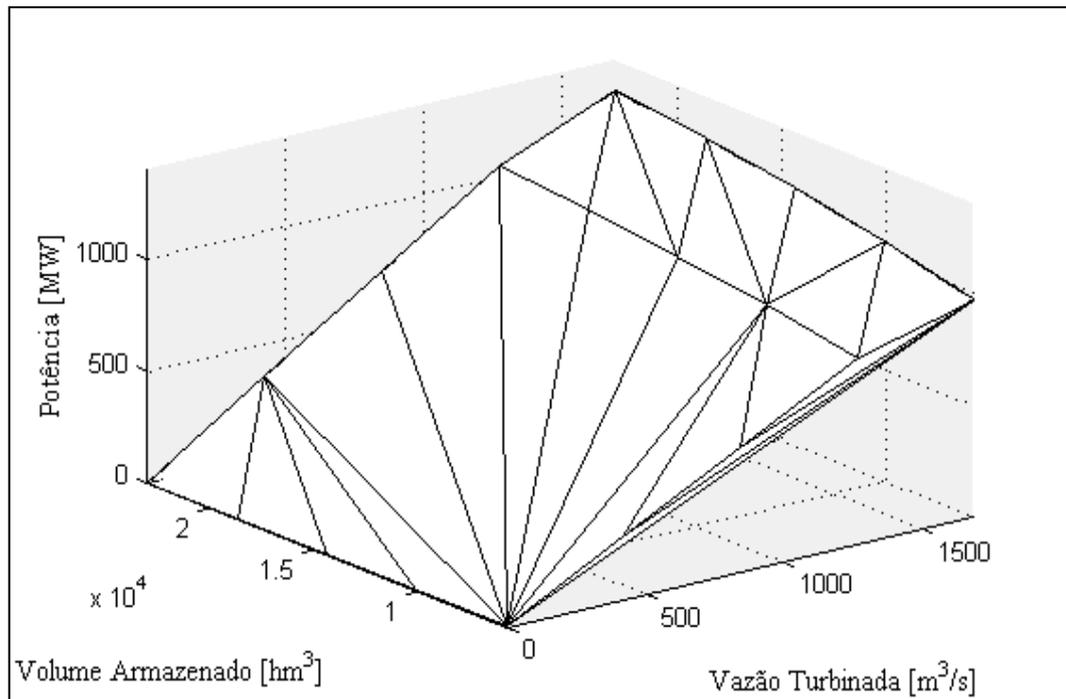
Figura 42 – Conjunto de pontos da FPH Furnas Agregada, considerando vertimento nulo.



Em geral, uma FPH dada pela interligação dos pontos mostrados na Figura 42 não é côncava. Para torná-la desta natureza, inicialmente utiliza-se a grade de pontos calculada na etapa anterior como dado de entrada para de um algoritmo associado com a metodologia de CH, o qual retorna os planos mostrados na Figura 43.

<sup>11</sup> Dado que o vertimento, em geral, é nulo e o mesmo possui um efeito linear decrescente na queda líquida, a estratégia adotada para as usinas como Furnas consiste em inicialmente aplicar o *Convex Hull* em termos das variáveis mais importantes, i.e.,  $v$  e  $q$ , para depois ajustar o vertimento, conforme detalhado na sequência.

Figura 43 – Envoltória obtida pelos planos escolhidos pelo algoritmo do *Convex Hull*.



Matematicamente, os planos escolhidos pelo CH podem ser dados por:

$$p + PH_{0e} + PH_{1e} \cdot q + PH_{2e} \cdot v = 0, \quad e = 1, \dots, NE. \quad (193)$$

Em que:

$PH_{xe}$  : coeficientes dos planos obtidos no CH sendo  $x = 0, \dots, 2$ ;

$NE$  : número de planos obtidos no CH.

No entanto, note-se que o algoritmo fornece planos que contornam os pontos inferiormente, os quais devem ser eliminados para a construção da FPH desejada. Assim nesta etapa deve ser feita uma seleção dos planos que contornam a superfície superior da FPH, conforme o algoritmo de seleção abaixo. Considere que  $\mathcal{Z}$  seja o conjunto de planos selecionados.

#### Algoritmo 6.1

```
Fazer  $e = 1, \dots, NE$ 
  Fazer  $i = 1, \dots, NI$ 
    Calcule  $p(v_i, q_i)$  e  $p_e(v_i, q_i)$ ;
  Fim
  Se  $\forall i \ p_e(v_i, q_i) \geq p(v_i, q_i)$ 
    O plano  $e \in \mathcal{Z}$ ;
     $NZ = NZ + 1$ ;
  Fim
Fim
```

Depois de executado o Algoritmo 6.1, a nova representação matemática é:

