



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Marco Antônio Pauleti

**Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa  
para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach**

Florianópolis/SC

2021

Marco Antônio Pauleti

**Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa  
para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Junior Margotti

Florianópolis/SC

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pauleti, Marco Antônio  
Método das Projeções Relaxadas com Penalização  
Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal  
Postos em Espaços de Banach / Marco Antônio Pauleti ;  
orientador, Fábio Junior Margotti, 2021.  
118 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problemas mal-postos.  
3. Métodos de regularização. 4. Otimização convexa. 5.  
Geometria dos espaços de Banach. I. Margotti, Fábio Junior.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Marco Antônio Pauleti

**Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa  
para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Antonio Carlos Gardel Leitão  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Adriano de Cezaro  
Universidade Federal do Rio Grande

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti  
Orientador

Florianópolis, 2021.

Dedico este trabalho aos meus pais,  
Mildemar (In memoriam) e Cleia

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Cleia, e aos meus irmãos, Jean e Nathielli, por todo o suporte que me forneceram e por apoiarem as minhas decisões.

Agradeço à minha namorada, Dayse, que esteve ao meu lado e prestou auxílio quando apresentei dificuldades e limitações. Certamente a conclusão deste trabalho não seria possível sem seu constante incentivo, carinho e companheirismo.

Agradeço ao casal de professores Marcelo e Márcia, por me encorajarem a participar de Escolas de Verão de Matemática. Minhas participações em tais eventos culminaram na realização deste Mestrado.

Agradeço ao meu orientador, Fábio, pela dedicação e atenção cedidas à mim sempre que solicitei ajuda. Agradeço também por acreditar em mim e me guiar na abertura de novas possibilidades. Muito obrigado!

Aos professores Antonio e Adriano, por terem aceitado ao convite de participar da banca avaliadora, meus agradecimentos.

Estendo meus agradecimentos para todos os professores e demais funcionários da Universidade Federal de Santa Catarina, em especial aos membros do Departamento de Matemática.

Por fim, presto meus agradecimentos à CAPES pelo suporte financeiro concedido.

*“We make our world significant by the courage of  
our questions and by the depth of our answers.”*

Carl Sagan

# Resumo

Problemas inversos formam uma classe de problemas matemáticos que possuem várias aplicações de relevância prática. Sendo um problema inverso frequentemente caracterizado como um problema mal-posto, métodos de regularização são necessários para calcular soluções numericamente. Este trabalho se dedica ao estudo de um método iterativo que visa obter soluções de problemas mal-postos formulados por operadores lineares que atuam entre espaços de Banach. Trata-se de um método do tipo Tikhonov iterado não-estacionário com o termo de penalização sendo a distância de Bregman induzida por uma função uniformemente convexa. A escolha dos parâmetros de regularização é feita *a posteriori* e a estratégia adotada para o cálculo dos multiplicadores de Lagrange gera o chamado método das projeções relaxadas. Para a formulação do algoritmo são usadas técnicas de otimização e análise convexa em espaços de Banach. O estudo trata de uma análise teórica, onde se discute as propriedades de convergência, estabilidade e regularização das soluções computadas pelo método proposto.

**Palavras-chave:** Problemas mal-postos. Métodos de regularização. Otimização convexa. Distâncias de Bregman. Geometria dos espaços de Banach.



# Abstract

Inverse problems are a class of mathematical problems that have several applications of practical relevance. Due to the fact that an inverse problem often leads to an ill-posed problem, regularization methods are needed in order to compute solutions numerically. This work is dedicated to the study of an iterative method that aims to obtain solutions for ill-posed problems formulated by linear operators acting between Banach spaces. It is a nonstationary iterated Tikhonov-type method with the penalty term being the Bregman distance induced by a uniformly convex function. The choice of regularization parameters is made *a posteriori*, and the strategy adopted to compute the Lagrange multipliers generates the so-called range relaxed method. The algorithm is defined employing optimization and convex analysis techniques in Banach spaces. The study deals with a theoretical analysis, where the properties of convergence, stability, and regularization of the solutions computed by the proposed method are discussed.

