UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Selma Felisbino Hillesheim

Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria: possibilidades semiocognitivas na formação de professores pedagogos

Florianópolis
2021

Selma Felisbino Hillesheim

Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria: possibilidades semiocognitivas para a formação de professores pedagogos

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutora em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Méricles Thadeu Moretti, Dr.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Hillesheim, Selma Felisbino
Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria : possibilidades semiocognitivas para a formação de professores pedagogos / Selma Felisbino Hillesheim ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2021.
323 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Formação de professores pedagogos. 3. Teoria semiocognitiva de aprendizagem da geometria. 4. Engenharia didática colaborativa. I. Thadeu Moretti, Méricles . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Selma Felisbino Hillesheim

Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria: possibilidades semiocognitivas para a formação de professores pedagogos

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Celia Finck Brandt, Dra.
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof. David Antônio da Costa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Saddo Ag Almouloud, Dr.
Universidade Federal do Pará

Prof.(a) Lisani Geni Wachholz Coan, Dra.
Instituto Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutora em Educação Científica e Tecnológica.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Juliano Camillo
Data: 25/01/2022 08:47:04-0300
CPF: 225.964.728-64
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Mericles Thadeu Moretti
Data: 22/01/2022 14:32:32-0300
CPF: 169.097.639-04
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Méricles Thadeu Moretti, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2021.

Dedico este trabalho aos meus filhos, Alyce e Lucas. Fontes da minha inspiração em todas as horas.

AGRADECIMENTOS

Parando para pensar em todas as situações que vivenciei nesses últimos quatro anos, floresce-me o sentimento de gratidão pela VIDA. Que bom que consegui chegar até aqui, mesmo em meio a uma pandemia de COVID-19. Então, é chegada a hora de agradecer as pessoas que estiveram comigo ao longo dessa caminhada, e àquelas que perdi durante esse percurso. É quase impossível citar todas as pessoas que fizeram parte desse caminhar... Assim, ouso citar algumas, que definitivamente fizeram toda a diferença nesse período da minha vida. Agradeço,

A uma pessoa admirável, meu orientador Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti, por compartilhar tantos saberes, sempre de maneira paciente e carinhosa. Suas contribuições iluminaram os meus caminhos ao longo da construção desta tese.

Aos professores do doutorado, do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da UFSC, por todos os espaços formativos, pelas reflexões e socialização de tantos conhecimentos, que muito contribuíram para a minha formação acadêmica e para o meu crescimento pessoal.

Aos colegas da turma de doutorado 2017, com os quais pude vivenciar momentos ímpares que deixaram saudades.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM), por expandirem os meus olhares sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica e por compartilharem comigo tantas ideias sobre as especificidades da aprendizagem da matemática.

Aos professores membros das bancas de qualificação e examinadora: Dra. Célia Finck Brandt, Dr. David Antônio da Costa, Dr. Saddo Ag Almouloud e Dra. Lisani Geni Wachholz Coan, pelo carinho e pelas contribuições imprescindíveis a este trabalho.

Às professoras participantes da pesquisa, por se atreverem a fazer algo diferente com tanto empenho e determinação. A colaboração de vocês foi primordial para o sucesso desta pesquisa!

À minha querida Carla Cristofolini, pela parceria em todas as horas. Você é um dos presentes especiais que a vida me deu!

À querida Daiana Zanelato dos Anjos, pelas discussões teóricas e pelo ombro amigo ao longo dessa jornada. Sinto um carinho muito especial por você!

À Secretaria Municipal de Educação de São José, pelo apoio prestado durante o desenvolvimento do programa de formação com os professores.

À Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, por conceder-me três anos e meio de afastamento remunerado, permitindo-me realizar esta pesquisa.

Ao UNIEDU/FUMDES/Pós-Graduação que apoiou financeiramente esta pesquisa no período de abril a dezembro de 2021.

E, finalmente, gostaria de agradecer aos meus amores:

Meu companheiro Sônio, que esteve sempre ao meu lado, apoiando-me e incentivando-me diariamente. Obrigada por todo amor! Aos nossos filhos, Alyce e Lucas, pela compreensão e carinho que tiveram comigo ao longo desse percurso.

Meu pai Manoel (*in memoriam*), que apesar de nunca ter passado por um banco escolar, soube me ensinar, com maestria, aquilo que as letras não são capazes de expressar.

Minha mãe Arlinda, que teve o seu sonho de ser professora ceifado, numa época em que não era concedido à mulher o direito de estudar. Obrigada por ter acreditado em mim!

Minha família querida, irmãos, irmãs, sogro (*in memoriam*), sogra, cunhados, cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, que mesmo sem compreender muito esse mundo acadêmico, torcem pela minha felicidade e sucesso.

Meus sinceros agradecimentos a todos vocês que me permitiram a concretização desse sonho!

Como professor, tanto lido com minha liberdade quanto com minha autoridade em exercício, mas também diretamente com a liberdade dos educandos, que devo respeitar, e com a criação de sua autonomia bem como com os ensaios de construção da autoridade dos educandos. Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha. Não posso ensinar o que não sei. Mas, este, repito, não é saber de que apenas devo falar e falar com palavras que o vento leva. É saber, pelo contrário, que devo viver concretamente com os educandos. O melhor discurso sobre ele é o exercício de sua prática. É concretamente respeitando o direito do aluno de indagar, de duvidar, de criticar que "falo" desses direitos. A minha pura fala sobre esses direitos a que não corresponda a sua concretização não tem sentido (FREIRE, 1996, p. 95).

RESUMO

A formação do professor é um tema que está continuadamente em pauta nas pesquisas em educação matemática. Essa discussão encontra ainda mais premência ao considerar-se o pedagogo como o profissional responsável pela formação inicial das crianças, tratando das noções iniciais de várias disciplinas, entre elas, a geometria. Debates iniciados por Lee Shulman, na década de 80, apontam a importância não só do conhecimento do conteúdo desses profissionais, mas do conhecimento de como tal conteúdo pode ser desenvolvido em sala de aula. É bem essa questão que esta tese procurou tratar: considerar os vários elementos que perpassam a aprendizagem da geometria nos anos iniciais e suas implicações nos processos de ensino. Um primeiro ponto, fruto de uma reflexão profunda, foi como tratar a aprendizagem da geometria com um grupo de professores pedagogos, uma vez que são colegas de profissão. A ideia foi de encontrar uma metodologia que pudesse dar voz ativa a esses profissionais e, ao mesmo tempo, que fosse possível acompanhar as noções de geometria que seriam abordadas durante o desenvolvimento do programa de formação. Para poder dar conta dessa problemática, a escolha recaiu sobre a Engenharia didática colaborativa. Uma outra preocupação foi trazer para esse ambiente de discussão, com os pedagogos, uma teoria que pudesse promover a aprendizagem da geometria nos anos inicias. Encontrou-se na teoria semiocognitiva de Raymond Duval, elementos que puderam subsidiar os professores na condução do processo de ensino da geometria, uma vez que, essa teoria contempla elementos que promovem o desenvolvimento do olhar na aprendizagem da geometria. Do ponto de vista semiocognitivo, nas apreensões discutiu-se o papel que as figuras desempenham na atividade matemática e suas implicações na aprendizagem da geometria. No interior dessas apreensões, destacou-se a operação semiocognitiva de mudança de dimensão, um gesto intelectual importante na resolução de problemas que envolvem figuras. Nesse ambiente metodológico, objetivou-se avaliar como os professores compreendem a aprendizagem da geometria a partir de um programa de formação que visou a aprendizagem da geometria pela decomposição dimensional das formas, considerando as funções discursivas da língua, as apreensões, promovendo a passagem do olhar icônico ao não icônico. O convívio com o grupo de pedagogos deixou claro que houve uma percepção da importância dos temas discutidos e, como consequência disso, possibilidades de incorporação desses elementos semiocognitivos, presentes na aprendizagem da geometria, em suas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Formação de professores pedagogos. Teoria semiocognitiva de aprendizagem da geometria. Engenharia didática colaborativa.

ABSTRACT

Teacher education is a topic that has been continuously on the agenda of math research. Such discussion becomes even more prominent when considering the pedagogue as the professional responsible for the initial education of children, who also deals with the initial notion of several subjects, including geometry. A few debates brought up by Lee Shulman in the 1980s point out not only the knowlege content's relevance of these professionals, but also of how such content may be further developed in the classroom. This is precisely the conundrum this thesis aims to address, i.e., to consider the several elements that permeate the learning of geometry in primary education and its implications for teaching processes. The first issue to be considered herein, after a deep reflection on the matter, was how to deal with geometry learning with a group of pedagogues, as they are professional colleagues. Thus, we aimed to find a methodology that could give these professionals a voice while monitoring the notions of geometry that would be approached during the development of the training program. In order to deal with such specific matter, we resorted to Cooperative Didactic Engineering. Another concern was to bring into this discussion with the pedagogues a theory that could boost the learning of geometry in primary education. A few elements brought up by Raymond Duval's semiocognitive theory supported the pedagogues in conducting the process of geometry teaching, as this theory comprises elements that encourage visualization to learn geometry. From a semiocognitive perspective, the role of figures in mathematics and its implications in geometry learning was discussed. Moreover, we emphasized the semio-cognitive operation of dimensional changes, which is a relevant intellectual maneuver to solve problems that involve figures. Within such methodological environment, the aim was to evaluate how teachers understand the learning of geometry through a training program focused on learning geometry through the dimensional decomposition of shapes, considering the language's discursive functions and apprehensions, moving from an iconic towards a non-iconic perspective. The interaction with the group of pedagogues made clear that there was a perception about importance of the matters discussed and, consequently, possibilities of incorporating these semiocognitive elements present in geometry learning in their pedagogical practices.

Keywords: Training for pedagogues. Semiocognitive theory for learning geometry. Cooperative didactic engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABE - Associação Brasileira de Educação

ANA - Avaliação Nacional da Alfabetização

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

BNC/Formação - Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CC - Conhecimento do Conteúdo

CCK - Common Contente knowledge

CD - Conhecimento Didático

CDC - Conhecimento Didático do Conteúdo

CDP - Conhecimento Didático Pedagógico

CDPC - Conhecimento Didático Pedagógico do Conteúdo

CDPT - Conhecimento Didático Pedagógico Tecnológico

CDPTC - Conhecimento Didático Pedagógico Tecnológico do Conteúdo

CDT - Conhecimento Didático Tecnológico

CDTC - Conhecimento Didático Tecnológico do Conteúdo

CP - Conhecimento Pedagógico

CPC - Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

CPT - Conhecimento Pedagógico Tecnológico

CPTC - Conhecimento Pedagógico Tecnológico do Conteúdo

CT - Conhecimento Tecnológico

CTC - Conhecimento Tecnológico do Conteúdo

DDE - Didática dos Domínios da Experiência

EDCAGE - Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria

FMI - Fundo Monetário Internacional

ID - Engenharia Didática de Design

IDD - Engenharia Didática de Desenvolvimento

IDR - Engenharia Didática de Investigação

IFES - Instituto Federal do Espírito Santo

KCS - Knowledge of Content and Students

KCT - Knowledge of Content and Teaching

KFLM - Knowledge of Features of Learning Mathematics

KMLS - Knowledge of Mathematics Learning Standards
KMT - Knowledge of Mathematics Teaching
KoT - Knowledge of Topics
KPM - Knowledge of Practices in Mathematics
KSM - Knowledge of the Structure of Mathematics
LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MK - Mathematical Knowledge
MKT - Knowing Mathematics for Teaching
MMM - Movimento da Matemática Moderna
MRPA - Modelo de Raciocínio Pedagógico e Ação
MTKS - The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model
OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
ONU - Organização das Nações Unidas
PCK - Pedagogical Content Knowledge
PCK - Pedagogical Content Knowledge
PER - Percurso de Estudo e Pesquisa
PISA - Programa de Avaliação Internacional de Estudantes
PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa
PPGECT - Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica
PUC-SP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica
SCK - Specialized Contente knowledge
SED - Secretaria de Estado da Educação
SMSJ - Secretaria Municipal de Educação de São José
TA - Teoria da atividade
TCK - Technological Content Knowledge
TPCK - Technological Pedagogical Content Knowledge
TPK - Technological Pedagogical Knowledge
TS - Teoria da Situação Didática
TSM - Teoria da Mediação Semiótica
UDESC - Universidade do Estado de Santa Catarina
UECE - Universidade Estadual do Ceará
UEM - Universidade Estadual de Maringá
UFABC - Universidade Federal do ABC

UFAL - Universidade Federal de Alagoas

UFC - Universidade Federal do Ceará

UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFPA - Universidade Federal do Pará

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

ULBRA - Universidade Luterana do Brasil

UNESCO - A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

UNIAN-SP - Universidade Anhanguera de São Paulo

UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina

UNOPAR - Universidade no Norte do Paraná

SUMÁRIO

1 PALAVRAS INICIAIS

A formação matemática dos professores pedagogos, especialmente no que tange a geometria, vem sendo percebida como uma questão fundamental nos sistemas educacionais. Existe uma preocupação com a formação dos futuros professores que irão lecionar nos anos iniciais do ensino fundamental, bem como, com a formação continuada daqueles que já se encontram atuando nesse nível de ensino.

O trabalho docente do pedagogo apresenta, na sua retrospectiva histórica, vários documentos orientadores que apontam o que ele deve fazer na sua prática pedagógica, fato que ainda pode ser percebido nos documentos atuais. Parece que cabe ao pedagogo apenas cumprir regras preestabelecidas que foram sendo construídas, sem considerar o contexto cultural, social e político da escola, ignorando a sua participação como produtor de conhecimentos específicos na sua prática pedagógica.

Considerando essa situação, que parece se agravar ainda mais em tempos de globalização da educação, em que esta passa a ser considerada um *commodity*, cogitou-se ser relevante propor um programa de formação para professores pedagogos, respeitando e valorizando a participação desses profissionais num espaço metodológico diferenciado. Esse ambiente metodológico foi pensado a partir da possibilidade de estabelecer-se uma tessitura metodológica entre a Engenharia Didática de 1ª geração, a Pesquisa Colaborativa, a Engenharia Didática Colaborativa e a Teoria Semiocognitiva de Duval para a aprendizagem da geometria. Nesse contexto, emergiu uma proposta metodológica de pesquisa, intitulada "Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria" (EDCAGE).

Nesse espaço colaborativo, contou-se com a participação ativa dos professores em consonância com o trabalho da pesquisadora, por intermédio de um trabalho reflexivo. A colaboração dos professores nos estudos teóricos e na elaboração de atividades, que visaram a aprendizagem da geometria nos anos iniciais, foi um dos diferenciais desta pesquisa.

1.1 A ESCOLHA DO TEMA DE PESQUISA

A escolha da temática tem relação direta com a minha trajetória profissional. Como professora de matemática da educação básica desde 1994, sempre fiquei intrigada com a dificuldade que as crianças, quando iniciavam o ensino fundamental II, apresentavam quanto à aprendizagem da geometria.

Conceitos deturpados, que por vezes foram difíceis de serem modificados. A visualização e os tratamentos necessários para a resolução de problemas de geometria pareciam instransponíveis para muitos alunos. A identificação e diferenciação entre as formas geométricas planas e espaciais dificilmente acontecia, comumente os alunos nomeavam, e ainda nomeiam, a representação de um cubo como sendo um quadrado, um círculo como uma bola, a caixinha de leite como um retângulo, etc. Toda essa situação sempre exigiu um trabalho didático específico para fazer com que os alunos pudessem entrar na maneira de ver uma figura geometricamente.

Como essa situação vem se repetindo durante toda a minha trajetória docente, isso me fez pensar que, talvez, a raiz desse sintoma estivesse relacionada à forma como as crianças estivessem aprendendo a geometria nos anos iniciais. Logo, havia a necessidade de atentar para a formação em geometria do professor pedagogo. Porém, toda essa análise foi realizada, inicialmente, de forma empírica.

No ano de 2014 recebi o convite para trabalhar na formação de professores, junto a Universidade Federal de Santa Catarina, no Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2014), um programa de formação continuada para os professores do ciclo de alfabetização. A participação na formação do PNAIC, no período de 2014 a 2017, fez-me perceber o quão frágil é a formação matemática do professor que atua nos anos iniciais do ensino fundamental.

Os temas abordados pelo PNAIC durante o ano de 2014, foram específicos à área da matemática. Pela minha experiência nessa formação, pude constatar, de perto, que os professores pedagogos careciam de fundamentos elementares da matemática em todos os eixos do conhecimento matemático (Números e Operações; Pensamento Algébrico; Espaço e Forma/Geometria; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação/Estatística e Probabilidade). Contudo, percebi que o campo mais fragilizado foi, sem dúvida, o da Geometria.

Quando o estudo da geometria foi abordado com esses professores, verifiquei que a minha suspeita empírica fazia sentido. Ou seja, a origem das dificuldades apresentadas pelos meus alunos poderia estar, de alguma forma, relacionada ao desconforto que esses professores demonstraram frente à geometria. Tanto é que, as dificuldades apresentadas pelos alunos dos anos finais do ensino fundamental e pelos professores pedagogos eram similares.

Minha participação no PNAIC ganhou visibilidade e, desde então, trabalho como formadora de professores que ensinam matemática na educação básica, junto às Secretarias de Educação de vários municípios de Santa Catarina, destacando-se a Secretaria Municipal de

Educação de São José, por ser o município onde atuo como formadora de professores pedagogos desde 2018. Contudo, mesmo trabalhando em municípios diferentes, percebi que o desconforto dos professores pedagogos, frente aos conhecimentos de geometria, é uma constante.

A preocupação com a desorientação apresentada pelos professores, frente aos conhecimentos[1] geométricos durante as formações, me fez refletir sobre várias questões: de que modo a geometria deve ser abordada num programa de formação para que os pedagogos possam ampliar o seu olhar sobre o processo da aprendizagem da mesma? Como um programa de formação em geometria pode contribuir para que o professor pedagogo construa conceitos geométricos, a fim de subsidiar a sua prática pedagógica na condução do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental? Como deve ser a abordagem metodológica dessa formação para que os professores possam ser empoderados[2] com relação ao processo de aprendizagem da geometria?

Buscando respostas para esses questionamentos, que foram surgindo no meu caminhar durante os encontros de formação com os professores pedagogos, senti a necessidade de investigar o problema cientificamente. Por essa razão, em 2017 participei do processo de seleção para doutorado, obtendo aprovação, retornando, assim, a casa do PPGECT. Desde então, dediquei-me a realizar pesquisas sobre a formação do professor pedagogo em geometria, atrelada à perspectiva semiocognitiva da aprendizagem da geometria proposta por Duval.

---

[1] Nossa compreensão de conhecimento (*cognoscere*) "[...] aponta para o horizonte do domínio técnico-formal, as habilidades propedêuticas de estilo instrumental, a capacidade de saber pensar" (DEMO, 2007, p. 36). Entretanto, ele não é algo estático, pronto e acabado. O conhecimento é algo em constante movimento, cuja produção se dá na relação com o outro e no movimento dialético que tem na realidade o ponto de partida e de chegada (FREIRE,1996). "A construção ou a produção do conhecimento do objeto implica o exercício da curiosidade, sua capacidade crítica de 'tomar distância' do objeto, de observá-lo, de delimitá-lo, de cindi-lo, de 'cercar' o objeto ou fazer sua aproximação metódica, sua capacidade de comparar, de perguntar" (FREIRE, 1996, p. 33).

[2] Empoderamento (*empowerment*) compreendido, neste trabalho, segundo a concepção proposta por Freire e Shor (1986). Este autor defende o empoderamento de classe social, não individual, nem comunitário e nem meramente social. Embora o empoderamento individual, fundamentado na perspectiva crítica da realidade social, seja fundamental, pouco faz sentido se não tiver relação com a transformação mais ampla da sociedade. O empoderamento de classe social supõe a construção de uma consciência crítica com a ação social, no qual os indivíduos tomam posse de suas próprias vidas pela interação com outros indivíduos, gerando pensamento crítico em relação à realidade, favorecendo a construção da capacidade pessoal e social e possibilitando a transformação de relações sociais de poder. "A questão do *empowerment* da classe social envolve a questão de como a classe trabalhadora, através de suas próprias experiências, sua própria construção de cultura, se empenha na obtenção do poder político. Isto faz do *empowerment* muito mais do que um invento individual ou psicológico. Indica um processo político das classes dominadas que buscam a própria liberdade da dominação, um longo processo histórico de que a educação é uma frente de luta" (FREIRE; SHOR, 1986, p. 136).

1.2 O CONTEXTO DA FORMAÇÃO DO PEDAGOGO

A questão da formação do professor no Brasil surgiu após a independência, quando em 1827 foi aprovada a Lei das Escolas de Primeiras Letras, possibilitando organizar o ensino popular. Oito anos depois foi instituída a primeira Escola Normal do Brasil no estado do Rio de Janeiro. Em 1932, essas escolas sofreram uma reorganização, transformando-se em Institutos de Educação. Com a criação das Universidades em 1934, esses institutos foram incorporados às universidades, onde em 1939 foram criados os cursos de pedagogia.

A partir da década de 80 do século XX, após várias reformulações, o pedagogo poderia exercer a docência na educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. Com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96) foi garantida a formação docente em nível superior (licenciatura), de graduação plena, como formação mínima para exercer o magistério na educação infantil e no ensino fundamental I.

Desde então, uma enxurrada de documentos oficiais foram expedidos via MEC, com o intuito de adequar e alinhar a formação de professores as políticas educacionais. O mais recente trata-se da resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), visando a instauração da Base Nacional Comum Curricular da Educação Básica (BNCC).

As orientações oficiais, que tratam da formação docente, parecem não dar muita importância para a construção do conhecimento profissional dos professores no exercício da docência. O que se mostra é um conjunto de conteúdo a ser ministrado, com indicações de como devem ser ensinados. Ou seja, uma questão técnica, como se o exercício da docência pudesse ter uma “receita”.

Nessa perspectiva, uma análise da literatura educacional, abordando a constituição dos saberes docentes, tornou-se relevante. Pautou-se nas pesquisas de Tardif (2002), Marcelo (2009 a, b), Curi (2004), Shulman (1986, 2005) e seus percursores, Buchmann, (1984) e Lorenzato (1995) para fundamentar a análise. Por intermédio das pesquisas realizadas por esses autores, percebeu-se a complexidade da constituição do saber docente.

Tardif *et al* (1991) compreendem os saberes docentes como sendo compostos por diversos saberes com origens diversas: os saberes profissionais, os saberes das disciplinas, os saberes curriculares e os saberes da experiência. Noutra perspectiva, Shulman (1986) explicita três categorias de conhecimentos presentes no desenvolvimento do trabalho docente:

conhecimento do conteúdo, conhecimento curricular e conhecimento pedagógico do conteúdo. Tanto Tardif *et al* (1991), quanto Shulman (1986) apresentam, dentre outras importantes discussões, uma preocupação com o saber do professor em relação ao conteúdo.

Enquanto a pesquisa de Curi (2004) aponta o desconforto dos professores pedagogos frente aos conhecimentos de geometria, bem como na condução do seu processo de ensino e aprendizagem, Buchmann (1984) enfatiza a necessidade de o professor conhecer com profundidade o conteúdo para estar preparado para ensiná-lo. Nesse contexto, Lorenzato (1995) procura evidenciar as possíveis causas para o desnorteamento dos pedagogos na condução do processo de ensino da geometria, que, segundo ele, podem estar relacionados à falta de conhecimentos geométricos para conduzir a prática pedagógica e a exagerada importância dada ao livro didático.

Frente a esse contexto conturbado, investigou-se o currículo do curso de pedagogia de quatro universidades da grande Florianópolis, a fim de entender como os conhecimentos de geometria estão sendo abordados nesses cursos. Surpreendentemente, das mais de três mil horas/aulas do curso, a parte destinada aos assuntos relacionados à matemática é menor que 75 horas/aulas. E, dentro dessa insignificante carga horária, pouco se tem mencionado sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria.

Essa situação despertou o interesse em apurar uma pequena amostra das pesquisas que vêm estudando a formação do professor pedagogo em geometria. Das teses e dissertações encontradas no banco de dados da CAPES, identificaram-se trabalhos que se propuseram a analisar o currículo dos cursos de pedagogia; a propor uma construção, aplicação e análise dos resultados de programas de formação em geometria para professores pedagogos; a analisar os conhecimentos geométricos dos professores dos anos iniciais; e, a estudar o processo de ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais. Todas as propostas de formação, desenvolvidas nessas pesquisas, trouxeram contribuições importantes sobre o tema. Contudo, nenhum dos programas de formação encontrados nessa busca, desenvolvidos com os professores pedagogos, abordou os conhecimentos de geometria considerando a perspectiva semiocognitiva da aprendizagem, apontada por de Duval (2005b).

1.3 PROBLEMA DE PESQUISA

Esse parecer inicial, sobre a formação dos pedagogos e a análise dos seus conhecimentos em geometria, bem como as dificuldades apresentadas por esses professores na condução do processo de ensino[3] da mesma, contribuiu para o surgimento do seguinte questionamento: qual a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem, a partir de um programa de formação continuada, desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria? A partir desse problema central, outros questionamentos foram emergindo:

- Qual o contexto histórico-epistemológico e didático da formação de professores pedagogos referente ao processo de aprendizagem da geometria?
- Quais subsídios fundamentam a prática pedagógica dos professores na condução do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais?
- Como o estudo da teoria semiocognitiva, para a aprendizagem da geometria, pode contribuir para o empoderamento dos professores pedagogos?

Na expectativa de responder esses questionamentos, propôs-se realizar esta pesquisa tendo como objetivo geral: avaliar como os professores compreendem a aprendizagem da geometria a partir de um programa de formação que visa a aprendizagem da mesma pela decomposição dimensional das formas, considerando as funções discursivas da língua, as apreensões e a passagem do olhar icônico ao não icônico.

E, para operacionalizar esse objetivo central, fez-se necessário:

- fazer um levantamento histórico-epistemológico e didático sobre a formação dos professores pedagogos no que tange o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental;
- organizar um ambiente colaborativo de formação para professores pedagogos, estabelecendo uma sinergia entre a teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria e a prática pedagógica desses profissionais;
- aplicar um programa de formação continuada com professores pedagogos, visando a aprendizagem da geometria nos anos iniciais, num espaço de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria;
- apontar a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos construíram a partir do desenvolvimento do programa de formação.

É importante destacar que este trabalho não trata apenas da questão da formação do pedagogo a título de conteúdos de geometria para conduzir o processo de aprendizagem, vai

[3] Neste trabalho, entendemos que o ensino da geometria é orientado pelo conhecimento dos processos envolvidos na sua aprendizagem. Comungamos com a perspectiva de Freire (1996) de que não existe a “[...] validade no ensino de que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado, em que o ensinado que não foi apreendido não pode ser realmente aprendido pelo aprendiz” (FREIRE, 1996, 13). Desse modo, inexiste ensinar sem aprender e vice-versa (FREIRE, 1996).

muito além. Ele esteve preocupado com as operações semiocognitivas requeridas na aprendizagem da geometria. Para tanto, buscou-se subsídios na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a fim de atender os propósitos desta pesquisa.

1.4 A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na teoria dos Registros de Representação Semiótica, a aprendizagem da geometria passa pelo aperfeiçoamento do olhar, propiciando condições para que o aluno seja capaz de enxergar os elementos pertinentes numa figura em sinergia com o discurso na língua natural. Buscando entender o sistema de leitura visual, procurou-se nas leis da Gestalt fundamentos teóricos que permitiram analisar e interpretar os objetos como “todos” estruturados, resultados de relações, ou seja, como um conjunto não somativo das partes.

A percepção de uma figura geométrica passa pelas apreensões cognitivas (DUVAL, 1995). Cada uma dessas apreensões tem suas regras específicas de organização e tratamento. Sendo assim, a aprendizagem da geometria passa pelas apreensões, pela passagem do olhar icônico ao não icônico e, necessariamente, pela mudança dimensional das formas, constituindo-se numa operação cognitiva e semiótica.

É mister salientar que, segundo essa teoria, a compreensão em matemática implica na coordenação e na conversão de, ao menos dois registros de representação semióticas diferentes. Nesse caso, os problemas em geometria, que apresentam figuras geométricas, exigem a coordenação e conversão de dois registros de representação semióticas: a linguagem natural e a linguagem figural.

É por meio da conversão que se terá acesso ao ente geométrico, permitindo a construção do seu conceito. Contudo, esse processo de articulação entre o ver e o dizer em geometria, apesar de essências, revelam-se complexos. “A falta de conhecimento da complexidade cognitiva envolvida em qualquer abordagem da geometria não é apenas prejudicial ao ensino, é também para pesquisa sobre o aprendizado de geometria” (DUVAL, 2005b, p. 51). Isso porque, a maneira de ver uma figura vai depender da ação cognitiva que ela é capaz de acionar, ou seja, o olhar icônico (formas estáveis) ou não icônico (desconstrução das formas).

Apesar da importância do olhar icônico para o reconhecimento das formas, ele não é suficiente para a aprendizagem da geometria. Para ver geometricamente uma figura, segundo Duval (2011), é necessário operar uma desconstrução dimensional das formas reconhecidas (apreensão perceptiva) em outras formas que não enxergamos num primeiro golpe de vista. É por meio da mudança de dimensões que se reconhecem e se designam os elementos geométricos de uma figura, constituindo-se o eixo central para a visualização em geometria.

A desconstrução dimensional das formas, a mudança de olhares (icônico ao não icônico) e os diferentes tipos de apreensões em geometria (perceptiva, operatória, discursiva e sequencial) são operações semiocognitivas que se encontram submersas nos diferentes registros de representação, compondo as diferentes semioses. Entretanto, as pesquisas que abordam essas operações são recentes, logo ainda não foram inseridas nos programas de formação para professores pedagogos.

1.5 PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Embasados nas perspectivas metodológicas da Engenharia Didática de 1ª geração (ARTIGUE, 1996), da pesquisa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007), da Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016) em sinergia com os indicativos de Duval (2003, 2004a, 2004b, 2005b, 2011, 2014) para a aprendizagem da geometria, viu-se despontar uma metodologia de pesquisa. A partir das aproximações estabelecidas entre essas metodologias, indicou-se uma possibilidade metodológica diferenciada, a fim de atender os objetivos desta pesquisa, a qual foi nomeada de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE).

O leitor poderia então se perguntar: qual a necessidade de elaborar uma proposta metodológica diferente para a realização desta pesquisa? Pois bem, inicialmente, sentiu-se a necessidade de considerar o protagonismo dos professores na condução do processo de aprendizagem da geometria, por intermédio de um espaço colaborativo que levasse em conta o ponto de vista deles, bem como os seus embaraços nos contextos de ensino. Contudo, precisou-se assegurar as respostas das perguntas didáticas, com o propósito de identificar, analisar e produzir fenômenos por intermédio da organização controlada de experimentos didáticos numa dimensão aplicada. Esses experimentos foram elaborados levando em conta a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria apontada por Duval.

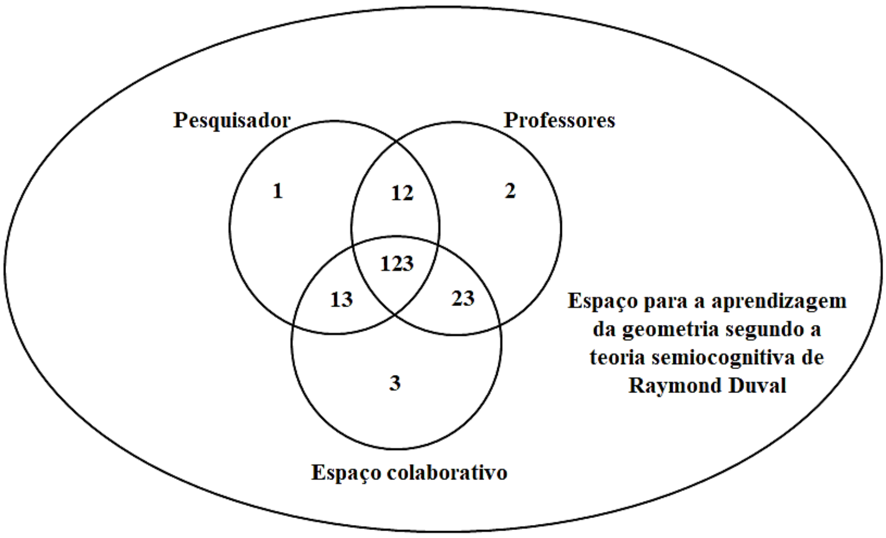
Morgado (2011) aponta a necessidade de se apostar num outro modelo de formação de professores, que não esteja baseado numa racionalidade tecnológica que insiste em produzir normas de atuação para a prática docente. Os desafios no processo de ensino e aprendizagem da geometria são muitos, exigindo do professor pedagogo a capacidade de iniciativa e decisão,

> [...] não só em termos de gestão curricular, mas também no domínio da concepção e realização de projetos, do recurso a metodologias inovadoras e a estilos de ensino que permitam adequar os processos de ensino-aprendizagem às características, motivações e ritmos de aprendizagem dos alunos com que trabalham. Um pressuposto que requer uma formação que confira um protagonismo mais interventivo aos próprios formandos, sobretudo ao nível da formação contínua (MORGADO, 2011, p. 807).

É esse protagonismo pedagógico que se procurou desenvolver pela implantação da metodologia de pesquisa, promovendo dinâmicas de investigação no interior das escolas e conciliando os conhecimentos científicos com os didático-pedagógicos, visando a formação de pedagogos para o domínio da decisão e da inovação na condução do processo de aprendizagem da geometria. Assim, muito mais do que dizer ao pedagogo *o que ele deve fazer* para ensinar a geometria, abriu-se espaço para que ele *possa criar* as condições necessárias e específicas para conduzir a sua prática pedagógica, mediante ao desenvolvimento de um programa de formação que favoreceu o seu aperfeiçoamento teórico e pedagógico sobre a aprendizagem da geometria.

A proposta metodológica utilizada no desenvolvimento desta pesquisa, Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE), está sintetizada no esquema da Figura 1.

Figura 1- Esquema metodológico da EDCAGE.



Fonte: A autora

Nesse esboço, tem-se a intersecção de três circunferências, em que cada uma delas representa os elementos que compõem o espaço investigativo que, por sua vez, encontram-se mergulhados no espaço para a aprendizagem da geometria, segundo Duval. Os espaços dos círculos demarcados por 1, 2 e 3 dizem respeito, respectivamente, as análises preliminares na perspectiva do pesquisador (o que espera?), dos professores participantes (quais as suas expectativas?) e do espaço colaborativo (o que significa?).

Os espaços demarcados por dois dígitos 12, 13 e 23 compõem a fase da análise *a priori* entre pesquisador e professores participantes (o que o pesquisador espera dos professores participantes?), pesquisador e espaço colaborativo (como o pesquisador enxerga o espaço colaborativo?), e pelos professores participantes e espaço colaborativo (como o os professores participantes enxergam o espaço colaborativo?).

Na intersecção das três circunferências, representado por 123, encontra-se a fase da experimentação, análise *a posteriori* e validação. Nesse espaço, localiza-se todos os integrantes da pesquisa envoltos num ambiente de construção e produção comum. O esquema metodológico foi explorado detalhadamente ao longo do texto, por isso a necessidade de apresentá-lo agora, mesmo que prematuramente, para que o leitor possa acompanhar a fundamentação da opção metodológica. Assim, ao longo do texto, cada um desses campos foi representado da seguinte maneira:

Análises preliminares: Pesquisador [1], Professores [2] Espaço colaborativo [3];

Análise *a priori*: Pesquisador e professores [12], Pesquisador e Espaço colaborativo [13], Professores e espaço colaborativo [23];

Experimentação, análise *a posteriori* e validação [123].

1.6 ESTRUTURA DA TESE

A escrita deste trabalho foi construída a partir do delinear da proposta metodológica adotada. Nesse sentido, o capítulo 2, **A FORMAÇÃO DE PROFESSORES PEDAGOGOS**, trouxe as análises prévias [1] da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, tratando do contexto problemático da formação matemática dos professores pedagogos, principalmente, no que tange a geometria.

A partir dessas análises preliminares, um contexto desafiador surgiu, exigindo a tomada de decisões. Assim, no capítulo 3, **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO METODOLÓGICA,** abordou-se a importância de considerar a desconstrução dimensional das formas para a aprendizagem da geometria, considerando as funções discursivas da língua, as apreensões e os olhares. Esse embasamento teórico permitiu desenvolver um programa de formação para professores pedagogos, visando a aprendizagem da geometria nesse nível de ensino, por meio da metodologia da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

O desenvolvimento do programa de formação, que permitiu a validação das hipóteses, encontra-se relatado no capítulo 4, **CAMINHOS DA PESQUISA: O PROGRAMA DE FORMAÇÃO, A ANÁLISE DOS DADOS E A VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COLABORATIVA PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA**. Essa experiência permitiu apontar a compreensão de aprendizagem da geometria que as professoras pedagogas construíram a partir do programa de formação.

Durante o desenvolvimento da pesquisa viu-se emergir a possibilidade de apontar, para além de todos os conhecimentos necessários à docência, o conhecimento especializado do pedagogo para ensinar geometria. Essa proposta foi abordada no capítulo 5, **DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA**.

Por fim, apresentou-se as **CONSIDERAÇÕES FINAIS,** onde foram enfatizados os principais achados da pesquisa, buscando atender aos objetivos e responder o problema de pesquisa que fomentou este trabalho. A partir deste estudo, delinearam-se algumas possibilidades de investigações futuras, principalmente, as relacionadas à formação em geometria do professor pedagogo.

2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES PEDAGOGOS

Neste capítulo foi apresentado um estudo sobre o processo de formação do professor pedagogo contemplando a sua perspectiva histórica, as orientações dos documentos oficiais que regulamentam essa profissão e a constituição dos saberes do professor pedagogo, especialmente sobre o conhecimento da geometria. A partir dos resultados apresentados pelas leituras realizadas sobre o tema, sentiu-se a necessidade de investigar a composição curricular do curso de pedagogia e o espaço dedicado ao conhecimento geométrico nesses cursos de graduação. Buscou-se saber também, as contribuições das pesquisas brasileiras atuais sobre o tema da formação em geometria do professor pedagogo. Esse levantamento bibliográfico faz parte das análises prévias, situadas no campo metodológico [1], onde considerou-se que a formação em geometria do professor pedagogo pode estar influenciando na sua compreensão sobre o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

2.1 ALGUNS ELEMENTOS HISTÓRICOS DA FORMAÇÃO DOCENTE

Pensar na formação docente no cenário atual, obriga a trazer para a discussão alguns elementos históricos sobre o processo da institucionalização dessa profissão. Nem sempre a docência foi considerada como uma atividade profissional. Inicialmente, a função docente desenvolveu-se de forma subsidiária como uma ocupação secundária de religiosos ou leigos das mais diversas origens. A profissão de professor emerge no seio de algumas congregações religiosas e que com o passar do tempo se transformaram em verdadeiras congregações docentes (NÓVOA, 1999).

No decorrer dos séculos XVII e XVIII os jesuítas foram organizando, gradualmente, uma estrutura de saberes e técnicas, e um conjunto de normas e de valores que deram características específicas à profissão docente. Como consequência do interesse que a era moderna depositou no futuro da infância e na intencionalidade educativa, deu-se a elaboração de um corpo de saberes e técnicas a serem executados pelos professores. "Trata-se mais de um *saber técnico* que de um *conhecimento fundamental*, na medida em que ele se organiza em torno de princípios e de técnicas de ensino e não ao redor de conteúdos das matérias ensinadas" (NÓVOA, 1991, p. 119, grifos do autor). Percebe-se então, uma ambiguidade entre o professor e o saber, na medida em que se estabelece como critério um saber geral e não um saber específico. Contudo, é importante destacar "[...] que este corpo de saberes e de técnicas foi quase sempre produzido no exterior do 'mundo dos professores', por teóricos e especialistas vários" (NÓVOA, 1999, p. 16).

A educação, a partir do século XVIII passa a ser vista como um instrumento de emancipação coletiva, em que cabe aos professores a missão de instruir o povo, formar cidadãos esclarecidos guiados pela instrução e pelo conhecimento. Esse discurso é retomado pelo poder público nos séculos XIX e XX, investindo imensamente no setor educativo e concebendo os professores como um corpo do Estado que deve prestar serviços à nação. Em outras palavras, "[...] a obediência revela-se a chave-mestra do trabalho docente, embora ele mude de sentido: já não basta obedecer a regras cegas, mecânicas, mas trata-se de compreendê-las e interiorizá-las" (TARDIF; LESSARD, 2009, p. 36).

No Brasil, de acordo com Saviani (2009), a questão da formação docente surge de maneira evidente após a independência em 1822, quando se passa a considerar a possibilidade de organizar o ensino popular. Explicitamente, essa preocupação apareceu pela primeira vez na Lei das Escolas de Primeiras Letras e deixou explicito no 6º artigo o papel a ser desempenhado pelos professores:

> Os professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de aritmética, prática de quebrados, decimais e proporções, as noções mais gerais de geometria prática, a gramática de língua nacional, e os princípios de moral cristã e da doutrina da religião católica e apostólica romana, proporcionados à compreensão dos meninos; preferindo para as leituras a Constituição do Império e a História do Brasil (BRASIL, 1827).

Esse tipo de ensino deveria ser desenvolvido pelo método mútuo, ou seja, amparado no ensino oral da repetição e memorização, conforme orienta a própria lei.

O contexto histórico das primeiras décadas do século XX, segundo Borges *et al* (2011), foi marcado pela propagação de ideias modernas sobre a educação, criando-se em 1924 a Associação Brasileira de Educação (ABE) "[...] com objetivo de congregar todas as pessoas, de várias tendências, em torno da bandeira da educação. Foi um espaço propício para a reunião de pessoas que se tornavam adeptas das novas ideias pedagógicas" (BORGES *et al*, 2011, p. 98), culminando na organização da I Conferência Nacional de Educação em 1927 na cidade de Curitiba-PR, evento que acontece até os dias atuais.

Com o advento dos institutos de educação, foram implantadas reformas inspiradas no movimento renovador da Escola Nova, encabeçadas por Anísio Teixeira em 1932, no Distrito Federal, e por Fernando Azevedo em 1933 no estado de São Paulo. Segundo Saviani (2005), foi na gestão de Anísio Teixeira que as novas ideias assumiram uma formulação mais orgânica e consequente, transformando-se numa experiência prática.

O Decreto Nº 1.190, de 4 de abril de 1939, além da organização da Faculdade Nacional de Filosofia, também deu orientações sobre as disciplinas que deveriam compor cada um dos cursos, bem como a carga horária e a distribuição das disciplinas ao longo dos quatro anos de formação. Os primeiros três anos eram dedicados ao estudo das disciplinas específicas ou conteúdos cognitivos e o último ano para a formação didática. O artigo 19 desse decreto trata do curso de pedagogia, vejamos a sua disposição curricular:

> *Primeira* série: 1. Complementos de matemática. 2. História da filosofia. 3. Sociologia. 4. Fundamentos biológicos da educação. 5. Psicologia educacional. *Segunda série*: 1. Estatística educacional. 2. História da educação. 3. Fundamentos sociológicos da educação. 4. Psicologia educacional. 5. Administração escolar. *Terceira série*: 1. História da educação. 2. Psicologia educacional. 3. Administração escolar. 4. Educação comparada. 5. Filosofia da educação. (BRASIL, 1939, grifos nossos).

Percebe-se que as disciplinas ou encaminhamentos que deveriam ser adotados no último ano destinado a formação didática não estão explícitos nesse decreto, ele apenas faz menção, no § 2º do 3º artigo, a cursos de aperfeiçoamento destinados a intensificação dos estudos e de cursos avulsos para ministrar o ensino. Nota-se que o currículo proposto para o curso de pedagogia é mais voltado para a modalidade bacharel, do que propriamente para a licenciatura.

Em 1946, por meio do decreto de Lei nº 8.530, foi promulgada a Lei Orgânica do Ensino Normal (BRASIL, 1946), trazendo uma nova estrutura para o ensino, que passou a ser ministrado em dois ciclos. “O primeiro dará o curso de regentes de ensino primário, em quatro anos, e o segundo, o curso de formação de professores primários, em três anos” (BRASIL, 1946). O ensino normal, que faz parte do ramo do ensino do segundo grau[4], dispõe das seguintes finalidades: “1. Prover à formação do pessoal docente necessário às escolas primárias. 2. Habilitar administradores escolares destinados às mesmas escolas. 3. Desenvolver e propagar os conhecimentos e técnicas relativas à educação da infância” (BRASIL, 1946).

De acordo com Saviani (2009), a implantação dos cursos normais, bem como os de licenciatura e pedagogia foram marcados pelo aspecto da formação profissional garantido por

---

[4] O ensino normal corresponde, no presente momento, aos anos finais do ensino fundamental II. Anteriormente era um curso com duração de 3 anos para formar professores para atuar no ensino primário (atualmente condiz com os anos iniciais do ensino fundamental). O segundo grau equivale ao ensino médio atual.

um currículo centrado nos conteúdos cognitivos, em detrimento dos aspectos didáticos pedagógicos, fato que pode ser percebido com a dispensa da exigência das escolas-laboratórios.

Com o golpe militar de 1964, o modelo de escola normal foi, em grande parte, descaracterizado em virtude das adequações do campo educacional ao sistema político vigente. Assim, em 11 de agosto de 1971, a Lei nº 5.692/71 (BRASIL, 1971) reformulou os ensinos primário e médio que receberam, respectivamente, as denominações de primeiro grau e segundo grau. Nesse contexto, as escolas normais foram substituídas por uma habilitação específica de 2º grau para o exercício do magistério de 1º grau[5], organizado de duas formas: com duração de três anos, habilitado para lecionar até a 4ª série[6] do 1º grau; com duração de quatro anos, habilitado para lecionar até a 6ª série do 1º grau. Os currículos do ensino de 1º e 2º graus tiveram um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional e uma parte diversificada, visando à formação especial. Nessa nova estrutura, percebe-se que o curso normal "[...] cedeu lugar a uma habilitação de 2º Grau. A formação de professores para o antigo ensino primário foi, pois, reduzida a uma habilitação dispersa em meio a tantas outras, configurando um quadro de precariedade bastante preocupante" (SAVIANI, 2009, p. 147).

Essa mesma lei (5.692/71) regulamentou a formação de professores em nível superior, em cursos de licenciatura curta (3 anos de duração), habilitados para lecionar nas quatro séries finais do 1º grau, ou plena (4 anos de duração), habilitados para dar aula no 1º e 2º graus. Ao curso de Pedagogia foi conferida a atribuição de formar professores para exercer o magistério, bem como formar os especialistas em Educação. Contudo, a partir dos anos 80, os cursos de pedagogia sofreram algumas remodelações visando adequá-los à formação do professor para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental.

O fim do regime militar aumentou as expectativas dos movimentos educacionais, esperançosos de que o problema da formação docente seria finalmente resolvido com a aprovação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96).

> Mas a nova LDB promulgada, após diversas vicissitudes, em 20 de dezembro de 1996, não correspondeu a essa expectativa. Introduzindo como alternativa aos cursos de pedagogia e licenciatura os institutos superiores de educação e as Escolas Normais Superiores, a LDB sinalizou para uma política educacional tendente a efetuar um nivelamento por baixo: os institutos superiores de educação emergem como instituições de nível superior de segunda categoria, provendo uma formação mais aligeirada, mais barata, por meio de cursos de curta duração (SAVIANI, 2009, p. 148).

---

[5] Corresponde ao atual ensino fundamental (1º ao 9º ano).
[6] Condiz ao 5º ano do ensino fundamental.

Os institutos de educação foram regulamentados pelo artigo 63 da LDB (9.394/96) como local de formação de profissionais para a educação básica, nas quais manterão:

> I - cursos formadores de profissionais para a educação básica, inclusive o curso normal superior, destinado à formação de docentes para a educação infantil e para as primeiras séries do ensino fundamental; II - programas de formação pedagógica para portadores de diplomas de educação superior que queiram se dedicar à educação básica; III - programas de educação continuada para os profissionais de educação dos diversos níveis (BRASIL, 1996).

Apesar de alguns percalços, há que se considerar que a garantia de uma formação docente, para atuar na educação básica em nível superior por meio de curso de licenciatura, de graduação plena, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental (BRASIL, 1996), foi uma conquista considerável, em meio a um cenário educacional onde a maioria dos professores do ensino fundamental possuía apenas o magistério, sem contar os professores leigos.

Contudo, com relação ao curso de pedagogia, essa lei faz referência a ele apenas no seu artigo 64. Vejamos:

> A formação de profissionais de educação para administração, planejamento, inspeção, supervisão e orientação educacional para a educação básica será feita em cursos de graduação em pedagogia ou em nível de pós-graduação, a critério da instituição de ensino, garantida, nesta formação, a base comum nacional (BRASIL, 1996).

Parece que ao curso de pedagogia, a lei estabeleceu uma condição de bacharelado, contrariando o que já vinha sendo feito após a reformulação do curso em 1986, a qual delegou que esses cursos oferecessem também a formação para a docência de 1ª a 4ª séries. Esse modelo de formação em curso contrariava os “[...] princípios que vinham sendo articulados num movimento que amadurecia as concepções de formação com a intenção de superar tradicionais dicotomias, integrando teoria e prática, ensino e pesquisa, conteúdo específico e conteúdo pedagógico” (SHEIBE, 2008, p. 46).

A partir da instauração da LDB (9.394/96) uma profusão de pareceres, diretrizes, resoluções e decretos exarados pelo Ministério da Educação e Cultura e pelo Conselho Nacional de Educação, repercutiram na criação de um conjunto de mudanças relacionadas aos currículos escolares e aos programas de formação de professores da educação básica.

Em 2002 foram instituídas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, estabelecendo princípios amplos para a formação de professores, bem como critérios para a organização da matriz curricular sem explicitar conteúdos. O que parece ser um avanço, quando comparado às propostas anteriores, pois no lugar de conteúdos e disciplinas, elas têm agora uma preocupação maior com desenvolvimento de competências pessoais, sociais e profissionais dos professores.

> Art. 4º Na concepção, no desenvolvimento e na abrangência dos cursos de formação é fundamental que se busque: I - considerar o conjunto das competências necessárias à atuação profissional; II - adotar essas competências como norteadoras, tanto da proposta pedagógica, em especial do currículo e da avaliação, quanto da organização institucional e da gestão da escola de formação (BRASIL, 2002).

A ênfase na noção de competências como epicentro dessas diretrizes, parece apresentar nuances de visões curriculares instrumental tecnicistas já experimentadas em décadas passadas. Embora essas diretrizes tenham sido frutos de debates com a comunidade educacional e ainda que apresentem sinais de avanços comparados a políticas anteriores, "[...] ao que tudo indica essas Diretrizes mantêm-se atreladas ao propósito de formação para atender demandas do mercado, tal qual evidenciado em décadas passadas com relação a outras reformas curriculares promovidas" (SCHNEIDER, 2007, p. 17).

A Política Nacional para a Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica foi instituída em 2009 pelo Decreto presidencial nº 6.755/2009, com a finalidade de "[...] organizar em regime de colaboração entre União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, a formação inicial e continuada dos profissionais do magistério para as redes públicas de educação básica" (BRASIL, 2009).

Esse decreto também regulamenta a atuação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para o fomento a programas de formação inicial e continuada, promovendo ações formativas articuladas entre as instituições de ensino superior e as redes de ensino da Educação Básica, bem como a participação dos estudantes nas atividades de ensino da educação básica e nas atividades de ensino-aprendizagem da escola pública por meio de projetos pedagógicos.

Percebe-se nesse decreto 6.755/2009, no art. 11, uma preocupação com a pesquisa no campo educacional designando a CAPES fomentar "VI - programas de apoio a projetos educacionais e de pesquisa propostos por instituições e por profissionais do magistério das escolas públicas que contribuam para sua formação continuada e para a melhoria da escola" (BRASIL, 2009).

Em 2019 foi instituída a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) pela resolução CNE/CP Nº 2 de 20 de dezembro de 2019, tendo como referência a implantação da Base Nacional Comum Curricular da Educação Básica (BNCC) aprovada em 2017. O artigo 2º, desse parecer, ao que tudo indica, deixa explícito o retorno a uma formação inicial de caráter técnico-instrumental, evidenciando a preparação de professores para implantar as habilidades indicadas pela BNCC (BRASIL, 2017) na educação básica.

> Art. 2º A formação docente pressupõe o desenvolvimento, pelo licenciando, das competências gerais previstas na BNCC-Educação Básica, bem como das aprendizagens essenciais a serem garantidas aos estudantes, quanto aos aspectos intelectual, físico, cultural, social e emocional de sua formação, tendo como perspectiva o desenvolvimento pleno das pessoas, visando à Educação Integral (BRASIL, 2019).

Para atender a essas exigências, a estrutura curricular e a carga horária de todos os cursos em nível superior de licenciatura, destinados à Formação Inicial de Professores para a Educação Básica, está organizada em três grupos: **1)** uma base comum de 800 horas, compreendendo os conhecimentos científicos, educacionais e pedagógicos; **2)** um grupo de 1600 horas destinadas para a aprendizagem dos conteúdos específicos das áreas, componentes, unidades temáticas e objetos de conhecimento da BNCC (BRASIL, 2017) e, para o domínio pedagógico desses conteúdos; **3)** uma parte de 800 horas destinadas à prática pedagógica. Nota-se a ênfase dada à prática de ensino em detrimento da formação teórico científica, capaz de inserir o professor no campo da pesquisa, podendo tornar vulnerável a formação docente.

Com relação ao processo de ensino e aprendizagem, a resolução não trata em momento algum das possíveis causas da não aprendizagem, apresentando um diagnóstico limitado da problemática educativa, minimizando o peso dos fatores extraescolares e intraescolares, culpabilizando os professores pelas mazelas da educação e da escola pública, ao considerar que ele assume o papel de maior peso no desempenho da aprendizagem dos alunos.

Nesse cenário problemático da formação do professor pedagogo, percebeu-se mesmo antes da sua institucionalização como uma profissão, que essa situação não é atual. Pode ser observado que durante toda a trajetória histórica da formação do professor, parece que o seu protagonismo foi negligenciado, deixando sob a responsabilidade de terceiros, as determinações sobre as funções a serem desempenhadas por eles. Ou seja, parece que cabe ao professor pedagogo apenas cumprir as orientações elaboradas pelas autoridades competentes, que muitas vezes desconsideram o contexto sócio-político escolar, bem como a importância dos programas de formação continuada.

Estimou-se que essa situação, que vem se arrastando desde sempre, também possa ser um dos fatores que esteja repercutindo, ainda hoje, na formação do professor pedagogo, principalmente, na sua compreensão sobre o processo de aprendizagem da geometria. Uma vez que, parece não ter sido dispensada uma atenção especial para essa temática ao longo da trajetória histórica da formação desses profissionais.

2.2 A INFLUÊNCIA DA BNCC NO DIRECIONAMENTO PEDAGÓGICO DOS DOCENTES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Como visto, os sistemas educativos experimentaram uma série de mudanças e reformas na organização dos seus currículos desde a sua institucionalização. Mas, parece que essas mudanças vêm ganhando cada vez mais força e destaque no cenário global. Políticas educacionais globais alastram-se por todos os cantos do planeta, com objetivos comuns de internacionalização dos currículos.

As organizações internacionais[7] surgiram em decorrência da primeira guerra mundial, momento em que se propôs a criação de uma instituição universal e permanente, com o propósito de negociar os conflitos territoriais e assegurar a paz entre os Estados. Com o advento da segunda guerra mundial, em 1945foi criada a Organização das Nações Unidas (ONU) com o objetivo de arbitrar os conflitos existentes entre os países membros, regular as relações de cooperação econômica, financeira e tecnológica (SILVA, 2010).

Em 1944 foi criado o Banco Mundial e o Fundo Monetário Internacional (FMI), a fim de promover o desenvolvimento econômico por meio do fornecimento de empréstimos destinados à reconstrução dos países europeus destruídos pela guerra. A partir de 1980, após firmarem acordos, essas organizações passaram a agir de forma cruzada para coibir riscos e manter o sistema financeiro em segurança (SILVA, 2010).

[7] São instituições formadas por um conjunto de países-membros com personalidade jurídica no campo do Direito Internacional Público e atuam no âmbito das relações econômicas, políticas e sociais, ambientais por meio de regras, medidas e normas comuns e finalidades específicas. Podem ser divididos em instituições intergovernamentais: a) globais: ONU, OMC, OIT, OMS, FMI, FAO, BID, Banco Mundial e UNESCO, UNICEF, UNIDO; b) regionais: OEA, OTAN, OCDE, Cepal, Mercosul e União Europeia. No geral, sua estrutura de funcionamento compreende os principais órgãos: Assembleia Geral, Diretoria de Governadores e Secretariado Permanente. Para alcançar e monitorar os objetivos, conta, além da Sede, com escritórios regionais ou agências em outros países; e aquelas não-governamentais: Greenpeace, Cruz Vermelha, Internacional Human Rights, Aldeias Infantis e outras (SILVA, 2010, p. 1, grifos do autor).

> Para alcançar as metas de cobrança da dívida externa, obter empréstimos lucrativos e monitorar moedas, exigiram dos governos a árdua tarefa de fazer ajustes estruturais e reformas *socioeducacionais*, condicionando, ainda, os seus empréstimos ao cumprimento desses ajustes (SILVA, 2010, p. 3, grifos nossos).

Ou seja, essas instituições determinam o comportamento adequado que os governos devem apresentar para que sejam merecedores de empréstimos financeiros, estipulando metas que deverão ser alcançadas a curto e a longo prazo, desconsiderando o contexto histórico, social e financeiro característico dos países credores.

O Brasil, com o intuito de atingir os objetivos acordados nas conferências e fóruns mundiais, tem sido influenciado pelas orientações das organizações internacionais no que concernem as políticas públicas educacionais (ANTUNES *et al*, 2017), por meio de sistemas de avaliações internacionais, como exemplo o PISA[8], nacional como o SAEB[9], entre outros.

Os princípios e diretrizes que vêm balizando as principais reformas para Educação Básica, resultantes das conferências e fóruns mundiais de educação e que contribuíram para a atual conjuntura da BNCC, estão fundamentados em três forças interdependentes que, segundo Thiesen (2017), são motivações de natureza econômica, políticas e acadêmicas. Essas forças operam "[...] com marcados interesses sobre a área educacional em escala global" (THIESEN, 2017, p. 1005).

As estratégias mobilizadas pelos sistemas de ensino no território do currículo escolar brasileiro, que buscam o alinhamento da formação escolar solicitados pelas demandas da internacionalização, para Thiesen (2019), estão pautadas em ações que envolvem a gestão curricular em aspectos que incluem avaliação de rendimento escolar, seleção e proposição de conteúdos de conhecimento, arquiteturas curriculares e formação de professores.

Com o advento da Constituição de 1988 e a seguir a regulamentação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996, a avaliação do rendimento escolar e a gestão democrática tão prometida no final da década de 1980 e inícios dos anos 1990, no Brasil, parecem não fazer mais sentido nos tempos atuais. Percebe-se um descompasso quando os objetivos de uma gestão educacional democrática estão submetidos a cumprir metas e a atingir índices de desempenho escolares, que serão comparados a estudantes de outras realidades bem mais privilegiadas que o contexto social, político e cultural brasileiro.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, os conhecimentos matemáticos vêm sendo aferidos, nas escolas públicas brasileiras, por meio de provas obrigatórias e padronizadas,

---

[8] PISA é o Programa de Avaliação Internacional de Estudantes da OCDE.
[9] SAEB é o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) brasileira.

instituídas pelo SAEB como, por exemplo, a ANA[10] e a Prova Brasil[11]. Analisando-se as Matrizes de Referência de Matemática propostas por Brasil (2012), documento base que serve para a construção dessas avaliações, percebe-se que elas são constituídas por dois eixos: cognitivos e do conhecimento. O eixo cognitivo está associado à compreensão e aplicação de conceitos e procedimentos; resolver problemas e argumentar. Nos eixos do conhecimento, são utilizadas as mesmas cinco unidades temáticas da BNCC (2017).

A disposição da Matriz de Referência de Matemática para as provas nacionais encontra-se em perfeito alinhamento com a estrutura matemática das provas do PISA de 2018. Afirmação que pode ser ratificada pelos objetivos do PISA para a edição de 2021, onde a avaliação vai verificar, entre outras competências, a capacidade de formular, aplicar e interpretar problemas matemáticos em vários contextos do mundo real. Dessa maneira, percebe-se que a concepção de currículo presente na BNCC (BRASIL, 2017),

> [...] corresponde também à expectativa do desenvolvimento de uma certa "capacidade" que os alunos devem ter para responder aos famosos testes padronizados, que dominam o sistema de avaliação institucional brasileiro e que são o instrumento de implantação de uma gestão por resultados com a responsabilização da ponta do sistema – redes municipais, escolas e professores -, pelo desempenho escolar, tirando a obrigação do Estado e estimulando, por meio da chamada "gestão democrática", as parcerias com os agentes privados, ou mesmo a transferência de redes inteiras para a gestão das chamadas Organizações Sociais - OS (MARSIGLIA *et al*, 2017, p. 119).

Nessa perspectiva, uma gestão democrática que precisa se adequar a esses moldes internacionais fica completamente comprometida e, de certa maneira, engessada. Segundo Venco e Carneiro (2018), o sentimento gerado nos professores pelo ranqueamento das escolas é de frustração profissional, uma vez que tomam para si as causas do fracasso escolar, instaurado pela padronização da educação e das provas de larga escala.

A seleção e proposição dos conteúdos do conhecimento na disposição curricular não é algo que passa despercebido aos olhos dos dirigentes econômicos e políticos, ainda mais quando se vive um momento efervescente da internacionalização da educação. "Para além de um bem coletivo e um direito público, o conhecimento passa a ser uma importante *commodity* no conjunto dos demais produtos que circulam no mercado, sobretudo em escalas regional e global" (THIESEN, 2019, p. 428).

---

[10] ANA é a Avaliação Nacional da Alfabetização que mede os níveis de alfabetização e letramento em língua portuguesa e em matemática realizada com alunos do terceiro ano do ensino fundamental.

[11] Prova Brasil é um exame para estudantes do 5º e do 9º anos do Ensino Fundamental que testa o conhecimento dos alunos em língua portuguesa e matemática.

Ao observar-se a disposição dos conhecimentos matemáticos na BNCC (BRASIL, 2017) para os anos iniciais, é perceptível o descolamento dos diferentes campos do conhecimento matemático. Estes são dispostos em unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) que desconsideram os sistemas produtores de representações semióticas para um mesmo objeto matemático, reforçando a percepção técnica e prática da matemática.

A organização e a seleção dos conteúdos propostos para esse nível de ensino se encontram consonantes com as habilidades da matriz de referência de matemática do SAEB (BRASIL, 2018). Percebe-se que os conteúdos selecionados para a matemática dos anos iniciais têm a pretensão de preparar as crianças, desse nível de ensino, para as avaliações de larga escala. "O contexto é, portanto, favorável para que sistemas de ensino e escolas ajustem seus currículos de modo que os conhecimentos sejam selecionados e ministrados em conformidade com perspectivas de transnacionalização e internacionalização" (THIESEN, 2019, p. 429), atendendo a perspectiva da padronização do ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nesse viés, percebe-se que o conhecimento que circula no currículo escolar da educação básica e, em especial nos anos iniciais para a matemática, pode ser compreendido como escolhas a partir das concepções e das finalidades de quem o produz e o propõe.

> Definir quais decisões tomar, após avalia-las, não é um problema técnico (ou melhor, não é fundamentalmente uma tarefa técnica), pois as decisões tomadas afetam sujeitos com direitos, implicam explícita ou implicitamente opções a respeito de interesses e modelos de sociedades, avaliações do conhecimento e a divisão de responsabilidades (SACRISTAN, 2013, p. 23).

Nesse caso, a estrutura de um currículo pode ser entendida como uma construção na qual se faz necessário decidir entre as possibilidades apresentadas. "Não é algo neutro, universal e imóvel, mas um território controverso e mesmo conflituoso a respeito do qual se tomam decisões, são feitas opções e se age de acordo com orientações que não são as únicas possíveis" (SACRISTAN, 2013, p. 23).

O currículo pode ser considerado como um produto social e cultural que não é inocente e nem imparcial, ele "[...] está implicado em relações de poder, o currículo transmite visões sociais particulares e interessadas, o currículo produz identidades individuais e sociais particulares" (MOREIRA; SILVA, 2005, p. 8). Ou seja, um ambiente propício para a disseminação das concepções do discurso educacional global tão defendido pelas organizações educacionais nacional e internacionais. Segundo a UNESCO (2015), a educação para a cidadania global tem “[...] um papel crucial a desempenhar para equipar alunos com competências para lidar com o mundo dinâmico e interdependente do século XXI” (p. 9). Essas competências podem estar relacionadas à preparação para o mercado de trabalho qualificado, pensando em atitudes e valores democráticos a serem desenvolvidos pelos estudantes.

> [...] não são mais os conhecimentos que contam, mas o que você pode por em prática em situações concretas. Vocês reconhecem, aqui, uma abordagem por objetivos em termo do “saber-fazer” e das “competências”. Esta exigência corresponde a uma dupla demanda social referente ao mundo do trabalho: que depois de formados os jovens encontrem trabalho e, os serviços públicos, pessoal qualificado (DUVAL, 2015, p. 2).

Todo o movimento que os educadores matemáticos têm desenvolvido, ao longo dos últimos anos, para que o ensino da matemática tenha uma abordagem mais educacional, parece vir na contramão dos objetivos elencados pelo movimento da internacionalização curricular. Segundo Duval (2015), a matemática precisa ser ensinada na sua vertente para o desenvolvimento intelectual. “A matemática desempenha um papel chave na aprendizagem de outras disciplinas e, sobretudo, *a compreensão da matemática é pedagogicamente fundamental e insubstituível para o desenvolvimento das capacidades mentais”* (DUVAL, 2015, p. 4, grifos do autor). Quando se pensa no ensino da matemática como uma preparação, corre-se o risco de perder a essência do verdadeiro fazer matemático.

Para atender às demandas educacionais internacionais e obter bons índices de desempenho nas avaliações externas, percebe-se uma constante oferta de arquiteturas curriculares aos líderes governamentais responsáveis pela educação pública. Tais propostas, orientadas por consultores internacionais inspirados em experiências educacionais de países desenvolvidos, são capazes de garantir o bom desempenho dos alunos dos anos iniciais nas provas externas.

Nesse cenário, parece que as soluções para os problemas educacionais podem ser alcançadas por meio de prescrições que atuam de fora para dentro do contexto escolar. Propostas que estabelecem metas a serem cumpridas em todas as escolas, independente do ambiente em que estiverem inseridas, partindo do princípio de que a aprendizagem acontece de forma homogênea para todas as crianças, por intermédio do desenvolvimento de competências e habilidades.

O texto da BNCC (BRASIL, 2017) defende que a aprendizagem na educação básica deve assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências. Alinhando-se a essa perspectiva, o Instituto Ayrton Senna defende que a aprendizagem deve envolver tanto as competências cognitivas quanto as socioemocionais.

> Em conjunto, as competências fortalecem os alunos para que continuem aprendendo, ingressem no mundo do trabalho e contribuam para o seu entorno social, sabendo resolver problemas, trabalhar em time, enfrentar situações adversas de maneira criativa e construtiva, entre outras realizações ao longo da vida, na escola e fora dela. Tudo isso valorizando a diversidade e os projetos de vida de cada um! (INSTITUTO AYRTON SENNA, 1994).

Com essas palavras, parece que um modelo de gestão empresarial está sendo implantado, ou ao menos oferecido, aos gestores públicos educacionais. Isso pode ser percebido pela importância dada ao desenvolvimento de competências para o ingresso no mundo do trabalho e reforçada pelo espírito do trabalho em equipe. Para Passos e Nacarato (2018) essas propostas vêm na contramão do que se entende por matemática e seu ensino. “A natureza do conhecimento matemático deve estar intrínseca ao trabalho do professor de modo que ele possibilite ao estudante fazer Matemática, que significa construí-la, produzi-la [...]” (PASSOS; NACARATO, 2018, p. 126).

Em se tratando da formação de professores no Brasil, frente às modificações da política curricular nacional que visam os alinhamentos com a internacionalização, percebe-se uma questão delicada a ser considerada. No contexto atual, parece caber ao professor apenas ajustar-se às demandas exigidas pelos documentos oficiais, uma vez que sua participação não foi solicitada para a construção das novas metas estabelecidas. “Aliás, esta tem sido a marca histórica da política curricular brasileira, qual seja, alterar a configuração dos currículos sem a devida preparação dos professores que os desenvolvem” (THIESEN, 2019, p. 432). É provável que a formação do professor seja percebida como uma preparação para a atuação em sala de aula em detrimento da sua constituição profissional, integral e pedagógico científica.

Ainda precisa-se considerar que a maioria dos professores “[...] provêm de cursos de formação que deixam sérias lacunas conceituais para o ensino de Matemática” (PASSOS; NACARATO, 2018, p. 120). Embora a BNCC esteja centrada na ideia do desenvolvimento de competências e habilidades, não há nela “[...] menção ou suporte ao como estas habilidades devem ser trabalhadas em nome de uma pluralidade metodológica e da autonomia dos docentes e das redes de ensino” (FREITAS; SILVA; LEITE, 2018, p. 863). Aspectos metodológicos já consolidados no campo da Educação Matemática, como a Etnomatemática, a História da Matemática, a Modelagem Matemática, entre outros, não têm sido levados em consideração pelos reformadores curriculares (FREITAS *et al*, 2019).

Essas teorias constituem-se como referenciais importantes no cenário educacional e nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, levando em consideração a pluralidade e as especificidades da escola pública brasileira. Contudo, nenhuma delas é apontada como uma possibilidade de encaminhamento nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, ficando a cargo do pedagogo entender, dentro das suas fragilidades conceituais de matemática, “como” desenvolver as competências requisitadas a partir dos objetos de conhecimento e habilidades elencadas pela BNCC (BRASIL, 2017).

Nesse contexto problemático, em que a BNC-Formação (BRASIL, 2019) tem como seu eixo central a implantação da BNCC (BRASIL, 2017) na educação básica, e que a mesma não percebe o processo de ensino e aprendizagem da matemática na perspectiva cognitiva dos objetos matemáticos, mas apenas pela sua aplicabilidade, é que sentiu-se a necessidade de discutir a importância da formação matemática do pedagogo, não como mero aplicador de extensas listas de conteúdos com o objetivo de desenvolver competências e habilidades, mas como um profissional capaz de entender as especificidades do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

2.3 A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PEDAGOGO: A QUESTÃO DA GEOMETRIA

Pesquisas vêm mostrando indicativos que a formação matemática do professor pedagogo é frágil e se agrava ainda mais no campo da geometria (CURI, 2004; LORENZATO, 1995). Cogitou-se a possibilidade de que essa situação possa estar relacionada com a formação em geometria, a qual os professores pedagogos obtiveram no ensino básico, posto que, a problemática do ensino da geometria nas escolas não é uma questão recente. Essa querela vem se arrastando, muito provavelmente, deste antes da Reforma Francisco Campos em 1930.

Não se podem negar as alterações ocorridas no Brasil, quanto ao ensino da geometria nas escolas, após a Reforma Educacional ocorrida em 1930. A integração da Geometria, Álgebra e Aritmética foi, a nosso ver, um avanço para o ensino da matemática. Entretanto, vale destacar que, a parte referente às direções apontadas pela reforma, no que tange as instruções para o ensino da geometria em conexão com os outros ramos do saber, infelizmente, ao que nos parece, foi perdida parcialmente ao longo do tempo. O que pode ser confirmado ao se abrir os manuais escolares.

Sabe-se que essas modificações demandam certo tempo a serem implantadas substancialmente nas escolas. O ranço trazido ao longo do percurso histórico, por vezes, pode ser difícil de ser extirpado, pode-se pensar até que ele está arraigado à cultura que permeia as relações escolares. Não é algo simples falar de cultura, em virtude da ampla produção sobre o tema. Não é objetivo deste trabalho, travar esse debate, pois foge ao seu escopo. Mas, em linhas gerais, Sasseron (2015) sintetiza a ideia de cultura “como sendo composta por normas e práticas: normas que regem o que se faz e práticas da forma como essas ações são desempenhadas” (p. 53).

Seguindo esta linha de raciocínio, pode-se pensar nas normas, no campo educacional matemático, como as diretrizes que conduziram e conduzem os programas curriculares para o ensino da matemática. E, como prática, as atividades que são desenvolvidas pelos professores para o cumprimento dessas normas. Essas normas, que são estabelecidas no decorrer da história, podem acabar influenciando diretamente na prática dos docentes, quanto ao ensino da geometria.

> [...] alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula (LORENZATO, 1995, p. 3).

Em Fiorentini (1995) encontramos um panorama desses modismos que foram propostos para o ensino da matemática no Brasil no século XX. Segundo ele, até o final da década de 50, o ensino dessa disciplina era caracterizado pelos ideais da Matemática Clássica, enfatizando a sua concepção platônica, em que se tinha como principal “[...] finalidade do ensino da Matemática o desenvolvimento do ‘espírito’, da ‘disciplina mental’ e do pensamento lógico-dedutivo” (FIORENTINI, 1995, p. 6). Isso garantia à geometria um lugar de destaque no currículo escolar, pois ela serviria para disciplinar o pensamento.

Em contraposição a concepção platônica, nas décadas de 60 e 70 surge a pedagogia empírico-ativista que considera que o conhecimento matemático “[...] emerge do mundo físico e é extraído pelo homem através dos sentidos” (FIORENTINI, 1995, p. 9). Em outras palavras, o aluno aprende matemática pela descoberta, principalmente pelas sensoriais. Ainda nessa época, durante o período militar, a escola teve a função de inserir o indivíduo à sociedade e para isso, a matemática passou a ter um caráter utilitarista, em que o aluno precisou ser preparado para atender o sistema de produção capitalista, privilegiando o treinamento de habilidades estritamente técnicas.

Após a década de 50, a matemática brasileira passou por um período de reformulações e modernizações do currículo escolar, o chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM), que projeta uma nova tendência pedagógica. Nesse modelo, as estruturas algébricas e a linguagem formal da matemática passam a ser enfatizadas, valorizando o uso da linguagem matemática, o rigor e as justificativas das transformações algébricas. Ou seja, a finalidade do ensino de Matemática deixa de ser um "disciplinador mental", para assumir a formação de um especialista matemático.

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la. Mas é preciso romper esse círculo de ignorância geométrica, mesmo porque já passou o tempo do "Ler, Escrever e Contar" (LORENZATO, 1995. p. 4).

A partir das décadas de 60, 70 e 80 começa a surgir no Brasil a presença do construtivismo piagetiano. Epistemologicamente, essa tendência rejeita a teoria racionalista e a teoria empirista, pois para o construtivismo "[...] o conhecimento matemático não resulta nem diretamente do mundo físico nem de mentes humanas isoladas do mundo, mas sim da ação interativa/reflexiva do homem com o meio ambiente e/ou atividades" (FIORENTINI, 1995, p. 19-20). A apreensão dessas estruturas acontecem por meio da interação do homem com o meio em que está inserido e, desse modo, a matemática passou a ser vista como uma construção humana... O importante agora não é mais aprender esse ou aquele conteúdo, mas desenvolver o pensamento lógico-formal no processo de aprender a aprender.

Junto com essa nova forma de conceber o conhecimento matemático, por meio dos estudos de Piaget, outros desdobramentos do construtivismo começaram a surgir. Diferentes tendências passaram a pensar o conhecimento matemático em outras perspectivas, cada uma delas com suas características, mas todas preocupadas, de certa forma, em tornar o conhecimento matemático mais significativo, mais próximo do aprendiz, desenvolvendo todas as suas potencialidades intelectuais e sociais.

Dentre essas tendências, Fiorentini (1995) destaca as seguintes: **1)** Tendência Socioetnocultural, que teve como precursores Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio. Nessa tendência, o processo de ensino e aprendizagem se concentra nos problemas da realidade que são abordados por meio das metodologias de problematização e de modelagem matemática; **2)** Histórico-Crítica caracterizada por uma postura crítica e reflexiva diante do saber escolar e do papel sociopolítico da educação escolarizada; **3)** Sociointeracionista-semântica que se alicerça no modo como os conhecimentos, signos e proposições matemáticas são produzidos e legitimados ao longo da história, dentro de um regimento de representações enquanto formas de comunicação.

Mas, por que trazer essas questões à baila? Bem, como já mencionado anteriormente, essas tendências que marcaram o ensino da matemática em nosso país, provavelmente influenciaram na formação dos conhecimentos matemáticos (de modo especial da geometria) dos professores pedagogos, pois muitas dessas concepções ainda encontram espaço nos ambientes escolares atuais.

Assim, tem-se que considerar que a atividade docente, muitas vezes pode ser caracterizada "[...] pela utilização de conhecimentos personalizados, saberes oriundos da experiência, enraizados na vivência profissional e que ajudam os docentes a adaptar-se, bem ou mal, ao seu ambiente de trabalho composto e em constantes transformações" (TARDIF; LESSARD, 2009, p. 44). Em outras palavras, é possível que a formação em geometria a qual os professores pedagogos tiveram ao longo da sua trajetória escolar, pode ser um dos conhecimentos acionados por ele durante o processo de ensino da geometria. Logo, se o processo formativo apresentou fragilidades, existe a possibilidade que a condução desse processo de ensino tenha resquícios dessas vulnerabilidades.

2.3.1 A constituição dos saberes de geometria do professor pedagogo

Muitos pesquisadores, a partir de várias perspectivas teórico-metodológicas, têm se preocupado em estudar a base do conhecimento profissional dos professores no exercício da docência. Torna-se importante, nesse contexto, refletir sobre o processo de construção do saberes dos professores pedagogos acerca da geometria e qual o papel que esses conhecimentos desempenham no processo de ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

Segundo Tardif (2002), há certas profissões em que o trabalho é aprendido, muitas vezes, por imitação, repetição, e que estão inseridos num ambiente familiar ou social. Para esse autor "[...] uma boa parte do que os professores sabem sobre o ensino, sobre os papéis dos professores e sobre como ensinar provem de sua própria história de vida, principalmente de sua socialização enquanto alunos" (TARDIF, 2002, p. 68). Ora, os professores antes de começarem a lecionar, ficaram imersos em seu futuro local de trabalho, por aproximadamente

16 anos, contribuindo para a composição de uma bagagem de conhecimentos, de representações, de crenças e de experiências sobre a prática docente.

De acordo com Tardif (2002), essas vivências escolares permanecem fortes e estáveis através dos tempos e que mesmo os cursos de formação inicial não são capazes de fazer com que os professores os abandonem ou os modifiquem. Assim que começam a trabalhar, numa situação de descontrole do processo de ensino, recorrem as suas experiências anteriores, muitas vezes seguindo os perfis de seus antigos professores.

Nessa mesma perspectiva, Marcelo (2009a) aponta que a profissão de professor vai se formando gradativamente a partir de uma aprendizagem informal pela observação de professores, onde "[...] vão recebendo modelos docentes com os quais se vão identificando pouco a pouco, e em cuja identificação influem mais os aspectos emocionais que os racionais" (MARCELO, 2009a, p. 116). Da mesma forma que os futuros professores desenvolvem os seus conhecimentos e crenças gerais acerca das situações de ensino, o conteúdo que ensinarão não fica à margem dessas concepções. "A forma como conhecemos uma determinada disciplina ou área curricular afeta a forma como a ensinamos" (MARCELO, 2009a. p. 118), podendo-se encontrar diferenças de comportamento observáveis em função do domínio do conteúdo a ser ensinado.

É possível ilustrar a posição defendida por Marcelo (2009a) por meio da pesquisa desenvolvida por Curi (2004). Essa autora, com experiência na formação matemática de professores pedagogos, aponta em suas pesquisas, o desconforto apresentado pelas professoras pedagogas frente ao ensino da geometria nos anos iniciais, bem como o desconhecimento dos professores a respeito do desenvolvimento cognitivo propiciado pela aprendizagem da geometria.

> Em seus depoimentos, as alunas-professoras fizeram referências a "conhecimentos novos" para elas, dando grande ênfase aos conteúdos de geometria. Reiteradas vezes destacaram a pouca preparação que tiveram com relação à geometria e enfatizaram que a falta de conhecimentos dos conteúdos relativos a esse assunto as deixava inseguras para ensiná-los. Nas entrevistas, algumas alunas-professoras comentam que estudaram geometria apenas nas aulas de desenho geométrico. Além das falas, em alguns textos de escrita de memórias elas revelaram que pouco estudaram de geometria, que o conhecimento que tinham não era suficiente para ensiná-la a seus alunos e que precisavam se apropriar deles (CURI, 2004, p.139).

Esse testemunho faz pensar que o ensino da geometria, quando comparado a outras áreas do conhecimento matemático, tem sido para os professores, o mais desnorteador, seja pela sua trajetória escolar da educação básica que, como visto anteriormente, esteve e/ou está muitas vezes ausente nas práticas de ensino da educação básica, ou pela pouca atenção dada a esses conhecimentos nos cursos de formação para professores. De qualquer maneira, a falta de conhecimentos dos professores pedagogos sobre a geometria pode afetar na forma de ensiná-la (ou até de não ensiná-la), uma vez que a história de vida dos professores, segundo Tardif (2002), desempenha um papel importante no estilo de ensino desses profissionais.

Entretanto, o saber docente não se compõe apenas das experiências vividas enquanto alunos, ele pode ser considerado um saber plural, compondo-se por diversos saberes originários de diferentes fontes, quais sejam: os saberes profissionais, os saberes das disciplinas, os saberes curriculares e os saberes da experiência (TARDIF *et al*, 1991).

Os saberes profissionais correspondem ao conjunto de saberes pautado nas ciências. Estes são transmitidos aos professores pelas instituições de formação durante o processo de formação inicial ou continuada, considerando que o professor e o ensino são objetos de saber para as ciências humanas e da educação. Contudo, a prática docente para além de ser um objeto das ciências da educação, é também uma atividade que mobiliza muitos saberes, podendo chamá-los de saberes pedagógicos.

Quanto aos saberes das disciplinas, segundo Tardif *et al* (1991), são aqueles correspondentes aos diversos campos do conhecimento que emergem da tradição cultural e dos grupos sociais produtores de saberes. O acesso a esses saberes (matemática, geografia, ciências biológicas, etc...) ocorre por meio das instituições educacionais. Por esse viés, é oportuno perguntar: como tem sido a formação em geometria dos professores pedagogos, tanto em seu aspecto conceitual quanto cognitivo? São aspectos importantes a serem observados quando se fala sobre a formação de professores que estão atuando nos anos iniciais do ensino fundamental.

Os saberes curriculares estão relacionados aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos que se apresentam sob a forma de programas escolares que os professores devem aprender e aplicar. Esses conhecimentos são gerenciados pelas instituições educacionais e devem ser adquiridos pelos estudantes. No contexto político educacional nacional atual, como esses saberes, pertencentes ao campo da geometria, estão dispostos nos programas curriculares e com qual a perspectiva eles vêm sendo explorados nos cursos de pedagogia? Calcula-se ser relevante refletir sobre essa questão quando se trata da formação desses profissionais, que encaminham o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais.

E, finalmente, dentre os diversos saberes que formam o conhecimento docente, os da experiência são aqueles construídos no exercício da atividade profissional dos professores. Esses saberes dizem respeito

> [...] ao conjunto dos saberes atualizados adquiridos e requeridos no quadro da prática docente, e que não provêm das instituições da formação ou dos currículos. [...] eles são saberes práticos (e não da prática: eles não se aplicam à prática para melhor conhecê-la, eles se integram a ela e são partes constituintes dela enquanto prática docente). Eles formam um conjunto de representações a partir das quais o(a)s professore(a)s interpretam, compreendem e orientam sua profissão e sua prática cotidiana em todas as suas dimensões. Eles constituem, poder-se-ia dizer, a cultura docente em ação (TARDIF *et al*, 1991, p. 228).

Os saberes da experiência, de acordo com Tardif *et al* (1991), não podem ser vistos como um fenômeno isolado, eles vinculam-se aos saberes profissionais, aos disciplinares, aos curriculares, bem como estão articulados ao contexto de ensino com múltiplas interações que impõem limites a atuação docente. Esses limites aparecem em situações rotineiras na sala de aula, as quais não são passíveis de definições conclusas, exigindo do professor uma certa dose de improvisação, de habilidade pessoal e de capacidade para enfrentar situações adversas.

As principais características do saber experiencial, de acordo com Tardif (2002), de maneira sucinta, são: um saber experiencial, prático, interativo, sincrético, heterogêneo, complexo, não analítico, aberto, personalizado, existencial, pouco formalizado, temporal e social. Percebe-se, então, que os saberes da experiência diferem-se dos demais, eles são "[...] formados por todos os demais, porém retraduzidos, 'polidos' e submetidos às certezas construídas na prática e no vivido" (TARDIF *et al*, 1991, p. 232). Vale a pena mencionar que, os saberes da experiência adquirem certa objetividade na sua relação crítica com os saberes da formação profissional, dos curriculares e das disciplinas. Isso se justifica pelo fato de a prática docente favorecer tanto o desenvolvimento de certezas advindas da experiência, quanto permitir uma avaliação dos outros saberes.

> O(a)s professore(a)s não rejeitam em sua totalidade os outros saberes; pelo contrário, ele(a)s os incorporam à sua prática, porém retraduzindo-os em categorias do seu próprio discurso. Nesse sentido, a prática aparece como um processo de aprendizagem através do qual o(a)s professore(a)s retraduzem sua formação e a adaptam à profissão, eliminando o que lhes parece inutilmente abstrato ou sem relação com a realidade vivida, e conservando o que pode lhes servir de uma maneira ou de outra (TARDIF *et al*, 1991, p. 231).

A experiência provoca assim uma espécie de releitura dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional docente, agindo como um filtro capaz de selecionar e retomar os saberes num processo de avaliação, contribuindo para a formação "[...] de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana" (TARDIF *et al*, 1991, p. 231). Partindo desse princípio, cabe analisar: como os saberes das disciplinas, em especial da geometria, estão sendo retraduzidos e adaptados aos saberes da experiência do professor pedagogo? Como amenizar esse “peso” que o saber da experiência exerce na prática pedagógica?

Com a apresentação desse panorama foi possível perceber a complexidade do saber docente, tendo em vista que o professor é alguém, “[...] que deve conhecer sua matéria, sua disciplina, o seu programa, que deve possuir certos conhecimentos das ciências da educação e da pedagogia, sem deixar de desenvolver um trabalho prático fundado em sua experiência cotidiana com os alunos” (TARDIF *et al*, 1991, p. 221).

Contudo, encontrou-se em Duarte (2003) algumas críticas com relação à posição defendida por Tardif *et al* (1991) sobre a formação de professores. Para Duarte (2003) a epistemologia da prática profissional de Tardif *et al* (1991), que se preocupa com as investigações dos saberes que os professores utilizam na sua prática, também desvaloriza o papel do conhecimento científico/teórico/ acadêmico na formação do professor e mostra que os cursos de graduação não estão dando conta da formação profissional, justamente por estarem centrados no saber acadêmico, teórico, científico. “[...] o argumento de Tardif visa justamente a solapar a valorização do conhecimento teórico, acadêmico, científico, visa a mostrar que esse tipo de conhecimento ‘não vale nada do ponto de vista da ação profissional’” (DUARTE, 2003, p. 605-606).

Diante desse conflito e da complexidade do saber docente, não se pode deixar de trazer outros autores que também vêm se dedicando ao estudo dos saberes necessários à docência, dentre eles, destaca-se o psicólogo educacional Lee Shulman. Este autor distingue três categorias de conhecimentos presentes no desenvolvimento cognitivo do professor: conhecimento do conteúdo, conhecimento curricular e conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986).

O conhecimento do conteúdo refere-se aos conteúdos específicos do componente curricular que o professor leciona. “Este conhecimento se apoia em duas bases: nos livros e nos estudos acumulados historicamente em cada uma das disciplinas; e, no saber acadêmico histórico e filosófico sobre a natureza do conhecimento nesses campos do estudo” (SHULMAN, 2005, p. 12). Diz respeito tanto às compreensões de fatos, conceitos, processos, procedimentos de uma área específica de conhecimento quanto àquelas relativas à construção dessa área. Logo, tendo como pressuposto que o professor faz parte da comunidade acadêmica, ele deve ser capaz de compreender as estruturas do conteúdo, dos princípios da organização conceitual e dos princípios de investigação.

> O professor não precisa apenas de compreender que algo é assim; o professor tem de compreender melhor por que razão é assim, com que fundamentos se pode afirmar o seu mandado e em que circunstâncias a nossa crença na sua justificação pode ser enfraquecida e até negada. Além disso, esperamos que o professor compreenda porque razão um determinado conteúdo é particularmente central para uma disciplina, enquanto outro pode ser um pouco periférico (SHULMAN, 1986, p. 9).

Assim, pode-se depreender que o professor pedagogo precisa compreender que existem várias maneiras de organização do ensino da geometria, bem como os fundamentos pedagógicos para selecionar alguns em certas circunstâncias e outros em contextos diferentes. Ele também precisa compreender a sintaxe da geometria, pois “os professores têm uma responsabilidade especial no conhecimento dos conteúdos da disciplina, uma vez que eles são a principal fonte de compreensão da matéria para os alunos” (SHULMAN, 2005, p. 12). Mas, não basta ter conhecimento do conteúdo, simplesmente, para dizer se uma resposta está certa ou errada.

Logo, é preciso ter uma noção firme do conteúdo para que o professor possa gerenciar o processo cognitivo de aprendizagem dos alunos, fazendo assim com que compreendam o que é ensinado. Os equívocos dos alunos têm de ser investigados, “[...] sondados e respondidos pelo professor para promover a aprendizagem. O conhecimento do conteúdo ajuda o professor a ver qual é o objetivo na perspectiva do aluno e a reconhecer a lógica interna das perguntas e respostas dos alunos” (BUCHMANN, 1984, p. 8). Essa atenção dada pelos professores aos alunos, considerando-os como seres pensantes capazes de formularem hipóteses, exige uma mudança de postura que, diga-se de passagem, é muito mais complexa, pois exige o entendimento e o direcionamento da vida mental dos alunos.

Contudo, pode ser que a reflexão, a observação, as informações gerais e experiência pessoal talvez não sejam capazes de superar a falta de conhecimento em geometria nas atividades pedagógicas, pois conhecer e gerenciar o conteúdo geométrico com fluição vai depender, dentre outros fatores, do aprofundamento teórico conceitual. “Conhecer algo permite-nos ensiná-lo; conhecer um conteúdo em profundidade significa que, de uma maneira geral, se está mentalmente organizado e bem preparado para ensiná-lo” (BUCHMANN, 1984, p.12). Pode-se ousar dizer que quando um professor não possui os conhecimentos necessários para ensinar a geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, corre-se o risco de que a condução do processo de aprendizagem desse conhecimento não aconteça da forma desejada.

Segundo Marcelo (2009b), “o conhecimento que os formadores possuem do conteúdo a ensinar também influencia *o quê* e *como* o ensinam” (MARCELO, 2009b, p. 19, grifos do autor). Ou seja, o conhecimento que o professor pedagogo possui sobre geometria, irá determinar as suas escolhas de conteúdos e de maneiras de ensinar.

Mas, para os professores, embora o conhecimento do conteúdo seja necessário ao ensino, ele, por si só não é suficiente, pois não garante que o mesmo seja ensinado e aprendido com sucesso. No fazer docente, outros conhecimentos são importantes, como por exemplo, o conhecimento curricular. Esse conhecimento, para Shulman (1986), representa o arcabouço dos programas destinados para o ensino dos conteúdos em um determinado nível de ensino, pelos materiais didáticos disponíveis e pelo conjunto de características que servem tanto como indicações como contraindicações para a utilização de determinados conteúdos curriculares.