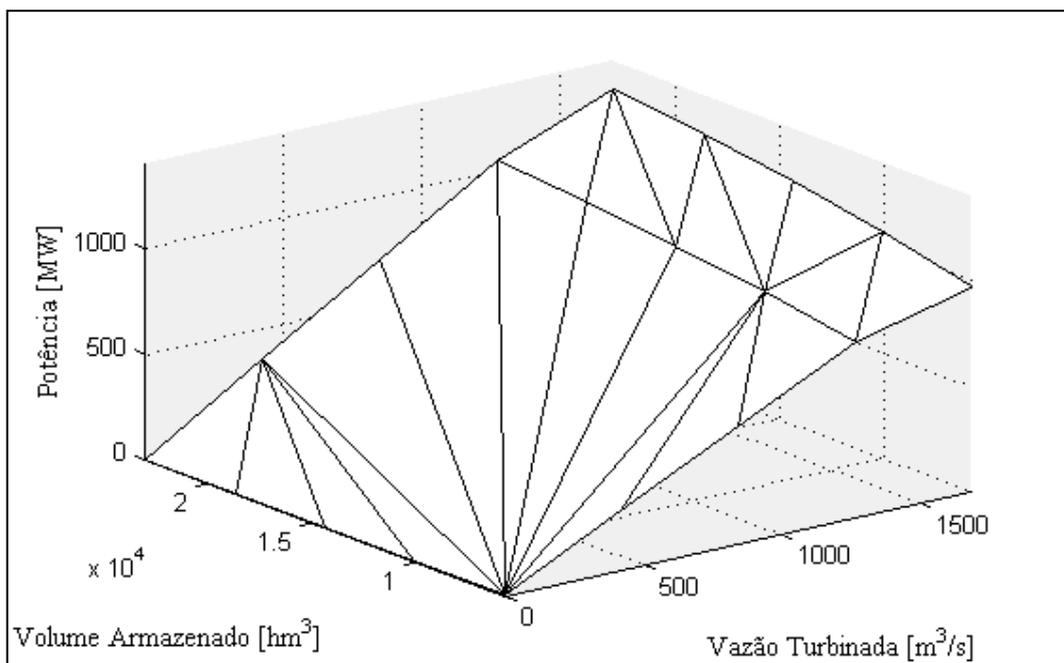
$$p + PH_{0z} + PH_{1z} \cdot q + PH_{2z} \cdot v = 0, \quad z = 1, \dots, NZ. \quad (194)$$

Em que:

$PH_{xz}$  : coeficientes dos planos obtidos no Algoritmo 6.1.  $x=0, \dots, 2$

A mostra os planos selecionados resultantes da aplicação do Algoritmo 6.1. Conforme pode ser visto, tem-se como resultado um modelo côncavo linear por partes da FPH.

Figura 44 – Modelo côncavo linear por partes da FPH Furnas.



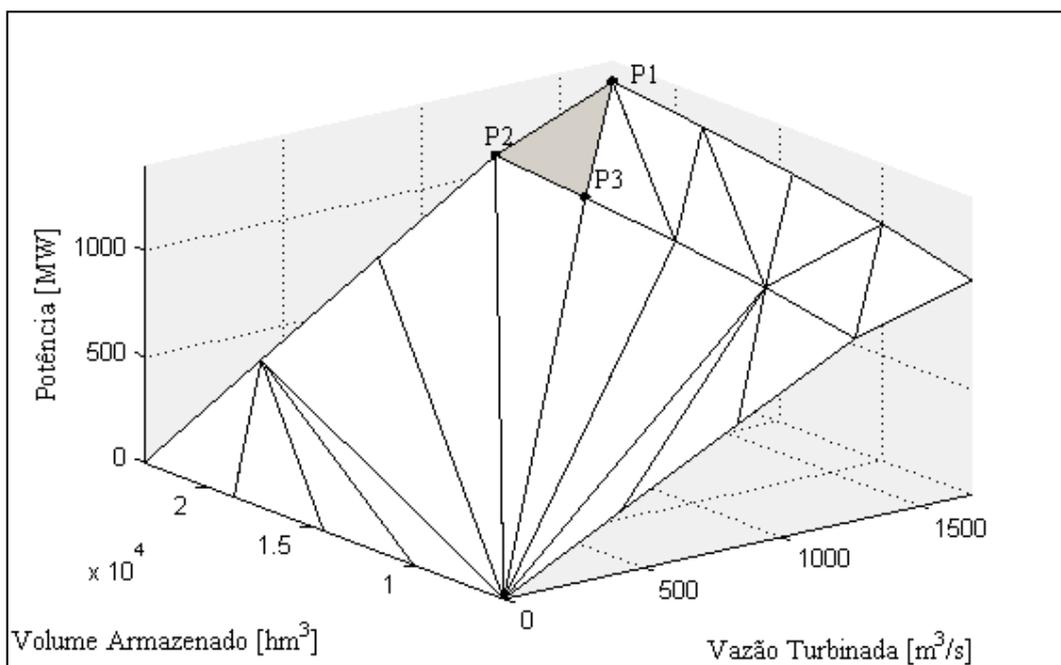
Deve-se notar que o modelo da Figura 44 foi gerado em função apenas de  $q$  e  $v$ . Portanto, o próximo passo consiste em considerar o efeito do vertimento, conforme descrito na próxima seção.

A modelagem (inclusão) da vazão vertida é feita aplicando-se a equação de uma reta secante na dimensão de  $s$ , com coeficiente angular  $PH_3$ , para cada ponto da grade inicial obtido na etapa anterior. De maneira mais detalhada, o valor de  $PH_3$  é calculado por um modelo de

otimização irrestrito, que visa minimizar o desvio quadrático entre a FPH não linear e sua respectiva aproximação.