**Keywords:** Ill-posed problems. Regularization methods. Convex optimization. Bregman distances. Geometry of Banach spaces.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	Problemas Inversos e Problemas Mal-Postos	12
1.2	Métodos de Tikhonov	14
<b>2</b>	<b>ANÁLISE CONVEXA</b>	<b>17</b>
2.1	Fundamentos	17
2.2	Funções Semicontínuas Inferiormente	19
2.3	Existência de Solução para um Problema de Minimização	22
2.4	Continuidade de Funções Convexas	25
2.5	Subdiferencial	27
2.6	Conjugada de Fenchel	32
2.7	Dualidade em Otimização Convexa	34
2.8	Funções Uniformemente Convexas	39
2.9	Distâncias de Bregman	42
2.10	Operador de Dualidade	46
2.11	Geometria dos Espaços de Banach	51
<b>3</b>	<b>MÉTODO DAS PROJEÇÕES RELAXADAS</b>	<b>58</b>
3.1	Definição	58
3.2	Análise de Convergência	62
3.2.1	Convergência com Dados Exatos	62
3.2.2	Introduzindo Ruídos: Estabilidade e Regularização	67
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>82</b>
	<b>APÊNDICE A – PROBLEMAS INVERSOS</b>	<b>84</b>
A.1	Pseudo-Inversa ou Inversa de Moore-Penrose	84
A.2	Métodos de Regularização para Problemas Lineares	92
A.3	Erro do Pior Caso	95
A.4	Construindo Métodos de Regularização	100
	<b>APÊNDICE B – ANÁLISE FUNCIONAL</b>	<b>106</b>
B.1	Teoria Espectral e Decomposição em Valores Singulares	106
B.2	Cálculo Funcional	114
B.3	Topologia Fraca	115

# 1 Introdução

Na literatura sobre problemas inversos e mal-postos é mais frequente nos depararmos com métodos de solução para problemas definidos em espaços de Hilbert, enquanto que os definidos em espaços de Banach mais gerais ainda ocupam um menor espaço. A análise de convergência de algoritmos definidos em espaços de Banach geralmente é muito mais complicada do que as realizadas em espaços de Hilbert. Porém, como recompensa, muitas informações sobre a solução do problema inverso, como características de esparsamento e de descontinuidade, podem ser mais facilmente incorporadas ao problema. Como resultado, algoritmos definidos em espaços de Banach frequentemente recuperam soluções mais apropriadas e são a estrutura correta para a modelagem de muitas aplicações.

O fato de que um problema inverso ser geralmente mal-posto nos leva a adotarmos métodos de regularização, que são estratégias que transformam um problema mal-posto em uma família de problemas bem-postos indexados pelo chamado parâmetro de regularização. Uma das principais questões é como construir uma escolha deste parâmetro de modo que gere um método de regularização eficiente. No caso de problemas lineares em espaços de Hilbert, métodos de regularização são usualmente construídos aproximando a pseudo-inversa  $\mathcal{A}^\dagger$  (do operador linear  $\mathcal{A}$ ) por uma família de soluções regularizadas da forma  $x^{\alpha,\delta} = g_\alpha(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\mathcal{A}^*y^\delta$ . Isto é realizado usando a família espectral associada ao operador  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  e no caso mais particular em que o operador  $\mathcal{A}$  é também compacto, usamos a decomposição em valores singulares. O mesmo procedimento não pode ser aplicado para espaços de Banach mais gerais, uma vez que não temos disponível o operador  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , pois se  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  então  $\mathcal{A}^*: Y^* \rightarrow X^*$  atua nos espaços duais.

A ausência de um produto interno em um espaço de Banach (que não seja Hilbert) gera uma série de dificuldades, pois o conceito de produto interno torna espaços de Hilbert próprios para vários resultados que, em suas essências, são geométricos. Para superar tais dificuldades, introduzimos novos conceitos como os de operador de dualidade e distância de Bregman. Além disso, vemos que alguns espaços de Banach possuem melhores propriedades geométricas do que outros. Entramos assim no estudo da geometria dos espaços de Banach. Tudo isso possui grande interseção com a área de análise convexa, sendo esta a razão para incluirmos um longo capítulo discutindo tópicos relacionados.