Dessa maneira, o conhecimento do currículo permite ao professor entender e dominar os materiais e programas que servem como "[...] 'ferramentas para o ofício' do professor" (SHULMAN, 2005, p. 11). Esse autor indica que o currículo e os materiais associados "[...] são a *matéria médica* da pedagogia, a farmacopeia da qual o professor retira os instrumentos de ensino que apresentam ou exemplificam conteúdos particulares e corrigem ou avaliam a adequação das realizações dos alunos" (SHULMAN, 1986, p. 10, grifos do autor). A nosso ver, cabe pensar, no contexto atual, na relação do professor pedagogo com as orientações curriculares para o ensino da matemática nos anos iniciais, de modo especial, a geometria apresentada na BNCC (BRASIL, 2017).

Desde a aprovação desse documento (BNCC), tem-se observado uma correria desenfreada por parte das secretarias de educação para implantar a nova base, que, conforme já abordado anteriormente, tem como objetivo principal o desenvolvimento de competências e habilidades que, no nosso entender, trata-se de um ensino com um viés mais técnico do que pedagógico. Posto que, os conteúdos matemáticos parecem estar dispostos de maneira fragmentada, em blocos de conhecimentos que não consideram o viés semiocognitivo para a aprendizagem da matemática.

Nesse cenário, qual a formação que o professor pedagogo dispõe sobre a estrutura dos conhecimentos de geometria propostos para os anos iniciais do ensino fundamental indicados pela BNCC? Espera-se que o professor compreenda as alternativas curriculares

disponíveis para o ensino, bem como esteja familiarizado com os materiais curriculares estudados pelos seus alunos noutras disciplinas concomitantemente. "Este conhecimento curricular lateral [...] é subjacente à capacidade do professor de relacionar o conteúdo de um determinado curso ou aula com temas ou questões em discussão simultaneamente noutras aulas" (SHULMAN, 1986, p. 10).

Dando continuidade as categorias explicitadas por Shulman (1986), temos o conhecimento pedagógico do conteúdo, que, segundo ele, vai além do conhecimento do conteúdo em si, e alcança a dimensão do conhecimento da matéria *para o ensino*, sendo considerado um tipo de conhecimento profissional específico dos professores, pois ele

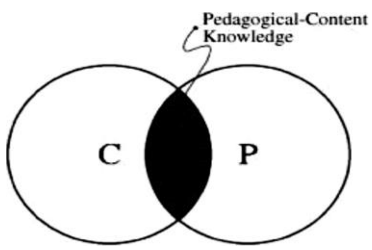
> [...] incorpora os aspectos do conteúdo mais relevantes para serem estudados. Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para a maioria dos tópicos regularmente ensinados de uma área específica de conhecimento, as representações mais úteis de tais ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. [...] também inclui uma compreensão do que torna a aprendizagem de tópicos específicos, fácil ou difícil: as concepções e preconcepções que os estudantes de diferentes idades e origens trazem consigo para as situações de aprendizagem dos temas e lições, frequentemente, mais ensinados (SHULMAN, 1986, p. 9).

Se as concepções apresentadas pelos alunos estiverem incorretas, os professores precisam conhecer e mobilizar estratégias que sejam capazes de reorganizar a compreensão dos mesmos. “Como não existem formas de representação mais poderosas, o professor deve ter à mão um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam da investigação, enquanto outras têm origem na sabedoria da prática” (SHULMAN, 1986, p. 9).

O exercício profissional dos professores contribui para a construção de um novo tipo de conhecimento que é melhorado por outros conhecimentos e que é denominado por Shulman (1986) de conhecimento pedagógico do conteúdo. Esse é o único conhecimento no qual o professor desempenha um papel de protagonista, uma vez que, esse papel é de sua autoria. “[...] cada professor constrói idiossincraticamente seu ideário pedagógico a partir de pressupostos teóricos e de sua reflexão sobre a prática” (FIORENTINI, 1995, p. 3).

A capacidade de transformação do conteúdo é que distingue um professor de um especialista da matéria, fazendo a intersecção entre o conteúdo e a pedagogia, como é apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Intersecção entre o Conhecimento Pedagógico e o Conhecimento do Conteúdo.



Fonte: Mishra e Koehler (2006)

Assim,

> [...] a chave para distinguir a base de conhecimento para o ensino está na intersecção da matéria e da didática, e na capacidade do professor transformar seus conhecimentos da matéria em formas que são didaticamente impactantes e ainda adaptáveis à variedade de habilidades e bagagens que apresentam seus alunos (SHULMAN, 2005, p. 21).

Shulman (2005) explicita quatro fontes principais do conhecimento base para o ensino: a formação acadêmica na disciplina a lecionar (no caso do pedagogo, ele precisa ter o conhecimento específico dos conteúdos de todos os componentes curriculares); as estruturas e materiais didáticos (currículos, testes, instituições com suas regras e funções, sindicato de professores, entidades governamentais com as orientações educacionais – contexto que pode facilitar ou inibir as iniciativas pedagógicas); literatura educativa especializada (procura compreender os processos de escolarização, ensino e aprendizagem, bem como os fundamentos normativos, filosóficos e éticos da educação); e, por último, a sabedoria adquirida com a prática (é a menos codificada de todas, diz respeito aos princípios básicos que orientam a prática dos professores).

Essas fontes do conhecimento base são acionadas, relacionadas e construídas durante o processo de ensino e aprendizagem sob a perspectiva do professor, e requerem dele, processos de raciocínio sobre o conteúdo para o ensino que estão em reestruturação contínua. Partindo dessa ideia, Shulman (2005) apresenta o Modelo de Raciocínio Pedagógico e Ação (MRPA) que acontece por meio de um ciclo de atividades de compreensão, transformação, ensino, avaliação, reflexão e nova compreensão. Essas etapas ocorrem no desenvolvimento da prática profissional do professor, particularmente, frente a um determinado conteúdo, e consistem num modelo dinâmico e cíclico de reflexão e ação docente.

Para Shulman (2005), o ato de ensinar parte da compreensão crítica de um conjunto de ideias a serem ensinadas pelo professor. Os professores necessitam, para além da compreensão pessoal do conteúdo, possuir a compreensão dos objetivos, das estruturas do conteúdo, das ideias dentro e fora da disciplina. “Esperamos que ele compreenda o que está a ensinar e, quando possível, que o faça de diversas formas. Tem de compreender como uma determinada ideia se relaciona com outras ideias do mesmo assunto e também com ideias de outros assuntos” (SHULMAN, 2005, p. 19).

Dessarte, pode-se inferir que os professores pedagogos precisam mais do que uma compreensão pessoal da geometria. Eles necessitam uma compreensão especializada desse conhecimento, permitindo-lhes criar condições para que seus alunos aprendam. Com efeito, quando se aprende, por exemplo, geometria, o professor deve conhecê-la em profundidade, em todos os seus aspectos teóricos, filosóficos, históricos, epistemológicos, cognitivos e metodológicos para que possa ensiná-la.

A partir da compreensão especializada do conhecimento, estas devem ser transformadas para que possam ser ensinadas. O processo de transformação, essência do ato do raciocínio pedagógico, envolve a combinação de cinco subprocessos pelos quais o professor migra de uma compreensão pessoal, possibilitando assim a compreensão dos alunos.

> 1) preparação (dos materiais do texto dado), incluindo o processo de interpretação crítica; 2) representação de ideias sob a forma de novas analogias, metáforas, etc. 3) seleções didáticas de uma série de métodos e modelos de ensino; 4) adaptação destas representações às características gerais das crianças a ensinar; e 5) adaptação às características específicas de cada criança da turma (SHULMAN, 2005, p. 21).

Pode-se pensar que a união desses processos de transformação resulta num conjunto de estratégias a serem utilizadas pelo professor pedagogo na apresentação da geometria para as crianças dos anos iniciais. Por exemplo, a escolha de matérias manipuláveis ou não, as analogias a serem utilizadas nas representações dos objetos geométricos, os modelos de ensino mais profícuos, as adaptações a serem realizadas dependendo das características da turma, do nível de dificuldade etc. Até agora acontecerá apenas um ensaio do ato de ensinar. Logo, “o raciocínio pedagógico faz tanto parte do ensino como do próprio ato de ensinar” (SHULMAN, 2005, p. 23), que não finda quando o ensino começa.

O ensino no MRPA, de acordo com Shulman (2005), diz respeito ao desempenho observável do professor na diversidade das atividades pedagógicas, incluindo os aspectos essenciais do ensino: organização e gestão da aula; interação com os alunos individualmente e em grupos através de perguntas e sondagens, respostas e reações, elogios e críticas; coordenação das atividades de aprendizagem; explicações; questionamentos; humor; disciplina, ensino por descoberta ou por investigação, assim como todas as características observáveis de ensino na sala de aula.

Shulman (2005) traz como exemplo de uma situação de ensino, a descrição da performance da professora Collen em sala de aula. Ele relata que Collen, ao lecionar um determinado conteúdo, sentia-se confiante no domínio do mesmo, promovendo aulas interativas, baseadas na discussão, argumentação, levantamento de hipóteses etc. Contudo, algumas semanas depois, Collen precisou dar aula sobre um conteúdo que ela se sentia insegura. Sua maneira de conduzir a aula foi completamente diferente, parecia ser outra professora. O seu estilo interativo foi substituído por aulas repetitivas, num ritmo acelerado e controlado, evitando olhar diretamente para os alunos, não oferecia oportunidades para que fizessem perguntas e não propunha visões alternativas. Esse exemplo mostra como a atitude pedagógica “[...] está intimamente ligada à compreensão e à transformação da compreensão. As técnicas de instrução flexíveis e interativas que utiliza simplesmente não lhe são aplicáveis quando não compreende o assunto que deve ensinar” (SHULMAN, 2005, p. 25).

A história de Collen também pode ser observada na condução do ensino da geometria pelos professores pedagogos nos anos iniciais, uma vez que, quando comparado a outras áreas do conhecimento matemático, ele tem sido, para os professores, o mais desnorteador. De acordo com Lorenzato (1995), são inúmeras as causas para essa desorientação e, consequentemente, para a omissão do ensino da geometria nos anos iniciais. Porém, ele destaca duas razões que estão atuando forte e diretamente na sala de aula:

> A primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. [...] uma pesquisa realizada com 255 professores de 1ª/4ª séries com cerca de 10 anos de experiência de magistério: submetidos a 8 questões (propostas por alunos) referentes à Geometria plana euclidiana (conceitos de ângulo, paralelismo, perpendicularismo, círculo, perímetro, área e volume), foram obtidas 2040 respostas erradas, isto é, o máximo possível de erros. E mais: somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos. [...] A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos (LORENZATO, 1995, p. 3-4).

Como consequência dessa situação, o professor que não conhece geometria também não pode conhecer a importância que ela exerce como facilitadora dos processos mentais, valorizando o descobrir, o conjecturar e o experimentar. Nessa perspectiva, tudo indica que esses professores têm como dilema tentar ensinar geometria sem conhecê-la, ou seja, um ensino às cegas sem embasamento teórico que sustente e conduza o processo de aprendizagem. Ou então, têm como segunda opção, não ensiná-la. Como alguém pode ensinar aquilo que não conhece? Essa pode ser mais uma das razões para o atual esquecimento e deficitário ensino da geometria nos anos iniciais.

> É possível considerar que os futuros professores concluem cursos de formação sem conhecimentos de conteúdos matemáticos com os quais irão trabalhar, tanto no que concerne a conceitos quanto a procedimentos, como também da própria linguagem matemática que utilizarão em sua prática docente. Em outras palavras, parece haver uma concepção de que o professor polivalente não precisa ‘saber Matemática’ e que basta saber como ensiná-la (CURI, 2004, p. 76-77).

O professor pedagogo necessita ter um conhecimento profundo da geometria a ser ensinada e dos processos cognitivos acionados durante o processo de aprendizagem, para poder conduzir o ensino da geometria nesse nível de ensino.

No MRPA existe também, de acordo com Shulman (2005), a avaliação da compreensão dos alunos, que ocorre durante o processo interativo de ensino por vias informais e após as aulas pelas formas mais sistemáticas de avaliação. Para além da avaliação das compreensões e incompreensões dos alunos, faz-se necessário uma avaliação do próprio desempenho do professor e a capacidade de adaptar-se às experiências, conduzindo a um ato de reflexão.

Na reflexão, o professor revisa e analisa a ação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem, fundamentado num conhecimento analítico. Nesse processo ele "[...] reconstrói, refaz e/ou experimenta os acontecimentos, emoções e realizações" (SHULMAN, 2005, p. 25), proporcionando a aprendizagem e considerando a experiência. Um aspecto importante no processo reflexivo é a revisão do ensino, quando os objetivos traçados não foram atingidos.

Por meio da reflexão chega-se a um novo começo, ou seja, uma nova compreensão dos objetivos, dos conteúdos de ensino, dos alunos, do próprio professor e de outros conhecimentos de base para o ensino. "O novo entendimento não ocorre automaticamente, mesmo após avaliação e reflexão. Para que tal aconteça, são necessárias estratégias específicas de documentação, análise e discussão" (SHULMAN, 2005, p. 26).

Segundo Shulman (2005), apesar dos processos no MRPA aparecerem de forma sequencial, eles não se destinam a representar uma série de etapas, ou fases fixas, pois muitas vezes esses processos podem ocorrer em ordem diferente, ou mesmo, alguns nem aparecerem nas situações de ensino. Porém, o professor deve ter a capacidade de poder participar de cada um desses processos, proporcionando aos alunos as formas de compreensão e raciocínio que necessitarão para progredir nas aprendizagens.

> O conceito de raciocínio pedagógico enfatiza a base intelectual para o desempenho dos professores e não somente o comportamento. Para que esta noção seja levada a sério, será necessário rever tanto a organização e o conteúdo dos programas de formação de professores como a definição das suas bases acadêmicas (SHULMAN, 2005, p. 27).

A formação do professor pedagogo para o ensino da geometria nos anos iniciais não pode, a nosso ver, restringir-se ao *como ensinar*, mas precisa estar fundamentada em bases conceituais consistentes que sejam capazes de fundamentar a prática pedagógica do mesmo. A contribuição de Shulman (1986) em recuperar o "Paradigma Perdido", retrata a importância do conhecimento específico do conteúdo dos professores, porém, atrelado à sua dimensão didática. Essa transformação do conteúdo em formas didaticamente poderosas é o que Shulman (1986) denomina de conhecimento pedagógico do conteúdo. A necessidade de recuperar o "Paradigma Perdido", nas palavras de Shulman (1986), faz transparecer que o modelo vigente para a formação do professor pedagogo precisa ser revisto, o que fundamenta a proposta metodológica, adotada neste trabalho, situada no campo das análises preliminares na perspectiva do pesquisador [1].

2.3.1.1 As categorias de conhecimentos necessários à docência a partir da proposta de Shulman

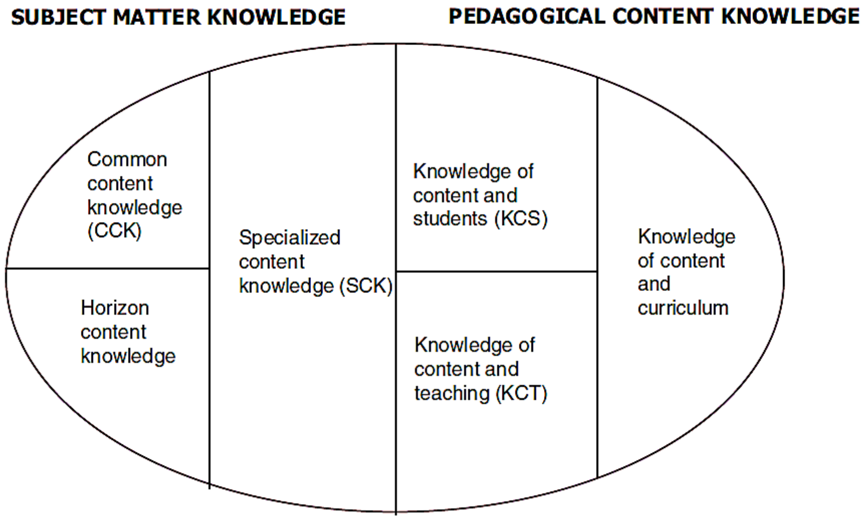
As pesquisas embasadas nas propostas de Shulman (1986) continuam gerando frutos, demonstrando quão promissoras foram suas ideias. Pesquisadores procuram incansavelmente desvendar esse campo complexo dos conhecimentos necessários à docência. Merecem destaque os trabalhos de Ball, Thames e Phelps (2008) que procuraram estender, direcionar e aprofundar o modelo desenvolvido por Shulman (1986), do conhecimento pedagógico do conteúdo, para o ensino da matemática, ao introduzir o conceito de "Conhecimento Matemático para Ensinar" (MKT)[12], deixando claro que saber matemática, para o ensino, exige um saber específico que vai além do simples domínio de técnicas de resolução de cálculos.

> Por "conhecimentos matemáticos para o ensino", entendemos os conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensino da matemática. É importante observar aqui que nossa definição começa com o ensino, não com os professores. Ela diz respeito às tarefas envolvidas no ensino e às demandas matemáticas destas tarefas. Porque o ensino envolve mostrar aos estudantes como resolver problemas, respondendo às perguntas dos alunos e verificando o seu trabalho, isso exige uma compreensão do conteúdo do currículo escolar (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395).

Esses autores propuseram um modelo composto por domínios do conhecimento matemático para o ensino (representado na Figura 3), que segundo eles, está em sintonia com as categorias iniciais de Shulman (1986), do conhecimento da matéria e do conhecimento pedagógico do conteúdo.

[12] Knowing Mathematics for Teaching.

Figura 3 - Domínios de conhecimento matemático para o ensino[13].



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008)

Na categoria do conhecimento da matéria, Ball, Thames e Phelps (2008), distinguem três subdomínios: conhecimento comum do conteúdo (CCK), conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e conhecimento do horizonte matemático. O domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo leva em consideração, o conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS), conhecimento do conteúdo e ensino (KCT), e conhecimento do currículo.

O conhecimento comum do conteúdo (CCK) é definido "[...] como os conhecimentos e habilidades matemáticas utilizadas em ambientes além do ensino" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 399). Em outras palavras, refere-se ao conhecimento matemático colocado em jogo por qualquer pessoa para resolver problemas matemáticos, portanto ele não é exclusivo do ensino e pode ser utilizado numa grande variedade de ambientes.

O conhecimento do conteúdo do horizonte "[...] é a consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da extensão da matemática no currículo. [...] Também inclui a visão útil de ver conexões com ideias matemáticas muito posteriores" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403). Por exemplo, os professores do 4º ano precisam saber como os conteúdos de geometria, abordados nesse nível de ensino, estão relacionados com a geometria que aprenderão no ano seguinte, permitindo que sejam capazes de definir a base do conhecimento para o que virá depois.

[13] Traduções das siglas da figura: Knowing Mathematics for Teaching (MKT) (conhecimento matemático para ensinar), Common Contente knowledge (CCK) (conhecimento comum do conteúdo), Specialized Contente knowledge (SCK) (conhecimento especializado do conteúdo), Knowledge of Content and Students (KCS) (conhecimento do conteúdo e dos alunos), Knowledge of Content and Teaching (KCT) (conhecimento do conteúdo e ensino).

No conhecimento especializado do conteúdo (SCK), encontra-se um tipo de conhecimento matemático que é específico para a habilidade do ensino, não sendo necessário em outros ambientes extraescolares. Ele é definido como:

> [...] o conhecimento matemático que permite que os professores se envolvam em determinadas tarefas de ensino, incluindo como representar com precisão ideias matemáticas, fornecer explicações matemáticas para regras e procedimentos comuns, e examinar e compreender métodos incomuns de solução de problemas (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p. 377-378).

Quando os professores procuram compreender os erros dos alunos ou analisar se um procedimento de resolução funcionaria em outras situações, ele desempenha um papel específico que outros não o fazem, o que seria uma espécie de desempacotamento da matemática. Por exemplo, o engenheiro precisa compreender as propriedades de um triângulo nos projetos de construção, mas ele não precisa explicar as relações existentes entre lados e ângulos de um triângulo. Essa tarefa é algo que os professores fazem rotineiramente, e "[...] exigem compreensão e raciocínio matemáticos únicos. Ensinar requer conhecimento além do que é ensinado aos alunos" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 400).

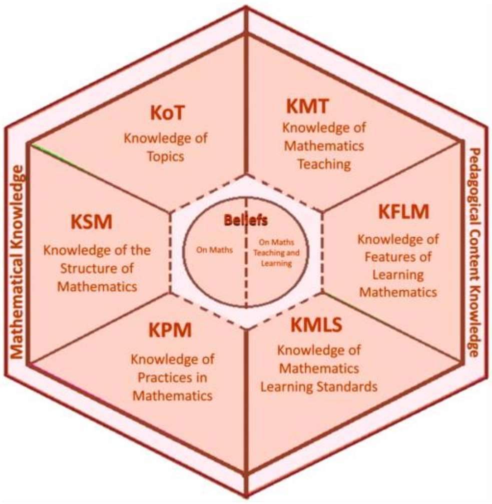
O domínio que combina conhecimento sobre estudantes e conhecimento de matemática, é denominado de conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS). Esse"[...] se concentra na compreensão dos professores sobre como os alunos aprendem um conteúdo específico" (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p. 378). Os professores devem prever o que os alunos provavelmente pensarão e o que acharão confuso no desenvolvimento de um conteúdo ou de uma tarefa, sendo capazes de ouvir e interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos, tendo conhecimento das concepções e equívocos comuns destes sobre um determinado conteúdo matemático (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Exemplificando, saber que os alunos muitas vezes não reconhecem um quadrado como sendo um retângulo e um losango, permite ao professor, que já viu isso acontecer, identificá-lo como uma resposta comum sem uma extensa análise matemática.

O conhecimento do conteúdo e ensino (KCT) combina conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre matemática. A partir do raciocínio dos alunos e das estratégias por eles utilizadas, o professor deve saber construir processos relevantes para lidar e corrigir os erros e equívocos, avaliando "[...] as vantagens pedagógicas e desvantagens das representações usadas para ensinar uma ideia específica e identificar quais os diferentes métodos e procedimentos de ensino" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401). Tal como, conhecer os diferentes modos de representação de um triângulo, sabendo o que cada uma dessas formas é capaz de revelar e como implementá-lo de forma exitosa, requer uma interação entre o conhecimento matemático específico e o conhecimento de questões pedagógicas que afetam o aprendizado dos alunos.

A concepção de conhecimento curricular no modelo do conhecimento matemático para ensinar (MKT), proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), coincide com a proposta de Shulman (1986), de que esse conhecimento é representado pela compreensão dos programas de ensino e dos materiais didáticos disponíveis, constituindo-se como ferramentas de trabalho para os professores.

Reinterpretando a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo apresentada por Shulman (1986), reconfigurando o conhecimento matemático para ensinar proposto por Ball, Thames e Phelps (2008) e propondo uma nova forma de conceituar a noção de especialização, Carrillo *et al* (2018) introduzem o modelo de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS)[14]. Esse modelo apresenta o conhecimento do professor em três domínios distintos: conhecimento matemático, conhecimento pedagógico do conteúdo e as crenças, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 4- Modelo de conhecimento especializado do professor de matemática[15].



Fonte: Carrillo *et al* (2018).

[14] The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model (MTKS).

[15] Significado das siglas da figura: Mathematical knowledge (conhecimento matemático) (MK), Knowledge of Topics (KoT) (conhecimento dos temas), Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) (conhecimento da estrutura da matemática), Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) (conhecimento da prática matemática), Pedagogical Content Knowledge (PCK) (conhecimento pedagógico do conteúdo), Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM) (conhecimento das características da aprendizagem matemática), Knowledge of Mathematics Teaching (conhecimento do ensino da matemática) (KMT), Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) (conhecimento dos padrões de aprendizagem de matemática).

No domínio do conhecimento matemático (MK) é considerado o conhecimento possuído por um professor de matemática em termos de disciplina científica no contexto educacional, reconhecendo as diferenças entre a "matemática por si só e a matemática escolar" (CARRILLO *et al*, 2018). O conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) consiste no conhecimento relacionado ao conteúdo matemático nos processos de ensino e aprendizagem. As crenças sobre a matemática e sobre o seu ensino e aprendizagem estão representadas no centro da figura, a fim de destacar a correlação entre as crenças e os domínios do conhecimento.

O domínio do conhecimento matemático do professor foi subdividido em três subdomínios: conhecimento dos temas (KoT), conhecimento da estrutura da matemática (KSM) e conhecimento da prática matemática (KPM).

O conhecimento de temas (KoT) compreende um conhecimento profundo de tópicos matemáticos, incluindo "[...] a fenomenologia e aplicações de um conteúdo, os procedimentos, definições, propriedades e seus fundamentos, e os diferentes registros de representação" (MONTES *et al*, 2019, p. 162), reconhecendo a complexidade dos objetos matemáticos.

O conhecimento da estrutura da matemática (KSM) descreve o conhecimento do professor sobre as conexões entre os itens matemáticos associados a um aumento de complexidade ou com simplificação (que permitem ver um conteúdo elementar a partir de uma perspectiva avançada, como um conhecimento avançado a partir de uma perspectiva elementar); conexões auxiliares (permite a participação necessária de um conceito ou procedimento no trabalho com outros conteúdos, ou seja, em processos maiores) e as conexões transversais (quando diferentes itens de um conteúdo matemático têm características em comum) (CARRILLO *et al*, 2018).

O conhecimento da prática matemática (KPM) consiste no conhecimento das formas características de proceder no trabalho matemático, concentrando-se nos meios de produção e funcionamento matemático, podendo ser geral ou específico para um tema. O KPM geral inclui conhecimento sobre como a matemática desenvolvida além de qualquer conceito particular, diz respeito ao conhecimento empregado na realização de tarefas matemáticas gerais (provas, definições, proposições...), e dos processos associados à resolução de problemas (heurística). O KPM específico é um exemplo particular de KPM geral associado às peculiaridades do tópico em questão, é o conhecimento sobre a aplicação de estratégias heurísticas a tópicos específicos (CARRILLO *et al*, 2018).

Para o modelo MTKS o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), proposto por Shulman (1986), representa apenas parte do conjunto de conhecimentos para o ensino, devendo ser completado pelo conhecimento matemático. "Operando em conjunto, eles informam e orientam as decisões e ações que o professor deve tomar no curso de seu ensino" (CARRILLO *et al*, 2018, p. 10). Sendo assim, Carrillo *et al* (2018) apresentam três subdomínios para o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK).

O **primeiro** é o conhecimento das características da aprendizagem matemática (KFLM) "[...] reflete o conhecimento que o professor possui e que tem desenvolvido sobre como o conteúdo matemático é aprendido e pensado, assim como as maneiras pelas quais os alunos interagem com cada conteúdo" (CATALÁN *et al*, 2015, p. 597). Envolve o conhecimento das teorias, pessoais ou institucionais, de aprendizagem da matemática; dos pontos fortes e as dificuldades associados a cada conteúdo; das diferentes maneiras que os alunos interagem com o conteúdo matemático e dos aspectos emocionais da aprendizagem da matemática (expectativas e interesses que os estudantes têm em relação aos conteúdos matemáticos).

O **segundo** é o conhecimento do ensino da matemática (KMT), que envolve o conhecimento sobre as potencialidades e limitações das atividades e estratégias para o ensino de um conteúdo; das teorias de aprendizagem da matemática; das diferentes maneiras de representar conteúdos específicos e dos recursos didáticos (físicos ou digitais). Para além da mera consciência desses recursos e de como eles são utilizados, esse conhecimento engloba a avaliação crítica de como eles podem melhorar o ensino (CARRILLO *et al*, 2018).

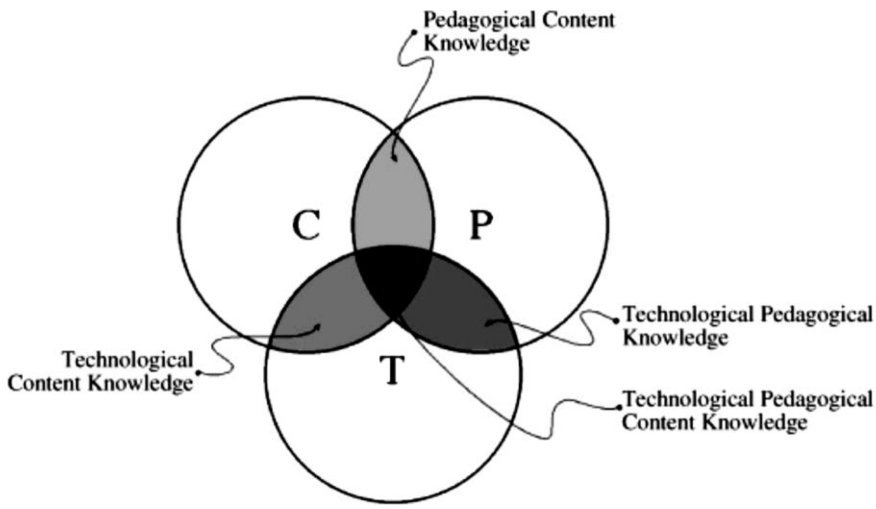
O **terceiro** é o conhecimento dos padrões de aprendizagem de matemática (KMLS) que se refere aos conhecimentos do professor sobre o currículo, ou seja, a tudo que o aluno deve ou é capaz de aprender num determinado nível de ensino, dando prosseguimento ao que ele estudou anteriormente e as especificações para os níveis subsequentes.

O modelo MTKS tem consciência de que a prática de sala de aula do professor de matemática é profundamente influenciada por um conjunto de concepções e crenças referentes à matemática (instrumentalista, platônica e de resolução de problemas) e a tendências didáticas (tradicional, tecnológica, espontânea e investigativa). O conhecimento da maneira como a matemática é aprendida e como ela deve ser ensinada, permeia cada um dos subdomínios do modelo MTKS.

Outro desdobramento embasado nas propostas de Shulman (1986) que merece destaque, são os trabalhos de Mishra e Koehler (2006). Esses autores partem das categorias de conhecimento de Shulman (1986) e acrescentam a elas o conhecimento tecnológico como um tipo de conhecimento a ser construído pelo professor. Nesse modelo, denominado por Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo (TPCK)[16], Mishra e Koehler (2006) defendem a hipótese de que apenas introduzir a tecnologia no processo educativo não é suficiente, é preciso analisar como ela é utilizada e quais são os conhecimentos que os professores devem construir a fim de incorporá-la nos processos de ensino e de aprendizagem.

De acordo com Mishra e Koehler (2006), as complexas funções e a interação entre os três componentes principais dos ambientes de aprendizagem – conteúdo (formação acadêmica que o professor necessita para lecionar), pedagogia (processos e práticas de ensino e aprendizagem com finalidades educacionais globais) e tecnologia (habilidades necessárias para operar com tecnologias) – são centrais para o desenvolvimento de um bom ensino. Da interação desses componentes surge um olhar para as relações estabelecidas aos pares, como representado na Figura 5.

Figura 5- Esquema do Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo (TPCK).



Fonte: Mishra e Koehler (2006)

A categoria do conhecimento do conteúdo tem sua abordagem fundamentada nas ideias de Shulman (1986), referindo-se à formação acadêmica que o professor necessita para lecionar. Ou seja, os professores devem conhecer e entender os assuntos que ensinam, bem como os conceitos, fatos, teorias, estruturas e procedimentos centrais que organizam e conectam as ideias.

[16]Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) - Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo.

O conhecimento pedagógico trata dos processos e práticas de ensino e aprendizagem com finalidades educacionais globais. Nesse conhecimento estão envolvidas as questões de aprendizagem dos estudantes, gestão da sala de aula, desenvolvimento e implementação de planos de aula, avaliação, conhecimento sobre técnicas ou métodos de ensino, compreensão cognitiva e social, e conhecimento de teorias da aprendizagem.

O conhecimento tecnológico está relacionado às habilidades necessárias para operar com tecnologias padrão (livros, giz, lousa...) e tecnologias mais avançadas (internet, *hardware* de computador, processadores de texto, planilhas eletrônicas, navegadores, *e-mail*...). Inclui também o conhecimento de como instalar e remover dispositivos, programas de *software* e de como criar documentos de arquivo, adaptando-se sempre que necessário as novas mudanças tecnológicas.

O conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK)[17] assemelha-se as ideias de Shulman (1986), associando os conhecimentos pedagógicos gerais com uma área específica. Inclui saber decidir qual a melhor abordagem de ensino para conteúdos específicos, como gerir uma aula, qual estratégia de ensino e quais representações são apropriadas para abordar as dificuldades dos alunos e favorecer uma compreensão significativa. "A PCK está preocupada com a representação e formulação de conceitos, técnicas pedagógicas, conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender, conhecimento dos conhecimentos anteriores dos estudantes e teorias de epistemologia" (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1027).

O conhecimento tecnológico do conteúdo (TCK)[18] é a relação recíproca estabelecida entre a tecnologia e determinado conteúdo. Os professores precisam conhecer as novas formas de representação dos conteúdos, as limitações e possibilidades permitidas pela tecnologia.

O conhecimento pedagógico tecnológico (TPK)[19] é a maneira como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas nos processos de ensino e aprendizagem, bem como, quais serão os possíveis resultados desse uso. O professor precisa ter o entendimento das mudanças ocasionadas pela inserção das tecnologias nos processos de construção do conhecimento, da relação do aluno com o saber e da gestão da sala de aula.

Na intersecção dos três conhecimentos, emerge o modelo do conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo (TPCK), que vai além da simples integração dos seus três componentes, isoladamente (conteúdo, pedagogia e tecnologia), para assumir as

---

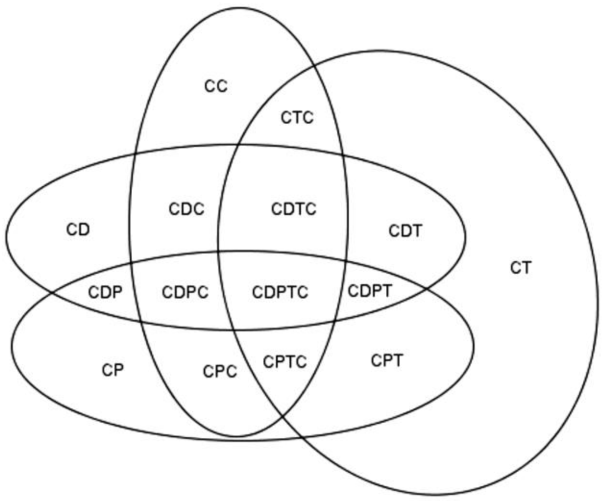
[17] Pedagogical Content Knowledge (conhecimento pedagógico do conteúdo) (PCK).
[18]Technological Content Knowledge (conhecimento tecnológico do conteúdo) (TCK).
[19] Technological Pedagogical Knowledge (conhecimento pedagógico tecnológico) (TPK).

complexas relações existentes entre esses elementos-chave. "Este conhecimento não seria tipicamente detido por especialistas da matéria científico-tecnológica, ou por tecnólogos que conhecem pouco da matéria ou da pedagogia, ou por professores que conhecem pouco da matéria ou da tecnologia" (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1029). Segundo os autores, esse conhecimento (TPCK) requer: a compreensão da representação de conceitos e técnicas pedagógicas que utilizam a tecnologia; o entendimento de como a tecnologia pode ajudar os alunos a superar as suas dificuldades; e a percepção de como as tecnologias podem ser utilizadas para construir novos conhecimentos a partir do existente e para desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas.

Assumindo as concepções de Mishra e Koehler (2006), Silva e Lima (2015) ao analisarem um curso de licenciatura em matemática, na modalidade a distância, tomam o modelo conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo sob um viés matemático e acrescentam a ele o conhecimento didático. Os autores definem o conhecimento didático como aquele que é relacionado especificamente aos processos de ensino e aprendizagem da matemática, contemplando as teorias, os processos e práticas que dizem respeito a essa disciplina.

Silva e Lima (2015) representam as categorias de conhecimentos por meio de um diagrama, definindo os conhecimentos associados a cada uma e os relacionamentos entre eles a partir das suas intersecções, verificando possíveis lacunas na formação inicial de professores de matemática.

Figura 6 - As diferentes categorias de conhecimentos docentes.



Fonte: Silva e Lima (2015)

Sintetizando as categorias de conhecimentos docentes apresentadas por Silva e Lima (2015), tem-se: o conhecimento do conteúdo (CC) que está relacionado à formação acadêmica do professor de matemática, visto que ele deve compreender e ser capaz de articular os conteúdos matemáticos; o conhecimento pedagógico (CP), que consiste nos processos e práticas ou métodos de ensino e de aprendizagem de maneira global; o conhecimento didático (CD), que está atrelado aos processos de ensino e de aprendizagem específicos à matemática, suas teorias, processos e práticas; e a concepção de conhecimento tecnológico (CT), que é similar à apresentada por Mishra e Koehler (2006).

A partir das intersecções entre as categorias iniciais, foram obtidas seis categorias pelo cruzamento dois a dois: conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC), que relaciona os conhecimentos pedagógicos gerais com a matemática; conhecimento didático do conteúdo (CDC), que é a capacidade do professor de utilizar ferramentas e teorias da didática da matemática para favorecer a aprendizagem de algum conteúdo matemático específico; conhecimento didático pedagógico (CDP), que são as reflexões próprias da educação em geral (planejamento de aula de matemática, gerenciamento da turma, avaliação,...); conhecimento tecnológico do conteúdo (CTC), que diz respeito à maneira pela qual a tecnologia e determinado conteúdo matemático estão relacionados; conhecimento pedagógico tecnológico (CPT), que está relacionado à forma como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas e quais serão os seus possíveis resultados nos processos de ensino e aprendizagem da matemática; e, conhecimento didático tecnológico (CDT), que está amparado nas teorias da didática da matemática, permitindo ao professor examinar como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas e quais recursos são mais apropriados para o ensino e aprendizagem da matemática.

Além das categorias obtidas pela intersecção de dois a dois, foram adquiridas outras quatro categorias a partir do cruzamento três a três: conhecimento didático tecnológico do conteúdo (CDTC), que possibilita ao professor perceber como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas para o ensino e aprendizagem de um conteúdo em consonância com as teorias da didática da matemática; conhecimento didático pedagógico do conteúdo (CDPC), que está amparado nos conhecimentos gerais da pedagogia, nos conhecimentos específicos e nas teorias da didática da matemática, possibilitando ao professor refletir sobre os aspectos que devem ser considerados no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo da matemática; conhecimento didático pedagógico tecnológico (CDPT), que está baseado nas teorias da didática da matemática, nos conhecimentos pedagógicos e nos modos como as diferentes tecnologias podem influenciar nos processos de ensino e aprendizagem da matemática; e, o conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo (CPTC), que pauta-se nos conhecimentos pedagógicos e nas maneiras como as diferentes tecnologias podem intervir nos processos de ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático.

E, por último, a categoria do conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo (CDPTC), obtida pela intersecção das quatro modalidades iniciais de conhecimento. Esse conhecimento está baseado nas teorias da didática da matemática, nos conhecimentos pedagógicos gerais, tecnológicos e de conteúdo, permitindo ao professor conduzir o ensino e aprendizagem de um conteúdo da melhor maneira possível.

Após essa breve revisão da literatura a respeito dos conhecimentos necessários à docência, e de modo especial, ao professor de matemática, volta-se o olhar para a situação dos professores pedagogos. Percebe-se que esses profissionais, assumem uma demanda considerável de conhecimentos específicos de conteúdos, uma vez que eles são responsáveis pelo ensino de quase todos os componentes curriculares, além de todas as demais categorias de conhecimento necessárias no exercício da docência.

Isso pode agravar-se ainda mais quando se trata da geometria, pois esses professores devem deter os conhecimentos necessários sobre como ensiná-la e como os alunos a aprendem, tendo consciência das dificuldades específicas das crianças na aprendizagem da geometria; dos aspectos cognitivos a serem desenvolvidos pelos alunos por meio dos conceitos geométricos abordados; das concepções prévias dos alunos a respeito do conteúdo geométrico abordado; de como os materiais curriculares devem ser organizados para que os objetivos da aprendizagem da geometria sejam alcançados nesse nível de ensino. Observa-se, que o conhecimento pedagógico do conteúdo, influenciado tanto pelo conhecimento da geometria quanto pelo conhecimento pedagógico, emerge e cresce quando professores transformam o seu conhecimento do conteúdo específico considerando os propósitos de ensino.

A partir da preocupação dos professores pedagogos com o conhecimento específico da geometria e com a possível formação deficitária nos curso de graduação, buscou-se saber quais são os componentes curriculares que regem os cursos de pedagogia de algumas universidades públicas e particulares da grande Florianópolis. Tem-se consciência que essa pequena amostra não é suficiente para fazer grandes generalizações, mas acredita-se ser pertinente para realizar alguns questionamentos

2.3.2 O currículo do curso de pedagogia: um olhar atento para a abordagem da geometria

A análise do currículo do curso de pedagogia de quatro instituições superiores faz parte das análises preliminares [1] proposta pela Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria. A motivação para fazer o levantamento do programa curricular dos cursos de pedagogia, é de que, esse estudo, poderá dar a oportunidade de obter um panorama da situação atual das disciplinas que estão embasando, teoricamente e cientificamente, a prática docente do pedagogo na condução do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. O currículo do curso de pedagogia das quatro universidades da grande Florianópolis e a ementa das disciplinas que abordam de maneira geral a matemática, juntamente com a sua carga horária, encontram-se no Anexo A.

Talvez a maneira que foi escolhida para apresentar esse panorama do currículo do curso de pedagogia não seja a mais adequada, em virtude da sua extensa programação. Contudo, a intenção é de levar o leitor a perceber, de forma global, a fração da carga horária do curso destinada a abordagem matemática, dentro de um panorama mais abrangente, possibilitando o seu posicionamento frente à situação exposta. Para tanto, é importante, primeiramente, que seja feita a leitura dos currículos do curso de pedagogia que constam no Anexo A.

Observando a carga horária total do curso de pedagogia nas instituições de ensino selecionadas, percebe-se que em todas elas, o curso ultrapassa três mil horas/aula. Contudo, nessa pequena amostra, constata-se que na maior parte dos currículos o tempo despendido para o estudo da matemática não chega a 75 horas (menos de 2,3%), uma parcela insignificante se comparada a outras disciplinas que abordam os conhecimentos históricos, epistemológicos, filosóficos, sociológicos, psicológicos, didáticos, metodológicos, etc. Sem sombra de dúvida, pode-se afirmar que esses conhecimentos são de fundamental importância para a formação de professores, pedagogos ou não. O docente no exercício da sua profissão precisa saber sobre educação, contemplando todas as abordagens citadas acima. Mas, será que esse tipo de enfoque é suficiente para garantir ao pedagogo o conhecimento específico do conteúdo, como sugere Shulman (1986)?

Analisando a ementa a ser cumprida em cada uma das disciplinas voltadas a matemática, nenhuma delas enuncia uma formação conceitual para os professores embasarem teoricamente as suas práticas pedagógicas, como, por exemplo, a disciplina Elementos Fundamentais da Matemática. Parece haver a percepção de que saber *como ensinar* é mais importante do que saber *o que ensinar* e *para que ensinar*. Subentende-se, nesse contexto, não ser necessário ao professor saber matemática para ensiná-la. Como o professor pode ensinar geometria se a sua base conceitual se encontra fragilizada? De que modo o professor pode conduzir o processo de aprendizagem da matemática, em especial da geometria, nos anos iniciais do ensino fundamental se eles precisam possuir uma compreensão especializada da área do conhecimento muito mais do que a compreensão pessoal do conteúdo que ensinam?

Como já apontado por Tardif *et al* (1991), o saber da experiência influencia na ação pedagógica. Se o professor, no decorrer de sua trajetória estudantil, não teve a oportunidade de aprender significativamente a matemática e, de maneira especial a geometria, essa compreensão especializada do conteúdo pode encontrar-se prejudicada.

Levando em conta que os professores que estão atuando na sala de aula, tiveram sua formação matemática influenciada pelos modismos que foram e são propostos para o ensino de matemática nos séculos XX e XXI, existe a possibilidade desses professores terem sido influenciados pela concepção platônica do conhecimento matemático ou até mesmo da percepção da matemática como um saber aplicado e preso somente a contextos reais e concretos, promovendo o desenvolvimento de competências e habilidades, conforme propõe a BNCC (BRASIL, 2017). No nosso entender, essa situação pode trazer consequências desagradáveis para a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, impossibilitando ao aluno *ver geometricamente uma figura*[20].

Nossa preocupação encontra-se justamente nesse ponto: se o curso de graduação deixa de oferecer a oportunidade dos professores aprofundarem os conhecimentos específicos da geometria e se os mesmos não tiveram uma formação matemática consistente na sua trajetória estudantil, tudo indica que só lhes resta conduzir um ensino as cegas sem embasamento teórico, e, muitas vezes ficam ancorados em suas experiências como estudantes; seguindo, muito possivelmente, o exemplo dos seus professores de matemática.

Voltando o olhar às ementas das disciplinas de cunho matemático, pode-se perceber a vaga importância dada à geometria em todas as instituições de ensino. Na disciplina "Educação Matemática e Infância"[21] o estudo da geometria nem chega a ser enunciado. Em "Fundamentos e Metodologia da Matemática"[22], dentre os tópicos elencados, a geometria euclidiana foi contemplada. Entretanto, não apresenta, especificamente, qual a abordagem metodológica que será considerada na exploração do tema. Fica a dúvida: será que os aspectos

[20]Expressão usada por Duval (2011) como condição necessária para a aprendizagem da geometria. Discutiremos, posteriormente, no capítulo III.
[21] Disciplina de 72 h/a que faz parte do curso de pedagogia da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
[22] Disciplina de 72 h/a que faz parte do curso de pedagogia da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

semiocognitivos da aprendizagem da geometria, que possibilitam a maneira de ver geometricamente uma figura, serão considerados?

No componente curricular "Matemática e Ensino"[23] deverá ser contemplado o estudo das teorias e pedagogias em Educação Matemática, relativas à Topologia, à Geometria etc. Contudo, essa abordagem teórica não indica uma visão mais detalhada do que é entendido por topologia e geometria, e também não especifica quais as teorias da Educação Matemática que serão contempladas. Nesse caso, pode-se correr o risco dos entes geométricos, na sua perspectiva teórico e cognitiva, ficarem relegados a um segundo plano. Não fica explícito, também, se os objetos geométricos terão uma abordagem considerando a diversidade de representações semióticas.

Na disciplina "Aprendizagem da Matemática"[24] o estudo dos conhecimentos específicos que serão tratados na disciplina, não chegam a ser apontados e o ensino da geometria e sua base conceitual nem são cogitados. Nos "Fundamentos e Metodologias de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental"[25] estão elencadas a geometria métrica e não métrica, porém, a compreensão do que será abordado nesse estudo não foi apresentado. Não especifica o desenvolvimento das capacidades de reconhecimento, localização, exploração do espaço que ocupa, das percepções e diferenciação entre as formas geométricas, das possibilidades de desconstrução dimensional das formas e das diferentes maneiras de ver uma figura.

Embora os quatro currículos analisados tenham apresentado diferentes vertentes para a abordagem da matemática no curso de pedagogia, uma característica comum chamou atenção: não se encontrou indícios da importância de serem considerados os diferentes registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática e, de maneira especial, os aspectos semiocognitivos para entrar na maneira de ver uma figura em matemática. Isso leva a pensar na necessidade de uma reestruturação do atual currículo do curso de pedagogia.

Nesse sentido Coll (2001) apresenta os elementos que devem ser contemplados na elaboração do currículo. Esses componentes podem ser pensados a nível macro (como uma estrutura curricular geral para o curso de pedagogia) ou a nível micro (como uma estrutura curricular para estudo da geometria dentro do curso de pedagogia). Segundo Coll (2001, p. 44-45), o currículo deve proporcionar informações sobre *o que ensinar; quando ensinar;*

---

[23] Disciplina de 72 h/a que faz parte do curso de pedagogia da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC).
[24] Disciplina de 60 h/a que faz parte do curso de pedagogia da Universidade no Norte do Paraná (UNOPAR).
[25] Disciplina de 60 h/a que faz parte do curso de pedagogia da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL).

como ensinar e sobre *que, como e quando avaliar*. Destaca-se, novamente, a importância do embasamento teórico conceitual do conteúdo. Apenas saber como ensinar geometria parece não ser suficiente dentro do processo de ensino e aprendizagem.

> Melhorar a qualidade da educação implica melhorar os processos de ensino e aprendizagem que ocorrem na sala de aula, implica em introduzir mudanças naquilo que é ensinado e aprendido nas escolas, e sobretudo na forma como se ensina e como se aprende. Assim, a mudança curricular é uma condição necessária para realizar uma reforma educacional que aspire a melhorar a qualidade da educação. No entanto, seria uma ingenuidade pensar que isso pode ser conseguido simplesmente com a modificação do currículo estabelecido (COLL, 2001, p. 32).

Pensar na ampliação e/ou modificação do currículo dos cursos de pedagogia pode ser o primeiro passo, necessário e importante para modificar o cenário atual em que se encontra a formação matemática do pedagogo, com um olhar mais aguçado para o eixo da geometria. Entretanto, há que se pensar em propostas que sejam favoráveis à essa mudança, talvez uma abordagem da geometria que promova a passagem do olhar icônico ao não icônico pela desconstrução dimensional das formas[26] possa ser um caminho. Porém, esse posicionamento contraria, fortemente, a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) aprovada em 2019.

Aceitar a BNC-Formação como parâmetro para a mudança curricular dos cursos de pedagogia é estar na contramão da proposta de aprendizagem para a geometria defendida por Duval (2005b), pois ela tem por objetivo a implantação BNCC, que aborda o ensino da geometria para o desenvolvimento de competências e habilidades. Em contrapartida, Duval (2015) defende a aprendizagem da matemática e, consequentemente da geometria, para o desenvolvimento das capacidades mentais, privilegiando a educação integral.

A atual situação da formação matemática do professor pedagogo e a fragilidade que este encontra no acompanhamento do processo de aprendizagem da geometria, nos anos iniciais, despertou o interesse em investigar as tendências das pesquisas brasileiras, que vêm dedicando-se ao estudo da formação em geometria do professor pedagogo nos cursos de formação inicial e continuada.

[26] Duval (2005b) aponta que passar da visualização icônica, que é comum a todos os domínios de conhecimento à visualização não icônica, que é específica aos matemáticos, exige uma reviravolta completa do funcionamento cognitivo do ato de “ver”. Detalharemos essa ideia mais adiante no capítulo III.

2.3.3 Uma visão panorâmica da formação em geometria do pedagogo nas pesquisas brasileiras

Considerando a importância da formação do professor pedagogo em geometria, fez-se um levantamento das pesquisas produzidas no período entre 2010 e 2018. Escolheu-se esse recorte temporal, pois nos anos de 2017 e 2018 fundamentou-se as análises prévias [1] da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, procurando fazer um levantamento do que as pesquisas desenvolvidas a esse respeito já apontavam sobre a formação em geometria do professor pedagogo e de que maneira esta pesquisa poderia contribuir com essa temática.

Realizou-se a consulta *on-line* no banco de teses e dissertações da CAPES empregando as seguintes palavras de busca: pedagogo, geometria e formação matemática, onde foram encontrados 15 trabalhos relacionados ao tema. Tem-se ciência de que esse levantamento poderia ter assumido uma dimensão mais abrangente, por intermédio da procura em outros sites de bancos de dados. Porém, não houve o intento de fazer o rastreamento minucioso de todas as pesquisas produzidas nesse recorte temporal, mas sim, apenas ter uma visão panorâmica dos temas e objetivos propostos nas teses e dissertações desenvolvidas nesse período, objetivando verificar a pertinência da temática desta pesquisa.

Escolheu-se o banco de teses e dissertações da CAPES, por tratar-se de uma plataforma que tem acesso a todas as informações sobre teses e dissertações defendidas junto a programas de pós-graduação do Brasil. Vale ressaltar que, com o lançamento da Plataforma Sucupira, o banco de teses e dissertações da CAPES teve o seu repertório ampliado.

A paisagem geral das pesquisas encontradas possibilitou pontuar algumas tendências sobre a formação em geometria do professor pedagogo, presentes no cenário nacional. De acordo com os objetivos dos autores, foram elencadas quatro categorias de análise a partir da leitura exploratória dos trabalhos encontrados: análise do currículo dos cursos de pedagogia; propostas de construção, aplicação e análise dos resultados de programas de formação em geometria para professores dos anos iniciais; análise dos conhecimentos em geometria dos professores dos anos iniciais; e, por fim, ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais.

Tem-se consciência das limitações dessa categorização, pois muitos trabalhos poderiam ser enquadrados em mais de uma categoria. Não obstante, houve a necessidade de agrupar essas pesquisas por meio das suas características mais significativas, para possibilitar a construção de um mapeamento das diretrizes gerais que motivaram o desenvolvimento dessas pesquisas. Para fins de identificação, os trabalhos foram numerados de 1 a 15 e organizados em quadros específicos de acordo com a sua categoria. Primeiramente, no Quadro 1, foram apresentados os trabalhos que se propuseram a analisar a estrutura curricular dos cursos de pedagogia e a investigar a forma que o estudo da geometria se fez presente nesse contexto.

Quadro 1- Trabalhos que analisaram o currículo dos cursos de pedagogia.

TRABALHO 1	
Título	**A geometria em cursos de pedagogia da região de Presidente Prudente-SP**
Autor	Ana Elisa Cronéis Zambon
Universidade	UNESP
Nível	Mestrado
Ano	2010
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar como a Geometria se faz presente em cursos de Pedagogia da Região administrativa de Presidente Prudente – SP. A pesquisa revelou dois modelos contrapostos de formação: o primeiro apresentou aspectos estritamente relacionados ao “como ensinar” os conteúdos da Geometria e, o segundo enfatizou aspectos que privilegiaram o trabalho com conteúdos da Geometria.
TRABALHO 2	
Título	**A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria**
Autor	Norma Sueli Oliveira Vieira
Universidade	UFC
Nível	Mestrado
Ano	2017
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar como a geometria se faz presente no curso de pedagogia da Faculdade de Educação (FACED/UFC) e analisar a importância da formação matemática do pedagogo na abordagem dos conteúdos de geometria. Os resultados apontaram uma lacuna existente nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos/geometria, apontando a fragilidade existente na abstração desses conceitos; apresentou indicativos de carga horária insuficiente no currículo para a formação matemática do pedagogo.
TRABALHO 3	
Título	**O tutor e a formação inicial, em um curso na modalidade à distância, de professores que lecionam geometria nos anos iniciais do ensino fundamental**
Autor	Solange Cristina D´Antônio
Universidade	UEM
Nível	Mestrado
Ano	2010
Objetivos e	Verificar se as interações discursivas estabelecidas entre tutores e alunos de um curso de

Resultados explicitados pelo autor	pedagogia na modalidade EAD contribuíram e de que modo para a formação matemática destes estudantes no que se refere à geometria. Os resultados apontaram que a formação e a metodologia dos tutores pouco contribuíram para a ampliação dos conhecimentos de geometria dos alunos. O pouco tempo destinado ao estudo da geometria não possibilitou a compreensão dos seus conceitos fundamentais.

Fonte: Banco de teses e dissertações da CAPES

No quadro a seguir, encontram-se os trabalhos que se dedicaram a preparar/aplicar/analisar propostas de formação em geometria para professores pedagogos sob diferentes perspectivas teóricas, juntamente com os seus resultados.

Quadro 2 - Proposta de construção, aplicação e análise dos resultados de programas de formação em geometria para professores dos anos iniciais.

TRABALHO 4	
Título	**Formação do Professor do Ensino Fundamental Ciclo I: Uma investigação com uso da geometria dinâmica para (re)construção de conceitos geométricos**
Autor	Marines Yole Poloni
Universidade	UNIBAN-SP
Nível	2010
Ano	Mestrado
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar, em um projeto de formação continuada de professores do Ensino Fundamental I, a (re)construção de conceitos geométricos sobre o tema Figuras Planas, utilizando recursos tecnológicos (software Cabri-Géomètre) e as reflexões provenientes dessa (re)construção sobre a prática das professoras participantes. Os resultados indicaram que a formação continuada subsidiada pelo uso de Geometria Dinâmica possibilitou a (re)construção de alguns conceitos geométricos e especialmente a compreensão das figuras a partir de suas propriedades.
TRABALHO 5	
Título	**Conhecimento de professores polivalentes em geometria: contribuições da teoria dos registros de representação semiótica**
Autor	Silvana Holanda da Silva
Universidade	UECE
Nível	Mestrado
Ano	2011
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Elaboração e aplicação de uma sequência didática com professores pedagogos objetivando analisar as contribuições do uso de diferentes representações semióticas para a elaboração de conceitos geométricos pelos professores. As atividades possibilitaram que os docentes tivessem novos olhares para o trato com o desenho geométrico, constituindo o início de uma reflexão da prática docente relacionada ao ensino da

	Geometria. Contudo, ainda permaneceram algumas lacunas conceituais e uma certa resistência, ao trabalho com a Geometria, por parte dos professores
TRABALHO 6	
Título	**Formação de professores dos anos iniciais para o ensino de geometria plana: uma experiência com o uso do software klogo**
Autor	Luana Quadrini da Silva
Universidade	UFMS
Nível	Mestrado
Ano	2014
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Analisar uma ação de formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, identificando contribuições desta para o ensino de geometria com o uso do software Klogo. A pesquisa possibilitou identificar os conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores, como: propriedades de quadrados, losangos e triângulos, durante as construções no ambiente Klogo. Observou-se que os professores foram sensibilizados a refletir sobre as suas práticas pedagógicas e o uso de laptops educacionais.
TRABALHO 7	
Título	**(Re)construção de conceitos geométricos por professoras dos anos iniciais em formação continuada**
Autor	Roberta Ressurreição Souza
Universidade	IFES
Nível	Mestrado
Ano	2016
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Analisar uma proposta de formação continuada explorando a (re)construções de conhecimentos geométricos e pedagógicos de professores pedagogos. A pesquisa identificou indícios de conhecimentos (re)construídos mediante a troca de experiência com os professores, nas discussões entre os pares durante as reuniões presenciais e na sala do ambiente virtual de aprendizagem.
TRABALHO 8	
Título	**Formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de geometria**
Autor	Joelma Fátima Torrel Mattei
Universidade	ULBRA
Nível	Mestrado
Ano	2014
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar as concepções de um grupo de professores polivalentes sobre o ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental e analisar como a formação continuada contribuiu para a prática docente. Os resultados apontaram que a formação contribuiu com a prática docente, possibilitando a reflexão sobre a importância

	do ensino da geometria para a formação do educando e proporcionou aos professores confiança para a realização das propostas pedagógicas.

Fonte: Banco de teses e dissertações da CAPES

No Quadro 3, apresentam-se as pesquisas que tiveram como objetivo principal analisar as concepções e os conhecimentos em geometria dos professores que lecionam nos anos iniciais.

Quadro 3 - Trabalhos que analisaram os conhecimentos geométricos dos professores dos anos iniciais.

TRABALHO 9	
Título	**O processo de ensino e aprendizagem da geometria: representações sociais de professores do 5º ano do Ensino Fundamental**
Autor	Karina Alves Biasoli Stanich
Universidade	PUC-SP
Nível	Mestrado
Ano	2013
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Compreender o modo como um grupo de professores pedagogos identificava e representava as dificuldades dos seus alunos, relacionadas aos conteúdos da geometria. Os resultados evidenciaram que no grupo de professores há a ausência de um repertório mínimo de conhecimento geométrico; uma categorização negativa da Geometria, considerada abstrata e imprópria para ser ensinada e; a presença de um ensino essencialmente prático.
TRABALHO 10	
Título	**O professor dos anos iniciais e o conhecimento da geometria**
Autor	Antônia Givaldete da Silva
Universidade	UFAL
Nível	Mestrado
Ano	2014
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Analisar quais os conhecimentos de geometria possuem os professores dos anos iniciais, do município de Teotônio Vilela, Estado de Alagoas. A pesquisa revelou que os cursos de pedagogia desses professores não oferecem uma formação matemática adequada, em virtude da reduzida carga horária destinada à temática. Ênfase aos aspectos metodológicos, em detrimento dos conteúdos matemáticos, como é o caso da geometria.
TRABALHO 11	
Título	**As concepções de professores ao ensinar quadriláteros nos anos iniciais do ensino fundamental e as possibilidades de contribuições das TIC**
Autor	Janaina Xavier de Almeida

Universidade	UFSM
Nível	Mestrado
Ano	2015
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Analisar e compreender as concepções matemáticas dos professores pedagogos, buscando proporcionar oportunidades de introduzir a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como ferramentas auxiliares da prática docente, no ensino de geometria, em particular quadriláteros, nos anos iniciais do ensino fundamental. A pesquisa constatou que as professoras se mostraram conscientes da importância do ensino da matemática e da geometria, entretanto essa consciência esbarrou em dificuldades decorrentes da sua formação inicial e continuada, da falta de infraestrutura e da multisseriação na maioria das escolas. As TIC podem contribuir de maneira efetiva para organização e desenvolvimento da prática docente para o ensino de quadriláteros.
TRABALHO 12	
Título	**Por trás do currículo oficial, que geometria acontece? Um estudo sobre os saberes anunciados nas narrativas de professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentada pelo candidato**
Autor	Eduardo Morais Junior
Universidade	UFSCar
Nível	Mestrado
Ano	2015
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Identificar os saberes docentes anunciados por um grupo de professoras dos anos iniciais do ensino fundamental, vinculadas ao PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) por meio do planejamento circunstanciado da reflexão coletiva e da realização de uma atividade de geometria desenvolvida em sala de aula. A pesquisa contribuiu para a continuidade da discussão dos saberes docentes no contexto educacional, valorizando a voz do professor dos anos iniciais do ensino fundamental; apresentou indicativos para formação continuada docente no que diz respeito à postura reflexiva do profissional e também o saber experiencial como um saber importante a ser considerado nas pesquisas acadêmicas e na formação continuada de professores.
TRABALHO 13	
Título	**Conhecimentos de estudantes de pedagogia sobre a resolução de problemas geométricos**
Autor	Erika Janine Maia
Universidade	UEM
Nível	Mestrado
Ano	2016
Objetivos e Resultados explicitados	Investigar e analisar os conhecimentos sobre resolução de problemas geométricos, envolvendo figuras planas, que estudantes de pedagogia possuem e que se fazem necessários para a prática efetiva em sala de aula. Os resultados da pesquisa apontaram

pelo autor	que o curso de pedagogia não atendeu as expectativas em relação à compreensão sobre como trabalhar a geometria por meio da resolução de problemas; que as disciplinas propostas na grade curricular do curso são de cunho geral e pouco específicas; que houve um baixo desempenho dos sujeitos investigados na resolução de problemas geométricos; que existe uma desmotivação pelo estudo do assunto e que há uma falta de preparo para ensinar geometria, isso fez constatar que a formação do pedagogo carece de uma atenção especial.

Fonte: Banco de teses e dissertações da CAPES

Na última categoria de análise, apresentam-se as pesquisas que se dedicaram a investigar de que maneira acontece o processo de ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

Quadro 4 – Ensino e aprendizagem da geometria nos anos iniciais.

TRABALHO 14	
Título	**Ações de formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: construção de uma prática docente para o ensino de geometria**
Autor	Marita de Carvalho Frade
Universidade	UFPA
Nível	Mestrado
Ano	2017
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar como a geometria tem sido ensinada por professores dos anos iniciais no município de Ponta de Pedras. A pesquisa constatou a falta de conhecimento geométrico do pedagogo; o programa de formação aplicado ao grupo de professores proporcionou aos participantes a troca de experiências, que proporcionaram o (re)pensar de novas práticas, enriquecendo seus conhecimentos, principalmente em relação ao ensino e aprendizagem da geometria para os anos iniciais do ensino fundamental.
TRABALHO 15	
Título	**Geometria nos anos iniciais: reflexão sobre um processo de formação continuada**
Autor	Adriane Regina Bravo Mendes
Universidade	UFABC
Nível	Mestrado
Ano	2018
Objetivos e Resultados explicitados pelo autor	Investigar de que maneira os conteúdos de Geometria nos anos iniciais têm sido trabalhados, tendo como referência a experiência pessoal e profissional de um grupo de professores em formação continuada; e, investigar de que maneira a formação inicial/continuada influenciou na prática docente desses professores quando ensinam

	geometria nos anos iniciais. Os resultados da pesquisa indicaram que a geometria tem sido pouco trabalhada nos anos iniciais, por ser um tema que os professores sentem mais dificuldade. Isso decorre de falhas na formação inicial/continuada, na qual os conteúdos de geometria têm sido negligenciados. Durante o curso de formação os professores manifestaram pouco domínio sobre o conteúdo bem como relataram suas inseguranças para abordarem esse tema em sala de aula, mesmo reconhecendo sua importância.

Fonte: Banco de teses e dissertações da CAPES

Esse panorama permitiu perceber uma preocupação crescente com a formação do professor pedagogo em geometria. Mas, ao que tudo indica, parece que não houve muitas mudanças nas últimas décadas com relação ao conhecimento do professor pedagogo em geometria, visto que, Lorenzato em 1995 já chamava a atenção para o tema. De maneira especial, a pesquisa de Frade (2017), ratifica a fragilidade do professor pedagogo no domínio dos conhecimentos geométricos e a sua insegurança para ensiná-la, corroborando com os escritos de Lorenzato do século passado.

Um fato interessante foi que, embora as pesquisas apresentassem objetivos diferentes, os resultados assinalaram muitos aspectos em comum. Aproximadamente 50% das pesquisas revelaram a fragilidade existente na formação matemática do pedagogo, especialmente em geometria. Outro dado pertinente foi a carga horária insuficiente destinada a formação matemática/geométrica dos professores, nos cursos de pedagogia, bem como, a ênfase dos aspectos metodológicos para o ensino da geometria. Por fim, as pesquisas também relataram que, a dificuldade que os pedagogos apresentam nos conteúdos de geometria reforça o indicativo de que esse campo do conhecimento possa estar sendo pouco explorado nos anos iniciais.

As propostas de formação continuada construídas e aplicadas, nas pesquisas supramencionadas, apontaram contribuições significativas na formação teórica e pedagógica dos professores participantes, possibilitando a reflexão sobre a importância do ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. Apenas um trabalho destacou que, apesar das atividades propostas terem possibilitado aos docentes novos olhares sobre o ensino da geometria, ainda permaneceram algumas lacunas conceituais e uma certa resistência dos professores no trabalho com a geometria.

Na análise das pesquisas, citadas acima, foi percebido que os registros de representação semiótica para os objetos geométricos têm pouca representatividade nos cursos de formação inicial e continuada dos pedagogos, podendo refletir sistematicamente na aprendizagem das crianças dos anos iniciais. Os programas de formação, apresentados nessas pesquisas, foram conduzidos na perspectiva dos conteúdos, negligenciando a perspectiva semiocognitiva requerida no processo de aprendizagem da geometria, como indicado por Duval (2004a).

Nesse contexto, esta pesquisa tornou-se significativa, pois trouxe a possibilidade de contribuir com a formação dos professores pedagogos em geometria, considerando a perspectiva semiocognitiva, por intermédio do desenvolvimento de um programa de formação continuada, num espaço de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, promovendo a passagem do olhar icônico ao não icônico pela decomposição dimensional das formas, considerando as funções discursivas da língua e as apreensões.

Para tanto, foi preciso recorrer a fontes teóricas que pudessem subsidiar a criação de um espaço possível para aprender e ensinar a geometria, propiciando a integração de diferentes sistemas semióticos e visando o empoderamento dos pedagogos, na condução do processo de ensino e aprendizagem desse componente curricular.

Em síntese, tem-se uma trajetória histórica com muitos desafios a serem superados quanto à formação em geometria do professor pedagogo. Esses profissionais, frutos de uma educação escolar que apresenta sérias fragilidades no ensino da geometria e consequentemente na sua aprendizagem, precisam sair do *círculo vicioso de ignorância geométrica*, tomando emprestada a expressão de Lorenzato (1995).

Atrelado a esse fator, apresenta-se a questão das orientações educacionais que mais estão preocupadas em dizer ao professor o que ele deve fazer, do que necessariamente investir na sua formação, a fim de que ele possa assumir o protagonismo das práticas pedagógicas, admitindo-se que o saber docente é múltiplo, portanto incapaz de ser reduzido a mandos e desmandos.

Nesse cenário, as pesquisas apontam para a necessidade de se investir na formação continuada em geometria dos professores pedagogos. Tendo em vista que, nenhum curso de pedagogia, mesmo que destine uma carga horária significativa para o tema - embora isso pareça não estar acontecendo atualmente -, seria capaz de contemplar todas as complexidades envolvidas no processo de ensino e aprendizagem da geometria.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO METODOLÓGICA

Neste capítulo, destacou-se a importância das representações semióticas para desenvolvimento da maneira de ver geometricamente uma figura, considerando as leis da Gestalt, que nos permitem teorizar o modo como vemos uma forma. Entrar no modo matemático de ver uma figura, passa pela desconstrução dimensional das formas, permitindo a passagem do olhar icônico ao não icônico, considerando os diferentes tipos de apreensão de uma figura e as funções discursivas da língua.

Metodologicamente, esse aprofundamento teórico visa a tomada de decisão, a partir das análises prévias na perspectiva do pesquisador (apresentadas no capítulo 2), para tornar possível um programa de formação em geometria para professores pedagogos, seguindo a perspectiva semiótica. Essa etapa da pesquisa está situada no ambiente metodológico da análise *a priori* na intersecção entre o pesquisador e o grupo de professores [12]. Apresentou-se, também, a possibilidade de construção de um ambiente metodológico, denominado de "Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria" na formação de professores pedagogos.

3.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

A aprendizagem da geometria passa pela condução e o aprimoramento do olhar, possibilitando ao aluno enxergar os elementos significativos na figura relacionando-os ao discurso em língua natural. Duval (2012a) define que uma figura é "[...] uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas" (DUVAL, 2012a, p. 121), caracterizando-se, respectivamente, pelo aspecto discreto, contínuo e de contorno.

As leis da Gestalt propiciaram teorizar, cientificamente, o sistema de leitura visual que permitem analisar e interpretar os objetos, considerando que algumas formas podem facilitar ou dificultar a sua percepção, dependendo dos fatores de composição dessa forma. Procuramos entender o sistema de leitura sob a ótica da Gestalt, buscando uma aproximação com a leitura das figuras geométricas e os diferentes modos de apreensão de uma figura.

Duval (2012b) evidencia quatro maneiras diferentes de apreensão de uma figura: a perceptiva (reconhecimento visual imediato da forma), a operatória (operação de reconfiguração), a discursiva (indicações contidas no enunciado) e a sequencial (indicações para construir uma figura). Elas são independentes umas das outras, mas na resolução de um problema se exige a passagem de um tipo de apreensão a outro.

A maneira de ver as figuras depende da ação cognitiva que elas são capazes de despertar, podendo funcionar de maneira icônica ou não icônica. No olhar icônico, as formas permanecem estáveis e o conhecimento repousa sobre o contorno das figuras geométricas. Esse tipo de olhar é característico no olhar botanista e agrimensor. Ao contrário, a visualização não icônica permite que se desconstruam as formas visualmente reconhecidas, ela permite que o olhar seja ampliado, alcançando o olhar construtor e inventor (DUVAL, 2005b).

A desconstrução dimensional constitui o eixo central do processo de visualização em geometria. A tomada de consciência dimensional das formas e as suas operações discursivas permitem que a visualização e o discurso estejam em sinergia (DUVAL, 2011). Isso levanta a possibilidade de pensar que um programa de formação em geometria para professores pedagogos, atendendo a essa perspectiva, poderia contribuir no aprimoramento do seu olhar sobre o processo de aprendizagem da geometria dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Para Duval (2005b), a passagem entre a visualização e o discurso está intimamente atrelada a uma mudança dimensional das formas para que se possa reconhecer os objetos geométricos em cada um dos dois registros, lembrando que cada representação semiótica para um mesmo objeto geométrico pode abordar conteúdos diferentes.

A seguir tratou-se, detalhadamente, sobre as apreensões, as mudanças de dimensões, os olhares em geometria e as funções discursivas da língua, apresentando a proposta metodológica que visou possibilitar o desenvolvimento do olhar na aprendizagem da geometria.

3.1.1 O primeiro olhar sobre a forma dos objetos

Quando se olha uma forma, de “maneira abdutiva”, alguns elementos destacam-se mais do que outros. Isso ocorre devido aos estímulos visuais das formas e imagens que promovem a captação da informação visual de muitas maneiras, influenciando assim na interpretação delas.

A partir da observação do comportamento do cérebro, a Gestalt apresenta uma teoria sobre o fenômeno da percepção. Para essa teoria, “[...] o que acontece no cérebro não é idêntico ao que acontece na retina. A excitação cerebral não se dá em pontos isolados, mas por extensão” (GOMES FILHO, 2008, p. 19). Sendo assim, a primeira sensação já acontece de forma global e unificada, com o estabelecimento de relações entre os elementos constitutivos da figura. “Essa ligação, entre como se percebe as partes ou o todo do objeto para formar conjuntos totais, se processa na relação entre a mente humana (pensamento) e a percepção visual no processo da apreensão da imagem” (SANTIL, 2008, p. 82). Para explicar a origem dessas forças de integração, a Gestalt atribui “[...] ao sistema nervoso central um dinamismo autorregulador que, a procura de sua própria estabilidade, tende a organizar as formas em todos coerentes e unificados” (GOMES FILHO, 2008, p. 19). As organizações que acontecem na estrutura cerebral são espontâneas e ocorrem independentemente da nossa vontade e de qualquer aprendizado.

A percepção da forma visual é regida por duas forças: externas e internas. As forças externas, formadas pela estimulação da retina através da luz, têm sua origem nas condições de luz em que se encontra o objeto que olhamos. “As forças internas são forças de organização que estruturam as formas em uma ordem determinada, a partir das condições dadas de estimulação, ou seja, das forças externas” (GOMES FILHO, 2008, p. 20), originando-se de um dinamismo cerebral. Toda e qualquer imagem percebida é o resultado da inter-relação das forças externas e internas. “As forças externas sendo agentes luminosos bombardeando a retina, e as forças internas constituindo a tendência de organizar, de estruturar, da melhor forma possível, esses estímulos exteriores” (GOMES FILHO, 2008, p. 25).

Os psicólogos da Gestalt perceberam certas constantes nessas forças internas, referentes à maneira como elas estruturam-se. Dessa forma, compuseram-se então, as leis da Gestalt que dizem respeito às capacidades perceptivas da leitura visual de um objeto, pretendendo explicar como a percepção está organizada, ou seja, explicar por que vemos as coisas de uma maneira e não de outra. São elas:

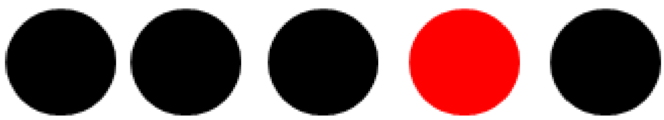
1) **Unidades**: compreende o conjunto de todos os elementos que configuram a forma propriamente dita do objeto. Percebem-se as unidades por meio das relações que são estabelecidas entre os elementos na configuração do objeto, isoladamente ou combinados entre si. No caso da letra “S” percebe-se a unidade unificada e na letra “E” tem-se a ideia das partes, e vê-se o todo de maneira unificada.

Figura 7 - Unidade.

Fonte: A autora

2) **Segregação**: diz respeito a capacidade perceptiva de separação, identificação, destacando unidades em um todo compositivo. Alguns fatores podem estabelecer níveis de segregação como, por exemplo, um maior ou menor contraste. Uma simples mudança de cor de um dos círculos da Figura 8 ganhou maior destaque na leitura visual, possibilitando maior segregação de um todo nas suas partes.

Figura 8 - segregação.



Fonte: A autora

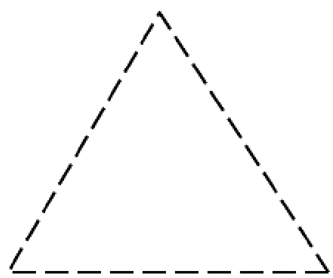
3) **Unificação**: está relacionada à coerência visual do estilo formal das partes ou do todo que se faz presente num objeto ou numa composição. Os princípios de proximidade e semelhança, geralmente, ajudam a promover e reforçar a unificação da figura, ou seja, quanto melhor o equilíbrio dos elementos visuais, maior a sensação de unificação, como pode ser percebido, exemplarmente, no símbolo *yin-yang*.

Figura 9 - Unificação.

Fonte: Gomes Filho (2008)

4) **Fechamento**: é a tendência perceptiva que estabelece ou concorre para a formação de unidades. Assim, a percepção dirige-se naturalmente para fechar ou completar os contornos dos objetos, que não estão completos, obtendo-se a sensação de fechamento visual pela continuidade de elementos numa ordem estrutural definida, como se percebe no triângulo tracejado abaixo.

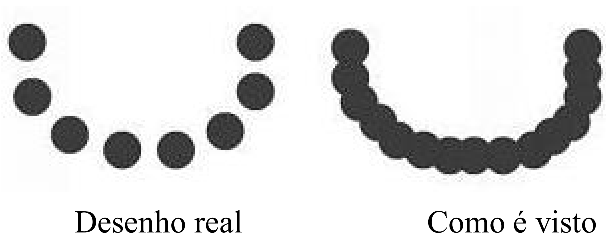
Figura 10 - Fechamento.



Fonte: A autora

5) **Continuidade**: corresponde à percepção visual de como as partes se sucedem por meio da organização perceptiva da forma, permitindo a continuidade de uma linha, de uma curva numa dada direção, procurando alcançar a melhor forma possível do objeto, a mais estável estruturalmente. A percepção tem a tendência de conectar os elementos para que eles pareçam contínuos, como na figura abaixo.

Figura 11 - Continuidade.



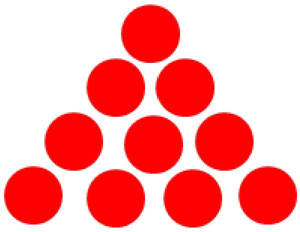
Fonte: Significados Gestalt[27] (2020)

6) **Proximidade**: acontece quando a capacidade perceptiva tende a ver juntos os elementos que estão próximos entre si, compondo uma unidade na forma. Isso porque não são assimilados isoladamente, mas como integrantes na composição de uma forma. Na Figura 12,

[27] Disponível em: <https://www.significados.com.br/gestalt/>. Acesso: 17 jun. 2020.

composta por vários círculos, não se tem um triângulo, mas pelo princípio da proximidade, interpretasse-o como se fosse.

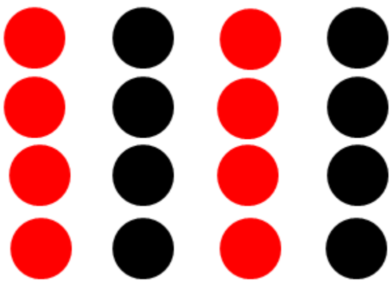
Figura 12 - Proximidade.



Fonte: A autora.

7) **Semelhança**: ocorre diante de uma série de elementos diversos em que a percepção é estimulada a agrupar objetos similares entre si, estimulada pela igualdade da forma, cor, tamanho, peso, direção e localização, despertando a tendência para construir unidades e para estabelecer agrupamentos das partes semelhantes. Percebe-se que a proximidade e a semelhança são fatores que agem em comum, promovendo além da formação de unidades, a unificação do todo. A percepção visual diante da Figura 13, pelo princípio da semelhança, tende a ver colunas de círculos vermelhos e pretos. Poucas pessoas percebem a alternância entre círculos vermelhos e pretos na linha horizontal.

Figura 13 - Semelhança.



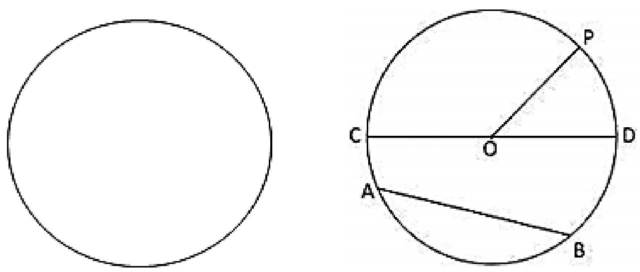
Fonte: A autora.

8) **Pregnância da Forma**: constitui a lei básica da percepção visual da Gestalt, definida como:

> As forças de organização da forma tendem a se dirigir tanto quanto o permitam as condições dadas, no sentido da harmonia e do equilíbrio visual. Qualquer padrão de estímulo tende a ser visto de tal modo que a estrutura resultante é tão simples quanto o permitam as condições dadas (GOMES FILHO, 2008, p. 36).

Desse modo, os elementos presentes em determinada forma são vistos da maneira mais simples possível, com o menor índice de complicadores, possibilitando uma assimilação mais rápida do objeto. Quanto mais clara for a organização visual da forma do objeto, maior será o grau de pregnância. Por outro lado, quanto mais complicada e confusa for a organização da forma visual do objeto, menor será o grau de pregnância, dificultando a interpretação analítica acerca do objeto como um todo. Na Figura 14, pelo princípio da pregnância da forma, a tendência do primeiro olhar é direcionada à forma mais simples da circunferência, aquela que não apresenta elementos complicadores.

Figura 14 - Pregnância da forma.



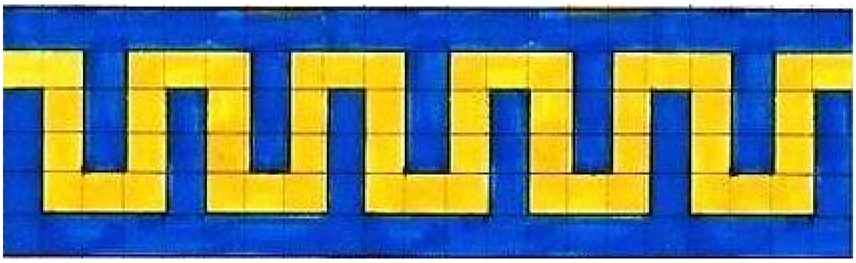
Fonte: A autora.

Percebe-se que as leis da Gestalt permitem gerar uma observação sobre as figuras geométricas. Contudo, a percepção é dada em função da presença dos objetos. Sendo assim, "para evocar objetos ausentes requeremos uma apreensão diferenciada, que vai além de processos perceptivos, por parte dos sujeitos envolvidos na visualização, daí provêm às dificuldades maiores dos estudantes, quando esses processos são envolvidos, [...]" (SOUZA, 2018, p. 62), uma vez que exigem processos operatórios que modificam a figura inicial. Na figura acima, num primeiro olhar não se percebe na circunferência da esquerda os mesmos elementos dispostos na circunferência da direita, tendo em vista que eles estão ausentes. Porém, mesmo estando ausentes, eles fazem parte das propriedades da circunferência, e isso é um processo quase que intransponível para muitos alunos.

Buscando melhorar a análise da leitura visual, foram acrescentadas as leis da Gestalt as categorias conceituais fundamentais, que de acordo com Gomes Filho (2008) são:

a) **Harmonia**: refere-se à disposição formal bem-organizada entre todos os elementos do objeto, definindo uma perfeição na articulação visual. A harmonia acontece considerando os fatores de ordem (favorece a uniformidade entre as unidades que compõem as partes do objeto ou do objeto como um todo) ou regularidade (apresenta elementos nivelados em termos de equilíbrio visual). Em oposição à harmonia temos a desarmonia, onde os elementos encontram-se desordenados ou irregulares. Na faixa decorativa, Figura 15, a percepção de harmonia é notável pelo sentido de ordem, coerência formal e articulação visual das unidades compositivas.

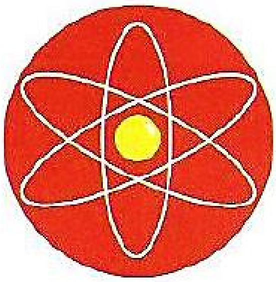
Figura 15 – Harmonia.



Fonte: Vendo e Revendo[28] (2020)

b) **Equilíbrio**: acontece por meio de forças que puxam ou atuam em direções opostas ao mesmo tempo sobre ambos os lados do objeto. O equilíbrio pode ser alcançado por peso ou direção, simetria ou assimetria, favorecendo uma compensação visual. “O sentido da visão experimenta equilíbrio quando as forças fisiológicas correspondentes no sistema nervoso se distribuem de tal modo que se compensam mutuamente” (GOMES FILHO, 2008, p. 57). Experimenta-se a sensação de equilíbrio absoluto expresso no círculo da figura a seguir e a simetria axial está presente em todos os eixos, observada pela distribuição dos pesos e pelas elipses em órbita ao ponto central.

Figura 16 – Equilíbrio.



Fonte: Gomes Filho (2008)

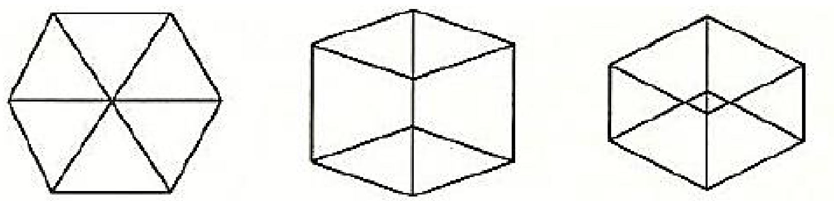
[28] Imagem disponível em: < http://vendoerevendolenise.blogspot.com/2012/02/como-fazer-faixa-decorativa1.html> Acesso em: 18 jun. 2020.

c) **Contraste**: Tem grande importância e significado, onde através da luz ou de sua ausência, revela as formas dos objetos num processo de articulação visual, sendo uma força vital para a criação de um todo coerente. Desse modo, "[...] o contraste é uma poderosa ferramenta de expressão, o meio para intensificar o significado e, portanto, para simplificar a comunicação" (GOMES FILHO, 2008, p. 62), podendo ser de luz e tom, de cor, vertical, horizontal, movimento, dinamismo, ritmo, passividade, proporção, escala, agudeza. Ele é considerado por Gomes Filho (2008) uma das mais importantes técnicas para o controle visual de uma mensagem bidimensional (2D) ou tridimensional (3D).

Seguindo esse caminho da leitura visual da forma do objeto, Duval (1995) salienta que existe uma diferença significativa quando se olha para um desenho de um objeto físico e quando se olha uma figura geométrica, mesmo que as duas representações tenham aparências comuns, quer seja a representação no papel ou na mente, existe uma diferença funcional, uma vez que a figura deve ajudar a resolver um problema. Na figura geométrica existem restrições internas de organização que não são percebidas ou consideradas no desenho. Duval (2012a) destaca que os processos visuais ligados à matemática podem facilitar ou inibir a visibilidade de elementos constitutivos do objeto geométrico: a percepção de plano, percepção de profundidade, percepção ambígua e percepções não interpretáveis.

A Gestalt, por meio das observações de experimentos, concluiu que a percepção da aparência das formas bidimensionais ou tridimensionais, depende também da organização (GOMES FILHO, 2008). Na Figura 17, a forma ***a,*** na perspectiva Gestáltica, devido à continuidade e regularidade das diagonais, é considerada uma figura bidimensional. Entretanto, a forma ***b*** é considerada ambígua, pois pode parecer tanto bidimensional, composta por quatro triângulos e dois quadriláteros, quanto tridimensional, parecendo o protótipo de um cubo em perspectiva. A continuação da vertical é que impossibilita uma percepção mais definida. A forma ***c*** apresenta uma quebra e irregularidade das linhas, o que facilita a percepção de uma figura tridimensional.

Figura 17 - Representação de formas geométricas.



a *b* *c*

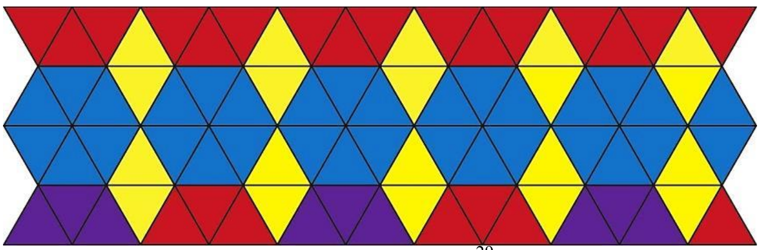
Fonte: Gomes Filho (2008)

A utilização de figuras na resolução de problemas de geometria proporciona uma apresentação intuitiva da situação geométrica, mas muitas vezes elas atrapalham os alunos a obterem a solução do problema (DUVAL, 1995). Como identificar se a forma ***b*** trata-se de uma figura plana ou espacial? Perceba que, se a forma ***b*** não estiver em sinergia com um enunciado, ela poderá ser causadora de constrangimento no momento da procura de uma solução para o problema geométrico no qual ela esteja inserida.

Essas questões precisam ser consideradas quando se pensa na aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. As leis da Gestalt podem fornecer subsídios para a condução do trabalho docente nas situações de ensino da geometria. Compreender os processos cognitivos presentes na leitura visual de um objeto, pode favorecer ao professor o entendimento do porquê o aluno percebe uma figura de uma maneira e não de outra.

O professor precisa estar atento à sequência geométrica da Figura 18, onde a lei da pregnância da forma pode direcionar o olhar do aluno para a estrutura mais simples, devido às condições dadas da harmonia e do equilíbrio visual. A percepção da composição pode ser, primeiramente, percebida pelo aluno através da harmonia das cores.

Figura 2 - Sequência geométrica.



Fonte: Nova Escola[29]

A disposição das formas geométricas destacadas por meio das cores, em que o amarelo representa o losango, o azul um hexágono, o vermelho e o roxo um trapézio, já pode ser motivo de impedimento para a continuidade da sequência pelos alunos. Entretanto, a percepção de que essas formas geométricas são compostas por triângulos equiláteros, exige uma apreensão diferenciada que vai além das formas simples, requerendo processos operatórios que modificam a figura percebida pelas cores. Isso pode trazer sérias dificuldades para os alunos, tornando-se muitas vezes um processo insuperável.

[29] Imagem disponível em: https://novaescola.org.br/questoes/131/identificar-padroes-geometricos-e-reconhecer-formas-geometricas. Acesso: em 09, de ago. 2021.

A fim de analisar o trabalho heurístico de uma figura, os estudos de Duval (1994, 1995, 2012c) apontam que, primeiramente, deve-se considerar a mesma como uma apreensão cognitiva, pois existem várias formas de ver uma figura. Para cada uma dessas distintas maneiras, existem leis específicas de organização e de tratamentos da variedade de estímulos visuais.

3.1.2 As apreensões em geometria

Para iniciar a conversa sobre as apreensões na aprendizagem da geometria, pode-se, primeiramente, perguntar a respeito do papel do uso de uma figura numa situação geométrica. Rapidamente se responderia que, por meio da sua utilização, seria mais fácil resolver a situação-problema, pois ela mostra aspectos ou hipóteses que não seriam tão fáceis de serem percebidos numa explicação verbal. Essa seria a defesa de muitos estudiosos, pois "isto torna possível apreender uma situação como um todo num relance, as figuras são a forma mais direta de explorar os diferentes aspectos, de antecipar os resultados de uma abordagem, de selecionar uma solução" (DUVAL, 1994, p. 121).

Contudo, as figuras, sob o olhar dos alunos, não são capazes de funcionar como uma ferramenta heurística, pois "a simples visão de uma figura parece excluir o olhar matemático sobre ela" (DUVAL, 1994, p. 121), ocasionando o aparecimento de dois tipos de dificuldades observadas nos diversos níveis de ensino. A primeira seria a resistência ao desprendimento das formas e propriedades que são vistas e reconhecidas imediatamente na figura, isso a torna autossuficiente, sendo assim desnecessário qualquer tipo de demonstração.