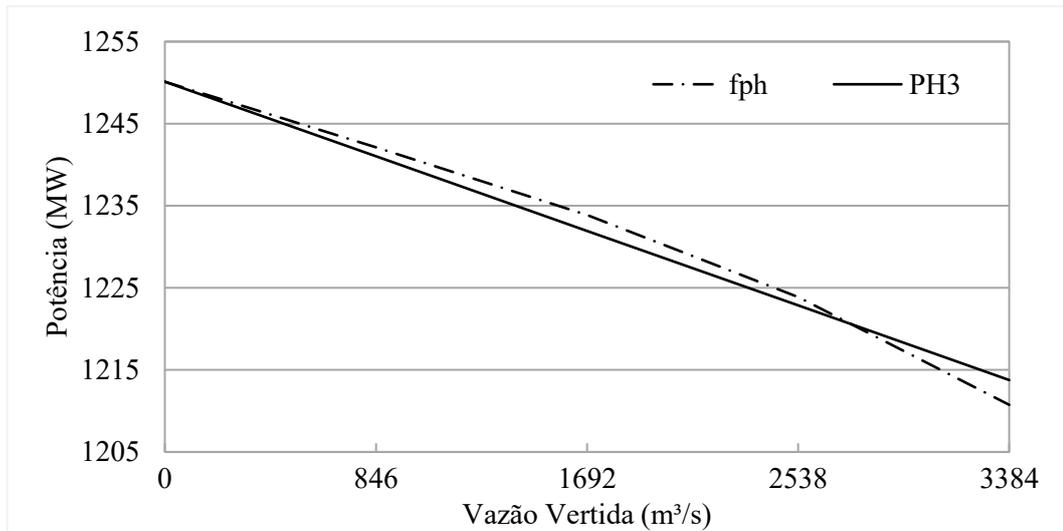
Para detalhar esse procedimento, considere, a qual mostra a envoltória côncava calculada na Etapa 2. Note-se que é destacado uma aproximação linear, cujos pontos extremos  $(q; v; p)$  da mesma são dados por  $P1 = (1692; 22950; 1301)$ ,  $P2 = (1269; 22950; 1250)$  e  $P3 = (1269; 18646; 1039)$ .

Figura 45 – FPH aproximada com destaque em um plano.



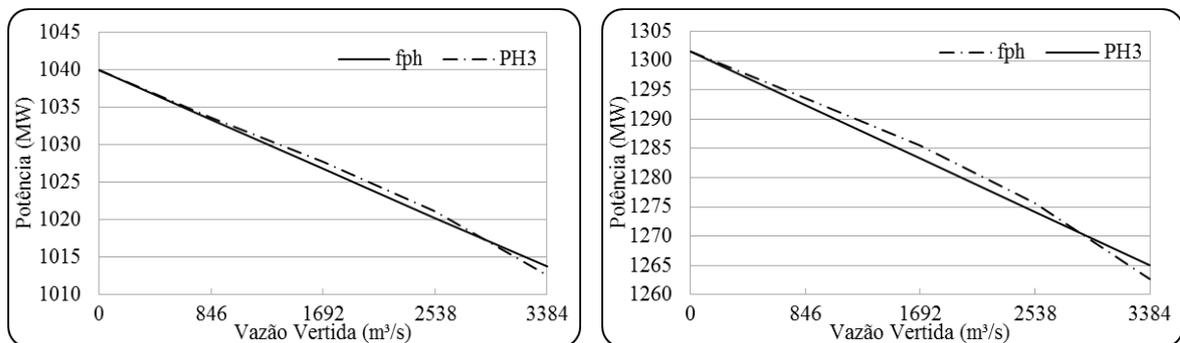
Na figura acima, considere P1 o qual está associado com  $s = 0$ . A partir disso, gera-se um vetor de valores potência da UHE, considerando os valores  $q$  e  $v$  fixos de P1, com base em uma discretização em  $s$ , de 0 até  $S^{\max}$ . A seguir, o próximo passo consiste em obter o valor do coeficiente angular ( $PH_3$ ) que melhor se ajusta com os pontos deste vetor. Isso é feito aplicando-se um método qualquer de mínimos quadrados discreto. O resultado final deste procedimento, considerando que a vazão vertida na UHE Furnas é discretizada em cinco pontos, está mostrado na Figura 45.

Figura 46 – Cálculo do coeficiente angular associado com o vertimento para o ponto P2.



O mesmo procedimento utilizado para P2 deve ser adotado para os pontos P1 e P3. Consequentemente, são obtidos mais dois valores de PH<sub>3</sub>, conforme mostra a Figura 47.

Figura 47 – Coeficientes PH<sub>3</sub> referentes aos pontos P1 e P3.



Devido as razões detalhadas em (DINIZ; MACEIRA, 2008) , o valor de PH<sub>3</sub> que deve ser escolhido para compor o plano associado com P1, P2 e P3 é aquele com o menor valor, isto é, o mais negativo. No exemplo utilizado referente a UHE Furnas, o menor valor é -0,0109 obtido com o ponto P2. De posse desse PH<sub>3</sub>, o hiperplano que contém o plano com os pontos P1, P2 e P3 é dado por:

$$p - 0,5289 \cdot q - 0,0088 \cdot v + 0,0109 \cdot s \leq 204,5675 \tag{195}$$

**APÊNDICE C – Modelo EAFdA**

Esta seção mostra os resultados ao dio metodologia clássica a demanda em 500MW por estágio, mantendo as configurações de 20 aberturas na *backward* da PDDE e 50 cenários por iteração com critério de parada de quatro horas de processamento. No geral, as interpretações não apresentam diferenças relevantes das já discutidas com a demanda 1, no entanto, devido a maior carga incluída no problema houve um aumento de custo de operação. Assim, a tabela abaixo mostra um compilado dos 12 casos rodados.