O ponto principal deste trabalho é a apresentação de um método do tipo Tikhonov iterado não-estacionário com escolha *a posteriori* dos parâmetros de regularização para solução de problemas lineares mal-postos em espaços de Banach. Este documento está organizado da seguinte forma:

- Nas subseções deste capítulo introdutório discutimos brevemente alguns dos principais conceitos relacionados à teoria dos problemas inversos e apresentamos os métodos do tipo Tikhonov.
- No segundo capítulo apresentamos uma série de pré-requisitos necessários para uma boa compreensão do algoritmo, em geral sobre análise convexa.
- No terceiro capítulo definimos o método iterativo e demonstramos os resultados necessários para concluirmos que de fato obtemos uma estratégia de regularização para o problema inverso considerado.
- Por fim, reunimos alguns resultados sobre a teoria de regularização em espaços de Hilbert no Apêndice A, enquanto que no restante do texto damos enfoque em espaços de Banach mais gerais. Já o Apêndice B trata de alguns tópicos de análise funcional utilizados neste trabalho.

## 1.1 Problemas Inversos e Problemas Mal-Postos

Grande parte do nosso conhecimento sobre o interior da Terra é baseado em interpretações de medições feitas na superfície, pois é improvável que uma amostra direta do material no interior de nosso planeta esteja disponível. Normalmente, aproximamos a verdadeira geologia por um modelo teórico e tentamos determinar os parâmetros do modelo a partir dos dados coletados. Problemas inversos surgem de situações como essa, em que é necessário interpretar medições indiretas.

Quando fazemos a modelagem matemática de um fenômeno natural, frequentemente nos deparamos com o fato que tal fenômeno é governado por um sistema do tipo  $\mathcal{F}(x) = y$ , onde o operador  $\mathcal{F}$  é conhecido (no entanto, geralmente depende de certos parâmetros) e descreve as características do problema estudado. No *problema direto*, conhecemos  $x$  e nosso objetivo é avaliar o operador  $\mathcal{F}$  neste ponto. Já no *problema inverso*, conhecemos  $y$  e procuramos por alguma solução  $x$  do sistema  $\mathcal{F}(x) = y$ . Neste sentido, um problema inverso pode ser associado com o problema de identificar a causa (entrada  $x$  do sistema) de um fenômeno natural, observando-se os efeitos (saída  $y$  do sistema) por ele produzido.

Problemas inversos são difíceis de serem resolvidos pois geralmente levam a problemas mal-postos. Hadamard (1902) introduziu o conceito de um problema bem-posto e, embora sua motivação tenha surgido durante seus estudos sobre equações diferenciais parciais, este conceito é abrangente e aplicável em diferentes contextos. Dizemos que um problema matemático é *bem-posto* (no sentido de Hadamard) se este possuir as seguintes propriedades:

**H1 Existência:** Para todos os dados admissíveis, existe alguma solução.

**H2 Unicidade:** Para todos os dados admissíveis, existe apenas uma solução.

**H3 Estabilidade:** A solução depende continuamente dos dados do problema.

Contudo, estas afirmações não são matematicamente precisas. Para dar um significado concreto, precisamos dizer quais dados são considerados admissíveis, o que aceitamos como solução do problema e qual a topologia usada para verificar a continuidade. Em princípio, sempre conseguimos classificar um problema como bem-posto se criarmos artificialmente tais conceitos. Ao fazermos isso, no entanto, é muito provável que vamos estar criando um modelo sem interesse prático. Logo, o conjunto de dados, o conceito de solução e a topologia escolhida devem estar de acordo com as características do problema estudado.

A razão para se exigir **(H1)** e **(H2)** é bastante clara: apenas evita trabalharmos com um problema que não possui solução alguma ou que possui várias soluções. Já a condição **(H3)** é motivada pelo fato de que em situações práticas não dispomos de dados exatos e, portanto, é desejável que pequenos erros na medição dos dados provoquem uma pequena mudança na solução do problema. Matematicamente, se um problema não possui solução, pode-se alterar o conceito de solução para ampliar o conjunto solução (soluções fracas para equações diferenciais e soluções de mínimos quadrados para sistemas lineares são exemplos típicos). Se um problema tiver mais de uma solução, então informações *a priori* sobre a solução podem ser inseridas no modelo para impor unicidade (por exemplo, condições iniciais para equações diferenciais e solução de norma mínima para sistemas lineares). Entre as três condições de Hadamard, a violação da terceira é a mais difícil de se lidar. Nesse caso, um fator arbitrariamente grande pode amplificar os inevitáveis erros de medição e arredondamento, inutilizando a solução aproximada calculada. Métodos numéricos que podem resolver problemas que carecem de estabilidade são os chamados métodos de regularização.