A outra refere-se à incapacidade de ver matematicamente uma figura e propor possíveis soluções para um problema, focando certas partes de uma figura ou adicionando traços complementares. "Existe assim um hiato entre a visão de uma figura, ou seja, a sua apreensão perceptiva espontânea, e a forma matemática de encará-la. Uma aparece muitas vezes como um obstáculo à segunda, enquanto, sem a primeira, a segunda não seria possível" (DUVAL, 1994, p. 122). Porém, seria um erro pensar que essas dificuldades estão relacionadas a apenas dois modos possíveis de apreensões: a perceptiva e a matemática. Duval (1994) indica que há quatro possíveis formas de apreensões de uma figura: perceptiva, sequencial, operatória e discursiva.

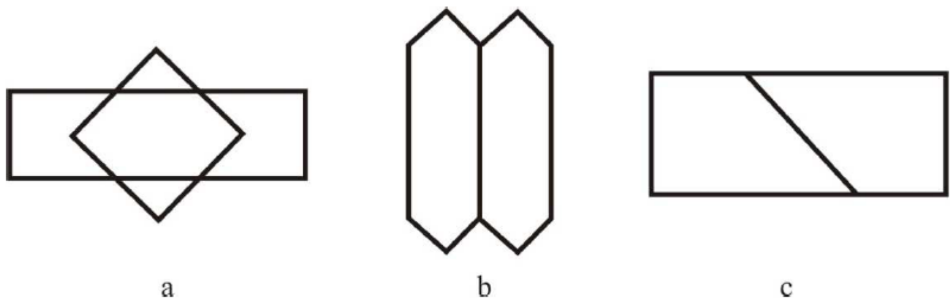
> E a forma matemática de olhar para uma figura envolve, simultânea ou alternadamente, duas ou três destas quatro apreensões possíveis. Uma longa prática matemática tende obviamente a fundi-los, mas eles são, no entanto, cognitivamente

> muito diferentes. O verdadeiro aprendizado da forma matemática de ver uma figura não pode, portanto, ser implementado sem levar especificamente em conta cada um desses quatro tipos de apreensão (DUVAL, 1994, p. 122).

Contudo, essas diferentes formas de apreensão de uma figura não acontecem espontaneamente, existe a necessidade de uma aprendizagem específica de cada uma dessas apreensões para poder desenvolver o olhar matemático sobre uma figura.

A apreensão perceptiva é a mais imediata, pois ela permite identificar ou reconhecer, num primeiro golpe, uma forma ou um objeto, seja de uma forma em 2D ou 3D. “Isto é feito pelo processamento cognitivo realizado automaticamente, portanto inconscientemente. É por isso que a forma de uma figura, ou aquelas que a compõem, é reconhecida desde a primeira vez, e esse reconhecimento permanece estável” (DUVAL, 1994, p. 124). Dependendo da sua dimensão, esses elementos podem ser traços (segue a lei do fechamento e da continuidade), pontos (discretos ou contínuos) ou zonas (caracteriza-se pelo seu contorno).

Figura 19- Exemplos de diferentes organizações perceptivas de figuras.



Fonte: Duval (2012c)

Na figura (*a*) tem-se a superposição de um quadrado e um retângulo; em (*b*) tem-se a montagem de duas formas idênticas com lados que se tocam; e na figura (*c*) tem-se um retângulo repartido em duas partes. Essa lei de fechamento ou de continuidade,

> Por um lado, ela provoca certa resistência ao esquecimento, devido à forma em que aparece, em proveito dos traços organizados em uma forma percebida (ou somente de certos traços). Por outro lado, ela exclui organizações mais simples e impede, desta maneira, de ver outras formas (DUVAL, 2012c, p. 121).

Ou seja, parece que a apreensão perceptiva atua como uma força abdutiva, guardando uma estrutura autônoma na condução do olhar na resolução do problema. Assim, os objetos que se destacam numa figura podem ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige que sejam vistos. “[...] Os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva: estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses" (Duval, 2012c, p. 124). Quer dizer, olhá-la de outros modos implica na correspondência entre a visualização de uma sequência de subfiguras importantes, na conexão dessas subfiguras formando um todo, e ainda, na correspondência da figura com o enunciado.

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se, geralmente, em conflito, *porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente.* O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses (DUVAL, 2012c, p. 120, grifos do autor).

Pode-se pensar numa situação muito comum nas salas de aula dos anos iniciais do ensino fundamental: Apresenta-se uma caixinha de leite (bloco retangular ou paralelepípedo) e pergunta-se o nome da representação da sua forma geométrica. As crianças, muito provavelmente, respondem que se trata de um retângulo. Nesse caso, a apreensão perceptiva que é automática e imediata, conduz a resposta da pergunta, uma vez que as faces desse paralelepípedo são retangulares.

Entretanto, é a apreensão discursiva que conduzirá ao sucesso da resposta, promovendo a interpretação dos elementos característicos do objeto (paralelepípedo), tais como, por exemplo, forma 3D, faces retangulares, arestas, vértices, etc. Para Duval (2012c), a distância entre a interpretação discursiva exigida numa situação geométrica e a apreensão perceptiva, tem origem nas leis da organização perceptiva. Isso pode estar relacionado ao fato de que a apreensão perceptiva fica presa a forma global da figura e limita-se apenas a observações, impedindo, muitas vezes, de operar com essa figura.

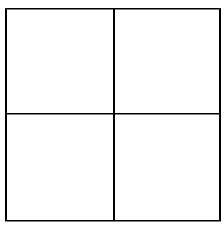
A apreensão sequencial também é motivo de dificuldade para muitos alunos, apesar de ser a mais abordada em situações de ensino, eles dificilmente conseguem atender às solicitações indicadas nos enunciados de construção ou nas atividades de descrição da reprodução de uma figura. "Diz respeito à ordem de construção de uma figura. Esta ordem depende não só das propriedades matemáticas da figura a ser construída, mas também das restrições técnicas dos instrumentos utilizados [...]" (DUVAL, 1994, p. 126). Isso exige um tratamento específico na construção de uma figura que deve respeitar as associações iniciais entre as propriedades matemáticas e as possibilidades técnicas do instrumento.

As atividades que requerem a apreensão sequencial podem ser o primeiro passo para que as crianças observem as propriedades específicas das formas geométricas, bem como as diferenças e semelhanças entre elas. Por exemplo, solicitar às crianças que construam e descrevam as etapas da confecção de um triângulo equilátero, utilizando régua e compasso, pode permitir que elas percebam que o triângulo equilátero, além de outras propriedades, tem os lados com a mesma medida, uma vez que a abertura do compasso foi a mesma para os três lados. "A função da apreensão sequencial de uma figura é a de um modelo, e esta função aparece claramente junto a certos softwares de construção [...]" (DUVAL, 1994, p. 126), que permitem operar com as formas geométricas, contribuindo para modificar a visão, e consequentemente o conhecimento que se tem do objeto representado.

A percepção da organização e reorganização do conjunto de formas de uma figura conduz a realização de várias operações de reconfiguração por meio de manipulações, física ou mental, sobre o todo ou parte da figura. Trata-se, portanto da apreensão operatória, que "é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis" (Duval, 2012c, p. 125). Essas modificações são: modificação mereológica, ótica e posicional.

A modificação mereológica acontece da relação parte e todo. Assim, é possível dividir uma figura em subfiguras de mesma dimensão, incluí-la em outra figura de modo que se torne uma subfigura. Esse tipo de modificação pode ser abordado nos anos iniciais, por exemplo, através da questão: quantos quadrados são apresentados na figura?

Figura 20 - Quadrado subdividido.



Fonte: A autora

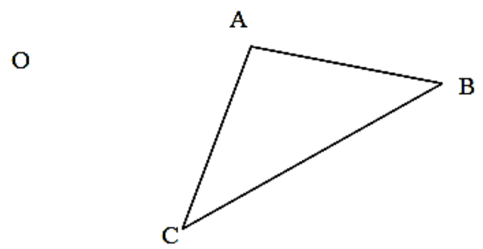
Para ter sucesso na resposta dessa questão, as crianças precisam ver a figura como subfiguras que devem estar relacionadas com o todo. Muito provavelmente, as crianças responderiam que a figura apresenta quatro quadrados. Isso porque elas não se atêm a sua decomposição em quatro quadrados menores que estão inseridos em um quadrado maior.

A modificação mereológica também pode ser observada quando as subfiguras perceptíveis, de uma dada figura, são separadas e recombinadas numa reconfiguração em que faz surgir uma nova figura em relação à original. Muitas vezes isso só é possível por meio da adição de traços à figura inicial, e pode também, ser realizado nos anos iniciais por meio de materiais manipuláveis como, por exemplo, recortes ou dobraduras em folhas de papel. Os fracionamentos de uma figura dada podem ser homogêneos (as partes obtidas têm a mesma forma que o todo) ou heterogêneos (as partes obtidas não têm a mesma forma do que o todo). O fracionamento de um quadrado em outros quadrados menores e a divisão de um quadrilátero em dois triângulos constitui, respectivamente, exemplos de reconfiguração intermediária homogênea e heterogênea, que podem ser contemplados nos anos iniciais.

Na modificação ótica, Duval (2012c) diz que uma figura pode ser aumentada, diminuída ou deformada. Em outras palavras, a figura pode ser transformada em outra que é chamada sua imagem através de um jogo de lentes ou espelhos. Essa modificação permite que a figura mantenha a sua forma inicial ou não. É um tipo de modificação que “consiste em ver em profundidade” (DUVAL, 2004a, p. 166), uma representação plana, constituindo “[...] a produtividade heurística do registro figural em relação com o discurso matemático tão útil para a compreensão da homotetia” (DUVAL, 2004a, p. 167).

Nos anos iniciais, atividades de ampliação, de redução e de colocar figuras em perspectiva, podem ser algumas alternativas para fazer as crianças perceberem que uma figura pode ser transformada em outra, mas mantendo-se as propriedades. Um exemplo de atividade que pode ser desenvolvida, nesse nível de ensino, é pedir para que elas ampliem o triângulo ABC por homotetia, tendo o ponto O como centro.

Figura 21 - Imagem do triângulo ABC.



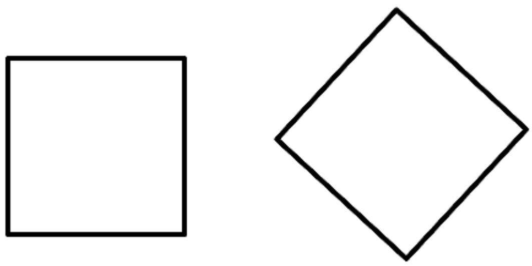
Fonte: A autora

A necessidade de adicionar traços auxiliares para pôr o triângulo ABC em perspectiva e assim poder vê-lo em profundidade, requer o estabelecimento de relações e modificações a partir da figura original, porém mantendo as mesmas propriedades do objeto.

Essas modificações óticas dirigem o olhar a perceber primeiramente as transformações das unidades figurais 2D no espaço. “Esta operação de pôr em perspectiva, ou de superposição por profundidade, constitui um tratamento figural que guia a análise matemática da configuração homotética plana, na qual deve ler-se em termos de pontos e de relações de longitude de segmentos” (DUVAL, 2004a, p. 167-168), permitindo uma realização mais rápida e possibilitando um meio de controle.

A modificação posicional se refere ao deslocamento ou rotação de uma figura em relação às referências do campo onde ela se destaca. Por exemplo, nos anos iniciais, um quadrado deve ser apresentado aos alunos em diferentes posições, uma vez que suas propriedades não variam em função da sua posição no plano.

Figura 22 - Quadrado em duas posições diferentes.



a **b**

Fonte: A autora

O reconhecimento da forma *b* como sendo um quadrado, está longe de ser alcançada por muitos alunos. Muito provavelmente, a forma *a* será reconhecida facilmente como um quadrado, no entanto, a forma *b,* possivelmente, será identificada como um losango. Isso porque a figura *b* está numa posição em que os meios escolar e social pouco privilegiam. Contudo, a apreensão operatória posicional se faz necessária para a resolução de muitos problemas em geometria.

Em síntese, a apreensão operatória trata das modificações geométricas possíveis em uma figura e podem ser realizadas de muitas maneiras. O Quadro 5 oferece um panorama dessas modificações.

Quadro 5 - Tipos de apreensões operatórias de figuras.

TIPO DE MODIFICAÇÃO FIGURAL	OPERAÇÕES QUE CONSTITUEM A PRODUTIVIDADE HEURÍSTICA	FATORES QUE INTERFEREM NA VISIBILIDADE
MODIFICAÇÕES MEREOLÓGICAS	-Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
MODIFICAÇÕES ÓTICAS	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
MODIFICAÇÕES POSICIONAIS	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras.

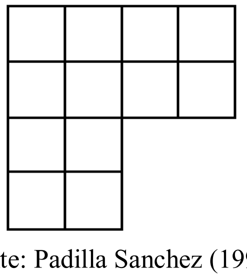
Fonte: Duval (2012c)

De acordo com Duval (1994), todas estas modificações apresentam duas características importantes: a) elas podem ser realizadas livremente sem restrições teóricas, tomando-se apenas para fins ilustrativos; b) as possibilidades de operação de uma figura podem se pautar na organização dos elementos dela. Assim sendo, podemos ter para um mesmo conjunto de elementos, organizações diferentes e, portanto, formas visualmente desiguais para uma mesma figura.

> Isto significa que a apreensão operatória pode ser feita independentemente do conhecimento matemático, mesmo que algumas das suas modificações possam ser congruentes com os tratamentos matemáticos. Todas estas modificações são realizadas no registro único da figura e utilizando os tratamentos permitidos pelas leis e parâmetros de organização dos elementos em uma figura (DUVAL, 1994, p. 128).

Um exemplo que ilustra essa afirmação pode ser: pedir para que as crianças decomponham a figura do hexágono irregular em quatro peças que possam ser sobrepostas.

Figura 23 - Hexágono irregular para decompor.



Fonte: Padilla Sanchez (1992)

Percebe-se que a solução do problema não exige conhecimento matemático. A resolução pode ser encontrada por meio de tentativas, em que a figura pode ser dobrada, colorida ou recortada. A apreensão operatória exerce um papel importante na resolução de um problema em geometria, pois ela possibilita a produção heurística sobre a figura.

No entanto, é imprescindível que a apreensão operatória estabeleça uma relação com a apreensão discursiva, que é de outra natureza. Ela "[...] equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável" (DUVAL, 2012c, p. 135). Isso porque a figura por si só não pode representar todas as suas características, ela precisa de uma indicação verbal para se ancorar como representação do objeto matemático.

A famosa frase de Confúcio "uma imagem vale mais que mil palavras" pode ser de grande valia em muitos contextos sociais e tem sido cada vez mais reforçada no momento atual, com a difusão das redes sociais. Todavia, quando se trata da aprendizagem de geometria, essa afirmação pode causar certos embaraços, ao postular-se "[...] que a articulação entre 'imagem' e 'linguagem' ocorreria de forma espontânea" (DUVAL, 2003, p. 39), reforçando a ideia de que a figura por si só é capaz de despertar as propriedades discursivas.

Para Duval (2004a) a articulação entre figura e discurso deve ser realizada nos dois níveis de funcionamento do raciocínio dedutivo: local e global. A articulação local se apoia na correspondência entre as unidades figurais e as expressões referenciais, efetuando-se nos limites da dedução, e, a articulação global consiste nos procedimentos de resolução do problema, apoiando-se na relação entre ver uma sequência de subfiguras e o encadeamento dos processos dedutivos.

A visualização e o discurso constituem dois tipos de funcionamento cognitivo que geralmente são tomados em posições opostas no estudo da geometria, contudo, sua articulação é imprescindível para a aprendizagem (DUVAL, 2005b). Essa conexão, entre visualização e discurso, implica na correspondência de conteúdos que podem ser estabelecidos entre as duas representações (figural e discursiva), atentando-se à forma que as unidades figurais e as unidades de sentidos podem ser discernidas e organizadas em cada uma das representações que são postas em sinergia cognitiva. Duval (2005b) afirma que a análise estrutural da correspondência deve levar em consideração que todo discurso executa três níveis de operações discursivas:

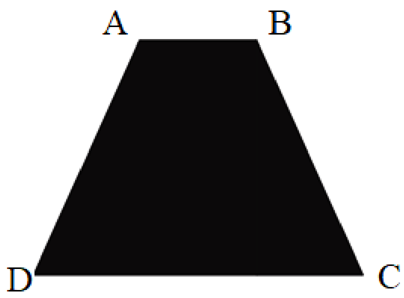
> 1. A fixação cognitiva de enunciado sobre uma figura se faz ao nível da designação de unidades figurais, por emprego de termos que implicam a desconstrução dimensional das formas visualmente reconhecidas. 2. A interação cognitiva entre

> visualização e discurso, só começa, de fato, no nível das proposições que o enuncia, seja qual for seu status (constatação, definição, suposição...) no discurso produzido. [...] De um ponto de vista estrutural, isso se traduz pelo fato que a visualização requer um encadeamento de duas figuras que podem ser das subfiguras da figura inicial, ou o encadeamento de partida de uma de suas transformações visuais. [...] 3. Uma articulação cognitivamente produtiva entre visualização e discurso, só começa no nível das transformações de representação que podem ser conduzidas, de maneira independente, em cada um dos dois registros (DUVAL, 2005b, p. 49).

A sinergia entre visualização e discurso é importante em virtude de que não se pode afirmar que uma propriedade matemática se "mostra" na figura.

Nos anos iniciais é importante que o professor chame a atenção das crianças para esse aspecto, propondo atividades geométricas que requeiram a mobilização das propriedades discursivas em sinergia com a visualização. Um exemplo de atividade com essa finalidade, que pode ser desenvolvida nos anos iniciais, seria: “De que forma podemos transformar o trapézio isósceles ABCD em um retângulo, com apenas um corte?”

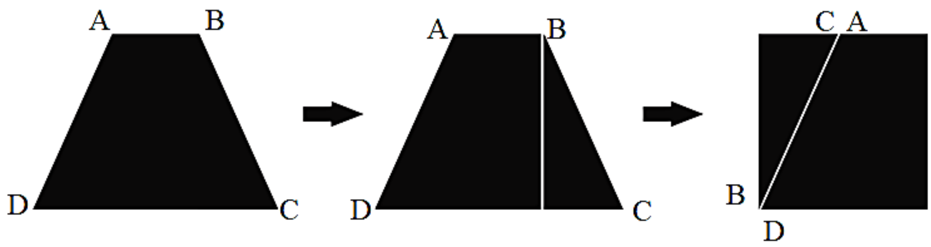
Figura 24 - Trapézio isósceles ABCD.



Fonte: A autora

Afirmar que a figura é um trapézio isósceles somente pela visualização, pode ser um erro. Nesse caso, existe a necessidade de uma indicação discursiva para assegurar que os lados AD e BC possuem as mesmas medidas. A partir do discurso é que os tratamentos são possíveis, tendo em vista que no enunciado consta a garantia da congruência entre os ângulos: A e B, D e C, o que possibilita traçar um segmento de reta perpendicular ao lado DC com origem em B. Assim, o trapézio fica subdividido em um triângulo retângulo e um trapézio retângulo, que ao serem reorganizados, formam um retângulo (existem outras formas possíveis de reconfiguração).

Figura 25 - Reconfiguração do trapézio ABCD.



Fonte: A autora

Percebe-se que, a apreensão discursiva da figura (trapézio) diz respeito às propriedades matemáticas e não apenas aquelas orientadas pelas hipóteses. "Esta explicação é de natureza dedutiva. A função epistemológica da apreensão discursiva é a demonstração" (DUVAL, 1994, p. 124). Prova disso são os exercícios de aplicação de teoremas ou definições que estão pautados nesse tipo de apreensão. "De fato, a verdadeira representação corresponde a uma atividade de demonstração em geometria, não será uma figura, mas uma rede semântica de propriedades e objetos" (DUVAL, 2012c, p.135).

No caso do exemplo supracitado, somente a indicação discursiva não deixou explícito que as medidas dos ângulos da base do trapézio eram as mesmas. Foi preciso mobilizar uma rede de propriedades do trapézio para que se pudesse traçar o corte perpendicular ao lado DC. Por exemplo, se os lados concorrentes têm a mesma medida e as bases do trapézio são paralelas, isso leva as propriedades existentes entre os ângulos formados, entre duas paralelas e uma transversal. E assim, sucessivamente, outras propriedades vão sendo requisitadas durante o processo de resolução do problema, ou seja, uma rede semântica de propriedades do trapézio.

Do ponto de vista cognitivo, percebe-se uma diferença entre os enunciados de instruções para a construção de uma figura e os enunciados de demonstrações. No primeiro, tem-se apenas uma linearidade com uma sequência de passos sucessivos que precisam ser seguidos para a construção de uma figura. No segundo, inexiste uma linearidade, o discurso precisa ser organizado a partir de uma rede semântica de relações conceituais.

> Pode-se assimilar a atividade de demonstração ao raciocínio, na medida em que para este termo designa-se a produção de argumentos, a inferência constantemente solicitada na compreensão de qualquer que seja o discurso, ou ainda, a interpretação que permite encontrar uma mudança de registro. A atividade de demonstração só pode surgir se for a partir de um ponto de convergência de numerosas funções cognitivas. Favorecer o desenvolvimento de todas estas funções poderá ser uma via mais rápida e mais frutuosa para o ensino, do que aquela que propõe procedimentos de imitação para simular ou reproduzir uma demonstração (DUVAL, 2012c, p. 137).

Segundo Duval (2012c), a apreensão discursiva pode ser negligenciada quando existe a congruência semântica entre a operação matemática e o enunciado do problema. Entretanto, quando não há uma congruência semântica entre o enunciado e a operação operatória, a apreensão discursiva torna-se necessária. Nessa direção, “[...] deve haver uma interação entre os tratamentos figurais que, por abdução, guiam a diligência heurística, e os tratamentos discursivos que, por dedução, constituem a diligência baseada nos objetos representados na figura” (Duval, 2004a, p. 168). Em outras palavras, as propriedades pertinentes de uma figura dependem do que é dito no texto como hipótese e não apenas da atividade heurística que a figura desperta.

> Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico (DUVAL, 2012c, p. 133).

Na apreensão discursiva tem-se a necessidade de compreender o vocabulário formal que contempla as definições e os conceitos geométricos, “[...] não basta ter uma imagem diante dos olhos para ver o que é necessário ver, ou seja, ver o relacionamento com uma afirmação que a descreva ou que seja exigida algum aspecto” (DUVAL, 2004b, p. 32), é indispensável à coordenação dos termos e dos conceitos com a figura. Essa ancoragem se faz necessária, porque um mesmo termo pode representar conceitos geométricos diferentes, dependendo da rede semântica em que está inserido.

O ato de ver envolve dois níveis de operação diferentes e independentes: o reconhecimento discriminativo de formas e a identificação dos objetos correspondendo às formas conhecidas. No nível do reconhecimento discriminativo de formas, as figuras são vistas como estáveis, pois estão centradas sobre o contorno, impossibilitando, desse modo, qualquer modificação em outras formas parecidas ou diferentes. De acordo com Duval (2005b), essa operação não tem nada de atividade geométrica. Ela só parece ser geométrica, mas a mesma atividade de reconhecimento e iconicidade poderia ser feita, por exemplo, por meio do reconhecimento das formas das letras do alfabeto.

“A visualização icônica repousa sobre uma semelhança entre a forma reconhecida num traçado e a forma característica do objeto a identificar” (DUVAL, 2005b, p. 15). Contudo, esse mecanismo de iconicidade nem sempre é suficiente na resolução de problemas geométricos, “[...] é preciso, às vezes uma relação verbal de informações, integrada a imagem, como legenda ou codificação de um elemento figurativo, para saber identificar o que as formas discriminadas apresentam" (DUVAL, 2005b, p. 14). Mas, o auxílio do enunciado não descaracteriza a importância do mecanismo da iconicidade no processo da visualização em geometria.

Nos anos iniciais, é importante que as diferentes apreensões sejam consideradas nas situações de aprendizagem da geometria. O conhecimento dos professores pedagogos sobre essas diferentes maneiras de olhar uma figura, pode garantir que se estabeleça uma longa prática matemática que envolva simultaneamente ou alternadamente duas ou mais formas de apreensão. Dependendo da atividade proposta, um tipo de apreensão ganha mais destaque do que outra, como, por exemplo, na situação que pode ser desenvolvida nos anos iniciais: Desenhar um círculo inscrito em um quadrado com 5 cm de lado. Para resolver esse problema é necessário utilizar os quatro tipos de apreensões. Contudo, a apreensão sequencial é a mais exigida, pois a construção da figura depende do estabelecimento da ordem dos comandos a serem seguidos.

Note que o enunciado se refere primeiramente a um círculo, porém o centro deste tem relação direta com o encontro das diagonais do quadrado. Ou seja, requer as apreensões discursiva (indicações contidas no enunciado) e operatória (inserção de traços auxiliares) na resolução do problema. Mas, apenas as apreensões sequencial, discursiva e operatória não garantem o sucesso da resposta. A apreensão perceptiva também desempenha um papel importante no reconhecimento das formas indicadas no enunciado (círculo e quadrado).

Para resolver essa questão, pode-se pensar em construir o quadrado com 5 cm de lado, traçar as suas diagonais, e a seguir, tomar a distância entre o ponto de encontro das diagonais do quadrado e o ponto médio do lado do quadrado (raio) para traçar a circunferência. Percebe-se que essa ordem de resolução não segue as mesmas etapas das instruções do enunciado do problema. Isso exige um custo cognitivo considerável na resolução dessa questão, pois requer o estabelecimento de uma rede semântica e não apenas o cumprimento de uma sequência de procedimentos.

3.1.3 As mudanças dimensionais

Dependendo da mobilização que uma figura é submetida, podem-se distinguir duas maneiras de funcionamento para vê-la: a visualização icônica ou não icônica. Quando a figura permanece estável tem-se a visualização icônica. As formas não são vistas com possibilidades de transformações em formas parecidas ou diferentes da original. Nessa maneira de ver, de acordo com Duval (2005b), o conhecimento está centrado no contorno da forma ou em uma superfície. Desse modo, todas as demais propriedades da figura não são tomadas em consideração, a não ser que essas propriedades estejam colocadas explicitamente no enunciado. Pode-se até dizer que existe uma certa resistência em sair do contorno fechado.

Já a visualização não icônica parte do princípio de que se deve desconstruir as formas visualmente conhecidas, pois uma figura não é o que se vê à primeira vista. Nas situações de ensino é comum serem requisitadas duas maneiras de ver uma figura, que de acordo com Duval (2005b, p. 7) são: uma centrada na construtibilidade das figuras, com o uso de instrumentos e outra com foco em seu enriquecimento heurístico para revelar formas que ainda não são vistas. Porém, essas duas maneiras de ver uma figura são apenas uma forma superficial de uma terceira – a desconstrução dimensional de formas, que constitui um mecanismo cognitivo da visualização matemática.

> A construção de figuras, ou sua utilização heurística, só tem sentido quando elas se inscrevem nesse funcionamento da visualização matemática. Pois, com essa terceira maneira de ver, o espaço não é mais abordado sob o aspecto grandeza e mudança de escalas de grandeza, nem sob o de formas discriminatórias de propriedades topológicas e afins, ele é abordado sob o aspecto de suas dimensões e da mudança do número de dimensões. A mudança do número de dimensões está no centro do olhar geométrico sobre as figuras (DUVAL, 2005b, p. 7).

Percebe-se que operar as figuras geométricas não se restringe apenas a sua construção, pelo contrário, envolve a desconstrução dimensional de todas as formas construídas instrumentalmente ou por meio de algum *software*. Duval (2005b) indica três tipos de desconstrução das formas: a desconstrução instrumental para construir uma figura, a decomposição heurística e a desconstrução dimensional.

Quando se parte da desconstrução de uma forma visual de base para obter uma outra forma visual de base, tem-se a desconstrução dimensional instrumental para construir uma figura. Um exemplo de atividade desse tipo de desconstrução, para os anos iniciais, é pedir para que as crianças dividam um retângulo com apenas um corte, de maneira que juntando as duas partes obtenha-se um triângulo. Essa atividade pode ser realizada com dobraduras e recortes ou com traçado no papel. Em ambos os casos, a construção do triângulo depende da desconstrução do retângulo, por meio de um traço suplementar.

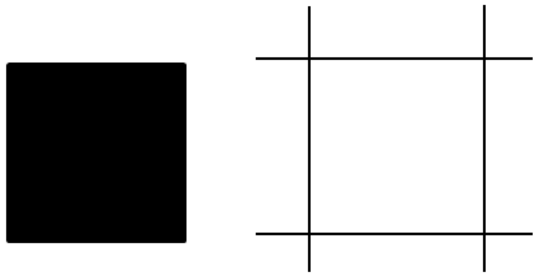
A desconstrução visual acontece por meio da decomposição dimensional das formas, permitindo analisar a transformação de uma forma dada em outra, de unidade dimensional igual ou menor que a figura inicial. Esse processo constitui, segundo Duval (2005b), a marca inicial e decisiva para a aprendizagem da geometria[30].

> A maneira matemática de ver as figuras consiste em decompor qualquer forma discriminada, isto é, reconhecida como uma forma nD/2D, *em unidades figurais de um número de dimensão inferior àquele dessa forma.* Assim, a figura de um cubo ou de uma pirâmide (*3D*/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, triângulos etc. (unidades figurais *2D*/2D). E os polígonos são, por sua vez, decompostos em segmentos de lados (unidades figurais *1D*/2D). E os lados, ou os segmentos, podem ser decompostos em "pontos" (*0D*/2D). Notemos que, com os pontos, nós saímos de toda a visualização (DUVAL, 2005b, p. 20, grifos do autor).

Uma das grandes dificuldades para entrar nessa maneira de ver a figura por decomposição em unidades figurais de dimensão inferior, é a presente tendência de olhar, primeiramente, aquela de dimensão superior. Isso porque "[...] é sempre a unidade figural de dimensão superior que se impõe imediatamente à percepção, e que bloqueia o reconhecimento de todas as unidades figurais de dimensão inferior que ela envolve potencialmente e funde visualmente" (DUVAL, 2011, p. 87).

No entanto, é a desconstrução dimensional que desempenha um papel fundamental no processo de visualização em geometria. É ela que permitirá a tomada de consciência das propriedades figurais em sinergia com as suas operações discursivas (DUVAL, 2011). Mas, essa forma de olhar vai contra o reconhecimento automático das formas. Por exemplo, nos anos iniciais quando é apresentada a figura de um quadrado (2D), dificilmente as crianças irão perceber o mesmo como um feixe de retas (1D) paralelas cortado por duas retas transversais paralelas e perpendiculares ao feixe de retas, em que os segmentos formados têm todos as mesmas medidas, como mostra a Figura 26.

Figura 26 - Desconstrução dimensional do quadrado.



Fonte: A autora

[30] Essa é a coluna vertebral que foi utilizada para construir um programa de formação para os professores pedagogos. Nossa hipótese, *a priori*, é de que esse tipo de abordagem poderia auxiliar o professor na condução do processo da aprendizagem da geometria das crianças dos anos iniciais.

Porém, é pela desconstrução dimensional do quadrado (2D) em segmentos de reta (1D) que as propriedades da figura emergirão, permitindo a expansão discursiva. Nesse caso, a desconstrução dimensional pode possibilitar que as crianças tenham um olhar geométrico sobre o quadrado, percebendo que ele é um polígono composto por quatro lados de mesma medida (polígono regular), que ele tem quatro ângulos retos (retângulo), que seus lados opostos são paralelos (paralelogramo), que possui quatro vértices (0D), entre outras propriedades.

A decomposição heurística por divisão mereológica das formas reconhecidas pode ser comparada a um processo de metamorfose/anamorfose. As formas são desconstruídas em unidades figurais com o mesmo número de dimensões da figura dada inicialmente. Essa decomposição pode ser homogênea, estritamente homogênea ou heterogênea (DUVAL, 2005b).

Quando a decomposição da figura inicial é feita em unidades figurais da mesma forma, diz-se que é estritamente homogênea. Mas, quando a decomposição é feita em unidades figurais diferentes da figura inicial (porém todas com a mesma forma), é chamada por Duval (2005b) de homogênea. Se a decomposição for feita em unidades figurais de formas diferentes entre elas, tem-se a heterogênea. Esses processos não apresentam o mesmo custo cognitivo na resolução de um problema, levando em conta que, nas decomposições homogêneas as transformações são visualmente reversíveis, ao passo que nas decomposições heterogêneas elas não são visualmente reversíveis.

> Para uma figura inicial determinada por um enunciado de problema, há na realidade, várias decomposições mereológicas possíveis, mas todas não conduzem à solução do problema. Às vezes, acontece que aquelas que o conduzem, não são diretamente visíveis sobre a figura. Melhor dizendo, há situações em que a figura ajuda a ver e outras em que ela impede de ver (DUVAL, 2005b, p. 22).

Assim, a decomposição mereológica apresenta certa especificidade, pois ela pode ocorrer fisicamente, graficamente ou simplesmente ao olhar a figura, proporcionando o seu distanciamento com o discurso matemático. Contudo, a visualização e o discurso constituem, segundo Duval (2005b), dois tipos de funcionamento cognitivo que devem ser articulados, que são de suma importância e absolutamente decisivos para a aprendizagem da geometria, porque "[...] a atividade geométrica repousa sobre a sinergia cognitiva desses registros de representação" (DUVAL, 2005b, p. 48).

Essa sinergia se torna ainda mais evidente e necessária no processo de decomposição por construção dimensional das formas, uma vez que essa ação está inteiramente subordinada a um discurso axiomático ou axiomatizável. “Enquanto a decomposição mereológica pode ser efetuada ou simulada materialmente com objetos físicos que se separa e que se reúne de uma maneira, a construção dimensional não pode ser materializada” (DUVAL, 2005b, p. 24).

A desconstrução dimensional das formas representa uma revolução cognitiva na organização e no reconhecimento perceptivo das mesmas. Dificilmente uma figura 2D é reconhecida em suas dimensões menores numa primeira vista e isso leva Duval (2003) a fazer três observações:

> - qualquer atividade geométrica em uma figura implica deslocamentos na escala de dimensões 3D-0D [...].
> - unidades figurativas que podem ser vistas ou reconhecidas em uma figura são sempre relativos a um número específico de dimensões necessárias para o olhar ou aquele que é imposto na maneira de olhar.
> - [...] dividir dimensionalmente uma unidade figurativa nD em uma configuração da unidade (n – 1)D é uma operação totalmente diferente da quebra gestáltica de uma configuração de formas 2D em outras formas 2D (DUVAL, 2003, p. 45-46).

Essas observações levam a compreender as especificidades das figuras geométricas em comparação aos demais tipos de visualização semiótica. Elas apresentam uma importante originalidade “[...] as unidades figurativas discerníveis em uma figura não são constantes, mas podem variar tanto dimensionalmente como gestalticamente, dependendo do problema a ser resolvido” (DUVAL, 2003, p. 46).

É importante considerar dois pontos para entender o funcionamento da desconstrução dimensional das formas, que, de acordo com Duval (2003), são: a) o trabalho sobre as figuras acontece nas unidades 1D/2D e não mais nas unidades 2D/2D. Isso requer reconhecer formas não visíveis imediatamente, pois a partir de uma rede de retas pode aparecer uma variedade de formas 2D/2D; b) a desconstrução dimensional das formas é indispensável para a compreensão efetiva de toda enunciação de propriedades geométricas e sua mobilização pelos alunos é essencial para a resolução de problemas.

Um exemplo de atividade, para os anos iniciais, que requer a desconstrução dimensional das formas, poderia ser: “Trace o caminho mais curto que a formiga Lili deve percorrer para chegar ao ponto A”.

Figura 27 - Desenho ilustrativo da atividade.

Fonte: A autora

Para resolver o problema há necessidade de se ampliar os significados das palavras que permitem observar as possíveis modificações da figura. Como se trata de uma figura bidimensional e o problema pede um percurso linear (1D), uma reviravolta na maneira de olhar o retângulo é exigida.

Para traçar o caminho mais curto é preciso operar com a figura sobre as unidades 1D e não mais pelas unidades 2D. Isso requer reconhecer formas que não estão visíveis na figura, como, por exemplo, os segmentos de retas que contornam o retângulo. A partir da desconstrução do retângulo, em segmentos de reta, é possível perceber a possibilidade de traçar uma infinidade de outros caminhos que façam a ligação do ponto de partida com o ponto de chegada, e não apenas aqueles que coincidem com os lados do retângulo. Contudo, a solução do problema passa por uma propriedade que é peculiar a distância relativa entre dois pontos (0D). Nesse caso, o caminho mais curto entre dois pontos (de partida e de chegada) é um segmento de reta (1D). Ou seja, a trajetória que deve ser percorrida pela formiga Lili representa a diagonal do retângulo.

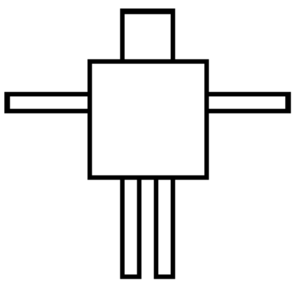
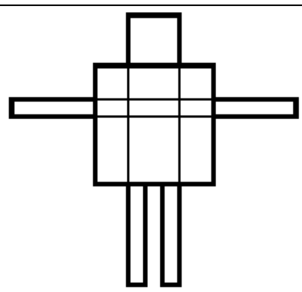
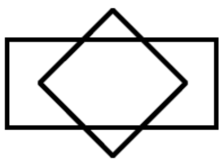
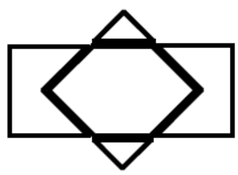
> Existe, portanto, um salto cognitivo considerável entre a maneira normal e a maneira matemática de ver. Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras unidades figurais que não vemos. Isso é uma variação que se opera no olhar e não por um deslocamento no monitor. Naturalmente, isso exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas (DUVAL, 2011, p. 88).

Esse tipo de olhar não é exigido e nem desenvolvido em outras áreas do conhecimento. Por exemplo, numa aula de geografia não existe a necessidade de decompor os mapas (2D) em segmentos de retas (1D) para enxergar a localização geográfica do Brasil. Contudo, é na mudança dimensional das formas, uma maneira agressiva e irrealista de ver, “[...] que se fundamenta o enunciado das propriedades nas definições e nos teoremas” (DUVAL, 2011, p. 88). Essa forma matemática de ver, permite que sejam consideradas as transformações de uma representação em outras representações semióticas para uma mesma figura.

Porém, essas coisas não são tão simples de serem percebidas, pois "[...] a desconstrução dimensional das formas, implicada pela introdução de conhecimentos geométricos, contraria os processos espontâneos de identificação visual das formas" (DUVAL; GODIN, 2005, p. 7). Existe a necessidade de um longo trabalho para desenvolver a habilidade de análise visual das figuras. "Sem essa transformação da forma espontânea e predominante de ver, todas as formulações de propriedades geométricas correm o risco de serem formulações vazias" (DUVAL; GODIN, 2005, p. 8).

O ato de ver e de analisar uma figura pode assumir três formas diferentes, que de acordo com Duval e Godin (2005) se dão através da: percepção (a análise é feita de acordo com formas que reconhecemos e as propriedades visuais destas formas), justaposição (observa-se tantas formas quantas forem os contornos fechados) e sobreposição (observa-se menos formas do que a quantidade de contornos fechados). No quadro abaixo, tentou-se diferenciar a justaposição e a sobreposição, posto que a maneira perceptiva já foi discutida.

Quadro 6 - Comparativo de visualização de figuras por justaposição e sobreposição.

a  Se olharmos a imagem como sendo um protótipo do corpo humano e considerarmos apenas os contornos, obteremos 6 formas retangulares (2 braços, 2 pernas, o tronco e a cabeça), ou seja, vemos a figura por uma justaposição de formas.	*b*  Ao prolongarmos os traços dos braços e da cabeça, temos uma sobreposição de forma, logo se observa uma quantidade menor de formas do que a quantidade de contornos fechados, como os percebidos pela justaposição. Agora temos apenas 5 faixas de forma retangulares, mais ou menos largas, que estão sobrepostas sem sabermos qual a sua ordem de sobreposição.
c  Conceber essa imagem como uma sobreposição de	*d*  Olhando a imagem como uma justaposição de

formas, observamos dois quadriláteros em que não sabemos a sua ordem de sobreposição. Logo, percebemos uma quantidade menor de formas se comparados ao olhar na perspectiva de justaposição.	formas, observamos 5 polígonos (dois triângulos, dois pentágonos côncavos e um hexágono). Observa-se uma quantidade maior de formas do que quando a mesma figura é vista como uma sobreposição de formas.

Fonte: A autora a partir de Duval (2011) e Duval e Godin (2005)

Percebe-se a diferença entre as maneiras de ver uma figura por justaposição ou por sobreposição. Quando se sobrepõem, há uma redução das formas conhecidas que pode acontecer por meio da extensão dos traçados reconhecidos como pertencentes a uma forma e não a outra. A figura *a* assemelha-se a forma de um corpo humano, isso constitui um obstáculo para a mudança de olhar. Contudo, somente por meio do prolongamento de retas *b* que essa figura assume o seu caráter geométrico, amenizando a sua forte iconicidade. Existe também uma resistência perceptiva para ver a figura *c* como um acoplamento por justaposição, tal qual mostra a figura *d*.

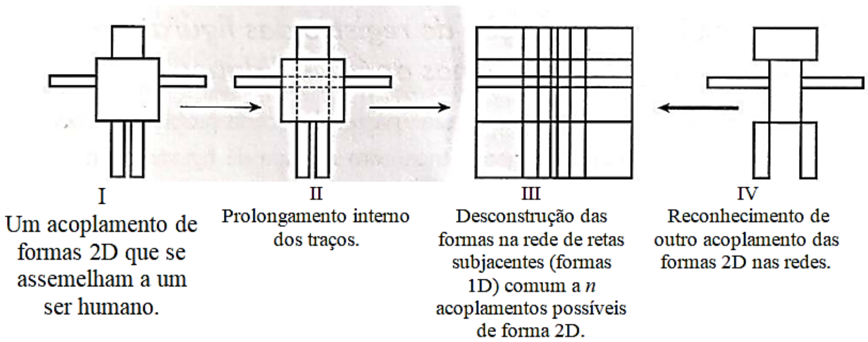
Para Duval e Godin (2005), essa atividade de prolongar os segmentos desempenha um papel essencial na transição das superfícies para as retas, ou seja, na mudança dimensional das formas.

> De qualquer forma, em ambos os casos, o olhar identifica apenas as formas 2D – as superfícies – que correspondem aos contornos fechados, e não as formas 1D que são as arestas ou as separações com pontos de interrupção de formas 2D. Isso condiciona a primeira tarefa de ensino: passar de uma análise visual de figuras em termos de montagens de superfície (formas 2D) para uma análise visual em termos de montagens de retas (formas 1D) (DUVAL; GODIN, 2005, p. 10).

Essa desconstrução dimensional das formas de unidade nD em uma configuração de unidades (n-1)D é uma operação muito diferente daquela de desconstruir uma forma 2D em outras configurações de forma 2D, como nos exemplos citados para os casos de justaposição e sobreposição. As unidades figurativas reconhecidas em uma figura são relativas ao número de dimensões que são impostas ao olhar, isso implica "[...] que a decomposição de uma simples forma 2D (triângulo, quadrilátero) em uma configuração de formas 1D (os lados para considerar suas relações) supõe que se 'desconstrua' dimensionalmente e não gestalticamente esta unidade figural icônica 2D!" (DUVAL, 2003, p. 46).

A Figura 28 ilustra as operações figurais que permitem a desconstrução dimensional das formas, propiciando a passagem de uma figura à outra.

Figura 28 - Desconstrução dimensional de uma figura.



Fonte: Duval (2011)

Duval e Moretti (2018) propõem duas fases para descrever o processo cognitivo que subentende a maneira heurística de ver a desconstrução dimensional das formas 2D/2D. Na primeira fase é preciso prolongar as bordas de um contorno fechado para que apareça uma rede de retas implícitas nele, neutralizando assim, a percepção direta do contorno, como pode ser percebido na figura acima, quando da passagem de I para III. Essa modificação necessária de juntar um novo traçado a uma figura elementar para surgir novas formas 2D é uma atitude "[...] que os alunos não possuem diante de uma 'figura'" (DUVAL; MORETTI, 2018, p. 86). Isso vai exigir um processo longo de aprendizagem, tendo em vista que tal atitude é adversa à visualização icônica.

> Essa tendência pesada da visualização icônica vai contra o desenvolvimento do que deve tornar o gesto reflexo para poder fazer da geometria: *decompor toda forma,* que se reconhece de emblema em um conjunto de traços ou em qualquer figura de ponto de partida, *em uma configuração de outras unidades figurais* do mesmo número de dimensões ou de um número inferior de dimensões (DUVAL, 2005b, p. 16, grifos do autor).

Esse processo de decomposição de uma figura, em que se encontra uma rede subjacente de retas, percebendo as anamorfoses geométricas de uma configuração inicial em outras completamente diferentes (como pode-se observar na passagem de III para IV), constitui a segunda fase da maneira heurística de ver a desconstrução dimensional das formas. Por meio do prolongamento das bordas do contorno fechado, pode-se sair da forma 2D e passar para a forma 1D. Essa rede de configuração 1D permitiu a produção de novas configurações 2D. Pode-se reconhecer em III outras formas de "homens" diferentes da apresentada em IV. "A desconstrução é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras geométricas" (DUVAL, 2011, p. 90).

Essa maneira de ver as figuras, por meio da desconstrução dimensional das formas, contraria a ordem didática de introdução dos conhecimentos geométricos na escola. A organização da aquisição dos conhecimentos propostos nos manuais escolares privilegia a geometria euclidiana que segue a ordem crescente de dimensões: pontos (0D) → segmento de reta (1D) → polígonos (2D) → poliedros (3D). De certa forma, parece que a introdução aos estudos da geometria feita nessa ordem, seria o caminho mais fácil de compreensão. Contudo,

> Isso vai, então, em sentido contrário do trabalho longo e necessário de desconstrução dimensional para entrar a compreensão dos conhecimentos geométricos. Privilegiar essa ordem retorna a fazer como se a construção dimensional fosse evidente, enquanto é contrária ao funcionamento normal e intuitivo da visualização (DUVAL, 2005b, p. 47, grifos do autor).

Nesse sentido, cabe perguntar: que tipos de atividades podem ser propostas nos anos iniciais do ensino fundamental, visando promover a mudança dimensional no olhar, que a visualização geométrica tanto requer? De acordo com Duval (2003), nem as construções de figuras, nem a reprodução de figuras são atividades que promoverão a passagem do olhar icônico ao não icônico. Para ele é indispensável propor atividades de "[...] restauração de figuras, que levantam problemas reais para sair de uma visão espontânea de unidades 2D para uma análise em termos de unidades 1D e também para aprender a quebrar a estabilidade das unidades 2D identificadas à primeira vista" (DUVAL, 2003, p. 46).

Em Moretti (2013) também se encontra uma nova perspectiva para o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, a Semiosfera do Olhar. Segundo esse autor,

> A semiosfera do olhar é um lugar de criação para desenvolver atividades que visam à aprendizagem da geometria. [...] A ideia para a criação da semiosfera do olhar é incluir outros sistemas, permitir que diversos sistemas possam conviver com diferentes repercussões que não são percebidas quando do uso isolado de cada uma delas, os olhares se interligam a capacidade de coordenação visual motora (MORETTI, 2013, p. 296-298).

Moretti (2013) indica alguns exemplos de atividades que podem ser aplicadas nos anos iniciais do ensino fundamental, que visam promover a criação de uma Semiosfera do Olhar voltada para a coordenação visual motora e para a discriminação visual. Nessas atividades, é possível perceber que um mesmo conteúdo geométrico é capaz de permitir a criação de vários sistemas semióticos diferentes.

O autor sintetiza a ideia da Semiosfera do Olhar pelo esquema:

Figura 29 - Nó de Borromeu que ilustra a relação entre os sistemas semióticos na Semiosfera do Olhar em geometria.

Fonte: Moretti (2013)

No esquema, Moretti (2013) apresenta o nó de Borromeu e enfatiza que cada circunferência realiza um movimento tridimensional.

> Os sistemas semióticos, imersos na linguagem natural, não se situam em um mesmo plano, no interior da circunferência maior, combinam-se para formar um novo espaço, um novo modo de olhar em geometria. A ideia da Semiosfera do Olhar permite que as capacidades espaciais se tornem dinâmicas, faz com que uma se interligue a outra; dinamiza também os olhares que podem passar, de forma indiferente, de um olhar icônico a outro, botanista ao agrimensor, e deles aos olhares não icônico (MORETTI, 2013, p. 300-301).

Aprender a olhar em geometria é aprender a fazer os olhares deste percurso. A passagem de uma maneira de ver para uma outra, constitui uma alteração profunda de olhar, pois o funcionamento cognitivo envolvido em cada uma dessas maneiras de ver não é a mesma (DUVAL, 2005b).

Criar um espaço para a semiosfera da aprendizagem em matemática é proporcionar a sinergia entre diversos registros, ressaltando a importância da linguagem formal nessa aprendizagem. Considerar a linguagem formal no ensino da matemática torna-se imprescindível, pois, inexiste o acesso direto aos objetos matemáticos e trata-se apenas de suas representações.

Na aprendizagem matemática, trata-se de objetos ostensivos para chegar ao objeto não ostensivo. Para um mesmo objeto ostensivo pode-se ter diversos registros. Esta possibilidade permite criar uma rede de semiosfera de aprendizagem da matemática e, com isso, pensar em uma organização dos conteúdos de aprendizagem em termos de semiosferas.

3.1.4 Os olhares em geometria

Dependendo da maneira que se mobiliza uma figura, podem existir diversas maneiras de vê-la. Para isso, tem-se uma gama de atividades para trabalhar a geometria com os alunos. Duval (2005b) indica que essas variações de atividades incluem tanto a tarefa a ser executada (fazer medições, construir ou reproduzir figuras, descrever e reconstruir figuras), quanto o tipo de atividade solicitada (utilização de materiais manipuláveis, representação gráfica, construção técnica com a utilização de instrumentos)[31]. "No entanto, não são de todo as mesmas formas de ver que são solicitadas de um tipo de atividade para outro, mesmo que sejam as mesmas formas nD [...] que são perceptualmente dadas para ver" (DUVAL, 2005b, p. 9).

Tomando como critério o tipo de operações sobre as formas dadas e a maneira como as propriedades geométricas são mobilizadas em relação a este tipo de operações, Duval (2005b) agrupa essas diferentes maneiras de ver em geometria, em: visualização icônica e visualização não icônica. Na primeira, a figura é um objeto independente das operações que se efetua sobre ela e pode ser encontrada no olhar botanista e agrimensor. A visualização não icônica é uma configuração contextualmente destacada de uma organização mais complexa e pode ser percebida pelo olhar construtor e inventor. Segundo Duval (2005b), esses quatro tipos de olhares caracterizam, também, quatro formas diferentes de entrar na maneira de olhar matematicamente em geometria. Veja o que o autor propõe sobre cada um desses olhares:

Quadro 7 - Quatro entradas clássicas em geometria.

	BOTANISTA	**AGRIMENSOR**	**CONSTRUTOR**	**INVENTOR**
1 Tipo de operação sobre as *FORMAS VISUAIS*, requerida pela atividade proposta. • • •	Reconhecer formas a partir de qualidades visuais de um contorno*: UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA.*	Medir os lados de uma superfície: *sobre uma ÁREA ou sobre um DESENHO (variação de escala de grandeza e então de procedimento de medida).*	*Decompor uma forma em traçados construtíveis com a ajuda de um instrumento* é necessário (frequentemente) passar por *TRAÇADOS AUXILIARES* que não pertencem à figura "final".	*Transformar umas formas em outras.* Para inicializar estas transformações, é necessário acrescentar a figura final *TRAÇOS REORGANIZANTES.*

[31] O programa de formação desenvolvido contemplou a criação de atividades de geometria num espaço colaborativo no campo metodológico da fase de experimentação [123] da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

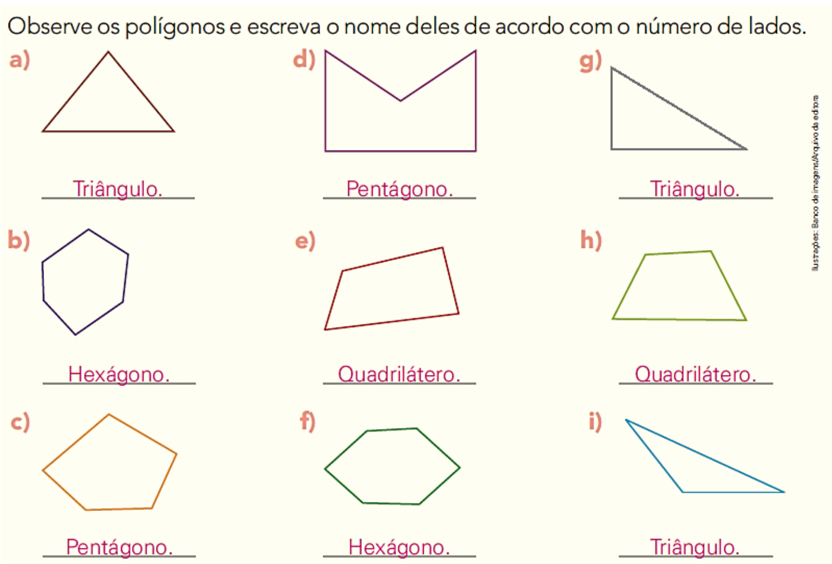
• • 2. Como as *PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS* são mobilizadas *em relação a esse tipo de operação.*	*Sem laços entre as diferentes propriedades (sem definição matemática possível).*	As propriedades *são critérios de escolhas* para fazer as medidas. Elas só são úteis se elas levam a *uma fórmula que permite um cálculo.*	Como *contratempos de uma ordem de construção.* Certas propriedades são obtidas por *uma única operação de traçado*, já outras, exigem várias operações.	Implicitamente por referência a uma rede mais complexa (uma rede de retas para geometria plana ou uma rede de intersecções de planos...) do que a figura inicial.

Fonte: Duval (2005b, grifos do autor)

Segundo Duval (2005b) o olhar botanista permite reconhecer o contorno das formas. É a entrada mais imediata e evidente, refere-se a um "olhar qualitativo", "e trata-se, evidentemente, de observar diferenças entre duas formas que apresentam certas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e de notar certas semelhanças entre formas diferentes (um quadrado e um paralelogramo)" (DUVAL, 2005b, p.10). Ou seja, as propriedades que se destacam nas figuras são as características visuais de contorno.

Nos manuais escolares, dos anos iniciais do ensino fundamental e até mesmo dos anos finais, encontra-se várias atividades que contemplam esse tipo de olhar. São atividades prototípicas, como mostra a Figura 30.

Figura 30 - Atividade de geometria para o quarto ano do ensino fundamental.



Fonte: Dante (2017)

Para Duval (2005b) esse tipo de atividade, apesar de ser importante, não constitui uma atividade geométrica, pois a mesma ação de reconhecimento de formas poderia ser feita sobre outras formas e não apenas as "euclidianas", como, por exemplo, o reconhecimento do formato dos algarismos. Portanto, nesse tipo de operação não são encontradas conexões entre as diferentes propriedades geométricas.

O olhar agrimensor desempenhou um importante papel no percurso histórico da geometria, muitos são os exemplos encontrados, por exemplo, na geometria grega. Nessa maneira de olhar, o destaque é dado à atividade de realizar medidas sobre um terreno/superfície, passando-as para o plano do papel. As propriedades geométricas são mobilizadas em torno de medidas que só são úteis se levarem a algum procedimento de cálculo. Trata-se, portanto, de correlacionar duas escalas de grandezas. "Ora, o fato de pôr em correspondência não tem nada de natural ou evidente, pois não há procedimento comum para medir as distâncias reais sobre o terreno e para medir as larguras de traçados de um desenho" (DUVAL, 2005b, p. 10).

No ensino, as tarefas a serem propostas para os alunos consistem em passar de uma escala de grandeza para outra. Contudo, apesar de ser uma atividade que pode ser explorada a partir de medidas reais, os alunos apresentam muita dificuldade em pôr em correspondência o que eles veem no plano concreto com a sua representação escrita. Um exemplo desse tipo de atividade, que pode ser desenvolvido com eles, é propor que façam uma planta baixa da sala de aula. Basta iniciar a atividade para ver quão difícil é, para os alunos, transpor essa barreira.

O olhar construtor é uma entrada necessária para enxergar uma figura matematicamente. Nessa maneira, não icônica de ver, as figuras são construídas com o uso de instrumentos, régua não graduada e o compasso. "Um instrumento permite produzir uma forma visual tendo uma propriedade geométrica e essa forma visual constitui a primitiva do instrumento, por causa da regularidade que ele impõe ao movimento de traçado, *e ainda da invariação visual que ele introduz no traçado*" (DUVAL, 2005b, p. 11, grifos do autor). Desse modo, as propriedades geométricas são verificadas a partir da utilização de instrumentos nas operações dos traçados sobre as formas visuais. A forma é decomposta em traçados que são construídos com a ajuda dos instrumentos que, muitas vezes, passam pela introdução de traços auxiliares que não pertencerão à figura final, perturbando assim uma ordem de construção.

Com a utilização de instrumentos nos trabalhos de construção de uma figura geométrica, o aluno pode tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva.

> De facto, a utilização de um instrumento dá a possibilidade de experimentar, de qualquer forma, as propriedades geométricas como *restrições de construção*: quando uma forma visual não é diretamente produzida por um instrumento, então são necessárias várias operações de traçado para obtê-la e existe uma ordem para estas operações. Não levar isto em conta torna a construção impossível. Naturalmente, qualquer mudança no instrumento leva a uma mudança nas propriedades geométricas que deve ser explicitamente mobilizada (DUVAL, 2005b, p. 11, grifos do autor).

Atualmente, a invenção dos programas computacionais, como, por exemplo, o GeoGebra e o Cabrigéomètre, permitiu a substituição desses instrumentos manuais, trazendo inovações importantes para o ensino da geometria. Com a utilização desses programas, a construção de uma figura leva em conta as propriedades geométricas, eliminando as aproximações e julgamentos que poderiam acontecer quando eram construídas a mão.

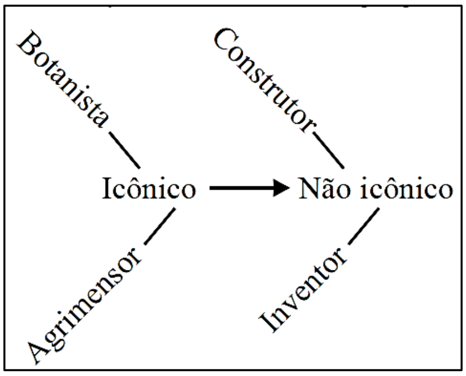
No entanto, não se pode desconsiderar a importância de atividades que requerem a utilização de instrumentos como, por exemplo, régua (graduada e não graduada), compasso, esquadro, transferidor, etc, quando se trata da aprendizagem da geometria nos anos iniciais. Um exemplo simples de atividade que pode ser realizada com as crianças, com o intuito de desenvolver o olhar construtor, é pedir para que elas construam uma circunferência com o auxílio do compasso. Graças ao uso desse instrumento, as crianças podem começar a perceber algumas propriedades geométricas da circunferência, tais como: centro, raio (abertura do compasso), traçado circular (impossibilidade de construir com a régua), entre outras. Propriedades que passariam despercebidas, caso essa circunferência fosse construída pelo contorno de uma moeda ou qualquer outro objeto circular.

O olhar inventor é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços reorganizantes na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. As propriedades geométricas são mobilizadas por meio de uma rede mais complexa do que a figura dada inicialmente. Ao acrescentar traços, ou prolongar lados, a figura inicial é desconstruída em um conjunto de retas subjacentes que deverá permitir *n* acoplamentos possíveis de forma 2D, diferentes da figura de partida. Esse tipo de olhar exige "[...] uma desconstrução visual das formas perceptivas elementares que se impõem a primeira vista, para poder obter a configuração ou a figura pedida" (DUVAL, 2005b, p. 11).

Um exemplo de atividade para esse modo de olhar, é solicitar aos alunos que dividam um triângulo, de uma só vez, em duas partes que possam ser acopladas para formar um paralelogramo (DUVAL, 2005b). Para além das propriedades matemáticas da figura de partida e de chegada, há que se destacar a importância do enunciado do problema. Isso porque, “[...] em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização para a desconstrução das formas, em seguida, pedimos os tratamentos em um terceiro registro para calcular as relações numéricas” (DUVAL, 2011, p. 100). Desconsiderar a complexidade da articulação entre ver e dizer, no contexto do ensino da geometria, pode criar obstáculos para a aprendizagem dos alunos.

Moretti (2013), a partir de Duval, apresenta um diagrama que indica uma orientação que vai do olhar botanista a um olhar mais elaborado, o olhar inventor, ou seja, um esquema que ilustra a passagem do olhar icônico ao não icônico.

Figura 3 - As maneiras de olhar em geometria.



Fonte: Moretti (2013)

Esse diagrama permite inferir que os subsídios para essas mudanças são as apreensões exigidas nos desenvolvimentos dos olhares icônicos e não icônicos. “No olhar do botanista, essencialmente é a apreensão perceptiva que é exigida. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor” (MORETTI, 2013, p. 294).

> Passar de uma maneira de ver para outra constitui uma mudança profunda de olhar, que é tão frequentemente ignorado no ensino. Pois, o funcionamento cognitivo implicado por cada uma de suas quatro maneiras de ver, não é a mesma, como nós mostraremos mais adiante. Mas já podemos enfatizar que cada maneira de ver induz um tipo particular e limitado de compreensão. O conhecimento desenvolvido não é o mesmo segundo o olhar onde um aluno se sente ser capaz ou incapaz de mobilizar, e isso na presença da mesma figura (DUVAL, 2005b, p. 12).

Enquanto a maneira botanista e agrimensor de ver está centrada na constatação perceptiva das formas e nas grandezas de medidas, respectivamente, os olhares construtor e inventor estão amparados cognitivamente na neutralização dos mecanismos de iconicidade e atentos às propriedades discursivas da figura, tendo em vista que uma figura geométrica não pode ser autossuficiente. “Em geometria, não há figura que represente por si mesmo, quer dizer, não há figura sem legenda" (DUVAL, 2004a, p. 168). Isso porque, uma mesma figura pode representar situações matemáticas muito diferentes, necessitando uma indicação verbal para fazer referência ao objeto matemático. Dessa maneira, ela torna-se um fragmento do discurso teórico (DUVAL, 2012c). Para entrar no modo matemático de ver uma figura, existe a necessidade de interação entre os tratamentos figurais e os tratamentos discursivos.

3.1.5 As funções discursivas da língua na aprendizagem da geometria

A utilização da língua natural permite a produção discursiva, sendo suas operações irredutíveis à gramática ou a regras. Isso porque "a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica" (DUVAL, 2011, p. 76). Portanto, o conhecimento do vocabulário não garante a proficiência de uma língua. O que é essencial no domínio de uma língua natural é "[...] ter consciência das operações que permitem articular as palavras em sintagmas nominais para designar objetos, proposições, ou para efetuar uma descrição coerente" (DUVAL, 2016, p. 19).

Duval (2004a) afirma que as funções discursivas cumprem as operações cognitivas que um sistema semiótico deve realizar para haver a possibilidade do discurso. Quando um sistema semiótico atende o conjunto de todas as funções discursivas, ele é considerado uma língua.

As funções discursivas são denominadas por Duval (2004a) de: referencial (designar objetos), apofântica (dizer alguma coisa sobre os objetos que designa, sob a forma de uma proposição enunciada), expansão discursiva (vincular a proposição enunciada a outras de forma coerente - descrições, inferências...) e reflexividade (marcar o valor, o modo ou o estatuto acordado a uma expressão por parte daquele que a enuncia).

A função discursiva referencial de uma língua consiste na designação de objetos, que permitem, de acordo com Duval (2004a), diferenciar quatro tipos de operações cognitivas possíveis de serem exercidas: designação pura, categorização simples, determinação e descrição.

A operação de designação pura consiste em identificar um objeto, seja por um gesto, seja atribuindo um nome, ou por caracterizar o objeto por um de seus atributos. Assim, ela é suficiente para designar e para identificar um objeto, mas a sua introdução requer, com frequência, que se recorra a outras operações de designação. Por exemplo, uma criança pode nomear o objeto triângulo, mas será necessário que ela recorra à operação de categorização simples para poder identificá-lo com base em uma de suas qualidades, identificando-o, a título de ilustração, como um polígono de três lados.

Contudo, a operação de categorização simples precisa estar combinada com a de determinação, que consiste em precisar o campo de aplicação da operação de categorização, por meio do emprego de artigos definidos ou indefinidos. Ao referir-se ao objeto triângulo, é necessário especificá-lo: *o* triângulo, *um* triângulo. O cruzamento do resultado de diversas operações de categorização caracteriza a operação de descrição, que se efetua pelo emprego de construções genitivas ou de proposições relativas.

Segundo Duval (2004a), a operação de descrição é uma das mais complexas por conta da ausência de palavras específicas para nominar determinado objeto, pois nenhuma língua é capaz de apresentar palavras suficientes para designar todos os objetos. Exemplificando, a operação de descrição designa um só triângulo (objeto) por meio da utilização dos léxicos associativos. Assim, "seja *A, B e C os* vértices *do* triângulo retângulo em A", descreve um triângulo específico e não um conjunto de triângulos. Para Duval (2016) a designação cruzada é motivo de dificuldades para os alunos e precisa ser considerada nas situações de ensino.

Para permitir uma atividade discursiva, não basta designar o objeto. Para Duval (2004a) a língua, além de designar objetos, deve ser capaz de dizer algo sobre o objeto designado, por meio de expressões de enunciados completos, função que é denominada de discursiva apofântica. "Um ato de expressão é um ato completo do discurso quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores" (DUVAL, 2004a, p.105).

O valor de um enunciado completo pode ter um valor social (de pergunta, de desejo, de promessa ou de ordem que obriga uma resposta a ser executada, por exemplo: "faça a atividade"), um valor epistêmico e social (quando o enunciado é um absurdo, ilustrando: "vou fazer a atividade porque você é moreno") e um valor lógico (de verdade ou falsidade) e epistêmico (de certeza, de necessidade) se o ato do discurso se situa num contexto teórico, tal como, "os ângulos do quadrado são retos". O valor desses enunciados completos dependerá "[...] do contexto do ato do discurso e do universo cognitivo, representacional e relacional dos interlocutores" (DUVAL, 2004a, p.105).

Na função discursiva apofântica estão presentes as operações cognitivas de predicação e ato ilocutório. Ao vincular a expressão de uma propriedade, de uma ação ou de uma relação com uma expressão que designe o objeto, entra em cena a operação de predicação (DUVAL, 2004a). Ou seja, trata-se da elaboração de uma frase com sentido, utilizando sujeito, verbo e predicado, para designar o objeto. Na frase "o triângulo tem três lados", tem-se o sujeito (triângulo), o verbo (tem) e o predicado (três lados), que por sua vez representa uma das características do objeto. Nesta frase existe um valor social de ato, denominado por Duval (2004a) de ato ilocutório, que compromete o locutor ou o destinatário. Desse modo, quando o aluno fala para o professor que o triângulo tem três lados e o professor faz a interpretação da expressão, temos o ato ilocutório com o valor de verdade.

Para possibilitar a produção de um discurso, a língua também deve permitir situar um enunciado com relação a outros enunciados, segundo a relação estabelecida pelo locutor com o interlocutor, com vistas à explicitação dos valores social, epistêmico e lógico. "Isto quer dizer que uma língua deve permitir explicitar no enunciado mesmo a maneira como o locutor emprega a língua para dizer o que quer dizer" (DUVAL, 2004a, p. 121). Assim, a função discursiva de reflexividade demanda a transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo, permitindo a interpretação a partir do vínculo estabelecido entre o ato intencional e a produção de um enunciado.

A língua além de permitir a produção de enunciados completos, deve possibilitar a expansão discursiva, que consiste na articulação e na organização das frases em unidades coerentes de descrição, de narração, de explicação ou de um raciocinamento (DUVAL, 2004a). Em outras palavras, o discurso é produzido por meio da organização de uma sequência de frases com um mesmo propósito, formando uma unidade consistente que explique melhor um tema sem cair na redundância.

Contudo, a compreensão desse discurso está relacionada ao que ele deixa explícito ou implícito. Pode-se ter duas frases sucessivas, como, por exemplo, "Chuva intensa" e "A casa alagou", sem nenhuma conexão aparente, mas que são capazes de se relacionar facilmente ao permitirem a possiblidade de fazer-se inferência (enchente), apoiadas em dois tratamentos. Segundo Duval (2004a), o primeiro tratamento é colocar em correspondência uma palavra da primeira frase (chuva) com uma palavra da segunda frase (alagou), estabelecendo uma associação comum entre ambas (enchente). O segundo tratamento provêm da mobilização de um conhecimento elicitado pela conexão comum entre as frases (a chuva intensa provoca enchente que deixou a casa alagada), propiciando assim a compreensão de que a segunda frase é uma expansão discursiva da primeira.

Mas, Duval (2004a) salienta que a inferência é apenas uma forma particular de expansão discursiva, ela não pode dar conta das diferentes formas de expansão discursiva realizadas por meio de descrições, de relatos, de narrações ou mesmo de um raciocinamento. Logo, as operações da função de expansão discursiva não se resumem a uma explicitação dos conhecimentos implícitos, é preciso partir da diferença entre os modos de progressão do discurso, os quais podem ser do tipo lógico ou natural (DUVAL, 2004a).

No discurso restrito a produção de inferências, a progressão das proposições é feita através da substituição das inferências anteriores pelas novas inferências, requerendo que "[...] cada vez se perceba a aplicação da regra utilizada, e se saiba o que é indicado explicitamente ou o que permanece implícito" (DUVAL, 2004a, p. 114), como, por exemplo, no desenvolvimento de um cálculo.

Porém, a progressão discursiva de um relato, de uma narração ou de uma explicação não acontece dessa maneira. Nesses casos, as frases acrescentam-se umas às outras e determinam de forma progressiva os objetos, demandando "[...] uma apreensão sinóptica de todas as frases e de todas as relações que existem entre elas" (DUVAL, 2004a, p. 114).

Para Duval (2004a), a diferença entre esses dois modos de expansão discursiva se reflete na forma como cada unidade apofântica é considerada, seja por seu conteúdo (que corresponde aos diferentes aspectos pelos quais pode ser identificada), seja por seu *status* (que corresponde ao papel que cumpre frente a outro enunciado na organização global de um discurso). Por um lado, quando a expansão discursiva acontece por substituição, a passagem de um enunciado a outro depende do *status* dos enunciados (hipóteses, premissa, conclusão...). Por outro, quando a expansão discursiva se faz por acumulação, a passagem de um enunciado a outro depende dos seus respectivos conteúdos e devem proceder de um mesmo domínio dos objetos.

O fundamento da relação de continuidade entre duas unidades apofânticas baseia-se na existência de uma similaridade entre as duas, que na língua natural, pode ser através da presença ou ausência de significantes comuns às duas e pela mediação, ou não, por meio de uma terceira unidade apofântica (DUVAL, 2004a). Quando ocorre a repetição dos mesmos significantes de um enunciado a outro, tem-se a similaridade semiótica, que pode ser ilustrada pelo cálculo do perímetro de um triângulo, onde a expressão "2 + 8 + 3" pode ser substituída por "13".

Mas, quando os enunciados não apresentam significantes comuns e mesmo assim fazem referência ao mesmo objeto, tem-se a similaridade semântica. Ou seja, as expressões têm sentidos diferentes, mas são referencialmente equivalentes, pois remetem ao mesmo objeto. As expressões "Polígono de três lados iguais" e "Polígono de três ângulos iguais" têm sentidos diferentes, porém fazem referência ao mesmo objeto (triângulo equilátero).

> Assim, a invariância referencial entre as duas expressões diferentes estabelece uma continuidade temática entre as frases que a contêm, mostram que a diferença de sentido entre as expressões referencialmente equivalentes permite que a segunda frase constitua um progresso discursivo em relação à primeira (DUVAL, 2004a, p. 117).

Essas duas dimensões, similaridade semiótica e similaridade semântica, não garantem a continuidade do discurso, por isso deve-se considerar a necessidade de recorrer ou não a um terceiro enunciado. Quando não é necessária a mediação de um terceiro enunciado entre as expressões e quando a passagem de um enunciado a outro acontece de forma direta, tem-se a similaridade interna entre dois enunciados. Nesse caso, "somente o reconhecimento do léxico de base da língua utilizada é suficiente para reconhecer a similaridade semiótica ou uma similaridade semântica entre os enunciados" (DUVAL, 2004a, p. 118).

Contudo, quando essa passagem não acontece de forma direta, exigindo a mediação de um terceiro enunciado, seja implícita ou explícita, configura-se uma similaridade externa entre os enunciados (DUVAL, 2004a). Sendo assim, "não há expansão discursiva de um enunciado que não se baseie na combinação de uma similaridade semiótica ou semântica e de uma similaridade interna ou externa" (DUVAL, 2004a, p. 119).

Essas dimensões determinam quatro formas de expansão discursiva possíveis na língua natural, como pode ser observado no Quadro 8.

Quadro 8 - As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão.

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	EXPANSÃO LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) *Associações verbais, ocorrências* "Linguagem do inconsciente"	EXPANSÃO FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica...) *Raciocinamento dedutivo* (proposições de estrutura funcional) *Cálculo proposicional, cálculos de predicados...*

Similaridade semântica Lei de FREGE: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	EXPANSÃO NATURAL (É suficiente com os conhecimentos da língua corrente) *Descrição, Narração* *Argumentação retórica* Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) *Raciocinamento pelo absurdo*	EXPANSÃO COGNITIVA (Exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) *Explicação* *Raciocinamento dedutivo* (proposição de estrutura temática condicional) *Raciocinamento pelo absurdo*

Fonte: Duval (2004a, grifos do autor)

Na expansão lexical encontra-se a presença de significantes comuns entre as duas unidades apofânticas sem precisar recorrer à mediação de uma terceira unidade apofântica. "É a recuperação de um mesmo significante, por identificação homofônica ou homográfica, o que assegura à continuidade e a coesão do discurso de uma frase a outra" (DUVAL, 2004a, p. 119), despertando a linguagem do inconsciente.

As crianças, antes mesmo de ingressar no ensino fundamental já demonstram essa similaridade semiótica interna, o que se pode perceber em situações, como quando elas começam a falar a sequência dos números: um, dois, três, quatro, cinco.... Nesse caso, elas seguem um determinado ritmo inconscientemente, sem compreender matematicamente o que estão dizendo. Para Duval (2004a), a expansão lexical é muito importante, pois reflete um trabalho associativo inconsciente subjacente a produção das representações mentais.

Quando ocorre a presença de significantes comuns nas duas unidades apofânticas e quando há necessidade de recorrer à mediação de uma terceira unidade apofântica, tem-se a expansão formal. Essa forma de expansão é caracterizada "[...] pela aplicação de regras de substituição que se baseiam exclusivamente em símbolos que representam variáveis ou proposições, independentemente de sua significação" (DUVAL, 2004a, p. 120). Por exemplo, nos anos iniciais, quando o aluno resolve o algoritmo 23 – 17, substituindo-o por 6, está contemplando a expansão discursiva formal.

A expansão natural não apresenta significantes comuns entre as duas unidades apofânticas e não necessita da mediação por intermédio de uma terceira unidade apofântica. Caracteriza-se, então, pelo emprego comum da língua natural e "mobiliza simultaneamente a rede semântica de uma língua natural e os conhecimentos pragmáticos próprios do meio sociocultural dos locutores" (DUVAL, 2004a, p. 120). O exemplo supracitado "Chuva intensa. A casa alagou", pode servir, também, como um exemplo de expansão natural. Segundo Duval (2004a), esse tipo de expansão é tema de estudo dos gramáticos que tratam da análise das regras de coerência do discurso.

Na expansão cognitiva ocorre a ausência de significantes comuns nas duas unidades apofânticas e a mesma requer a mediação por meio de uma terceira unidade apofântica. Ela é caracterizada pelo emprego especializado da língua natural. "O léxico associativo encontra-se, então, canalizado numa terminologia restrita a um domínio do conhecimento" (DUVAL, 2004a, p. 120), podendo incluir descrições, explicações técnicas ou teóricas, demonstrações, etc. No caso da geometria, para os anos iniciais, pode-se ilustrar com o exemplo da frase: "O triângulo ABC é retângulo em A". Esse discurso emprega uma linguagem específica utilizada na geometria, que não se encontra na língua comum, exigindo o domínio de uma terminologia específica desse campo de conhecimento.

> Essas quatro formas de expansão discursiva são formas puras. A maioria dos textos as combina. É somente no emprego especializado ou no emprego literário de uma língua que se pode encontrar o recurso exclusivo da expansão lexical, cognitiva ou formal. Então, se compreende a importância de se considerar essas formas radicalmente diferentes de expansão discursiva para o ensino de uma língua materna ou das matemáticas (DUVAL, 2004a, p. 121).

Todas as funções discursivas de uma língua precisam ser consideradas nas situações de ensino e de aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino, principalmente, nos anos iniciais, momento em que as crianças estão sendo inseridas gradativamente nesse tipo de discurso.

A introdução da linguagem especializada da geometria nesse nível de ensino pode ser ainda mais problemática, pois existem duas utilizações contrárias da língua natural como registro de representação semiótica: sua utilização comum e espontânea para fins de comunicação oral e sua utilização matemática para fins de tratamento nas produções escritas (DUVAL, 2016). Não há nada em comum entre essas práticas da linguagem natural, visto que a primeira é utilizada de maneira comum e espontânea entre alunos e professores, enquanto a segunda é utilizada para formular definições, para deduzir, para descrever, para explicar e para raciocinar (DUVAL, 2016).

Para designar o triângulo ABC de lados AB, AC e BC, foi preciso construir uma descrição geométrica do objeto utilizando não somente um termo, mas pelo menos dois (vértices ABC e lados AB, AC e BC). Contudo, muitas vezes na prática oral da língua, a designação dos objetos pode ser reduzida a uma palavra ou até mesmo a um simples gesto.

Segundo Duval (2016), existe uma diferença cognitiva entre o uso da linguagem natural na matemática e fora dela, dado que a sua utilização na matemática acontece em sinergia cognitiva com outro registro de representação.

> De forma mais fundamental, os registros mobilizados não preenchem as mesmas funções cognitivas no desenvolvimento da atividade matemática. Enquanto um permite efetuar a atividade matemática de resolução do problema, ou de demonstrar uma conjectura, os outros preenchem uma função heurística, ou permitem que se controlem intuitivamente a pertinência de resultados obtidos e a fiabilidade dos tratamentos efetuados (DUVAL, 2016, p. 18, grifos do autor).

Para que se possa compreender geometria é preciso reconhecer, em uma forma geométrica, qual a definição ou teorema a ser aplicado. Ou seja, a visualização e o discurso precisam estar em sinergia, posto que existem várias maneiras de ver uma figura e, para cada uma dessas distintas formas, encontram-se leis específicas de organização e de tratamentos.

Esses diferentes olhares em geometria, que estão intimamente relacionados com as apreensões, as mudanças de dimensões e as funções discursivas, fez emergir os seguintes questionamentos: esses processos cognitivos dizem respeito a um conteúdo específico da geometria? Essas maneiras de entrar no modo matemático de ver em geometria atuam isoladamente? Como conceber o processo de aprendizagem da geometria para favorecer o desenvolvimento do olhar não icônico? Esses são alguns questionamentos que serão discutidos no próximo item.

3.1.6 Uma proposta que visa possibilitar o desenvolvimento do olhar na aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental

A proposta que será apresentada fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Em seus estudos, esse autor, desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento para a aprendizagem da matemática, considerando os diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático. Dessa maneira, o autor admite que seja possível fazer uma análise do conhecimento matemático a partir da análise dos sistemas de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. Isso porque,

> A atividade matemática é um tipo de atividade que, apesar de sua universalidade cultural, apesar de seu caráter puramente intelectual, supõe uma maneira de pensar que não é nada espontânea para a grande maioria dos alunos e de adultos. Necessita modos de funcionamento cognitivos que requerem a mobilização de sistemas

> específicos de representação. Esses sistemas constituem registros de representação semiótica (Duval, 2004b, p. 24).

Segundo Duval (2004a), as representações semióticas não são somente para fins de comunicação, mas também são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, tanto para a criação de objetos matemáticos como para a sua apreensão. Diferentemente de outros campos científicos, os objetos matemáticos não são acessíveis fisicamente ou por meio de instrumentos. Sendo assim, "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente pelas representações semióticas" (Duval, 2005a, p. 21) e a maneira matemática de raciocinar e de visualizar é inerente à utilização dessas representações.

Duval (2005a) reúne a diversidade de registros de representações semióticas em quatro grandes grupos, sendo eles: a linguagem natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas. Para Duval (2011) os registros são sistemas semióticos capazes de criar conhecimentos, considerando que:

> Para ser um registro, um sistema semiótico deve cumprir duas condições. Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo o que é possível. Em seguida, e sobretudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações (DUVAL, 2011, p. 97).

A partir dos diferentes registros de representação semiótica, o autor formula a ideia central da sua teoria: "A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (DUVAL, 2012a, p. 282). Contudo, essa coordenação não tem nada de natural, tendo em vista que dificilmente um aluno reconhece o mesmo objeto matemático em registros diferentes. Esse isolamento de registros conduz um aprendizado às cegas, refém de regras e procedimentos algoritmizáveis, impossibilitando o aluno de exercer a sua autonomia intelectual.

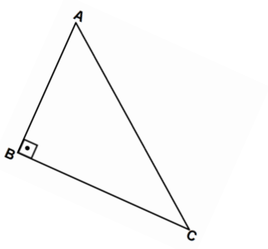
É imprescindível salientar "[...] o entendimento de que nenhum dos registros de representação 'é' o objeto matemático, mas eles apenas o 'representam', estão 'no lugar dele' para, assim, permitir o acesso a esses objetos matemáticos" (COLOMBO *et al*, 2007, p. 45). Nesse sentido, é que Duval (2012a) chama a atenção para o paradoxo cognitivo do pensamento matemático:

> [...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que uma

> atividade sobre os objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles só podem tratar com representações semióticas? (DUVAL, 2012a, p. 268).

Para o caso da geometria isso ainda se torna mais evidente: como não confundir um triângulo com a sua representação figural? Entretanto, esse mesmo objeto matemático pode ser representado por meio de outros registros de representação, como, por exemplo, pela representação discursiva. O custo cognitivo para o reconhecimento desse objeto matemático não é o mesmo nessas duas representações semióticas.

Quadro 1 - Dois registros de representação semiótica diferentes para o triângulo.

Representação figural do triângulo retângulo ABC	**Representação em língua natural**
	Um triângulo retângulo ABC é escaleno e retângulo em B.

Fonte: A autora

Percebe-se que a representação figural do triângulo é completamente diferente da sua representação na língua natural. A figura do triângulo permite a realização de operações de visualização, que são específicas às figuras geométricas. "São operações para as quais transformamos uma figura produzida em outra, de forma heurística, ou fazendo aparecer às invariâncias, e que não podemos fazer com outros tipos de imagem" (DUVAL, 2011, p. 70). Para desenvolver esse tipo de olhar é preciso ensinar as crianças a ver uma figura matematicamente. Essa é uma condição fundamental para a aquisição dos conhecimentos em geometria, para que assim, elas sejam capazes de transferi-los para outras situações[32].

Isso quer dizer que é essencial "[...] fazer com que os alunos passem da *maneira natural de ver as figuras*, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D" (DUVAL, 2014, p. 15, grifos do autor). Ver

[32] Para tanto, *a priori* e partindo das análises preliminares, levantou-se a hipótese de que para ensinar as crianças dos anos iniciais a ver matematicamente uma figura, necessita-se de professores capacitados para conduzir a aprendizagem da geometria, atendendo essa perspectiva. Neste trabalho, por meio da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, visou-se minimizar esse fosso existente entre a formação em geometria do professor pedagogo e as práticas de ensino da geometria nos anos iniciais.

matematicamente, o triângulo acima, é perceber uma rede de retas subjacentes a forma 2D, que se interceptam formando os vértices do triângulo e o ponto de origem dos ângulos A, B e C. Sem essa maneira de ver o triângulo, operando com a desconstrução dimensional das formas para permitir reconhecer uma fórmula ou uma propriedade a utilizar, fica-se preso ao olhar botanista e limita-se ao reconhecimento da forma, o que dificulta a capacidade de perceber as possibilidades de operar com essa forma.

A representação do triângulo ABC, por meio da frase, promove a produção de um discurso que permite o emprego da língua para dizer alguma coisa sobre esse objeto. "A enunciação de uma frase faz entrar em outra dimensão de sentido que aquela das palavras ou das combinações de palavras para designar qualquer coisa" (DUVAL, 2011, p. 77). Para que seja possível a produção de um discurso na aprendizagem da matemática, a linguagem natural, além de comunicar, deve também cumprir outras quatro funções discursivas (referencial, apofântica, reflexividade e expansão discursivas), já discutidas no item 3.1.5.

No enunciado "Um triângulo retângulo ABC é escaleno e retângulo em B", podemos designar as suas unidades figurais. Assim, para referenciar que ele é um triângulo retângulo precisamos determinar em qual dos vértices se origina o ângulo reto. Contudo, a mesma forma "B" que utilizamos para designar o ângulo reto, também é usada para referenciar o vértice. Pode-se notar que a função referencial não consiste em dominar apenas regras e ter o conhecimento do vocabulário, mas perceber que podemos designar elementos diferentes utilizando um mesmo símbolo. "O conhecimento das palavras não é nada se não existe uma tomada de consciência das operações de designação e de sua complexidade" (DUVAL, 2011, p. 79).

Entretanto, a função de designar objetos não é suficiente para permitir uma atividade discursiva. Faz-se necessário dizer algo sobre o objeto designado. No exemplo supracitado, não se trata apenas de fazer referência a um triângulo, mas de enunciar a proposição de que ele é um triângulo retângulo, cumprindo-se assim a função apofântica de uma língua. Possibilitar a articulação de "[...] diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (DUVAL, 2004a, p. 94), constitui uma das mais importantes funções da língua.

Essas operações discursivas não são redutíveis à aplicação de regras sintáticas e ao conhecimento de um vocabulário específico da geometria. "Elas se situam no ponto *exato em que conhecimento, compreensão e conscientização* – e, portanto, progresso para o conhecimento – são inseparáveis. Assim, é preciso se exprimir para si e para os outros para poder tomar consciência" (DUVAL, 2011, p. 80-81, grifos do autor). Para esse autor, a expressão verbal abre os caminhos para o pensamento.

A escolha do registro de representação semiótica, para o mesmo objeto matemático, implica em formas específicas de tratamentos em cada uma das formas escolhidas. Não se consegue desconstruir dimensionalmente um triângulo que esteja representado na linguagem natural.

> Para que um registro semiótico, incluindo a língua natural, possa responder a esta função de tratamento, é preciso introduzir condições semânticas de substituição por equivalência referencial. Na língua natural, isto se faz por meio do jogo das definições e de distinções. É desta maneira que a geometria euclidiana utiliza o registro do discurso natural e desenvolveu dentro das possibilidades da linguagem natural uma função de tratamento. A geometria euclidiana impôs, culturalmente, a imagem de um desenvolvimento do raciocínio *more geometrico* ligado ao discurso. *Este desenvolvimento more geometrico funciona por substituição e não por acumulação ou por adjunção* (DUVAL, 2012b, p. 115, grifos do autor).

Desse modo, o desenvolvimento do raciocínio geométrico expresso com o auxílio da língua natural difere radicalmente da argumentação, pois ela não implica numa definição ou num axioma para possibilitar a equivalência referencial. "A lógica de uma argumentação diz respeito à apreensão da coerência global do discurso e não ao rigor do passo a passo, como em um desenvolvimento matemático" (DUVAL, 2012b, p. 116). Na educação matemática é importante que seja considerado a diferença de funcionamento entre o desenvolvimento matemático e a argumentação.

O tratamento de uma representação é a transformação interna em um registro que se refere à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Por exemplo, as formas de representação do triângulo ABC no Quadro 9 são formas diferentes que designam um mesmo objeto,

> [...] mas não possuem o mesmo significado, uma vez que não são reveladores do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista [...] uma simples mudança na escrita é suficiente para exibir propriedades diferentes do objeto, mesmo se for mantida a mesma referência (DUVAL, 2012b, p. 99).

Isso implica em tratamentos diferentes para cada uma das representações, logo, um custo cognitivo também diferente. Os tratamentos produzem uma representação semiótica do mesmo tipo da representação de partida. Contudo, a conversão é a transformação de uma representação dada em um registro, em uma representação de um outro registro, mantendo os objetos revelados, conservando a sua totalidade, ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. No ensino da geometria, na maioria das vezes, não existe a preocupação com os diferentes tipos de registros para um mesmo objeto geométrico e dificilmente dá-se conta de que as diferentes formas de representar esse objeto geométrico possam apresentar dificuldades para os alunos.

Não se pode, de forma alguma, confundir a conversão com o tratamento. A conversão se estabelece entre registros diferentes, enquanto o tratamento acontece dentro do mesmo registro. Exemplificando: passar da representação na linguagem natural “um triângulo retângulo ABC é escaleno e retângulo em B” para a representação figural, consiste numa conversão. A conversão não tem um papel de prova ou justificação nos processos matemáticos e talvez, por esse motivo, ela não desperte tanto a atenção.

> [...] como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2005a, p. 16).

Assim, de acordo com este autor, percebe-se que a essência da atividade matemática repousa na coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. “A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática. Ela é também o lugar em que se opera a tomada de consciência do funcionamento representacional próprio de cada registro” (DUVAL, 2011, p. 100). No caso da geometria, existe a necessidade de coordenar a linguagem e a visualização para a desconstrução dimensional.

A atividade de conversão pode ser analisada ao comparar a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, e esse processo de substituição de uma expressão de uma rede semântica por uma expressão de outra rede semântica aparece, muitas vezes, em situações de aprendizagem, como um salto dificilmente transponível pelos alunos. É relativamente a essa substitutividade que duas relações devem ser consideradas: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica.

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão (DUVAL, 2012b, p.100).

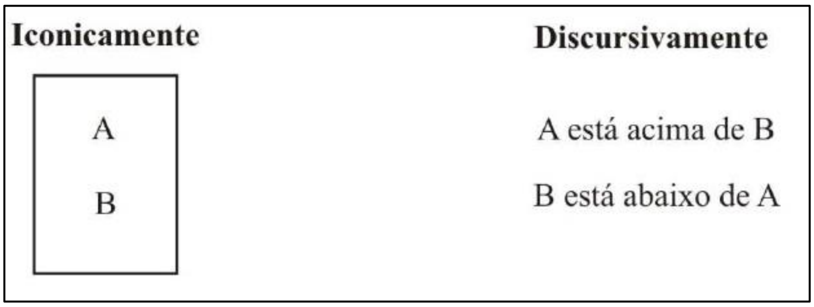
Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea, diz-se que há congruência semântica. Para isso, ela deve atender a três condições, que de acordo com Duval são:

- Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
- Univocidade "semântica" terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
- A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada (2004a, p. 53).

Porém, quando não se cumpre um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro não acorre de imediato (DUVAL, 2004a). Em outras palavras, pode-se dizer, de modo impreciso, que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorre tão facilmente, diz-se que não há congruência semântica.