Dentre os casos já analisados com a Demanda 1, pode-se inferir conclusões semelhantes, em que para uma mesma modelagem de FPH, os casos usando o modelo de afluência individualizado são menos eficientes que os casos com modelo FdA e o agregado por bacia em termos de número de iterações e quantidade de cortes calculados. Esse comportamento é o efeito da redução da dimensionalidade nas modelagens simplificadas – 2 e 3. Destaca-se que em alguns casos, ditos, 1A, 2A, 3A, 2B, 2C -Demanda 1 houve um decremento de uma unidade no número de iterações percorridas quando comparado com seus pares simulados com Demanda 2. Ainda e 2D - Demanda 1 teve um incremento de uma unidade no número de iterações. Essa diferença, muito provavelmente está ligada a demora ou alívio que o aumento de demanda impõe na solução de cada PL. Mesmo tendo essa disparidade, observa-se na simulação que não houve uma mudança relevante de comportamento, como será mais bem detalhada a diante. Por fim, observa-se que ao adicionar as restrições de FPH ocorre um benefício da diminuição da eficiência da redução da dimensionalidade, em termos de número de iterações.

A variação do custo inferior ( $\Delta_{CI}$ ) na última iteração apresentada na tabela abaixo. Diante de todos os dados da tabela, os casos com a 3C e 3D teve  $\Delta_{CI}$  mais elevado com valor de aproximadamente 0,21% e 0,23% respectivamente. Enquanto o menor ficou sendo o 3A com 0,02%. Constatase que a variação da FCF é satisfatória.

Por fim, observa-se que o custo inferior segue uma ordem de valor, os casos com afluência individualizada, isto é  $1z$ , sendo  $z=A,B,C$ , possuem custo maior ao serem comparados com os seus pares de modelagem de FPH. Naturalmente, a modelagem mais completa possui um custo esperado maior dado que as outras simplificações não distribuem a afluência de forma exata para cada usina. Assim, de certa forma a distribuição de afluência aproximada acaba favorecendo usinas com maior capacidade de geração refletindo em custo menores ao longo do tempo.

Tabela 43 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas/*t*.

Caso	Custo Inferior $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{LB}$ (%)	Iterações	Cortes
1A	23,03	0,13	55	2750
2A	18,52	0,07	70	3500
3A	20,78	0,02	59	2950
1B	23,88	0,15	50	2500
2B	19,44	0,01	59	2950
3B	21,77	0,09	53	2650
1C	18,88	0,05	39	1950
2C	15,16	0,06	45	2250
3C	16,93	0,21	41	2050
1D	17,10	0,08	32	1600
2D	13,70	0,08	38	1900
3D	15,20	0,23	34	1700

Na continuação do estudo a tabela abaixo mostra os principais parâmetros simulação das políticas operativas na determinação de IC (170). Para a demanda 2, e com 20 aberturas estágio, as políticas calculadas com os modelos simplificados foram eficientes em baixar o custo de operação do sistema. A maior diferença se deu no uso da produtividade constante entre a modelagem agregada por bacia (2A) e a individualizada (1A) o qual diminuiu aproximadamente 5,62%. Para o mesmo caso, o caso 3A diminuiu em aproximadamente 3,21% o custo de operação do sistema. Para os demais casos, com o modelo FdA nota-se que ao incluir a FPH mais exata existe uma tendência de diminuir o ganho em custo de operação, isto é, na comparação de 3B - 1B, 3C-1C e 3D - 1D a diminuição do custo de operação foi em média 1,56%. Mesma conclusão pode ser observada para o caso com aflúncias agregadas, onde os casos com 2B, 2C e 2D teve em média uma diminuição de 4,10% no custo de operação. Assim, constatou-se que, com níveis de demanda mais baixos (Demanda 2) houve um ganho em média, mesmo que marginal na comparação com a modelagem individualizada, em outras palavras, a diferença apontada antes (Demanda 1) era de 1,45% e 3,95%, e agora, com a Demanda 2 é 1,56% e 4,10%.