Um sistema  $\mathcal{F}(x) = y$  está bem-definido quando o operador  $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subseteq X \rightarrow Y$ , bem como seu domínio de definição  $\mathcal{D}(\mathcal{F})$  e os espaços  $X$  e  $Y$  são conhecidos. Para o problema inverso associado ao sistema  $\mathcal{F}(x) = y$ , é natural considerar  $Y$  como o conjunto de dados e, para cada  $y \in Y$ , o conjunto solução dado por  $\{x \in \mathcal{D}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F}(x) = y\}$ . Neste contexto, existência e unicidade de soluções estão relacionadas com propriedades algébricas do operador  $\mathcal{F}$ . Se este for sobrejetivo, então para cada  $y \in Y$  temos garantia de ao menos uma solução. Por outro lado, se  $\mathcal{F}$  for injetivo, então temos que se uma solução existir, será única. Combinando estes dois fatos, precisamos que  $\mathcal{F}$  seja bijetor para que o problema inverso seja bem-posto. Note ainda que, adotando estes conceitos de dados admissíveis e de solução, ao modelarmos o problema o espaço  $Y$  deve incorporar características dos dados (como por exemplo, exigir que os elementos de  $Y$  sejam funções contínuas), enquanto que  $X$  deve incorporar características desejáveis da solução procurada. Por fim, temos

garantia da estabilidade se tivermos a continuidade do operador inverso  $\mathcal{F}^{-1}$ . No entanto, para falarmos de continuidade precisamos equipar os espaços com topologias. Aqui, vamos considerar que  $X$  e  $Y$  são espaços normados.

**Definição 1.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subseteq X \rightarrow Y$  um operador. Dizemos que o sistema  $\mathcal{F}(x) = y$  é *bem-posto* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

**P1**  $\mathcal{F}^{-1}$  existe. Assim, para cada  $y \in Y$  o sistema  $\mathcal{F}(x) = y$  admite uma única solução.

**P2**  $\mathcal{F}^{-1}$  é contínuo. Assim, a única solução  $x = \mathcal{F}^{-1}(y) \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$  do sistema  $\mathcal{F}(x) = y$  depende continuamente de  $y \in Y$ .

Se ao menos uma das propriedades for violada, o sistema é chamado de *mal-posto*. ■

**Convenção 1.2.** Neste trabalho, somente serão considerados espaços vetoriais reais ou complexos. Se o contrário não for explicitamente mencionado, sempre considere que um dado espaço vetorial é real. ■

Este trabalho se concentrará em problemas onde o operador envolvido é linear. Vamos adotar uma prática comum e denotar operadores lineares por  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ .

As condições **(P1)** e **(P2)** não são independentes. É evidente que só faz sentido verificar **(P2)** uma vez que **(P1)** for satisfeita. Além disso, se  $X$  e  $Y$  forem espaços de Banach e  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  for linear e contínuo, então **(P2)** não precisa ser verificada, uma vez que segue de **(P1)** pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja Kesavan (2009, p. 106)).

## 1.2 Métodos de Tikhonov

Sem grande rigor, vamos apresentar os métodos de Tikhonov. Para maiores detalhes, veja Engl, Hanke e Neubauer (1996) e Schuster et al. (2012). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Suponha que queremos resolver o problema inverso:

$$\mathcal{A}x = y, \quad \|y - y^\delta\| \leq \delta$$

onde  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  é o vetor exato e  $\delta \geq 0$  é o nível de ruídos. Para simplificar, assumimos que existe um único  $x^\dagger$  tal que  $\mathcal{A}x^\dagger = y$ . Caso o sistema linear  $\mathcal{A}x = y$  seja mal-posto, pode existir uma sequência  $(x_k)$  satisfazendo:

$$\mathcal{A}x_k \longrightarrow y \text{ e } \|x_k\| \longrightarrow \infty \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