Dessa forma, o problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações para um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco de o processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos. A análise da figura possibilita compreender os fenômenos da congruência e da não congruência semântica e da equivalência referencial.

Figura 32 - Apresentação icônica e discursiva de dois objetos A e B.



Fonte: Duval (2012b)

Observando a Figura 32 e comparando-a com a frase "A está acima de B", percebe-se que as condições da congruência semântica são atendidas e a imagem e o discurso são referencialmente equivalentes. Contudo, a frase "B está abaixo de A", apesar de ser referencialmente equivalente com a imagem, não atende a ordem dentro da organização da figura, logo essa frase não possui congruência semântica com a frase.

"Existem dificuldades cognitivas relativas ao discurso natural e, algo que não se pode desprezar, estas dificuldades dizem respeito a não congruência semântica entre expressões referencialmente equivalentes" (DUVAL, 2012b, p.105). Nesse sentido, a frase "A está abaixo de B", apesar de ser falsa, é mais congruente com a imagem, por sua sequência interna, do que a frase "B está abaixo de A". Porém, essa última é referencialmente equivalente com a imagem. Nesses casos, a congruência semântica, nem sempre, é garantia de sucesso.

Segundo Duval (2005a), no ensino da matemática, geralmente, um sentido de conversão é privilegiado, reforçando a falsa ideia de que o treinamento realizado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Esta é uma visão muito ingênua que se propaga nas situações de ensino da matemática. Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem perceber o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes.

Reconhecer um triângulo e suas propriedades por meio do registro discursivo e vice-versa, é uma coordenação que está longe de ser natural. Observa-se, então, o que Duval chama de um "isolamento de registros de representação" (DUVAL, 2012a, p. 283). O aluno *enxerga* o objeto matemático apenas por um sistema de representação, tal como, no caso da geometria, por meio de figuras. Essa ausência de coordenação não impede toda a compreensão, mas esta compreensão limitada, que se dá através do monorregistro, conduz um trabalho às cegas onde o aluno não tem um controle do sentido do que é feito. Duval (2012a) afirma que mudanças na escrita permitem mostrar propriedades diferentes de um mesmo objeto matemático, porém conservando a mesma referência.

De certa forma, a organização dos programas de ensino e as diretrizes curriculares oficiais[33] podem estar contribuindo para esse cenário. Nesses programas, os conhecimentos matemáticos são organizados em função de noções matemáticas que devem servir como pré-requisitos para aprendizagens posteriores, e no contexto atual brasileiro, temos ainda um ensino pautado no desenvolvimento de habilidades e competências. Ou seja, a organização dos conhecimentos matemáticos "[...] se faz pelo viés dos objetos e em absoluto pelo viés dos sistemas de produção de representações. [...] Falar de registro de representação é, ao contrário, analisar os conhecimentos matemáticos pelo lado do sistema de produção" (DUVAL, 2004b, p. 63).

[33] No Brasil, atualmente, temos como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Essa perspectiva de análise fundamenta-se por duas razões: a primeira é que "a atividade matemática mobiliza simultaneamente ou alternativamente vários sistemas semióticos, alguns vinculados com o funcionamento cognitivo comum (a língua natural) e outros criados pela necessidade do desenvolvimento da atividade matemática" (DUVAL, 2004b, p. 63). A mobilização desses sistemas semióticos e a passagem de um sistema para outro na representação do objeto matemático, provoca, segundo Duval (2004b), problemas específicos que não são de ordem conceitual.

A segunda perspectiva parte do pressuposto de que a preocupação no ensino da educação básica não deva ser tanto com a aquisição de tal ou qual conhecimento matemático, mas com o desenvolvimento das capacidades de pensamento que acontecem por meio deles.

> O desenvolvimento dessas capacidades depende de aquisições funcionais de diferentes sistemas que se requerem para a compreensão de todos os conhecimentos que ele deverá adquirir não somente na escola, mas depois dela. Estamos em um mundo na qual nenhum indivíduo pode aprender de antemão o que lhe será profissionalmente ou humanamente útil. O desafio do ensino na formação inicial é dar as crianças ou ao pré-adolescente os meios para compreender e aprender por ele mesmo. Trata-se, pois, de formar sujeitos autônomos em suas etapas do desenvolvimento intelectual, incluídas as matemáticas (DUVAL, 2004b, p. 63-64).

Para ter a compreensão conceitual de um conteúdo, contribuindo para a formação de sujeitos autônomos, Duval (2012a) afirma que esse processo passa necessariamente pela coordenação de, ao menos, dois registros diferentes de representação semiótica. Isso porque, a matemática é um tipo de conhecimento que, epistemologicamente, difere dos outros tipos de conhecimento por duas características específicas:

> – O acesso aos objetos matemáticos faz-se de maneira exclusiva pelo estabelecimento de produções semióticas e isso traduz-se pelo fato de que a matemática é um domínio de conhecimento que utiliza quase todo o espectro dos tipos possíveis de representações semióticas; – A maneira de trabalhar em matemática é indissociável da transformação de representações matemáticas em outras representações semióticas de um mesmo sistema semiótico. Isso traduz-se pelo fato de que as provas de matemática são exclusivamente alicerçadas na necessidade de transformações semióticas (DUVAL, 2018, p. 7).

Contudo, os sistemas produtores de representações dos outros campos científicos são sistemas não semióticos, pois são constituídos a partir de instrumentos que permitem o acesso aos objetos, fugindo assim de toda percepção direta (DUVAL, 2018). Percebe-se que essa condição epistemológica pode explicar o abismo cognitivo que separa dos outros tipos de conhecimento a maneira de pensar e de trabalhar em matemática.

Para Duval (2015), a atividade matemática apresenta duas faces: a exposta e a oculta. A primeira refere-se aos conceitos e procedimentos matemáticos que foram demonstrados no decorrer da história da matemática (teoremas, fórmulas, algoritmos...) e que são potencialmente utilizados na resolução de problemas e no fazer matemática, assumindo um papel importante para o desenvolvimento da mesma e de outros domínios do conhecimento. A face oculta diz respeito à forma de trabalhar e de pensar matemática para promover a sua compreensão, favorecendo a tomada de consciência das formas de ver as figuras geométricas, de raciocinar, de reconhecer e de estruturar as informações convenientes. Essa maneira de "fazer" matemática é a mesma

> [...] quaisquer que sejam os domínios matemáticos e quaisquer que sejam os conceitos ou os procedimentos a serem utilizados; exige maneiras de raciocinar, de justificar, de ver, de organizar as informações, de compreender os enunciados que estão em contraposição com aqueles que são espontaneamente praticados em outros domínios exterior a matemática (DUVAL, 2015, p. 11, grifos do autor).

Vê-se, portanto, que a compreensão da matemática se baseia na autonomia de uma atividade puramente intelectual, o que não significa dizer que seja meramente conceitual.

Duval e Moretti (2018) salientam que no ensino da matemática a face exposta é privilegiada, tendo em vista que todo o ensino é organizado, considerando que a compreensão está subordinada à aprendizagem de conceitos e procedimentos seguindo uma ordem de construção. Basta abrirmos os manuais didáticos para encontrarmos o ensino da geometria organizado em pré-requisitos de forma gradativa, da dimensão 0D a 3D. Do ponto de vista matemático isso é indiscutível. No entanto, do ponto de vista do aluno, é a face oculta da matemática que precisa ser privilegiada, levando em conta que:

> [...] a) a atividade matemática funda-se, do ponto de vista cognitivo, na transformação de representações semióticas em outras representações semióticas no mesmo registro ou em registros diferentes. [...] b) a maioria dos alunos esbarra em dificuldades recorrentes e, em geral, intransponíveis de compreensão, ao longo do currículo. [...] c) a utilização de conhecimentos matemáticos para resolver problemas em situações concretas exige que se tenha compreendido como se trabalha em matemática, caso contrário, não se pode reconhecer qual conhecimento utilizar ou mesmo como utilizá-lo (DUVAL; MORETTI, 2018, p. 83-84).

A face oculta da atividade matemática é que permitirá o acesso dos alunos a face exposta da mesma (DUVAL; MORETTI, 2018). Pode-se dizer, então, que a maneira matemática de ver e operar com as figuras geométricas não acontece por meio da aplicação de fórmulas e de conceitos, pelo contrário, é por meio da desconstrução dimensional das formas que as propriedades conceituais da figura se impõem na resolução de qualquer atividade geométrica.

Essa pouca importância dada à face oculta da atividade matemática, nas situações de ensino, pode estar diretamente relacionada às expectativas sociais criadas em torno dos conhecimentos matemáticos que devem ser ministrados nas escolas, a fim de atender as demandas do mercado.

Para Duval (2015), a educação ao longo do tempo vem sendo substituída pela formação. Porém, educação e formação são percebidas, por esse autor, como distintas e contrárias às finalidades dos sistemas educativos. "[...] A palavra 'educação' (*Paideia*) está centrada no desenvolvimento individual e na autonomia intelectual, [...] a palavra 'formação' visa à aprendizagem de saberes necessários em proveito da atividade profissional" (DUVAL, 2015, p. 9). Pensar a aprendizagem dos saberes como um objetivo de formação, em termos de competência, é entender que:

> - ela está diretamente ligada à organização do trabalho nas empresas, quer dizer, a uma especialização dos tipos de atividades;
> - as competências são analiticamente definidas *como os comportamentos de resposta ou o saber-fazer exigido para uma atividade particular.* Em outras palavras, o tipo de atividade ou o tipo de conhecimento cuja aprendizagem é esperada ao final de um percurso escolar, é decomposto em comportamentos ou conceitos pré-requisitais. E, estes pré-requisitos, tornam-se objetivos de ensino em escala anual;
> - a generalização desta noção nos sistemas educativos faz-se com avaliação, uma vez que tomou uma importância cada vez maior nos sistemas educativos em detrimento de uma abordagem do ensino em termos de educação (DUVAL, 2015, p. 10, grifos do autor).

Em outras palavras, parece não ser mais tão importante *o que você sabe,* mas *o que você vai fazer* ou *pode fazer com o que sabe.* Duval (2015) alerta para os perigos do abandono de uma educação centrada no desenvolvimento da autonomia intelectual, que enfatiza o desenvolvimento de habilidades, que por vezes, visam atender as demandas do mercado de trabalho. Essas duas abordagens têm, cada uma delas, a sua devida importância dependendo do momento da vida em que o indivíduo se encontra. A fase inicial da aprendizagem não precisa estar pautada no desenvolvimento de habilidades e competência, mas, num ensino que vise à educação (DUVAL, 2015), em que sejam considerados os aspectos cognitivos, que favorecem a verdadeira compreensão da matemática.

Pensar a aprendizagem da geometria na perspectiva da formação integral e conceitual, favorecendo a autonomia intelectual do aluno, requer que se privilegie o ponto de vista cognitivo na maneira de trabalhar, pensar, raciocinar, reconhecer e organizar as informações pertinentes das formas de ver em geometria (DUVAL, 2015). Ver geometricamente uma figura, passa, necessariamente, pela desconstrução dimensional das formas (DUVAL, 2005b, 2011).

O processo de desconstrução dimensional das formas não acontece isoladamente, outros elementos cognitivos se fazem presentes. Percebe-se que as apreensões assumem um papel significativo nas operações da desconstrução dimensional: a apreensão perceptiva, apesar de causar certos empecilhos, é importante para promover inicialmente o olhar sobre a figura, e assim poder operar com essas formas (mereologicamente, oticamente ou posicionalmente), visando à desconstrução dimensional; da mesma forma, a apreensão sequencial promove (parcialmente) o raciocínio inverso à desconstrução dimensional; de maneira incontestável, a apreensão discursiva é inseparável da desconstrução dimensional da forma. A figura não apresenta as suas propriedades a partir do seu traçado, mas a partir do que é anunciado. Nessa concepção, a figura geométrica pode tornar-se um complemento do discurso.

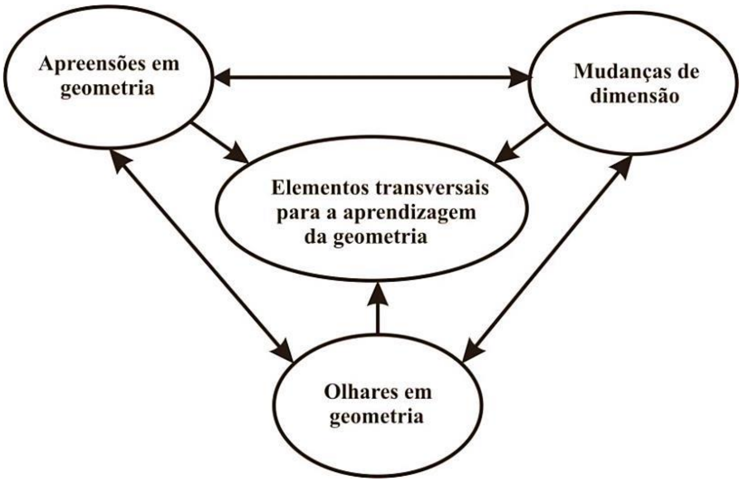
O olhar icônico pode ser considerado como um estágio inicial na aprendizagem da geometria e na desconstrução dimensional das formas. Embora ele não seja suficiente para resolver a maioria dos problemas em geometria, de certa forma, é um primeiro olhar que se debruça sobre a figura. A partir da ampliação do olhar botanista e agrimensor, chegamos ao olhar não icônico (construtor e inventor), que requer muito mais do que o simples reconhecimento das formas. Ele necessita de uma interpretação mais apurada sobre a figura, que perceba suas propriedades por meio de prolongamentos de traços de construção, reorganização visual das formas visualmente conhecidas, para poder decompor toda a forma em unidades de dimensão inferior da figura de partida.

Sendo assim, a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, deve considerar a variedade de sistemas de representações semióticas, permitindo ver e operar geometricamente uma figura, por meio de uma rede compostas por distintas maneiras de fazê-lo . Em outras palavras, a variedade de sistemas de representação semiótica utilizados para referenciar os objetos geométricos, permite o desenvolvimento de capacidades intelectuais capazes de promover a passagem do olhar icônico ao não icônico por intermédio das apreensões e da desconstrução dimensional das formas.

Conjecturou-se que o desenvolvimento da maneira de ver matematicamente uma figura depende da interlocução entre os tipos de apreensões, dos olhares e da mudança dimensional das formas que foi chamada, a partir de Duval (2004a, 2004b, 2005b), de

"Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria"[34]. Essa ideia pode ser sintetizada no esquema abaixo.

Figura 33 - Elementos presentes na aprendizagem da geometria.



Fonte: A autora

No diagrama, as setas bidirecionais indicam uma interlocução entre os olhares e as apreensões em geometria com a mudança de dimensão. Esses três elementos compõem uma tessitura que age conjuntamente no desenvolvimento da maneira de ver matematicamente uma figura geométrica. De cada elemento parte uma seta unidirecional para o centro da figura, indicando a formação de um ambiente favorável para a aprendizagem da geometria, considerando a participação de todos esses elementos nos processos cognitivos.

Os Elementos Transversais não são específicos a um conteúdo geométrico determinado, mas referem-se ao modo de conceber e abordar o processo de aprendizagem da geometria. Eles possibilitam tratar os diferentes registros de representação semiótica em um mesmo objeto geométrico de forma integrada, levando em consideração as dificuldades cognitivas que se apresentam nesse processo de mobilização entre esses diferentes registros. Qualquer que seja a representação do objeto geométrico e as suas possibilidades de conversão, eles carregam consigo os Elementos Transversais para a sua aprendizagem.

A transversalidade é entendida aqui como uma forma de organizar o trabalho didático-pedagógico da aprendizagem da geometria, tomando como direcionamento dessa atividade as representações semióticas e os processos cognitivos presentes em todas as

[34] Essa proposta foi discutida no nosso artigo "Elementos transversais para a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de currículo possível" publicado na REVEMAT em 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e70277/42917 Acesso em: 20 mai. 2021.

mudanças dimensionais. Ela orienta para a necessidade de introduzir na prática educativa da geometria, dos anos iniciais do ensino fundamental, um olhar que considere a importância, não só das representações semióticas como sistemas produtores de representações, mas também da necessidade de desenvolver um ambiente para a aprendizagem da geometria através da desconstrução dimensional das formas, das apreensões e dos olhares, compondo uma só tessitura.

Na aprendizagem da geometria, ou das matemáticas, o acesso ao objeto matemático e à compreensão conceitual, de acordo com Duval (2012a), depende da coordenação de, no mínimo, dois registros de representação semiótica. Nesse processo de conversão e coordenação dos diferentes registros é que entram em jogo os Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria, uma vez que, eles possibilitarão operar com essas formas e promover o desenvolvimento e o aprimoramento do olhar para a geometria, mediante as mudanças de dimensões, as apreensões e os olhares.

Inferimos que esses Elementos Transversais podem favorecer a tomada de consciência em geometria. Isso porque, para Duval (2005b), o fato de ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva muito mais complexa do que simplesmente reconhecer aquilo que uma imagem mostra.

A presença dos Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria, nos anos iniciais, pode ser exemplificada por meio da atividade: a figura é composta por quadrados. Quantos quadrados possui a figura?

Figura 34 - Representação do quadrado.

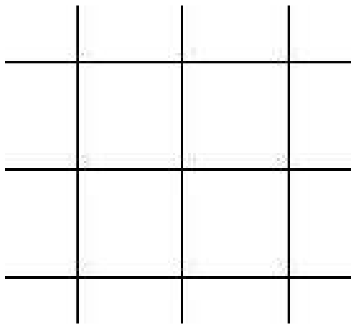
Fonte: A autora

Ao observar a figura, as crianças, espontaneamente, podem responder que se trata de quatro quadrados. O fundo colorido induz o cérebro a ler a imagem como uma justaposição de formas, ou seja, a apreensão perceptiva leva a olhar a figura na perspectiva do olhar botanista. Essa maneira de olhar a figura impede o reconhecimento global da mesma, impossibilitando ver o quadrado maior que se constrói pela justaposição dos quatro quadrados menores.

Existe a necessidade de a apreensão operatória entrar em jogo para possibilitar a desconstrução dimensional da figura, favorecendo a passagem do olhar icônico ao não icônico. Ao operar com a figura, precisam ser identificados elementos conceituais em outras dimensões que não são percebidas inicialmente. Na heurística é essencial descer da dimensão 2D, para 1D e até mesmo 0D. Mas, essa desconstrução parece estar na contramão da percepção das unidades figurais de dimensões superiores.

O discurso indica que se trata de quadrados, logo, por meio da apreensão operatória pode-se passar da dimensão 2D para a dimensão 1D, recorrendo a desconstrução das formas numa rede de retas subjacentes que formam os quadrados.

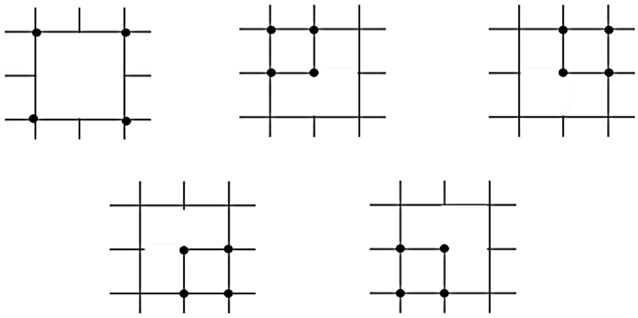
Figura 35 - Quadrado decomposto numa rede de retas.



Fonte: A autora

Contudo, essa decomposição parece ainda não ser suficiente para visualizar os cinco quadrados da figura. Existe ainda a necessidade de passar para a dimensão 0D, que permitirá sair de toda forma de visualização da figura e fazer aparecer outras propriedades do quadrado, que até então encontravam-se obscuras. É preciso recorrer às propriedades discursivas que caracterizam a figura que emergem do enunciado da atividade. Pode-se citar que um quadrado, dentre muitas outras propriedades - não havendo necessidade de serem todas discutidas nos anos iniciais do ensino fundamental - é um quadrilátero paralelogramo retangular que possui todos os lados de mesma medida, tem quatro ângulos retos e quatro vértices. Assim, como a figura trata-se de quadrados, pode-se dizer que a cada quatro vértices, com distâncias de mesma medida, tem-se um quadrado.

Figura 36 - Visualização dos cinco quadrados pela decomposição dimensional.



Fonte: A autora

Percebe-se que com os pontos há o descolamento do olhar icônico sobre a figura de partida, pois é possível sair de toda a visualização. Na resolução do problema, quando o quadrado muda de dimensão, ele apresenta diferentes características no processo de decomposição e quando ele é decomposto em uma rede de retas, saltam aos olhos as posições relativas entre duas retas no plano. No caso do quadrado, tem-se pares de retas paralelas e perpendiculares e a posição dessas retas no plano faz parte do conjunto de propriedades do quadrado (ângulos retos, lados opostos paralelos, o ponto de intersecção das retas perpendiculares formam os vértices do quadrado...).

> [...] o vai e vem constante entre as diferentes unidades figurais, implica saltos na percepção da figura. De maneira geral, a não congruência dimensional parece ser característica da coordenação entre figura e raciocínio. A exploração heurística das figuras tende a privilegiar as unidades de dimensão 2 sobre as de dimensão inferior (DUVAL, 2004a, p. 171).

Esse privilégio das dimensões superiores em detrimento das inferiores pode estar relacionado ao papel heurístico da figura, que muitas vezes, pode conter ou não, elementos facilitadores que permitem a leitura visual, convergindo para a desconstrução geométrica das dimensões. Mas, independentemente da existência desses elementos, é importante ter-se em mente que, na aprendizagem da geometria e na resolução de atividades que envolvem figuras geométricas, é preciso considerar a disposição gestáltica na maneira "[...] como as figuras organizam-se e são percebidas pelo sujeito; as apreensões em geometria; os tipos de formas, dimensões das figuras e passagens entre dimensões; a identificação e designação de elementos nas figuras e; os olhares em geometria" (MORETTI; BRANDT, 2015, p. 18). Ou seja, inferimos que os Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria precisam ser considerados na resolução de atividades de geometria, principalmente, aquelas que apresentam figuras.

Essa hipótese encontra fundamento na perspectiva defendida por Duval (2005b), em que, de todas as áreas do conhecimento matemático que o aluno precisa aprender, a geometria é a que requer a mais completa atividade cognitiva, uma vez que solicita a conexão entre o gesto, a linguagem e o olhar. "É necessário construir, raciocinar e ver, inseparavelmente" (DUVAL, 2005b, p. 6). Em contrapartida, é justamente essa necessidade de interligação que constitui a dificuldade que os estudantes encontram para resolver problemas de geometria. "A razão por que uma demonstração não tem sentido e não contribui em nada aos olhos do aluno é *a incapacidade de levar em conta o duplo estatuto, ao mesmo tempo teórico* [...] *e operatório* [...] *na substituição de proposições"* (DUVAL, 2016, p. 25, grifos do autor).

Evidentemente, a reversão desse quadro exige um longo e árduo trabalho. Segundo Duval (2016), a análise do funcionamento cognitivo requerido para que se possa utilizar as figuras de forma heurística e articulá-las ao vocabulário geométrico com as unidades figurais elementares, precisa considerar não mais a forma, como característica principal de visualização, mas as dimensões. Dificilmente encontra-se essa perspectiva contemplada nos livros didáticos dos anos iniciais, pois eles tomam como unidades figurais elementares de base as formas 2D, o que causa um impasse e conduz uma didática que privilegia as formas e não as dimensões.

> Para compreender geometria, os alunos devem aprender a *desconstruir dimensionalmente* as figuras, e não a construí-las, mesmo que utilizem algum programa computacional. Eles precisam também aprender a desconfigurar uma figura para reconfigurá-la de uma outra maneira, quer dizer, independente da hipótese ou da propriedade dada (DUVAL, 2016, p. 26, grifos do autor).

Por esse motivo, é importante que se conduza a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, considerando os Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria. Para tanto, faz-se necessário investir na formação matemática do professor pedagogo, para que os alunos dos anos iniciais tenham a oportunidade de entrar na maneira de ver geometricamente uma figura. A aprendizagem da geometria é um campo tão especial dentro dos conhecimentos matemáticos, que envolve a condução de fazer o outro enxergar formas que muitas vezes não são vistas num primeiro golpe de vista. É por isso que defendemos a ideia de que os professores pedagogos também precisam conhecer os processos semiocognitivos que perpassam a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

De maneira sucinta, a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval apresenta os aspectos semiocognitivos que precisam ser considerados na aprendizagem da geometria. Os vários registros de representação semiótica para o mesmo objeto matemático e as suas transformações, seja pelo tratamento ou pela conversão, são indispensáveis para acessar esse objeto. As operações cognitivas acionadas pelas apreensões possibilitam a desconstrução dimensional das formas, favorecendo o aparecimento das propriedades figurais em sinergia com as funções discursivas.

Considerando a relevância de aprender a ver geometricamente uma figura nos anos iniciais do ensino fundamental, desafiamo-nos a desenvolver um programa de formação para professores pedagogos que visou à aprendizagem da geometria nesse nível de ensino, por meio de uma proposta metodológica inovadora, denominada de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, a ser detalhada na sequência deste texto.

3.2 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa assume uma abordagem qualitativa, pois, tratando-se de uma pesquisa educacional, ela deverá melhor atender aos objetivos da mesma. A utilização dessa abordagem é relevante em programas de formação de professores, porque oferece a eles "[...] a oportunidade de explorarem o ambiente complexo das escolas e simultaneamente tornarem-se mais autoconscientes acerca dos seus próprios valores e da forma como estes influenciam as suas atitudes face aos estudantes, diretores e outras pessoas" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 287). Sendo assim, encontramos na abordagem qualitativa, características que são mais adequadas ao trabalho que desenvolvemos com os professores. Segundo Bogdan e Biklen (1994), são essas:

a) A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal: atendendo a essa característica, nossa pesquisa foi desenvolvida com um grupo de professores pedagogos voluntários, que estavam atuando na rede pública de ensino no município de São José no estado de Santa Catarina no ano letivo de 2021. Essa opção justifica-se, pois "os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48). Dessa forma, mantivemos a conexão necessária entre o ato, a palavra ou o gesto na construção da leitura dos acontecimentos durante o andamento da pesquisa. Comungamos junto ao posicionamento de Bogdan e Biklen (1994), de que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre.

b) A investigação qualitativa é descritiva: os dados da pesquisa foram coletados fazendo uso de registro em diário de bordo, descrevendo o desenvolvimento dos encontros presenciais, gravações audiovisuais e questionários, ou seja, nossa atenção não estava voltada para números.

Na procura pelo conhecimento, fez-se a análise dos dados em toda a sua riqueza, respeitando a forma como eles foram registrados. Para estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo, existiu a compreensão de que nada foi trivial, que tudo teve potencial para constituir pistas, permitindo-se ter uma visão global do objeto de estudo, buscando incansavelmente o seu refinamento.

c) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos: o foco da pesquisa esteve voltado para a compreensão dos professores pedagogos sobre o processo de aprendizagem da geometria das crianças dos anos iniciais, a partir do desenvolvimento de programa de formação, que visou à aprendizagem da geometria, considerando a perspectiva semiocognitiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

d) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva: as abstrações foram formadas a partir da análise dos dados, desenvolvendo-se, primeiramente, com foco em questões mais amplas, que foram sendo precisadas à medida que a pesquisa se desenvolveu. Não tivemos um modelo cuja forma final já era conhecida de antemão, fomos construindo um quadro que foi ganhando forma à medida que se recolheram e se examinaram os dados.

e) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa: estivemos interessados no modo como os professores deram sentido às conquistas e aos insucessos dos alunos no processo de aprendizagem da geometria a partir do desenvolvimento do programa de formação.

> Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber ‘aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem’ (PSATHAS[35],1973). [...] O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes de serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51, grifos do autor).

Partindo da necessidade de buscar uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, é que esta investigação se identifica com uma proposta de pesquisa Qualitativa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007) associada à Engenharia Didática Clássica (ARTIGUE, 1996) e a Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016).

[35] PSATHAS, G. **Phenomenological sociology**. New York: Wiley, 1973.

3.2.1 Pesquisa Colaborativa e Engenharia Didática: uma possibilidade de integração metodológica

Pensamos na possibilidade, a partir de Derouet (2016), de desenvolvimento de uma metodologia de pesquisa em que a Engenharia Didática aconteça num ambiente de pesquisa Colaborativa. A opção por aderirmos a esse modelo metodológico justifica-se por admitirmos ser importante o trabalho de coconstrução com os professores pedagogos nos programas de formação. Dessa maneira, eles deixam de ser apenas agentes passivos e assumem o papel de protagonistas da sua formação e da sua prática pedagógica. O trabalho em conjunto entre pesquisador e professores foi a nossa fonte de dados.

A seguir, esboçamos os elementos característicos da Engenharia Didática clássica na perspectiva de Artigue (1996), da pesquisa Colaborativa, segundo Desgagné (2007), e da Engenharia Didática Colaborativa desenvolvida por Derouet (2016). A partir dessas vertentes metodológicas e mergulhados na teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, construímos uma tessitura metodológica específica, para melhor atender os objetivos desta pesquisa, denominada de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

3.2.1.1 Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

A Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração[36]) emergiu em Didática da Matemática no início da década de 80, tendo como seus precursores: Yves Chevallard, Guy Brousseau e Michèle Artigue. Em 1989, na quinta Escola de Verão de Didática da Matemática realizada na França, coube a Artigue (1996) professar um curso sobre essa metodologia, que contribuiu para a institucionalização da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Desde então, o termo Engenharia Didática é usado em pesquisas da Didática da Matemática que comportam em seus estudos uma parte experimental, baseada nas realizações didáticas em sala de aula. Artigue (1996) compara o trabalho didático ao trabalho de um engenheiro,

[36] O termo Engenharia Didática Clássica ou de 1ª geração, segundo Almouloud e Silva (2012), refere-se a uma metodologia de pesquisa passível de fazer emergir fenômenos didáticos no funcionamento da sala de aula clássica.

> [...] que para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (ARTIGUE, 1996, p. 193).

Embasamo-nos nas ideias de Michèle Artigue (1996, 2015) para caracterizarmos a Engenharia Didática (clássica) como uma metodologia de pesquisa. Segundo esta autora, a Engenharia Didática apresenta duas características principais: a) ser uma metodologia de pesquisa baseada em realizações didáticas na sala de aula (projeto, execução, observação, análise); b) ser uma metodologia de pesquisa cuja validação é essencialmente interna, baseada no confronto entre análise *a priori* e *a posteriori* (rechaça a análise externa com base na comparação do desempenho de grupos experimentais); e além dessas, considera que os objetivos de uma investigação podem ser diversos, não se limitando ao aprendizado de um determinado conceito matemático (ARTIGUE, 2011).

A Engenharia Didática, tomada como metodologia de pesquisa, está estruturada em diferentes fases: as análises prévias (ou preliminares); concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação, e, finalizando, a análise *a posteriori* e validação (ARTIGUE, 1996). Vejamos as características de cada uma dessas etapas.

a) Análises prévias: é a fase em que se estudam as possíveis razões da existência do problema de pesquisa e das formas que ele poderá ser abordado. Segundo Artigue (1996), as análises prévias são realizadas “[...] apoiando-se num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado” (ARTIGUE, 1996, p.198). E, complementa dizendo que:

> A primeira fase está estruturada à volta da análise do funcionamento do ensino habitual, considerado como o estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema, um equilíbrio que, durante muito tempo, foi estável, mas cuja obsolescência começa a fazer-se sentir (ARTIGUE, 1996, p. 199).

Nesse contexto, um quadro de constrangimentos começa a surgir a partir do momento que se procura estabelecer um novo ponto de equilíbrio mais satisfatório. Os entraves que podem surgir nesse processo precisam ser analisados, levando em consideração as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas.

Uma análise epistemológica do saber em jogo ajuda “[...] os pesquisadores a fixar os objetivos precisos da Engenharia Didática e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados” (ARTIGUE, 2015, p. 472), apoiando a busca de situações matemáticas representativas do saber visado, e auxilia a "[...] tomar a necessária posição reflexiva e distância em relação ao mundo educacional em que estão inseridos, e a construir uma referência" (ARTIGUE, 2015, p. 472).

Uma análise cognitiva associada às características cognitivas do público a que se dirige o ensino, identificando as condições e restrições do contexto da Engenharia Didática. Essas condições e restrições podem estar ligadas às escolhas curriculares relativas ao saber em jogo, às práticas de ensino, aos recursos acessíveis, às práticas de avaliação, à organização da escola, às características dos alunos e professores envolvidos, à forma como a escola está conectada com seu ambiente, etc. (ARTIGUE, 2015). A importância desses níveis pode variar, dependendo do objetivo da pesquisa.

Uma análise didática relacionada às características do funcionamento do sistema de ensino com o objetivo de "[...] investigar o que a pesquisa tem a oferecer em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo em questão, e é provável que oriente o projeto" (ARTIGUE, 2015, p. 472).

As análises prévias são realizadas a fim de fundamentar a concepção da Engenharia e cada uma das três dimensões tem suas especificidades e necessidades metodológicas. Dependendo dos objetivos da pesquisa, o grau de importância de cada uma dessas dimensões pode variar substancialmente.

b) Concepção e análise a priori das situações didáticas: é de extrema importância para a pesquisa, pois nessa fase, o pesquisador, a partir das análises prévias, toma as decisões para agir sobre um certo número de variáveis de comando (macrodidáticas e microdidáticas), as quais presume serem importantes ao problema da pesquisa. Estas, *a priori*, podem tornar possível a solução para o problema de pesquisa, deixando clara as diferentes escolhas e a forma como elas se relacionam com as hipóteses de pesquisa e as análises preliminares. "Estas variáveis condicionam o *milieu*, portanto as interações entre os estudantes e o conhecimento, as interações entre estudantes e entre estudantes e professores, por conseguinte as oportunidades exatas que os estudantes têm de aprender, como e o que eles podem aprender" (ARTIGUE, 2015, p. 473).

Contudo, é importante destacar que o objetivo da análise *a priori* não é antecipar como cada estudante em particular se comportará e se beneficiará da situação, mas,

> [...] determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e *a posteriori* a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Sendo assim, a análise *a priori* cria uma referência com a qual as realizações em sala de aula serão contrastadas. Essa análise está centrada nas características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação. Nesse ponto, percebe-se uma significativa ligação entre a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas. Para Brousseau (1996), as interações didáticas são modeladas a nível adidático e a nível didático.

No nível adidático, a análise *a priori* se "[...] concentra nas potenciais interações sujeito/*milieu*/matemáticas: os alunos são considerados como sujeitos 'epistêmicos'" (ARTIGUE, 2002, p. 61). O *milieu* é um objeto central nesse nível, sendo definido por Brousseau (1996) como "[...] o sistema antagonista do sistema ensinado, ou antes, previamente ensinado" (BROUSSEAU, 1996, p. 89). Fazem parte do *milieu* os objetos materiais ou simbólicos pelos quais a interação com o conhecimento é organizada.

A análise adidática das interações tem por objetivo relatar as possibilidades de ação dos alunos, o *feedback* e os meios de controle e validação oferecidos a eles pela interação com o *milieu*, a fim de estudar a economia cognitiva deste sistema, permitindo dar sentido aos comportamentos observados e garantindo que estes possam ser interpretados como sinais da construção do conhecimento visado (ARTIGUE, 2002).

Brousseau (1996) refere-se à situação adidática no sentido em que desaparece dela a intenção de ensinar, contudo ela continua a ser específica do saber. Ou seja,

> O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas. Não somente pode, como deve fazê-lo, porque só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto de ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional (BROUSSEAU, 1996, p. 49-50).

A situação adidática, construída com fins didáticos, acontece na ausência de qualquer indicação intencional do professor. Mas, isso não significa dizer que o professor não tenha planejado a situação. Pelo contrário, ela foi planejada com intuito de proporcionar condições favoráveis para a aquisição de um novo saber, favorecendo ao aluno trabalhar de forma independente, tornando-se capaz de utilizar por si mesmo o saber que está a construir.

O professor procura proporcionar ao aluno uma situação adidática, promovendo nela uma interação mais independente e fecunda, por meio da comunicação ou abstenção de informações, questões, métodos de aprendizagem, heurística, etc. "O professor está, pois, envolvido num jogo com o sistema das interações do aluno com os problemas que ele lhe coloca. Este jogo ou esta situação mais vasta é a *situação didática*” (BROUSSEAU, 1996, p. 50, grifos do autor), que se fundamenta sempre em hipóteses epistemológicas, conscientes ou inconscientes, explícitas ou implícitas, coerentes ou incoerentes.

Na análise *a priori* devem ser levadas em consideração a parte descritiva e a parte preditiva que constituem essa etapa da Engenharia Didática, observando os seguintes pontos:

descrever as escolhas feitas no nível local (remetendo-as, eventualmente, às escolhas globais) e as características da situação adidática decorrentes de cada escolha;

analisar os desafios que a situação promove para o aluno em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que ele irá dispor durante a experimentação;

prever os comportamentos possíveis e procurar mostrar de que forma a análise permitiu controlar o sentido desses comportamentos, bem como assegurar que se tais comportamentos esperados ocorreram, como resultado do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Nesse contexto, percebe-se a grande ênfase dada ao aluno na análise *a priori* em detrimento ao papel do professor. Para Artigue (1996),

> Na análise *a priori*, não há, tradicionalmente, lugar para o jogo do professor; se o aluno é tido em conta a um duplo nível, descritivo e preditivo, já o professor intervém apenas a um nível descritivo, como se a situação o determinasse por completo enquanto ator do sistema (ARTIGUE, 1996, p. 207).

O papel do professor é recuperado na fase de institucionalização do saber, que se refere à retomada, pelo mesmo, das questões discutidas pelo grupo, estabelecendo os principais resultados da teoria.

c) Experimentação: consiste na realização da sequência didática, estreitando os laços entre pesquisador/professor/observador(es) com uma população específica, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, o estabelecimento do contrato didático, a aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações feitas durante a experimentação. Durante a realização da experimentação, os dados são coletados de acordo com os objetivos, as hipóteses e as conjecturas feitas na análise *a priori*, permitindo “[...] ao pesquisador compreender a interação dos estudantes com o *milieu*, e até que ponto esta interação apoia sua passagem autônoma das estratégias iniciais para as estratégias visadas, e para analisar os processos de devolução e institucionalização”

(ARTIGUE, 2015, p. 474). Esses dados incluem gravações, produções dos alunos, relatórios, questionários, etc.

d) Análise a posteriori e validação: nesta última fase da Engenharia Didática, analisa-se a produção dos alunos, as observações realizadas durante o desenvolvimento da sequência didática e todos os dados colhidos no decorrer da experimentação, confrontando-os com a análise *a priori* para que seja feita a validação das hipóteses da pesquisa. Segundo Artigue (1996) a análise *a posteriori*:

> [...] se apoia no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. E, como já indicamos, é no confronto das duas análises, *a priori* e a *posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação (ARTIGUE, 1996, p. 208).

As análises realizadas são de natureza qualitativa e local, competindo ao pesquisador observar "[...] a dinâmica de um sistema complexo, e ele o faz através da comparação da dinâmica observada com a referência fornecida pela análise *a priori*, tentando dar sentido às semelhanças e diferenças" (ARTIGUE, 2015, p. 474). O processo de validação é essencialmente interno e geralmente combina a análise dos dados coletados durante as próprias sessões em sala de aula, e dos dados complementares, estabelecendo-se desde a fase da análise *a priori* até a análise *a posteriori*. E, é no confronto de ambas que se validam ou se refutam as hipóteses vislumbradas no início da pesquisa.

Após essa breve caracterização da Engenharia Didática clássica, não poderíamos deixar de mencionar algumas das várias vertentes que dela se originaram ao longo das três últimas décadas. Não nos ateremos aos detalhes de cada uma dessas engenharias, pois foge ao escopo deste trabalho, apenas faremos algumas pontuações que consideramos pertinentes para esta pesquisa.

Estudos sobre a evolução e usos da Engenharia Didática foi o tema da escola de verão de Didática da Matemática de 2009, na França. As discussões apontaram os diferentes usos e concepções sobre esta metodologia considerada tanto como metodologia de pesquisa científica, quanto como uma metodologia que envolve vários processos e procedimentos para a formação profissional e/ou a elaboração de objetos de aprendizagem. Nesse contexto, segundo Artigue (2011), vimos o surgimento de um herbário de Engenharias Didáticas onde são encontradas famílias como: "[...] a ID TAD, a ID TS, a ID TA, a ID TSM ou a ID DDE, elas próprias agrupando muitas espécies, mas também objetos híbridos como a ID TS-TAD, a ID TS-TSM, a ID DDE-TSM[37]" (ARTIGUE, 2011, p. 221-222). Um dos temas de debate dessa escola de verão foi a ideia de Engenharia Didática de 1ª Geração e Engenharia Didática de 2ª Geração defendida por Perrin-Glorian (2011).

> A engenharia didática de primeira geração consiste em determinar dispositivos de ensino comunicáveis e reprodutíveis. Ela agrega algumas das características da pesquisa ação, já que se desenvolvem nela situações de sala de aula nas quais o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, tomando os devidos cuidados em relação ao grau de generalidade dos resultados. Já, na engenharia didática da segunda geração, o objetivo é a produção de recursos que podem ser utilizados pelo professor na sua aula, ou para a formação continuada ou inicial de professores, fazendo com que os professores apreendam a matemática, ou a matemática para ensinar a matemática (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 46).

Almouloud e Silva (2012), a partir das discussões da escola de verão realizada na França em 2009, apresenta uma articulação entre as diferentes engenharias e os desdobramentos da Engenharia Didática da 1ª geração (chamada de Engenharia Didática de Investigação – IDR) e da 2ª geração (chamada de Engenharia Didática de Desenvolvimento – IDD), bem como os objetivos e aspectos centrais dessas engenharias:

Quadro 10 - Engenharia Didática de primeira e segunda geração.

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
ED 1ª Geração IDR	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª Geração IDD	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: Almouloud e Silva (2012)

Com base nos aspectos da Engenharia Didática de 2ª geração, discutiu-se também na escola de verão de 2009, outros desdobramentos dessa Engenharia. Chevallard (2011) defendeu a noção de engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) e Boero (2011) a de Domínios de Experiência. Embora essas engenharias apresentem diferentes nuances, Artigue (2011) afirma que todas elas estão unificadas pela:

[37] Significados das siglas: Engenharia Didática de Design (ID), Teoria da atividade (TA), Didática dos Domínios da Experiência (DDE), Teoria da Situação Didática (TS) e Teoria da Mediação Semiótica (TSM).

> [...] concepção, implementação e avaliação de dispositivos didáticos tendo objetivos bem definidos, e apoiados claramente sobre bases teóricos, e suscetíveis de ser objeto de um discurso tecnológico no sentido da teoria antropológica da didática [...], a implementação tomando lugar em um sistema didático institucional (Escola, IUFM, mas também centro de férias...), com dispositivo principal ou dispositivo auxiliar (ARTIGUE, 2011, p. 220-221).

Essas engenharias apresentam diversos objetivos, tais como: exploração de organizações matemáticas e/ou didáticas, teste de hipóteses ou de construções teóricas, estudo do funcionamento de sistemas didáticos sob dadas condições, produção de recursos para o ensino de um determinado conceito ou de formação de professores, acompanhamento ou preparação de desenvolvimentos curriculares locais ou mais globais, etc. (ARTIGUE, 2011).

Percebe-se que, embora a Engenharia Didática seja uma metodologia de pesquisa que concorre com outras metodologias, ela continua sendo uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de construções teóricas, considerando as complexidades dos sistemas envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da matemática (ARTIGUE, 2015). Dessa maneira, “[...] a Engenharia Didática é um conceito vivo e dinâmico que se adapta à evolução do campo, aos avanços do conhecimento educacional e à evolução dos contextos sociais e culturais da educação matemática” (ARTIGUE, 2015, p. 493).

De fato, a Engenharia Didática é utilizada produtivamente como uma metodologia de pesquisa para além das suas fronteiras e é enriquecida pelos seus diferentes usos. Contudo, embora a Engenharia Didática tenha uma aparência flexível, ela “[...] impõe uma visão sistêmica do assunto, uma visão da sala de aula como organização social, da aprendizagem como uma combinação de processos de adaptação e aculturação e uma atenção particular à disciplina e sua epistemologia” (ARTIGUE, 2015, p. 493).

Procurou-se apontar, nessas poucas linhas, a caracterização da Engenharia Didática de 1ª geração, bem como alguns de seus desdobramentos que são temas de debate no contexto atual. Percebe-se, que a noção de Engenharia Didática evoluiu com o passar dos anos e tem assumido novos contornos, mas mantendo a sua “[...] dimensão fundadora para a nossa comunidade” (ARTIGUE, 2011, p. 231) da Educação Matemática e mantendo a sua característica principal que é o controle.

3.2.1.2 Pesquisa Colaborativa

Desgagné (2007) define a pesquisa Colaborativa a partir de três enunciados que estruturam esta conceituação: a pesquisa Colaborativa supõe a coconstrução de um objeto de conhecimento entre pesquisador e docentes; joga simultaneamente sobre dois registros, que é o da produção de conhecimentos e o do desenvolvimento profissional dos docentes; e, contribui para a aproximação e mediação entre comunidade de pesquisa e escolar.

O primeiro baseia-se na compreensão de que os docentes, no seu contexto real de atuação, constroem conhecimento na interação com o pesquisador a partir de um objeto de interesse comum. É por meio da colaboração, da construção e das responsabilidades partilhadas que o pesquisador e o professor modificam suas práticas discursivas. É importante destacar que o entendimento de colaboração se difere da cooperação e da participação. Compartilhamos do posicionamento de Ibiapina (2016), considerando que participar limita a ação de simplesmente fazer parte do processo, sem poder de decisão. "[...] Na cooperação uns ajudam os outros (co-operam) e na colaboração, os partícipes trabalham conjuntamente (co-laboram)" (IBIAPINA, 2016, p. 50). Desse modo, o processo colaborativo não se limita a uma simples troca de serviços,

> [...] trata-se de combinar, numa mesma atividade, o ensino e a pesquisa por meio de uma coconstrução que serve, ao mesmo tempo, para fins de aperfeiçoamento dos professores e de investigação do pesquisador. É um processo mais complexo, porque os postulados sobre os quais se assenta o projeto colaborativo trarão consequências sobre toda a dimensão da pesquisa, em suas diferentes etapas (DESGAGNÉ, 2007, p. 20).

No centro da combinação entre ensino e pesquisa se encontra a atividade reflexiva, uma vez que professores e pesquisadores mantêm um diálogo reflexivo entre a didática da pesquisa e a didática da prática por meio de reuniões periódicas que permitem criar uma "zona interpretativa" (BEDNARZ, 2009) em torno das situações. Nesse espaço de discussão recíproca desenvolvem-se argumentos sob a perspectiva de que os atores dão sentido as situações de ensino, nas quais será possível a produção de novos conhecimentos.

> É aqui que entra em jogo a dimensão da colaboração no sentido da coconstrução de um certo conhecimento, onde as respectivas competências dos diferentes parceiros dão as suas contribuições. A pesquisa colaborativa envolve a coconstrução de um objeto de conhecimento entre investigadores e profissionais (BEDNARZ, 2009, p. 6).

A coconstrução de um objeto de conhecimento entre pesquisadores e docentes pode ser vista, simultaneamente, como uma atividade de pesquisa e de formação, a qual caracteriza o segundo enunciado proposto por Desgagné (2007) para definir a pesquisa Colaborativa, a saber: joga simultaneamente sobre dois registros, que é o da produção de conhecimentos e o do desenvolvimento profissional dos docentes.

Partindo da reflexão conjunta realizada entre pesquisador e professor, o projeto de pesquisa vai se articular de duas formas: como uma oportunidade para a investigação cujo objeto se constitui numa preocupação para o pesquisador; e, como uma oportunidade para o aperfeiçoamento dos professores por meio da atividade reflexiva sobre algum aspecto da sua prática profissional com vista a esclarecê-la, torná-la mais explícita e possivelmente contribuindo para a reestruturação da sua prática pedagógica. "Essa dupla identidade, da forma como a concebemos, é exigência do próprio conceito de colaboração, porque esse conceito supõe a possibilidade de engajamento de cada tipo de parceiro, a partir das suas preocupações e dos seus respectivos interesses" (DESGAGNÉ, 2007, p. 15). Dessa maneira, o pesquisador deverá ajustar as funções de pesquisador e de formador que irá desempenhar nesse processo.

O pesquisador ao aliar-se aos professores para coconstruir um objeto de conhecimento, cruza as dimensões da sua experiência e de seus conhecimentos com o conhecimento e a experiência dos professores.

> A pesquisa Colaborativa não exige que os docentes assumam tarefas ligadas à realização da pesquisa, no sentido formal do termo; o que ela exige é a sua participação como coconstrutores, ou como já dissemos, o seu engajamento para a investigação de um aspecto de sua prática, a fim de evidenciar a sua compreensão do fenômeno explorado em contexto (DESGAGNÉ, 2007, p. 24).

Não se trata aqui de colocar a posição dos docentes em detrimento da posição do pesquisador, pois a investigação Colaborativa parte do princípio de que os profissionais, professores e pesquisadores, são essenciais no processo de produção e desenvolvimento das atividades, e que eles desempenham papéis diferentes, porém de igual importância.

De acordo com Desgagné *et al* (2001), o pesquisador tem por objetivo a produção de conhecimento, levando em consideração o ponto de vista do praticante (professor) e as dificuldades do seu contexto de atuação. Por outro lado, o professor objetiva o desenvolvimento da sua prática que é assistida pelo pesquisador e pelas referências conceituais que orientam a produção de conhecimento. Isso não quer dizer que as transformações da ação docente sejam o resultado de uma aplicação, muito pelo contrário, elas são construídas num processo de colaboração e de responsabilidades partilhadas em que ambos, professor e pesquisador, aprendem e modificam as suas práticas discursivas.

Nessa perspectiva, pode-se dizer que se estabelece o terceiro enunciado proposto por Desgagné (2007) para caracterizar a pesquisa colaborativa, ou seja, a aproximação e mediação entre comunidade de pesquisa e comunidade docente. O desejo de estreitar laços entre a academia e a escola, sofreu uma certa resistência durante muito tempo, pois se fazia presente a concepção de que a produção de conhecimento dos pesquisadores e dos docentes deveriam ser restritos aos seus contextos de atuações, marcando assim a existência de uma *fenda* entre esses dois mundos (DESGAGNÉ, 2007). De um lado estava a “[...] produção dos pesquisadores oriunda do mundo acadêmico e da pesquisa científica; e, do outro lado, os saberes advindos do mundo da prática educativa, cuja produção de conhecimentos ficava restrita e limitada a explicação da prática pela própria prática” (IBIAPINA, 2016, p. 35).

Contudo, no final da década de 90 do século passado, a pesquisa colaborativa introduz uma nova maneira de fazer pesquisa, rompendo com a concepção de que pesquisadores e professores e seus conhecimentos, necessariamente, fiquem limitados a produzir saberes que circulem apenas nos seus próprios mundos. Uma *ponte* é construída para unir esses dois campos, que até então, eram concebidos como opostos. Percebeu-se que na pesquisa colaborativa “[...] pesquisadores e docentes podem se aliar no processo de construção de saberes, proporcionando a interconexão entre esses mundos” (IBIAPINA, 2016, p. 36). Todavia, segundo Desgagné (2007), nesse tipo de pesquisa os dois mundos convivem sem necessariamente se unirem.

> Entendemos o pesquisador como uma espécie de “agente duplo”, cuja habilidade consiste em propor aos docentes uma atividade reflexiva que possa, simultaneamente, satisfazer as necessidades de desenvolvimento profissional e atender as necessidades do avanço de conhecimentos no domínio da pesquisa. Estes dois tipos de demandas – desenvolvimento profissional e pesquisa – não implica na junção de dois mundos, mesmo que sejam compatíveis (DESGAGNÉ, 2007, p. 19).

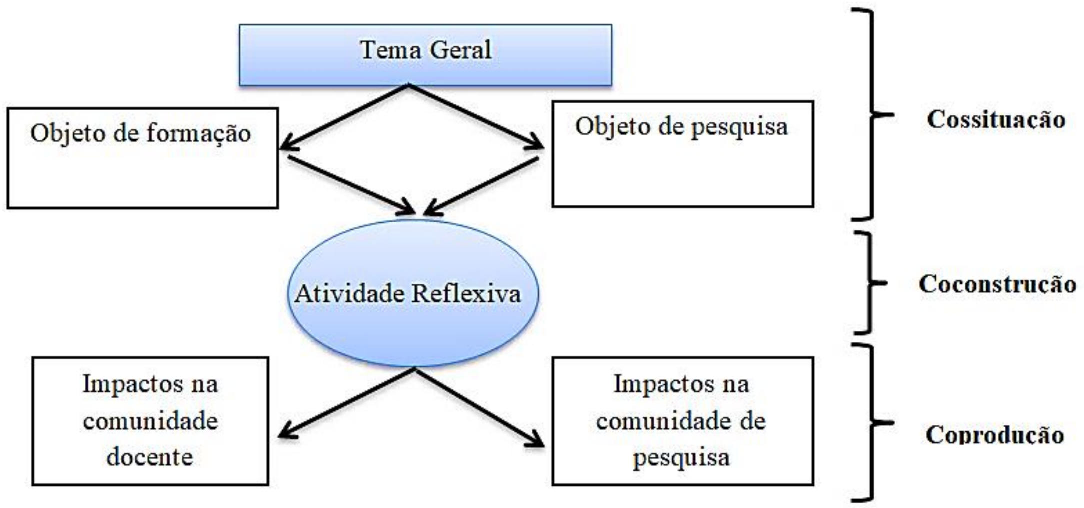
O papel do pesquisador nesse processo colaborativo consiste em balizar e orientar a compreensão construída durante a investigação, a partir do projeto teórico ligado ao objeto de pesquisa, de maneira que as dimensões investigativa e formativa estejam bem integradas. Como resultado dessa colaboração, temos um intercâmbio de serviços entre atores que fazem parte de culturas diferentes, mas que compõem uma mesma organização que não precisa atender aos mesmos propósitos.

> A cultura escolar encoraja o professor a dotar-se dos meios para desenvolver e para melhorar a sua prática, mais especificamente a qualidade da sua intervenção com os alunos sob sua responsabilidade. A cultura científica encoraja o pesquisador universitário a contribuir para a produção de conhecimento em um determinado campo. O acordo de colaboração consiste em assegurar que a mesma atividade reflexiva em torno de um projeto de exploração negociado irá assegurar que estas expectativas sejam cumpridas a contento em ambas as partes (DESGAGNÉ *et al*, 2001, p. 39).

Nessa perspectiva, Desgagné *et al* (2001) propõe um modelo de pesquisa colaborativa que visa assegurar que a prática a ser explorada pelos professores seja relevante para esses profissionais, bem como, garantir que o processo de reflexão, propriamente dito, possa se definir numa abordagem que propicie o desenvolvimento profissional dos docentes e como um dispositivo de coleta de dados para os pesquisadores. “Finalmente, vamos assegurar que os frutos dessa metodologia e a sua difusão são igualmente importantes para a comunidade de professores, bem como, para a comunidade de pesquisa (o que nós chamaremos de fase de coprodução)” (DESGAGNÉ *et al*, 2001, p. 40).

Para ilustrar a sua proposta de modelo colaborativo, Desgagné *et al* (2001) apresenta um organograma para destacar os elementos comuns encontrados na descrição de cinco projetos de pesquisas diferentes que fizeram uso da pesquisa Colaborativa.

Figura 37 - Esquema representativo da metodologia Colaborativa.



Fonte: A autora a partir de Desgagné *et al* (2001)

Os componentes fazem parte do que Desgagné *et al* (2001) chama de fases do modelo colaborativo: cossituação (formular o tema geral e os seus respectivos objetivos), coconstrução (atividade reflexiva em que os parceiros se envolvem na construção de conhecimentos ligados à prática) e coprodução (impactos do projeto nas comunidades envolvidas).

A etapa de cossituação delimita a permeabilidade que deve ser mantida entre as perspectivas dos atores envolvidos no processo (investigador e professores). “O objetivo é assegurar que a situação que está a ser trabalhada é uma situação relevante tanto para o investigador em relação às suas preocupações de investigação como também para os profissionais em relação às suas preocupações práticas” (BEDNARZ *et al*, 2015, p. 4). Nessa relação a ser constituída, de acordo com Desgagné *et al.* (2001), há que se pensar até que ponto cada grupo de atores se apropria do seu próprio projeto colaborativo, bem como, o quanto cada um desses grupos se apropria da perspectiva do outro.

> O essencial reside, basicamente, na capacidade dos atores manterem no seu horizonte colaborativo o equilíbrio a ser preservado entre a perspectiva do aperfeiçoamento e da investigação, bem como a permeabilidade a ser mantida entre estas duas perspectivas, para cada um dos atores envolvidos no processo (DESGAGNÉ *et al*, 2001, p. 55).

O espaço e o papel, tanto do pesquisador quanto dos professores, devem ser respeitados. De acordo com Desgagné (2007), a finalidade da função do professor se encontra na aprendizagem dos alunos que estará vinculada a sua ação. O professor tem a liberdade e a responsabilidade de criar, nas salas de aula, as condições necessárias para garantir essa aprendizagem. Para fins de investigação, essa *competência de ator em contexto* impregna o próprio objeto de pesquisa. Desgagné (2007) esclarece que essa *competência* implica na capacidade do professor de exercer seu julgamento e guiar as suas decisões em função do entendimento das condições que prevalecem e do que está em jogo no contexto da sala de aula.

> Efetivamente, o pesquisador deve considerar o ponto de vista dos professores sobre a própria prática; deve se interessar pelas reflexões que eles fazem em seus contextos de ação; deve analisar suas maneiras de enfrentar as situações, considerando-as, porém, a partir dos limites e dos recursos que elas apresentam. O pesquisador deve privilegiar, acima de tudo, as "competências do ator em contexto". Isto supõe que ele não dirigirá, pela escolha do objeto, um olhar normativo e exterior "sobre" aquilo que os mais professores fazem, mas procurará "com" eles, no interior do contexto em que atuam compreender em que se apoia esse agir (DESGAGNÉ, 2007, p. 11).

É a partir dessa relação de cumplicidade estabelecida entre os atores do processo da pesquisa colaborativa que a atividade reflexiva possibilita coconstruir um determinado conhecimento sobre a prática. A abordagem da formação e a abordagem da investigação consistem, em consonância com uma certa concepção, num conhecimento a ser coconstruído. Nesse sentido, o pesquisador, ao aliar-se aos professores para coconstruir um objeto de conhecimento, também possibilita fazê-los entrar num processo de aperfeiçoamento sobre algum aspecto da prática profissional.

O trabalho colaborativo entre pesquisador e professores não significa que todos devam participar das mesmas tarefas. Por exemplo, os professores não precisam necessariamente participar das tarefas formais da pesquisa (definição do quadro conceitual, metodologia, coleta de dados, etc.), isso poderá ser de responsabilidade do pesquisador. O que será solicitado aos professores é a sua participação, junto ao pesquisador, num processo de reflexão sobre algum aspecto da sua prática docente.

> [...] processo que, segundo a natureza dos projetos, os levará a explorar uma nova situação, ou ainda, a observar uma situação já vivenciada, mas sobre a qual eles desejariam esclarecê-la, isto é, uma situação que eles gostariam de melhor compreender. É do interior desse processo de reflexão e de compreensão, construída acerca de uma determinada situação prática escolhida pelos docentes, que o pesquisador, na interação com eles, investiga o objeto de pesquisa (daí a ideia de coconstrução) (DESGAGNÉ, 2007, p. 14-15).

Mesmo que o pesquisador assuma a dimensão formal da pesquisa, isso não o isenta de preservar constantemente o ponto de vista dos professores em todas as etapas da pesquisa, não importando se essas etapas foram realizadas com ou sem a ajuda dos colaboradores convidados.

Partindo da coconstrução, realizada pela interação entre pesquisador e professores, o projeto de pesquisa vai se articular de duas formas: como projeto de aperfeiçoamento para os professores e como projeto de pesquisa. Contudo, isso não implica na junção desses dois mundos, pois eles podem conviver paralelamente. Movimentar-se entre esses dois mundos paralelos, e por vezes até estranhos um ao outro, exige do pesquisador exercer o papel, de acordo com Desgagné (2007), de *agente duplo*, cuja habilidade se baseia em propor aos professores uma atividade reflexiva que possa atender, simultaneamente, as necessidades do desenvolvimento profissional dos mesmos, bem como, as necessidades do avanço de conhecimentos para o mundo da pesquisa. Para Desgagné (2007), o pesquisador seria um *agente mediador* que se move

> [...] nos dois mundos para tentar reaproximá-los ou mesmo criar uma ponte entre as duas culturas de trabalho que eles representam. O objetivo mais amplo dessa abordagem visa à construção de uma cultura comum, resultante do processo de mediação entre a pesquisa e a prática, onde os conhecimentos construídos em colaboração levam em conta tanto os limites quanto os recursos desses dois mundos (DESGAGNÉ, 2007, p. 23).

Os conhecimentos construídos em colaboração e atendendo ao critério da dupla plausibilidade, têm uma importância social quando se trata da apresentação e da fertilidade dos resultados em ambas as culturas. Chega-se à etapa de coprodução da empreitada, que se expressa em termos de impactos do produto da pesquisa colaborativa e de como ele responde às expectativas dos professores e do pesquisador. Contudo, essa etapa não tem identidade própria, ela está totalmente comprometida com a etapa da coconstrução, ou seja, a coprodução tem sua origem na etapa da coconstrução.

Muito além de associar os impactos da pesquisa colaborativa a um produto,

> [...] existe o processo em que os participantes estão envolvidos, pesquisadores e professores, numa abordagem através da qual se pode assumir que progrediram, ainda que em termos de representação do mundo da pesquisa e do mundo da prática e das múltiplas "pontes" que se tornam possíveis de manter entre os dois quando as condições necessárias para o empreendimento são criadas pela coconstrução (DESGAGNÉ *et al*, 2001, p. 57).

Os resultados, a longo prazo, para os profissionais podem também ser traduzidos em termos de partilha de práticas com outros professores da comunidade escolar em que atuam. Ao possibilitar uma maior ventilação entre o mundo da pesquisa e o mundo da prática, na educação básica, muitos outros benefícios podem aparecer para além da sala de aula.

Bednarz *et al* (2015) aponta que a utilização da pesquisa colaborativa por parte de mestrandos e doutorandos, na qual experienciaram o confronto entre a mediação do mundo da pesquisa e da prática, geralmente "[...] reinvestem a abordagem, quando se tornam profissionais, formadores, conselheiros pedagógicos etc, e olham de forma diferente para a prática profissional através de uma abordagem diferente do trabalho com professores" (BEDNARZ *et al*, 2015, p. 6). Ou seja, o conhecimento que foi produzido em contexto é capaz de gerar novos conhecimentos e novas ideias vão surgindo nesse processo que vai muito além da própria estrutura da sua produção.

3.2.1.3 Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria

A metodologia de pesquisa adotada, neste trabalho, constitui-se por uma associação entre a Engenharia Didática de 1ª geração (ARTIGUE, 1996), a pesquisa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007), a Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016) em sinergia com os indicativos de Duval (2003, 2004a, 2004b, 2005b, 2011, 2014) na construção de um ambiente favorável para a aprendizagem da geometria, considerando a desconstrução dimensional das formas, os olhares, as apreensões em geometria e as funções discursivas da língua.

Inspiramo-nos na metodologia de pesquisa utilizada por Derouet (2016) no seu trabalho de doutoramento, cujo objetivo foi o de desenvolver e implantar tarefas matemáticas para introduzir o conceito da função densidade de probabilidade numa classe "*terminale S*"[38] em Paris no ano de 2015. As atividades propostas, durante a pesquisa, para essa classe, deveriam seguir o programa do curso em condições normais, sem qualquer ajuste de tempo de aula, sem o uso de novos equipamentos e sem modificar os objetivos do professor da classe. Para tanto, Derouet (2016) deparou-se com uma questão metodológica: "[...] que metodologia de pesquisa deve ser posta em prática para garantir a viabilidade das sessões projetadas em sala de aula?" (DEROUET, 2017, p. 6).

Disposta a solucionar esse problema, esta autora desenvolveu uma metodologia de pesquisa que segue os fundamentos da Engenharia Didática propostos por Artigue (1996), acrescentando a ela uma dimensão colaborativa, na perspectiva de Desgagné *et al* (2001). Derouet (2016) definiu essa dimensão metodológica como Engenharia Didática Colaborativa,

> [...] que é estruturada pela metodologia da Engenharia Didática, por isso encontramos as mesmas fases características. No entanto, dentro destas fases, algumas nuances do trabalho colaborativo (entre pesquisador e professor) são adicionadas (DEROUET, 2016, p. 203).

As particularidades do trabalho colaborativo entre pesquisador e professor nessa vertente metodológica aplicada na pesquisa de Derouet (2016) estão, especialmente, atreladas com a coconstrução da sequência com o professor. A dimensão colaborativa dessa metodologia mostrou que o papel do professor não deve ser negligenciado e o seu ponto de vista deve ser considerado no desenvolvimento da sequência didática.

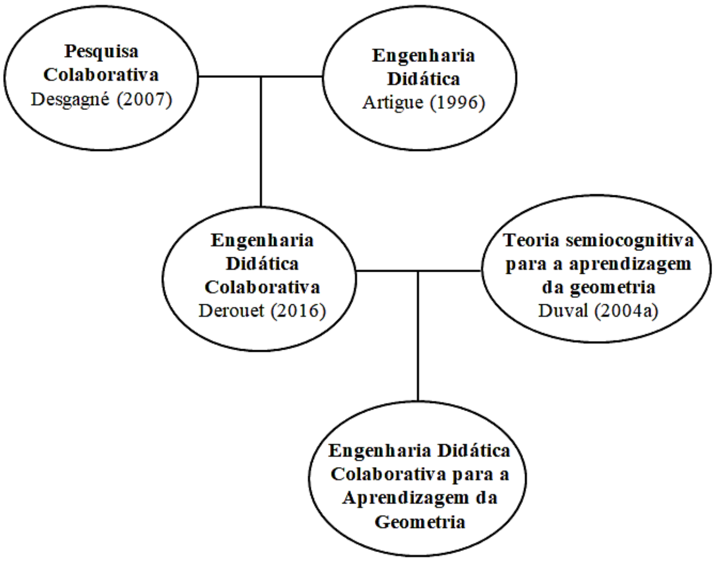
O processo de coconstrução contribuiu para a satisfação pessoal e profissional da docente participante da pesquisa, ao perceber a real construção do conceito da função densidade de probabilidade pelo coletivo de alunos. Fato que culminou com a decisão da professora em incluir essa sequência didática nas suas práticas docentes futuras (DEROUET, 2017).

Esse cenário possibilitou-nos conjecturar uma vertente metodológica diferenciada para a aprendizagem da geometria nos anos iniciais. A partir de um programa de formação para professores pedagogos e do estabelecimento de aproximações entre a Engenharia Didática de 1ª geração, a Pesquisa Colaborativa, a Engenharia Didática Colaborativa e a teoria semiocognitiva de Duval para a aprendizagem da geometria, emergiu uma nova tendência

[38] Na França, a classe "*terminale S*" corresponde à turma terminal de ciências que é o terceiro e último ano do ensino médio, quando o aluno escolhe o bacharelado científico.

metodológica. O protótipo da árvore genealógica da Figura 38 mostra o desabrochar da nossa metodologia de pesquisa.

Figura 38 - Conjectura do surgimento da metodologia de pesquisa.



Fonte: A autora

O despontar dessa possibilidade metodológica surgiu quando nos defrontamos com a necessidade de oferecermos um programa de formação para os professores pedagogos, considerando a necessidade de um estudo da teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria. A partir dessa fundamentação teórica, num ambiente colaborativo entre professores e pesquisadora, elaboramos, desenvolvemos e aplicamos um conjunto de atividades de geometria para os alunos dos anos iniciais, considerando os Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria em sinergia com as funções discursivas da língua. As respostas apresentadas pelos alunos, às atividades propostas, foram analisadas pelas professoras sob o viés do referencial teórico adotado durante a formação.

Afinal, se desejamos saber qual a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem a partir de um programa de formação, que assume uma perspectiva semiocognitiva, como negar a sua colaboração nesse processo? Desse modo, assim como Derouet (2016), deparamo-nos, também, com uma questão fundamental: qual metodologia de pesquisa poderá contribuir com a formação em geometria, na perspectiva semiocognitiva, de professores pedagogos que possa assegurar a sua colaboração em sinergia com as etapas da Engenharia Didática?

Para além de uma formação teórica, necessita-se de uma metodologia de pesquisa que, por um lado, garanta aos professores o seu protagonismo na condução do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, considerando todo o contexto específico de uma classe nesse nível de ensino. E, por outro lado, que seja uma ferramenta "[...] para responder perguntas didáticas, para identificar, analisar e produzir fenômenos didáticos por meio da organização controlada de experimentos didáticos" (ARTIGUE, 2015, p. 477) e que tenha uma dimensão aplicada.

Do ponto de vista da engenharia didática colaborativa, considera-se que "[...] o trabalho colaborativo implica levar em conta o ponto de vista do professor e as restrições do seu contexto de ensino" (DEROUET, 2017, p. 7). Estimamos que promover um programa de formação em geometria, para professores pedagogos, valorizando o seu protagonismo no processo de coconstrução das situações de ensino, pode ser um caminho promissor para que os professores adotem um olhar mais abrangente, tanto no presente quanto no futuro, sobre o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais, considerando as operações semiocognitivas.

Respeitando os fundamentos da engenharia didática clássica como metodologia de pesquisa, cabe ao pesquisador observar a dinâmica desse complexo sistema. Ele o faz por meio da "[...] comparação da dinâmica observada com a referência fornecida pela análise *a priori*, tentando dar sentido às semelhanças e diferenças" (ARTIGUE, 2015, p. 474), para assim poder validar as suas hipóteses. Nessa direção, a engenharia didática é considerada essencial para o desenvolvimento de construções teóricas e vem sendo estendida a outros contextos, podendo combinar várias abordagens teóricas e sendo utilizada produtivamente para além de suas fronteiras (ARTIGUE, 2015). Essa abertura possibilitou-nos elaborar uma combinação metodológica entre a engenharia didática, a engenharia didática colaborativa, a pesquisa colaborativa e a perspectiva semiocognitiva, apresentada por Duval para a aprendizagem da geometria, com intuito de melhor atender aos objetivos desta pesquisa.

A metodologia de pesquisa, adotada neste trabalho, manteve-se alinhada aos fundamentos essenciais da engenharia didática, que permanecem invariantes mesmo nas vertentes dela originadas. Artigue (2011), refletindo sobre a questão da refundação da engenharia didática, apresenta uma definição mínima de engenharia que permite *a priori* incluir as diferentes formas de engenharia apresentadas durante a Escola de Verão de Didática da Matemática em 2009 na França. Esta autora aponta quatro sensibilidades fundamentais, e não independentes, na refundação da estrutura da engenharia didática: a sensibilidade epistemológica, de controle, do professor e dos modos de validação. "[...] Sensibilidades que compartilhamos e que fazem com que o que desejamos chamar de engenharia didática não seja apenas uma forma qualquer de *design* didático” (ARTIGUE, 2011, p. 228).

A sensibilidade epistemológica, que é constitutiva da ideia de engenharia didática, se expressa de maneiras diferentes dependendo do tipo de abordagem, mas pode exprimir-se em termos da situação fundamental. “Em qualquer esforço de reconstrução, essa sensibilidade deve permanecer fundamental” (ARTIGUE, 2011, p. 229).

A sensibilidade de controle, segundo Artigue (2011), não pode ser abandonada e dois objetos de fronteira permitem trabalhá-la: a análise *a priori* e o *milieu* tomado em suas relações com a noção de mesogênese[39]. Tanto na engenharia didática quanto na teoria das situações didáticas,

> [...] é por meio de uma análise *a priori* que se expressam as ambições de controle da engenharia didática, a análise em termos de *milieu* tem um papel essencial. A atenção progressiva prestada à mesogênese e a contribuição conjunta de professores e alunos para essa mesogênese, a sensibilidade aos recursos do *milieu* que constituem potencialmente as respostas culturais acessíveis que são impulsionadas pela dialética dos meios e do *milieu*, enriquecem a modelagem original da dinâmica de interação com o *milieu* e, sem dúvida, modificam consequentemente as formas que podem assumir a análise *a priori*, mas eles não aniquilam umas às outras (ARTIGUE, 2011, p. 229).

Assim, observa-se que a sensibilidade de controle é uma característica marcante da engenharia didática, mostrando a importância da análise *a priori* no desenvolvimento da pesquisa.

Segundo Artigue (2011), a sensibilidade de validação interna é a que se mostra mais presente nos diferentes contornos assumidos pela engenharia didática. Ela caracteriza-se pela sua natureza qualitativa no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

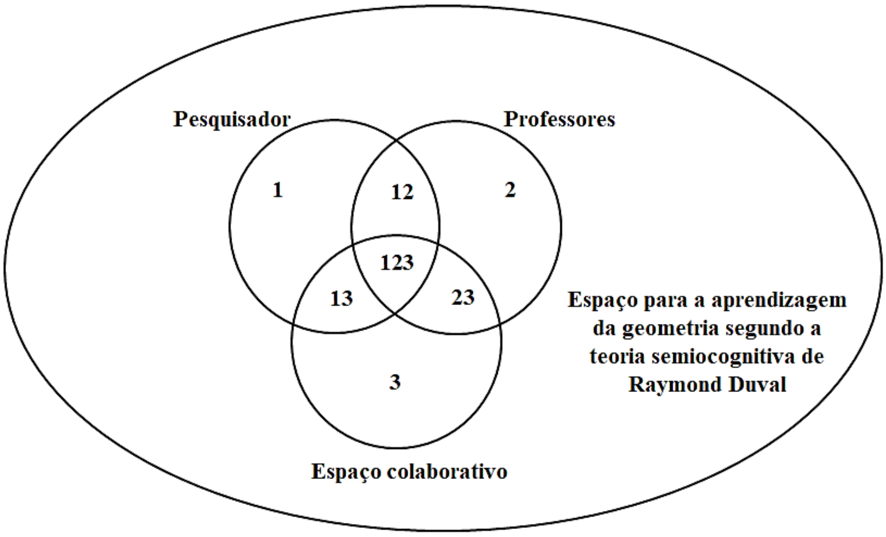
No processo de refundação da engenharia didática, a sensibilidade para o professor, de acordo com Artigue (2011), obriga-nos a pensar: a) na engenharia didática do desenvolvimento como recursos, adaptando-se aos estilos de ensino, aos contextos educacionais singulares e assim preparar em sua própria concepção essas adaptações necessárias; b) nas particularidades possíveis das engenharias didáticas produzidas, incluindo nelas critérios de robustez, de custo da especialização, de carga de trabalho, de distância das práticas habituais; c) nas relações entre professores e pesquisadores, questionando as metáforas de transmissão e de disseminação, que produzem uma ideia de movimento unidirecional, inadequadas à dinâmica produtiva dos sistemas educacionais.

---

[39] Mesogênese é caracterizada por Chevallard (2011, p. 92) como o processo de construção do *milieu*, que se elabora para gerar respostas internas.

Analisando as sensibilidades mencionadas por Artigue (2011) na refundação de uma engenharia didática como metodologia de pesquisa, propomos uma Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, pensando nas adaptações necessárias a um programa de formação para professores pedagogos (concomitante a sua prática docente), considerando as suas particularidades e procurando estabelecer uma relação colaborativa entre pesquisador e professores, ou seja, um processo de coconstrução. Nossa metodologia de pesquisa está representada pelo esquema da Figura 39.

Figura 39 - Esquema metodológico da Engenharia Didática Colaborativa para Aprendizagem da Geometria.



Fonte: A autora

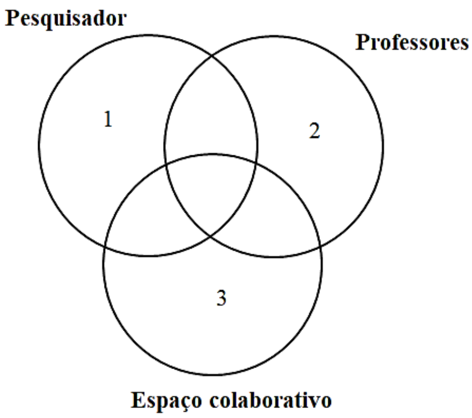
Pensamos ser muito significativa, no âmbito da aprendizagem, essa possibilidade de trabalho entre pesquisador e professores num espaço colaborativo, mergulhados na perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, atrelado a uma engenharia didática, visto que "esse trabalho de equipe entre professores e investigadores permite dar mais peso aos cenários de ensino considerados" (DEROUET, 2017, p. 7).

A tessitura metodológica construída, a partir dos entrelaçamentos entre pesquisador, professores, espaço colaborativo e espaço para a aprendizagem da geometria segundo a teoria semiocognitiva, seguiu as mesmas etapas da Engenharia Didática de 1ª geração (análises prévias, análise *a priori,* experimentação e, por fim, análise *a posteriori* e validação). Contudo, algumas adaptações foram feitas para melhor atender aos propósitos desta pesquisa. Dissertamos, a seguir, sobre cada uma dessas etapas da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE).

3.2.1.3.1 Análises prévias da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria

As análises prévias da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE) estão representadas pelos círculos numerados por um dígito [1], [2] e [3]. Nessa fase, a colaboração não foi tão acentuada, mas ela contou com o olhar de todos os integrantes do processo, assumindo três diferentes perspectivas: do Pesquisador [1], dos Professores [2] e do Espaço Colaborativo [3], todos imersos no espaço semiocognitivo da aprendizagem da geometria.

Figura 40 - Espaço metodológico das análises prévias da EDCAGE.



Fonte: A autora

Do ponto de vista do pesquisador [1], essa fase foi estruturada em torno do contexto problemático da formação dos professores pedagogos, abordado no capítulo 2 (A formação de professores pedagogos). As análises prévias contemplaram os aspectos históricos da formação desses profissionais, buscando analisar as possíveis interferências dessa formação na prática docente atual. Investigamos as legislações/orientações oficiais que delineiam as ações pedagógicas do professor pedagogo, a formação em geometria desses profissionais ao longo da sua trajetória estudantil e as categorias de conhecimentos necessários aos professores pedagogos para ensinar geometria, procurando indícios de como esses aspectos podem estar influenciando na maneira como os esses professores concebem a aprendizagem da geometria.

A dimensão epistemológica, das análises prévias, foi contemplada na sessão 2.3 (A formação matemática do pedagogo: a questão da geometria), que tratou das possibilidades de constituição do saber matemático escolar dos professores pedagogos, da problemática que o ensino da geometria vem sofrendo ao longo da trajetória histórica no ensino básico e da influência das correntes pedagógicas nas práticas de ensino e aprendizagem da geometria (racionalista, empirista, construtivista,...), formando o conjunto de saberes científicos dos professores que, de certa forma, vem sendo passado de geração em geração, talvez, podendo ser observado ainda hoje nas práticas de ensino nos anos iniciais.

A dimensão cognitiva das análises prévias da EDCAGE foi abordada na sessão 2.3.1 (A constituição dos saberes geométricos do professor pedagogo), considerando a complexidade da constituição dos saberes docente e a evidência da importância do saber específico do conteúdo, dentre tantos outros saberes, na prática pedagógica. O desconhecimento dos professores pedagogos, tanto do conhecimento específico do conteúdo da geometria quanto das operações cognitivas que são acionadas por meio de atividades específicas para esse campo do conhecimento, causam certos embaraços nesses profissionais frente ao tema, contribuindo assim para um ensino às cegas, muitas vezes conduzidos pelos modelos vivenciados nas suas experiências discentes.

A dimensão didática esteve preocupada em apontar as características do funcionamento do sistema de ensino atual no curso de pedagogia, abordado na sessão 2.3.2 (O currículo do curso de pedagogia: um olhar atento para a abordagem da geometria) e nos estudos que estão sendo desenvolvidos a respeito dessa problemática, contemplado na sessão 2.3.3 (Uma visão panorâmica da formação em geometria do pedagogo nas pesquisas brasileiras).

Nessa análise documental, percebeu-se uma carga horária insignificante no curso de pedagogia destinada à matemática. Em alguns casos, a geometria não chega a ser mencionada e os objetos matemáticos não são abordados pelos seus sistemas produtores de representações semióticas. As pesquisas brasileiras atuais, sobre a formação em geometria do professor pedagogo, apontaram contribuições importantes por meio do desenvolvimento de programas de formação. Entretanto, não foram encontradas propostas de formações para professores pedagogos que abordassem os objetos geométricos na perspectiva semiótica da desconstrução dimensional das formas, e que considerassem as apreensões, as funções discursivas da língua e a passagem do olhar icônico ao não icônico, assim como indicado por Duval (2005b).

As análises prévias da EDCAGE na perspectiva dos professores [2] foram elaboradas a partir das respostas apresentadas em um questionário[40] aberto, aplicado individualmente, no primeiro encontro de formação. Para manter o anonimato dos sujeitos da pesquisa, eles foram

[40] Apêndice A.

numerados aleatoriamente de 1 a 11. Assim, a indicação da professora 1 será feita por P1, a professora 2 por P2 e assim sucessivamente.

As questões foram elaboradas visando atender as dimensões epistemológica, cognitiva e didática das análises preliminares da EDCAGE. A partir das respostas encontradas no primeiro questionamento: "como foi a sua relação com o estudo da geometria na educação básica e na graduação? Justifique!", procuramos vislumbrar a análise prévia na dimensão epistemológica das dificuldades encontradas pelos professores ao longo da sua formação escolar com relação ao conhecimento de geometria.

Analisando os dados coletados, percebemos que metade das professoras nem se lembram mais de como a geometria foi abordada ao longo da sua vida estudantil, salientando que foi um conhecimento pouco significativo, como relata a P11: *"Não lembro. Realmente foi sem significado, pois não lembro o que e como aprendi"*.

Entre as professoras que recordaram do seu processo de aprendizagem da geometria, apenas 20% delas afirmaram que gostam de geometria e, por isso, sempre tiveram uma boa relação com esse conhecimento. Contudo, não especificaram a maneira como a geometria foi conduzida durante o seu aprendizado, nem os conteúdos que aprenderam e tão pouco as operações semiocognitivas presente nesse processo.

As demais professoras relataram que, durante a sua formação escolar, a geometria teve uma abordagem puramente teórica, voltada apenas à aplicação de fórmulas na resolução de problemas, o que contribuiu para o estabelecimento de uma relação problemática, como assinala a P5: "*Minha relação com o estudo da geometria na educação básica foi conturbada a ponto de 'rodar' na disciplina de geometria no ensino médio*".

Um dado marcante foi que 80% das professoras parecem não terem possuído formação em geometria no curso de pedagogia, pois elas justificaram não se lembrar de ter estudado esse campo do conhecimento na graduação. Contudo, as professoras, que parecem terem sido contempladas com uma formação em geometria no curso de pedagogia, apontaram que esta foi muito superficial e que aprenderam a trabalhar a geometria partindo da criança e do meio em que ela vive.

Procurando fazer uma análise cognitiva dos conhecimentos acionados no processo de ensino da geometria, pedimos para que as professoras descrevessem as fontes dos conhecimentos geométricos colocados em ação na sua prática pedagógica.

Examinando os dados obtidos, observamos o forte apego ao livro didático como subsídio para a condução do processo de ensino da geometria. Mais da metade das professoras fizeram menção a esse componente, aliando-o a outras fontes, como: pesquisas na internet, material manipulável, programas de formações continuadas, troca de experiências com outros professores e relações com os conhecimentos práticos da geometria encontrados no cotidiano.

A ideia do objeto geométrico visto como um ente que pode ser encontrado no ambiente físico, foi assinalada por 20% das professoras como sendo a fonte dos conhecimentos acionados na sua prática pedagógica. Uma professora indicou que utiliza apenas o livro didático como fonte de conhecimento para conduzir a sua prática pedagógica, referente à geometria. Outra professora apontou que na maioria das vezes ela utiliza apenas pesquisas na internet para planejar as aulas de geometria.

As professoras não mencionaram a sua formação acadêmica, tampouco os elementos fundamentais da geometria e nem os resultados de pesquisas desenvolvidos sobre o ensino e a aprendizagem da geometria como fonte de conhecimentos utilizados para conduzir o processo de ensino desse campo do conhecimento nos anos iniciais do ensino fundamental.

Procurando evidenciar a análise prévia, na perspectiva dos professores, num nível didático, fizemos o seguinte questionamento: "como você analisa/acompanha o processo de aprendizagem da geometria dos seus alunos? Justifique sua resposta!". A partir das respostas apresentadas para este questionamento, percebemos que 30% das professoras concebem a aprendizagem da geometria como um processo. O registro de P11 ilustra essa posição: "*Observo a compreensão que eles têm a partir do que visualizam. Com o retorno, a explicação dele, consigo rever, reavaliar o que foi compreendido*". Nesse relato, parece haver um olhar sensível ao processo da aprendizagem da geometria por parte desse grupo de professoras. Contudo, as operações cognitivas envolvidas nesse processo não foram mencionadas.

Evidenciamos que 20% das professoras analisam a aprendizagem da geometria por meio de atividades práticas, exercícios e registros no caderno. Essas professoras não enunciaram como realizam a análise dessas atividades e não assinalaram o diálogo como uma possibilidade de acompanhamento.

Uma professora ressaltou a dificuldade de acompanhar o processo de aprendizagem da geometria devido à escassez de materiais concretos. Vejamos o seu depoimento: "*Bastante complexo, pois muitas vezes não temos material para trabalhar o concreto, porém no cotidiano consigo muitas vezes na oralidade e não só na escrita*" (P6). Nesse cenário, parece que o processo de aprendizagem da geometria está atrelado a objetos físicos, como se os objetos geométricos pudessem ser encontrados na natureza. Outro dado interessante encontrado nesse relato é o fato de que a oralidade parece assumir um lugar de destaque em detrimento da linguagem escrita no processo de aprendizagem da geometria.

A resposta da professora P5, a esse questionamento, parece trazer à tona um dos problemas enfrentados pelos professores pedagogos, quando se trata de acompanhar o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais. Vejamos: "*Todo o ensino da matemática, especialmente na rede pública, se mostra lento, parece que não conseguimos ver o trabalho fluir, talvez porque precisamos aprender a compreender a matemática no lugar de somente 'fazer' a matemática*".

Pelo relato dessa professora, dois pontos parecem estar intimamente relacionados: "*não conseguir ver o trabalho fluir*" e "*precisar aprender a compreender a matemática*". Parece que a compreensão dos processos semiocognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria é uma necessidade sentida por essa professora. Pela sua percepção, podemos inferir que o entendimento da matemática, não só pela ótica da face exposta, mas também da face oculta da mesma, pode favorecer o andamento do processo de ensino e consequentemente da aprendizagem da geometria. Por meio desse conhecimento, a professora parece apontar uma possibilidade para "*ver o trabalho fluir*", ou seja, perceber o desenvolvimento do olhar dos alunos durante o processo de aprendizagem da geometria.

No conjunto de todas as respostas obtidas para esse questionamento, verificamos que as professoras não mencionaram a importância dos sistemas produtores de representações semióticas na análise da aprendizagem da geometria, bem como não foram cogitadas as operações semiocognitivas acionadas nesse processo.

Bem, parece que as análises preliminares, tanto na nossa perspectiva quanto na perspectiva das professoras, apontaram para um cenário problemático e deficitário da formação do professor pedagogo em geometria ao longo da sua trajetória estudantil, inclusive na graduação. Essas análises prévias nos possibilitaram fundamentar a criação da EDCAGE e pensar num programa de formação que considere um Espaço Colaborativo [3], visando a criação de uma ação conjunta entre pesquisador e professores.

As análises preliminares na perspectiva do Espaço Colaborativo [3] objetivaram construir um ambiente favorável para a aprendizagem da geometria na perspectiva semiótica, considerando a decomposição dimensional das formas, as apreensões, as funções discursivas da língua e a passagem do olhar icônico ao não icônico, por intermédio de uma abordagem colaborativa, em que se aspirou à aproximação entre a pesquisa e a prática pedagógica.

No espaço colaborativo a interação entre nós e as professoras procurou propiciar um trabalho em equipe, visando promover dinâmicas de investigação no processo de aprendizagem da geometria, permitindo adequar os processos de ensino e aprendizagem às características específicas da classe que as professoras lecionavam. Dessa maneira, no Espaço

Colaborativo, as professoras amparadas nas fontes teóricas e num trabalho de equipe entre seus pares e conosco, deveriam alcançar a autonomia sobre a sua prática, tomando consciência *do que faz*, *como faz*, *por que faz*, e tornando-se capaz de ressignificar a sua prática pedagógica.

De maneira sucinta, o quadro apresenta as análises prévias da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Quadro 11- Síntese das análises prévias da EDCAGE.

Análises prévias da EDCAGE		
PESQUISADOR [1] -Dimensão epistemológica: formação em geometria do pedagogo. -Dimensão cognitiva: conhecimento específico da geometria e das operações semiocognitivas. -Dimensão didática: currículo do curso de pedagogia e as pesquisas sobre a formação em geometria do pedagogo.	PROFESSOR [2] -Dimensão epistemológica: formação pouco significativa em geometria. -Dimensão cognitiva: forte apego ao livro didático. Ideia de objeto geométrico atrelado ao objeto físico. -Dimensão didática: dificuldades para acompanhar o processo de aprendizagem da geometria. Desconhecimento das operações semiocognitivas.	ESPAÇO COLABORATIVO [3] -Dimensão epistemológica: aspectos semiocognitivos presentes na aprendizagem da geometria. -Dimensão cognitiva: investigação colaborativa no processo de aprendizagem da geometria. -Dimensão didática: ressignificar a prática pedagógica no processo de ensino da geometria.

Fonte: A autora

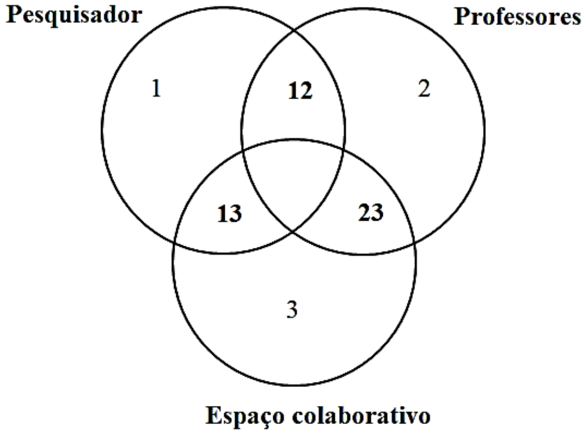
Essas análises prévias subsidiaram a elaboração das nossas hipóteses, indicadas a seguir.

3.2.1.3.2 Análise *a priori* da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria

Nessa fase da EDCAGE, baseado nas análises prévias, considerando a perspectiva do pesquisador, dos professores e do espaço colaborativo, chegou a hora da tomada de decisão para agir sobre o problema de pesquisa e tornar possível a solução deste com relação a: qual a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem, na perspectiva semiótica, num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria?

A fase da análise *a priori* da EDCAGE está representada pelos espaços indicados por dois dígitos [12], [13] e [23], como mostra a Figura 41.

Figura 41 - Espaço metodológico da análise *a priori* da EDCAGE.