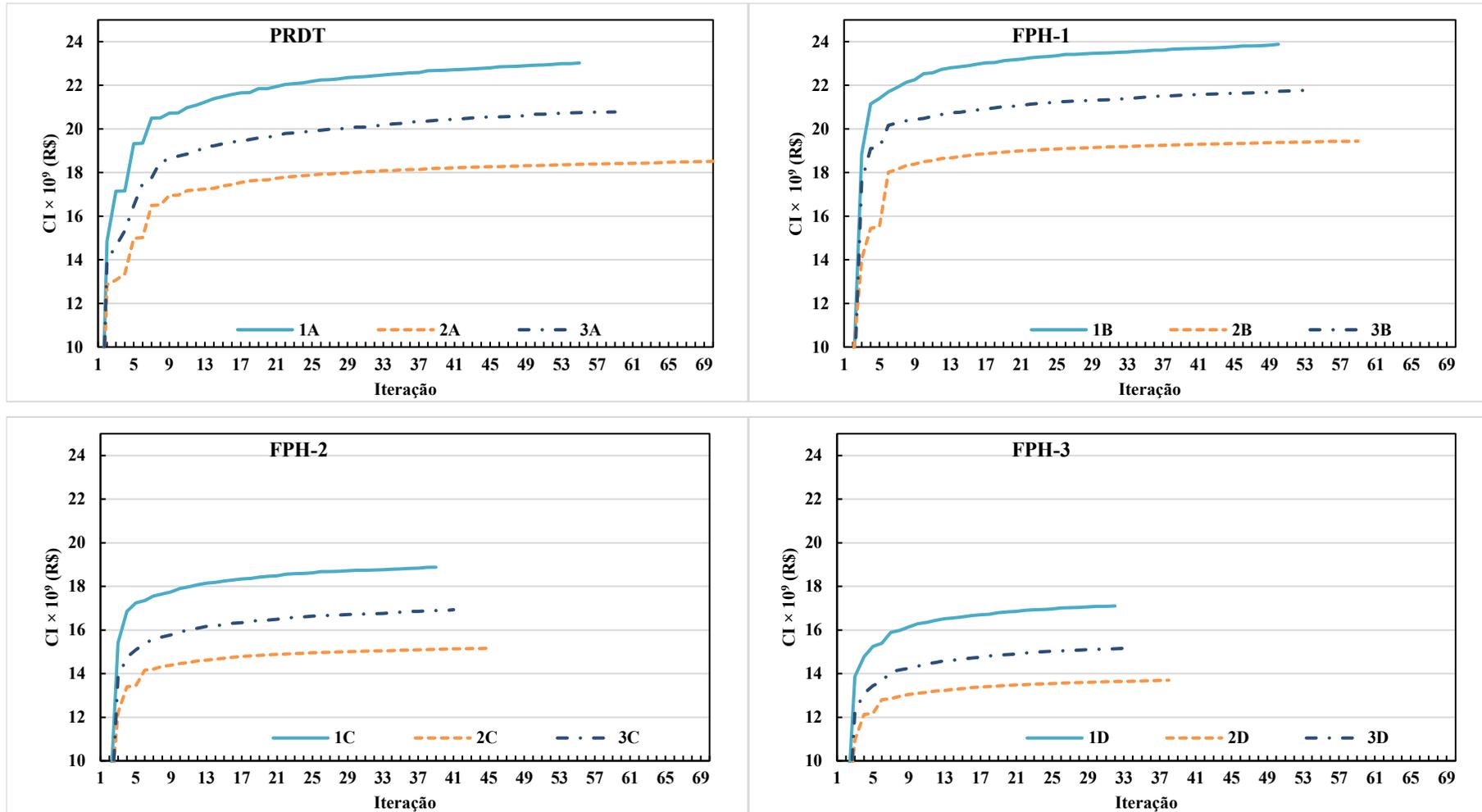
Portanto, observa-se que ao incluir uma FPH mais acurada no problema, as simplificações por percorrer um número menor de iterações e portanto, calcular uma FCF com

menos cortes o modelo individualizado tende a se beneficiar disso diminuindo as diferenças de custo de operação na simulação *out-of-sample* mostrada na tabela abaixo. No entanto, prova-se que é possível obter uma política mais bem estimada ao simplificar o modelo de afluência e melhor o aspecto de modelagem da FPH.

Tabela 44 – Simulação com políticas de 20 aberturas.

Caso	CPU (s)	$fc \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença em relação a 1A (%)
1A	-	14,06	0,08	14,10	
2A	0,42	13,31	0,08	13,35	-5,62%
3A	0,15	13,62	0,08	13,66	-3,21%
4A	0,37	13,04	0,11	13,10	-7,67%
1B	-	15,34	0,08	15,38	
2B	32%	14,71	0,08	14,75	-4,25%
3B	11%	15,08	0,10	15,13	-1,64%
4B	26%	14,57	0,11	14,63	-5,16%
1C	-	12,18	0,08	12,22	
2C	25%	11,70	0,07	11,73	-4,16%
3C	9%	12,00	0,09	12,04	-1,49%
4C	22%	11,59	0,10	11,65	-4,95%
1D	-	11,08	0,07	11,11	
2D	23%	10,66	0,07	10,70	-3,89%
3D	9%	10,90	0,08	10,95	-1,54%
4D	21%	10,58	0,10	10,63	-4,56%

Figura 48 – Custo inferior dos casos com 20 aberturas.