Isso significa que mesmo que o valor do resíduo  $\|\mathcal{A}x_k - y\|$  seja muito pequeno, temos que  $x_k$  pode estar arbitrariamente distante da solução  $x^\dagger$  procurada. Uma maneira de contornar este problema é penalizar a norma do vetor. Assim, para  $\alpha > 0$  definimos o funcional de Tikhonov:

$$T_\alpha^\delta(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 \quad (1.1)$$

O parâmetro  $\alpha > 0$  é chamado de parâmetro de regularização. Agora, tomamos:

$$x^{\alpha,\delta} = \arg \min \{T_\alpha^\delta(x) \mid x \in X\}$$

como uma aproximação da solução  $x^\dagger$  do problema inverso. Métodos que seguem este procedimento são chamados de métodos de Tikhonov de um passo, pois o minimizador  $x^{\alpha,\delta}$  de  $T_\alpha^\delta$  é imediatamente aceito como uma aproximação para  $x^\dagger$ . Por outro lado, temos também os chamados métodos de Tikhonov iterado. Estes são caracterizados por sucessivamente minimizar funcionais para construir uma sequência  $(x_k^\delta)$  para aproximar a solução. Escolhemos um chute inicial  $x_0^\delta$  e definimos:

$$T_{\alpha_k}^\delta(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x_k^\delta\|^2$$

bem como:

$$x_{k+1}^\delta = \arg \min \{T_{\alpha_k}^\delta(x) \mid x \in X\}$$

A iteração deve continuar até que um determinado critério de parada for satisfeito.

A escolha da sequência  $(\alpha_k)$  é de grande importância para um bom desempenho e convergência dos métodos de Tikhonov iterado. Como escolhas *a priori* podemos citar a sequência constante  $\alpha_k = \alpha$  (método Tikhonov iterado estacionário) e a sequência geométrica  $\alpha_k = \alpha_0 \eta^k$  (método Tikhonov iterado geométrico), onde  $\eta \in (0, 1)$ . Já para uma escolha *a posteriori* podemos computar  $\alpha_k$  de forma que  $x_{k+1}^\delta$  satisfaça:

$$(1 - \bar{\eta}) \delta + \bar{\eta} \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \|\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta\| \leq (1 - \eta) \delta + \eta \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \quad (1.2)$$

onde  $0 < \bar{\eta} \leq \eta < 1$  são constantes pré-fixadas. Métodos onde  $\alpha_k$  é calculado visando obter (1.2) são denominados de métodos com projeções relaxadas. Será esta a abordagem que vamos utilizar para a definição do método iterativo apresentado no terceiro capítulo.

Em (1.1) temos a forma mais clássica do funcional de Tikhonov. Em uma formulação mais abrangente, fixamos  $r > 1$  e definimos:

$$T_\alpha^\delta(x) = \frac{1}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \alpha \Psi(x) \quad (1.3)$$

onde o termo de penalização é caracterizado por uma função convexa não-negativa  $\Psi$ . A escolha de  $\Psi(x) = 1/2 \|x\|^2$  pode ser adequada em espaços de Hilbert, mas em geral não apresenta as propriedades necessárias para o estudo de métodos definidos em espaços de Banach. Por fim, observamos que através de uma mudança de variável (1.3) pode ser escrita como:

$$T_\lambda^\delta(x) = \frac{\lambda}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Psi(x)$$

com o multiplicador de Lagrange  $\lambda = 1/\alpha > 0$  cumprindo o papel do parâmetro de regularização.



## 2 Análise Convexa

No próximo capítulo será apresentado um método iterativo para solução de problemas lineares mal-postos em espaços de Banach. Para mostrar que a iteração está bem-definida, bem como propriedades de convergência, estabilidade e regularização, será necessário o uso de técnicas de análise convexa. Este capítulo tem como objetivo apresentar o material essencial para uma boa compreensão do algoritmo que será definido.