Fonte: A autora

No espaço [12] situa-se a análise *a priori* na perspectiva do pesquisador em relação aos professores no ambiente de trabalho colaborativo. A partir das análises prévias situadas no espaço metodológico [1], mencionadas anteriormente, formulamos as seguintes hipóteses:

- a base conceitual de geometria que os professores pedagogos construíram ao longo da sua trajetória estudantil pouco, ou nada, contribui para orientar a aprendizagem da geometria na sua prática pedagógica.
- o currículo dos cursos de pedagogia parece preocupar-se insuficientemente com a formação matemática do pedagogo, especialmente, no campo da geometria.
- as maneiras de entrar no modo de ver matematicamente em geometria na perspectiva semiótica de Duval poderá ampliar a compreensão dos professores sobre o processo de aprendizagem da geometria.
- o programa de formação continuada conduzido num ambiente colaborativo entre pesquisador e professores pedagogos poderá evidenciar o protagonismo do professor tanto nos aprofundamentos teóricos quanto na condução do processo de aprendizagem da geometria nas situações de ensino.

Essas hipóteses orientaram a organização e o desenvolvimento de um programa de formação continuada com professores pedagogos num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Durante o planejamento do programa, selecionamos seis textos científicos[41] que abordaram a decomposição dimensional das formas, as funções discursivas da língua, as apreensões e os olhares. Esses textos formaram o repertório teórico de leituras que seriam realizadas pelos professores. Contudo, suspeitávamos que, se as discussões dos textos fossem ilustradas por atividades de geometria, a serem resolvidas pelos professores, o entendimento das ideias centrais de cada texto poderia ser facilitado. Assim, os professores poderiam experienciar as operações cognitivas envolvidas na aprendizagem da geometria.

Estávamos cientes de que o desenvolvimento do programa de formação com o grupo de professores apresentaria muitos desafios, mas que existia a possibilidade de estes serem ultrapassados no decorrer dos encontros. O fato de adentrar num campo teórico desconhecido para os pedagogos poderia ser um processo árduo. Prevíamos que a leitura dos artigos selecionados para o estudo e a apresentação dos mesmos poderiam se mostrar muitas vezes intransponíveis, havendo necessidade da nossa intervenção para que os temas fossem compreendidos.

Nosso propósito era de, a partir dos referenciais teóricos estudados e das atividades de geometria realizadas durante a formação, instigar os professores a elaborarem e aplicarem atividades de geometria com seus alunos e, por fim, analisarem essas respostas num processo reflexivo amparados cientificamente. Dessa maneira, em comunhão com a posição de Brousseau (1996), pensamos que o professor pedagogo só terá adquirido o conhecimento sobre o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais quando for capaz de aplicá-lo por si mesmo em situações fora do contexto do programa de formação.

Prevíamos que esse trabalho independente traria algum desconforto aos professores, por tratar-se de uma ação pouco explorada nas práticas formativas. Deixar de ser um ator passivo e passar a atuar num trabalho colaborativo em parceria com o formador no desenvolvimento da pesquisa, poderia ser motivo de estranhamento.

Contudo, julgávamos importante ouvir e considerar a prática profissional desses professores associados a um estudo teórico colaborativo, como uma maneira de promover uma formação mais consistente, tendo em vista que a sua ação foi orientada tanto pela sua experiência profissional, quanto pelo estudo conceitual. Dessa maneira, o professor teria a

[41] Relação dos textos encontra-se no quadro 12.

oportunidade de criar atividades e não apenas aplicar atividades pré-definidas pelo pesquisador, favorecendo o refinamento do seu olhar sobre o processo de aprendizagem da geometria na perspectiva semiótica e possibilitando exercer a sua autonomia na condução desse processo.

No ambiente metodológico identificado por [13] estão situadas as análises *a priori* do pesquisador com relação ao Espaço colaborativo. Esperávamos que esse ambiente pudesse integrar a formação continuada à pesquisa, ou seja, propiciar uma maior aproximação entre a universidade e a escola por intermédio de um trabalho colaborativo.

Não se tratou de sobrepor uma instituição em detrimento da outra, ambas assumiram papéis específicos de igual importância. No espaço colaborativo, professores e pesquisador buscaram, juntos, condições para proporcionar a emancipação dos pedagogos frente à aprendizagem da geometria nos anos iniciais, favorecendo o seu protagonismo pedagógico numa ação reflexiva. A construção/constituição desse espaço colaborativo apresentou alguns percalços durante o seu desenvolvimento, que foram sendo solucionados pelo diálogo entre o grupo de professores e o pesquisador, e registrados como fonte de dados da pesquisa.

No espaço metodológico [23] da EDCAGE encontra-se a análise *a priori* na perspectiva dos professores com relação ao espaço colaborativo. Esses dados foram coletados por meio de questionário aberto, respondido individualmente, no primeiro encontro de formação, após uma breve explanação da pesquisadora sobre a metodologia de pesquisa adotada no programa de estudo. Por intermédio das respostas encontradas, procuramos vislumbrar o entendimento e as expectativas dos professores a respeito do programa de formação, que considerou o protagonismo do professor num ambiente colaborativo entre professores e pesquisador.

O primeiro questionamento feito às professoras, "como você compreende o Espaço Colaborativo formado pelo grupo de professores e o pesquisador? Justifique sua resposta!", propôs analisar a compreensão das professoras a respeito do espaço colaborativo. As respostas obtidas indicaram uma convergência entre as compreensões das professoras, concebendo o espaço colaborativo como um ambiente importante que apresenta a possibilidade da aproximação entre a teoria e a prática pedagógica, propiciando a ampliação e a produção de conhecimentos e favorecendo a troca de experiências.

Encontramos entre as respostas apresentadas para esse questionamento dois posicionamentos que merecem destaque. A professora P3 entendeu o espaço colaborativo como "*um espaço inovador, que temos oportunidades diversas*". Ou seja, mediante esse depoimento, podemos inferir que essa proposta metodológica de formação parece ser algo novo e suscita uma expectativa positiva sobre o programa de formação, na perspectiva dessa professora.

A segunda resposta manifestada pela professora P1 ratifica o que temos defendido ao longo desses escritos. Pressupomos que existe a necessidade de o professor pedagogo ter um conhecimento profundo sobre o que ele ensina, deixando de ser um mero reprodutor de orientações curriculares elaboradas sem a sua colaboração. Vejamos sua declaração: "*Penso ser o ideal construir juntos e de forma colaborativa e não de uma coisa mecânica (siga o modelo). Muitas vezes recebemos materiais para serem aplicados e não construímos juntos*". Ou seja, parece existir a necessidade de investir numa formação pedagógica que abra espaço para a colaboração do professor, amparado em estudos teóricos, que lhe faça assumir o papel de protagonista nas situações de ensino e de aprendizagem da geometria.

Outro questionamento realizado com os professores foi o de procurar saber "quais as contribuições/entraves do espaço colaborativo no desenvolvimento de programas de formação para professores? Justifique sua resposta!", objetivando coletar informações sobre as expectativas dos professores sobre o ambiente colaborativo.

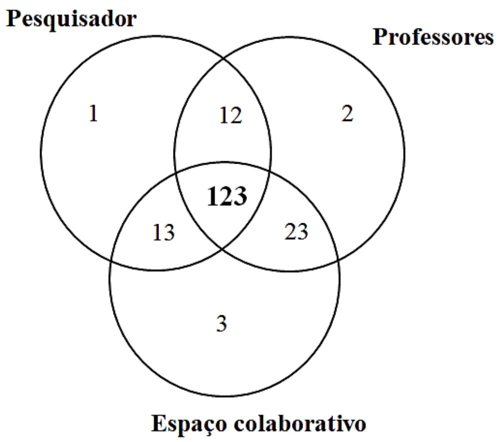
Analisando o conjunto das respostas, percebemos que as professoras entendem que o espaço colaborativo traz contribuições significativas para a sua formação. Entre as justificativas apresentadas houve ênfase na importância dos momentos de reflexão sobre a prática pedagógica e na necessidade de ampliação do repertório teórico para melhorar a prática pedagógica. Pois, segundo a professora P10 "*com o professor sendo esclarecido de suas dúvidas, os estudantes terão uma educação matemática mais efetiva*". Uma vez que "*quando há respeito mútuo e vontade de aprender, o conhecimento científico pode chegar até a sala de aula*" (P2). Dessa maneira, segundo o professor P1, no espaço colaborativo "*só há contribuições. Acredito que a gente aprende fazendo*".

Percebemos nas entrelinhas da escrita das professoras uma certa surpresa no fato de elas poderem colaborar com o desenvolvimento do programa de formação e serem reconhecidas como sujeitos produtores de conhecimentos. Parece que em algum momento da sua trajetória profissional elas esqueceram que também fazem parte da academia, e como tal participam, direta ou indiretamente, do mundo da pesquisa.

3.2.1.3.3 Experimentação, análise *a posteriori* e validação da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria

Chegamos ao ponto central do esquema metodológico da EDCAGE. Nesse espaço, indicado por [123] temos a intersecção das três circunferências, onde Pesquisador, Professores e Espaço colaborativo estão entrelaçados e imersos no espaço para a Aprendizagem da Geometria, contribuindo de diferentes maneiras, mas que juntos complementam-se, visando a aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental na perspectiva semiótica e buscando o aperfeiçoamento do olhar do professor pedagogo sobre o processo de aprendizagem da geometria.

Figura 42 - Espaço metodológico da experimentação, análise *a posteriori* e validação da EDCAGE.



Fonte: A autora

Nesse ambiente de três dígitos [123] encontra-se a fase da experimentação, análise *a posteriori*, validação e institucionalização. A fase da experimentação da EDCAGE aconteceu efetivamente no contato direto do pesquisador com os professores, por intermédio do desenvolvimento do programa de formação com 11 professoras pedagogas[42] que estavam exercendo a docência em escolas públicas da secretaria municipal (SMSJ) e estadual (SED) de ensino no município de São José – SC.

O programa de formação foi na modalidade presencial, com encontros quinzenais, organizados e planejados, conjuntamente, entre pesquisadora e professoras. Os encontros foram gravados em vídeo e áudio e registrados, por nós, em diário de bordo.

Nessa fase de experimentação, a atividade reflexiva esteve presente em todos os momentos, pois desenvolvemos um trabalho conjunto entre nós e as professoras

[42] O grupo de professores foi formado a partir de um convite destinado a todos os professores pedagogos que estivessem exercendo a docência na rede municipal de ensino no município de São José no ano de 2021. Entre todos os convidados, onze professoras se prontificaram a participar voluntariamente do programa de formação.

(coconstrução), o qual contemplou uma fundamentação teórica associada às práticas pedagógicas.

A cada encontro uma equipe de professoras foi responsável por organizar e conduzir os trabalhos de estudos de textos, selecionados, previamente por nós. Nesses encontros regulares existiu uma atividade reflexiva que promoveu um intercâmbio de informações a respeito da prática e dos conhecimentos dessas professoras que não fugiram aos nossos olhos.

Ainda na fase da experimentação, tivemos a construção conjunta (coconstrução) de uma sequência de atividades que visaram a aprendizagem da geometria na perspectiva semiocognitiva de Duval, considerando a decomposição dimensional das formas, as funções discursivas da língua, as apreensões e os olhares.

Os resultados das aplicações das atividades e a análise das respostas foram trazidos pelas professoras na forma de registro em diário de bordo e tiveram um enfoque todo especial. O confronto da análise *a priori* (a elaboração das atividades e o que as professoras esperavam que os alunos respondessem) e *a posteriori* (o que os alunos responderam) das professoras, com relação às atividades aplicadas na sala de aula, foi a nossa fonte de dados para caracterizar a compreensão de aprendizagem da geometria do professor pedagogo.

Na fase da análise *a posteriori* e validação, as nossas ações, enquanto pesquisadora, estiveram apoiadas na análise das produções das professoras, nas observações realizadas durante os encontros de formação e em todo o conjunto de dados recolhido durante a fase da experimentação. Assumimos total responsabilidade por essa fase. Contudo, a dimensão reflexiva permaneceu em cena. Os momentos de discussão do grupo, o confronto entre a análise *a priori* e análise *a posteriori* pelas professoras sobre a produção, aplicação e o desempenho dos alunos na realização das atividades promoveu, além da atividade reflexiva, a coprodução dessa empreitada. Ou seja, por meio do trabalho de coconstrução e da atividade reflexiva, obtivemos a coprodução, onde os resultados da pesquisa procuram atender tanto as expectativas das professoras, quanto nossas, enquanto pesquisadora.

O processo de validação da EDCAGE foi essencialmente interno, e se estabeleceu desde a fase da concepção e da análise *a priori* até a análise *a posteriori*. Foi pelo confronto delas que validamos e refutamos as nossas hipóteses. No entanto, tendo em conta a dimensão colaborativa, a validação da Engenharia pelo professor, após a experiência, também precisou ser considerada. Gostaríamos de ressaltar que, nesse trabalho, o sucesso ou o fracasso da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria passou pelo atendimento das expectativas das professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

A EDCAGE seguiu todas as fases da engenharia didática clássica, contudo permeada a todo o momento pelas características da pesquisa colaborativa, da engenharia didática colaborativa, ancoradas na perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria. O detalhamento das fases da experimentação, da análise *a posteriori* e da validação da EDCAGE, nesse capítulo, poderia torná-lo muito extenso e cansativo, por isso optamos por explicitá-lo e pormenorizá-lo no próximo capítulo.

4 CAMINHOS DA PESQUISA: O PROGRAMA DE FORMAÇÃO, A ANÁLISE DOS DADOS E A VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COLABORATIVA PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

No capítulo anterior foi apresentada a fundamentação teórica e metodológica adotada neste trabalho. A perspectiva semiótica apontada por Duval, para a aprendizagem da geometria, fez-nos pensar na possibilidade de desenvolver um programa de formação para professores pedagogos de acordo com essa concepção. O planejamento e a aplicação do programa de formação constituíram a fase da experimentação da nossa pesquisa, situada no campo metodológico [123], juntamente com as fases da análise *a posteriori* e a validação da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE).

Neste capítulo, será relatado o desenvolvimento do programa de formação, apontando os dados que foram coletados durante esse momento da pesquisa. A partir desses dados realizamos a análise *a posteriori*. Confrontando a análise *a priori* com a análise *a posteriori* conseguimos validar as nossas hipóteses e vislumbrar uma possível solução para o nosso problema de pesquisa.

4.1 O DESENROLAR DO PROGRAMA DE FORMAÇÃO E A COLETA DOS DADOS DA PESQUISA

O programa de formação para professores pedagogos intitulado: “Aprendizagem da Geometria: perspectivas semiocognitivas importantes para a formação matemática dos professores pedagogos”, foi desenvolvido com um grupo constituído por 11 professoras pedagogas que estavam atuando nos anos iniciais, durante o ano letivo de 2021, na cidade de São José – SC, na rede pública de ensino municipal e estadual. Ele contou com a parceria da Secretaria Municipal de Educação (SME) de São José que disponibilizou a estrutura física para a realização dos encontros e com duas funcionárias da SME para assessorarem na parte técnica do desenvolvimento do programa de formação. O programa de formação foi elaborado e aplicado por nós, que atuamos concomitantemente como formadora e pesquisadora. O desenvolvimento da formação ocorreu no período compreendido entre março e julho de 2021.

Os nove encontros presenciais de formação aconteceram quinzenalmente, das 18h às 21h, completando uma carga horária de 40 horas (30h presenciais e 10h à distância). Nos seis primeiros dias de formação, foram realizados estudos e reflexões teóricas, por intermédio da leitura de artigos e capítulos de livros que trataram das seguintes temáticas: os registros de representação semióticas e a sua importância para a evolução do pensamento matemático; as funções discursivas da língua natural; a face oculta e a face exposta da atividade matemática; as duas maneiras de ver em geometria (heurística e desconstrução dimensional das formas); as apreensões em geometria; os olhares em geometria (icônico e não icônico) e a desconstrução dimensional das formas como condição necessária para a aprendizagem da geometria.

Os três últimos encontros da formação foram destinados à elaboração (subsidiados pelos referenciais teóricos abordados na formação), aplicação e análise de atividades de geometria para os alunos dos anos iniciais. As atividades foram aplicadas nas turmas em que as professoras eram regentes. A elaboração das atividades e as análises das respostas dos alunos pelas professoras constituíram uma importante fonte de dados, que nos auxiliou no entendimento da compreensão de aprendizagem da geometria que as professoras pedagogas construíram, na perspectiva semiótica, por intermédio do ambiente metodológico da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Todos os encontros de formação foram registrados por intermédio do diário de bordo e de recursos audiovisuais. Como instrumentos complementares para a coleta de dados, também foram aplicados questionários individuais e a realização da avaliação dos encontros, por meio do depoimento das professoras ao final de cada sessão. A partir das observações em campo e detalhadas ainda mais pela reprodução das gravações dos encontros, realizamos o registro no diário de bordo[43].

Em virtude da pandemia do coronavírus, a organização dos encontros seguiu atentamente todos os protocolos de segurança determinados pelo Ministério da Saúde para evitar a propagação da COVID-19. Manteve-se, em todos os encontros de formação, o uso de máscaras, o distanciamento social, o uso de álcool em gel, etc.

O cronograma dos encontros foi elaborado conjuntamente com o grupo de professoras no primeiro encontro de formação. O estudo dos textos, selecionados previamente, foram conduzidos pelas professoras, tendo nossas contribuições, num trabalho colaborativo em que ocorreram muitas reflexões e trocas de experiências, considerando as diferentes perspectivas. Pequenas equipes de professoras foram formadas para as apresentações dos textos. Na data previamente agendada, uma equipe específica era responsável pela apresentação do artigo e pela condução dos trabalhos do encontro.

[43] O diário de bordo foi considerado, neste trabalho, um instrumento em que foram anotadas todas as observações dos fatos concretos, dos acontecimentos, das relações estabelecidas, das reflexões e interpretações do pesquisador.

Seguiremos agora com o relato dos encontros de formação, ambiente em que emergiram os dados dessa pesquisa.

4.1.1 O primeiro encontro de formação: a organização de uma caminhada

A apresentação dos integrantes do grupo foi feita através da dinâmica da árvore dos sapatos. Essa atividade também teve por objetivo, conhecer as expectativas das professoras com relação ao programa de formação, por intermédio do questionamento: onde quer chegar esse sapato ao final dessa formação?

No conjunto das respostas apresentadas pelas professoras, percebemos que todas estavam buscando aperfeiçoar os seus conhecimentos matemáticos e mostraram-se abertas a novas perspectivas de aprendizagem. Os depoimentos de algumas delas ilustraram o posicionamento apresentado pelo grupo. Vejamos: "*Ao final dessa formação pretendo ter ampliado os meus conhecimentos sobre geometria*" (P8), ou seja, indicando a expectativa de querer aprimorar os seus conhecimentos matemáticos. Outra resposta que merece destaque é a de chegar a "*ter mais conhecimento para multiplicar*" (P5), podendo ser entendida como um desejo de construir novos conhecimentos para subsidiar a sua prática pedagógica. O posicionamento da professora P4 pode ser entendido como um complemento à resposta da professora P5, por indicar que ao final da formação quer chegar "*com algo a mais para oferecer*", referindo-se, muito provavelmente, ao exercício da docência.

Dando continuidade, apresentamos o panorama geral da formação, expondo o modelo metodológico da pesquisa e a importância do trabalho que foi desenvolvido pelas professoras e por nós, tanto para a produção de conhecimentos, sob o ponto de vista da pesquisa científica, quanto para a formação pedagógica.

Após a explanação da dinâmica do programa de formação, foi feita a leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido[44] detalhadamente, enfatizando que a participação era voluntária e que todos os dados coletados na pesquisa seriam acessados apenas por nós e pelo orientador da pesquisa, preservando o anonimato de todos os participantes da mesma. As professoras se mostraram receptivas a proposta e prontamente assinaram o termo.

Buscando atender aos requisitos metodológicos da EDCAGE, mais especificamente das análises preliminares na perspectiva dos professores e da análise *a priori* na perspectiva

---

[44] Apêndice B.

dos professores com relação ao espaço colaborativo, foi solicitado que as professoras respondessem um questionário. Esse questionário e a análise das respostas foram contemplados no capítulo anterior, nos itens 3.3.1.3.1 e 3.3.1.3.2.

Por tratar-se de uma formação colaborativa, foram formadas três equipes de professoras que ficaram responsáveis pela apresentação e discussão de quatro textos. Contudo, a leitura prévia dos textos foi realizada por todas as professoras participantes da formação. A organização das equipes e seus respectivos textos para apresentação estão indicados no Quadro 11.

Quadro 12 - Distribuição dos textos para estudo entre as equipes de professoras.

TEXTO	EQUIPE
1. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática (DUVAL, 2005a). 2. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014).	**Selma** (Formadora/Pesquisadora)
3. Temas do grupo de pesquisa em epistemologia e ensino de matemática do programa de pós-graduação em Educação Científica e tecnológica: significado do que é “fazer matemática” (DUVAL; MORETTI, 2018) (leitura da p. 82 a 87). 4. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência (DUVAL, 2012c).	**Equipe 1** P10, P11, P1
5. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria (MORETTI, 2013).	**Equipe 2** P5, P6, P2, P3
6. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas (SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019).	**Equipe 3** P8, P9, P4, P7

Fonte: A autora

Com a organização geral da formação concluída, iniciamos a apresentação do texto “Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática” (DUVAL, 2005a). Explanamos sobre a forma específica da aprendizagem matemática, que diferentemente de outras áreas do conhecimento que dispõem dos objetos de estudo perceptíveis, esta trata de objetos ideias. Assim, a aprendizagem matemática está atrelada as diferentes representações semióticas existentes para um mesmo objeto matemático e mudando a forma de representação, muda-se também o conteúdo. Exemplificamos essa ideia utilizando várias situações encontradas na aprendizagem da matemática dos anos iniciais, entre elas, a representação do triângulo na forma geométrica, na língua natural e na notação matemática formal.

Foi interessante perceber a reação espantosa das professoras frente a nossa explanação sobre o tema. Elas levantaram vários questionamentos que serviram como referência para que pudéssemos compreender as dificuldades encontradas no ensino da geometria. Apresentamos várias situações problematizadoras, uma delas foi a de construir todos os retângulos possíveis com 15 cm^2 de área, utilizando números inteiros para as dimensões.

As opções apontadas pelo grupo foram de que poderiam ser construídos quatro tipos de retângulos: 3cm por 5cm, 5cm por 3cm, 1cm por 15cm, 15cm por 1cm. Ao questionarmos sobre o que difere os retângulos com dimensões 3cm por 5cm e 5cm por 3cm, o grupo chegou à conclusão, depois de muitos debates, que os retângulos eram iguais, pois eles apenas haviam sido rotacionados.

As professoras destacaram que dificilmente as figuras aparecem rotacionadas nos livros didáticos dos anos iniciais e que isso interfere na aprendizagem das crianças e no planejamento das atividades, uma vez que elas têm como referência o livro didático para orientar as atividades de geometria a serem propostas aos alunos.

Podemos inferir, por intermédio dessa situação, que as professoras pela falta de um conhecimento específico do conteúdo, pautavam-se nos conteúdos dos livros didáticos dos anos iniciais, que por sua vez não consideravam a rotação das figuras planas. Ao serem confrontadas com a representação do retângulo rotacionado, tinham o entendimento de que se tratava de figuras diferentes.

Finalizando o encontro, foi solicitado que todos deveriam fazer a leitura prévia dos textos 1 e 2, elaborar perguntas e apontar as dúvidas para a discussão no próximo encontro. Prevendo as possíveis dificuldades e desconfortos que as professoras teriam para realizar a leitura dos textos, orientamos que elas fizessem a leitura, mesmo que não conseguissem ter o entendimento completo.

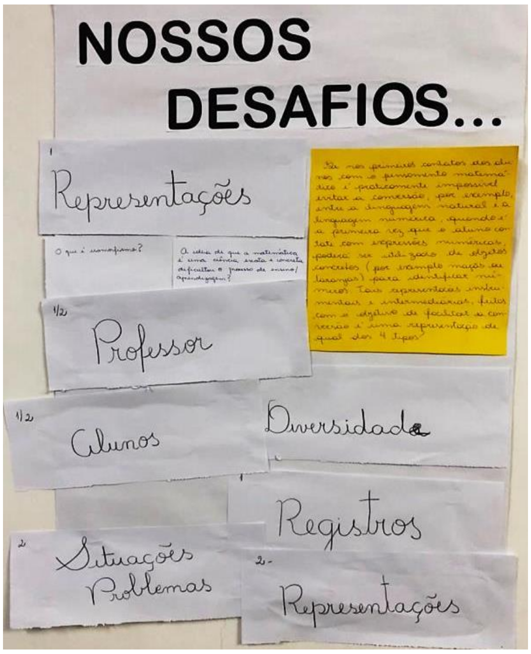
Na avaliação do encontro, as professores destacaram a importância da formação como um momento de aprendizado, de relembrar conceitos, contribuindo assim para ampliar o conhecimento matemático.

4.1.2 O segundo encontro de formação: as diferentes representações para um mesmo objeto geométrico

O segundo encontro da formação continuada foi iniciado pela recepção das professoras e seguido da leitura do diário de bordo do encontro anterior, no qual teve a aprovação pelo grupo de professoras.

Para começar os estudos teóricos, fizemos o levantamento das dúvidas referentes às leituras dos textos, trazidas pelas professoras. Essas questões estavam anotadas em recortes de papel, que foram colados num painel.

Figura 43 - Dúvidas apresentadas pelas professoras.



Fonte: Arquivos da autora

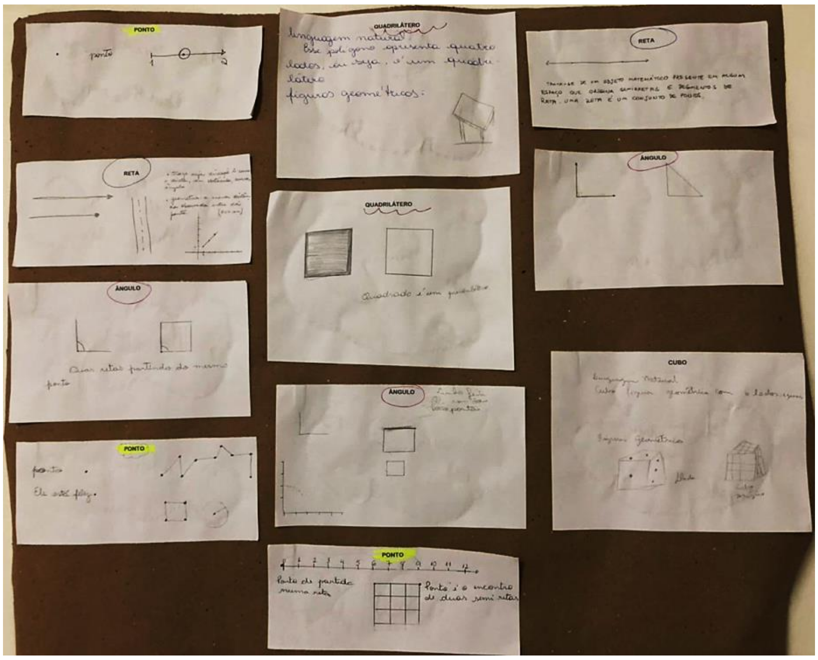
Essas dúvidas foram retomadas após a apresentação dos textos e das discussões e atividades realizadas pelo grupo. Segundo o depoimento das professoras, a leitura dos textos não foi fácil, por tratar-se de uma literatura mais específica à matemática, trazendo termos formais dessa disciplina. Algumas professoras, pela dificuldade de entendimento, optaram por um olhar mais atento nas considerações finais, fazendo uma leitura mais superficial dos textos. O que de certa forma, já havíamos previsto.

Iniciamos a apresentação dos textos fazendo uma retrospectiva do encontro anterior. Com o intuito de desafiar as professoras, distribuímos nomes de alguns objetos geométricos (ponto, reta, ângulo, quadrilátero e cubo) para que elas os representassem utilizando dois registros de representação semióticas diferentes.

Foi um momento produtivo, fomentando discussões a respeito das definições e conceitos desses objetos do conhecimento matemático, bem como um abalo nas estruturas conceituais já consolidadas pelas professoras. Discutiu-se também a necessidade de utilizar instrumentos que possibilitam a construção de formas geométricas como, por exemplo, a régua. E que, o não uso desses instrumentos pelos professores nas aulas de matemática, acaba repercutindo nos hábitos dos alunos de não os utilizarem nas construções geométricas.

Para representar o objeto utilizando dois registros de representação diferentes, algumas professoras recorreram a pesquisas na internet. As representações diferentes apresentadas pelas professoras para um mesmo objeto matemático, foram expostas num painel e compartilhadas com o grupo.

Figura 44 - Representações diferentes para um mesmo objeto geométrico.

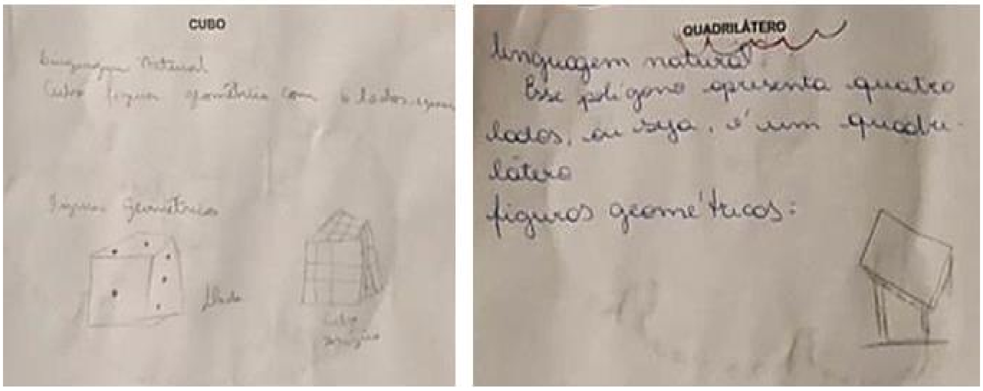


Fonte: Arquivos da autora

Um mesmo objeto geométrico foi representado por professoras diferentes, ocasionando a representação deste num mesmo sistema semiótico, mas com abordagens diferentes. Esse fato gerou surpresa para algumas professoras, possibilitando um olhar mais abrangente para os diferentes registros de representação que podem ser utilizados para fazer referência a um mesmo objeto geométrico.

Observando a maneira como as professoras representaram os diferentes objetos matemáticos, percebemos alguns conceitos deturpados.

Figura 45 - Representações do cubo e do quadrilátero.



Fonte: Arquivos da autora

Segundo a professora P4, a representação do cubo na língua natural pode ser indicada com uma figura geométrica com seis lados iguais. Ou seja, o cubo é entendido como um polígono (2D) que tem seis lados e não como uma forma tridimensional que possui seis faces quadradas congruentes. Percebemos ainda, que para essa professora a representação geométrica do objeto matemático, que é ideal, está ancorada na representação de objetos físicos, como o dado e o cubo mágico.

Esse apego das representações geométricas atreladas a objetos físicos é reforçado pela professora P1, ao representar um quadrilátero por intermédio do desenho de uma mesa. Assim, ela parece se contradizer com a definição de quadrilátero que, segundo ela é um polígono de quatro lados. Isso quer dizer que um quadrilátero é uma figura bidimensional, ao passo que a mesa é um objeto físico tridimensional.

Vejamos a problemática que se impõe: para a professora P4 o objeto geométrico cubo 3D é considerado 2D e para a professora P1 o objeto quadrilátero (2D) é entendido como uma forma geométrica 3D. Essas dificuldades tão expressivas apresentadas pelo grupo de professoras, a respeito dos elementos fundamentais da geometria, conceitos básicos e estruturantes de todo o conhecimento geométrico, já eram esperadas por nós, mas não num grau tão acentuado.

Aproveitando a discussão, a partir da observação das professoras ao painel, sobre as diferentes representações para um mesmo objeto matemático, introduzimos a ideia das transformações possíveis entre os registros de representação: o tratamento e a conversão. Nessa discussão, as professoras destacaram que os alunos apresentam mais dificuldades para resolver as atividades que exigem a conversão, ressaltando que os sentidos desta não apresentam o mesmo grau de dificuldade. Nesse contexto, trouxemos para a discussão os fenômenos da congruência e da não congruência semântica, bem como as suas implicações para o ensino e a sua importância para a aprendizagem.

Destacamos que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas e que no caso da geometria, as formas geométricas e a linguagem natural estão sempre presentes. Isso porque nenhuma figura é autossuficiente para indicar todas as suas propriedades, ela precisa de um enunciado.

Assim, numa atitude provocativa, desenhamos no quadro a figura de um ângulo que poderia ser um ângulo reto, mas sem nenhuma indicação verbal ou formal, e perguntamos às professoras que tipo de ângulo era aquele. Prontamente responderam que se tratava de um ângulo reto. Então, perguntamos: o que garantia que o ângulo fosse reto? Elas disseram que era o formato dele. Ou seja, a percepção falou mais alto que as propriedades discursivas da figura.

Aprofundando a reflexão, ressaltamos a importância da indicação discursiva de uma figura para assegurar as suas propriedades. Assim, começamos a explorar os aspectos teóricos do texto 2: "Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014).

Procurando explorar as funções discursivas da língua, contempladas no texto em questão, entregamos para as professoras atividades[45] que requisitavam uma produção discursiva. A partir dos textos produzidos pelas professoras, fomos explorando e apresentando as funções discursivas da língua: referencial, apofântica, reflexividade e a expansão discursiva, contando sempre com a participação ativa do grupo.

Não foi nosso objetivo fazer um estudo teórico aprofundado sobre todas as funções discursivas da língua. Mesmo porque, não teríamos tempo suficiente. Enfatizamos mais as funções de designação, apofântica e expansão discursiva.

Foi interessante perceber que as professoras não tinham consciência de que, dependendo da maneira que designamos um objeto geométrico, isso poderia interferir na resolução do problema. Por exemplo, designar o objeto triângulo pelo nome ou pela frase polígono de três lados, exige um custo cognitivo diferente.

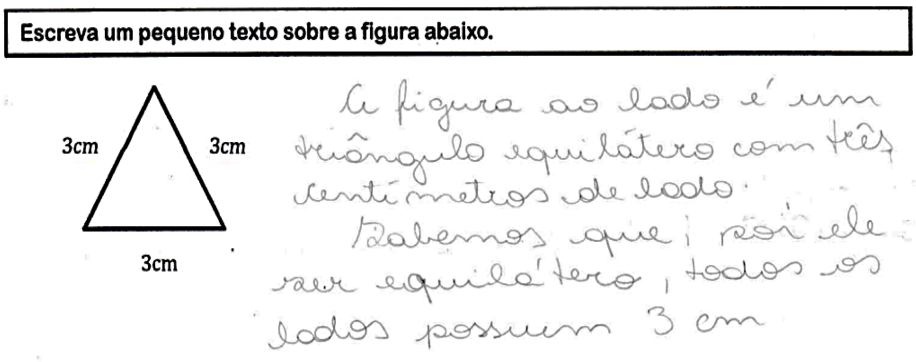
As professoras conseguiram, por intermédio de muita discussão, compreender a importância da enunciação de frases para a formação conceitual do objeto geométrico. Visto

45 Apêndice C.

que, apesar de ser importante o reconhecimento do objeto, faz-se necessário conseguir falar algo sobre esse objeto.

Percebemos, por meio da aplicação de atividades, as quais visaram analisar a capacidade de expansão discursiva das professoras, que mesmo após vários debates, as professoras apresentaram uma dificuldade considerável, quando se tratava de articular frases para produzir um texto sobre um objeto geométrico. Vejamos um caso que ilustra a nossa percepção.

Figura 46 - Texto produzido pela professora P1.



Fonte: Arquivos da autora

A produção discursiva, apresentada pela professora P1, ficou presa a informações explícitas da figura. O texto elaborado limitou-se a apenas duas frases, que por sua vez foram redundantes. Ou seja, parece que a operação de expansão discursiva não foi atingida por essa professora, assim como também não foi alcançada pelas demais. Elas não conseguiram perceber outras propriedades do objeto triângulo, como, por exemplo: possuir os três ângulos internos com medidas iguais a 60º, que por ser equilátero, a bissetriz é também a altura e a mediana desse triângulo. Mas, tínhamos consciência que esse seria um longo caminho a ser percorrido durante a formação.

Ao retomar as questões trazidas pelas professoras para o encontro, perguntamos o que elas haviam entendido a respeito do termo registro. Elas falaram dos diferentes registros de representação semióticas para representar os objetos matemáticos como, a língua natural, as escritas algébricas ou formais, as formas geométricas e as representações gráficas.

Sobre a temática do aluno, o grupo de professoras destacou a importância dos enunciados para a aprendizagem dos alunos, os processos cognitivos envolvidos nas aprendizagens matemáticas e a necessidade de ouvir e entender as produções discursivas produzidas pelos alunos para intervir no processo de construção dos conceitos.

As professoras perceberam, mediante o encontro de formação, a importância de o professor conhecer outras formas de ensinar matemática, de que um mesmo objeto matemático pode ser representado de maneiras diferentes, abordando conteúdos diferentes. Para tanto, é necessário que o professor elabore atividades diversificadas para um mesmo conteúdo, contemplando registros de representação semióticas diferentes, salientando a importância da conversão, principalmente na resolução de situações-problema.

Foi constado pelas professoras que a ideia de que a matemática é uma ciência exata e concreta dificultou os processos de ensino e de aprendizagem da mesma. Isso porque existe a necessidade de considerar a importância da atividade cognitiva na resolução de problemas em matemática muito mais do que o cálculo pelo cálculo.

Pela discussão calorosa a respeito das representações manipuláveis e intermediárias utilizadas para facilitar a conversão nos primeiros contatos das crianças com a matemática formal, chegamos a formular, conjuntamente, a hipótese de que elas podem ser consideradas representações auxiliares e, a partir do registro escrito dessas representações, podem ser consideradas representações figurais.

Finalizando, fizemos os encaminhamentos necessários para o próximo encontro de formação, juntamente com a equipe responsável pela condução dos trabalhos, e a avaliação do encontro. De maneira geral, a avaliação foi positiva. Apesar do cansaço depois de um dia inteiro lecionando, muitas professoras apontaram ter suas dúvidas esclarecidas após a apresentação dos textos, destacando que perceberam existir várias formas de representar, formular atividades e fazer questionamentos sobre um mesmo tema matemático. Foi indicada a possibilidade de realizar momentos de trocas de experiências durante os encontros, bem como a continuação da formação nos próximos anos.

Percebemos, pelas reações e avaliações das professoras, que apesar das leituras apresentarem um viés teórico que lhes causou desconforto, elas conseguiram sair da sua zona de conforto. Em decorrência das problematizações e das discussões promovidas, elas pareceram ter suas estruturas conceituais abaladas, no que tange o conhecimento da geometria e o seu processo de aprendizagem, o que pode favorecer a construção de uma nova compreensão a respeito do processo de aprendizagem da geometria e a conscientização da importância das ações docentes no processo de ensino.

4.1.3 O terceiro encontro de formação: as diferentes maneiras de ver e entrar em geometria

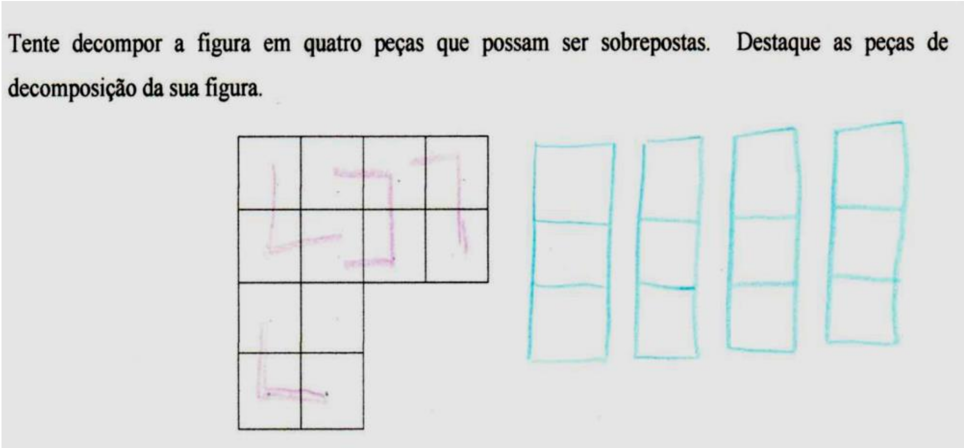
Iniciamos o encontro recepcionando as professoras e fazendo a leitura do diário de bordo do encontro anterior, no qual foi aprovado pelo grupo de professoras. Em seguida, a equipe responsável pela apresentação dos textos: “Temas do grupo de pesquisa em epistemologia e ensino de matemática do programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica: significado do que é ‘fazer matemática’” (DUVAL; MORETTI, 2018) (leitura da p. 82 a 87) e “Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência” (DUVAL, 2012c), iniciou as discussões do encontro. A equipe, composta pelas professoras P10, P11 e P1, sugeriu que os textos, por terem um caráter profundamente teórico, fossem discutidos por meio da conversação. O grupo de professoras foi organizado no formato de um semicírculo para que a discussão contasse com a participação de todos.

Nós pedimos permissão à equipe responsável pela condução da discussão, para que na medida em que os temas fossem sendo explorados, pudéssemos intervir com atividades que abordassem e ilustrassem as ideias principais dos textos. A proposta foi aceita e a discussão foi iniciada com a professora P10 explanando sobre o seu entendimento dos textos. Ela destacou que a face exposta é a face mais abordada na matemática por intermédio de explicações e atividades, enquanto a face oculta diz respeito à maneira de raciocinar do aluno que é exposto por meio da resolução de atividades. Assim, ela concluiu que essas faces se tornam complementares no aprendizado da matemática. Acrescentando à fala, a professora P11 destacou que a face exposta se encontra nos livros didáticos.

A professora P10 destacou a fragilidade da formação do professor pedagogo para atentar as questões ocultas da atividade matemática. Segundo ela, a carga horária destinada à formação matemática do pedagogo é insignificante quando comparado a outros campos do saber, assim resta ao professor ensinar matemática da mesma maneira que ele aprendeu na escola. Ela ainda ressaltou que, na falta de um conhecimento específico do conteúdo, resta apenas seguir o livro didático e ensinar segundo o que é indicado por ele. Em outras palavras, podemos perceber que o ensino acontece pela vertente da face exposta da atividade matemática.

Sobre a temática das duas maneiras de ver em geometria, heurística e a desconstrução dimensional das formas, a maneira heurística, segundo a professora P1,refere-se a uma maneira de ver “mecanicamente” a figura, não requisitando o conhecimento matemático. Partindo dessa colocação, entregamos uma atividade a ser realizada pelas professoras, buscando ilustrar a maneira heurística de ver uma figura geométrica. A Figura 47 apresenta a atividade que foi proposta.

Figura 47 - Resposta apresentada pela professora P4.



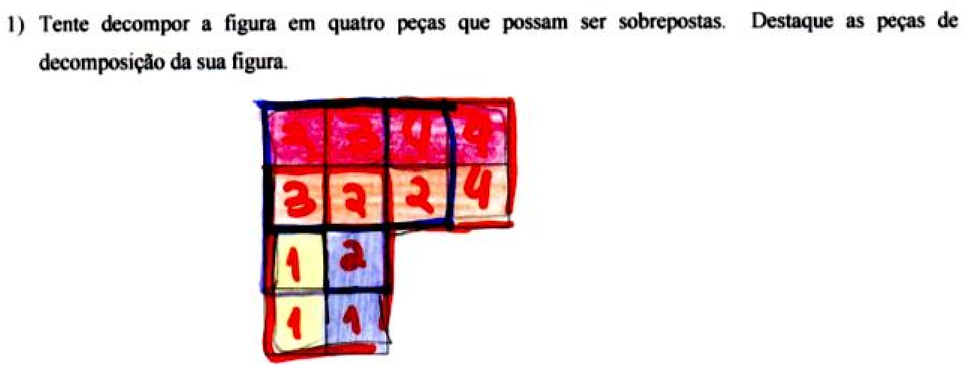
Fonte: Arquivos da autora

Para nossa surpresa, essa atividade, que foi aplicada por Padilha Sanchez (1992) a alunos das classes "tèmoins 6ème et 4ème"[46], foi resolvida pelas professoras com dificuldades. Somente após muita discussão, trocas de ideias com as colegas e várias tentativas de resolução, conseguiram resolver o problema.

Mesmo assim, duas professoras não conseguiram decompor a figura em quatro peças que pudessem ser sobrepostas. Percebemos pela tentativa da professora P4, ilustrada na figura 47, que em um dos seus esquemas ela selecionou quadrados que seriam comuns a duas peças. Além do mais, representou ao lado da figura quatro retângulos compostos por três quadrados, como se isso fosse possível.

Outro exemplo que demonstra as tentativas de resolução para a questão foi percebida pela solução apresentada pela professora P10.

Figura 48 - Resposta apresentada pela professora P10.



Fonte: Arquivos da autora

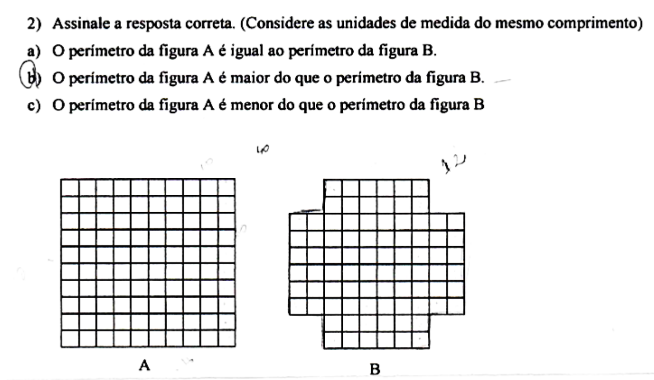
[46] Esse nível de ensino francês corresponde do 6º ao 8º anos do ensino fundamental brasileiro.

Nessa resolução, percebemos que a professora, primeiramente, preocupou-se em repartir a figura em quatro partes, por intermédio das cores, desconsiderando que as peças precisavam ser sobrepostas. Parece que a apreensão perceptiva teve um destaque maior do que a apreensão discursiva. Contudo, apesar de num primeiro momento a indicação discursiva ter sido negligenciada na resolução da questão, as discussões ocorridas no grupo de professoras, acompanhadas das nossas intervenções, contribuíram para que a professora resolvesse o problema pela sinergia entre as apreensões discursiva e perceptiva, indicando as peças pela colocação dos números na figura.

No conjunto total das respostas para essa questão, obtivemos duas respostas incorretas, quatro corretas alcançadas por várias tentativas e cinco corretas sem rastros de rasuras. Essa constatação pode caracterizar a dificuldade que as professoras têm em olhar heuristicamente uma figura geométrica. Isso porque, embora a questão não tenha exigido um conhecimento matemático prévio para a solução, ela requisitou a análise e a exploração da figura, para em seguida reconfigurá-la e assim encontrar a solução do problema. E esse caminho percorrido pelas professoras não foi fácil.

A segunda maneira de ver em geometria, a desconstrução dimensional das formas, foi problematizada pela aplicação de uma atividade com o grupo. Nossa intenção era fazer com que as professoras percebessem as diferenças entre as duas formas de ver geometricamente uma figura. As respostas encontradas para a questão proposta foram surpreendentes, pois pensávamos que as professoras pedagogas dominassem, pelo menos, os conceitos sobre área e perímetro de figuras planas. No entanto, isso não se confirmou. Uma professora falou que o perímetro era a base vezes a altura e logo foi retificada por uma colega. Vejamos algumas das respostas encontradas.

Figura 49 - Resposta apresentada pela professora P11.

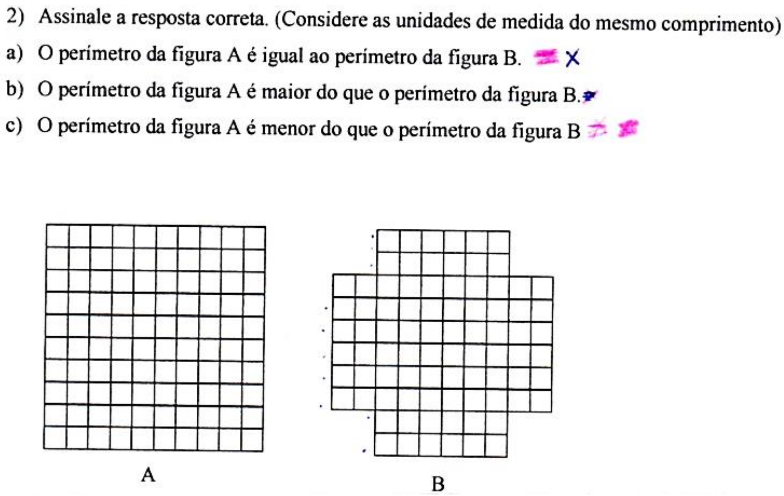


Fonte: Arquivos da autora

Na solução encontrada pela professora P11, pensamos em duas possiblidades que podem ter interferido no insucesso da resposta. Primeiro, ela pode ter confundido os conceitos de área e perímetro. Segundo, o seu olhar pode ter sido “abduzido” pela apreensão perceptiva, uma vez que a área da figura A é maior do que a área da figura B. Para que a professora conseguisse responder a questão, haveria a necessidade da desconstrução dimensional da forma, fazendo a passagem do olhar da dimensão 2D para a dimensão 1D.

Um exemplo que ilustra a confusão e o desconforto sentido pelo grupo de professoras frente a essa questão, está representado pela resposta da professora P4.

Figura 50 - Resposta apresentada pela professora P4.



Fonte: Arquivos da autora

Não sabemos ao certo qual das respostas ela considerou como alternativa correta, mas percebemos alguns vestígios de tentativas de contagem na figura B. Esse não foi um caso isolado, muitas professoras durante a solução do problema apagaram várias vezes as suas respostas. Foi uma atividade, que de certa forma, abalou mais um pouquinho as suas estruturas conceituais.

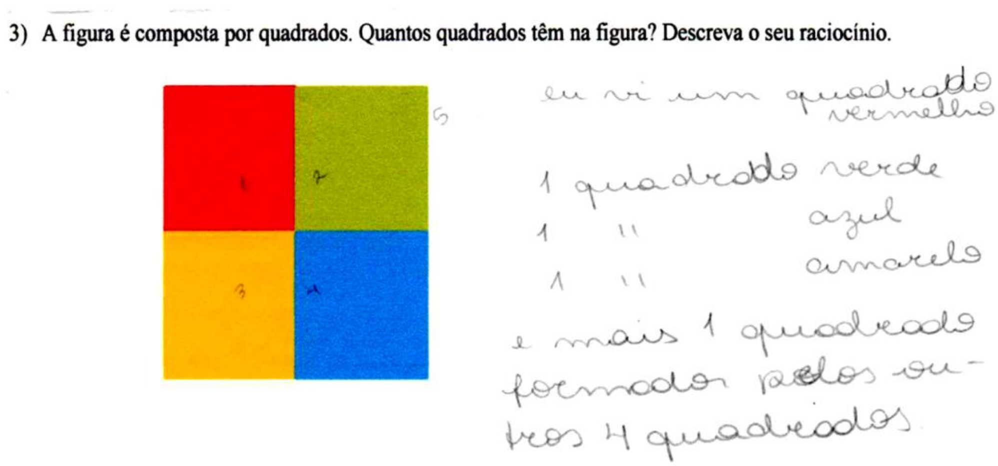
As professoras, ao fazerem uma análise das duas questões, destacaram que a segunda questão exigiu o conhecimento sobre área e perímetro e um desprendimento do olhar sobre o todo da figura para fixá-lo no contorno. Já na primeira questão, a sua resolução não exigiu o conhecimento de conceitos geométricos e o olhar permaneceu na forma como um todo.

Observamos, nesse debate, que as professoras não tinham o conhecimento sobre o que significava formas geométricas 3D, 2D, 1D e 0D. Identificamos nos seus olhares e nas suas colocações que em nenhum momento de suas formações esses conceitos haviam sido explorados. Nesse contexto, sentimos a necessidade de sair um pouco das discussões teóricas do texto e trabalhar esses conceitos fundamentais de geometria, por meio de problematizações a respeito das diferenças e semelhanças entre os objetos geométricos de diferentes dimensões. Exemplificando, perguntamos quais as diferenças e as semelhanças entre um retângulo e um paralelepípedo. Quais as propriedades do retângulo? Quais as propriedades do paralelepípedo? Por intermédio dessas discussões, conduzidas por reflexões, percebemos que as professoras começaram a ampliar o olhar sobre as formas geométricas, bem como sobre as suas propriedades.

Com a finalização desse debate, iniciamos a discussão do texto 4: "Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência" (DUVAL, 2012c). Novamente, elas relataram a dificuldade de entendimento do texto devido a sua abordagem teórico/científico. A professora P10 destacou que recorreu ao dicionário para tentar compreender os termos e conceitos abordados. Segundo o entendimento dela "*a forma perceptiva trata-se do que se percebe, a forma discursiva é como o discurso é exposto, a operatória seria como ela se desenrola e a sequencial são as partes do que se precisa saber*".

Perante a necessidade de ampliação teórica desses conceitos, perguntamos ao grupo sobre os aspectos da apreensão perceptiva. Elas apontaram que se trata do reconhecimento das formas como, por exemplo: nomear um triângulo. Buscando problematizar e ampliar ainda mais as discussões sobre a apreensão perceptiva, propomos uma atividade que exigia esse tipo de apreensão. A Figura 52 ilustra as respostas encontradas para a questão.

Figura 51 - Resposta apresentada pela professora P1.



Fonte: Arquivos da autora

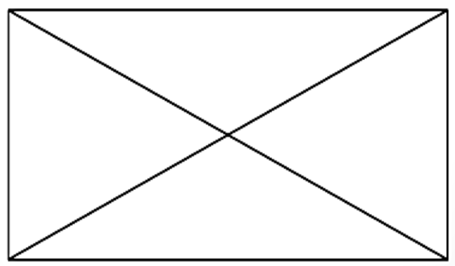
Contrariando as nossas expectativas, todas as professoras conseguiram encontrar os 5 quadrados. Mas, quando perguntamos se os alunos seriam capazes de ver os 5 quadrados, elas responderam que não, porque as cores influenciavam na visualização dos quadrados. Dessa forma, eles provavelmente não conseguiriam perceber o quadrado maior, porque o que chama mais atenção são os quatro quadrados coloridos. Essa reflexão pode ter servido de alerta para as professoras, no sentido de perceberem que existem diferentes formas de entrar na maneira de ver geometricamente uma figura e por isso devem ser consideradas nas situações de ensino.

Sobre a apreensão operatória, a professora P1 destacou que "*trata-se das modificações possíveis da figura para resolver o problema e citou como exemplo, a resolução da atividade 1*". Procurando detalhar mais, indicamos que para Duval, a apreensão operatória pode ser: mereológica, ótica e posicional e perguntamos ao grupo o que eles haviam entendido sobre a apreensão mereológica. A professora P6 apontou que "*trata-se de dividir a figura em subfiguras, estabelecendo a relação entre parte e o todo da figura*".

Para ilustrar a apreensão operatória mereológica, pedimos que as professoras resolvessem seguinte atividade:

Figura 52 - Questão proposta às professoras.

4) O retângulo está dividido em quatro partes iguais de formato triangular. Mostre que esses triângulos possuem a mesma área. Registre a estratégia/raciocínio que você utilizou.



Fonte: A autora

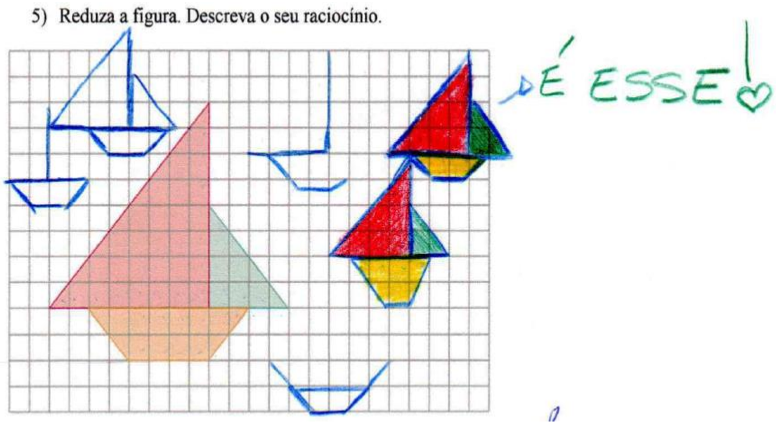
Para encontrar a solução do problema, as professoras recortaram, dobraram, pintaram, trocaram ideias com as colegas e conosco. Vários caminhos foram apresentados pelas mesmas para resolver a questão. Foi interessante perceber que cada uma defendia o seu ponto de vista e procurava provar que a sua hipótese era também uma solução para o problema. Cada solução encontrada era motivo de comemoração.

As professoras perceberam que a resolução da questão passava pela divisão da figura em subfiguras, que serviam para compor novas figuras, mostrando que os quatro triângulos têm a mesma área. Percebemos nesse momento, que as professoras, mediante as várias estratégias de resolução, tiveram a oportunidade de experienciar algumas das operações cognitivas envolvidas na aprendizagem da geometria.

Quando questionamos sobre a apreensão operatória ótica, o grupo não se manifestou. Então, precisamos intervir e apontar excertos do texto que tratavam do assunto para serem discutidos. Mesmo assim, elas tiveram dificuldades para entender do que se tratava esse tipo de operação.

Com a intenção de desenvolver essa maneira de ver, propomos ao grupo uma atividade que consistia na redução de uma figura. Para nossa surpresa, pois pensávamos que as professoras resolveriam a questão facilmente, uma vez que esse tipo de problema é muito comum em livros didáticos, nos defrontamos com uma dificuldade quase que intransponível para várias delas. Percebemos que entre os tipos de apreensão operatória, foi na ótica que as professoras encontraram mais dificuldades. Trouxemos um exemplo que ratifica nossa colocação.

Figura 53 - Resposta apresentada pela professora P10.

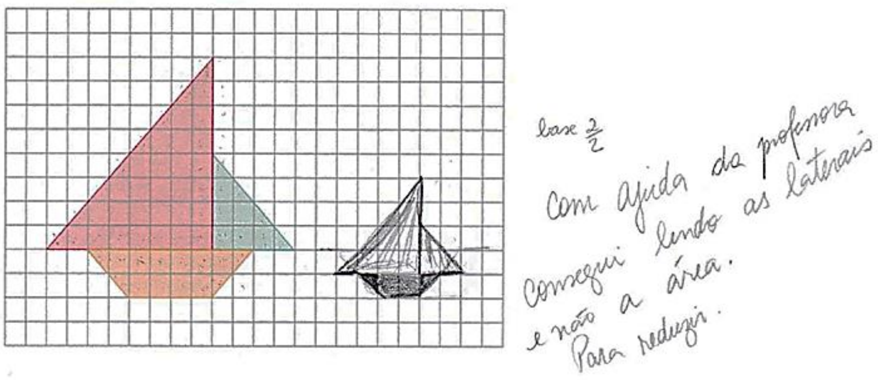


Fonte: Arquivos da autora

Após intervirmos várias vezes junto à professora P10 e após seis tentativas, ela conseguiu reduzir a figura. Ela havia entendido que deveria dividir o contorno da figura pela metade, mas sempre se esquecia de dividir um dos lados, ocasionando a não semelhança entre as figuras.

Outro achado interessante foi a resposta da professora P11. Percebem-se, na imagem da Figura 54, vários pontinhos que configuram a ação dela em contar os quadradinhos da malha ocupados pela figura.

Figura 54 - Resposta apresentada pela professora P11.



Fonte: Arquivos da autora

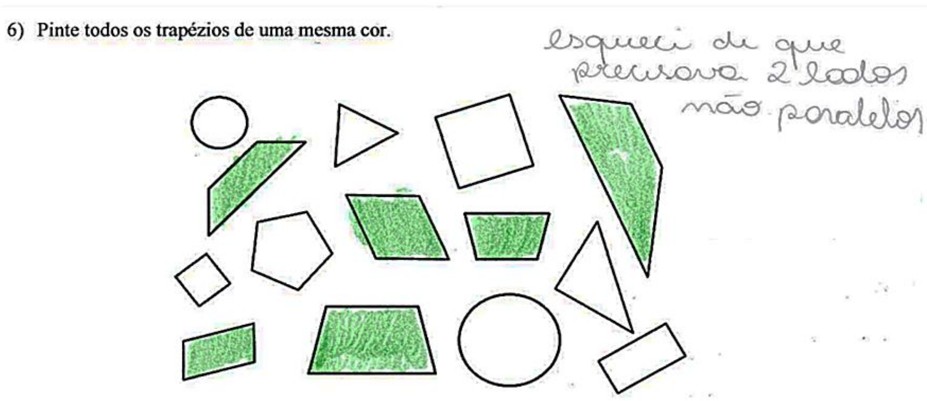
Segundo essa professora, a atividade estava muito difícil. Isso porque ela não conseguia desviar o olhar sobre a área da figura. Vemos que seu depoimento confirma que ela só conseguiu tirar o olhar da área (2D) e passar para a medidas das laterais (1D) com a nossa intervenção. Isso nos faz pensar que, se a professora já apresenta essas dificuldades para ver geometricamente uma figura, como poderia conduzir o processo de ensino da geometria nos anos iniciais sem contar com um programa de formação que aborde essa perspectiva semiocognitiva?

Durante a resolução da atividade, as professoras trocaram várias ideias entre si, e conosco. Muitas dúvidas foram surgindo durante o desenvolvimento da atividade. Fazê-las perceberem que a figura precisava ser diminuída mantendo a mesma malha quadriculada e que havia a necessidade de definir, antecipadamente, a escala de redução, foi um processo árduo. Mas, com muita discussão o problema foi aos poucos sendo solucionado.

Dando continuidade ao estudo, perguntamos o que elas haviam entendido sobre a apreensão operatória posicional. A professora P2 leu uma parte do texto, dizendo que essa operação se refere à orientação da figura dentro do seu ambiente, podendo rotacioná-la ou deslocá-la. Percebemos, pela reação das professoras, que essa afirmação não havia feito muito sentido para elas. A fim de, então, promover um sentido, entregamos uma atividade que procurou desenvolver esse tipo de apreensão.

Como já havíamos debatido a respeito da rotação das figuras planas no plano no primeiro encontro de formação, esperávamos que essa atividade fosse resolvida com sucesso por todas as professoras. Contrariando as nossas expectativas, das dez professoras que realizaram a atividade, duas não conseguiram resolver a questão adequadamente. A professora P1 apresentou problemas conceituais a respeito do objeto trapézio.

Figura 55 - Resposta apresentada pela professora P1.

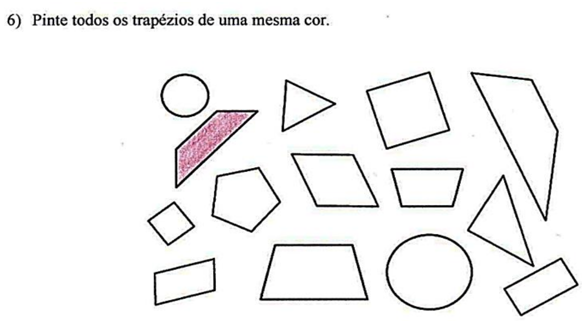


Fonte: Arquivos da autora

Percebe-se que a professora coloriu todos os trapézios, mas também coloriu dois paralelogramos, talvez por apresentarem um formato *parecido* com os trapézios, ou por serem figuras não prototípicas como as demais. Essa foi uma dúvida comum no grupo e precisou ser debatida, coletivamente, antes mesmo da atividade ser concluída. Esse fenômeno pode ser um indicativo da fragilidade conceitual que as professoras pedagogas sofrem com relação aos conhecimentos elementares da geometria.

Outro achado foi a resposta apresentada pela professora P5. Ela parece ter reconhecido apenas um trapézio em meio aos quatro apresentados no conjunto das figuras.

Figura 56 - Resposta apresentada pela professora P5.



Fonte: Arquivos da autora

Percebemos que o trapézio que ela pintou é uma figura prototípica apresentada nos manuais didáticos escolares. Essa visão restrita das figuras geométricas, comumente trazida nos livros didáticos, pode ser que esteja contribuindo para a deficiência da base conceitual das professoras, no que se refere ao campo da geometria.

No encerramento, foram feitos os encaminhamentos para o próximo encontro, como a entrega dos textos para leitura prévia e as recomendações da equipe responsável pela apresentação dos textos. A avaliação do encontro foi realizada por meio da produção de um texto coletivo pelo grupo de professoras.

> O encontro de hoje contou com a participação de todas as professoras e com atividades variadas. Com as atividades descobrimos o quanto precisamos aprender. Assim, podemos perceber o quanto nossos alunos podem ter dificuldades para solucionar os problemas. Além de conhecermos vários termos, não só do nosso cotidiano, também não poderíamos ficar surpresas com as dificuldades dos alunos. Contudo, foi esclarecedor para os alunos e pra gente que conseguiu através da professora traduzir o que estava no papel e achar que não é tão difícil fazer na prática. Entre erros e acertos conseguimos chegar a várias conclusões, a novas aprendizagens e foi divertido. E que na prática é muito mais fácil do que o texto diz e esperamos que a próxima apresentação seja bastante prazerosa tanto quanto essa.

Com essa avaliação, inferimos que estávamos caminhando para a construção de uma nova compreensão das professoras a respeito do processo de aprendizagem da geometria. De acordo com o depoimento delas, as atividades de geometria que propomos, fizeram com que experienciassem as operações cognitivas que se fazem presentes nesse processo, concomitantemente com o aperfeiçoamento dos conhecimentos dos elementos fundamentais da geometria.

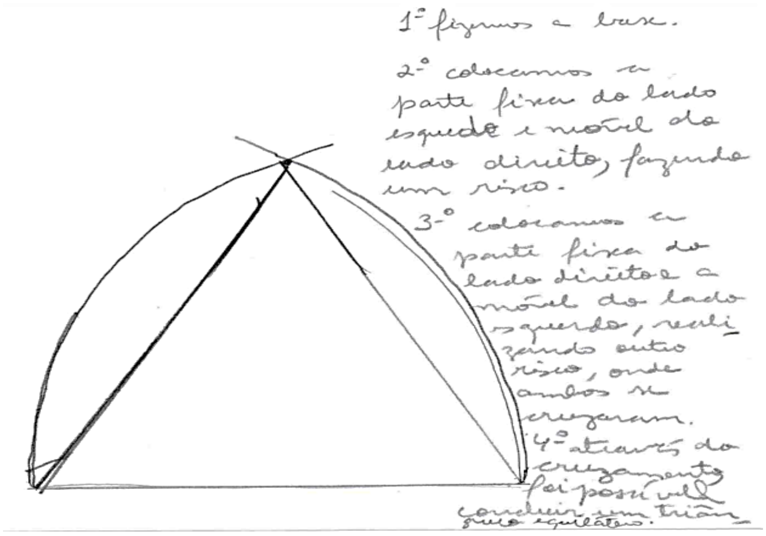
4.1.4 O quarto encontro de formação: a aprendizagem da geometria passa pelas diferentes formas de ver uma figura

O encontro de formação foi iniciado com a recepção das professoras, a leitura do diário de bordo e a sua aprovação pelo grupo. A seguir, continuamos com o estudo das apreensões, tema do texto 4: "Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência" (DUVAL, 2012c), o qual não havia sido concluído no último encontro de formação.

Começamos com o estudo da apreensão sequencial por intermédio da retomada da leitura do texto. Como as professoras não se manifestaram a respeito do tema, tivemos que intervir e explanar sobre o assunto. Com o objetivo de fazer com que elas vivenciassem esse modo de ver geometricamente uma figura, propusemos uma atividade que consistia em construir um triângulo equilátero, utilizando compasso e régua não graduada e, em seguida, descrever as etapas dessa construção. Auxiliamos as professoras no desenvolvimento da atividade, pois elas desconheciam essa técnica de construir um triângulo equilátero.

Mesmo assim, percebemos que várias delas não possuíam habilidade para manusear o compasso durante a construção da figura. A professora P9 é um exemplo dessa situação.

Figura 57 - Construção do triângulo equilátero pela professora P9.



Fonte: Arquivos da autora

Essa professora durante o desenvolvimento da atividade apresentou muita dificuldade em manusear os instrumentos utilizados na construção do triângulo, tanto o compasso, quanto a régua e o lápis. Em vários momentos tivemos que pegar na sua mão para que ela conseguisse ter o domínio do compasso. É possível perceber que o traçado do compasso é irregular e que o vértice do triângulo não corresponde exatamente à intersecção das circunferências.

De acordo com o depoimento das professoras, o compasso quase não é mais utilizado na escola. Elas se lembraram de terem utilizado esse instrumento poucas vezes na sua trajetória escolar. Então, ressaltamos a importância desses materiais na compreensão das propriedades de um objeto geométrico.

Quanto à produção discursiva, todas as professoras descreveram as etapas da construção do triângulo como se tratasse de uma *receita*. Não houve uma preocupação em utilizar a linguagem matemática formal, tampouco conseguiram produzir um texto que caracterizasse a expansão discursiva, tal como podemos perceber na resposta da professora P9 supracitada.

Ao indagarmos o grupo a respeito da apreensão discursiva, a professora P10 destacou que “trata-se da maneira como a geometria é apresentada através do discurso, ou seja, a junção da apreensão operatória com a descritiva, sendo uma tão importante quanto à outra para a compreensão da geometria”. Procurando complementar a colocação da professora P10, destacamos uma parte muito importante do texto em que Duval (2012c) afirma que as propriedades pertinentes de uma figura e as únicas aceitáveis dependem do que é dito no enunciado como hipótese. Sendo assim, uma figura geométrica não se mostra a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito no enunciado do problema.

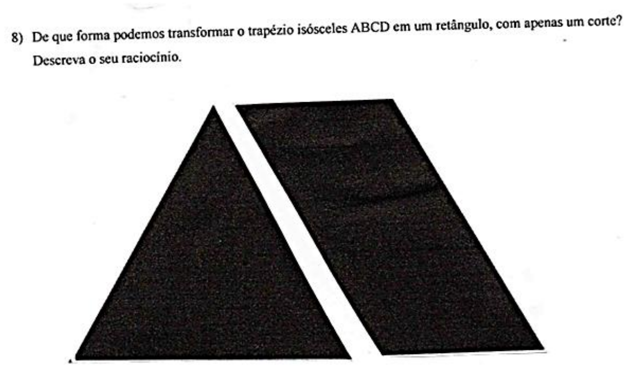
Objetivando o entendimento desse pensamento de Duval (2012c) pelo grupo, propomos uma atividade em que as professoras deveriam transformar um trapézio isósceles ABCD em um retângulo, com apenas um corte e descrever o raciocínio utilizado na resolução do problema.

Essa atividade gerou muitas perguntas no grupo de professoras: o que é um trapézio isósceles? O que é um retângulo? O que caracteriza o retângulo? Posso recortar e colar? Mas pode girar? Todas essas questões precisaram ser discutidas previamente para que pudessem ter as condições conceituais mínimas para resolver o problema.

Para encontrar a solução do problema, as professoras pensaram, formularam hipóteses, dobraram, recortaram, fizeram tentativas, colaram, trocaram ideias conosco e com as colegas. Foi um processo de resolução difícil, tendo em vista que a solução da questão exigia a desconstrução dimensional das formas em sinergia com a indicação discursiva.

Das dez professoras que responderam à questão, a professora P11 não conseguiu resolver o problema.

Figura 58 - Resposta apresentada pela professora P11.

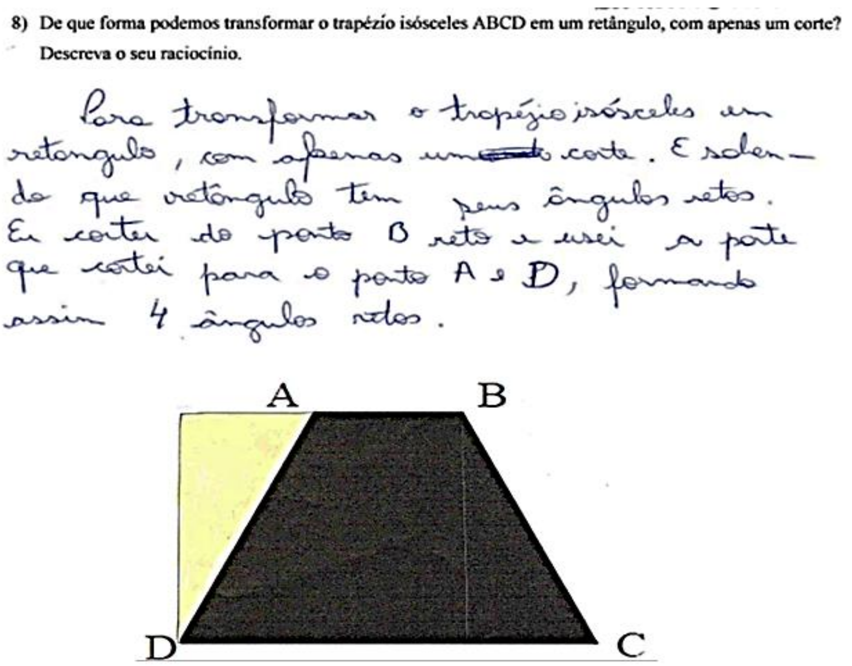


Fonte: Arquivos da autora

Percebe-se que a professora P11 parece não ter considerado as propriedades pertinentes da figura ditas no enunciado, pois para formar um retângulo necessita-se de quatro ângulos retos e, no entanto, ela dividiu o trapézio sem considerar esses ângulos. Podemos inferir que a base conceitual dessa professora se encontra fragilizada, no que se refere às propriedades do trapézio isósceles. Ela não conseguiu operar a figura, talvez pelo desconhecimento de que o segmento da altura do trapézio formasse ângulos retos sobre as bases. Também desconhece as relações existentes entre os ângulos internos do trapézio.

Contudo, a resolução da professora P8 nos faz pensar que ela conseguiu sair da dimensão 2D e passar para a dimensão 1D, uma vez que cortou o trapézio (2D) com um segmento (1D) e esse segmento permitiu formar ângulos retos. Embora ela não tenha explicitado que o segmento traçado se trata da altura do trapézio, conseguiu heuristicamente operar sobre a figura.

Figura 59 - Resposta apresentada pela professora P8.


8) De que forma podemos transformar o trapézio isósceles ABCD em um retângulo, com apenas um corte? Descreva o seu raciocínio.

Para transformar o trapézio isósceles em retângulo, com apenas ~~um~~ corte. E sabendo que retângulo tem seus ângulos retos. Eu cortei do ponto B reto e usei a parte que cortei para o ponto A e D, formando assim 4 ângulos retos.

Fonte: Arquivos da autora

A professora P8 não deixou explícito no seu discurso a relação existente entre os ângulos complementares para formar o ângulo reto em D. Entretanto, consideramos que a produção discursiva apresentada por ela, embora um pouco tímida, abre a via para possíveis generalizações do pensamento.

Após concluir a atividade, refletimos sobre os aspectos que dificultaram a sua resolução. A professora P5 destacou que “um fator que complicou a resolução do problema foi a necessidade de girar o recorte da figura em 180° para conseguir montar o retângulo”. Outra questão discutida foi que o retângulo formado ficou com duas cores (preto e branco) e isso trouxe dificuldades para percebê-lo como uma figura. Aproveitando o ensejo, indagamos o grupo sobre o que caracteriza o retângulo: a sua cor ou as suas propriedades? As professoras pensaram e chegaram à conclusão de que são as suas propriedades.

Finalizadas as discussões sobre os tipos de apreensões, passamos para o estudo do texto 5: “Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria”

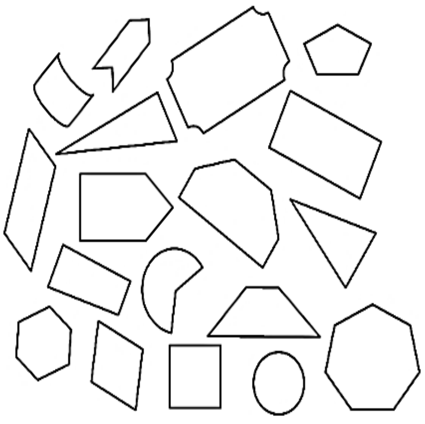
(MORETTI, 2013). A equipe responsável pela apresentação do texto era composta pelas professoras P5, P6, P2 e P3. Como um comentário geral sobre a leitura do texto, a equipe ressaltou que, apesar da dificuldade do entendimento do texto, algumas palavras já não eram mais totalmente desconhecidas e que as coisas já começavam a fazer sentido, porém trazer esses conceitos para a realidade da sala de aula ainda era um desafio.

A professora P5 destacou que o texto trouxe uma retomada dos tipos de apreensões. Ela iniciou a explanação a partir da ideia de semiosfera que, segundo ela, "*pode ser entendida como um ponto de encontro dos olhares que o Duval propõe*". Sobre o olhar botanista ela falou "*que ele possibilita o reconhecimento do contorno da forma e prepara o aluno para outros olhares, seria um tipo de olhar observador*".

Procurando ilustrar esse tipo de olhar, propomos a atividade: Detetive de figuras. Em duplas, cada integrante deveria escolher uma das figuras. O objetivo era descobrir qual a figura a colega escolheu com o menor número possível de perguntas. As respostas só poderiam ser SIM ou NÃO. No desenvolvimento da atividade, todos os olhares estiveram voltados para o contorno das figuras e o pensamento articulado com as características desses contornos. As perguntas precisavam ser formuladas em sinergia com o conjunto de figuras da questão.

Foi interessante perceber a quantidade de perguntas redundantes no conjunto de respostas apresentadas nessa atividade, como pode ser ilustrado pela Figura 60.

Figura 60 - Resposta apresentada pela professora P4.



	PERGUNTAS (Registrar)	Resposta SIM NÃO
1ª	A figura tem lados?	sim
2ª	A figura se parece com objeto?	não
3ª	A figura é um circulo?	não
4ª	A figura é um polígono?	sim
5ª	A figura tem semi-retas?	sim
6ª	A figura tem 4 lados?	não
7ª	A figura tem 7 lados?	sim

FIGURA ESCOLHIDA heptágono

Fonte: Arquivos da autora

Observa-se que a primeira, a terceira, a quarta e a quinta perguntas poderiam ser reduzidas a apenas uma, pois se a figura tem lados, logo ela é um polígono que é formado por segmento de retas, portanto não pode ser um círculo. Essa situação, a nosso ver, revela mais uma vez a fragilidade das professoras no que tange os conhecimentos de geometria.

Essa constatação foi reforçada pelo tipo de dúvidas que foram surgindo no grupo durante o desenvolvimento da atividade, como, por exemplo: se tem seis lados é hexágono? Para ser hexágono tem que ter todos os lados iguais? Qual o nome dessa figura que tem sete lados? Essa figura é um polígono? Esses trapézios são isósceles? Percebemos que esse ambiente investigativo proporcionou a troca de ideias e muitas discussões, favorecendo o desenvolvimento do olhar botanista e ampliando os conhecimentos de geometria.

A respeito do olhar agrimensor, a professora P5 disse que "refere-se a um tipo de olhar que aciona conhecimentos como medidas" e a professora P2 complementou dizendo que "esse olhar vai da teoria a prática, faz medidas no terreno e passa para o plano do papel". Contribuindo com essas colocações, salientamos que nesse tipo de olhar trabalham-se as medidas sem prender-se as unidades padronizadas, estabelecendo relações entre as medidas proporcionalmente.

Para ilustrar esse tipo de olhar, propusemos uma atividade em que as professoras precisaram medir superfícies com a medida de canudinhos de refrigerante e passar essas medidas para o plano do papel utilizando a medida de um palito de fósforo. Depois elas deveriam fazer o esboço da superfície. Os objetos medidos foram: mesa do professor, porta da biblioteca, mesa redonda da biblioteca, mesa oval do café (refeitório) e folha de papel A4.

Na perspectiva das professoras, a atividade mais fácil seria a de medir a folha A4. Contudo, segundo as professoras P8 e P6 foi difícil transferir a medida da folha A4 para o plano do papel. Isso porque, uma dimensão da folha mediu um canudinho e um quinto, e a outra dimensão mediu quatro quintos do canudinho. Elas precisaram repartir a medida do palito de fósforo proporcionalmente, dividindo-o também em cinco partes para poder esboçar a planta da folha A4.

Após todas terminarem as atividades, passamos para o momento de reflexão. Ao indagarmos sobre as diferenças entre as duas atividades propostas, as professoras perceberam que na primeira atividade o olhar estava mais voltado à forma e na segunda estava mais voltado a medidas e escalas. De acordo com a professora P10, foi trabalhoso efetuar medidas sem a utilização da régua, pois exigiu mais atenção no momento de encontrar as extremidades da medida do canudinho e do palito de fósforo.

Encerrando os estudos da noite, foram realizados os encaminhamentos necessários para o próximo encontro. A seguir, realizamos a avaliação da formação, perguntando as professoras: o que você aprendeu no encontro de hoje? Se aprendeu algo, como esse conhecimento vai contribuir para a sua formação e para a sua prática pedagógica?

Percebemos, por intermédio do depoimento delas, que após quatro encontros de formação, novos olhares começaram a despontar sobre o processo de aprendizagem da geometria. Segundo a professora P10, ela passou "*a olhar com atenção e carinho para a aprendizagem da geometria e para as propriedades de cada figura*".

De acordo com as professoras, a leitura dos textos tornou-se mais familiar. A metodologia assumida na formação, em que a teoria e a prática caminharam juntas, promoveu o entendimento dos temas discutidos. Ou seja, a teoria passou a ser entendida a partir das atividades de geometria que fomos propondo durante os encontros de formação.

Elas ressaltaram a importância de se retomar estudos científicos nos programas de formação para professores e fazer com que eles cheguem às salas de aula, que é uma prática pouco comum nos programas de formação que elas têm participado.

Chamou-nos atenção o fato de as professoras terem percebido a importância da utilização dos instrumentos na construção de figuras geométricas, fazendo transparecer propriedades matemáticas dessas figuras. Conforme elas relataram, nunca tinham parado para pensar sobre esse aspecto e a atividade que propomos serviu para sensibilizá-las. Nesse sentido, elas perceberam que existe a necessidade de promover atividades que movimentem as aulas de geometria e que façam os alunos pensarem sobre as propriedades das figuras. A professora P6 disse que, a partir dessa formação, vai passar a construir triângulos com o auxílio do compasso nas suas aulas.

Outro indício, de que algumas mudanças já começaram a desabrochar na maneira que as professoras compreendem a aprendizagem da geometria, foi por meio do depoimento da professora P7 dizendo que "*a aprendizagem da geometria vai muito além do que trazem os livros didáticos que a gente está presa na sala de aula*" e, ainda complementada, pela professora P6 de "*que a aprendizagem da geometria passa também pelas maneiras diferentes de ver uma figura*".

A professora P5 destacou a importância dos objetivos de cada atividade desenvolvida em sala de aula. Citou o exemplo da atividade da amarelinha, mencionada no texto, a qual para ela, não passava de uma brincadeira. Entretanto, dependendo da intencionalidade do professor, essa brincadeira pode ser um caminho para a aprendizagem da geometria.

O desabafo da professora P11 nos fez pensar no quanto deve ser difícil para o professor pedagogo ensinar geometria. Esta apresentou dificuldades para resolver os problemas que propomos ao longo do encontro e segundo ela "*acho que a parte da geometria* *não desenvolvi muito, na verdade estou reaprendendo com um outro olhar, porque quando aprendi era a decoreba*" (P11).

Na avaliação das professoras, os instrumentos para construir figuras geométricas caíram em desuso nas escolas. A professora P1 não sabe em que momento da trajetória escolar essas ferramentas deixaram de ser importantes. Não sabe se foi por causa do comodismo, da sobrecarga de trabalho do professor ou das demandas e obrigações que são impostas pelo sistema educativo.

Para a professora P10, o sistema escolar obriga a preparar os alunos para apresentar bom desempenho na prova do Saeb[47]. Desse modo, segundo ela, resta preparar aulas mais rápidas e práticas possíveis em virtude do pouco tempo que se tem.

> **P1:** A gente é cobrada por um tipo de resultado, enquanto o que seria bom pro nosso aluno é outro tipo de trabalho. Então, eu me coloco numa situação de que a gente até teria vontade de fazer direito, mas nos obrigam a fazer errado. Se a gente tem tanto conteúdo pra dar, por que não enxugar esse conteúdo e dar só o essencial?

Percebemos o dilema que essas professoras enfrentam diariamente. Na visão delas, parece não ser possível ensinar a geometria na perspectiva semiocognitiva sem romper com as amarras de um ensino que visa preparar as crianças para provas de larga escala.

4.1.5 O quinto encontro de formação: a descoberta de propriedades geométricas pelo olhar construtor e inventor

Recepcionamos as professoras, projetando o vídeo "Quando as crianças fazem Uau"[48], com intuito de refletir sobre a importância da descoberta na aprendizagem da geometria. Em seguida, realizamos a leitura do Diário de Bordo, a qual teve a aprovação das professoras.

Nesse encontro, concluímos as discussões do texto 5: "Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria" (MORETTI, 2013). A professora P5, integrante da equipe responsável pela apresentação do texto, salientou que nos olhares botanista e agrimensor não foram usadas medidas padronizadas. Contudo, no olhar construtor, a medida padrão passa a ser usada por meio do uso do compasso, da régua, do esquadro, etc.

[47] O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Inep realizar um diagnóstico da educação básica brasileira.
[48] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0Td2xqSW1m8. Acesso em: 20 mai. 2021.

Segundo ela, o olhar inventor seria aquele que mobiliza todo o conhecimento para resolver um problema.

Complementado a fala da professora P5, enfatizamos que no olhar construtor o uso de instrumentos permite enxergar propriedades dos objetos que não seriam possíveis sem o seu uso. Por exemplo, traçar uma circunferência contornando uma moeda não permite enxergar o centro, nem o raio da circunferência. Propriedades que podem ser percebidas quando usamos o compasso para traçar essa circunferência.

Procurando ilustrar esse tipo de olhar, realizamos a atividade: Construtor de figuras, que consistiu em construir representações de polígonos pelo uso de materiais manipuláveis, como mostra a figura.

Figura 61 - Atividade construtor de figuras.

3) Construtor de Figuras

a) Construir com palitos de picolé e percevejos um quadrado.
b) Construir com palitos de picolé e percevejos um losango.
c) Construir com palitos de picolé e percevejo um retângulo.
d) Construir com palitos de picolé e percevejos um paralelogramo.
e) O que todas as figuras têm em comum?
f) O que o quadrado tem em comum com o losango?
g) O que o quadrado tem em comum com o retângulo?

CONCLUSÃO...

Fonte: A autora

Para nossa surpresa, essa atividade não pôde ser concluída, devido à dificuldade de prender os palitos com o percevejo. Conseguimos montar apenas a representação do quadrado e, a partir dele, exploramos as propriedades dos outros polígonos que deveriam ter sido construídos.

A mobilidade do quadrado, construído com os palitos, permitiu transformá-lo num losango. Assim, discutimos, com o grupo de professoras, a definição de losango e o que ele tem em comum com o quadrado.

A definição de retângulo foi discutida por meio de pesquisa na internet. Para surpresa das professoras, descobriram que o retângulo é um quadrilátero que possui ângulos retos. Elas ficaram procurando alguma informação que falasse da medida dos lados, mas não encontraram e ficaram estarrecidas.

Pela definição de retângulo e de losango, o grupo concluiu que todo quadrado é retângulo e losango. Porém, nem todo retângulo e nem todo losango são quadrados. Essa constatação abalou as estruturas conceituais das professoras, como pode ser percebido pela fala da professora P1 "*eu achava que sabia, pelo menos, o que era um retângulo e um quadrado! Mas, descobri que não sabia*".

Continuamos as discussões a respeito da definição do paralelogramo, com auxílio de pesquisa na internet. Algumas professoras encontraram definições deturpadas sobre o paralelogramo. Desse modo, houve a necessidade de intervirmos na sistematização da definição de paralelogramo.

Após muitas discussões, algumas professoras conseguiram perceber que o quadrado é um losango, um retângulo e um paralelogramo ao mesmo tempo. A professora P10, após toda essa explanação, disse que estava "*com vontade de ligar para todos os seus alunos e dizer a eles que o que ela havia ensinado sobre quadrado, não era mais aquilo*".

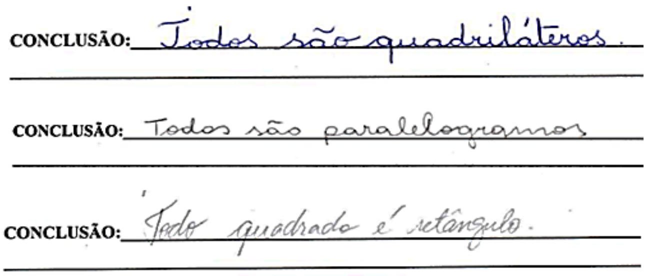
Como a representação dos polígonos não pôde ser concluída pela utilização dos materiais manipuláveis, pedimos que as professoras fizessem o desenho da figura utilizando lápis e régua. Analisando o conjunto das respostas, percebemos que as figuras continuaram seguindo o mesmo modelo padronizado do livro didático. Ou seja, as figuras não apareceram rotacionadas, a figura do paralelogramo foi representada por um retângulo apenas por duas professoras e as demais desenharam o paralelogramo prototípico.

Na representação do quadrado e do retângulo, 70% das professoras não indicaram os ângulos retos. Nenhuma delas desenhou um quadrado como sendo um retângulo ou um losango.

Ao perguntar sobre o que todas as figuras tinham em comum, 80% das professoras responderam que todas são quadriláteros. Com relação à questão: o que o quadrado tem em comum com o losango? Apenas uma professora não identificou que o quadrado e o losango têm, como uma das suas características comuns, os quatro lados com medidas iguais. Contudo, todas as professoras perceberam que o quadrado e o retângulo têm os quatro ângulos retos em comum.

Nas conclusões da atividade, 60% das professoras apresentaram respostas parciais sobre o estudo dos quadriláteros supracitados, como ilustra a Figura 62.

Figura 62 - Conclusão das professoras P4, P7 e P11, respectivamente.



CONCLUSÃO: Todos são quadriláteros.

CONCLUSÃO: Todos são paralelogramos

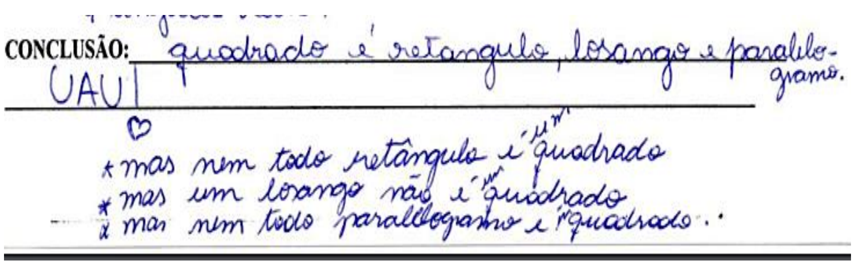
CONCLUSÃO: Todo quadrado é retângulo.

Fonte: Arquivos da autora

Ao que tudo indica, parece que essas professoras não conseguiram expandir o discurso sobre as figuras geométricas que fizeram parte das discussões. Elas até conseguiram iniciar um discurso, mas ficaram limitadas a enunciação de uma única frase. A nosso ver, ainda há um longo trabalho a ser desenvolvido sobre os conceitos elementares da geometria euclidiana com essas professoras.

Contudo, a resposta da professora P10 nos motivou a continuar apostando em uma formação teórica que contemplou a perspectiva semiocognitiva para professores pedagogos. Esse achado mostra a capacidade de mudança e de aperfeiçoamento dos professores por intermédio de programas de formação continuada, bem como demonstra a satisfação da professora P10 em ter construído o seu conhecimento.

Figura 63 - Conclusão da professora P10.



CONCLUSÃO: quadrado é retangulo, losango e paralelogramo.

UAU!

* mas nem todo retângulo é quadrado

* mas um losango não é quadrado

* mas nem todo paralelogramo é quadrado..