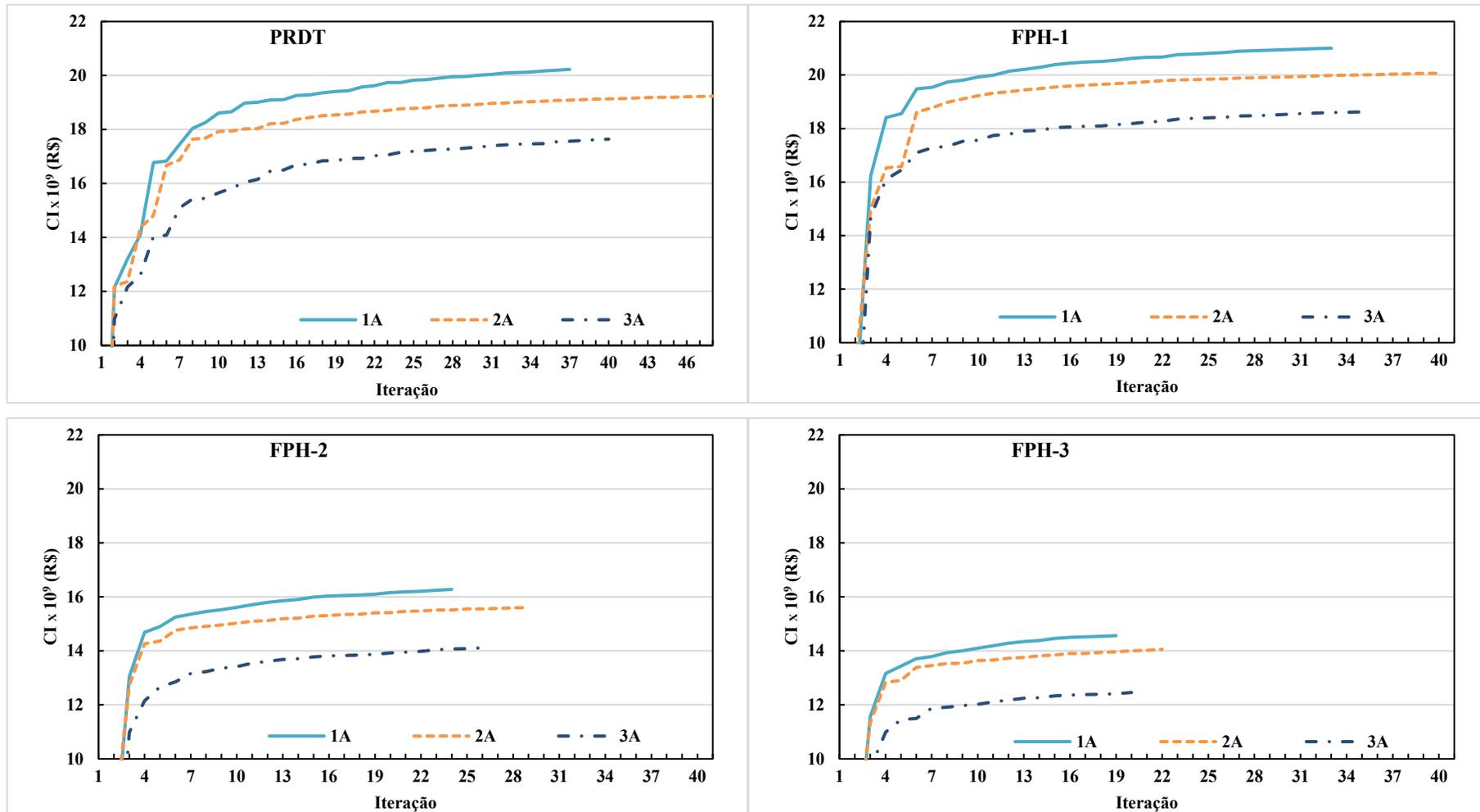
Nesta seção final desse estudo, apresenta-se os mesmos 12 casos com demanda menor em 500MW por estágio. Ao final, as interpretações são muito semelhantes aos apresentados na seção anterior onde observa-se que a modelagem FdA passa a se consolidar como uma proposta robusta, pois simplifica a afluência e assim abre espaço para uma modelagem mais acurada da FPH. Para não tornar o documento repetitivo a tabela abaixo mostra um compilado de informações sobre o cálculo da FCF. No geral, as simulações obedecem ao mesmo comportamento aos resultados observados no corpo do documento.

Tabela 45 – Resultados da otimização casos com 20 aberturas.

Caso	Custo Inferior $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{LB}$ (%)	Iterações	Cortes
1A	20,23	0,13	37	1850
2A	19,24	0,08	48	2400
3A	17,64	0,11	40	2000
1B	21,00	0,07	33	1650
2B	20,06	0,03	40	2000
3B	18,62	0,09	35	1750
1C	16,28	0,16	24	1200
2C	15,60	0,07	29	1450
3C	14,12	0,24	26	1300
1D	14,56	0,16	19	950
2D	14,06	0,28	22	1100
3D	12,46	0,34	20	1000

A Figura 49 mostra a evolução do custo inferior ao longo do processo iterativo da PDDE para todos os 12 casos simulados nesta seção.

Figura 49 – Custo inferior dos casos com 50 aberturas.



Em concordância com a simulação das políticas apresentadas na seção anterior, a maioria das políticas se mostrou eficiente em baixar o custo de operação do sistema quando comparado com as FCF com modelo individualizado. A tabela abaixo mostra os principais parâmetros simulação das políticas operativas na determinação de IC (170). A maior diferença ainda continua sendo entre as modelagens 3A e 1A o qual diminuiu o custo em aproximadamente 1,95% enquanto o caso 2A diminuiu em aproximadamente 1,87% o custo de operação do sistema.