### 2.1 Fundamentos

Seja  $X$  um espaço normado. Estaremos estudando funções definidas em  $X$  e tomando valores no conjunto dos *números reais estendidos*  $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} [-\infty, \infty]$ . Para uma função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , definimos o seu *domínio efetivo*, denotado por  $\text{dom}(F)$ , como sendo o conjunto:

$$\text{dom}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid F(x) < \infty\}$$

Usamos a notação  $F \equiv \alpha$  para indicar que  $F$  é a função constante  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ . Observe que  $\text{dom}(F)$  é vazio se, e somente se,  $F \equiv \infty$ .

Dizemos que  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é *convexa* se  $F \equiv \infty$  ou se satisfaz a seguinte propriedade: Para quaisquer  $x, y \in \text{dom}(F)$  e  $\lambda \in (0, 1)$ , temos que:

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) \quad (2.1)$$

Note que se  $F$  é uma função convexa, então  $\text{dom}(F)$  é um conjunto convexo. Além disso, dizemos que  $F$  é *côncava* se  $-F$  é convexa.

Para  $r \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível de  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  na altura  $r$  é definido por:

$$N_F(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid F(x) \leq r\}$$

Note que se  $F$  é convexa, então para todo  $r \in \mathbb{R}$  temos que  $N_F(r)$  é um conjunto convexo.

Suponha que estamos interessados em encontrar pontos de mínimo (globais) para  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Se  $F$  atinge o valor  $-\infty$ , então este problema de minimização é trivial, pois possui uma resposta imediata: Qualquer  $\hat{x} \in X$  tal que  $F(\hat{x}) = -\infty$  é um minimizador. Um outro caso patológico é minimizar a função  $F \equiv \infty$ . Portanto, dizemos que  $F$  é *própria para minimização* se  $F$  nunca atinge o valor  $-\infty$  e se  $F \not\equiv \infty$ . Similarmente,

dizemos que  $F$  é *própria para maximização* se  $F$  nunca atinge o valor  $\infty$  e se  $F \not\equiv -\infty$ . Vamos nos concentrar em estudar funções convexas, para as quais associamos um problema de minimização. Logo, vamos abreviar e dizer simplesmente que  $F$  é *própria* para indicar que  $F$  é própria para minimização. Para funções próprias vamos restringir o contradomínio para o conjunto  $\mathbb{R}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, \infty]$ .

Seja  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Dizemos que  $F$  é *estritamente convexa* se satisfaz a seguinte propriedade: Para quaisquer  $x, y \in \text{dom}(F)$  distintos e  $\lambda \in (0, 1)$ , temos que é válida a desigualdade estrita em (2.1). Observe que o conceito de estritamente convexa só fica bem definido para funções próprias. De fato, naturalmente queremos excluir o caso  $F \equiv \infty$ , pois nenhuma função constante deve ser considerada estritamente convexa. Por outro lado,  $F$  não pode atingir o valor  $-\infty$ , pois caso contrário o lado direito de (2.1) pode ser  $-\infty$  e, portanto, é impossível valer a desigualdade estrita.

Para  $S \subseteq X$ , definimos sua *função indicadora*  $I_S: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  por:

$$I_S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ \infty & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Note que a função indicadora  $I_S$  é própria e convexa se, e somente se,  $S$  é um conjunto não-vazio e convexo.

Definimos o *epigrafo* de  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , denotado por  $\text{epi}(F)$ , como sendo o conjunto:

$$\text{epi}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x) \leq r\}$$

Note que  $(x, F(x)) \in \text{epi}(F)$  se, e somente se,  $F(x)$  é um número finito.

**Proposição 2.1.** Uma função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é convexa se, e somente se,  $\text{epi}(F)$  é um conjunto convexo em  $X \times \mathbb{R}$ .

**Prova:** Veja Bauschke e Combettes (2011, p. 139). ■

**Proposição 2.2.** Se  $\{F_i: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid i \in \mathcal{I}\}$  é uma família de funções convexas, então a função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por  $F(x) = \sup \{F_i(x) \mid i \in \mathcal{I}\}$  também é convexa.