Fonte: Arquivos da autora

Essa professora parece que conseguiu expandir o discurso a respeito das características do quadrado, do losango, do retângulo e do paralelogramo. Embora sejam apenas algumas propriedades desses objetos geométricos, eles são essenciais para o desenvolvimento do olhar inventor.

Procurando complementar a fala da professora P5 sobre o olhar inventor, exposto por ela no início do encontro, no qual salientou que esse tipo de olhar exige a mobilização de todo o conhecimento para resolver um problema, destacamos que nesse tipo de olhar, o aluno para resolver um problema, adiciona traços à figura, opera sobre a mesma e a modifica para descobrir um procedimento de resolução.

Objetivando ilustrar esse tipo de olhar, propusemos a atividade: construindo e desmontando hexágonos.

Figura 64 - Atividade construindo e desmontando hexágonos.

a) Construir um hexágono regular com o auxílio do compasso. Como podemos dividir esse hexágono para formar 2 trapézios congruentes?
b) Construir um hexágono regular com o auxílio do compasso. Como podemos dividir esse hexágono para formar 6 triângulos equiláteros?
c) Construir um hexágono regular com o auxílio do compasso. Como podemos dividir esse hexágono para formar 3 losangos congruentes?
d) Quais as relações existentes entre as peças obtidas pelas divisões dos hexágonos?

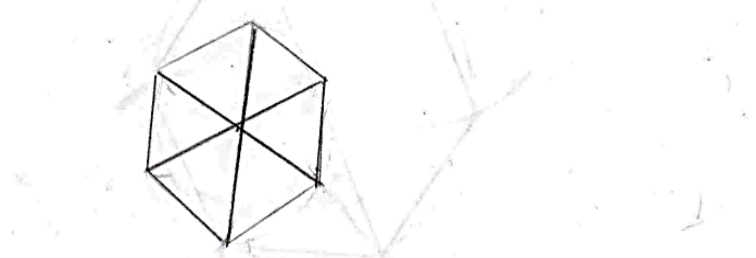
Fonte: A autora

Essa atividade, embora tenha sido aplicada para ilustrar o olhar inventor, também considerou os demais olhares, principalmente o botanista e o construtor. Durante o desenvolvimento da atividade, fomos auxiliando as professoras na construção do hexágono. Nós fazíamos, pausadamente, as etapas da construção do hexágono no quadro, utilizando compasso e régua não graduada, e as professoras iam acompanhando e registrando na folha A4.

Primeiramente, foi construída a circunferência, destacando o centro e o raio. Depois a circunferência foi dividida em seis partes iguais e, em seguida, o hexágono foi construído pela ligação dos pontos obtidos na circunferência. Em virtude das dificuldades encontradas por parte das professoras durante a construção dos hexágonos, nós fomos auxiliando-as no manuseio do compasso para construir as figuras.

Figura 65 - Resposta da professora P9.

b) Construir um hexágono regular com o auxílio do compasso. Como podemos dividir esse hexágono para formar 6 triângulos equiláteros?



Fonte: Arquivos da autora.

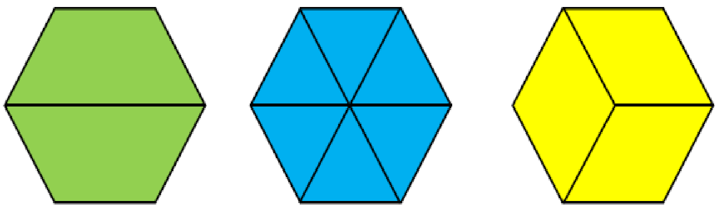
Percebemos, pelos registros apagados pela professora P9, as várias tentativas de construir o hexágono. Isso demonstra que o domínio do compasso, pelas professoras, foi algo desafiador. Contudo, foi superado pela dedicação e empenho no desenvolvimento das atividades, sempre contanto com a nossa ajuda e a das colegas. Foi um trabalho de parceria para que todas conseguissem ter sucesso no desenvolvimento da atividade.

A divisão do hexágono em trapézios, triângulos e losangos exigiu um olhar inventor sobre a figura inicial. Observamos que a divisão do hexágono em três losangos foi a que causou maior estranheza, uma vez que os losangos se apresentavam em posições diferentes da convencional, como as figuras prototípicas apresentadas nos livros didáticos. Desse modo, o losango teve que ser olhado pelas suas propriedades e não apenas pela sua forma posicional usualmente conhecida.

No desenvolvimento dessa atividade, houve muita troca de ideias. A identificação das relações existentes entre as peças obtidas pela decomposição do hexágono foi sendo percebida pelas professoras com a nossa intervenção, por meio de questionamentos e de reflexões sobre as propriedades existentes entre as peças encontradas. Mesmo assim, para algumas professoras, a necessidade de adicionar traços à figura para poder formar outras figuras foi quase que intransponível.

Após concluírem a atividade, projetamos a figura dos hexágonos divididos em trapézios, triângulos e losangos e procuramos fazer uma sistematização dos conceitos geométricos abordados.

Figura 66 - Construção e decomposição do hexágono.



Fonte: A autora

A partir da projeção da Figura 66, perguntamos ao grupo: quais as propriedades do trapézio? Elas responderam que ele tinha dois lados paralelos e dois lados não paralelos. A seguir, perguntamos: o que garante que os seis triângulos sejam equiláteros? Pois, não havia sido utilizada a régua para medir os seus lados. Nesse caso, precisamos intervir, porque as professoras não conseguiram perceber que todos os lados dos triângulos coincidiam com a medida do raio da circunferência. Isso significa que o olhar delas precisou ser conduzido para que outras propriedades do objeto matemático fossem percebidas.

A respeito dos losangos, as professoras disseram que foi difícil percebê-los rotacionados. O depoimento da professora P10 confirma essa posição: "*se a gente olhar é como se eles tivessem rotacionados e daí a cabeça não acostuma que ele pode estar assim. Daí a gente acha que não vai dar certo, que não está do mesmo tamanho, que não vai caber. E se olhando daqui agora, acrescendo duas retas ele parece um cubo 3D*".

Aqui, percebemos mais uma vez as dificuldades enfrentadas pelo pedagogo no processo de ensino e aprendizagem da geometria. Se já é difícil para a professora desenvolver o olhar construtor, como ela pode intervir no ensino da geometria? Contudo, esperamos que essa atividade tenha sensibilizado o grupo sobre as operações cognitivas envolvidas no processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

Continuando com as nossas provocações ao grupo, perguntamos: qual a relação do losango com os triângulos? Elas perceberam que dentro do losango tem dois triângulos. A seguir, indagamos: qual a relação do losango com o trapézio? A professora P6 destacou que o trapézio é composto por um losango e um triângulo. As demais professoras, inicialmente, não tinham estabelecido essa relação, mas com a intervenção da professora P6, conseguiram entender. Para finalizar as reflexões, perguntamos se as professoras já haviam percebido, em algum momento, que todas essas formas poderiam compor um hexágono. A resposta que esperávamos se confirmou: nenhuma delas tinha ideia das maneiras de decompor e compor um hexágono. Para elas, um hexágono era apenas um hexágono, assim como o losango e o trapézio.

Mediante o desenvolvimento dessa atividade, percebemos que as professoras começaram a apresentar um olhar diferente sobre uma figura geométrica. Parece que aquele olhar estático apresentado no início da formação, aos poucos foi ganhando movimento. As diferentes maneiras, propostas pelas atividades, de operar uma figura, seja pela sua decomposição, ou construção ou reconfiguração, de alguma maneira parece que estava encaminhando o olhar das professoras para a passagem do olhar icônico ao não icônico.

Encerrando, foram feitos os encaminhamentos para o próximo encontro. Em seguida, fizemos a avaliação do trabalho, estabelecendo uma conexão com o vídeo: "Quando as crianças fazem Uau", projetado na recepção do encontro. Perguntamos as professoras: para qual situação desse encontro você diz **Uau**?

As professoras foram dando o seu depoimento individualmente e nos surpreendemos com a maneira com que elas ficaram satisfeitas com as atividades desenvolvidas. Embora não tenham citado os termos científicos para os olhares, percebemos que implicitamente elas conseguiram reconhecer a importância desses olhares para a aprendizagem da geometria. Vejamos as avaliações do encontro, na perspectiva das professoras:

A professora P1 disse **Uau** **"***para o momento em que ela encontrou os três losangos no hexágono, porque foi muito difícil visualizá-los*". E, a professora P11 disse **Uau** **"***para o momento em que estava trabalhando com o compasso, porque havia feito uma viagem no tempo e que fazia muito tempo que não fazia construção geométrica com o compasso*".

O momento **Uau** da professora P10 foi quando ela descobriu "*o que é um retângulo e que ela nunca mais vai dizer que ele tem dois ladinhos e dois lados grandes*". Para a professora P7, a situação **Uau** foi quando ela "*estava trabalhando com o compasso e na descoberta das figuras pela decomposição do hexágono, saindo do olhar botanista*". A professora P4 disse **Uau** para o momento em que ela "*entrou em conflito consigo mesma, pois pensava que sabia geometria e na verdade descobriu que não*".

O depoimento da professora P9 nos chamou atenção, porque ela "*não sabia se tinha sido **Uau**, achava que tinha sido **Ai** ou **Ui**, porque viu que precisava praticar mais a construção de figuras geométricas com o auxílio de instrumentos*". A professora P3, assim como a professora P9, disse **Uau** **"***para utilização do compasso que foi significativa*"**,** mas também disse **Ui,** "*porque percebeu que durante a sua trajetória docente ela havia ensinado tudo errado*". Esse fato pode mostrar a tomada de consciência dessas professoras, graças à reflexão e aos desafios propostos. Durante o encontro de formação, parece que elas perceberam a necessidade de um programa contínuo de aperfeiçoamento.

Dois momentos foram **Uau** para a professora P5: "*das descobertas dos quadriláteros e o outro da construção do hexágono com o compasso e da decomposição em figuras*". O **Uau** da professora P6 foi "*para as diversas possibilidades da aprendizagem da geometria e que algumas coisas ela já sabia, mas outras não*".

Analisando os depoimentos supracitados, parece que as professoras foram percebendo a importância de abordar a aprendizagem da geometria pela face oculta da matemática. Em outras palavras, abordar a aprendizagem da geometria numa perspectiva semiocognitiva. Segundo a professora P5, na escola não é destinado tempo para atividades significativas como as que foram trabalhadas, em função de toda uma demanda burocrática a ser seguida, questões muitas vezes sem importância e que acaba faltando tempo para trabalhar o que é realmente essencial. A nosso ver, essa reflexão pode ter sido o primeiro passo para possíveis mudanças no trabalho pedagógico dessas professoras.

4.1.6 O sexto encontro de formação: um olhar sobre a desconstrução dimensional das formas

Após a recepção das professoras, da leitura e da aprovação do diário de bordo, o estudo do texto 6, "A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas" (SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019), foi iniciado pela equipe 3, composta pelas professoras P8, P9, P4 e P7. Elas ressaltaram que apesar da leitura ter sido difícil, o texto abordou tudo o que foi estudado durante os encontros de formação, ou seja, ele fez uma retomada.

Observamos que nesse encontro, as professoras já estavam mais seguras na apresentação do texto. Dominavam melhor os temas científicos e até estabeleciam conexões com situações da sala de aula. Fato que não foi observado na apresentação dos artigos anteriores. Percebemos que já estavam mais familiarizadas com as leituras acadêmicas que foram propostas ao longo da formação. Isso ocasionou uma redução da quantidade de vezes que tivemos que intervir durante a discussão teórica.

A professora P4 iniciou a apresentação pontuando o significado da palavra descontruir, que segundo o dicionário quer dizer desfazer ou desmontar para voltar a construir. Continuando, ela destacou que o texto apontou duas maneiras de ver matematicamente uma figura: a heurística e a desconstrução dimensional das formas. Na maneira heurística há duas fases para ver: a primeira consiste na análise e na exploração da figura e a segunda trata-se da reconfiguração da figura para encontrar a solução do problema.

Prosseguindo com a explanação, a professora P4 indicou que dentro da desconstrução dimensional também se encontram duas fases: na primeira ocorre o prolongamento dos contornos para sair da forma 2D e passar para unidades figurais menores. A segunda fase trata das anamorfoses. Como esse tema era desconhecido, ela foi buscar o significado da expressão no dicionário, que, segundo a mesma, significa perceber o formato de uma nova geometria dentro da figura, partindo de outra para perceber as propriedades matemáticas da figura.

A professora P4 percebeu que o texto tratava bastante da questão do olhar. Segundo ela, "*em geometria existe a necessidade de olhar para além do que se percebe num primeiro momento. Atitude que eu quase não tinha e que estou aprendendo*" (P4). Como exemplo, ela ressaltou "*a necessidade de olhar além do quadrado, além do triângulo e o que se pode fazer com essas formas*" (P4).

Essa colocação da professora P4 reforça o que vínhamos percebendo nos últimos encontros de formação. Parece que elas começaram a compreender que a aprendizagem da geometria não se trata apenas do reconhecimento da forma geométrica. Mas sim, de saber "*o que se pode fazer com essas formas*" (P4).

Segundo a professora P9, a cada vez que ela realizava a leitura do texto parecia que novas questões iam surgindo, coisas que não havia enxergado antes. Ela percebeu que o texto voltou a falar da questão da rotação das figuras num plano. Fato que relacionou com a dificuldade das crianças em identificarem o quadrado rotacionado nas atividades propostas nos livros didáticos. Nesse momento, indagamos as professoras o porquê dessa dificuldade. Para a professora P4, isso pode estar relacionado à forma como os professores apresentam o quadrado para a criança durante a trajetória escolar, geralmente como uma forma estática e sem possibilidade de operar.

Contribuindo com a discussão, a professora P1 levantou uma questão importante a ser considerada no trabalho pedagógico. Ela ressaltou que:

> **P1:** É difícil ensinar aquilo que não se sabe, aquilo que a gente não domina. É complicado. E acho que fica estampado na cara da gente, quando você não domina o assunto, quando tu não tens certeza daquilo que tá dizendo. Eu acho que, pra mim, eu creio que esse seja o maior problema da matemática, da geometria, mais especificamente.

Novamente encontramos mais um dado que reforça a necessidade de programas de formação em geometria para professores pedagogos, pois como ressaltou a professora P1: "*É difícil ensinar aquilo que não se sabe [...]*", ainda mais quando se refere à aprendizagem da geometria que requer a sinergia entre o gesto, a linguagem e o olhar.

Na continuação da apresentação explanada pela equipe, a professora P4 destacou que o texto enfatizou a importância da apreensão perceptiva e operatória no processo de aprendizagem da geometria. Complementando a fala, a professora P9 disse que o texto acentua a importância da expansão discursiva, não bastando apenas o reconhecimento da forma, mas a capacidade de descrição, narração e explicação no reconhecimento das propriedades da figura.

Para que as professoras pudessem experienciar a desconstrução dimensional das formas, de maneira mais dinâmica e mais próxima de atividades que fossem possíveis de se realizar com as crianças dos anos iniciais, propusemos uma atividade de desconstrução de sólidos geométricos. Primeiramente, entregamos para cada professora a representação física de uma pirâmide de base quadrada, confeccionada com cartolina. A partir dessa forma geométrica 3D, as professoras foram desenvolvendo a atividade a seguir.

Figura 67 - Atividade de desconstrução da pirâmide.

Observe o sólido que você recebeu:

a) Qual o nome deste sólido?_________________
b) Desenhe uma planificação possível desse sólido sem realizar medidas e sem desmontá-lo.
c) Desmonte o sólido, coloque-o ao lado da figura que você construiu e complete a tabela:

ELEMENTOS COMUNS ENTRE AS DUAS FIGURAS	ELEMENTOS DIFERENTES ENTRE AS DUAS FIGURAS

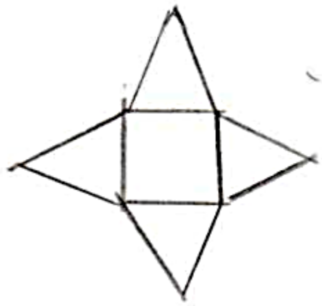
d) Qual(ais) a(s) diferença(s) entre o sólido montado e o sólido desmontado?
e) Qual(ais) a(s) semelhança(s) entre o sólido montado e o sólido desmontado?
f) Recorte canudinhos com as mesmas medidas dos contornos das faces do sólido. Quantos canudinhos você obteve?
g) Construa o sólido utilizando os recortes de canudinhos obtidos e massinha de modelar. Quantos canudinhos você utilizou nessa construção?
h) O número de canudinhos obtidos no item **F** foi igual ou diferente ao número de canudinhos utilizados no item **G**? Por quê?
i) Qual(ais) a(s) diferença(s) entre o sólido construído com canudinhos e o sólido construído com papel?
j) Qual(ais) a(s) semelhanças(s) entre o sólido construído com canudinhos e o sólido construído com papel?
k) A partir dessa atividade, descreva as características geométricas desse sólido.

Fonte: A autora

Durante o desenvolvimento da atividade, as professoras precisaram nomear, classificar, pensar na possibilidade de planificação do sólido, desmontar o sólido, comparar as semelhanças e diferenças entre as formas 3D (pirâmide), 2D (planificação), 1D (lados/arestas) e 0D (vértices). E, a partir dessas movimentações do pensamento, conseguir elaborar uma produção discursiva do objeto geométrico pirâmide.

Um fato interessante foi que todas as planificações imaginadas pelas professoras tinham o mesmo modelo, como o da Figura 68.

Figura 68 – Planificação feita pela professora P6.



Fonte: Arquivos da autora.

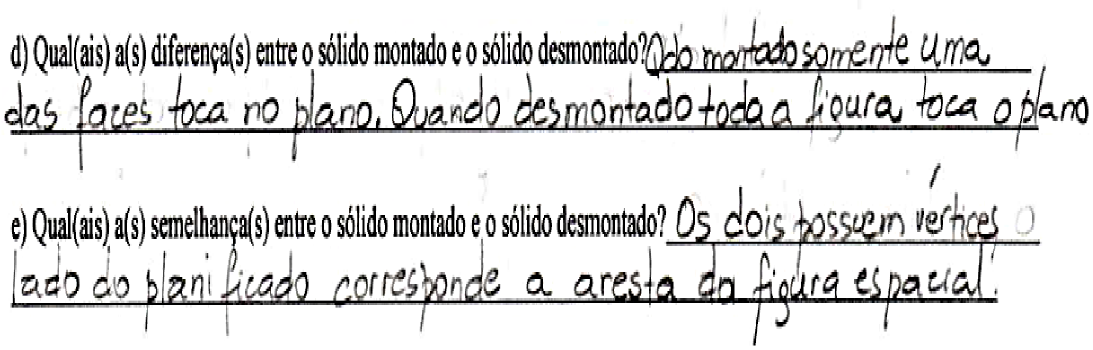
Para surpresa das professoras, quando desmontaram a representação física da pirâmide, depararam-se com uma forma geométrica diferente daquela que haviam imaginado. Essa situação deixou muitas delas em dúvida quanto à planificação que haviam feito. Elas não se sentiram seguras para afirmar que a planificação que fizeram, embora fosse diferente, seria capaz de construir uma representação física da pirâmide de base quadrada.

Referente aos elementos comuns e diferentes entre as planificações da pirâmide, todas as professoras perceberam que ambas são compostas por quatro triângulos e um quadrado. Algumas destacam que a diferença entre as duas formas foi a maneira como os triângulos ficaram unidos e a ausência das abas.

Antes de pedirmos para que respondessem os itens *d* e *e* da atividade, discutimos com elas a respeito dos conceitos de faces e lados, lados e arestas, forma plana e espacial, forma 3D, 2D, 1D e 0D. Observamos, durante os encontros de formação, que essas ideias ainda não se encontravam bem definidas no grupo de professoras. Era muito comum ouvirmos, por exemplo, os lados da pirâmide, quando na verdade elas estavam referindo-se as faces.

Depois dessa problematização, as professoras parecem ter compreendido os diferentes significados desses termos. Prova disso, pode ser a resposta apresentada pela professora P5.

Figura 69 - Resposta apresentada pela professora P5.


d) Qual(ais) a(s) diferença(s) entre o sólido montado e o sólido desmontado? O do montado somente uma das faces toca no plano. Quando desmontado toda a figura toca o plano

e) Qual(ais) a(s) semelhança(s) entre o sólido montado e o sólido desmontado? Os dois possuem vertices o lado do planificado corresponde a aresta da figura espacial.

Fonte: Arquivos da autora

A constatação dessa professora, de que o lado da figura planificada corresponde à aresta da figura espacial, demonstra a imaginação requerida na resolução dessa atividade, exigindo um raciocínio de vai e vem entre as formas 3D (figura espacial), 2D (planificado) e 1D (aresta).

Percebemos nas respostas das demais professoras, para essa atividade, que elas conseguiram compreender as diferenças e semelhanças entre a forma tridimensional e bidimensional para um mesmo objeto geométrico, denominando adequadamente cada elemento desse objeto.

Dando sequência a atividade, pedimos às professoras que recortassem canudinhos, com a mesma medida dos contornos das faces, para montar a representação da pirâmide usando os canudinhos e massinha de modelar. Nessa construção, duas professoras recortaram 12 canudinhos ao invés de 8. Isso porque, elas não perceberam que o encontro das faces laterais da pirâmide formava apenas uma aresta. Ou seja, os lados das faces triangulares coincidiam quando a representação da pirâmide estava na terceira dimensão.

O processo de montagem da representação física da pirâmide foi um momento prazeroso, segundo o depoimento das professoras. O trabalho com a massinha de modelar foi relaxante, após uma jornada de oito horas de trabalho. Na Figura 70 apresentamos uma imagem de como ficou o resultado do trabalho de construção.

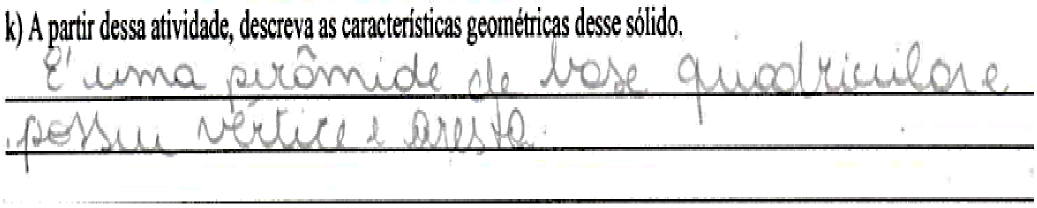
Figura 70 - Trabalho da professora P7.

Fonte: Arquivos da autora

Quando o trabalho manual estava concluído, refletimos sobre os aspectos que se evidenciavam na representação do sólido confeccionado com canudinhos em comparação com a representação do sólido confeccionado com cartolina. As professoras observaram que no sólido construído com canudinhos, as arestas e os vértices evidenciavam-se mais, enquanto no sólido confeccionado com cartolina, as faces tornavam-se mais evidentes. Elas também perceberam que, apesar de serem representações físicas diferentes, as características do objeto permaneciam as mesmas. Ambas apresentavam uma face quadrada, quatro faces triangulares, 5 vértices e 8 arestas.

Com o desenvolvimento dessa atividade, em que tivemos a representação da pirâmide por meio da utilização de materiais manipuláveis, julgávamos que as professoras conseguiriam expandir o discurso sobre esse objeto geométrico. Entretanto, todas permaneceram na enunciação de frases, como mostra a Figura 71.

Figura 71 - Resposta da professora P1.



k) A partir dessa atividade, descreva as características geométricas desse sólido.

É uma pirâmide de base quadricular e possui vértice e aresta.

Fonte: Arquivos da autora

As professoras não conseguiram estabelecer a conexão entre as propriedades vistas no objeto físico e no objeto ideal. Parece que o olhar delas ficou preso as representações físicas, negligenciando as representações semióticas e desconsiderando a desconstrução dimensional das formas.

Dando continuidade aos estudos, pedimos para que se organizassem em duplas para elaborar atividades que considerassem a desconstrução dimensional das formas no processo de aprendizagem da geometria. Essas atividades foram aplicadas, posteriormente, com os alunos das classes dessas professoras.

Nesse encontro de formação compareceram apenas sete professoras, o que acabou dificultando a elaboração das atividades. Por isso, esse trabalho teve continuidade no encontro ulterior. Mesmo assim, apesar do pouco tempo disponível nesse encontro e do baixo *quórum*, observamos vários fatos interessantes que ocorreram enquanto elas elaboravam as atividades.

Percebemos que as professoras se sentiram desafiadas, apresentando muitas dúvidas, inquietações, insegurança. Elas recorreram a modelos de atividades sugeridas pelos livros didáticos e pelos *sites* pedagógicos. Essas atividades foram discutidas aos pares e conosco e a todo momento, problematizávamos o que elas estavam elaborando. Nosso objetivo, não era dar respostas, mas apontar caminhos para que pudessem perceber de que maneira aquela atividade contemplava a desconstrução dimensional das formas, contribuindo para a aprendizagem da geometria.

Identificamos que as professoras apresentavam dificuldades em explicar a questão que estavam elaborando, tanto verbalmente quanto na produção discursivas dos enunciados. Quando indagamos a professora P4, sobre os aspectos dimensionais da figura utilizada na questão que ela estava elaborando, percebemos o seu embaraço para explicar o seu raciocínio e a sua insegurança na identificação das dimensões da figura.

Concluindo o encontro, reunimos todas as professoras novamente e procuramos destacar que, o trabalho de elaboração das atividades, constituiu um dos diferenciais da nossa formação. Ele visou promover o empoderamento do pedagogo na condução do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais, tendo em vista a perspectiva semiocognitiva da aprendizagem.

As professoras destacaram que estavam com dificuldades em encontrar, nos livros didáticos, atividades que considerassem a desconstrução dimensional das formas. Partindo dessa constatação, pedimos para que pesquisassem e pensassem em atividades, que contemplassem essa perspectiva semiocognitiva, e que trouxessem no próximo encontro. A professora P5 sugeriu que fosse elaborada uma sequência de atividades, a partir das questões preparadas pelas equipes. Ideia que foi acatada pelo grupo.

4.1.7 O sétimo encontro de formação: o desafio de criar atividades de geometria considerando os aspectos semiocognitivos

Iniciamos o encontro com a recepção das professoras e , logo após, fizemos a leitura e a aprovação do diário de bordo. Num segundo momento, as professoras foram organizadas em duplas e trios para elaborarem uma atividade de geometria que contemplasse a desconstrução dimensional das formas, para ser aplicada com os seus alunos. As duplas e os trios foram dispostos em espaços físicos diferentes para que pudéssemos contribuir com o processo de elaboração das atividades. Algumas professoras já haviam iniciado esse processo no encontro anterior, outras fizeram pesquisas e trouxeram as atividades previamente encaminhadas que foram, posteriormente, complementadas pelos seus pares.

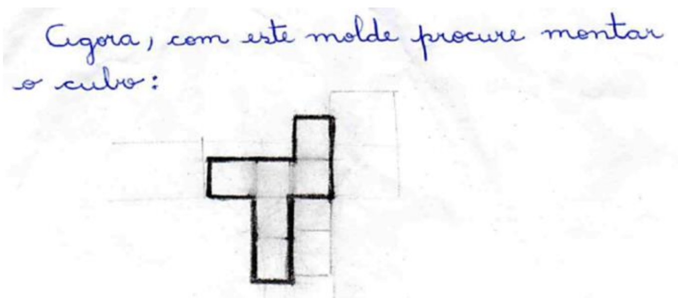
Elas utilizaram livros e materiais didáticos complementares, e fizeram consulta na internet, procurando encontrar atividades que contemplassem a desconstrução dimensional das formas. Como não conseguiram identificar atividades que atendessem a proposta, sentiram-se desafiadas a criar. Então, se inspiraram nos materiais consultados e fizeram adaptações, complementações e reconfigurações das questões encontradas no material consultado. Nós acompanhamos todo o processo de elaboração das atividades, fazendo sugestões e fomentando reflexões sobre como aquela atividade contribuiria para a aprendizagem da geometria. Fomos conversando em particular com elas e procurando problematizar as questões que estavam criando, perguntando, por exemplo: de que forma aquela atividade exigiria a desconstrução dimensional das formas? Quais os olhares que estariam envolvidos na resolução da atividade? Quais as operações semiocognitivas requeridas no desenvolvimento da atividade?

Depois da elaboração das atividades, estas foram repassadas para outra dupla/trio a fim de serem avaliadas pelos pares. O anonimato da autoria das atividades foi mantido até o momento da socialização no grande grupo. Assim, as professoras sentiram-se mais à vontade para dar o seu parecer e as suas contribuições à atividade. Após as atividades serem avaliadas pelos pares, elas voltaram para as autoras da questão. Estas poderiam acatar ou não as sugestões feitas pela dupla/trio que avaliou a atividade proposta.

As professoras P4 e P8 elaboraram duas atividades. Uma sugeria a construção de um cubo a partir de um molde pronto. Depois, contornaria as faces do cubo na folha e responderia algumas perguntas relacionadas às suas propriedades. Quando perguntamos onde estaria a desconstrução dimensional das formas nessa atividade, elas responderam que quando eles fossem contornar as faces do cubo, aconteceria a passagem da forma 3D para 2D.

Ao questionarmos sobre os tipos de olhares envolvidos nessa atividade, elas responderam que seria o olhar botanista. Nesse momento, sugerimos que a atividade poderia contemplar também o olhar inventor. Contudo, elas não viram essa possibilidade, fazendo-nos colaborar com a elaboração da questão. Apontamos que poderia ser acrescentada à atividade, uma questão em que os alunos receberiam o contorno da representação planificada do cubo, sem as demarcações internas para que eles tivessem que adicionar traços e pensar nas propriedades geométricas do mesmo, podendo assim montá-lo. As professoras P4 e P8 acharam a ideia interessante e propuseram a seguinte atividade:

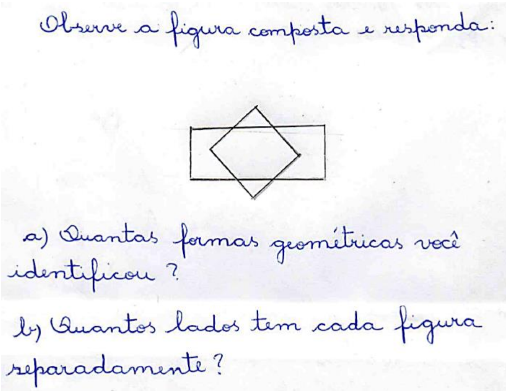
Figura 72 - Questão elaborada pelas professoras P4 e P8.



Fonte: Arquivos da autora

A segunda questão elaborada por essas professoras teve por objetivo desconstruir uma figura passando da dimensão 2D para 1D. Segundo elas, a identificação das formas geométricas corresponderia à forma bidimensional, enquanto a contagem dos lados das figuras seria a unidimensional.

Figura 73 - Questão elaborada pelas professoras P4 e P8.



Fonte: Arquivos da autora.

Quando questionamos se essa atividade contribuiria para a aprendizagem da geometria, as professoras disseram que sim. De acordo com elas, "*toda atividade que mexe com a gente e faz a gente pensar e ter que refletir vai contribuir com a aprendizagem [...] quando eles tiverem que fazer todo esse raciocínio que nós tivemos que fazer, vai contribuir com a aprendizagem da geometria sim*" (P4).

Essas professoras relataram que tiveram muita dificuldade em elaborar o enunciado dessa questão. Elas disseram que têm o entendimento do que estão fazendo, mas quando é para colocar o enunciado da questão, "*se perdem*". Perguntamos sobre a importância desses enunciados e elas disseram que esse é o primeiro contato das crianças com a questão, trazendo implicações na resolução do problema. Para elas, o enunciado precisa ser objetivo e claro, permitindo que as crianças o compreendam e encontrem a solução.

Essas duas atividades, elaboradas pelas professoras P4 e P8, foram analisadas pela equipe composta pelas professoras P11, P10 e P3. No parecer delas, a primeira questão não apresentou problemas e é possível de ser resolvida nos anos iniciais. Entretanto, supuseram que a segunda questão poderia ser resolvida apenas nos quartos e quintos anos, devido ao grau de dificuldade. A equipe que analisou as atividades não propôs alterações, mantendo as atividades no mesmo formato.

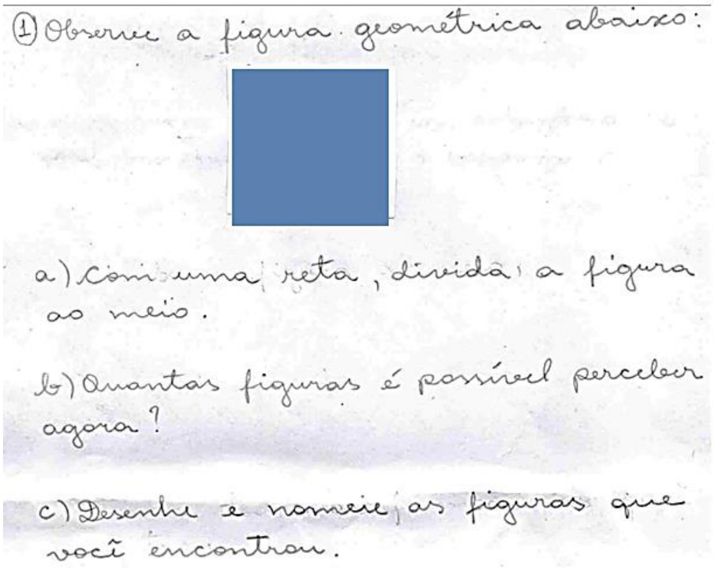
As professoras P1 e P7 apresentaram várias ideias de atividades. Entretanto, quando indagávamos sobre o momento em que seria requisitado a desconstrução dimensional das formas na resolução, elas percebiam que a questão não contemplava essa perspectiva. Procurando orientá-las na elaboração da atividade, fomos fazendo intervenções e delineando possibilidades que pudessem fazê-las perceber um tipo de atividade que contemplasse a perspectiva semiocognitiva.

Após muito debate, as professoras propuseram a seguinte questão: utilize duas retas para encontrar quatro triângulos no quadrado. Elas, num primeiro momento, não haviam percebido que dentro do quadrado dividido, dessa maneira, teriam outros triângulos. Quando fomos descontruindo o quadrado em triângulos, é que perceberam que não havia apenas os quatro triângulos.

A professora P1 sugeriu que fosse substituído o enunciado do problema, podendo ser: "trace duas retas e diga quantos triângulos você encontrou". Intervimos, novamente, perguntando o que aconteceria se o aluno traçasse os segmentos sem unir os vértices. A professora P1 percebeu que talvez não formasse triângulos. Destacamos a problemática das funções discursivas nos enunciados de problemas e discutimos sobre qual seria a maneira mais adequada para designar os objetos geométricos nesse enunciado.

Por fim, elas conseguiram elaborar a seguinte questão:

Figura 74 - Questão elaborada pelas professoras P1 e P7.



Fonte: Arquivos da autora

Quando perguntamos de que forma essa atividade contribuiria para a aprendizagem da geometria, a professora P7 destacou que "*o olhar dele até então é só o quadrado, mas com essa desconstrução ele vai ver mais além do que ele tá vendo, com a construção e desconstrução*". E segundo elas, isso é muito importante para a aprendizagem da geometria.

Essa questão foi analisada pela equipe formada pelas professoras P6, P5 e P2. Segundo essas, "*a atividade é interessante, mas sugerimos a ampliação dos desafios a serem alcançados*" (P6, P5 e P2). Embora elas tenham indicado a necessidade de reformulação da questão, não houve nenhuma contribuição para a reescrita da atividade.

A equipe constituída pelas professoras P11, P10 e P3 elaborou uma sequência de atividades, constituída por vários momentos. Primeiramente, seria realizada a leitura da história do tangram. Depois, as crianças receberiam as peças do tangram para montarem o quadrado. No terceiro momento, cada criança deveria escolher 3 ou 4 peças do tangram para montar uma figura e construir uma história. Por fim, elas receberiam uma das formas do tangram em cartolina e seriam desafiadas a encontrar outras formas geométricas planas a partir de traçados de reta dentro da figura, gerando assim a desconstrução dimensional.

Segundo a equipe, as crianças teriam que traçar segmentos de reta (1D) dentro da forma plana (2D) para poderem encontrar outras figuras planas (2D). Nesse momento, sentimos a necessidade de problematizar a atividade, pois pelo enunciado, que solicitava o traçado de retas dentro da figura plana para encontrar outras figuras, as crianças poderiam, por exemplo, desenhar um triângulo dentro de uma das formas geométricas que compõe o tangram. Com a nossa intervenção, as professoras perceberam a necessidade de modificar o enunciado da questão. Mas, preferiram esperar pela análise da atividade feita por outra equipe de professoras, para realizarem as devidas adequações.

Quando indagamos o grupo sobre como essa atividade poderia contribuir para a aprendizagem da geometria, a professora P10 argumentou que esta

> **P10:** [...] vai fazer eles entenderem que a geometria vai para além do reconhecimento só das imagens, que quadrado é quadrado, triângulo é triângulo. Mas que eles podem, pela composição de retas, gerar formas geométricas, que dentro dessas formas geométricas podem ter outras. [...] no próprio tangram a gente percebe que os triângulos estão posicionados de formas diferentes, não deixam de ser triângulos, porém rotacionados e dentro de uma outra grande forma que é o quadrado. E aí a gente começa a trazer pra eles o que a gente já aprendeu, que dentro de uma peça podem ter outras, que um quadrado pode ser um retângulo, mas que o retângulo pode não ser um quadrado e aí trazer os conceitos depois, né? Que uma única atividade a gente não vai abordar tudo, mas que é um passo pra.

A respeito da presença das funções discursivas nessa atividade, as professoras indicaram que é importante as crianças nomearem adequadamente as formas geométricas, bem como, saberem o que as diferencia, "*como o losango e o quadrado. Por que, se eles têm praticamente a mesma estruturação, o que leva a ser quadrado ou ser losango, né?*" (P10).

Quando perguntamos se elas achavam que as crianças teriam dificuldades para resolver a questão, disseram que a dificuldade já começaria pela montagem do quadrado e que as crianças precisariam de tempo para perceberem a maneira como as peças devem ser encaixadas adequadamente, porque o objetivo é fazer com que elas pensem . Na opinião das professoras, a etapa mais difícil seria a de, a partir de traçados de retas, encontrar outras formas geométricas, porque as crianças precisariam desviar o olhar da figura inteira e perceber as suas partes.

Essa sequência de atividades foi analisada pelas professoras P1 e P7. No entendimento delas, a sequência de atividades poderia ser seguida até o terceiro momento. O quarto e último momento da atividade poderia ser substituído pela atividade elaborada por elas (ilustrada na figura acima), pois contemplou a desconstrução dimensional do quadrado.

A equipe constituída pelas professoras P5, P2 e P6 também elaborou uma sequência de atividades. A proposta delas foi de, primeiramente, expor diferentes sólidos geométricos na sala de aula, um ou dois dias antes da aplicação das atividades, visando aguçar a curiosidade das crianças. No dia da aplicação das atividades, elas receberiam a planificação do cubo e a partir dessa forma, deveriam responder numa folha o seguinte questionamento: "só observando a figura que você recebeu, qual das figuras expostas é igual a sua? Por que você acha que é essa figura?". As folhas com as respostas seriam recolhidas e colocadas numa urna, para que as crianças não fossem influenciadas pelas respostas dos colegas.

Num terceiro momento da sequência de atividades, as crianças deveriam montar o sólido a partir da planificação para que elas pudessem comprovar as suas hipóteses. Quando perguntamos às professoras, o que elas achavam que as crianças responderiam, elas disseram que esperavam que identificassem o cubo, porém tinham consciência que nem todas as crianças conseguiriam reconhecer a representação física espacial do cubo, podendo chamá-lo de dado. Quando questionamos sobre as dificuldades que os alunos teriam para montar o cubo, elas disseram que seria muito complicado para eles recortarem, dobrarem, colarem, porque não estão acostumados a realizar esse tipo de atividade.

Depois que os alunos tivessem montado o cubo, eles iriam socializar e conversar com os colegas e com a professora sobre as suas hipóteses levantadas, bem como, analisar se estas confirmaram-se ou não e por quê. Para finalizar a sequência de atividades, as crianças deveriam resolver um desafio, que consistiria em montar um cubo a partir do contorno das diferentes possibilidades de planificação desse sólido.

A ideia de apresentar o molde sem as demarcações internas surgiu após nossas intervenções, onde compartilhamos com elas a ideia que havíamos discutido com as professoras P4 e P8. Assim, no desafio, cada criança receberia uma forma diferente de planificação do cubo, mas sem as demarcações internas. Elas ficariam livres para montar o cubo, podendo optar por traçar, inicialmente, os segmentos de reta, que corresponderiam às arestas do sólido, ou simplesmente dobrar as faces, obtendo os traçados pelo vinco do papel.

Ao perguntarmos à equipe em que medida essa atividade contribuiria com a aprendizagem da geometria, elas destacaram que as crianças, a partir das ações de montar, desmontar, traçar, começariam a perceber propriedades diferentes em cada forma geométrica, o que contribuiria para a formação de conceitos. Mas, segundo a professora P2, "às vezes o desconstruir é mais difícil do que o construir. Quando tu não sabe é mais fácil de ensinar do que quando tu sabe e está com aquilo consolidado no cognitivo". Complementando essa fala, a professora P6 salientou que por meio dessa desconstrução dimensional as crianças deveriam começar a perceber outras formas de ver a figura.

Essas atividades propostas pelas professoras P5, P2 e P6 foram analisadas pelas professoras P4 e P9. A avaliação das atividades foi positiva, destacando a sua relevância e que elas gostaram muito.

Após conversarmos com cada equipe, reservadamente, e as atividades elaboradas serem avaliadas pelos pares, fizemos a socialização destas no grande grupo. Antes da apresentação das atividades, ressaltamos que as sugestões que foram realizadas pelas colegas, foram contribuições que deveriam ser consideradas como críticas construtivas para o trabalho pedagógico e isso é muito importante, pois permite a troca de olhares e de vivências. Sentimos a necessidade de fazer essa intervenção, pois percebemos que muitas professoras tomaram as sugestões como críticas pessoais e demonstraram uma certa resistência em aceitar as observações.

Cada equipe apresentou a sua atividade. Foi interessante perceber que elas apresentavam e argumentavam sobre a importância de cada uma. Depois da socialização, as professoras perceberam que, apesar das atividades terem sido diferentes, elas complementavam-se. Num trabalho colaborativo, entre nós e as professoras, selecionamos e organizamos uma sequência de atividades que de certa forma contemplou, direta e indiretamente, todas as sugestões propostas. A sequência elaborada e o planejamento para o desenvolvimento dessas atividades encontram-se no Apêndice D.

Finalizando o encontro, pedimos para que cada professora explicasse como foi a experiência de elaborar uma atividade de geometria, considerando a desconstrução dimensional das formas. Todas elas relataram que foi um momento desafiador e inovador, porque precisaram sair da sua zona de conforto, pesquisar e pensar em atividades que não abordassem a geometria da maneira convencional, como as que são sugeridas pelos livros didáticos. Segundo elas, outro agravante foi a dificuldade enfrentada na elaboração dos enunciados das questões, porque não conseguiam achar expressões adequadas para manifestar o que realmente queriam que os alunos fizessem.

Entre os depoimentos das professoras, encontramos, além dessas perspectivas comuns, outras mais específicas, como, por exemplo, as apresentadas pelas professoras P10, P1, P5 e P2.

A professora P10 destacou que para ela

> **P10:** [...] não foi um momento de desconstrução, mas de reconstrução, eu estou a toda hora me reconstruindo e vendo que é possível explorar mais do que a gente já tem, né? Eu vejo que, o que a gente já conhece é sempre importante perceber que pode aprender um pouquinho mais. E hoje, a gente aprendeu um pouquinho mais de novo. Quando tu questiona (referindo-se a formadora), é ver que não é uma crítica, mas que a gente consiga expor o que a gente pretende com aquilo, e isso é importante e enriquece quando a gente sabe responder, porque a gente se sente empoderada.

A professora P1 relatou que ela

> **P1:** geralmente tem o hábito de abrir o livro didático e fazer uma seleção de atividades para eu poder desenvolver com os meus alunos. Então eu fui pro livro didático, eu procurei, inclusive naqueles que eu mais gosto, que eu acho o máximo e não encontrei nada. [...] nada que eu pudesse copiar. Então foi um desafio, porque, assim, tá bom (disse o seu nome), desiste é você que vai ter que criar é o teu momento de pensar alguma coisa, você não vai achar a fórmula pronta. Então, por isso foi um desafio.

O depoimento da professora P5 destacou que "*foi um momento bom, porque é um tempo que tu para pra pensar e não vai só reproduzindo aquilo, que na correria do dia a dia, tu acaba fazendo. Então assim, parar, pensar, numa atividade que saia fora do comum foi muito bom*". Complementando essa fala, a professora P6 apontou que, além de tudo o que a professora P5 havia comentado, ela achava "*que a gente pode continuar pensando como ela falou, não pensar da maneira que a gente sempre pensou até agora. E o curso vai mudar alguma coisa*".

As declarações da professora P2 nos fizeram refletir sobre a importância da formação continuada, para que o professor pedagogo possa assumir o seu verdadeiro protagonismo nas situações de ensino. Nas palavras dela:

> **P2:** Que bom que a gente está conseguindo ter esse novo olhar, porque nós não aprendemos assim. Pra mim é difícil às vezes ensinar o aluno da forma diferente que

> eu aprendi. Então esse curso tá sendo um divisor, está sendo muito bom pra ter esse novo olhar, tanto pro que eu vou ensinar, quanto pro que o aluno vai aprender. Coisas mais significativas, que ele aprenda de fato, não que ele reproduza ali pra tirar um A, né? E sair desse automático e ser uma coisa mais significativa pra ele mesmo, que seja bom pra ele. E esse momento aqui é... a gente tá muito na pilha esse ano, vir pra cá e sentar e pensar, tu vê que tu não tá reduzido ainda. A gente tá se sentindo muito diminuído. Então, vê que a gente consegue pensar, consegue produzir, consegue trocar, não só nós aqui, mas todo o grupo, e ver que todas nós estamos aqui tentando fazer alguma coisa no meio de tanta loucura dá um gás, assim, pra vida da gente.

Ratificando a fala da professora P2, enfatizamos que nós, professores, não podemos ser considerados robôs, porque pensamos e somos capazes de criar. Porém, isso muitas vezes vai contra as políticas públicas educacionais, tanto nacionais quanto internacionais, que parecem querer reduzir o professor a um mero reprodutor e preparador de alunos para testes de larga escala.

Encerrando o encontro, foram feitos os devidos encaminhamentos, informando que as professoras deveriam aplicar a sequência de atividades com as crianças, trazer essas atividades e escrever o diário de bordo com o relato do desenvolvimento das mesmas no próximo e penúltimo encontro de formação.

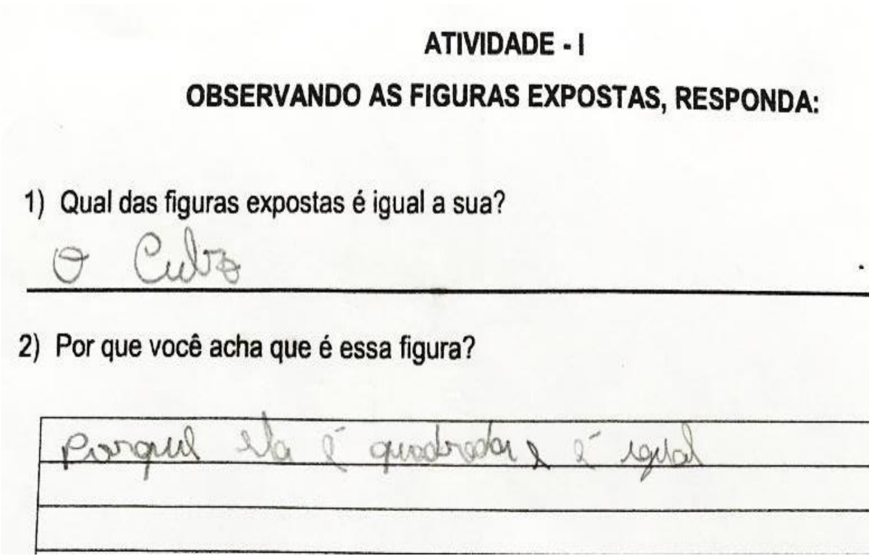
4.1.8 O oitavo encontro de formação: o confronto entre as expectativas da performance de resolução das atividades pelos alunos e o desempenho apresentado por eles no desenvolvimento das atividade, na perspectiva das professoras

O encontro de formação foi iniciado com a recepção das professoras, a seguir da leitura e aprovação do diário de bordo. Como o nosso objetivo para esse encontro era de compreender a análise do desempenho dos alunos na realização das atividades pelas professoras, preferimos conversar com as duplas/trios, reservadamente, para que elas pudessem relatar com detalhes, as dificuldades encontradas no desenvolvimento das atividades, o que esperavam dos alunos na resolução de cada questão proposta na sequência de atividades e o que elas perceberam através das respostas apresentadas pelos alunos a essas atividades.

As professoras P4 e P9 aplicaram as atividades juntas. A turma escolhida por elas foi um quinto ano, constituída por oito alunos. As professoras não esperavam que eles fossem participar tão ativamente do desenvolvimento das atividades, pois era uma turma pouco participativa e apresentavam dificuldades no processo de aprendizagem. Na opinião das professoras, esse envolvimento dos alunos poderia estar relacionado às suas diferentes propostas de trabalho, pela apresentação dos sólidos e pelo desenvolvimento de atividades que não fazem parte da rotina escolar, em virtude da falta de tempo do professor para prepará-las.

As professoras não esperavam que todas as crianças conseguissem relacionar a forma plana do cubo com a sua forma tridimensional, exposta na sala de aula, nomeando-o adequadamente. Quando perguntamos por que as professoras achavam que o aluno (Figura 75), havia respondido à questão 2 dessa maneira:

Figura 75 - Resposta apresentada por um aluno das professoras P4 e P9.


ATIVIDADE - I

OBSERVANDO AS FIGURAS EXPOSTAS, RESPONDA:

1) Qual das figuras expostas é igual a sua?

O Cubo

2) Por que você acha que é essa figura?

Porque ela é quadrada e é igual

Fonte: Arquivos da autora

Elas argumentaram que ele relacionou o cubo com a face quadrada, porque é a primeira forma que ele olha e logo pensa no quadrado. Contudo, elas acreditam que o aluno não tenha confundido os objetos geométricos cubo e quadrado.

A professora P4 relatou que antes de introduzir a atividade II, ela procurou explorar as formas dimensionais das figuras. Explicou que o cubo tem comprimento, largura, altura e quando é feito o contorno da face do cubo a figura obtida é plana. Mas, ela não sabe se eles conseguiram ter esse entendimento.

Na questão 1 da atividade II, sobre o contorno das faces do cubo, a professora P9 destacou que eles tiveram dificuldade para fazer o contorno das faces do cubo, devido a sua estrutura física, porque o papel não era rígido. Mas, isso já era esperado por elas, pois os alunos apresentavam dificuldades para desenvolver atividades que requeiram a coordenação motora.

A professora P4 achou "*que eles não iam conseguir fazer seis faces, eu achei que eles iam fazer...o olhar deles não seria que o cubo tem seis faces. Eu achei que eles iam fazer* *quatro por causa do...não sei. Na minha cabeça eu achei que eles não conseguiriam fazer e fizeram com muita facilidade*". Para as professoras, pelas características descritas da turma, eles surpreenderam ao fazerem essa atividade com tanta facilidade.

Com relação às questões 2, 3, 4 e 5 da atividade II, todos os alunos conseguiram perceber que o cubo é constituído por seis faces quadradas de mesmo tamanho. As professoras já esperavam que eles respondessem essas questões com facilidade, porque, segundo elas, eles já estão no quinto ano e esses conceitos são trabalhados desde o primeiro ano. Para a professora P4, a maior dificuldade que ela esperava que os alunos tivessem nessa atividade seria em resolver a primeira questão "*passar do cubo e pedir para eles desenharem. Essa percepção, não sei se é essa a palavra certa, percepção do cubo para o quadrado, eu achei que eles teriam mais dificuldades*".

Com relação à atividade III, na qual foi solicitado que a face do cubo fosse dividida ao meio para depois desenhar e nomear as figuras encontradas, a professora P9 esperava que eles dividissem o quadrado exatamente no meio, mas os alunos tiveram dificuldades em usar a régua e precisaram da intervenção das professoras para conseguir dividir e concluir a atividade.

Depois que o quadrado foi dividido ao meio, a professora P9 já esperava que os alunos percebessem apenas duas formas geométricas "*porque eles iriam esquecer de que aqui (apontando com o dedo na figura) tem um quadrado e essas duas*", fato que foi confirmado em 100% das respostas encontradas nessa turma.

Quando perguntamos se algum aluno havia dividido o quadrado em dois triângulos, percebemos que as duas professoras foram surpreendidas pela nossa colocação. Ou seja, nem elas tinham percebido essa possibilidade. Ao analisarem as respostas das crianças, foi constatado que todos dividiram o quadrado em dois retângulos. Segundo a professora P4, nenhum aluno expressou verbalmente que dentro do quadrado poderia ter dois triângulos. Ela pensa que:

> **P4:** isso não foi trabalhado com eles, não foi aguçado eles a pensar dessa forma [...] por que eles conhecem o quadrado, isoladamente, o retângulo, o triângulo com muita facilidade? Porque isso vem desde o primeiro ano, vem se trabalhando isso. [...] Mas, eu acho que esse tipo de atividade ela não é puxada desde o primeiro, o primeiro não, mas a partir do segundo, terceiro ano.

A professora P4 já esperava que os alunos não percebessem as três formas geométricas a partir da divisão do quadrado ao meio. "*Não, porque quando eu entrei aqui no* *curso eu também não tinha esse olhar. [...] o entendimento que eu tinha não é o entendimento que eu tenho agora. Então, agora quando eu entrar eu vou começar a puxar isso*" (P4).

A montagem do cubo, a partir dos diferentes contornos de moldes, foi uma atividade surpreendente para as professoras P4 e P9, porque elas esperavam que os alunos não conseguissem conclui-la. Entretanto, todos eles conseguiram montar sem grandes dificuldades. A professora P4 achava que teriam dificuldades,

> **P4:** porque geralmente a gente dá as coisas prontas e aí, não estava pronta, faltava à semirreta, não tinha as divisões ali, não tinha as abas, né? [...] A gente tinha planificações de formas diferentes, tá? Então, associar que as planificações de formas diferentes davam no mesmo sólido, né? Eu achei que fosse mais difícil.

Ao questionarmos o que elas mudariam na sequência de atividades, se a aplicassem novamente, a professora P4 ressaltou que antes de aplicar a atividade III, ela faria algumas atividades prévias, procurando desenvolver um olhar mais refinado do aluno sobre a figura, para que este fosse capaz de perceber que dentro de uma figura podem existir outras figuras.

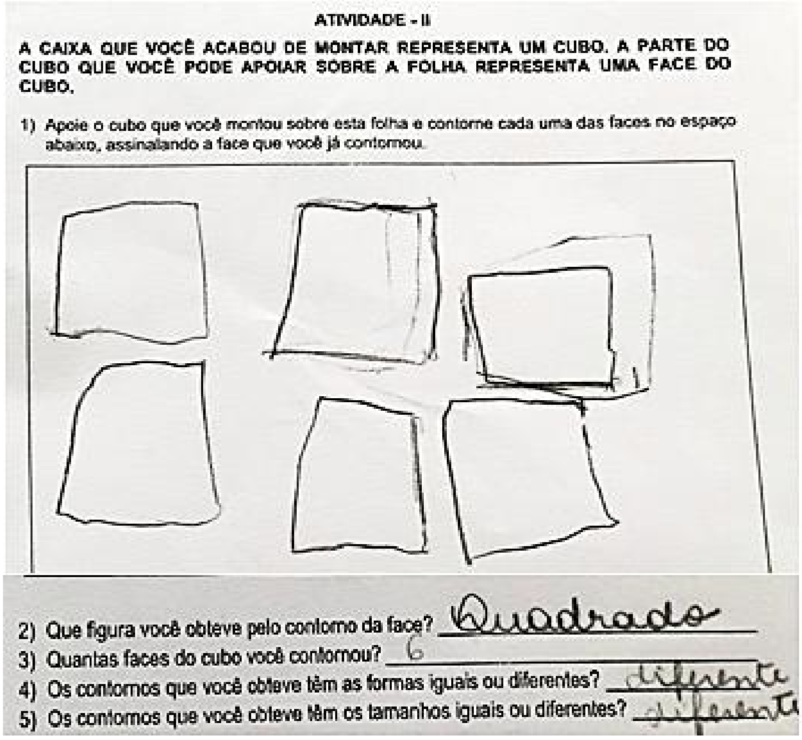
Continuando a conversa com as equipes de professoras, passamos para a segunda equipe, formada pelas professoras P10, P11 e P3. A professora P10 aplicou a sequência de atividades com uma turma de terceiro ano, a professora P11 com duas turmas, uma do primeiro e a outra do segundo ano, e a professora P3 com uma turma de quinto ano.

As professoras P10 e P3 relataram que quando os alunos observaram os sólidos expostos na sala, eles já conseguiam nomeá-los adequadamente. O que já era esperado por elas. Já a professora P11 disse que as crianças, tanto do primeiro quanto do segundo ano, relacionavam a representação dos sólidos com objetos físicos, por exemplo, o cubo a ser nomeado na atividade I, elas o identificaram como sendo dado.

Os alunos do primeiro e do segundo anos da professora P11, quando solicitado que eles contornassem todas as faces do cubo na atividade II, contornaram apenas uma face e responderam que a face do cubo é um quadrado e que o cubo tem 4 faces. No depoimento da professora P11, ela já esperava que eles não fossem contornar todas as faces do cubo e em seu modo de ver, as crianças responderam que o cubo tem quatro faces, "*porque eu acho que na hora que eles colocaram para fazer o contorno aí eles viram lado a lado* (P11)".

Com relação à atividade II, a professora P10 esperava que todos os alunos contornassem as seis faces do cubo, fato que foi confirmado. Ela ressaltou que as crianças utilizaram de diferentes estratégias para não contornar mais de uma vez a mesma face do cubo. Uns pintaram, outros fizeram bolinhas, outros colocaram números. E quando perguntamos se essas estratégias tinham interferido na resposta sobre as formas e tamanhos das faces, ela disse que o que interferiu foi "*a cola, porque enquanto eles estavam montando, perfeito! Quando eles tiveram que passar a cola, amoleceu, e aí foi cola demais cola de menos, colou pra dentro, colou pra fora. Aí, o que é que aconteceu? A forma diferenciou*" (P10). A Figura 76 ilustra a fala da professora.

Figura 76 - Resposta apresentada pelo aluno da professora P10.



ATIVIDADE - II

A CAIXA QUE VOCÊ ACABOU DE MONTAR REPRESENTA UM CUBO. A PARTE DO CUBO QUE VOCÊ PODE APOIAR SOBRE A FOLHA REPRESENTA UMA FACE DO CUBO.

1) Apoie o cubo que você montou sobre esta folha e contorne cada uma das faces no espaço abaixo, assinalando a face que você já contornou.

2) Que figura você obteve pelo contorno da face? Quadrado
3) Quantas faces do cubo você contornou? 6
4) Os contornos que você obteve têm as formas iguais ou diferentes? diferente
5) Os contornos que você obteve têm os tamanhos iguais ou diferentes? diferente

Fonte: Arquivos da autora

A professora P3 esperava que todos os alunos do quinto ano percebessem, na atividade III, a presença das três formas geométricas a partir da divisão do quadrado em duas partes iguais. Contrariando as suas expectativas, todos os alunos perceberam apenas duas formas. A dificuldade que eles tiveram para perceber as três formas, segundo ela se deu "*porque eles estavam muito focados no dividir, né? Dividindo vai formar quantas figuras? [...] Antes eu tinha uma, agora dividindo eu tenho duas*" (P3). A professora P10 disse que os alunos dela também tiveram essa mesma percepção.

Quando perguntamos às professoras o que elas achavam que tinha impedido os alunos de perceberem as três formas, elas disseram que talvez tivesse sido a maneira como foi colocada a pergunta. A professora P10 sugeriu que o enunciado poderia ser substituído por "*que formas você viu aqui? Seria talvez diferente. Que formas você viu? Um quadrado e dois* *retângulos*" (P10). Para essas professoras, no caso de uma reaplicação da atividade, esse enunciado precisaria ser reformulado. Por exemplo: "*que formas geométricas você viu nesta atividade?*". Elas sugeriram um enunciado mais detalhado.

As professoras dessa equipe foram unânimes em dizer que, no entendimento delas, as crianças não conseguiriam resolver o desafio de montar o cubo a partir do contorno das diferentes formas da sua planificação. "*Seria muito difícil porque não tinha a visualização do que fazer passo a passo*" (P10). E para a surpresa delas, todos os alunos conseguiram resolver o desafio, independentemente, do nível de ensino. Tanto as crianças do primeiro quanto as crianças do segundo, terceiro e quinto anos, resolveram a questão sem nenhuma dificuldade. As professoras ressaltaram que até elas estavam em dúvida se todas aquelas planificações diferentes formariam realmente um cubo.

Os alunos utilizaram diferentes estratégias para resolver o desafio,

> **P10:** uns traçaram. Profe eu posso fazer pontilhadinho? Porque eu sei onde tem que dobrar. Aí ele... pode, pode dobrar. Outros... perceberam que pelas bases, eles usaram as bases como princípio das dobras, então eles tinham que dobrar essa base, deu uma face, eu viro dá uma face, eles usaram e dobraram. Teve um mesmo que dobrou e fez assim: Oh profe, quando abre a mão, puff, ele montava. [...] Então ele percebeu, foi bem visual as retas pra eles, mas o que? Pra eles foi tranquilo depois de remontar o cubo. Então eles montaram, lembraram que tinha sido um dado do primeiro ano, reconstruíram esse dado com um pouco de dificuldade, porque alguns eu tive que explicar que aquele pontilhado era onde se dobrava, não era onde cortava. [...] Depois que eles fizeram com dificuldade o primeiro, o desafio foi mais tranquilo, porque já foi uma prática seguinte, não foi uma prática inicial. Se a gente tivesse começado, talvez pelo desafio e depois montado o cubo, talvez teria outras... .

Segundo essa equipe de professoras, o que mais contribuiu para facilitar a resolução do desafio foi a construção do cubo, etapas contidas nas atividades I e II. Outro fator que interferiu na resolução do desafio foi a familiaridade que as crianças já tinham com o objeto geométrico cubo desde o primeiro ano.

Ao indagarmos as professoras, se essa familiaridade das crianças com o cubo permitiu que elas reconhecessem algumas propriedades desse objeto, elas responderam que sim. Porém, apesar de conhecerem, elas não nomearam adequadamente com a linguagem geométrica. Segundo as professoras, a linguagem geométrica formal é importante "*pra eles conhecerem fidedigno a geometria, mas é... eles desconhecerem a fala não é não saber geometria, é diferente, né? Eles sabem, então uns nomearam dado, enquanto outros cubo, mas eram ambos o mesmo objeto*" (P10).

Dando sequência a conversa com as equipes, chamamos as professoras P1 e P7. Elas aplicaram a sequência de atividades juntas numa turma do quinto, ano composta por dez alunos. Na percepção dessas professoras, a turma tinha um bom entendimento sobre geometria, porque muitos alunos já sabiam argumentar sobre as diferenças entre várias formas geométricas. As professoras desenvolveram toda a sequência de atividades numa manhã e destacaram que faltou tempo para a conclusão da produção do texto coletivo.

As professoras P1 e P7 esperavam que os alunos tivessem facilidade para resolver a atividade I, fato que realmente foi confirmado pela análise das respostas dos alunos. Segundo elas, apenas um aluno respondeu que se tratava de um quadrado. Sendo assim, precisaram fazer uma intervenção com esse aluno.

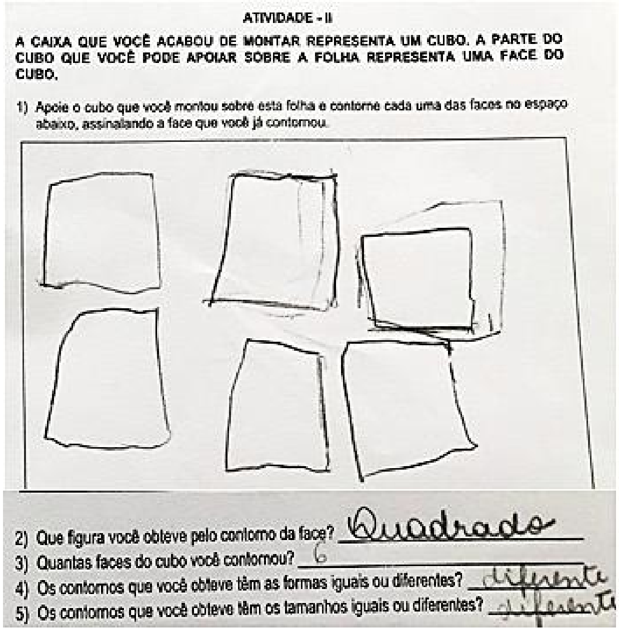
> **P1:** Questionei o que uma figura tinha que ter para ser um quadrado e ele respondeu que tinha que ter 6 faces. Desenhei um triângulo, perguntei o que era e ele identificou a figura. Perguntei como ele sabia que era um triângulo e ele respondeu: pelo formato e número de lados. Depois, pedi para que ele desenhasse um quadrado. Perguntei como ele sabia que aquela figura era um quadrado e ele respondeu: porque tem quatro lados e pelo formato. E foi logo percebendo a diferença entre o quadrado e o cubo. Acabou dizendo que: o cubo tinha seis faces e era meio cheio e que o quadrado era só um quadrado.

Quando questionamos a professora P1, sobre como o programa de formação pode ter contribuído, ou não, na maneira que ela interveio com esse aluno, ela destacou que na formação aprendeu a ser questionadora "*fazer ele pensar e fazer ele olhar pro quadrado e pensar o que é que um quadrado tem que ter pra ser um quadrado, o que é que um cubo precisa pra ser um cubo. Eu acho que ajudou bastante, sim... [...] Fazer nós professores ter condições de intervir com eles, né?* (P1).

Na atividade II, as professoras tinham expectativa que os alunos resolveriam com facilidade e, segundo elas, isso realmente aconteceu. Entretanto, elas ressaltaram que alguns, embora tenham percebido que as formas obtidas pelo contorno eram iguais, responderam que os formatos tinham tamanhos diferentes, porque na hora de contornar o cubo, ele sofreu deformações, o que acabou interferindo nessas respostas. Para elas, as crianças ficaram presas às imagens da figura e esqueceram das suas propriedades.

Ainda com relação a essa atividade, as professoras relataram que um dos alunos foi resistente quanto à planificação do cubo pelo contorno das faces. Ele não conseguiu passar o cubo da terceira para a segunda dimensão.

Figura 77 - Resposta apresentada pelo aluno das professoras P1 e P7.



Fonte: Arquivos da autora

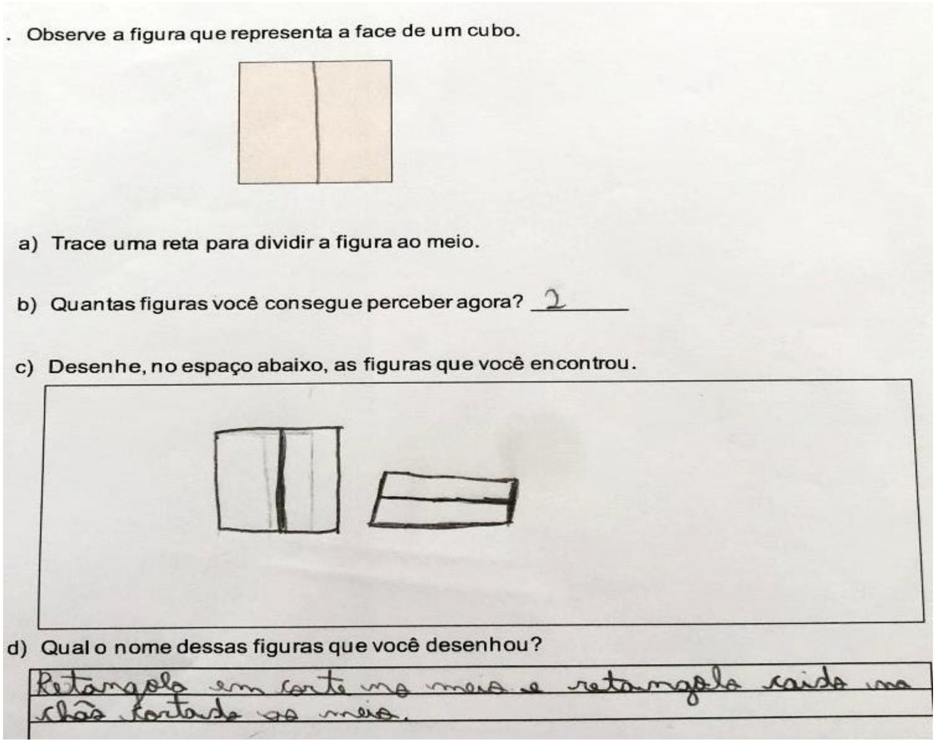
De acordo com as professoras, as duas sentaram-se com ele e tentaram explicar de todo jeito, mas ele não conseguiu descontruir a figura. Ao perguntarmos o motivo da dificuldade desse aluno para resolver a questão, a professora P7 disse que "*ele ficou amarrado ao que a gente vem aprendendo, desde pequenininhos... já. [...] Tipo quadrado é quadrado, triângulo é triângulo, não se tem essa visão assim, que a gente tá aprendendo aqui de ver outras possibilidades*". Na visão delas, ele ficou preso ao objeto tridimensional, tanto é que respondeu que o contorno da face era cubo.

As professoras, P1 e P7, esperavam que os alunos tivessem dificuldades para resolver a atividade III, o que, segundo as suas análises, foi demonstrado. Porque nenhum deles conseguiu perceber as três formas geométricas a partir da divisão do quadrado. Além do mais, apenas um aluno percebeu que o quadrado poderia ser dividido em dois triângulos, os demais o dividiram em dois retângulos.

> **P7:** Assim como nós também não, se colocasse pra gente fazer, a gente não iria conseguir isso, porque, justamente aquela questão, a gente tá preso ali no que a gente tá vendo. Agora com a aula do curso, e tal, a gente sabe que aqui, no caso, tem dois triângulos dentro do quadrado, a gente já tem essa visão, mas antes não.

Segundo a professora P1, o aluno que chegou mais perto de ver outras formas foi o que apresentou a seguinte resposta:

Figura 78 - Resposta apresentada pelo aluno das professoras P1 e P7.



Fonte: Arquivos da autora

Esse aluno, conforme as professoras relataram, foi o mesmo que não conseguiu desconstruir dimensionalmente o cubo. Quando questionamos as professoras sobre o que havia de diferente nessas duas maneiras de ver do aluno, elas ficaram confusas, pois não pensaram na possibilidade de que o quadrado dividido na horizontal ou na vertical não implicaria na mudança das formas obtidas. Mas, isso elas só conseguiram perceber mediante a nossa intervenção.

Na percepção das professoras, essa atividade contribuiu para que os alunos ampliassem o olhar sobre a figura. Conforme o relato delas, quando retomaram a atividade no grande grupo, as crianças começaram a perceber que o quadrado continua ali, mesmo que ele tenha sido repartido em retângulos ou triângulos. De acordo com a professora P1,

> **P1:** Com essa atividade pude perceber que estávamos certas quando propomos a atividade, pois acreditávamos que as crianças não iriam perceber a presença de três figuras, pois esse é o olhar que as pessoas costumam ter e nós precisamos desenvolver atividades para auxiliar o aluno a desenvolver esse olhar.

Na atividade em que os alunos precisaram montar um cubo a partir dos diferentes contornos da sua planificação, as professoras P1 e P7 esperavam que eles encontrassem uma certa dificuldade. Contudo, elas foram surpreendidas pela rapidez e facilidade com que eles concluíram a atividade. Conforme as professoras relataram, na medida em que elas foram entregando os moldes, os alunos já foram percebendo que apesar de serem diferentes, formariam um mesmo sólido. Os alunos utilizaram a régua para adicionar os traços no molde da figura e conseguiram perceber, facilmente, que precisaria ter seis quadrados para formar um cubo.

Quando indagamos as professoras sobre o que elas mudariam nessa sequência de atividades, caso fossem desenvolvê-la novamente, elas disseram que diversificariam as formas geométricas. Não ficariam presas somente as propriedades do cubo, porque assim as crianças confrontariam propriedades de objetos diferentes.

Na opinião das professoras, o desenvolvimento dessa sequência de atividades favoreceu a aprendizagem da geometria.

> **P1:** Eles puderam visualizar, vivenciar o cubo aberto, o cubo fechado. Que ali, com várias formas, dá pra se formar um cubo, não precisa ser aquela planificação padrão, como ele recebeu lá na primeira. Que há outras formas de dobrar e de montar o cubo novamente. Acho que tudo isso é um aprendizado, né?

Dando continuidade a conversa com as equipes, concluímos os diálogos com a equipe de professoras, constituída por P2, P5 e P6. A professora P2 aplicou a sequência de atividades com uma turma do quarto ano, composta por treze alunos, a P5 com onze alunos do quarto ano e a P6 com doze alunos do quinto ano.

Essa equipe de professoras já esperava a reação curiosa dos alunos, quando os sólidos geométricos fossem expostos na sala de aula. Quando as questionamos sobre as expectativas delas a respeito do desenvolvimento da atividade I, a professora P2 relatou que não esperava que as crianças conseguissem relacionar a planificação do cubo com a sua representação tridimensional. Para surpresa dela, elas conseguiram reconhecer o cubo nas duas formas (2D e 3D) e ainda faziam referência as essas dimensões.

A professora P5 esperava que os alunos do quarto ano fossem ter dificuldade para desenvolver a atividade I, mas não num grau tão acentuado. Segundo ela, somente uma aluna conseguiu nomear a figura do cubo. Os demais alunos nem sabiam reconhecer os outros sólidos. Então, para que eles conseguissem responder as questões da atividade I, ela precisou fazer uma legenda, como mostra a Figura 79.

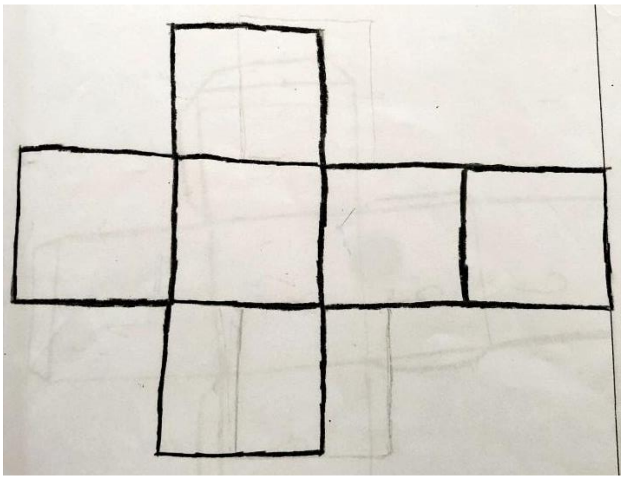
Figura 79 - Dinâmica de apresentação dos sólidos utilizada pela professora P5.

Fonte: Arquivos da autora

A partir dessa legenda os alunos conseguiram associar a representação do cubo planificado com a sua representação espacial (colocando como resposta, ao invés do nome o número 2). Apenas um aluno relacionou com o paralelepípedo.

As professoras P2 e P6 esperavam que na atividade II, os alunos fizessem a planificação do cubo da maneira como mostra a figura, uma vez que haviam recebido essa planificação do cubo na atividade I.

Figura 80 - Resposta apresentada pelo aluno da professora P2.



Fonte: Arquivos da autora

Para a professora P2, as crianças que fizeram a planificação do cubo pelo contorno das faces estavam erradas. Mas, ao conversar com as outras duas professoras da equipe, percebeu que aquela era uma outra maneira de planificar o cubo. Ao indagarmos essa professora se ela achava que essa atividade tinha contribuído para que as crianças percebessem algumas propriedades do cubo, ela respondeu dizendo que "*pensa que sim,* *porque quando ele fala que tem os lados iguais é uma propriedade, não é? Agora não sei se na cabecinha deles isso é uma propriedade*" (P2).

A professora P6 foi surpreendida por uma aluna, nessa atividade, ao dizer que um cubo era 3D. "(Professora) Daí eu disse: 3D por quê? (Aluna) Porque daí tu vê todos os lados e quando tá o quadrado no papel é 2D porque tu só vê o quadrado". A professora argumentou que talvez essa fala da aluna pudesse estar relacionada com a aula de geografia que ela havia ministrado, pois trabalhou a forma plana e espacial do mapa *mundi*.

Com relação à atividade III, as professoras foram unânimes em dizer que já esperavam que os alunos tivessem dificuldades para perceberem as três formas geométricas a partir da divisão do quadrado. Do total de alunos das três professoras, apenas dois conseguiram enxergar as três figuras, sendo um do quarto ano da professora P5 e um do quinto ano da professora P6. As professoras ficaram surpresas com a dificuldade deles em identificar dois triângulos dentro do quadrado, pois dos seus 36 alunos, apenas seis tiveram essa percepção. A professora P5 relatou que durante a realização da atividade III ela entregou réguas geométricas "*pra ver que tipo de triângulos eles iam colocar na representação. E nenhum deles se deu conta de que eram triângulos retângulos, né? Eles pegaram qualquer triângulo que tinha lá e colocaram*" (P5).

Quando indagamos a equipe sobre as possíveis causas que justificassem essas complexidades, a professora P2 argumentou que poderia ter relação com o desconstruir. "*Porque eu olho ali e eu não consigo ver o retângulo, dificuldade minha [...]. Eu só consigo ver o quadrado e os dois triângulos*" (P2).

Essas professoras também levantaram a hipótese de que o enunciado da questão poderia ter impedido os alunos de perceberem todas as formas geométricas, porque este pedia que dividissem a figura ao meio, e isso pode ter induzido a pensar que resultaria em duas partes. Houve muita discussão a respeito dos entraves que o enunciado possa ter ocasionado, mas elas não chegaram a propor um novo que pudesse substituir o existente.

No relato das professoras, sobre a montagem do cubo a partir da planificação do seu contorno, foi perceptível a surpresa delas frente à facilidade com que os alunos resolveram o problema. Conforme a professora P5 relatou, ela perguntou para os alunos o que eles tinham achado mais fácil e mais difícil na atividade, e eles disseram "*que foi difícil recortar, porque na hora de dobrar é muito fácil que a gente já sabe que o cubo é formado por seis quadrados. Então, a gente só dobra aqui e ele tá pronto*" (P5).

A professora P6 disse que os alunos dela ficaram tristes "porque só montaram o cubo. Eles queriam montar as outras formas. Ratificando essa fala, a professora P2 destacou que "*Eles se cansaram e nós achando uhuuu, né? Eles, de novo? Tipo, tá nós já montamos na primeira atividade, foi montado. Vamos montar cubo de novo agora?*" (P2).

Ao perguntarmos para as professoras o que elas mudariam na sequência de atividades, caso fosse aplicada novamente, elas ressaltaram a importância de rever o enunciado da atividade III.

Sobre a produção do texto coletivo com os alunos, a professora P6 não conseguiu fazer essa atividade. As professoras P2 e P5 perceberam que os alunos, por intermédio da construção do texto coletivo, já conseguiram nomear e diferenciar o cubo e o quadrado, bem como as propriedades que os distinguem.

Assim, encerramos o diálogo com todas as equipes. Voltamos ao grande grupo e expomos os motivos da dinâmica de trabalho da noite, ressaltando que foi um importante momento de reflexão, que nos permitiu debruçar um olhar criterioso sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem da geometria. Finalizando, realizamos os encaminhamentos para o último encontro de formação.

4.1.9 O nono encontro de formação: fim ou princípio de uma longa jornada?

Iniciamos os estudos da noite com a recepção das professoras, com a leitura e, em seguida, aprovação do diário de bordo do encontro anterior. Nessa última etapa do programa de formação, realizamos a socialização das experiências das professoras, referente à aplicação da sequência de atividades na sala de aula, procurando estabelecer aproximações entre as dificuldades enfrentadas pelos alunos, no desenvolvimento das atividades, e o referencial teórico contemplado nos encontros de estudo.

De maneira geral, o relato das professoras sobre as dificuldades encontradas por elas e pelos alunos, e sobre a performance dos alunos no desenvolvimento das atividades, apresentou convergências. Todas ressaltaram a falta de coordenação visual motora das crianças para manipular a tesoura, a cola e a régua. Esse fato acabou interferindo na atividade que solicitava o contorno das faces do cubo.

De acordo com as professoras, a maioria dos alunos relacionou a planificação do cubo com a sua representação espacial, embora alguns não o tenham nomeado corretamente. Nesse contexto, a professora P10 ressaltou a importância de avançar o estudo da geometria com as crianças, porque para ela

> **P10:** o sucesso maior, assim deles, é a continuidade desse trabalho. Pra gente não parar só com o cubo, né? Então...essa semana já iniciei com o outro grupo também as formas geométricas, eles não vão escapar mais. Comprei 500 canudos biodegradáveis, pra pode cortar canudos, pra poder montar com massinha. E...a gente vai explorar mais os....

Nesse mesmo entendimento, a professora P5 relatou que está dando continuidade ao trabalho iniciado pela aplicação da sequência de atividades.

> **P5:** Eu levei aquela atividade da pirâmide, a gente montou a pirâmide com os palitinhos de pirulito, fez a planificação da pirâmide. Daí assim, depois que eles montaram tudo eu fui pro quadro e a gente foi colocando aquilo que a gente tinha conversado e tal. E daí eu entrei com alguns conceitos de faces, arestas, tal... e daí quando a gente construiu a pirâmide, aí eles conseguiram entender o que que é cada um dos elementos ali.

Na percepção das professoras, o não reconhecimento das três formas geométricas a partir da divisão do quadrado pelos alunos, foi uma situação emblemática. Pelo depoimento da professora P2, parece que essa dificuldade não estava restrita aos alunos, "*eu não vi três formas e daí quando o pessoal começou a falar aqui, eu olhei... meu Deus! Como é que eu vou ensinar, se eu não sei? E a gente leva uns sustos assim, porque a gente se superestima e subestima os alunos. E... de repente é o contrário, de descer o pedestal*" (P2).

Refletindo ainda sobre essa questão, as professoras levantaram a hipótese de que o insucesso dos alunos pudesse estar relacionado ao enunciado da questão. "*Talvez o enunciado levasse as crianças a só fazer aquela divisão, porque é o que tá dentro do quadrado. [...] Então, quando eu divido o quadrado eu vou encontrar dois triângulos. Talvez a gente errou no enunciado, né? Por isso que eles não enxergaram*" (P5).

Sobre a produção textual, o grupo percebeu que os alunos têm muita dificuldade e resistência para sistematizar as ideias utilizando a forma escrita, algo que precisa ser mais explorado. Segundo as professoras, as crianças precisam desenvolver a escrita para que possam registrar o seu raciocínio como uma forma de aprendizado.

Todas as professoras ficaram surpresas com a facilidade que os alunos apresentaram para montar o cubo a partir do contorno da sua planificação, independentemente do ano escolar. Do primeiro ao quinto ano, todos conseguiram montar.

> **P11:** E eu fiquei feliz, porque como começou isso no primeiro ano, então só vai confirmando que não é a série. [...] Isso é muito legal, porque confirma pra gente como profissional, né? Começo no primeiro sim e vou embora, pelo menos ele já tem aquele conhecimento, né? Por mais que eles associassem a dado, coisa e tal, mas é um cubo, né?

Elas observaram que os alunos que apresentavam mais dificuldades no processo de aprendizagem, foram os que mais se destacaram na resolução do desafio. Conforme a professora P2, "*é uma coisa pra se refletir assim... na nossa prática*".

Após a socialização das experiências das professoras sobre a aplicação da sequência de atividades, passamos para uma análise mais detalhada das respostas apresentadas pelos alunos, no desenvolvimento das atividades, subsidiada pelos referenciais teóricos contemplados durante o programa de formação.

Primeiramente, fizemos uma retomada dos tipos de apreensões, das funções discursivas, dos olhares e da desconstrução dimensional das formas, e procuramos verificar como as professoras fundamentariam suas análises.

Na análise da atividade I, que solicitava a identificação da forma tridimensional do cubo a partir da sua planificação, por intermédio da nossa mediação, as professoras reconheceram a presença da função discursiva referencial e a apofântica. A referencial porque precisaram identificar o sólido e a apofântica no momento em que eles justificaram as suas respostas. A professora P7 destacou que a justificativa dos alunos nessa atividade era "*porque se eu montar vai ser um cubo, né? Mas assim, não sabe as propriedades [...] ele sabe que vai ter um cubo ali, mas como? Eles não têm essa visão*" (P7). Ou seja, na visão das professoras, os alunos não entraram na maneira de ver a figura pela apreensão discursiva.

As professoras levantaram a hipótese de que a dificuldade em nomear corretamente a representação espacial do cubo pode estar relacionada ao primeiro olhar das faces quadradas do cubo, por isso eles ficaram inseguros na denominação.

Frente aos problemas enfrentados pelos alunos na manipulação da régua, da tesoura, do lápis e da cola, sentimos a necessidade de retomar, com as professoras, a ideia da semiosfera do olhar. Enfatizamos a importância de atividades que desenvolvam a coordenação visual motora em sinergia com a discriminação visual para a aprendizagem da geometria. Ao indagarmos as professoras se no desenvolvimento da atividade I houve necessidade da coordenação visual motora, a professora P11 respondeu que "*sim, com certeza [...] o olhar dele ali pra acompanhar a linha com atenção que não podia errar*".

Problematizamos um pouco mais, indagando de que forma essa coordenação visual motora pode contribuir para a discriminação visual. A professora P10 relatou que ela está dando continuidade ao trabalho que iniciamos com a formação, então trabalhou a planificação do prisma e os alunos perceberam que "*o prisma é mais chato de fazer, porque ele tem mais detalhes pra eu ter que olhar. É...o cubo era mais fácil de dobrar, o prisma é um pouquinho mais difícil, porque ele tem uma base triangular, ele não dobra ele ao meio, tem que ser só* *um ladinho pra poder encaixar. Talvez é esse olhar já diferente*" (P10). Essa professora percebeu que quando os alunos foram montar o prisma de base triangular, eles já estavam mais familiarizados com o manuseio da tesoura, régua, etc. "*Vai melhorando com o tempo o corte, a atenção e a cola [...] a prática ela vai melhorando com o tempo assim*" (P10).

Desafiamos as professoras a identificarem atividades que contemplaram a semiosfera do olhar, ou seja, atividades que puderam promover o desenvolvimento da coordenação visual motora em sinergia com a discriminação visual e as apreensões, durante o programa de formação. A professora P10 destacou que o desafio foi uma das atividades que considerou a semiosfera do olhar,

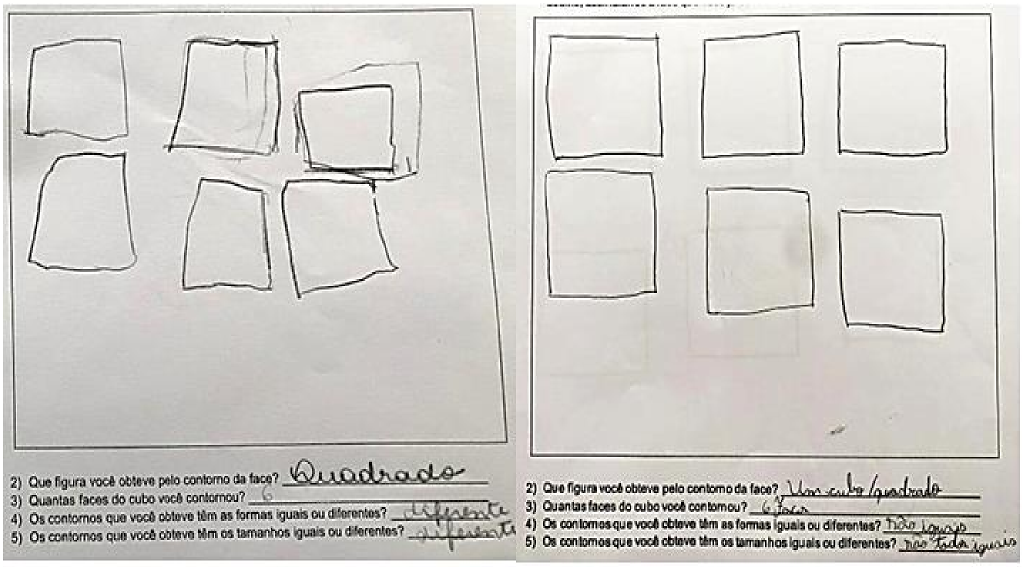
> **P10:** porque eles começaram a perceber as formas mesmo sem ter o detalhamento do cubo, né? Porque primeiro tinha ali a dobrinha, o pontilhado, no caso dos meus tinham o pontilhado onde tinha que dobrar, a linha onde tinha que cortar. Tinha um detalhamento. Só que os desafios não. Eles tinham a forma, né? Sem o interior claro, assim... E eles conseguiram perceber a forma dentro da forma, né? O quadrado, as faces, o cubo e tal. Eles perceberam.

Com a ajuda das nossas indagações, as professoras conseguiram perceber que a coordenação visual motora esteve presente em vários momentos e um deles foi quando os alunos precisaram cortar, pois exigia a coordenação do olhar com os movimentos das mãos no manuseio da tesoura. Outro momento foi quando eles precisaram do auxílio da régua. "*Inclusive uns fizeram com a régua o pontilhado pingadinho onde tinha que dobrar, porque na outra atividade tinha o pontilhado. [...] Talvez pra que o meu olho se acomode também que aqui é o lugar de dobrar, não aqui*" (P10).

Analisando as respostas que os alunos apresentaram, considerando as apreensões, para a atividade II, por intermédio da nossa mediação reflexiva, as professoras identificaram a apreensão operatória, porque quando os alunos fizeram o contorno das faces, perceberam propriedades diferentes do cubo. A apreensão perceptiva foi percebida, pelas professoras, quando os alunos, só no olhar, perceberam que, pelos contornos, eram quadrados.

Foi interessante perceber o paralelo que as professoras fizeram na análise das respostas que dois alunos apresentaram para a atividade II.

Figura 81 - Resposta apresentada por dois alunos a atividade II**.**



Fonte: Arquivos da autora

De acordo com as professoras, o olhar do aluno da esquerda ficou preso às formas dos contornos das faces que ele havia desenhado, que no caso, tinham formatos e tamanhos diferentes. Ao passo que, o aluno da direita, embora não tenha desenhado perfeitamente os seis quadrados das faces e as nomeado adequadamente, conseguiu desprender o olhar das formas que ele havia desenhado, percebendo que as características das faces do cubo estão além dos registros feitos por ele, ou seja, são quadrados de tamanhos e formas iguais.

A apreensão sequencial também foi percebida pelas professoras no desenvolvimento da atividade, pois pela utilização da representação física do cubo, para contornar as faces, os alunos foram capazes de enxergar que estas eram iguais e tinham o formato quadrado. A professora P6 destacou que vários alunos dela disseram: *"pra que marcar? São todos os lados iguais. Então, eles conseguiram ver que não precisava tá marcando*". Mas, as professoras também levantaram a hipótese de que, o uso do contorno da representação física do cubo, a confecção com papel inadequado e cola, pode ter interferido nas respostas daqueles alunos que disseram que as faces tinham formas e tamanhos diferentes.