A inclusão da FPH aumenta a dimensão e carrega PL de cada nó. Com isso, ambas as metodologias sugeridas têm uma tendência de diminuir o ganho em custo de operação de operação esperado calculado através de IC. Em outras palavras, ao comparar o modelo FdA com o modelo individualizado, casos 3B - 1B, 3C-1C e 3D - 1D a diminuição do custo de operação foi em média 1,0%. Por outro lado, o modelo com afliências agregadas os casos com 2B e teve um ganho de 0,24% no custo de operação. 3C se mostrou neutra, isto é, com praticamente o mesmo custo de operação. E por fim, a metodologia 4B foi auferido um aumento no custo de operação em 0,38%.

Tabela 46 – Simulação com políticas de 50 aberturas.

Caso	CPU (s)	$f_c \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença em relação a 1A (%)
1A	-	13,96	0,10	14,01	
2A	42%	13,80	0,09	13,85	-1,87%
3A	14%	13,63	0,08	13,68	-1,95%
1B	-	15,24	0,09	15,29	
2B	32%	15,21	0,09	15,26	-0,24%
3B	12%	15,06	0,11	15,12	-0,99%
1C	-	12,13	0,08	12,17	
2C	25%	12,12	0,08	12,16	0,00%
3C	10%	12,01	0,10	12,06	-1,02%
1D	-	11,03	0,08	11,08	
2D	18%	11,09	0,08	11,13	0,38%
3D	8%	10,92	0,10	10,97	-0,96%