**Prova:** Veja Bauschke e Combettes (2011, p. 143). ■

## 2.2 Funções Semicontínuas Inferiormente

Aqui apresentamos um conceito muito utilizado para obtenção de resultados de minimização de uma função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

**Definição 2.3.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função. Dizemos que  $F$  é *semicontínua inferiormente* (sci) em um ponto  $x_0 \in X$  se  $F(x_0) = -\infty$  ou se para todo  $r \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $r < F(x_0)$ , existe uma vizinhança  $U \subseteq X$  de  $x_0$  tal que:

$$\forall x \in U, r < F(x)$$

Dizemos que  $F$  é sci se  $F$  é sci em todo ponto  $x_0 \in X$ . Ainda, dizemos que  $F$  é *semicontínua superiormente* (scs) [em  $x_0$ ] se  $-F$  é sci [em  $x_0$ ].

■

**Teorema 2.4.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $F$  é semicontínua inferiormente.
- II.  $\forall r \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $N_F(r)$  é fechado em  $X$ .
- III.  $\text{epi}(F)$  é fechado em  $X \times \mathbb{R}$ .

**Prova:**

(I)  $\Rightarrow$  (III) Vamos mostrar que  $(\text{epi}(F))^c$  é aberto. Caso  $(\text{epi}(F))^c = \emptyset$ , o resultado segue. Do contrário, tome  $(x_0, r_0) \in (\text{epi}(F))^c$ . Observe que  $r_0 < F(x_0)$  e, portanto, podemos tomar  $s \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $r_0 < s < F(x_0)$ . Sendo  $F$  sci em  $x_0$ , existe uma vizinhança  $U \subseteq X$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in U$ , temos  $s < F(x)$ . Portanto,  $U \times (-\infty, s)$  é uma vizinhança de  $(x_0, r_0)$  que está contida em  $(\text{epi}(F))^c$ . Logo, todo ponto  $(x_0, r_0) \in (\text{epi}(F))^c$  é ponto interior.

(III)  $\Rightarrow$  (II) Para  $r \in \mathbb{R}$ , considere a função  $G_r: X \rightarrow X \times \mathbb{R}$  dada por  $G_r(x) = (x, r)$ . Note que  $G_r$  é contínua e que  $N_F(r) \times \{r\} = \text{epi}(F) \cap (X \times \{r\})$ . Sendo  $\text{epi}(F)$  fechado, temos que  $N_F(r) \times \{r\}$  é fechado em  $X \times \mathbb{R}$ . Assim,  $N_F(r) = G_r^{-1}(N_F(r) \times \{r\})$  é fechado em  $X$ .

(II)  $\Rightarrow$  (I) Seja  $x_0 \in X$  qualquer. Vamos mostrar que  $F$  é sci em  $x_0$ . Caso  $F(x_0) = -\infty$ , o resultado segue. Do contrário, tome  $r \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $r < F(x_0)$ . Assim,  $x_0 \in (N_F(r))^c$  e como  $(N_F(r))^c$  é aberto,  $x_0$  é ponto interior. Logo, existe uma vizinhança  $U \subseteq X$  de  $x_0$

tal que  $U \subseteq (N_F(r))^c$ . Ou seja, para todo  $x \in U$ , temos  $r < F(x)$ . Portanto,  $F$  é sci em  $x_0$ . Como  $x_0 \in X$  é arbitrário,  $F$  é sci. ■

Além dessa definição topológica de semicontinuidade inferior, frequentemente usamos a definição sequencial.

**Definição 2.5.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função. Dizemos que  $F$  é *sequencialmente semicontínua inferiormente* (sequencialmente sci) em um ponto  $x_0 \in X$  se para toda sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ , temos que:

$$F(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

Dizemos que  $F$  é sequencialmente sci se  $F$  é sequencialmente sci em todo ponto  $x_0 \in X$ . ■

A topologia de um espaço topológico arbitrário não é necessariamente caracterizada por seqüências. Logo, os conceitos apresentados nas Definições 2.3 e 2.5 são distintos, mas coincidem, por exemplo, se estamos trabalhando com um espaço métrico. Em geral, a definição topológica implica a definição sequencial. De fato, suponha que  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é sci em  $x_0 \in X$ . Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Queremos mostrar que  $F(x_0) \leq r$ , onde  $r = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . Suponha, por absurdo, que  $r < F(x_0)$ . Neste caso, tome  $s \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $r < s < F(x_0)$ . Como  $F$  é sci em  $x_0$ , existe uma vizinhança  $U \subseteq X$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in U$ , temos  $s < F(x)$ . Como  $x_n \rightarrow x_0$ , existe um índice  $n_0 \geq 1$  tal que se  $n \geq n_0$ , então  $x_n \in U$ . Disto, obtemos:

$$\sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} F(x_n) = r < s \leq \inf_{n \geq n_0} F(x_n)$$

que resultada em uma contradição. Logo,  $F(x_0) \leq r = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$  e, portanto,  $F$  é sequencialmente sci em  $x_0 \in X$ .