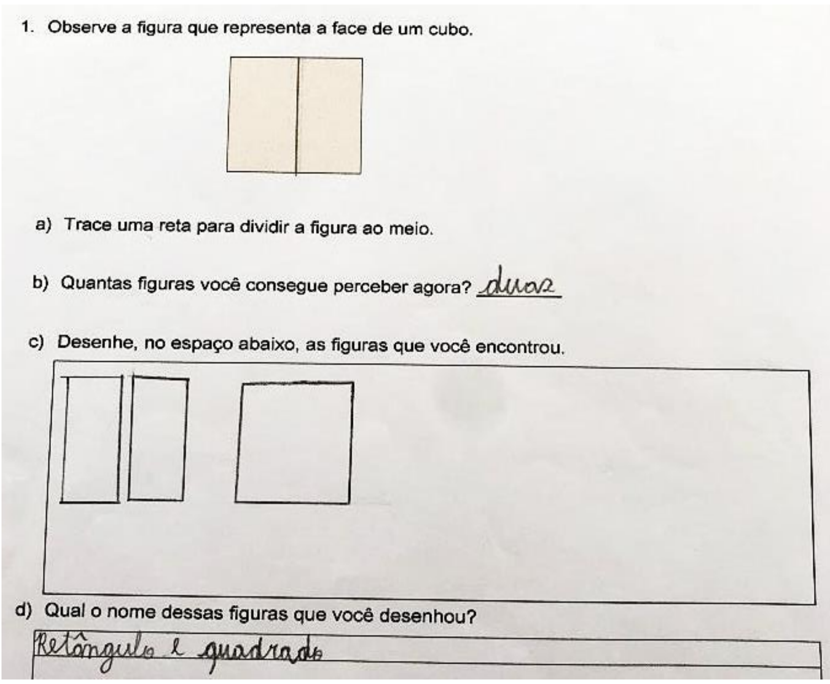
Na atividade II, quando questionamos sobre as funções discursivas requeridas para a resolução da atividade, elas observaram a presença da função referencial e da função apofântica. A função discursiva referencial foi exigida quando os alunos precisaram nomear o contorno da face do cubo e a apofântica, quando eles descreveram o objeto cubo implicitamente, percebendo que se tratava de um sólido geométrico composto por seis faces quadradas de mesmo tamanho.

Refletindo sobre a desconstrução dimensional das formas, as professoras perceberam que essa operação cognitiva esteve presente na resolução da atividade II. Segundo elas, a representação física do cubo passou da dimensão 3D para 2D quando os alunos contornaram as faces do sólido. "*Eles sentiram que houve uma transformação que passou de um cubo para um quadrado*" (P4). E fica bem claro "*quando eles não precisaram usar o cubo para desenhar. Eles já observaram que o cubo é feito de vários quadrados*" (P10).

As professoras observaram que houve a passagem da forma 2D para a forma 1D no momento em que os alunos precisaram contornar os quadrados. Nesse contexto, a professora P10 salientou, quanto à questão de traçar a reta, que um de seus alunos "*não queria usar o seu cubo, porque o seu cubo estava torto. Ele sabia que tinha que desenhar reto*" (P10), sendo assim, ele precisou utilizar a régua para que o traçado ficasse reto. Segundo essa professora, por meio da desconstrução dimensional da forma, os alunos conseguiram perceber características que são específicas ao cubo.

Refletindo sobre as respostas apresentadas pelos alunos para a atividade III, nos deparamos com muitas hipóteses que poderiam ter os levado a resolverem a questão daquela maneira. A resposta desse aluno (Figura 83) causou desconforto tanto para nós quanto para o grupo de professoras.

Figura 82 - Resposta do aluno para a atividade III**.**

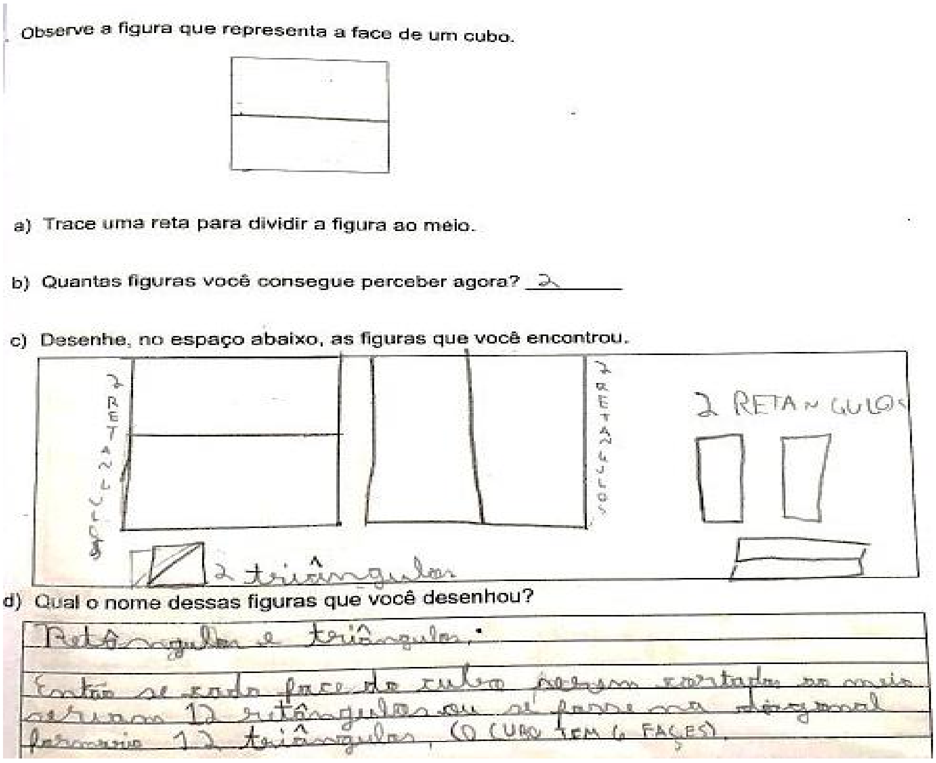


Fonte: Arquivos da autora

Não compreendemos como ele poderia ter respondido que conseguia perceber apenas duas figuras e no momento de desenhá-las fez dois retângulos e um quadrado. Na interpretação da professora P10 "*talvez ele estaria identificando dois retângulos é um só. Então um retângulo e um quadrado são dois*". Por isso, na perspectiva do aluno são apenas duas figuras.

As professoras verificaram que muitos alunos não reconheciam que o quadrado dividido ao meio na horizontal ou na vertical formavam os mesmos retângulos. Segundo elas, os alunos não percebiam o retângulo rotacionado como sendo o mesmo objeto, como ilustra a figura a seguir.

Figura 83 - Resposta do aluno para a atividade III.



Fonte: Arquivos da autora

A resposta apresentada no item *d* deixou as professoras surpresas com a capacidade de abstração desse aluno, pois até elas levaram um certo tempo para entender que ele havia imaginado a divisão de todas as faces do cubo.

Por intermédio das nossas indagações, as professoras perceberam que essa atividade exigiu a apreensão perceptiva, que segundo elas, está sempre presente, pois direciona o olhar sobre o contorno da forma. De acordo com as professoras, a apreensão operatória também foi requisitada, pois os alunos precisaram dividir e modificar a figura para resolver o problema.

Entre as funções discursivas da língua, elas indicaram apenas a referencial, porque a atividade solicitava a identificação da figura obtida pela divisão do quadrado.

Quando questionamos sobre a possibilidade de a desconstrução dimensional da forma estar presente na resolução dessa atividade, elas rapidamente disseram que sim, justificando que no momento em que o aluno percebeu "*que dentro do quadrado tinha dois triângulos, dois retângulos. Ele descontruiu o quadrado*" (P10), por meio do traçado da reta. Sistematizando essa ideia, destacamos que houve a passagem da dimensão 2D (quadrado) para a forma 1D (traçado de reta, formando um agrupamento de retas que formaram outras figuras).

No debate sobre o desenvolvimento dos olhares, as professoras argumentaram que os alunos, de certa forma, conseguiram fazer a passagem do olhar icônico ao não icônico. "*Porque todos eles, no mínimo, fizeram o retângulo. Então teve uma transformação*" (P2). Para elas, os alunos conseguiram alcançar o olhar inventor, visto que "*ele adicionou traços e ele teve a figura modificada e conseguiu solucionar a questão*" (P1). Contudo, a apreensão perceptiva pode ter os impedido de perceberem as três figuras a partir da divisão do quadrado.

A nossa expectativa como formadora e professoras, referente à resolução do desafio pelos alunos (montagem do cubo a partir do contorno das diferentes planificações do cubo), era de que eles não conseguiriam resolvê-lo. No entendimento de todos os envolvidos no planejamento das atividades, essa seria realmente uma questão desafiante para os alunos. Algumas professoras relataram que tiveram dificuldades para imaginar como fariam as divisões adequadas da planificação do cubo para que pudessem encontrar a sua representação espacial.

Entretanto, para o espanto de todos, 100% dos alunos, do primeiro ao quinto ano, conseguiram resolver o desafio com muita facilidade. A professora P11 destacou que "s*erá que foi por causa do passo a passo? Eu fiquei me perguntando depois, porque a gente deu uma continuidade a um trabalho, né? [...] Porque a primeira ideia da imagem é uma cruz. Tá, mas e agora? Que figura vai formar? Interessante, né*?".

De acordo com as professoras, as atividades introdutórias contribuíram para justificar a facilidade que os alunos tiveram para solucionar o desafio, porque em cada uma das atividades houve uma intencionalidade, que procurou direcionar o olhar deles a perceberem propriedades do objeto geométrico. "*No desenvolvimento dessas atividades eles se aprofundaram um pouco mais, né? Eles viram que vários quadrados, seis quadrados formam um cubo, né? Acho que deu uma aprofundada nisso aí*" (P3).

Quando refletimos sobre como essas atividades poderiam ter contribuído para a aprendizagem da geometria, as professoras destacaram que as crianças, graças ao desenvolvimento das atividades, foram tomando consciência das propriedades geométricas das figuras que eram exploradas ao longo da resolução das atividades, porque em momento algum as professoras explicitaram as propriedades das figuras. Desse modo, os alunos foram construindo os seus próprios conceitos pela resolução das atividades.

Isso porque "todas as atividades eram muito legais. Então, despertou neles a vontade de tá atento as informações que viriam depois, né? Acho que isso é bem legal, assim... da gente sempre lembrar disso, assim..." (P5). Complementando esse posicionamento, a professora P1 disse que "saiu bastante daquela questão do livro didático que a gente sempre vê, dos quantos lados tem essa figura, quantas arestas, quantos vértices. Fugiu bastante daquilo que o quinto ano, por exemplo, já deve tá por aqui de ver (gesto)" (P1).

Na avaliação das professoras, caso essa sequência de atividades fosse desenvolvida novamente, algumas mudanças precisariam acontecer.

> **P1:** Eu levaria outra figura que não o cubo, pra ver, [...] se foi realmente a sequência de atividades que levou eles tão automaticamente a montar o cubo, ou o quê? Eu levaria outra figura ou levaria o cubo como desafio, mas as outras atividades sem ser o cubo, né? Por exemplo, a primeira a gente começou com o cubo e o desafio foi o cubo também. Então, ou trocar o desafio ou trocar a figura da primeira.

Todas as professoras enfatizaram que na atividade III, necessariamente, o enunciado deveria ser modificado. Houve muita reflexão em torno dessa questão. Na perspectiva das professoras, a pergunta *b*, dessa atividade: "quantas figuras você consegue perceber agora?", pode ter levado os alunos a pensarem que, se inicialmente eles tinham um quadrado, ao dividirem a figura, obviamente eles perceberiam *agora* duas figuras. As expressões: "quantas e agora", podem ter sido as causadoras de levarem 100% dos alunos a responderem duas figuras, nessa questão. A sugestão da professora P6, de uma possível modificação para esse enunciado, foi "*quantas figuras diferentes você consegue perceber agora*?". Contudo, o grupo achou melhor tirar a expressão *agora*, porque o *agora* dá a sensação de algo novo. Assim, a figura do quadrado era antes e não agora, logo ele não entra na contagem.

As professoras não perceberam problemas no enunciado *a* da atividade III, pois, segundo elas, este teve a intenção de fazer com que os alunos percebessem outras formas geométricas a partir da divisão do quadrado. E isso eles conseguiram. "*Eu penso que traçar a reta abriu possibilidades. Tanto é que teve traçado que surgiu o triângulo e teve traçado que* *surgiu retângulo. O problema não é o traçado da reta, é o depois ali, a segunda questão*" (P2).

Como o problema estava centrado no item *b*, após muito debate, as professoras sugeriram que antes de apresentar essa questão, seria necessário propor uma atividade que pudesse introduzir o tipo de olhar exigido para solucionar o problema. Talvez uma atividade similar àquela que havia sido desenvolvida com elas durante o programa de formação, na qual foi perguntado quantos quadrados havia num quadrado dividido em quatro quadrados. Assim, a partir de uma figura já dividida, talvez o olhar deles pudesse ser direcionado a enxergar outras figuras, além daquelas percebidas num primeiro golpe de vista.

Depois de analisar, conceitualmente, o desenvolvimento dos alunos nas atividades, retomamos a dinâmica de abertura do programa de formação (Árvore dos Sapatos) para avaliar se as expectativas iniciais das professoras haviam sido atendidas. Recolocamos na parede o painel com a Árvore dos Sapatos, confeccionado no primeiro encontro, e perguntamos às professoras: onde o seu sapato chegou ao final dessa formação? Foi gratificante perceber, pelo depoimento delas, a dimensão alcançada pelo programa de formação.

Pelas respostas obtidas no primeiro encontro, observamos que as professoras estavam buscando aperfeiçoar os seus conhecimentos matemáticos, principalmente no campo da geometria, para subsidiar a sua prática pedagógica.

Considerando as declarações feitas por elas nesse último encontro de formação, percebemos que para além de todas elas terem suas expectativas alcançadas e seus conhecimentos em geometria ampliados, parece que também desenvolveram um novo olhar sobre a aprendizagem da geometria. Vejamos alguns depoimentos:

> **P11:** O meu sapato chegou ao final dessa formação com novos olhares pro meu aluno, né? Eu sempre estou tentando olhar diferente, mas o meu sapato agora vai mais calmo, sabe? [...] Jamais ter um prejulgamento, né? [...] Por exemplo, pensar que um aluno do primeiro ano não vai dar conta.

> **P10:** Chegou longe. Não, é... Foi muito diferente do que eu estava talvez esperando, porque a gente acostuma a estudar, né? A aprender, só que foi um jeito de aprender diferente, sabe? Te colocou um desafio e é o que a gente tá provocando isso nas crianças, nada pronto, sabe? Não veio um conteúdo pronto. Claro, teve texto pra estudar? Claro que teve. Mas, a gente se colocou no lugar de aprendiz, sabe? E aprendeu mesmo efetivamente. Quando a gente aprende efetivamente a gente leva pra vida.

> **P7:** O meu sapato está chegando aqui no final renovado e assim, eu sei que eu tenho que estudar muito ainda pra poder passar algo pros meus alunos, né? E sempre vou

> estar em busca. Que a gente não deve parar. Eu pensei que eu tinha muita dificuldade, mas com essa formação eu percebi que a dificuldade é bem maior, né? .
>
> **P5:** Eu acho que o fato de estar presencial, isso pra mim é bem importante, nessa...no corpo a corpo, né? Que a gente tem muita dificuldade de tá remotamente. Eu acho que toda a formação, assim...te dá um gás novo. Novas possibilidades de trabalhar diferente, de pensar diferente, de buscar outras coisas. E estou de sapato novo.

"*Renovados, né? Tirando um pouco os textos que eram complexos, como elas já falaram, né? Eu acho que daqui em diante dá pra pensar diferente. É o olhar diferente na geometria, que as vezes a gente passa bem batido*" (P6).

> **P2:** Sapatos novos, renovados. É bom assim, trocar ideias, ouvir a opinião do outro. [...] Todo mundo junto à gente aprende mais, a gente vê a mesma ideia por novas perspectivas, né? E o quanto ainda tenho que aprender. Foi muito gratificante estar aqui em todos os sentidos.

Procurando pormenorizar ainda mais sobre o atendimento ou não das expectativas das professoras no programa de formação, foi entregue um questionário[49] para elas responderem e nos encaminharem posteriormente. Esse questionário também procurou identificar os impactos dessa formação na prática pedagógica, no conhecimento específico do conteúdo de geometria, na maneira de perceber o processo de aprendizagem da geometria pelas professoras. O estudo dessas respostas foi realizado na análise dos dados e na validação da EDCAGE, item 4.2.

Finalizando o último encontro, não poderíamos deixar de homenagear as professoras, que com tanta dedicação aceitaram o desafio de participar desse programa de formação. Tivemos momentos emocionantes, com troca de homenagens, de mimos, de carinhos e algumas lágrimas. Não de tristeza, mas de reconhecimento, porque juntas nos atrevemos a fazer algo diferente e chegamos ao final de um ciclo com a sensação de dever cumprido, mas com a certeza de que os desafios no processo de aprendizagem da geometria continuam.

4.2 A ANÁLISE DOS DADOS E A VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COLABORATIVA PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

O programa de formação continuada desenvolvido com as professoras pedagogas, descrito no item 4.1, constituiu a fase da experimentação da EDCAGE. Nessa etapa ocorreu a

---

49 Apêndice E.

coleta de dados que nos permitiram realizar a análise *a posteriori* e a validação da metodologia de pesquisa assumida neste trabalho, visando encontrar uma possível solução para o nosso problema de pesquisa.

Como as fases das análises preliminares e *a priori* da EDCAGE estiveram fundamentadas considerando três diferentes perspectivas: pesquisador, professores e espaço colaborativo, realizamos o processo de validação dessas hipóteses, respeitando essa diversidade de pontos de vista, mas procurando construir uma tessitura entre esses espaços metodológicos. Ou seja, entre as análises preliminares situadas no espaço metodológico [1], [2] e [3], as análises *a priori* encontradas no campo metodológico [12], [13] e [23] e a experimentação, discutidas, respectivamente, nos itens 3.2.1.3.1, 3.2.1.3.2 e 4.1.

Os problemas encontrados na formação matemática dos professores pedagogos, principalmente em geometria, diagnosticados nas análises preliminares [1] serviram de base para formulamos várias hipóteses no espaço metodológico [12] da EDCAGE. A primeira suspeita era de que os conhecimentos de geometria que os professores pedagogos construíram ao longo da sua trajetória estudantil, pouco contribuem na condução do processo de aprendizagem da geometria na sua prática pedagógica.

Fazendo a análise das respostas das professoras para o primeiro questionário[50], verificamos, por meio dos seus relatos, que a formação em geometria foi pouco significativa para elas, tanto é que 50% delas nem lembrava mais de como a geometria esteve presente durante a sua formação escolar. As professoras que lembravam, não conseguiram especificar a forma como esse processo foi conduzido e nem os objetos geométricos acessados mediante as diferentes representações semióticas.

O depoimento das professoras deixou explícita a relação problemática que elas têm com a geometria. Segundo elas, a geometria se resume em aplicação de fórmulas para resolver problemas, muitas vezes sem sentido, numa vertente puramente teórica. Outro agravante é que essa fragilidade da formação em geometria parece que não foi amenizada durante a sua formação acadêmica, pois, consoantes com as professoras, 80% delas destacaram que não tiveram esse tipo de formação e, se tiveram, foi algo muito superficial. Um dado que chamou nossa atenção foi que as professoras confundiram o objeto geométrico com a sua representação física. Parece que, no entender delas os entes geométricos podem ser encontrados na natureza.

[50] Apêndice A.

Tendo em vista essa defasagem na formação em geometria, restou às professoras se apegarem, fortemente, ao livro didático para conduzirem o processo de ensino da geometria, aliado a outras fontes como, por exemplo, consulta à internet, programas de formação continuada e troca de experiências com colegas. Uma professora destacou que utiliza somente o livro didático para planejar as aulas de geometria.

Nenhuma das professoras fez referência a sua formação escolar, desde a educação básica a educação superior, como fonte de conhecimentos utilizados para conduzir o processo de ensino da geometria nos anos iniciais. Tampouco mencionaram as bases teóricas conceituais elementares da geometria, como uma das fontes de conhecimento necessária à docência.

Todos esses fatores podem justificar a dificuldade que as professoras apresentam em acompanhar o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais. Pelo depoimento delas, podemos inferir que a aprendizagem da geometria não precisa considerar os processos semiocognitivos, específicos a esse campo do conhecimento matemático. Parece que basta acompanhar a aprendizagem considerando apenas a face exposta da matemática, em detrimento da face oculta.

Pelo exposto, parece que a nossa primeira hipótese foi confirmada. Verificamos, mediante os argumentos apresentados, que as professoras realmente não se utilizam dos conhecimentos específicos do conteúdo da geometria - o qual deveria ter feito parte da sua formação básica -, tampouco do conhecimento das operações cognitivas desenvolvidas pela geometria, na condução do processo de aprendizagem dos alunos. Visto que, essa formação básica e universitária parece não ter sido suficiente para que as professoras pudessem sentir segurança para abandonar o livro didático, como a principal fonte de conhecimentos utilizados para conduzir a aprendizagem da geometria na sua prática pedagógica.

Com relação a nossa conjectura, de que o currículo dos cursos de pedagogia parece preocupar-se pouco com a formação matemática do pedagogo, por intermédio do depoimento da professora P10, podemos perceber que essa situação é verídica.

> **P10:** A nossa formação na pedagogia, a matemática ela é muito curta, elas são pequenas cadeiras, assim... Tem semestres vezes, é oito semestres de filosofia e..., não que isso não seja importante. Claro! Mas assim, tu tens oito semestres de conceito e um semestre, dividido ainda em conceito e prática matemática. Que não é ainda uma coisa só que tem. Não tem estágio na matemática, por exemplo. Quando tu vai estagiar, tu podes optar por dar uma aula de português, de ciências ou de matemática. Aí todo mundo corre da matemática, porque só sabe fazer a continha, né? E ainda não sabe se vai ensinar direito, porque não lembra se podia falar se podia pedir emprestado ou não. Eu lembro até de algumas colegas. Mas gente, e agora? Falo: peço emprestado ou não peço emprestado? É uma questão que a gente

> tem que pensar. E quando chega na escola a gente pensa nesse mesmo amarrado dos professores. E agora? Eu vou ensinar o que tá nesse livro aqui. Diz aqui que eu tenho que armar e efetuar essa conta. A criança vai errar. Fez errado! Chegou na resposta, mas não botou unidade embaixo de unidade, tá errado.

Podemos perceber, por esse depoimento, a dimensão que essa fragilidade de conhecimentos pode alcançar. Como ensinar aquilo que não se sabe? Logo, na dúvida, adota-se e segue-se fielmente o que o livro didático orienta, porque

> **P**1: [...] é difícil ensinar aquilo que não se sabe, né? O que a gente não domina. É complicado e acho que fica estampado na cara da gente quando tu não domina o assunto, quando tu não tem certeza daquilo que tu tá dizendo. Eu acho que, pra mim, creio que esse seja o maior problema da matemática e da geometria, mais especificamente, né?

Bem, se os currículos dos cursos de pedagogia parecem não dar conta de uma formação que seja capaz de embasar conceitualmente o professor pedagogo para conduzir o processo de aprendizagem da geometria, conforme havíamos suspeitado, o que nos resta é investir na formação continuada desses profissionais. Até porque, nenhum curso, de graduação ou de pós-graduação, será capaz de englobar todos os conhecimentos necessários, para conduzir a prática pedagógica do professor pedagogo, especialmente no que tange o processo de aprendizagem da geometria.

Sendo assim, levantamos a hipótese de que um programa de formação continuada que possibilitasse aos professores verem geometricamente uma figura, segundo a teoria semiocognitiva de Duval, poderia ampliar a compreensão deles sobre o processo de aprendizagem da geometria. Para que essa suspeita fosse validada, organizamos e desenvolvemos um programa de formação com um grupo de onze professoras, conforme descrevemos anteriormente.

Para que as professoras pudessem compreender o que significa essa maneira de ver geometricamente uma figura, na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica, precisamos realizar uma fundamentação teórica, propondo a leitura de textos científicos que contemplassem essa temática. Como já havíamos previsto, nas nossas análises *a priori*, a leitura dos textos não foi fácil. As professoras apresentaram muita dificuldade no entendimento, incluindo o vocabulário, nos desdobramentos conceituais a partir do texto e na própria teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria. A fala da professora P11 representou a opinião do grupo de professoras ao dizer que foi "*uma leitura bem densa pra gente, porque não é do nosso cotidiano*". Esse fato exigiu a nossa intervenção nos momentos de estudo, para que as discussões do grupo pudessem fluir.

A nossa colaboração, com as discussões conceituais do grupo, esteve voltada, para além das questões teóricas, para a elaboração de atividades de geometria que estivessem em sinergia com os temas abordados nos textos, conforme relatamos no item 4.1. Percebemos que as professoras, durante a resolução das questões, apresentaram dificuldades nos conceitos básicos de geometria (previsto nas análises preliminares na perspectiva do pesquisador), bem como no desenvolvimento e na ampliação do olhar sobre as figuras geométricas.

Contudo, parece que a metodologia adotada na condução dos trabalhos durante o programa de formação, contribui para que essas dificuldades fossem sendo amenizadas no decorrer dos nove encontros de formação.

Analisando as respostas encontradas para a primeira questão do questionário II, quanto aos aspectos que levaram essa formação se diferenciar das demais, as professoras foram unânimes em responder que o estudo da teoria combinado com a resolução das atividades desafiadoras de geometria, desenvolvidas durante os encontros, foi algo que contribuiu para que elas pudessem compreender os temas que foram abordados em cada um dos textos.

Entre os diferenciais dessa formação a "*principal foi a metodologia utilizada, pois as atividades elaboradas pela professora Selma nos ajudaram muito na compreensão dos textos*" (P7). Isso porque, "*os exercícios que foram utilizados é que nos levaram a ver, a perceber coisas, características sobre a geometria que até então não havíamos explorado antes*" (P9). Ou seja, "*as atividades práticas fortaleceram o aprendizado. Olhar-tocar-pensar-construir-interiorizar-reconstruir, são passos que as formações deveriam levar em consideração quando se trata de aprendizado*" (P10).

Mediante a sinergia estabelecida entre a teoria e a prática, percebemos que a leitura dos dois últimos textos, já não apresentava mais o mesmo grau de dificuldade que os três primeiros para as professoras. Parece que elas já estavam caminhando para uma familiaridade com as leituras científicas. "*Algumas palavras já fazem sentido, algumas palavras já não são totalmente desconhecidas. Só que trazer para realidade é difícil*" (P2).

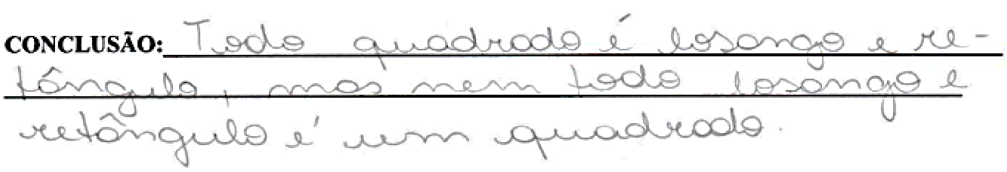
Na leitura do texto 6, sobre a desconstrução dimensional das formas, foi percebido que o texto "*abrange tudo o que a gente aprendeu até agora. Tudo que foi falado, fala novamente*" (P4). Isso pode ter possibilitado uma maior segurança, tanto na apresentação do texto quanto nas discussões do grande grupo, que fluíam mesmo sem as nossas intervenções. Esse dado nos permitiu inferir que, embora essas leituras fizessem parte de um campo teórico até então desconhecido por elas, não as impossibilitou de adentrar na teoria semiocognitiva de Duval, mesmo que parcialmente.

Constatamos, recorrendo aos relatos das professoras, durante os encontros de formação, e às respostas obtidas no questionário II, que as atividades de geometria, que foram propostas às professoras durante o programa de formação, fundamentadas na perspectiva semiocognitiva de Duval para a aprendizagem da geometria, parecem ter ampliado o olhar delas sobre a geometria e sobre o processo de aprendizagem da geometria das crianças dos anos iniciais.

No quinto encontro de formação, por meio do desenvolvimento das atividades (construtor de figuras e construindo e desmontando hexágonos), foi perceptível a passagem do olhar icônico ao não icônico das professoras sobre as figuras geométricas. A partir das operações de decomposição dimensional, construção e reconfiguração de figuras, as professoras parecem terem conseguido perceber propriedades específicas em cada figura geométrica.

Podemos ilustrar esse posicionamento pela fala da professora P1, quando da realização da atividade construtor de figuras: "*Eu achei que sabia pelo menos o que era quadrado e retângulo*". Após muita discussão e ressignificação de conceitos geométricos, essa professora chegou à seguinte conclusão:

Figura 84 - Conclusão da professora P1.


CONCLUSÃO: Todo quadrado é losango e retângulo, mas nem todo losango e retângulo é um quadrado.

Fonte: Arquivos da autora

Ou seja, o conceito de algumas figuras elementares da geometria, parece ter sofrido uma ampliação por intermédio das atividades e das reflexões presentes em todos os momentos da formação.

Pelo desenvolvimento da atividade construindo e desmontando hexágonos, observamos que as professoras não tinham consciência da importância da utilização de instrumentos nas atividades de geometria. Tanto é que elas já nem lembravam mais como manipular o compasso.

O auge dessa atividade foi quando as professoras começaram a perceber que, a partir da divisão da circunferência, utilizando a medida do raio, obteve-se seis partes iguais e que, a partir delas, pela adição de traçados, pode-se construir hexágonos, triângulos, trapézios, losangos, etc. O estabelecimento das relações entre essas figuras fez com que as professoras percebessem que a operação de reconfiguração fez emergir propriedades do objeto. Esse movimento do olhar, exigido das professoras nessa atividade, possibilitou que elas experienciassem as apreensões, a desconstrução dimensional das formas, as funções discursivas, possibilitando a passagem do olhar icônico ao não icônico.

É importante ressaltar que as professoras conseguiram tomar consciência dessas operações ao longo do desenvolvimento da formação, visto que, "*o que eu conhecia da geometria era muito superficial e mecânico*" (P10). Assim, "*compreender melhor a desconstrução dimensional e como aplicá-la em sala de aula foi a melhor descoberta da formação*" (P5). Quer dizer, "*a partir da formação, pude perceber que o estudo da geometria é muito rico e importante e que vai muito além do que estamos acostumados a trabalhar com os alunos*" (P7). Dessa maneira, "*vejo o conteúdo de geometria com mais importância, abrangência e muitas formas diferenciadas de se trabalhar. Percebi que devo ir além do olhar botanista*" (P4). E, segundo a professora P10, "*saio do curso com uma visão mais ampla do que é geometria e o quanto ela está interligada aos demais aprendizados escolares*".

Em concordância com esses depoimentos, podemos perceber uma significativa mudança no modo de olhar das professoras sobre o estudo da geometria, quando comparado às análises prévias na perspectiva delas [2], descritas no item 3.2.1.3.1. Supomos que o desenvolvimento do programa de formação atendendo a EDCAGE possa ter influenciado numa possível mudança da compreensão delas a respeito do processo de aprendizagem da geometria.

Pela análise das respostas das professoras ao questionário I, identificamos um forte apego ao livro didático na condução do processo de aprendizagem da geometria. Ao passo que, ao final da formação essa ideia parece ter sido abalada, pois elas perceberam que "*os exercícios que os livros trazem são o mínimo que podemos explorar sobre a geometria e que podemos ir mais além* [...]" (P9). Dessa maneira, "*não podemos seguir somente os livros didáticos, devemos sempre buscar outras formas de repassar os conhecimentos para os alunos*" (P6).

Nas análises prévias [2], as professoras não cogitaram as operações cognitivas presentes no processo de aprendizagem da geometria. Entretanto, esse olhar parece que começa a mudar, graças ao desenvolvimento do programa de formação, pois "*percebi que não devemos ficar preso ao olhar botanista e sim buscar outros olhares mais aprofundados dentro da geometria. [...] Essa formação nos mostrou que precisamos ter um olhar* *diferenciado não só em relação ao conteúdo, mas também ao desempenho do aluno*" (P7). O fato de "*poder ampliar meu olhar para um novo conhecimento permite que eu proporcione conhecimentos mais significativos para as crianças*" (P10).

Essa ampliação do olhar parece ter alterado a maneira que elas acompanhavam o processo de aprendizagem da geometria, que num primeiro momento, esteve pautado na resolução de exercícios, atividades práticas, observação da compreensão e a ideia do objeto geométrico preso a sua representação física. Com o desenvolvimento do programa de formação e a aplicação das atividades elaboradas, colaborativamente,

> **P5:** foi possível observar que a construção dos conceitos geométricos precisam partir de atividades concretas onde as crianças possam ir percebendo ao longo do processo os elementos que compõem a geometria para então conseguirem apreender os importantes conceitos. [...] Perceber a alegria das crianças ao realizar as atividades e a facilidade de compreender e apreender os conceitos geométricos trouxe a certeza de que práticas de aprendizagem ativa criam um ambiente, que segundo Paulo Freire, de sujeitos que aprendem enquanto ensinam.

A possibilidade de acompanhar o processo de aprendizagem da geometria tendo como pano de fundo esse novo olhar mostra que "[...] *daqui em diante dá pra pensar diferente*" (P6). Esse pensar diferente coloca em cena as diferentes operações cognitivas requeridas na aprendizagem da geometria, porque esta teve

> **P10:** [...] um jeito de aprender diferente, sabe? Te colocou um desafio e é o que a gente tá provocando isso nas crianças, nada pronto, sabe? Não veio um conteúdo pronto. [...] a gente se colocou no lugar de aprendiz, sabe? E aprendeu mesmo efetivamente. Quando a gente aprende efetivamente a gente leva pra vida.

E se esse aprendizado pode ser levado adiante, inferimos que a nossa hipótese, de que um programa de formação para professores que atendesse a perspectiva semiocognitiva de Duval poderia ampliar a compreensão das professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria, parece que foi confirmada. Em outras palavras, é provável que o estudo teórico aliado ao desenvolvimento das atividades, durante os encontros de formação, provocou mudanças significativas na percepção das professoras sobre a geometria e o seu processo de aprendizagem, como pode ser percebido pelo depoimento da professora P4: "*em geometria existe a necessidade de olhar para além do que se percebe num primeiro momento. Atitude que eu quase não tinha e que estou aprendendo*".

Entretanto, para que essas mudanças pudessem ocorrer, pressupomos que o programa de formação precisaria ser conduzido num ambiente colaborativo, onde professoras e pesquisadora trabalhariam juntas, para que o protagonismo das professoras pudesse ser evidenciado nos momentos de aprofundamentos teóricos e na condução do processo de aprendizagem da geometria.

Concebemos, previamente, que um ambiente colaborativo poderia aproximar dois mundos: a pesquisa e a prática, comungando com a perspectiva de Desgagné (2007). Apesar desses dois mundos terem assumido papéis específicos, eles tiveram um compromisso em comum, qual seja, a aprendizagem da geometria numa perspectiva semiocognitiva. Esse espaço colaborativo, constituído pelo trabalho conjunto entre nós e as professoras, objetivou promover o empoderamento das mesmas frente ao processo de aprendizagem da geometria.

Da mesma forma, esse espaço colaborativo foi percebido pelas professoras, ainda nas suas análises prévias, como um ambiente importante de aproximação entre a academia e a prática pedagógica escolar, bem como um lugar de troca de experiências e de ampliação de produção de conhecimentos. Ratificamos esse posicionamento pelo depoimento da professora (P5) "*Acredito ser importantíssimo, uma vez que a sala de aula, muitas vezes, nos distancia da teoria. Esse espaço tem a possibilidade dessa aproximação da prática com a teoria*".

Observamos, durante o desenvolvimento do programa de formação, que esse espaço colaborativo foi percebido pelas professoras como um ambiente inovador, e por isso também desafiador, que "[...] *nos tirará da zona de conforto e nos permitirá repensar a prática na sala de aula*" (P5).

Nesse sentido, essa saída da zona de conforto pode ter permitido, por intermédio do espaço colaborativo, reacender o papel protagonista das professoras, que parece ter sido esquecido, em algum momento da sua trajetória docente.

> **P2:** [...] vir pra cá e sentar e pensar, tu vê que tu não tá reduzido ainda. A gente tá se sentindo muito diminuído. Então, vê que a gente consegue pensar, consegue produzir, consegue trocar, não só nós aqui, mas todo o grupo, e ver que todas nós estamos aqui tentando fazer alguma coisa, no meio de tanta loucura, dá um gás, assim, pra vida da gente.

Inferimos que esse sentimento de revalorização docente pode ser atribuído ao trabalho colaborativo desenvolvido durante o programa de formação, que procurou promover uma aproximação entre o mundo da pesquisa e da prática pedagógica. Visto que, "*nessa formação, de forma especial, o estofo teórico ampliou ainda mais a compreensão sobre a geometria e permitiu perceber que é possível uma nova abordagem sem que o trabalho fique complicado*" (P5).

Esse ambiente colaborativo parece, também, ter contribuído para que as professoras refletissem "[...] *sobre a necessidade de estudo constante e aperfeiçoamento. [...] E a* *importância da troca de experiências e ideias, para que a aprendizagem aconteça*" (P2). Bem, momentos de estudos teóricos e compartilhamentos de experiências, foi o que procuramos desenvolver ao longo dos nove encontros de formação.

Os constrangimentos apresentados pelas professoras durante a leitura dos textos científicos, conforme já prevíamos nas nossas análises *a priori* [12], foram sendo amenizados com o auxílio da nossa intervenção nos debates, bem como através das atividades propostas durante a formação. Em momento algum as professoras ou nós, nos sentimos diminuídas em decorrência do lugar ocupado em cada uma das esferas. Construímos um ambiente em que todas puderam sentir-se acolhidas, comungando dos mesmos desafios encontrados no processo de aprendizagem da geometria.

Percebemos que o fato de estarmos atuando na sala de aula no ensino fundamental II estreitou ainda mais os nossos laços, uma vez que, vivenciamos realidades muito próximas. As professoras não se sentiram intimidadas na condução dos trabalhos teóricos, pois nos colocávamos no mesmo patamar. Quando ressaltavam que a leitura estava difícil, comungávamos com elas a mesma posição e discutíamos juntas as questões conceituais. Esse ambiente acolhedor pode ter contribuído para que as professoras se preparassem para os encontros de formação com tanto engajamento, fazendo as leituras e as apresentações dos textos, trazendo os materiais solicitados, respondendo os questionários e elaborando o diário de bordo sobre a aplicação das atividades.

O estudo da teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, proposta por Duval, pode ter contribuído para que as professoras pudessem ter um olhar mais refinado em relação à geometria, bem como para o seu processo de aprendizagem. Essa possibilidade pôde ser comprovada quando elas elaboraram as atividades que seriam aplicadas com os alunos. As professoras foram desafiadas a pensar em atividades que promovessem a aprendizagem da geometria, considerando a desconstrução dimensional das formas e as operações semiocognitivas. Segundo elas, foi preciso sair do comodismo, deixar o livro didático de lado para alçar novos voos.

Foi perceptível no relato da professora P1 essa frustração de não encontrar nos livros didáticos atividades que contemplassem essa perspectiva semiocognitiva "*eu procurei inclusive naqueles que eu mais gosto [...] e não encontrei nada que eu pudesse copiar*". Essa situação impôs a ela um desafio a ser superado: se não se encontra nada nos livros "*é você que vai ter que criar, é o teu momento de pensar alguma coisa, você não vai achar a fórmula pronta*" (P1). Depreendemos que esse momento de criação só foi possível graças a todo o embasamento teórico explorado durante a formação, que orientou a elaboração de atividades que visaram promover a aprendizagem da geometria, considerando as suas operações cognitivas.

Além do mais, o programa de formação, num espaço colaborativo, permitiu que as professoras tivessem um tempo para refletir sobre a sua prática pedagógica, "[...] *tu para pra pensar e não vai só reproduzindo aquilo, que na correria do dia a dia, tu acaba fazendo. Então assim, parar, pensar, numa atividade que saia fora do comum foi muito bom*" (P5).

Nessa perspectiva, percebemos que as professoras deixaram de ser simplesmente reprodutoras de orientações preestabelecidas, para assumirem o papel de protagonistas na condução do processo de aprendizagem da geometria. Nada estava pronto, tudo precisou ser pensado e elaborado colaborativamente. De certa forma, essa reflexão abalou o *modus operandi* das professoras, visto que "*a gente pode continuar [...] a não pensar da maneira que a gente sempre pensou até agora, e o curso vai mudar alguma coisa*" (P6).

> **P2:** Que bom que a gente está conseguindo ter esse novo olhar, porque nós não aprendemos assim. Pra mim é difícil às vezes ensinar o aluno da forma diferente que eu aprendi. Então esse curso tá sendo um divisor, está sendo muito bom pra ter esse novo olhar, tanto pro que eu vou ensinar, quanto pro que o aluno vai aprender.

Ou seja, o programa de formação não foi apenas "[...] *um momento de desconstrução, mas de reconstrução. Eu estou a toda hora me reconstruindo e vendo que é possível explorar mais do que a gente já tem, né?*" (P10).

Todos esses depoimentos nos fizeram perceber que a nossa hipótese, de que um programa de formação continuada conduzido num ambiente colaborativo poderia evidenciar o protagonismo do professor tanto nos aprofundamentos teóricos quanto na condução do processo de aprendizagem da geometria nas situações de ensino, foi confirmada. Tendo em vista que, observamos na performance das professoras um empoderamento e uma autonomia na condução do processo de aprendizagem da geometria, por intermédio do refinamento do olhar na elaboração das atividades, bem como no confronto entre o que elas esperavam e o que elas encontraram nas respostas dos alunos para as atividades.

4.2.1 O desvendar da compreensão das professoras sobre a aprendizagem da geometria

O desenvolvimento do programa de formação, visando à aprendizagem da geometria pela decomposição dimensional das formas, considerando as funções discursivas, as apreensões e os olhares em geometria, procurou entender e identificar a compreensão de aprendizagem da geometria que as professores pedagogas construíram, num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Para operacionalizar essa análise, objetivando responder ao nosso problema de pesquisa, voltamos o nosso olhar para a etapa da nossa pesquisa em que as professoras elaboraram, aplicaram e analisaram os resultados das atividades propostas aos alunos, relatadas nos itens 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9. Justificamos nossa postura, supondo que, nessa etapa da formação as professoras já estavam embasadas conceitualmente para poder fundamentar as suas ações na condução do processo de aprendizagem da geometria. Como estávamos querendo saber qual a compreensão de aprendizagem que elas construíram a partir de um programa de formação, pensamos que esse seria o momento oportuno para fazermos nossas constatações, porém sem descartar os demais dados da pesquisa.

A partir da teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria proposta por Duval e envoltos num espaço colaborativo, trabalhamos junto às professoras na elaboração das atividades. Também problematizamos por meio de indagações como: qual o objetivo dessa atividade? Quais as operações cognitivas requeridas na resolução dessa questão? A questão contempla a desconstrução dimensional das formas? Como essa atividade pode contribuir com a aprendizagem da geometria? Qual a resposta que você esperava do aluno para essa questão? O que ele respondeu? O que pode ter influenciado no sucesso ou no fracasso do aluno na resolução dessa atividade?

As atividades foram elaboradas por quatro equipes de professoras, avaliadas por seus pares e socializadas com o grande grupo, para organização de uma única sequência de atividades. Nós acompanhamos o desabrochar de cada uma das atividades dentro das equipes e pudemos trocar ideias, contribuindo direta ou indiretamente com a sua sistematização.

A primeira atividade da sequência foi elaborada pela equipe das professoras P5, P2 e P6 e tinha por objetivo conduzir o olhar dos alunos a observarem características comuns entre a representação planificada e a representação espacial do cubo. A atividade consistia em expor, previamente, diferentes sólidos geométricos na sala de aula, visando aguçar a curiosidade dos alunos. Depois eles receberiam a planificação do cubo e a partir dessa forma responderiam: qual das figuras expostas é igual a sua? Por que você acha que é essa figura? Após responder esses questionamentos os alunos deveriam montar o sólido para que as professoras pudessem comprovar as suas hipóteses.

As professoras P5, P2 e P6 previam que as crianças ficariam curiosas com a exposição dos sólidos, e tiveram sua hipótese confirmada. Contudo, na expectativa delas, as crianças teriam dificuldade para nomear adequadamente a representação física do cubo e para manipular adequadamente os instrumentos para cortar, dobrar e colar, na montagem do cubo.

Analisando as respostas dos alunos, a professora P2 ficou surpresa, pois eles conseguiram nomear o sólido adequadamente, bem como identificar as dimensões 2D na planificação e 3D na forma espacial, o que não era esperado por ela. A professora P5 foi surpreendida negativamente, pois ela já esperava que os alunos tivessem dificuldade para nomear o sólido a partir da sua planificação, mas não imaginava que eles não soubessem reconhecer e nomear nenhum dos diferentes sólidos geométricos que foram expostos na sala.

As professoras P1, P7, P10 e P3 esperavam que os alunos conseguissem nomear adequadamente o sólido a partir da visualização da planificação física do cubo, fato que foi confirmado pela observação das respostas dos alunos. Elas argumentaram que o sucesso dos alunos para essa questão poderia estar relacionado ao fato de as crianças já terem estudado essas formas geométricas em anos anteriores.

Para explicar a confusão dos alunos no momento de nomear o sólido, ora designado como cubo, ora como quadrado, as professoras pressupuseram que essa situação pudesse estar relacionada ao primeiro olhar sobre a figura. Como o cubo é formado por faces quadradas, o olhar deles fica preso ao quadrado e esquece de olhar o sólido como uma forma tridimensional.

Embora a hipótese, de que os alunos teriam dificuldades para montar a representação física do cubo, tenha sido indicada apenas pelas professoras P5, P2 e P6, todo o grupo da formação constatou a falta de coordenação visual motora dos alunos quando colocados em situações que exigiam o uso de instrumentos. Elas relacionaram essa dificuldade ao fato dessas atividades serem pouco exploradas na sala de aula, apesar de serem importantes.

Partindo dessa problemática, desafiamos as professoras a pensarem em atividades de geometria que pudessem desenvolver a coordenação visual motora em sinergia com a discriminação visual e as apreensões. Elas conseguiram perceber que essa semiosfera do olhar esteve presente em várias atividades, pois quando a criança precisou recortar o molde do cubo, por exemplo, o olhar dela estava em sinergia com o movimento das mãos, percebendo as características do traçado reto e cuidando para não cortar errado. Com isso os alunos foram percebendo semelhanças e diferenças entre as formas geométricas. O simples traçado de uma reta com o auxílio de uma régua, já requer essa coordenação.

Pelo depoimento da professora P10, podemos pensar que as professoras foram sensibilizadas a dar continuidade a esse trabalho de envolver outras semiosferas numa mesma atividade de geometria. Segundo essa professora, ela está dando continuidade a essas atividades e já percebeu que os alunos começaram a visualizar formas planas diferentes pelo recorte e montagem de outros sólidos. Da mesma forma, os alunos já estão dominando melhor o uso da cola, da régua e da tesoura, porque essas capacidades vão sendo desenvolvidas ao longo da trajetória escolar.

A atividade II foi proposta pelas professoras P4 e P9e sofreu algumas adaptações pelos pares durante o processo de sistematização. A atividade consistia em contornar as faces da representação física do cubo (realizado na primeira atividade) e, a partir da observação desses contornos, os alunos deveriam responder: que figura você obteve pelo contorno da face? Quantas faces do cubo você contornou? Os contornos que você obteve têm as formas e tamanhos iguais ou diferentes? O objetivo das professoras ao elaborarem essas questões foi de operar a figura pela desconstrução dimensional das formas, passando o cubo da forma 3D para a forma 2D, procurando, pelas diferenças, designar adequadamente os objetos geométricos cubo e quadrado e perceber que o sólido é composto por superfícies planas com características comuns.

A expectativa da professora P4 era de que os alunos não iriam conseguir contornar as seis faces do cubo, ela esperava que eles contornassem apenas quatro "[...] *por causa do...não sei. Na minha cabeça eu achei que eles não conseguiriam fazer e fizeram com muita facilidade*". Talvez a professora quisesse dizer que seria quatro, porque o quadrado tem quatro lados e isso poderia interferir na resposta dos alunos. Ela esperava que os alunos não conseguissem ter a percepção "[...] *do cubo para o quadrado"* (P4).

A professora P10 acreditava que todos os alunos iriam contornar as seis faces do cubo, fato que foi confirmado. Ela foi surpreendida pelas diferentes estratégias que os alunos utilizaram para fazer o contorno das faces do cubo.

Um dado comum relatado por várias professoras foi que a dificuldade que os alunos tiveram na montagem do cubo da atividade I, por fatores diversos, como já relatamos anteriormente, interferiu em muitas respostas das questões 2, 3, 4 e 5 da atividade II. Segundo elas, os alunos ficaram presos aos contornos deformados das faces quadradas e não conseguiram perceber as propriedades do cubo. Entretanto, os alunos que conseguiram desprender o olhar dos contornos, foram capazes de perceber as características geométricas do cubo independentemente dos traçados. Ou seja, eles conseguiram o olhar a figura além do que eles enxergaram no primeiro momento.

Analisando essas dificuldades as professoras sugeriram, como uma possibilidade para fazer os alunos enxergarem as propriedades do cubo pelo contorno das formas, uma atividade anterior em que eles pudessem contornar a representação física de sólidos feitos com materiais mais rígidos. Isso poderia desenvolver o olhar deles, para que num segundo momento eles fossem capazes de perceber que as características do sólido não estão presas ao primeiro olhar.

As professoras P1 e P7 foram as autoras da atividade III, na qual foi integrada a sequência das atividades no seu formato original. O processo de elaboração dessa atividade foi extremamente delicado, em virtude da complexidade encontrada na produção do enunciado. Muitas foram as propostas discutidas entre nós e as professoras, até chegarmos à versão final, assumindo o seguinte formato: a partir da figura do quadrado (desenho do quadrado) que representava a face do cubo, foi solicitado que a figura fosse dividida ao meio pelo traçado de uma reta. A seguir, foram feitos os seguintes questionamentos: quantas figuras você consegue perceber agora? Desenhe as figuras que você encontrou. Qual o nome dessas figuras que você desenhou?

As professoras pretendiam, com essa atividade, fazer com que os alunos percebessem, pela adição do traçado, que dentro do quadrado existem outras formas geométricas. O olhar deles seria conduzido a fazê-los enxergar as duas formas obtidas, pela divisão da figura ao meio, sem esquecer da figura inicial.

A expectativa das professoras, para essa atividade, era que os alunos não conseguissem enxergar as três figuras a partir da divisão do quadrado ao meio, "[...] *porque eles iriam esquecer de que aqui tem um quadrado e essas duas* (apontando com o dedo sobre a figura)" (P9). Hipótese confirmada, pois do conjunto total dos alunos que participaram da pesquisa, nenhum deles conseguiu responder corretamente o item *d* dessa atividade. Apenas a professora P3 esperava que os seus alunos do quinto ano conseguissem perceber as três figuras e ficou surpresa, pois nenhum deles conseguiu solucionar a questão e somente dois fizeram a divisão do quadrado em dois triângulos.

A professora P4 pensou que os alunos têm essa dificuldade porque "*[...] isso não foi trabalhado com eles, não foi aguçado eles a pensar dessa forma"*. Da mesma forma que as professoras também não foram preparadas para desenvolver esse tipo de olhar com os alunos, "*[...] porque quando eu entrei aqui no curso eu também não tinha esse olhar. [...] Então, agora quando eu entrar eu vou começar a puxar isso*" (P4).

Na análise das respostas dos alunos para essa atividade, a professora P2 suspeitou que a dificuldade deles pudesse estar relacionada à necessidade de desconstruir a figura, porque até "[...] e*u só consigo ver o quadrado e os dois triângulos*" (P2).

Outra possibilidade que poderia justificar a dificuldade dos alunos no desenvolvimento dessa atividade e que foi percebida por todas as professoras, está relacionada ao enunciado da questão, principalmente no item *b*, quando pergunta: quantas figuras você consegue perceber agora? Segundo elas, a expressão *agora* pode induzir o aluno a pensar que, se antes tinha um quadrado e agora foi dividido, então tem-se duas figuras. Depois de muitas tentativas para solucionar esse problema do enunciado, elas acharam melhor incluir uma atividade para ser realizada antes dela, visando preparar o olhar do aluno a perceber essas diferentes figuras, a partir da desconstrução da figura. Uma possibilidade levantada foi a de entregar uma forma plana já dividida e pedir para que eles identificassem as diferentes figuras a partir dos traçados, desprendendo-se da apreensão perceptiva.

Todavia, apesar de tantos desafios enfrentados na resolução dessa atividade, na percepção das professoras P1 e P7, ela contribuiu para que os alunos ampliassem o olhar sobre a figura, porque quando elas retomaram e discutiram a atividade com os alunos, eles começaram a perceber que o quadrado permanecia na figura mesmo após a sua divisão, "[...] *e nós precisamos desenvolver atividades para auxiliar o aluno a desenvolver esse olhar*" (P1).

A proposta do desafio foi elaborada e lapidada por diferentes autores. Primeiramente, ela emergiu da nossa discussão com as professoras P4 e P8, onde foi proposta uma atividade para que os alunos montassem um cubo a partir de um modelo do contorno da planificação do mesmo. Depois, levamos essa ideia para a equipe composta pelas professoras P2, P5 e P6 e elas propuseram apresentar essa atividade como um desafio, pois, na opinião delas, os alunos se sentiriam mais motivados. Essas professoras destacaram que seria importante que cada aluno recebesse um dos diferentes tipos de contornos da planificação do cubo. Assim, eles poderiam perceber que embora as onze planificações fossem diferentes eles formariam o mesmo sólido.

A partir de todos esses olhares, o desafio assumiu o seguinte formato: cada aluno foi desafiado a montar um cubo a partir do contorno da sua planificação. Eles receberam diferentes moldes de planificações[51], entregues ao acaso, que precisaram ser recortados e montados, porém estavam despidos das *abas* e das marcações internas. Cada aluno ficou livre para decidir como resolveria o desafio.

Essa atividade teve por objetivo fazer o aluno operar a figura pela desconstrução dimensional da forma 2D (superfície plana da planificação do cubo) para a dimensão 1D, requerida pela adição de traçados de retas. Isso com o propósito de levar o aluno a enxergar outras propriedades do sólido, direcionando o olhar dele a perceber que dentro da superfície

51 Apêndice D.

2D existem outras formas geométricas que não foram percebidas num primeiro olhar. Ou seja, os seis quadrados.

Um dado interessante foi que todas as professoras, inclusive nós, pressupusemos que os alunos não conseguiriam resolver o desafio, "[...] *porque não tinha a visualização do que fazer passo a passo*" (P10). Entretanto, fomos surpreendidas pela rapidez e facilidade demonstrada por todos eles, independentemente do nível de ensino em que se encontravam. Na percepção das professoras o desenvolvimento das atividades I, II e III podem ter contribuído para o sucesso alcançado por todos os alunos na resolução do desafio, visto que, cada uma das atividades tinha a proposta de ampliar o olhar do aluno sobre as figuras.

No Quadro 13, apresentamos um panorama geral sobre o confronto entre as expectativas das professoras e a performance dos alunos no desenvolvimento das atividades, juntamente com as possíveis justificativas teóricas para as situações encontradas.

Quadro 13 – Síntese das análises realizadas pelas professoras.

O CONFRONTO			
ATIVIDADES E OBJETIVOS	EXPECTATIVAS DAS PROFESSORAS	RESPOSTAS DOS ALUNOS E SITUAÇÕES ENCONTRADAS	POSSÍVEIS CAUSAS PARA A PERFORMANCE DOS ALUNOS
Atividade I - Conduzir o olhar dos alunos a observarem características comuns entre a representação planificada e a representação espacial do cubo.	Os alunos conseguiriam relacionar a superfície planificada do cubo com a sua representação espacial (física).	- Alguns alunos nomearam o cubo de quadrado. - Os alunos apresentaram dificuldade de coordenação visual motora.	- A apreensão perceptiva ficou presa ao contorno da face quadrada do cubo. - Pouca importância dada às atividades que desenvolvem a coordenação visual motora.
Atividade II - Operar a figura pela desconstrução dimensional das formas e	A maioria das professoras esperavam que os alunos conseguissem contornar as 6 faces do cubo.	- Os alunos apresentaram dificuldade para contornar as faces do cubo e de perceberem as propriedades do	- O material utilizado para construir o cubo foi inadequado. - O olhar dos alunos ficou preso

designar os objetos geométricos.		sólido. - Os alunos utilizaram diferentes estratégias para contornar as faces do cubo. - Coordenação visual motora pouco desenvolvida pelos alunos.	ao registro do contorno das faces, negligenciando as propriedades do sólido.
Atividade III -Fazer os alunos perceberem que dentro do quadrado podem existir outras formas geométricas.	Os alunos não conseguiriam enxergar as três figuras a partir da divisão do quadrado ao meio.	- Os alunos apresentaram dificuldades para dividir o quadrado ao meio. - Poucos alunos dividiram o quadrado em dois triângulos. - Nenhum dos alunos respondeu que foram obtidas três figuras. - Os alunos consideraram retângulos rotacionados como sendo figuras diferentes.	- Necessidade da desconstrução dimensional das formas para resolver o problema. - A apreensão perceptiva destacou-se em detrimento da apreensão discursiva. -Enunciado da questão ambíguo.
Atividade do DESAFIO -Operar a figura pela desconstrução dimensional da forma. -Perceber propriedades do cubo.	Os alunos não conseguiriam montar o cubo a partir do contorno das suas diferentes planificações.	- Todos os alunos (1º ao 5º anos) montaram a representação física do cubo com muita facilidade.	- A condução do olhar para as propriedades do cubo desenvolvidas ao longo da sequência de atividades.

Fonte: A autora

O olhar das professoras sobre a performance dos alunos durante o desenvolvimento da sequência de atividades e a análise delas, ao propor um novo formato para essa sequência de atividades, nos fez perceber que elas ampliaram o seu modo de ver o processo de aprendizagem da geometria. Os objetivos elencados na elaboração das atividades demonstraram que a fundamentação teórica, pautada na perspectiva semiocognitiva, parece ter auxiliado as professoras na proposta de trabalho que visou a aprendizagem da geometria.

É provável que as professoras, pela intervenção do programa de formação, possam ter compreendido que o desenvolvimento da sequência de atividades contribuiu para que os alunos fossem tomando consciência das propriedades das figuras, contribuindo para a aprendizagem da geometria. Posto que, "*eles puderam visualizar, vivenciar o cubo aberto, o cubo fechado. [...] Que há outras formas de dobrar e de montar o cubo novamente. Acho que tudo isso é um aprendizado, né*?" (P1). E se as professoras perceberam que houve aprendizado foi porque compreenderam que os alunos conseguiram alcançar o olhar inventor pela desconstrução dimensional das formas, ou seja, "[...] *ele adicionou traços e ele teve a figura modificada e conseguiu solucionar a questão*" (P1).

O fato de as professoras precisarem deixar o livro didático de lado na elaboração das atividades, é um indício de que o programa de formação não só ampliou a compreensão das professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria, como também parece ter modificado a sua postura frente às atividades a serem propostas durante esse processo. Vários depoimentos apontaram para essa mudança do olhar sobre a aprendizagem da geometria, exigindo delas também uma transformação na condução do processo de ensino.

Mediante todas essas análises, podemos inferir que as professoras, com a ajuda do programa de formação, desenvolvido num ambiente metodológico da Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, compreenderam ser importante considerar as operações semiocognitivas requeridas no processo de aprendizagem da geometria. Constatamos que elas conseguiram perceber que, para ver geometricamente uma figura, precisa ser considerada a desconstrução dimensional das formas em sinergia com as operações discursivas, sem desconsiderar as apreensões, visando a passagem do olhar icônico ao não icônico.

O desenvolvimento do programa de formação com as professoras pedagogas juntamente com a revisão da literatura, realizada durante esta pesquisa, nos fizeram pensar nos conhecimentos necessários ao pedagogo para ensinar geometria. Essa preocupação emergiu durante o desenvolvimento do programa quando nos defrontamos com as dificuldades enfrentadas pelas professoras, mediante aos conhecimentos de geometria, bem como com a desorientação na condução do seu processo de ensino. Ficamos surpreendidos com o surgimento dessa problemática na trajetória da pesquisa e pensamos ser relevante trazê-la para a discussão no próximo capítulo.

5 DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA

Quando nos propusemos a realizar esta pesquisa, nosso olhar esteve voltado a investigar a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem, a partir de um programa de formação continuada, desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Contudo, no transcorrer do desenvolvimento desta pesquisa, tomando como referenciais teóricos a formação matemática do professor pedagogo e a teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, fomos surpreendidos pelo surgimento do seguinte questionamento: quais são as categorias de conhecimentos necessários ao professor pedagogo para ensinar geometria nos anos iniciais do ensino fundamental? Dado que, o presente trabalho nos possibilitou cogitar que, para além de todos os conhecimentos necessários à docência, o conhecimento dos processos semiocognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria é importante na condução do trabalho pedagógico.

Analisando a concepção do conhecimento pedagógico do conteúdo, proposto por Shulman, e as adaptações feitas por diversos autores, no campo da educação matemática, nos atrevemos propor um modelo de conhecimento especializado para o professor pedagogo ensinar geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, a partir das leituras realizadas para esta pesquisa.

5.1 O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PEDAGOGO PARA ENSINAR GEOMETRIA[52]

Estamos cientes da complexidade do saber docente e comungamos do posicionamento de Ball, Thames e Phelps (2008) de que “[...] os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino são multidimensionais” (p. 396). Assim, procurando refinar um desses aspectos multidimensionais dos conhecimentos matemáticos, debruçamos nosso olhar sobre o conhecimento especializado do pedagogo para ensinar geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nossa proposta está fundamentada no conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman (1986), que depois foi ampliada por Ball, Thames e Phelps (2008) ao definirem o

[52] Essa temática foi discutida no nosso artigo em parceria com Méricles Thadeu Moretti, publicado na Revista Educação Matemática e Pesquisa em 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/53713/37621. Acesso em: 15 out. 2021.

conhecimento matemático para o ensino. Consideramos importante acrescentar o conhecimento da didática da matemática, na perspectiva da escola francesa, entendida “(...) como uma ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática, e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição, pelos alunos” (ALMOULOUD, 2010, p.17). A partir do modelo metodológico proposto por Mishra e Koehler (2006), inspiramo-nos a propor a integração dos aspectos semiocognitivos da aprendizagem da geometria aos conhecimentos do conteúdo e da didática.

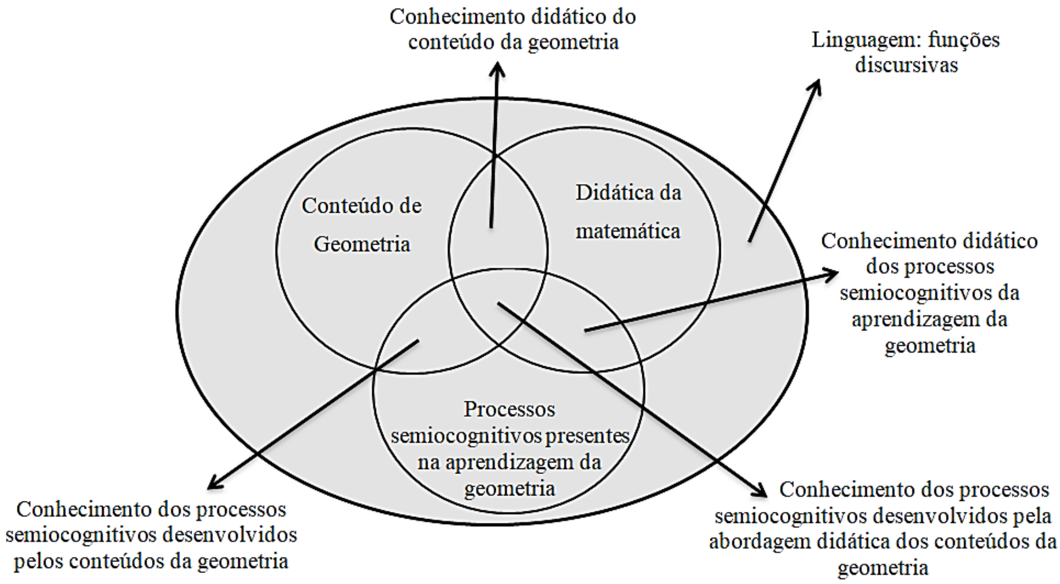
Também consideramos os trabalhos de Carrillo *et al* (2018), que baseados em Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008), apresentam o modelo do conhecimento especializado do professor de matemática (MTSK), como uma proposta de refinamento do modelo do conhecimento matemático para ensinar (MKT) e acrescentam a ele o domínio das crenças e concepções do professor sobre matemática e sobre seu ensino e aprendizagem.

Por tratar-se do conhecimento matemático, torna-se importante considerar a didática da matemática, pois essa ciência trata especificamente dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, como defendido por Silva e Lima (2015) ao acrescentarem essa categoria ao modelo do conhecimento do conteúdo pedagógico tecnológico (TPCK), proposto por Mishra e Koehler (2006).

O modelo metodológico proposto por Mishra e Koehler (2006), ampliando as categorias de Shulman (1986) e integrando a elas o conhecimento tecnológico, inspirou-nos a propor a integração dos aspectos semiocognitivos da aprendizagem da geometria aos conhecimentos do conteúdo e da didática.

Nossa proposta metodológica do modelo do conhecimento especializado do professor pedagogo para ensinar geometria, Figura 86, considera as conexões possíveis entre o conhecimento do conteúdo de geometria dos anos iniciais do ensino fundamental, o conhecimento da didática da matemática na condução do processo de ensino e o conhecimento dos aspectos semiocognitivos, presentes na aprendizagem da geometria. Todos submersos nas funções discursivas da língua.

Figura 85 - Conhecimento especializado do pedagogo para ensinar geometria.



Fonte: A autora

Estamos cientes de que esses componentes, individualmente, desempenham um papel importante no ensino da geometria; contudo, a integração entre eles faz emergir a complexa relação do conhecimento especializado do pedagogo com o ensino da geometria. Agora, apresentamos, detalhadamente, as categorias do conhecimento especializado do professor pedagogo para ensinar geometria, defendidas neste trabalho.

5.1.1 Conhecimento do conteúdo de geometria

Essa categoria refere-se ao conhecimento de geometria que irá subsidiar a prática do pedagogo nos processos de ensino e aprendizagem. É o conhecimento acadêmico, fundamentado nos teoremas, propriedades e elementos fundamentais de geometria. Contudo, esse conhecimento de tal conteúdo não deve limitar-se ao conhecimento comum do conteúdo (conhecimento matemático usado em ambientes fora do ensino, nos termos de Ball, Thames e Phelps, 2008), mas sim tomar a proporção do conhecimento especializado do conteúdo de geometria (tomando emprestado o termo de Ball, Thames e Phelps, 2008).

Para além de saber as ideias centrais do conteúdo de geometria, o professor pedagogo precisa saber explicá-lo tornando-o visível e aprendível para os alunos, levando em consideração as funções discursivas da linguagem e como elas podem interferir no processo de aprendizagem da geometria.

Isso exige uma compreensão e raciocínio matemáticos únicos. “O ensino requer conhecimentos para além dos que são ensinados aos alunos” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 400). Por exemplo, não basta ao professor pedagogo corrigir o aluno, dizendo que um cubo não é um quadrado. Ele precisa compreender os processos cognitivos que levaram o aluno a essa conclusão (nesse caso, podemos considerar a interferência da apreensão perceptiva sobre a apreensão discursiva), bem como propor atividades que favoreçam a caracterização de figuras planas e espaciais, por meio da desconstrução dimensional das formas, a fim de promover a passagem do olhar icônico ao não icônico.

Consideramos também nessa categoria a importância do conhecimento do conteúdo do horizonte da matemática proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). A partir dessa perspectiva, especificamos e a direcionamos para o conhecimento do conteúdo do horizonte da geometria. É o conhecimento de como os conteúdos da geometria estão relacionados ao longo do currículo, não só nos anos iniciais, mas também com conceitos que serão abordados muito posteriormente.

5.1.2 Conhecimento da didática da matemática

Poderíamos conceber o conhecimento da didática da matemática como uma subcategoria do conhecimento pedagógico proposto por Shulman (1986), porém temos como intento, nessa proposta, direcionar e refinar o nosso olhar sobre a matemática, mais especificamente, para a geometria. Nesse sentido, nos alinhamos à perspectiva de Silva e Lima (2015), dando destaque ao conhecimento da didática da matemática como um componente importante nos processos de ensino e aprendizagem dessa área.

Essa categoria de conhecimento contempla os “[...] processos de ensino e de aprendizagem especificamente de Matemática, as teorias, processos e práticas que dizem respeito ao ensino e a aprendizagem de conceitos desta área” (SILVA; LIMA, 2015, p. 5), ou seja, as reflexões didáticas relativas ao ensino da matemática. Dentre as várias vertentes teóricas da didática da matemática, daremos destaque, nesta categoria, à teoria dos registros de representação semiótica, por se tratar de uma teoria da aprendizagem da matemática, que possibilita a compreensão das operações semiocognitivos que estão presentes no processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, considerando as funções discursivas da linguagem.

5.1.3 Conhecimento dos processos semiocognitivos presentes na aprendizagem da geometria

Esse conhecimento abrange o refinamento da maneira de olhar em geometria, levando em consideração as funções discursivas da linguagem, a desconstrução dimensional das formas, as apreensões e a passagem do olhar icônico ao não icônico nos processos de ensino e aprendizagem.

Segundo Duval (2011), existe uma diferença significativa entre ver um desenho e uma figura. “O desenho é a configuração particular que mostra no papel [...] a figura seria as propriedades do objeto representado pelo desenho ou, ainda, a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto” (DUVAL, 2011, p. 91). Sendo assim, existe um salto cognitivo entre a maneira normal e a maneira matemática de ver uma figura.

Observando a imagem da Figura 86 como um desenho, por exemplo, não enxergamos as suas propriedades matemáticas. As crianças dos anos iniciais, dificilmente, são capazes de reconhecer a figura geométrica em sinergia com as indicações contidas no enunciado. Contudo, cabe ao professor pedagogo, conduzir o olhar das crianças para ver a figura como um complemento do discurso, mas isso “[...] exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas” (DUVAL, 2011, p. 88).

Figura 86 – Atividade de geometria.

Na figura, temos a representação de um triângulo de vértices A, B e C. Sabendo que o ângulo C mede 90°, identifique os lados que representam a altura do triângulo.

Fonte: A autora[53]

É preciso que o professor tenha o conhecimento de que, para a resolução dessa questão, por exemplo, a maneira matemática de ver a figura requer que sejam consideradas as

[53] Imagem disponível em: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=conclusao&wq=577. Acesso em: 20 jul. 2021.

funções discursivas da língua (referencial, apofântica, expansão discursiva), em sintonia com a desconstrução dimensional das formas. A desconstrução dimensional do triângulo (2D) em unidades dimensionais 1D e 0D permitirá o acesso as propriedades discursivas do objeto (altura).

A decomposição do triângulo ABC, em segmentos de reta AB, AC e BC, mostra a posição relativa entre esses segmentos, assegurando por meio do discurso, a perpendicularidade entre os lados AC e BC, visto que C indica, além de um vértice (0D), um ângulo reto. Dessa maneira, a desconstrução dimensional da forma permite a expansão discursiva, evidenciando que os lados que representam as alturas do triângulo coincidem com os seus catetos.

Percebe-se que ao variar as unidades dimensionais do triângulo da Figura 86, permitiu-se reconhecer outras unidades figurais que não eram percebidas num primeiro momento, mas que se tornaram importantes para a resolução do problema. Essa tomada de consciência da desconstrução dimensional das formas é que vai permitir a passagem do olhar icônico ao não icônico.

5.1.4 Conhecimento didático do conteúdo de geometria

Esse conhecimento torna-se importante, pois dentre todos os domínios do conhecimento que o aluno deve aprender "[...] a geometria é aquele que exige a atividade cognitiva mais complexa, visto que ela solicita o gesto, a linguagem e o olhar. É necessário construir, raciocinar e ver inseparavelmente" (DUVAL, 2005b, p. 5). Como consequência, isso torna a geometria um dos domínios mais difíceis de ensinar, podendo ser mais complexo ainda nos anos iniciais, quando o objeto geométrico corre o risco de ser confundido com as suas representações físicas.

Na organização de sequências de atividades, os diferentes registros de representação semiótica permitem definir "o campo de trabalho cognitivo requerido" (DUVAL, 2011, p. 141) para a compreensão dos conhecimentos de geometria, bem como evidenciar os pontos de bloqueios dos alunos no processo de aprendizagem.

O campo de trabalho cognitivamente requerido para as aulas de geometria nos anos iniciais, segundo Duval (2011), comporta duas dimensões: a primeira diz respeito ao aspecto dos objetos geométrico, seja a forma, abarcando as operações específicas de reconhecimento e de desconstrução dimensional, seja o aspecto grandeza e suas operações de medida e de cálculo. "Toda atividade que mistura esses dois aspectos cria *ipso facto* a impossibilidade de entrada na maneira de ver matemática que é requerida em geometria" (DUVAL, 2011, p. 142). A segunda dimensão concentra-se na sequência temporal das atividades a serem propostas.

A partir de Duval (2011), fazendo algumas adaptações, construímos o Quadro 12 que pode orientar o trabalho didático do pedagogo para ensinar geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

Quadro 14 - Fases de uma sequência de atividades.

<table>
<tr><th colspan="2">I
Manipular os objetos físicos</th><th>II
Verbalização silenciosa</th><th>III
Ver as unidades figurais 1D e 0D nas configurações de forma 2D</th><th>IV
Verbalização silenciosa</th><th colspan="2">V
Designação verbal das unidades figurais pertinentes e suas relações</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ação material

Operações reversíveis</td><td rowspan="2">Reconhecimento das formas geométricas por meio da representação auxiliar de transição</td><td rowspan="2">Expressão verbal das operações envolvidas nas ações de manipulação de suportes materiais, com as palavras dos alunos, para fazer tomar consciência da operação de reversão e de seu resultado</td><td rowspan="2">Utilizar instrumentos 1D ou 2D para traçados 1D

Prolongamentos, alinhamentos, relações, transcrição de comprimento sem régua graduada</td><td rowspan="2">Tomar consciência das operações de designação próprias da linguagem geométrica e a dupla designação dos mesmos objetos</td><td>Modo oral de produção</td><td>Modo escrito</td></tr>
<tr><td>Designação reduzida dos traços a realizar (ou realizados) sobre a figura</td><td>Elaboração de uma mensagem de instrução reutilizável por outros ou por si mesmo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sem a utilização de grandezas</td><td></td><td>Sem a utilização de grandezas</td><td></td><td></td><td>Sem cálculo</td></tr>
</table>

Fonte: A autora a partir de Duval (2011)

É preciso ressaltar que esse quadro não pode ser tomado como uma *receita* com etapas a serem desenvolvidas rigorosamente. Ele apenas ressalta alguns processos cognitivos importantes a serem considerados no processo de aprendizagem da geometria, que inferimos serem relevantes no repertório de conhecimentos dos professores pedagogos como, por exemplo, as funções discursivas da língua e a desconstrução dimensional, contemplados pelas fases da sequência de atividades.

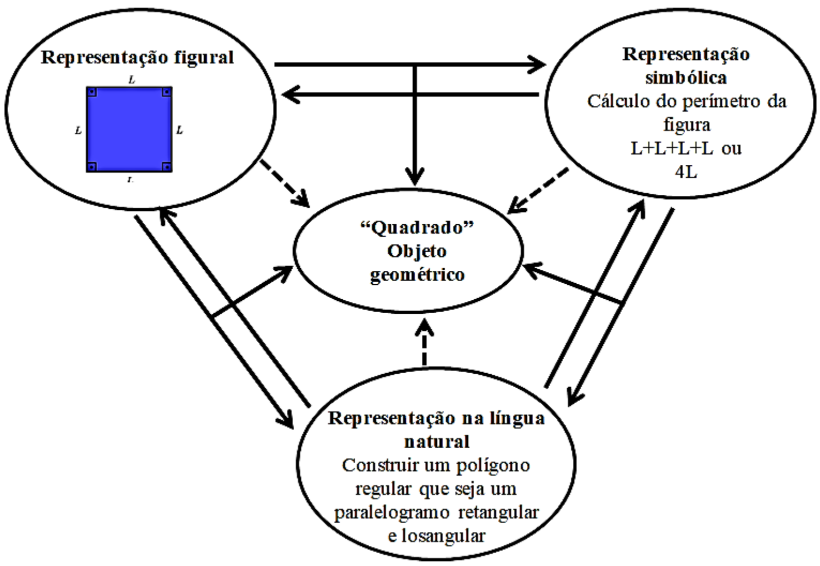
5.1.5 Conhecimento didático dos processos semiocognitivos da aprendizagem de geometria

Consiste em saber como, didaticamente, o professor pode intervir para conduzir o aluno a adentrar no modo de ver geometricamente uma figura, pela criação de um ambiente favorável a passagem do olhar icônico ao não icônico, por meio de atividades que considerem a decomposição dimensional das formas em sinergia com o discurso, levando em conta a importância das apreensões em geometria. Exemplificando: nos anos iniciais, propor uma atividade de nomeação de polígonos, apesar de ser importante, não possibilita a passagem do olhar icônico ao não icônico. É preciso introduzir operações de mudança dimensional para que seja possível visualizar as propriedades da figura em sinergia com as funções discursivas. Esse conhecimento e essa compreensão são essenciais aos pedagogos na condução do processo de ensino da geometria.

5.1.6 Conhecimento dos processos semiocognitivos desenvolvidos pelos conteúdos da geometria

Primeiramente temos que considerar que existem representações diferentes para um mesmo objeto geométrico, e que a mudança da forma do objeto altera o conteúdo da sua representação.

Figura 87 - Representações diferentes para o objeto geométrico quadrado.



Fonte: A autora

No esquema, as semirretas paralelas em sentidos opostos indicam uma conversão entre os diferentes registros de representação semiótica para o objeto geométrico *quadrado*. Essas representações possíveis compõem uma tessitura que agem conjuntamente e complementarmente para possibilitar o acesso ao objeto. De cada representação parte uma seta pontilhada para o centro da figura, fazendo a distinção entre o representante (conteúdo específico a cada tipo de representação) e o representado (o objeto do conhecimento quadrado).

O esquema acima pode ser um exemplo dos possíveis registros de representações para referenciar o objeto. Na representação figural, podem ser mobilizadas, num primeiro olhar, as operações cognitivas de visualização e de apreensão perceptiva das formas. Mas, o que vai favorecer o reconhecimento das propriedades do quadrado será a conexão entre a desconstrução dimensional das formas e as operações de expansão discursiva.

Reconhecer o quadrado, por meio das propriedades discursivas, como um polígono que possui as características de um paralelogramo regular, retângulo e losango, requer que ele transite da dimensão 2D, para a dimensão 1D. Isso porque, para ser um paralelogramo, o polígono precisa ter os lados (1D) opostos paralelos. Este deve ter os lados (1D) com as mesmas medidas para ser regular, e, consequentemente, por ter quatro lados congruentes, atender uma das propriedades do losango. Para ser classificado como retângulo necessita ter os ângulos retos (posição relativas entre duas retas). “Essas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados. [...] Não podemos jamais ter certeza se o que é dado a ver representa realmente a propriedade desejada [...]” (DUVAL, 2011, p. 91).

A representação simbólica, do esquema, refere-se ao conteúdo de cálculo e às operações envolvidas no perímetro do quadrado, podendo ser uma expressão numérica ou algébrica. Essa representação simbólica não pode ser confundida com a representação na língua natural, uma vez que esta tem funções específicas do discurso, que para além da função de comunicação, apresenta a função de designação do objeto.

Percebe-se que cada registro mobiliza um conteúdo e um sentido diferente, mas se referem ao mesmo objeto. Esta complementariedade, segundo a teoria de Duval faz com que o estudante acesse ao objeto do conhecimento, encontrando em cada registro de representação e na imprescindível coordenação entre eles, facetas de um mesmo objeto.

> Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é de mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. As operações semióticas próprias aos diferentes

> registros utilizados na matemática constituem os gestos intelectuais necessários e não importa em qual atividade matemática (DUVAL, 2011, p. 73).

As setas que atravessam as semirretas paralelas indicam o gesto intelectual necessário para a compreensão do objeto do conhecimento. Isso porque, o acesso ao objeto matemático e a compreensão conceitual, de acordo com Duval (2012a), depende da coordenação de, no mínimo, dois registros de representação semiótica.

5.1.7 Conhecimento dos processos semiocognitivos desenvolvidos pela abordagem didática dos conteúdos da geometria

Nessa categoria, espera-se que o professor pedagogo, fundamentado nos conhecimentos específicos da geometria e nas teorias da didática da matemática (principalmente a teoria dos registros de representação semiótica), possa conduzir o processo de ensino da geometria, nos anos iniciais do ensino fundamental, estando consciente das operações semiocognitivas que envolvem a aprendizagem desta, bem como das funções discursivas. Essa categoria de conhecimento deverá permitir ao professor pedagogo maior autonomia na sua ação pedagógica, promovendo a inserção dos alunos nos modos de ver geometricamente uma figura, favorecendo a passagem do olhar icônico ao não icônico.

O modelo do conhecimento especializado do pedagogo para ensinar geometria, que apresentamos aqui, envolve um entrelaçamento especial entre quatro fontes de conhecimentos importantes na condução do processo de ensino da geometria: o conteúdo de geometria, a didática da matemática, os processos semiocognitivos da aprendizagem da geometria, todos imersos e envoltos pelas funções discursivas da língua.

Diante das complexidades presentes na aprendizagem da geometria e na tentativa de encontrar os conhecimentos necessários ao pedagogo para ensinar geometria nos anos iniciais, percebemos a importância de acrescentar o conhecimento das operações semiocognitivas, acionadas no processo de aprendizagem da geometria, nas categorias de conhecimentos necessários à docência.

A contribuição do nosso modelo é dar destaque ao conhecimento das operações cognitivas envolvidas na aprendizagem da geometria, como um saber importante para o professor pedagogo. Desse modo, inferimos que este necessita do conhecimento do conteúdo de geometria, do conhecimento da didática da matemática, do conhecimento dos processos semiocognitivos presentes na aprendizagem da geometria, do conhecimento didático do conteúdo de geometria, do conhecimento didático dos processos semiocognitivos da aprendizagem de geometria, do conhecimento dos processos semiocognitivos, desenvolvidos pelos conteúdos da geometria, e do conhecimento dos processos semiocognitivos desenvolvidos pela abordagem didática dos conteúdos da geometria para ensinar e conduzir o processo de aprendizagem desta com mais autonomia, possibilitando ao aluno entrar na maneira matemática de ver uma figura.

Essas categorias, do conhecimento especializado do pedagogo para ensinar geometria, encontram-se em sinergia e atuando conjuntamente de forma dinâmica. A tessitura formada pelo estabelecimento dessa rede de conexões pode contribuir com a formação matemática do pedagogo para enfrentar os problemas de ensino e de aprendizagem da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa emergiu ao longo da minha trajetória profissional, atuando tanto como professora de matemática na educação básica, quanto na formação continuada de professores pedagogos. A dificuldade para ver geometricamente uma figura apresentada pelos alunos do ensino fundamental II e os conceitos deturpados que estes apresentavam, sempre foi um fator intrigante na minha prática pedagógica.

Atuando na formação matemática de professores pedagogos e percebendo como o ensino da geometria era desconcertante para esses profissionais, comecei a pensar que essa fragilidade conceitual em geometria dos professores dos anos iniciais, poderia estar repercutindo na aprendizagem dos alunos dos anos finais do ensino fundamental e até mesmo do ensino médio. Visto que, os professores pedagogos têm o importante papel de introduzir e apresentar às crianças as primeiras ideias formais da matemática escolar.

Sendo assim, este trabalho é uma tentativa de mostrar a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos construíram, a partir de um programa de formação continuada, desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria.

Para tanto, nossa preocupação inicial foi encontrar uma metodologia de pesquisa que unisse o mundo da pesquisa e o da prática docente num espaço colaborativo, embrenhada na teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria e que ainda contemplasse as etapas da engenharia didática de primeira geração. Nessa procura, vimos emergir uma perspectiva metodológica constituída por uma tessitura entre a Engenharia Didática de 1ª geração, a Pesquisa Colaborativa, a Engenharia Didática Colaborativa e a teoria semiocognitiva de Duval para a aprendizagem da geometria. Assim, considerando alguns aspectos de cada uma dessas vertentes, para melhor atender aos propósitos desta pesquisa, desabrochou a Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria (EDCAGE) como uma possibilidade metodológica. Isso para garantir a participação ativa dos professores na construção de um programa de formação sobre a aprendizagem da geometria para os anos iniciais, assegurando o seu protagonismo tanto nos estudos teóricos quanto na elaboração de atividades de geometria que contemplassem as operações semiocognitivas no processo de aprendizagem.

A metodologia de trabalho foi um dos diferenciais desse programa de formação, como destacado pelas professoras que participaram da pesquisa. Nós proporcionamos momentos de estudo teóricos intercalados com atividades de geometria, que para além de contemplar os elementos fundamentais da geometria, consideraram a desconstrução dimensional das formas como uma maneira de conduzir o olhar delas na percepção das propriedades dos objetos geométricos. Então, nada estava pronto, tudo precisou ser construído, por meio de um trabalho colaborativo entre nós (formadora/pesquisadora) e as professoras. Elas também salientaram a importância de desenvolver programas de formação em que a teoria possa estar acompanhada da prática, ambas mergulhadas num espaço colaborativo que favoreça a troca de experiências.

Historicamente, vimos que a formação docente, desde a sua institucionalização como profissão, sempre esteve atrelada a interesses políticos governamentais, o que pode ser percebido ainda na atualidade. Os documentos oficiais que orientam o trabalho do professor, por vezes parecem estar mais preocupados com os processos metodológicos do ensino (como ensinar) do que necessariamente com os conhecimentos necessários à docência. Nesse caso, a geometria não passa somente pelo conhecimento específico do conteúdo (face exposta da matemática), mas também pelo conhecimento das operações semiocognitivos presentes na aprendizagem da geometria (face oculta da matemática), como destacamos ao longo deste trabalho.

O desenvolvimento do programa de formação, com as professoras pedagogas, nos permitiu constatar que, realmente, a formação em geometria que elas tiveram durante a sua trajetória estudantil foi tão insignificante que muitas delas nem lembravam mais. Os cursos de graduação em pedagogia, que essas professoras frequentaram, destinaram uma carga horária insignificante para a formação em matemática e os conhecimentos geométricos nem chegaram a ser contemplados, ratificando o que as análise prévias, na perspectiva do pesquisador [1], já apontavam. Esses fatores, entre outros, acabaram contribuindo para que elas adotassem o livro didático como uma das principais fontes de conhecimentos em geometria para subsidiar a sua prática pedagógica.

Nesse contexto problemático, sentimos a necessidade de buscar na teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, proposta por Duval, elementos que pudessem ampliar a compreensão das professoras sobre esse processo de aprendizagem. Para tanto, desenvolvemos um programa de formação continuada com 11 professoras pedagogas, que abordou o processo de aprendizagem da geometria através da desconstrução dimensional das formas, considerando as funções discursivas da língua, as apreensões e os olhares em geometria.

Nos encontros de formação foram realizados estudos teóricos ilustrados por atividades de geometria, que visaram caracterizar os principais conceitos abordados no texto.

Percebemos que as professoras, na medida em que resolviam as atividades, experienciavam e vivenciavam as operações semiocognitivas requeridas na resolução do problema e assim puderam estabelecer as conexões possíveis entre a teoria e a prática.

É importante destacar que a utilização de instrumentos, na construção de figuras, não era considerada importante pelas professoras no início do programa de formação. Elas tomaram consciência da sua importância para a compreensão das propriedades geométricas, a partir do momento em que experimentaram a utilização dos instrumentos no desenvolvimento das atividades. Conforme o relato das mesmas, elas assumiram o papel de aprendizes, constatando as dificuldades que as crianças experimentam nos modos de entrar na maneira de ver geometricamente uma figura e como a utilização de instrumentos pode facilitar a compreensão das propriedades do objeto geométrico.

Essa experiência nos fez depreender que é possível estabelecer uma via de mão dupla entre a academia e a prática docente dos pedagogos. Visto que, embora as leituras propostas na formação não fizessem parte do universo teórico das professoras participantes da pesquisa, elas foram capazes de se apropriarem de muitos conceitos abordados nesses textos. O estudo teórico e as atividades de geometria que consideraram as operações semiocognitivas, desenvolvidas durante os seis primeiros encontros, subsidiaram as professoras na elaboração e na aplicação de uma sequência de atividades de geometria, bem como na análise das respostas obtidas de acordo com a perspectiva semiocognitiva. Ou seja, a fundamentação teórica foi primordial para que elas desempenhassem o papel de protagonistas na elaboração de atividades que visaram a aprendizagem da geometria.

É possível que o desenvolvimento deste trabalho tenha apontado para a necessidade de se criar formatos de programas de formação para professores pedagogos, não somente em geometria, mas também em outros campos do conhecimento. Estimamos que a Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria seja uma proposta viável para o desenvolvimento de outros programas de formação. Mantendo a sua essência, que é o trabalho colaborativo, o estudo teórico com atividades ilustrativas, os aspectos semiocognitivos e o empoderamento do professor, e fazendo algumas adaptações, vislumbramos a possibilidade de cogitar, por exemplo, uma Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Álgebra, Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem das Operações em N, etc.

Pressupomos que, mais importante do que dizer aos professores pedagogos *o que fazer* para conduzir o processo de aprendizagem da geometria, é investir na capacitação teórica/conceitual desses profissionais, fazendo-os perceber que um mesmo objeto geométrico pode ser representado por diferentes registros de representação semiótica, onde devem ser consideradas as transformações semióticas de tratamento e conversão. Uma vez que, segundo Duval (2011), o primeiro estágio para a compreensão em matemática encontra-se na conversão, que caso da geometria, situa-se na coordenação entre a linguagem e a visualização.

Nesse sentido, o desenvolvimento desta pesquisa fez surgir reflexões, que não eram esperadas, a respeito dos conhecimentos necessários ao professor pedagogo para ensinar geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. Percebemos que, para além de todos os conhecimentos necessários à docência, o conhecimento dos processos semiocognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria podem ser essenciais para conduzir o trabalho pedagógico.

Assim, apresentamos a proposta do conhecimento especializado para o professor pedagogo ensinar geometria, composta por: conhecimento do conteúdo de geometria, conhecimento da didática da matemática, conhecimento dos processos semiocognitivos presentes na aprendizagem da geometria, conhecimento didático do conteúdo de geometria, conhecimento didático dos processos semiocognitivos da aprendizagem de geometria, conhecimento dos processos semiocognitivos desenvolvidos pelos conteúdos da geometria, e, por fim, conhecimento dos processos semiocognitivos desenvolvidos pela abordagem didática dos conteúdos da geometria.

Essa proposta pode ser um alerta sobre as necessidades específicas que esse campo do conhecimento matemático exige. Conhecer somente o conteúdo de geometria pode não ser garantia de sucesso para o professor pedagogo conduzir o processo de ensino desta nos anos iniciais.

Em se tratando de uma estrutura multifacetada, como é o conhecimento do professor que ensina matemática, estamos cientes de que precisamos avançar ainda mais em uma proposta de conhecimento especializado do professor pedagogo para ensinar geometria. Contudo, essa continuidade abre espaço para pesquisas futuras, pois como já ressaltamos, anteriormente, esses escritos não haviam sido cogitados quando iniciamos esta pesquisa.