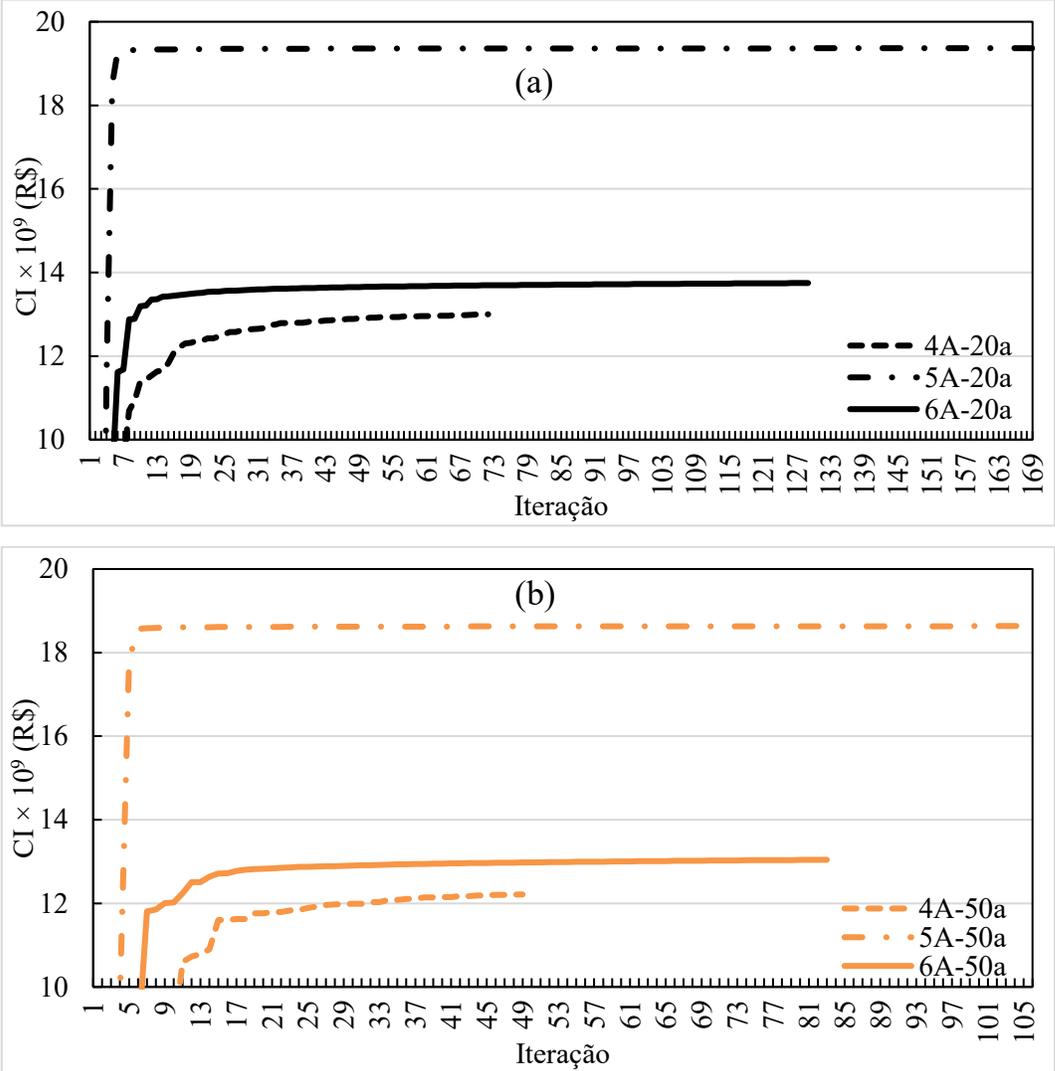
### APÊNDICE D – Modelo Earm

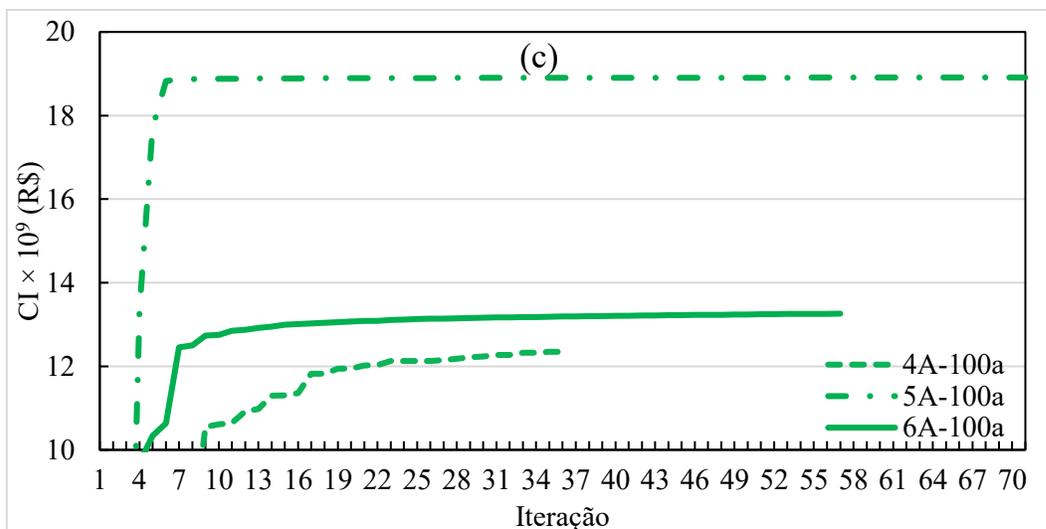
Nesta seção estão apresentados os casos extra de execução do modelo Earm. Todo os casos de estudo apresentados até agora foram reprocessados considerando um incremento de carga em 500MW em cada estágio  $t$ . A tabela abaixo mostra os principais resultados do cálculo da política, nota-se que não houve mudanças consideráveis nas novas simulações além do nível de grandeza de custo, para não tornar a análise repetitiva, mostra-se também de forma visual o comportamento do custo inferior ao longo das iterações na Figura 50.

Tabela 47 – Resultados da otimização casos com 20, 50 e 100 aberturas.

Caso	Custo Inferior $\times 10^9$ (R\$)	$\Delta_{LB}$ (%)	Iterações	Cortes
4A-20a	13,69	0,004	72	3600
5A-20a	19,36	0,000	169	8450
6A-20a	13,00	0,013	129	6450
4A-50a	12,21	0,046	49	2450
5A-50a	18,63	0,000	107	5350
6A-50a	13,04	0,011	83	4150
4A-100a	12,35	0,015	36	1800
5A-100a	18,91	0,001	71	3550
6A-100a	13,26	0,021	57	2850

Figura 50 – Excursão do custo inferior Demanda 2 para os casos (a) com 20 aberturas, (b) 50 aberturas e (c) 100 aberturas. 50 cenários por iteração.





Na sequência são apresentadas as simulações das 12 FCF calculadas com a demanda 2, a tabela abaixo apresenta a estimativa de IC referentes a  $NS^{out}=50000$  cenários. Assim como os resultados apresentados com a demanda 1, as simplificações representadas de energia armazenada não foram capazes de diminuir o custo de operação esperado. No entanto, houve uma sensível melhora no custo das políticas em ambos os modelos por energia armazenada. Quando representadas por sistema o custo de operação esperado foi em média 14,50% maior, por sua vez, o modelo Earm por bacia apresentou políticas mais caras em média em 1,72%, ambos comparados ao modelo individualizado.

Assim, constatou-se que a redução drástica de dimensionalidade através da inclusão de variáveis de energia armazenada em substituição das variáveis individuais das UHEs não é capaz de obter uma operação média do sistema elétrico com custos menores. Quando utilizado o modelo Earm por sistema, onde as 28 variáveis de volume foram reduzidas a uma, o erro observado foi considerável (na casa dos 20%) provando que existem determinados acoplamentos hidráulicos, principalmente em UHEs distantes umas das outras ou bacias que possuem o ciclo hidrológico distinto e não podem ser desconsiderados ou simplificados através da premissa adotada de gerenciamento dos reservatórios em paralelo. Neste sentido, ao modelar as variáveis por bacia, isto é, ao simplificar 28 variáveis de volume armazenado em 6 de energia armazenada, a diferença de custo esperado em relação ao modelo individualizado diminuiu consideravelmente para aproximadamente 2%.

Tabela 48 – Simulação com políticas de 20, 50 e 100 aberturas/*t*.

Caso	$fc \times 10^9$ (R\$)	$\sigma \times 10^9$ (R\$)	IC $\times 10^9$ (R\$)	Diferença em relação 1A (%)
4A-20a	7,99	0,04	8,01	-
5A-20a	9,16	0,04	9,18	14,63%
6A-20a	8,11	0,04	8,13	1,56%
4A-50a	7,96	0,04	7,98	-
5A-50a	9,17	0,04	9,19	15,19%
6A-50a	8,10	0,04	8,12	1,73%
4A-100a	8,00	0,04	8,02	
5A-100a	9,18	0,04	9,20	14,67%
6A-100a	8,16	0,04	8,18	1,90%