Pensando nos conhecimentos necessários ao pedagogo para ensinar geometria, inferimos que seja importante estabelecer uma aproximação entre a teoria e a prática pedagógica desses profissionais nos espaços de formação, considerando a importância do ambiente colaborativo para a aprendizagem da geometria. Assim, provavelmente eles levarão essas experiências para as salas de aulas, como apontado nos resultados da nossa pesquisa, em que as professoras P5 e P10 deram continuidade ao trabalho da sequência didática, abordando outros objetos geométricos, seguindo a perspectiva semiocognitiva assumida durante o programa de formação.

Contudo, supomos que essa continuidade só foi possível graças ao desenvolvimento do programa de formação, que, ao que tudo indica, parece ter ampliado o olhar dessas professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria. Mas, até chegar nesse ponto, elas precisaram percorrer uma trajetória de desconstrução do que elas entendiam por geometria e o seu processo de aprendizagem, para reconstruí-la pelo confronto do "[...] *que sabíamos com os novos conhecimentos, assim ressignificamos nossas próprias práticas escolares*" (P10). Supomos que esses novos conhecimentos estejam diretamente relacionados à teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria e também às descobertas a respeito das propriedades dos objetos geométricos, promovidas pelas atividades por elas realizadas durante os encontros de formação.

Nesse contexto, inferimos que a metodologia adotada para desenvolver nosso programa de formação propiciou as professoras, além de todas as outras aprendizagens, a aprendizagem dos objetos geométricos, abordados durante os encontros de formação, e a aprendizagem para ensinar geometria nos anos iniciais, considerando para além do conteúdo geométrico a importância das operações semiocognitivas envolvidas nos processos de aprendizagens desse campo do conhecimento matemático.

Observamos, inicialmente, que foi motivo de surpresa para as professoras reconhecerem os diferentes registros utilizados para representar um mesmo objeto geométrico e perceberem que, dependendo do registro escolhido, muda-se o conteúdo. Tanto é que, elas apresentaram dificuldades para representar o mesmo objeto geométrico utilizando dois registros de representação semióticos diferentes.

Nas primeiras atividades desenvolvidas com as professoras, elas não tinham consciência da importância da sinergia entre a visualização e o discurso para reconhecer as propriedades figurais. Prova disso foi quando desenhamos no quadro o protótipo de um ângulo reto, sem nenhuma indicação discursiva ou formal, e elas prontamente o identificaram como um ângulo de 90º. Da mesma forma, como elas também não reconheciam que a figura geométrica permanecia com as suas propriedades ao ser rotacionada.

A dificuldade de operar as figuras, por vezes esteve relacionada à apreensão perceptiva e outras vezes pelo desconhecimento das propriedades elementares do objeto geométrico. Exemplificando, as professoras não diferenciavam as formas geométricas de dimensões diferentes. Então, um retângulo (2D) e um paralelepípedo (3D) eram considerados o mesmo objeto. Isso foi sendo superado gradativamente ao longo dos encontros de formação, mediante a nossa intervenção com questionamentos que procuravam desestabilizar a compreensão que elas tinham. Conforme o relato das professoras, essa nossa atitude serviu para que elas, num processo reflexivo, pudessem se *reconstruir*, como bem destacou a professora P10.

No conjunto de todas as resoluções apresentadas pelas professoras para as atividades de geometria propostas durante os encontros de formação, observamos que as dificuldades iniciais foram sendo superadas no decorrer do processo. É provável que esse fato esteja relacionado à presença dos Elementos Transversais para a Aprendizagem da Geometria em sinergia com as operações discursivas da língua requeridas durante a solução dos problemas. É importante ressaltar que as professoras, na medida em que as dificuldades apareciam durante a resolução das atividades, tomavam consciência das suas limitações e da necessidade de continuar estudando a temática, a fim de melhor conduzir o processo de aprendizagem da geometria.

Foi perceptível o desenvolvimento do olhar delas sobre a geometria durante o programa de formação. Aquele primeiro olhar, preso ao contorno imediato das formas foi aos poucos sendo ampliado, alcançando o olhar inventor. Prova disso foi que, nos primeiros encontros de formação, as professoras percebiam os polígonos como figuras incapazes de sofrer qualquer tipo de transformação. O quadrado era apenas um quadrado e nada mais, ou seja, não cogitavam a possibilidade de que ao dividi-lo em duas partes iguais, surgiriam três figuras. No entanto, no quinto encontro de formação, observamos que elas já foram capazes de constatar, pela construção e pela decomposição dimensional do hexágono, que é possível perceber outras formas geométricas que não eram percebidas num primeiro golpe de vista.

Essa ampliação do olhar das professoras ficou ainda mais evidente no momento da elaboração das atividades que visaram à aprendizagem da geometria pela desconstrução dimensional das formas. A frustração delas em não encontrar nos livros didáticos atividades que contemplassem a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, foi um momento marcante. Elas foram desafiadas a deixar de lado o seu maior aliado na condução do processo de aprendizagem da geometria e alçar voos em busca de novos horizontes.

Observamos que quando as professoras perceberam a ausência de atividades de geometria, que considerem a desconstrução dimensional, nos livros didáticos, ficaram desorientadas, perdidas. Isso porque, como elas mencionaram, não é fácil ensinar aquilo que não se sabe. Então, o que resta é seguir as instruções do livro didático para ensinar geometria. Como se fosse possível aprender geometria nos anos iniciais, limitando-se apenas ao uso do livro didático.

Inicialmente, as professoras ficaram desnorteadas, pois não puderam contar com o auxílio do seu maior aliado na elaboração das atividades, mas a partir das conversas que fomos tendo com as equipes, num trabalho colaborativo, percebemos que elas ressignificaram os estudos teóricos e as atividades que havíamos realizado durante a formação, e conseguiram transpor esses conhecimentos e elaborar uma sequência de atividades de geometria que considerou a perspectiva semiocognitiva na aprendizagem desta, a qual foi desenvolvida com os seus alunos.

A equipe de professoras ao elaborar a primeira questão, da sequência de atividades, procurou conduzir o olhar dos alunos a perceberem propriedades comuns do cubo, mesmo ele estando em representações físicas diferentes (molde em cartolina e montado na forma espacial). Ou seja, as crianças precisaram imaginar as transformações possíveis da planificação do cubo para a sua representação espacial ou vice-versa e, apesar dessa movimentação, perceber que algumas características não variavam, como, por exemplo, os seis quadrados. Interessante foi perceber que as professoras procuraram desafiar as crianças, proporcionando momentos de reflexão em que estas formularam e validaram as suas hipóteses durante o desenvolvimento desse problema. Isso pode significar que as professoras, por sentirem-se mais seguras conceitualmente, conseguiram ampliar o discurso sobre o objeto geométrico em estudo.

As professoras, ao proporem a segunda questão, procuraram fazer com que os alunos pudessem operar o cubo pela desconstrução dimensional das formas, ao solicitarem que eles contornassem todas as faces do cubo. Dessa maneira, a forma espacial do cubo seria reduzida a dimensão 2D e 1D, pois seriam formados quadrados (2D) a partir dos traçados (1D) dos contornos das faces. A partir dessa desconstrução dimensional, elas desejavam que os alunos percebessem propriedades específicas dos objetos geométricos em destaque. Melhor dizendo, elas proporcionaram aos alunos a descoberta de características do cubo através desconstrução dimensional.

Na elaboração da terceira atividade da sequência, parece que as professoras procuraram fazer com que os alunos percebessem que é possível realizar tratamentos com uma figura. Nesse sentido, eles deveriam transformar o quadrado em outras formas possíveis de mesma dimensão, pela adição do traçado que o dividiria ao meio. É importante destacar que, embora as professoras tivessem consciência da importância do desenvolvimento desse tipo de olhar, elas já previam que as crianças não conservariam a figura inicial e perceberiam apenas duas figuras, uma vez que, elas apresentaram essa mesma dificuldade no início do programa de formação.

Os olhares de todos os participantes, na elaboração do desafio, estiveram voltados a fazerem os alunos operarem, obrigatoriamente, a superfície dos diferentes contornos do cubo pela desconstrução dimensional da forma, fazendo-os mobilizar as propriedades conceituais do cubo na resolução do problema, permitindo assim, a tomada de consciência das propriedades do objeto geométrico em sinergia com as suas operações discursivas.

Nesse contexto, inferimos, por intermédio do processo de elaboração das atividades, que a compreensão das professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria foi ampliada, pois elas desconsideraram, nesse processo de elaboração, a aplicação de fórmulas e conceitos predefinidos. Mas, pelo contrário, foi por meio da desconstrução dimensional das formas que elas procuraram fazer com que os alunos percebessem as propriedades conceituais da figura, impostas na resolução das atividades.

Essa compreensão das professoras, em considerar as operações semiocognitivas no processo de aprendizagem da geometria, também pode ser percebida na etapa da formação em que elas confrontaram as suas hipóteses, sobre as suas expectativas a respeito da resolução das atividades pelos alunos, com as respostas que foram apresentadas por eles. De maneira geral, percebemos que muitas hipóteses foram confirmadas pelas professoras. Uma dessas hipóteses foi referente à primeira atividade da sequência, em que a maioria delas esperava que os alunos relacionassem a planificação do cubo com o sólido montado, ao perceberem que tanto a forma tridimensional quanto a bidimensional possuem propriedades comuns.

Outra hipótese confirmada pela maioria das professoras foi quanto à resolução da atividade II. Elas já esperavam que os alunos fossem capazes de fazer a representação planificada do cubo e observar características comuns pela decomposição dimensional das formas. Contudo, foram surpreendidas pelas dificuldades de coordenação visual motora apresentadas pelas crianças. Apenas algumas professoras tinham pensado nessa possibilidade antes da aplicação das atividades, porém não consideravam que pudesse chegar a ser um impedimento para os alunos.

A nosso ver, uma das mais importantes hipóteses confirmadas, por todas as professoras, foi a de que os alunos não conseguiriam perceber as três formas geométricas pela divisão do quadrado ao meio. Visto que, nessa atividade, elas previam que o processo de desconstrução dimensional das formas precisaria acontecer em sinergia com outras operações cognitivas. Entre elas, a apreensão perceptiva, que seria uma das portas de entrada para ver a figura geometricamente. Isso poderia impedir o olhar dos alunos sobre a figura, dificultando a identificação das três formas geométricas.

Referente à atividade III, é necessário destacar a preciosidade do olhar das professoras sobre a análise das possíveis causas para justificar que todos os alunos respondessem que só perceberam duas figuras após a divisão do quadrado (item *b*). Além da apreensão perceptiva, elas analisaram a formulação do enunciado da questão. Conforme o relato delas, a maneira como a produção discursiva foi posta, pode ter levado os alunos a fazerem uma interpretação diferente da que foi esperada, ocasionando insucesso na resolução do problema. A nosso ver, esse despertar das professoras para as questões discursivas pode ser mais uma evidência de que, a partir do programa de formação continuada desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria, elas compreendem ser importante considerar as operações semiocognitivas na condução do processo de aprendizagem da geometria.

Para surpresa de todas as professoras, a hipótese de que os alunos não conseguiriam resolver o desafio, não foi confirmada. Isso as deixou, durante a aplicação das atividades, estarrecidas e sem entender o que estava acontecendo, porque até elas ficaram em dúvida de como poderia ser feita a representação espacial do cubo a partir de certas planificações.

Na análise das professoras, sobre o sucesso dos alunos na resolução do desafio, foi apontado que as atividades desenvolvidas antes de apresentar o desafio contribuíram para esse resultado, posto que, essas atividades foram abordando propriedades geométricas da figura espacial pela desconstrução dimensional das formas. Os conceitos não estavam prontos, o olhar das crianças foi sendo desenvolvido ao longo da sequência de atividades.

Concluímos assim que, para além das professoras terem compreendido a importância de conduzir o processo de aprendizagem da geometria pela desconstrução dimensional das formas, contribuindo para a passagem do olhar icônico ao não icônico, elas também perceberam que existe a necessidade de promover um longo trabalho com os alunos para que eles possam desenvolver a habilidade de análise visual das figuras, permitindo que eles possam entrar na maneira de ver geometricamente uma figura.

Os desafios da formação em geometria dos professores pedagogos exigem a continuação de pesquisas, principalmente, no que se refere à condução do processo de aprendizagem da geometria na perspectiva semiocognitiva. Nesse sentido, as reflexões, presentes neste trabalho, não se esgotam, mas nos remetem a alguns questionamentos que poderão subsidiar futuras pesquisas. São esses: como conscientizar os elaboradores de programas de formação continuada, para professores pedagogos, sobre a importância de se considerar os elementos semiocognitivos como um caminho possível para que esses profissionais assumam o seu papel de protagonistas na condução do processo de aprendizagem da geometria? De que modo a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria pode ter o seu espaço nos currículos dos cursos de pedagogia? Quais os impactos a longo prazo do nosso programa de formação na aprendizagem das crianças envolvidas na pesquisa? Quais as dificuldades impostas nas futuras práticas pedagógicas das professoras para dar continuidade ao trabalho iniciado nesse programa de formação? Como será a performance das professoras, participantes da pesquisa, nas práticas de ensino da geometria, a partir do programa de formação? Em poucas palavras, essas são algumas das reflexões que emergem deste trabalho, que podem apontar desdobramentos para outras pesquisas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. X. **As concepções de professores ao ensinar quadriláteros nos anos iniciais do ensino fundamental e as possibilidades de contribuições das tic.** 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2010.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22. Acesso em: 12 de abr. 2020.

ANTUNES, J. A.; ZWETSCH, P. S.; SARTURI, Rosane Carneiro. As influências das orientações de organismos internacionais nas políticas públicas educacionais para a educação básica no Brasil. In: Congresso Nacional de Educação, 13, p. 3342-3355, 2017, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2018. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/26198_14006.pdf. Acesso em: 12 de abr. 2020.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? **Les Dossiers Des Sciences de L'éducation**, v. 8, n. 1, p. 59-72, 2002.

ARTIGUE, M. L´ingénierie didactique: un essai de synthèse. In: Margolinas *et al.*(org.): Em amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme**). Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, 2011. p. 220-232. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280853182_En_amont_et_en_aval_des_ingenieries_didactiques. Acesso em: 5 nov. 2021.

ARTIGUE, M. Perspectives on design research: the case of didactical engineering. In: Bikner-Ahsbahs A., Knipping C., Presmeg N. (eds) Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. **Avanços na Educação Matemática.** Springer, Dordrecht, 2015. p. 467-496. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02368164/file/Artigue-Methodologybook.pdf. Acesso em: 10 out. 2021.

BALL, D.L; THAMES, M.H.; PHELPS, G.. Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p.389-407, 2008.

BEDNARZ, N.; RINAUDO, J.; RODITI, É.. La recherche collaborative. **Carrefours de L'éducation**, France, v. 39, n. 1, p. 171-184, 2015. Disponível em: https://www.cairn.info/revue-carrefours-de-l-education-2015-1-page-171.htm. Acesso em: 21 ago. 2021.

BEDNARZ, N. Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques :Une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche. Actes du 61ème colloque de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, **CIEAEM**. Montréal, Quebéc, Canada, p. 1-20, 2009. Disponível em: http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme1-complet/cours-Bednarz-complet/docs-preparatoires/ConferenCIEAEM.pdf. Acesso em: 9 jan. 2020.

BOERO, P. Les domaines d´expérience dans l´enseignement – Apprentissage des mathématiques: Lier le travail scolaire a l´experience des eleves. In: Margolinas *et al.*(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, 2011. p. 108-145. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280853182_En_amont_et_en_aval_des_ingenieries_didactiques. Acesso em: 5 nov. 2021.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto – Portugal. Porto Editora, 1994.

BORGES, M. C.; AQUINO, O. F.; PUENTES, R. V.. Formação de professores no Brasil: história, políticas e perspectivas. **Revista Histedbr** (On-Line), v. 11, n. 42, p. 94-112, 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/312868268_Formacao_de_professores_no_Brasil_historia_politicas_e_perspectivas. Acesso em: 30 de mar. 2020.

BUCHMANN, M.. The priority of Knowledge and understanding in teaching. In : L. Katz & J. Raths (eds.), **Advances in Teacher Education**. Norwood: Ablex, p. 1-35, 1984.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CEF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio. Acesso em: 05 out. 2019.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; BASSOI, Tânia Stella . Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v.16, n.2, p. 479-503, 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/19476/pdf. Acesso em: 18 jul. 2020.

BRASIL. **Lei de 15 de outubro de 1827**. 1827. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei_sn/1824-1899/lei-38398-15-outubro-1827-566692-publicacaooriginal-90222-pl.html. Acesso em: 23 de abr. 2020.

BRASIL/MEC. **Decreto n. 6.755**, de 29 de janeiro de 2009. Institui a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, disciplina de atuação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior – CAPES – no fomento à programas de formação inicial e continuada, e dá outras providências. Brasília: 2009. Disponível em: http://www.soleis.com.br/D6755.htm. Acesso em 20 abr. 2020.

BRASIL. **Lei nº 1.190**, de 4 de abril de 1939. Dá organização à Faculdade Nacional de Filosofia. 1939. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-

1939/decreto-lei-1190-4-abril-1939-349241-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 24 de abr. 2020.

BRASIL. **Decreto-lei nº 8.530**, de 1 de janeiro de 1946. Lei Orgânica do Ensino Normal. 1946. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8530-2-janeiro-1946-458443-publicacaooriginal-1-pe.html.Acesso em: 12 de abr. 2020.

BRASIL. **Lei nº 5.692**, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Brasília: 1971. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. Acesso em: 24 de abr. 2020.

BRASIL. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 28 de mar. 2020.

BRASIL/MEC. **Resolução CNE/CP 1**, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília: 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso: 20 de abr. 2020.

BRASIL/MEC. **Resolução CNE/CP Nº 2**, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Brasília: 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file. Acesso: 20 de maio. 2020.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Cadernos de matemática. Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB,INEP, 2018. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/saeb_documentos_de_referencia_versao_1.0.pdf. Acesso em: 18 de maio. 2020.

BRASIL. **Matriz de referência de matemática**. Brasília: MEC, SEB, INEP, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 18 de maio. 2020.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-113.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

CATALÁN, M. C. M.; CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J.; ROJAS, N.; MONTES, M. Á; CLIMENT, N. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. **La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, v. 18, n. 3, p. 589-605, 2015.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas *et al.*(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble : La Pensée Sauvage, , v. 1, p. 79-105, 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280853182_En_amont_et_en_aval_des_ingenieries_didactiques. Acesso em: 5 nov. 2021.

COLL, C. **Psicologia e currículo**. São Paulo, SP: Editora Ática, 2001.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T.. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 9, p. 181-203, 2007. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/. Acesso em: 16 mar. 2012.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes:** uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. 2004. 278 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática (4º ano)**. São Paulo, SP: Ática, 2017.

D´ANTONIO, S. C. **O tutor e a formação inicial, em um curso na modalidade à distância, de professores que lecionam geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.** 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

DEMO, P. Conhecimento e aprendizagem: a atualidade de Paulo Freire. **Revista da ABENO**, Porto Alegre, v. *7*, n.1, p. 20–37, 2007.

DEROUET, C. **La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S.** Etude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d’introduction articulant lois à densité et calcul intégral. 2016. 661 f. Tese (Doutorado) - Didactique des disciplines – Mathématiques, Université Paris Diderot, Paris, 2016.

DEROUET, C. La fonction de densite au carrefour entre probabilites et analyse. Une ingenierie didactique en classe de terminale scientifique. **Actes du séminaire national de l’ARDM** , Paris, p. 174-193, 2017.

DESGAGNÉ, S. O conceito de pesquisa colaborativa: a ideia de uma aproximação entre pesquisadores universitários e professores práticos. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 29, n. 15, p. 7-35, 2007.

DESGAGNÉ, S; BEDNARZ, N; LEBUIS, P; POIRIER, L; COUTURE, C. L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. **Revue des sciences de l'éducation**, Montréal (Québec), v. 27, n. 1, p. 33-64, 2001.

DUARTE, N. Conhecimento tácito e conhecimento escolar na formação do professor (por que Donald Schön não entendeu Luria). **Educação e Sociedade,** Campinas, v. 24, n. 83, p. 601-625, 2003. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em : 12 jun. 2020.

DUVAL, R. Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. Répères. **Pont-à-Mousson**, Topiques éditions, n. 17, p. 121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. p.142-157.

DUVAL, R. Décrire, visualiser ou raisonner : quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? **Annales de didactique et sciences cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 8, p. 13-62, , 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: RESTREPO, Myriam Vega. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004a.

DUVAL, R. **Los problemas fundamentales em el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores em el desarrollo cognitivo**. Traducción: RESTREPO, Myriam Vega. Colombia: Merlín I. D. Cali, 2004b.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005a. p. 11-33.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l' apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n.10, p. 5-53, 2005b. Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/. Acesso em: 5 mar. 2018

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. (Org.) CAMPOS, Tânia M. M. Tradução: DIAS, Marlene Alves. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20/01/2020.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 14 set. 2019.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v. 07, n. 1, p.118-138, 2012c.

DUVAL, R. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, C. F; MORETTI, M. T. (org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ed. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 15-38.

DUVAL, R. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v.10, n. 1, p. 1-23, 2015.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em: periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 2 abr. 2020.

DUVAL. R. Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática? Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v.13, n. 2, p. 1-27, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1/38031. Acesso em: 15 abr. 2019.

DUVAL, R; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N**, n. 76, p. 7-27, 2005.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T.. Temas do grupo de pesquisa em epistemologia e ensino de matemática do programa de pós-graduação em Educação Científica e tecnológica: significado do que é “fazer matemática”. In: CUSTÓDIO, J.F.; COSTA, D.A.; FLORES, C. R.; GRANDO, R. C. (Orgs). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: contribuições para pesquisa e ensino. São Paulo, SP. Livraria da Física, 2018. p. 78-106. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jose-Custodio/publication/341254712_PROGRAMA_DE_POS-GRADUACAO_EM_EDUCACAO_CIENTIFICA_E_TECNOLOGICA_PPGECT_CONTRIBUICOES_PARA_PESQUISA_E_ENSINO/links/5eb5a1064585152169c0ebdd/PROGRAMA-DE-POS-GRADUACAO-EM-EDUCACAO-CIENTIFICA-E-TECNOLOGICA-PPGECT-CONTRIBUICOES-PARA-PESQUISA-E-ENSINO.pdf. Acesso em: 13 dez. 2020.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, n. 4, p. 1-37, 1995.

FRADE, M. de C. **Ações de formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** construção de uma prática docente para o ensino de geometria**.** 2017. 110f. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

FREIRE, P.; SHOR, I. **Medo e ousadia:** o cotidiano do professor. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 28. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, F. M.; SILVA, J. A.; LEITE, M. C. L. Diretrizes invisíveis e regras distributivas nas políticas curriculares da nova BNCC. **Currículo sem Fronteiras***,* v. 18, n. 3, p. 857-870, 2018. Disponível em: https://www.curriculosemfronteiras.org/vol18iss3articles/freitas-silva-leite.pdf. Acesso em 2 set. 2020.

FREITAS, F. M.; BERTOLUCCI, C. C.; ROVEDA, C. A.; SILVA, J. A. Abrindo a caixa de pandora: as competências da Matemática na BNCC. **RPEM**, Campo Mourão, Paraná, v. 8, n. 17, p. 265-291, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/338085763_ABRINDO_A_CAIXA_DE_PANDORA_AS_COMPETENCIAS_DA_MATEMATICA_NA_BNCC. Acesso em 2 ago. 2020.

GOMES FILHO, J. **Gestalt do objeto**: Sistema de leitura visual da forma. 8 ed. São Paulo: Escrituras, 2008.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Teachers´ topic-specific knowledge of studentes. In: **Journal for Tesearch in Mathematics Education,** v. 39, n. 4, p. 272-400, 2008.

IBIAPINA, I. M. L. M. Reflexões sobre a Produção do campo teórico-metodológico das Pesquisas colaborativas: Gênese e expansão. In: IBIAPINA, I. M. L. M; BANDEIRA, H. M. M; ARAUJO, F. A. M.(Orgs). **Pesquisa Colaborativa:** multirreferenciais e práticas convergentes. 1. ed. Piauí: Edufpi, 2016. p. 33-61.

INSTITUTO AYRTON SENNA. **Trabalhando para desenvolver o potencial das novas gerações**.1994. Disponível em: https://www.institutoayrtonsenna.org.br/ptbr/Atuacao.html?utm_source=site&utm_medium=pagina_instituto. Acesso em: 16 set. 2019.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação matemática em revista -** SBEM, Campinas, SP; UNICAMP, n. 4, p. 3-13, 1995.

MAIA, E. J. **Conhecimentos de estudantes de pedagogia sobre a resolução de problemas geométricos**. 2016. 162f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

MARCELO, C. A identidade docente: constantes e desafios. **Formação Docente**, Belo Horizonte, v. 01, n. 01, p. 109-131, 2009a. Disponível em: http://formacaodocente.autenticaeditora.com.br. Acesso em: 02 jun. 2020.

MARCELO, C. Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. **Ciências da Educação,** São Paulo**,** n.8, p. 7-22, 2009b.

MARSIGLIA, A. C. G.; PINA, Leonardo Docena; MACHADO, Vinícius de Oliveira; LIMA, Marcelo. A Base Nacional Comum Curricular: um novo episódio de esvaziamento da escola no Brasil. **Germinal: Marxismo e Educação em Debate***,* Salvador, v. 9, n. 1, p. 107-121, 2017.

MATTEI, J. F. T. **Formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental:** reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de geometria**.** 2014. 74f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2014.

MENDES, A. R. B. **Geometria nos anos iniciais:** reflexão sobre um processo de formação continuada. 2018. 249f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2018.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: a gramework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n.6, p. 1017–1054, 2006.

MONTES, M. Á.; CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; LIÑÁN-GARCÍA, M. M.; BARRERA-CASTARNADO, V. J. Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. In: BADILLO, E.; CLIMENT, N.; FERNÁNDEZ , C.; GONZÁLEZ, M. T. (Eds), **Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia professional.** Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca, 2019. p. 157-176.

MORAIS JUNIOR, E. **Por trás do currículo oficial, que geometria acontece?** Um estudo sobre os saberes anunciados nas narrativas de professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentada pelo candidato**.** 2015. 150f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2015.

MOREIRA, A. F.; SILVA, T. T. **Currículo, Cultura e Sociedade**. Petrópolis, RJ: Cortez, 2005.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. Finck. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.3, p. 597-616, 2015.

MORGADO, J. C. Identidade e profissionalidade docente: sentidos e (im)possibilidades. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 19, n. 73, p. 793-812, 2011.

NÓVOA, A. O passado e o presente dos professores. In: NÓVOA, A.(Org.) **Profissão professor.** Portugal: Porto Editora, 2 ª edição, 1999. p. 13-34.

NÓVOA, A. Para o estudo sócio-histórico da gênese e desenvolvimento da profissão docente. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 04, p. 109-139, 1991.

PADILHA SANCHEZ, V. **L'influence d'une acquisition des traitements purement figuraux pour l'appresntissage des mathématiques**. 1992. 230f. Thèse (Doctorat) - Didactique de Mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg: 1992.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00119.pdf. Acesso em: 10 de jul. 2020.

POLONI, M. Y. **Formação do Professor do Ensino Fundamental - Ciclo I:** uma investigação com uso da geometria dinâmica para (re)construção de conceitos geométricos**.** 2010. 242f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e incertezas sobre o currículo.** Tradução: SALVATERRA, Alexandre. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANTIL, F. L. P. **Análise da percepção das variáveis visuais de acordo com as leis da Gestalt para representação cartográfica**. 2008. 175f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

SASSERON, L. H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v.17, n. especial, p. 49-67, 2015.

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos do problema no contexto brasileiro. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v.14, n. 40, p. 143-155, 2009. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v14n40/v14n40a12.pdf. Acesso em: 12 abr. 2020.

SAVIANI, D. História da formação docente no Brasil: três momentos decisivos. **Educação**, Santa Maria, v.30, n. 2, p. 11-26, 2005. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/3735/2139. Acesso em: 30 mar. 2020.

SCHEIBE, L. Formação de professores no Brasil: a herança histórica. **Retratos da Escola**, Brasília, v. 2, n. 2-3, p. 41-53, 2008. Disponível em: https://www.cnte.org.br/images/stories/2012/revista_retratosdaescola_02_03_2008_formacao_professores.pdf. Acesso em: 02 abr. 2020.

SCHNEIDER, M. P. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica:** das determinações legais às práticas institucionalizadas. 2007. 198f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de La nueva reforma. Profesorado. **Revista del Currículum y formación del profesorado**, v.9, n.2, p. 1-30, 2005. Disponível em: http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92.html. Acesso em: 15 fev. 2017.

SILVA, A. G. **O professor dos anos iniciais e o conhecimento da geometria**. 2014. 112f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.

SILVA, L. Q. **Formação de professores dos anos iniciais para o ensino de geometria plana:** uma experiência com o uso do Software Klogo. 197f. 2014. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Fundação Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

SILVA, M. A. Organismos internacionais e a educação. In: OLIVEIRA, D.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. **Dicionário:** trabalho, profissão e condição docente. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. p. 1-4.

SILVA, M. J. F; LIMA, G. L. Conhecimentos desenvolvidos em um curso de licenciatura em matemática na modalidade a distância. In: **XIV CIAEM** – Conferência Interamericana de Educación Matemática. Tuxtla Gutierrez, México, p. 1-12, 2015. Disponível em: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/138/95. Acesso em: 18 jul. 2010 .

SILVA, S. H. **Conhecimento de professores polivalentes em geometria:** contribuições da teoria dos registros de representação semiótica**.** 2011. 167f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2011.

SOUZA, R. N. S. **Desconstrução dimensional das formas:** gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria. 2018. 269f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOUD, S. A.; A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.1, p.322-346, 2019.

SOUZA, R. R. **(Re)Construção de conceitos geométricos por professoras dos anos iniciais em formação continuada**. 2016. 225f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2016.

STANICH, K. A. B. **O processo de ensino e aprendizagem da geometria: representações sociais de professores do 5.º ano do Ensino Fundamental**. 2013. 215f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O trabalho docente:** elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. Petrópolis: Vozes, 2009.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 4, p. 215-233, 1991.

THIESEN, J. S. Currículos da educação básica brasileira: convergências com o discurso educacional global em contextos de internacionalização. **RIAEE**, Araraquara, v. 14, n. 2, p. 420-436, 2019.

THIESEN, J. S. Internacionalização dos currículos na Educação Básica: concepções e contextos. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 15, p. 991-1017, 2017.

UNESCO. **Educação para a cidadania global:** preparando alunos para os desafios do século XXI. Brasília: UNESCO, 2015.

VENCO, S. B.; CARNEIRO, Reginaldo Fernando. Para quem vai trabalhar na feira... essa educação está boa demais: a política educacional na sustentação da divisão de classes. Horizontes, Itatiba, v. 36, n. 1, p. 7-15, 2018.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria**. 2017. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

ZAMBON, A. E. C. **A geometria em cursos de pedagogia da região de presidente prudente- SP**. 2010. 186f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Presidente Prudente, Presidente Prudente, 2010.

ANEXO A - CURRÍCULO DO CURSO DE PEDAGOGIA

UNIVERSIDADES PÚBLICAS		
INSTITUIÇÃO E CARGA HORÁRIA TOTAL	**DISCIPLINAS DO CURSO PRESENCIAL**	**DISCIPLINAS RELACIONADAS À MATEMÁTICA, CARGA HORÁRIA E EMENTA**
UFSC **3870 h**	Introdução à Pedagogia; Estado e Políticas Educacionais; Diferença, Estigma e Educação; Educação e Sociedade I; Filosofia da Educação I; Educação e Infância; Psicologia da Educação; Educação e Trabalho; Educação e Sociedade II; Filosofia da Educação II; Organização dos processos Educativos I; Educação e Infância II; Arte, Imaginação e Educação; História da Educação I; Teorias da educação; História da Educação II; Iniciação à Pesquisa; Educação e Infância III; Aprendizagem e Desenvolvimento; Didática I: Fundamentos da Teoria Pedagógica para o Ensino; Linguagem Escrita e Criança; Organização dos processos Educativos II; Pesquisa em educação I; Educação e Infância IV: Fundamentos da Educação Infantil; Alfabetização; Ciências, Infância e ensino; **Educação Matemática e Infância**; NADE (Núcleo de Aprofundamento de Estudos); Educação e Infância V: Conhecimento, Jogo, Interação e Linguagens I; Literatura e Infância; **Fundamentos e Metodologia da Matemática;** Geografia, Infância e Ensino; História, Infância e Ensino; Organização dos processos Educativos na educação Infantil I; Pesquisa em Educação II; Políticas e Práticas Pedagógicas Relacionadas a Educação Especial; Educação e Infância VI: Conhecimento, Jogo, Interação e Linguagens II; Língua Portuguesa e Ensino; Infância e Educação do Corpo; Educação de Jovens e Adultos; Organização dos processos Educativos na Educação Infantil II; Educação e Infância VII: Estágio em Educação Infantil; Comunicação e Educação; Organização dos Processos Coletivos do Trabalho Escolar; Pesquisa em educação III: Orientação ao	**Educação Matemática e Infância – 72h**. Concepções de Matemática e Educação Matemática. Matemática e suas relações com a infância. Ensino e aprendizagem da Matemática e suas relações com a sociedade. **Fundamentos e metodologia da Matemática -72h.** Conceito de número e suas aplicabilidades. As operações fundamentais no conjunto dos Naturais e dos Racionais. Estudo da geometria euclidiana. Novas tendências em Educação Matemática e suas relações com a pesquisa.

	TCC; Educação e Infância VIII: Exercício da Docência nos anos Iniciais; Didática II: Processos de Ensino nos Anos Iniciais da Escolarização; Trabalho de Conclusão de Curso (TCC); Língua Brasileira de Sinais I; Atividades Técnico-Científicas ou Culturais.	
UDESC **3.852 h**	Antropologia e Educação; Pesquisa em Educação; História da Educação: da constituição da escola moderna à primeira república; Educação e Infância; Filosofia e Educação: conceitos fundamentais; Produção Textual; Psicologia e Educação: relações históricas e epistemológicas; Filosofia e Educação: correntes de pensamento; Historia e Educação: da Escola Nova à redemocratização da sociedade brasileira; Libras - Língua Brasileira de Sinais; Sociologia e Educação: fundamentos do pensamento sociológico; Fundamentos da Didática; Mídia e Educação; Políticas e Planejamento da Educação no Brasil; Sociologia e Educação: a constituição do campo; Psicologia e Educação: teorias de aprendizagem; Didática: organização do trabalho docente; Artes Visuais e Ensino; Currículo: questões conceituais; Estágio Curricular Supervisionado I; Organização e Gestão da Educação Infantil, Anos Iniciais e EJA; Currículo e Contemporaneidade; Alfabetização e Letramento: linguagens e textualidades; Estágio Curricular Supervisionado II; Educação Especial e Educação Inclusiva; Políticas Públicas de Educação; Educação das Relações Etnicorraciais; Educação, Gênero e Sexualidade; Teatro e Ensino; Leitura e Literatura Infanto-juvenil; Estágio Curricular Supervisionado III; Alfabetização e Letramento: métodos de alfabetização; Educação e Juventude; História e Ensino; Trabalho, Conhecimento e Tecnologia; Língua Portuguesa e Ensino; Música e Ensino; Estágio Curricular Supervisionado IV; Diversificação e Aprofundamento de Estudos: Seminário I – Pesquisas Contemporâneas; Planejamento e Avaliação na Educação Infantil; Ciências e Ensino; Geografia e Ensino; **Matemática e Ensino;** Trabalho de Conclusão de Curso: projeto; Diversificação e Aprofundamento de Estudos: Seminário II - Aprofundamento Temático; Estagio Curricular Supervisionado	**Matemática e Ensino – 72h.** Teorias e pedagogias em Educação Matemática, relativas à Topologia, à Geometria, ao Sistema de Numeração Decimal, focalizando as operações fundamentais, seus sentidos e procedimentos de cálculo nos campos numéricos dos Naturais e dos Inteiros. Ênfase na educação de crianças, jovens e adultos. Propostas e Diretrizes curriculares. Produção de materiais didáticos. Relação com as demais áreas do conhecimento.

	V; Planejamento e Avaliação nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Produção e Revisão Textual; Trabalho de Conclusão de Curso; Diversificação e Aprofundamento de Estudos: Seminário III – Práticas Pedagógicas.	

Fonte: Página virtual das instituições.

Disponível em: http://cagr.sistemas.ufsc.br/relatorios/curriculoCurso?curso=308. Acesso em: 29 mai. 2018.
Disponível em: http://pedagogia.paginas.ufsc.br/files/2013/07/Ementas-disciplinas.pdf. Acesso em: 29 mai. 2018.
Disponível em: http://www1.udesc.br/arquivos/id_submenu/2216/curso_de_pedagogia.pdf. Acesso em: 29 mai. 2018.

- Disponível em: http://www.cead.udesc.br/arquivos/id_submenu/691/031_2017_cpe.pdf. Acesso em: 29 mai. 2018.

UNIVERSIDADES PRIVADAS		
INSTITUIÇÃO E CARGA HORÁRIA TOTAL	**DISCIPLINAS DO CURSO - EAD**	**DISCIPLINAS RELACIONADAS À MATEMÁTICA, CARGA HORÁRIA E EMENTA**
UNOPAR **3280h**	Educação a Distância; Homem, Cultura e Sociedade; Educação Inclusiva; LIBRAS – Língua Brasileira De Sinais; Educação e Tecnologias; Práticas Pedagógicas: Identidade Docente; ED – Gramática; Ética, Política e Cidadania; Políticas Públicas da Educação Básica; Educação e Diversidade; Psicologia da Educação e da Aprendizagem; Práticas Pedagógicas: Gestão da Aprendizagem; ED – Interpretação de Texto; Metodologia Científica; Educação Formal e não Formal; Educação de Jovens e Adultos; Didática; História da Educação; Práticas Pedagógicas: Gestão da Sala de Aula; ED – Comunicação Oral e Escrita; Teorias e Práticas do Currículo; Legislação Educacional; Sociologia da Educação; Filosofia da Educação; Práticas Pedagógicas em Pedagogia: Condições de Aprendizagem na Educação; ED - Cultura brasileira; Literatura Infantojuvenil; Educação e Artes; Ludicidade e Educação; Letramentos e Alfabetização; Estágio Curricular em Pedagogia I – Educação Infantil; Práticas Pedagógicas em Pedagogia; Práticas de Alfabetização e Letramento; ED – Educação Ambiental;	**Aprendizagem da Matemática –60h.** Adquirir uma sólida base teórica para fundamentar sua prática docente, que permita não somente a constituição da área de conhecimento que aborda as relações de ensino/aprendizagem, mas também as habilidades e competências necessárias para atuar com ética e responsabilidade social.

	Fundamentos e Organização da Educação; Infantil e do Ensino Fundamental; Corpo e Movimento; Avaliação na Educação; Filosofia para Crianças; Estágio Curricular em Pedagogia II – Ensino Fundamental; Seminário Interdisciplinar I; ED – Planejamento e Material Didático; Aprendizagem de Ciências Naturais; Aprendizagem da Língua Portuguesa; **Aprendizagem da Matemática;** Aprendizagem da Geografia E História; Pedagogia em Espaços não Escolares; Estágio Curricular em Pedagogia III; Gestão Educacional e Espaços não Escolares; Seminário Interdisciplinar II; ED – Lógica Matemática; Gestão Educacional; Gestão e Organização dos Espaços Escolares; Educação Profissional; Relações Interpessoais e Administração De Conflitos; Adolescência e Juventude no século XXI; Projeto de Ensino; Seminário Interdisciplinar III; ED – Autorregulação da Aprendizagem.	
UNISUL **3300 h**	Políticas Públicas e Legislação para a Infância; O Lúdico e a Brincadeira na Infância; Infância e Criança: Conceitos e Pesquisa; Processo de Ensino e de Aprendizagem na Linguagem e na Escrita; A Prática Pedagógica para a Alfabetização e o Letramento; Língua e Suas Variações; O Texto na Alfabetização e no Letramento; Dimensões Históricas, Filosóficas, Sociológicas e Políticas da Educação de Jovens e Adultos; Políticas Públicas de Educação Especial: Inclusão e Bidocência; Fundamentos para o Atendimento Educacional de Alunos Com Deficiência Física; Fundamentos para Atendimento Educacional de Alunos Com Deficiência Intelectual e Transtornos Globais; Atendimento Educacional de Alunos Com Deficiência Sensorial; Universidade e Ciência; Teoria do Conhecimento; Estudos Socioculturais; Socioeconomia e Geopolítica; Elementos da História da Educação; Desenvolvimento Humano e Aprendizagem; Prática Docente; Fundamentos da Didática Geral; Currículo e Políticas Públicas; Língua de Sinais; Princípios Teóricos, Legais e Práticos da Gestão Democrática; Gestão Pedagógica e Administrativa dos Espaços Formais e não Formais; Princípios Legais e Teóricos na Educação Infantil; A Educação dos Bebês em Espaços Coletivos; A Organização do Tempo e Espaço na Educação Infantil; A Criança de 0 a 5 Anos e as Diferentes Linguagens; Currículo,	**Fundamentos e Metodologias de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental - 60h**. A produção histórico-cultural da matemática. Matemática e educação matemática. Número natural e não inteiro (medidas e frações). Sistemas de numeração. Aquisição das noções de quantidade na infância. Conceitos e representações informais e formais na resolução de problemas. Operações aritméticas. Geometria métrica e não métrica. Elementos de estatística. Cálculos - heurísticos e algoritmos. Recursos didáticos para os cálculos. Diretrizes curriculares para o ensino de matemática na educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental: conceitos e conteúdos. Projeto de prática de ensino para inserção do aluno na realidade educacional.

	Planejamento e Avaliação na Educação Infantil; A Organização do Tempo e Espaço Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Princípios Legais Teóricos e Metodológicos para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Fundamentos e Metodologia de Língua Portuguesa para Anos Iniciais do Ensino Fundamental; **Fundamentos e Metodologias de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental;** Fundamentos e Metodologias de Ciências para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Fundamentos e Metodologias de História para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Fundamentos e Metodologias de Geografia para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Brinquedoteca: Formação de Brinquedista e Organização do Espaço; Contação de Histórias; Sexualidade e Orientação Sexual: Educação, Cultura e Transformação Social; Cotidiano Escolar: Relações de Gênero e Profissão Docente; Educador Social: Conceitos e Atuação; Mídia, Cultura e Infância; As Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação; Estágio Supervisionado de Pedagogia na Educação Infantil; Estágio Supervisionado de Pedagogia no Ciclo de Alfabetização; Estágio Supervisionado de Pedagogia na Educação Infantil I e II; Estágio Supervisionado de Pedagogia no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental; Estágio Supervisionado de Pedagogia em Gestão; Introdução a Processos Investigativos; Conclusão dos Processos Investigativos.	

Fonte: Página virtual das instituições.

Disponível em: http://www.unisul.br/wps/portal/home/ensino/graduacao/pedagogia/?unidade=23#sa-page-curriculo. Acesso em: 29 mai. 2018.
Disponível em: https://www.uaberta.unisul.br/repositorio/download/web/portal/manuais_de_cursos/manual_grad_pedagogia.pdf. Acesso em: 29 mai. 2018.
Disponível em: http://www.unoparead.com.br/documentos/guia-percurso/pedagogia.pdf?v=3. Acesso em: 29 mai. 2018.

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO I

Prezados professores, pedimos por gentileza que respondam a este questionário. Vossas respostas são essenciais para o desenvolvimento dessa pesquisa e a autenticidade delas contribuirá para coletar dados consistentes, atendendo aos critérios de cientificidade. Destaco que este questionário é anônimo, assim você poderá ficar à vontade para expor as suas ideias.
Estamos felizes com a sua participação e agradecemos de antemão a disponibilidade para responder as questões!

NOME:____

Parte I - Análise prévia na perspectiva dos professores (Espaço metodológico [2])

1) Como foi a sua relação com o estudo da geometria na educação básica e na graduação? Justifique sua resposta!

2) Descreva quais as fontes dos seus conhecimentos geométricos colocados em ação na sua prática pedagógica?

3) Como você analisa/acompanha o processo de aprendizagem da geometria dos seus alunos? Justifique sua resposta!

Parte II - Análise *a priori* na perspectiva dos professores (Espaço metodológico [23])

4) Como você compreende o Espaço colaborativo formado pelo grupo de professores e o pesquisador? Justifique sua resposta!

5) Quais as contribuições/entraves do Espaço colaborativo no desenvolvimento de programas de formação para professores? Justifique sua resposta!

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Programa de Pós Graduação em Educação
Científica e Tecnológica – PPGCT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Meu nome é Selma Felisbino Hillesheim, sou doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina e estou desenvolvendo a pesquisa intitulada "Engenharia Didática Colaborativa para a aprendizagem da geometria: perspectivas semiocognitivas para a formação de professores pedagogos", sob a orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti. A pesquisa tem por objetivo entender as concepções dos professores pedagogos a respeito do processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais, a partir de um programa de formação que visa à aprendizagem da geometria pela decomposição dimensional das formas, considerando as funções discursivas da língua, as apreensões, a fim de promover a passagem do olhar icônico ao não icônico. Para atender aos objetivos dessa pesquisa, estamos convidando você a participar como voluntário de um programa de formação continuada para professores pedagogos. A formação denominada "Aprendizagem da Geometria: perspectivas semiocognitivas importantes para a formação matemática dos professores pedagogos" tem por objetivo o aperfeiçoamento do conhecimento dos professores sobre a aprendizagem da geometria na perspectiva semiocognitiva, bem como a coleta de dados para o desenvolvimento da pesquisa. O princípio teórico-metodológico da pesquisa é de ordem qualitativa, utilizando-se como instrumentos de coleta de dados: formação com o grupo de professores, observação, gravações audiovisuais, registro em diário de bordo, entrevista (se necessário). Fui informado que o acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e seu orientador e que todos os meus dados pessoais e institucionais serão mantidos no anonimato. A minha colaboração voluntária na pesquisa se dará por meio da participação nos nove encontros de estudo, com duração de três horas, onde serão realizados seminários, debates, construção de atividades de geometria a serem aplicadas com os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, bem como a análise das respostas apresentadas pelos alunos as atividades propostas. Fui alertado de que posso esperar alguns benefícios da pesquisa, tais como: aprimorar meus conhecimentos sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria, trocar experiências docentes e conhecimentos teóricos com o grupo de professores e com a pesquisadora sobre o processo de ensino e aprendizagem da geometria, refletir junto ao grupo de formação sobre os desafios do ensino da geometria nos anos iniciais, perceber a possibilidade de evolução e aprofundamento do meu conhecimento teórico a respeito da temática abordada. Recebi, por outro lado, os esclarecimentos necessários sobre os possíveis desconfortos e riscos decorrentes da pesquisa. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados tais como, gravações audiovisuais e a observação da pesquisadora, podem gerar desconforto e constrangimento quanto a minha participação espontânea nos encontros. Também fui informado de que posso retirar-me da pesquisa a qualquer momento, sem prejuízos, ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos. Tenho conhecimento de que o programa de formação seguirá os protocolos de segurança, atendendo as recomendações do Ministério da Saúde para evitar a propagação da COVID-19. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, devidamente assinadas, sendo que uma via ficará com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você. Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos/PRP/UFSC pelo telefone (48) 3721-6094, bem como a pesquisadora Selma Felisbino Hillesheim através do e-mail selmafh@yahoo.com.br ou pelo telefone (48) 99913-0371. É assegurada a assistência durante toda pesquisa, bem como me é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, mesmo após a realização da pesquisa. Agradecemos antecipadamente a sua colaboração.

Eu,____,CPF nº_________________ professor(a), fui esclarecido(a) sobre a pesquisa: "Engenharia Didática Colaborativa para a aprendizagem da geometria: perspectivas semiocognitivas para a formação de professores pedagogos" e dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário do projeto de pesquisa, estando ciente de todas as circunstâncias supracitadas.

São José, _________ de ___________________________de 2021.
Assinatura:____

____

Doutoranda Selma Felisbino Hillesheim

Pesquisadora PPGECT/UFSC

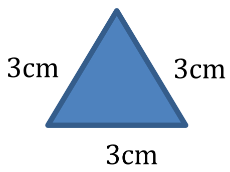
APÊNDICE C - ATIVIDADES DE GEOMETRIA REALIZADA PELAS PROFESSORAS, VISANDO À EXPLORAÇÃO DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS.

1) Construa um triângulo equilátero com três centímetros de lado.

2) Você pode desenhar um polígono de três lados iguais, tendo seus lados medindo três centímetros?

3) Construir um triângulo de vértices A, B e C, tendo $\overline{AB} = 3cm$, $\overline{AC} = 3\text{cm}$ e $\overline{BC} = 3\text{cm}$.

4) Escreva um pequeno texto sobre a figura abaixo.



5) João construiu um triângulo equilátero com três centímetros de lado. Ele precisou explicar as etapas do raciocínio que ele utilizou na construção desse triângulo. Produza um texto com uma possível explicação apresentada por João.

APÊNDICE D - PLANEJAMENTO E SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES ELABORADAS COLABORATIVAMENTE ENTRE AS PROFESSORAS E A PESQUISADORA APLICADAS COM OS ALUNOS

PLANEJAMENTO PARA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DE GEOMETRIA

1º MOMENTO: Expor os diferentes sólidos geométricos (cubo, pirâmide, cone, cilindro, esfera, prisma, tetraedro, octaedro etc) na sala de aula, um ou dois dias antes de aplicar as atividades, visando aguçar a curiosidade das crianças e possíveis questionamentos.

2º MOMENTO: Dia da Aplicação das Atividades

ETAPAS DA APLICAÇÃO

1ª Etapa: Entregar a planificação do cubo tradicional para cada aluno. A seguir, entregar a atividade I e pedir para que eles respondam as questões e depois recolher a atividade.
OBS: Se possível, imprimir as planificações num papel um pouco mais grosso que a folha A4.

2ª Etapa: Pedir para que os alunos recortem e montem o sólido planificado que eles receberam na 1ª etapa, de modo que eles possam comprovar as hipóteses levantadas na atividade I.

3ª Etapa: No grande grupo, conversar com os alunos a respeito das hipóteses levantadas por eles. Verificar se as hipóteses deles se confirmaram ou não. Analisar a justificativa deles para esse fato.

4ª Etapa: Entregar a atividade II para os alunos resolverem. Recolher a atividade depois que eles terminarem.

5ª Etapa: No grande grupo, conversar com os alunos sobre o que eles perceberam durante o desenvolvimento da atividade II.

6ª Etapa: Entregar a atividade III para os alunos resolverem e depois recolher a atividade concluída.

7ª Etapa: No grande grupo, conversar com os alunos sobre o que eles perceberam durante o desenvolvimento da atividade III.

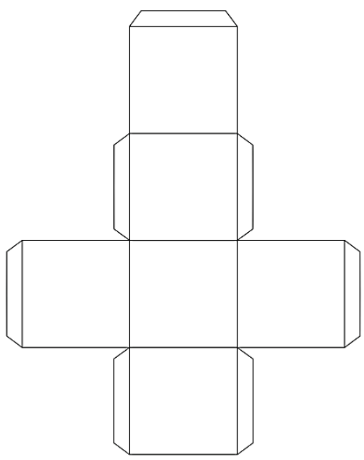
8ª Etapa: Para finalizar, estimular as crianças para resolverem um desafio!!!
Entregar para cada criança a planificação dos contornos dos cubos e pedir para que eles montem o sólido. As crianças poderão recortar o contorno do molde, dobrar, traçar as retas internas etc, até que eles consigam montar o cubo. Deixar a criança livre para fazer todas as suas tentativas. Intervir somente se perceber que a criança estiver desistindo.
OBS: Não coloquei as abas na planificação dos contornos dos cubos para não interferir e nem induzir as crianças nas dobraduras e nos traçados de reta necessários para a montagem do sólido. Desse modo, eles irão montar o cubo, mas não irão conseguir colar. A não ser que seja fechado com fita adesiva.

9ª Etapa: Conversar com o grande grupo sobre as dificuldades que eles tiveram para resolver o desafio.

10ª Etapa: Elaborar um texto coletivo, descrevendo as propriedades observadas na planificação e na montagem da representação do cubo.

ATIVIDADE – I

MOLDE DO CUBO ENTREGUE AOS ALUNOS



OBSERVANDO AS FIGURAS EXPOSTAS, RESPONDA:

1) Qual das figuras expostas é igual a sua? ____

2) Por que você acha que é essa figura?

ATIVIDADE – II

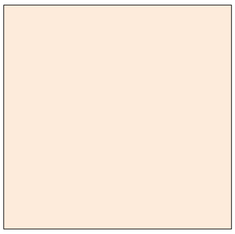
A CAIXA QUE VOCÊ ACABOU DE MONTAR REPRESENTA UM CUBO. A PARTE DO CUBO QUE VOCÊ PODE APOIAR SOBRE A FOLHA REPRESENTA UMA FACE DO CUBO.

1) Apoie o cubo que você montou sobre esta folha e contorne cada uma das faces no espaço abaixo, assinalando a face que você já contornou.

2) Que figura você obteve pelo contorno da face? _______________________________
3) Quantas faces do cubo você contornou? ____________________________________
4) Os contornos que você obteve têm as formas iguais ou diferentes? ________________
5) Os contornos que você obteve têm os tamanhos iguais ou diferentes? ______________

ATIVIDADE – III

1. Observe a figura que representa a face de um cubo.



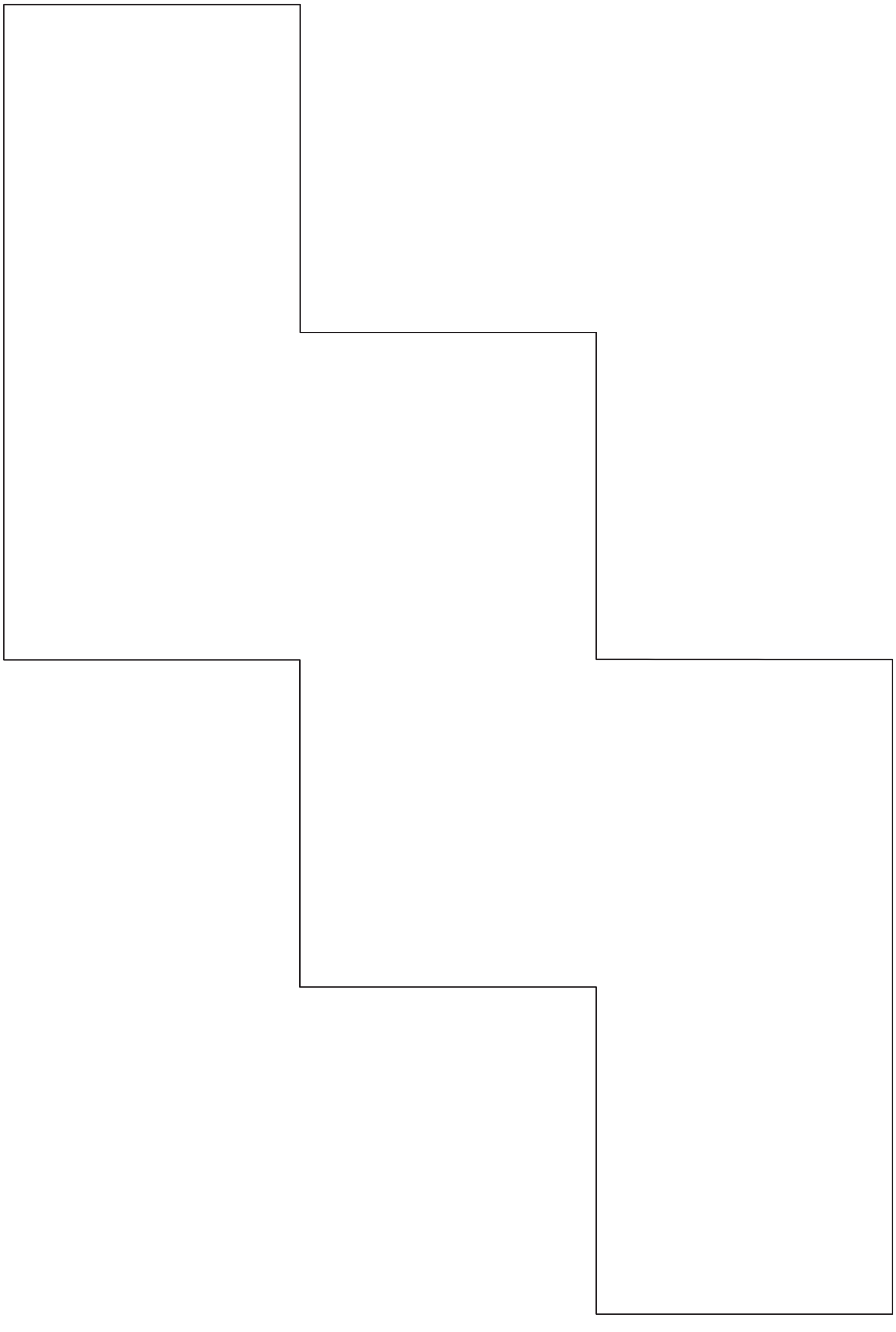
a) Trace uma reta para dividir a figura ao meio.

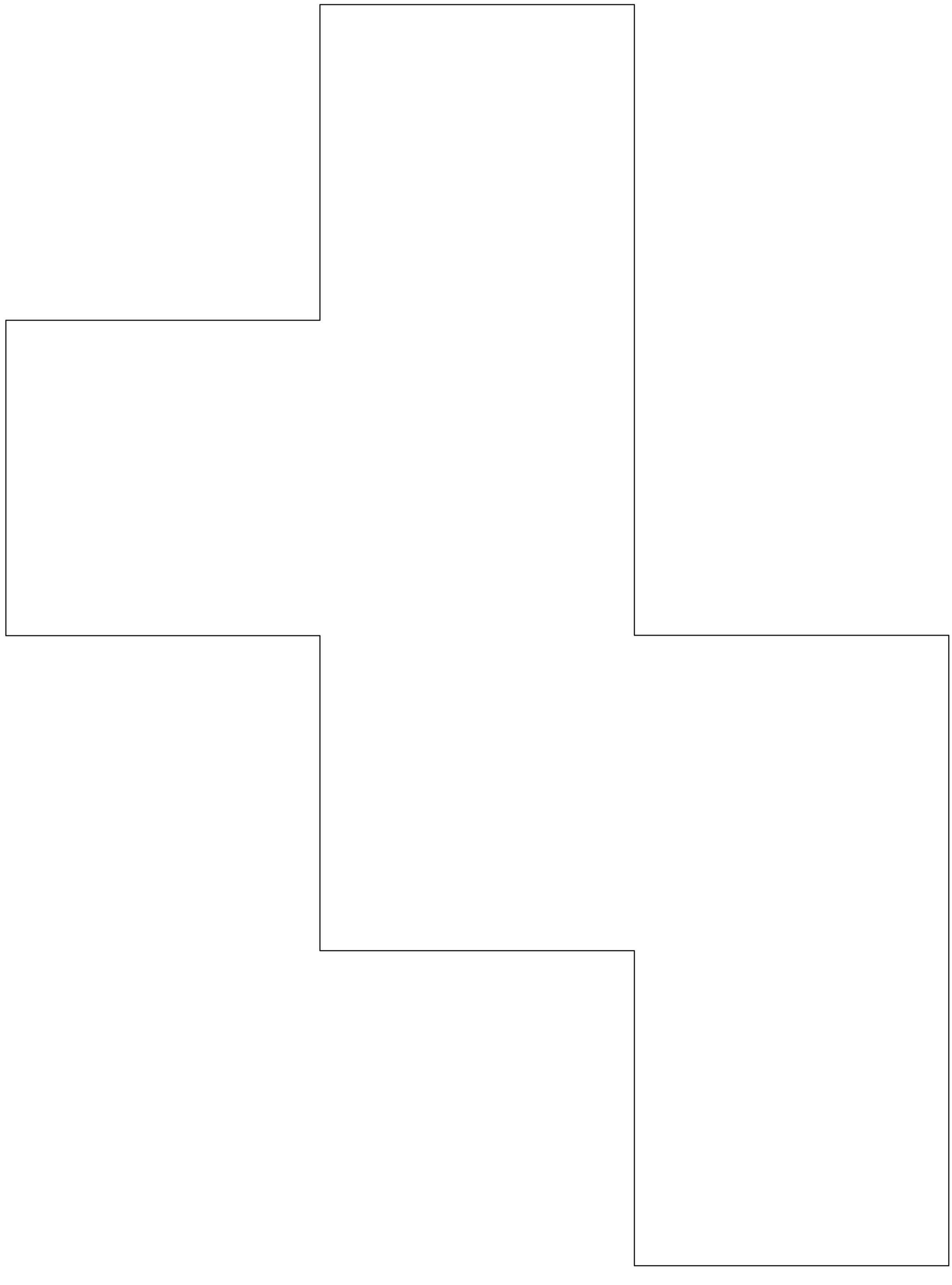
b) Quantas figuras você consegue perceber agora? ________

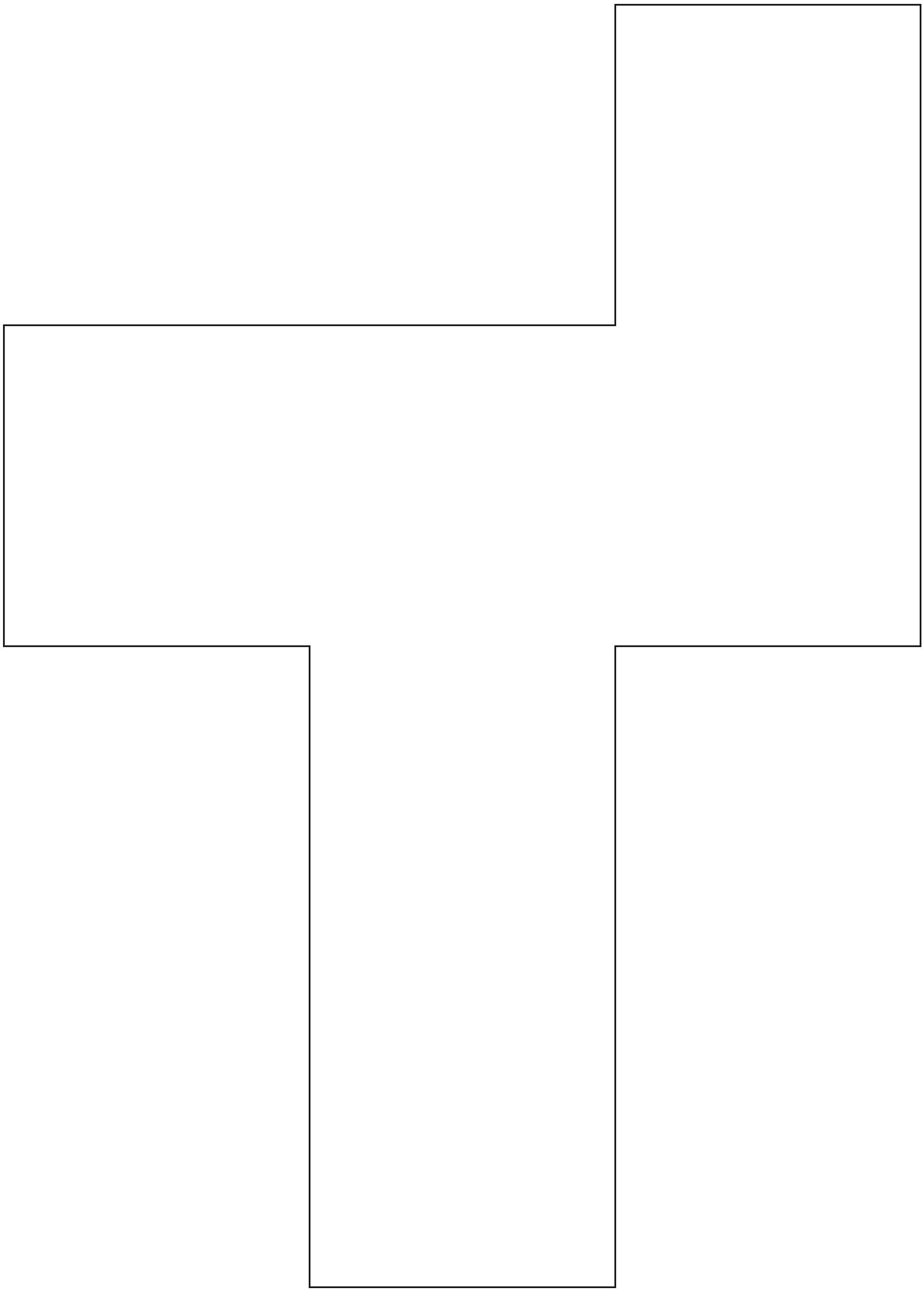
c) Desenhe, no espaço abaixo, as figuras que você encontrou.

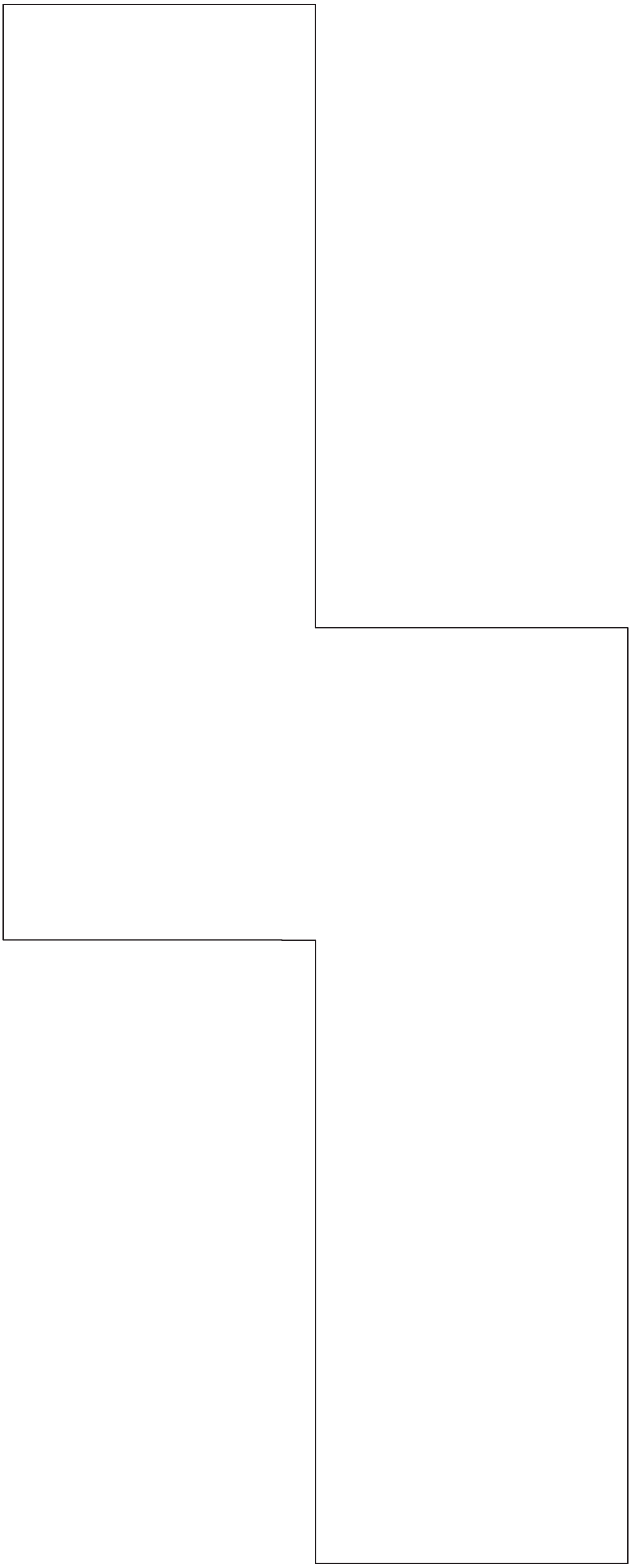
d) Qual o nome dessas figuras que você desenhou?

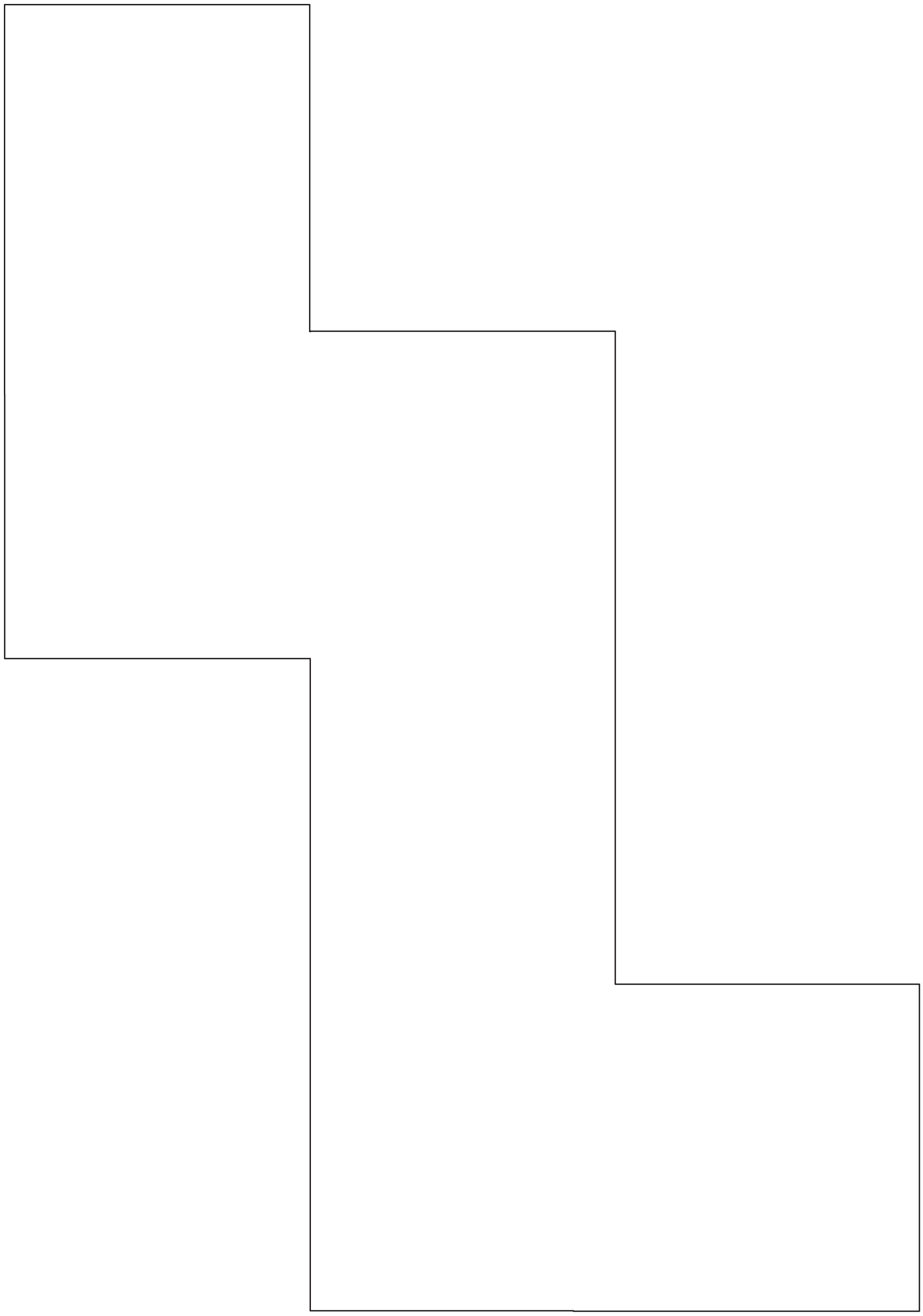
MOLDES DOS CUBOS PARA RESOLVER O DESAFIO

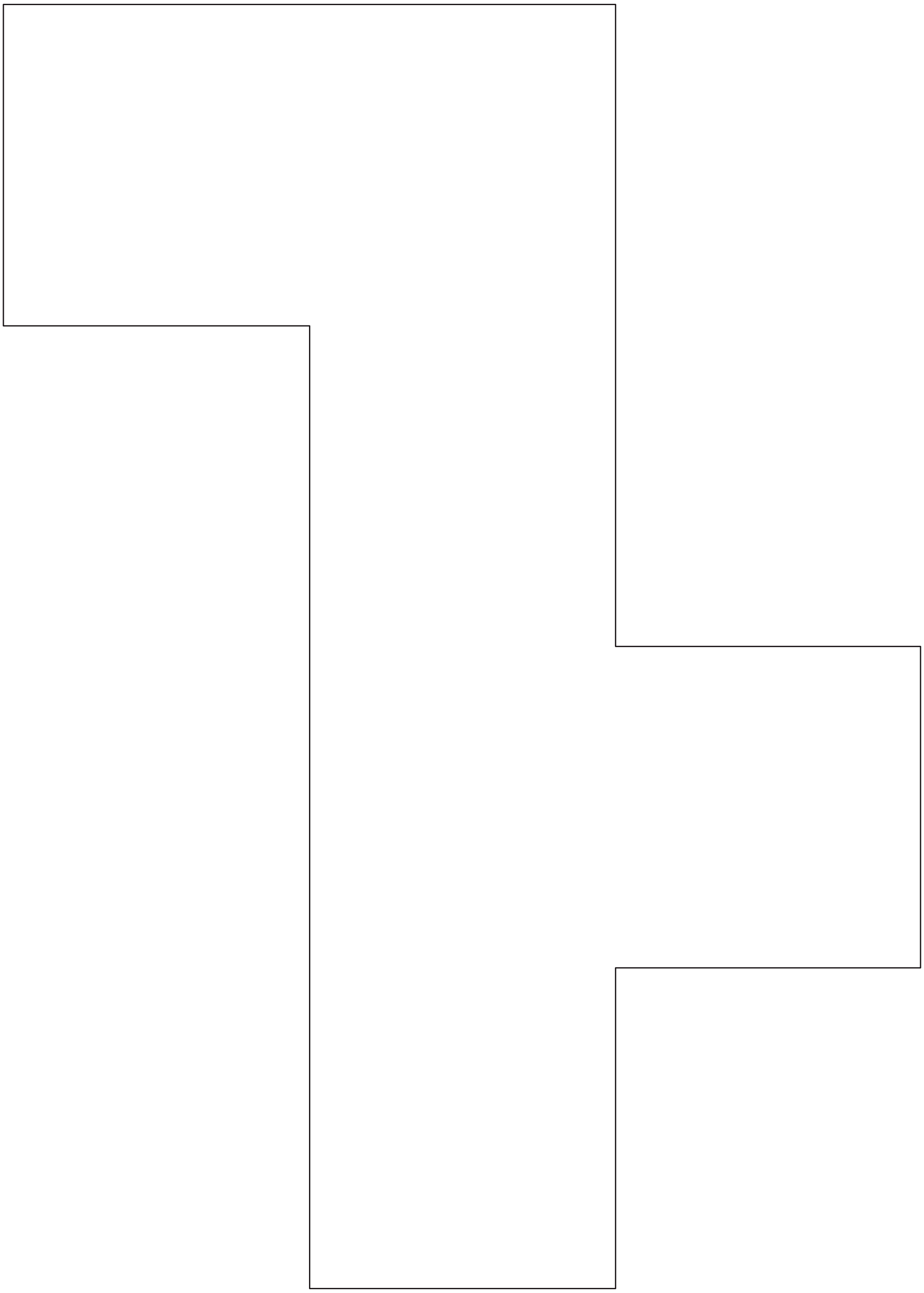


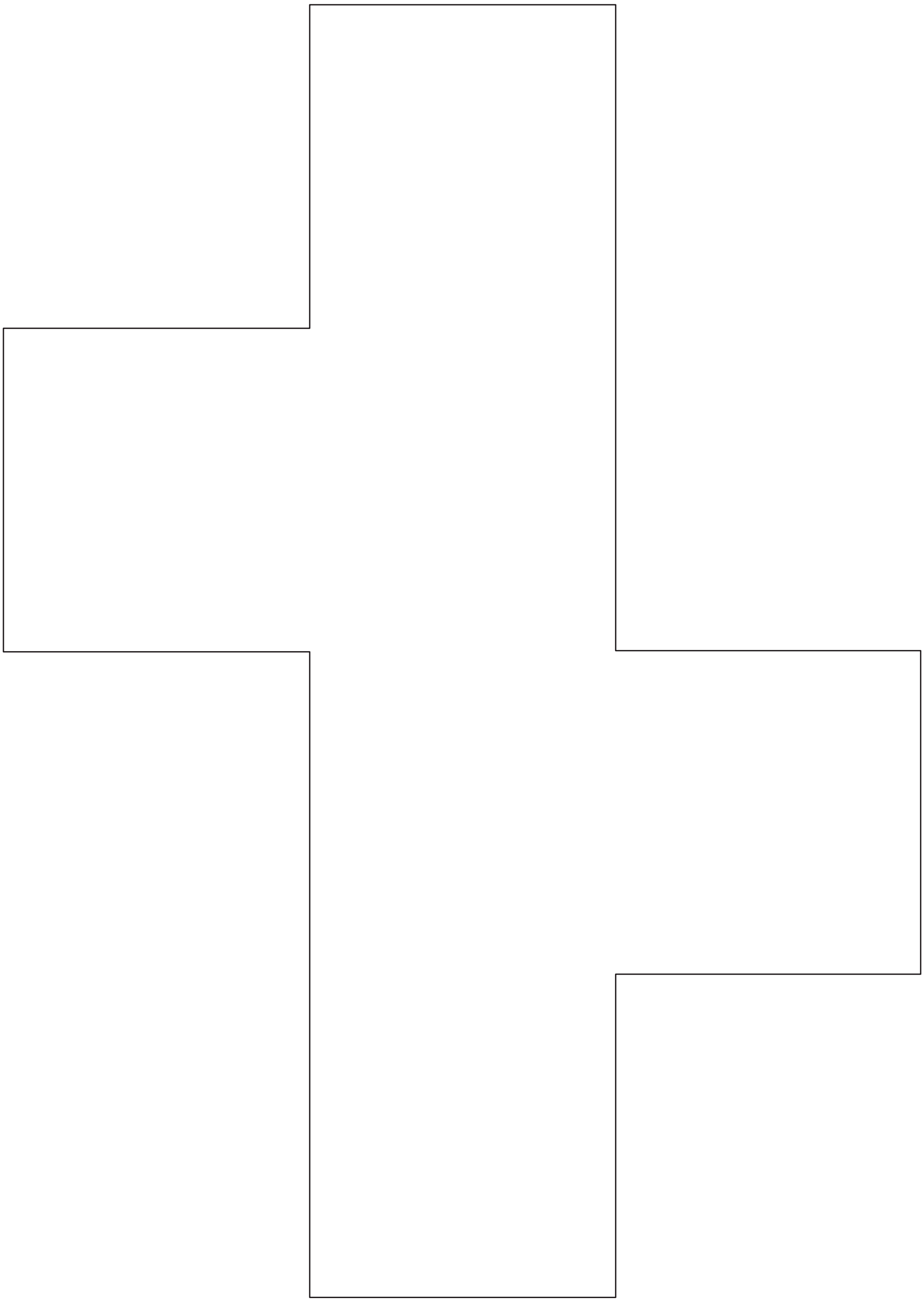


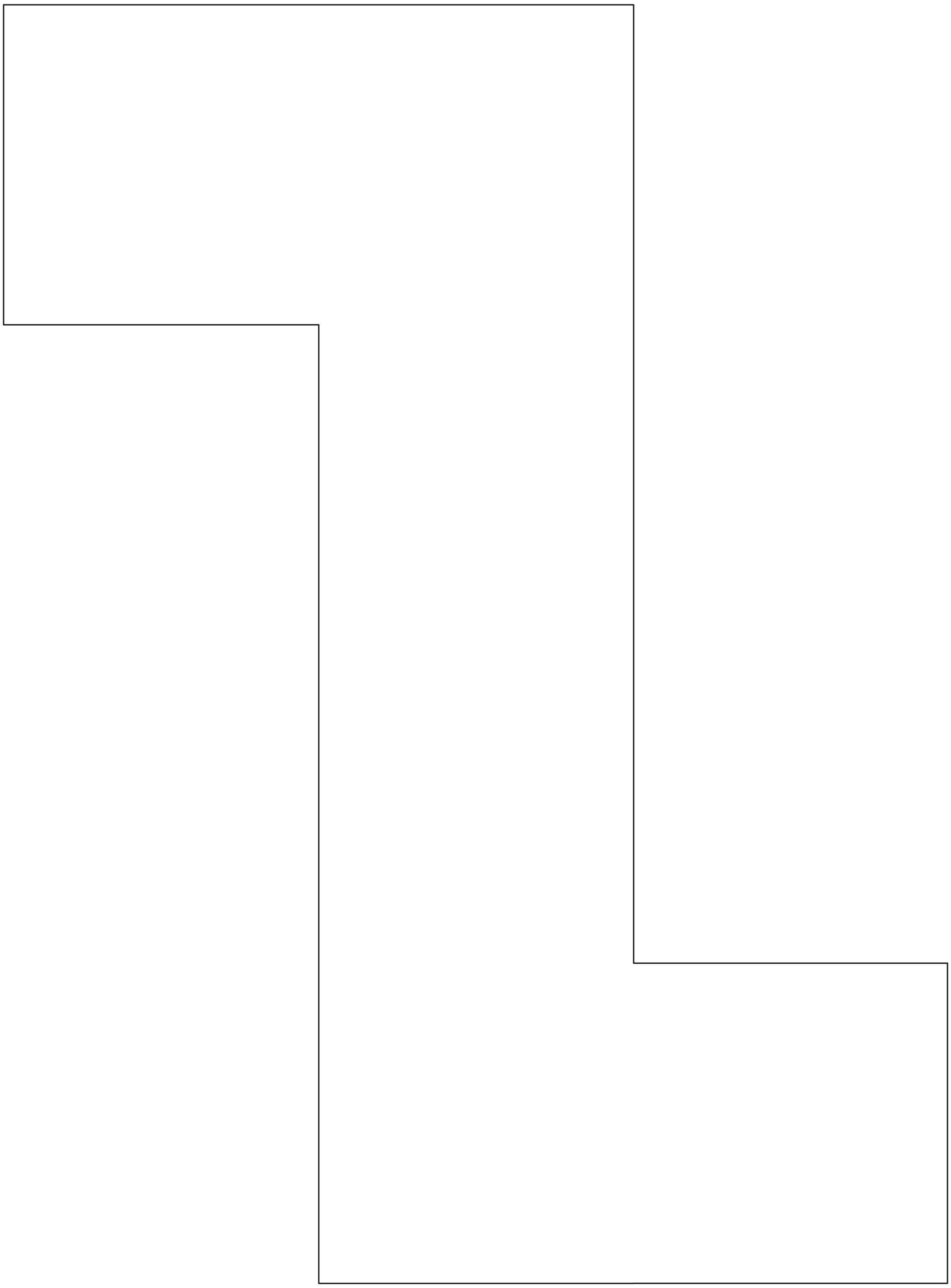


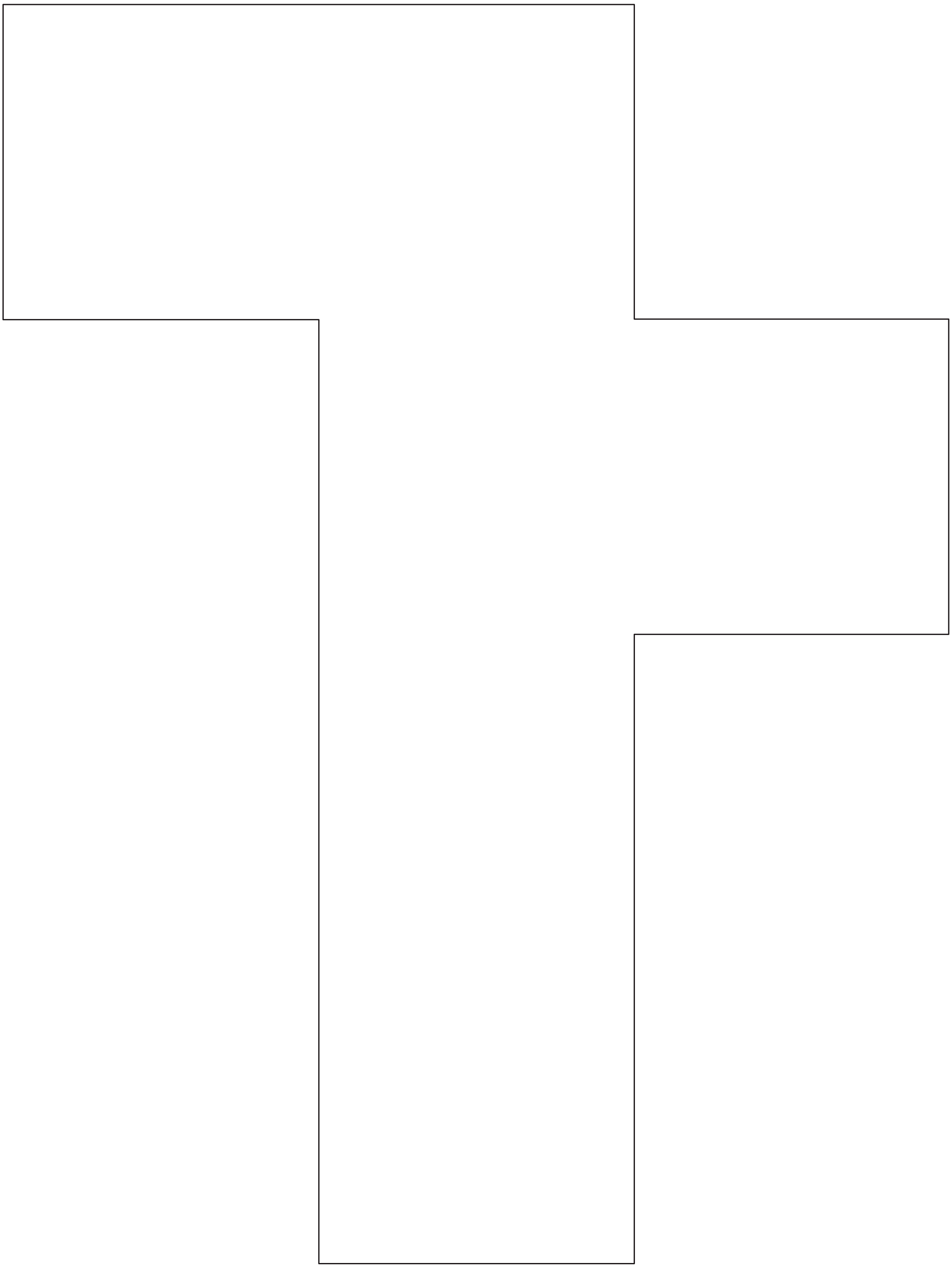


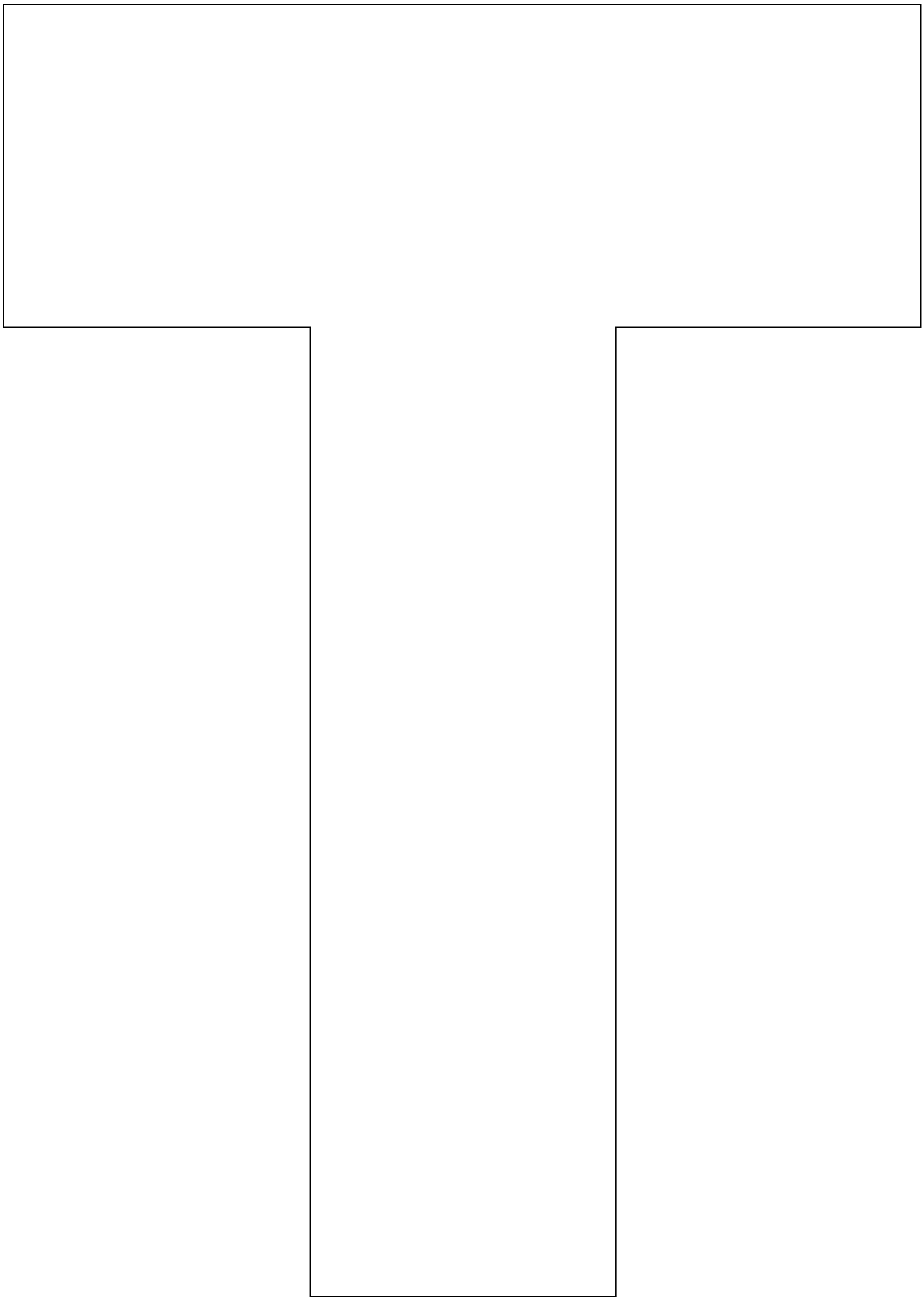












APÊNDICE E - QUESTIONÁRIO II

Prezados professores, pedimos por gentileza que respondam a este questionário. Vossas respostas são essenciais para o desenvolvimento dessa pesquisa e a autenticidade delas contribuirá para coletar dados consistentes, atendendo aos critérios de cientificidade. Destacamos que o acesso e a análise das respostas se farão apenas pela pesquisadora e seu orientador, assegurando que todos os seus dados pessoais e institucionais serão mantidos no anonimato. Estamos felizes com a sua participação e agradecemos de antemão a disponibilidade para responder as questões!

NOME:____

1) Quais os aspectos que diferenciaram essa formação das demais formações que você já participou?

2) Quais os impactos dessa formação na sua prática pedagógica?

3) Quais os impactos dessa formação no seu conhecimento específico do conteúdo de geometria?

4) Quais os impactos dessa formação na sua maneira de perceber o processo de aprendizagem da geometria?

5) Esse programa de formação atendeu as suas expectativas? Justifique sua resposta.