**Teorema 2.6.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $F$  é sequencialmente semicontínua inferiormente.
- II.  $\forall r \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $N_F(r)$  é sequencialmente fechado em  $X$ .
- III.  $\text{epi}(F)$  é sequencialmente fechado em  $X \times \mathbb{R}$ .

**Prova:**

(I)  $\Rightarrow$  (III) Seja  $(x_n, r_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{epi}(F)$  tal que  $(x_n, r_n) \rightarrow (x, r) \in X \times \mathbb{R}$ . Queremos mostrar que  $(x, r) \in \text{epi}(F)$ . Note que  $x_n \rightarrow x$  e  $r_n \rightarrow r$ . Ainda, temos  $F(x_n) \leq r_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Como  $F$  é sequencialmente sci em  $x$ , obtemos:

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = r$$

Logo, segue que  $(x, r) \in \text{epi}(F)$ .

(III)  $\Rightarrow$  (II) Sejam  $r \in \mathbb{R}$  e  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq N_F(r)$  tal que  $x_n \rightarrow x \in X$ . Queremos mostrar que  $x \in N_F(r)$ . Note que  $(x_n, r)_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{epi}(F)$  satisfaz  $(x_n, r) \rightarrow (x, r) \in X \times \mathbb{R}$ . Como  $\text{epi}(F)$  é sequencialmente fechado, temos  $(x, r) \in \text{epi}(F)$ . Logo, segue que  $x \in N_F(r)$ .

(II)  $\Rightarrow$  (I) Sejam  $x_0 \in X$  e  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Queremos mostrar que  $F(x_0) \leq r$ , onde  $r = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . Caso  $r = \infty$ , então a desigualdade é imediata. Do contrário, tome  $s \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $r < s$ . Agora, podemos extrair uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = r$ . Portanto, para  $k \geq 1$  suficientemente grande, temos  $x_{n_k} \in N_F(s)$ . Como  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  e o conjunto  $N_F(s)$  é sequencialmente fechado, segue que  $x_0 \in N_F(s)$ , ou seja,  $F(x_0) \leq s$ . Como  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $r < s$  é arbitrário, obtemos que  $F(x_0) \leq r = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . Logo,  $F$  é sequencialmente sci em  $x_0$ . Como  $x_0 \in X$  é arbitrário, temos que  $F$  é sequencialmente sci. ■

Vamos nos concentrar no caso em que  $X$  é um espaço de Banach. Para uma função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , podemos aplicar a Definição 2.3 tanto para a topologia forte, quanto para a topologia fraca (veja Apêndice B.3 para detalhes). Quando consideramos a topologia forte, vamos usar a mesma nomenclatura e denominar  $F$  *semicontínua inferiormente*. Já para a topologia fraca, vamos denominar  $F$  *fracamente semicontínua inferiormente*. No caso em que  $F$  é uma função convexa, temos um importante resultado:

**Teorema 2.7.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função convexa. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $F$  é sequencialmente fracamente semicontínua inferiormente.
- II.  $F$  é sequencialmente semicontínua inferiormente.
- III.  $F$  é semicontínua inferiormente.
- IV.  $F$  é fracamente semicontínua inferiormente.

**Prova:**

Seja  $r \in \mathbb{R}$  qualquer. Usando os Teoremas 2.4 e 2.6, podemos traduzir todas as afirmações em termos do conjunto de nível  $N_F(r)$ . Como  $F$  é convexa,  $N_F(r)$  é convexo. O resultado então segue do Corolário B.26. ■

**Proposição 2.8.** Se  $\{F_i: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid i \in \mathcal{I}\}$  é uma família de funções sci, então a função  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por  $F(x) = \sup \{F_i(x) \mid i \in \mathcal{I}\}$  também é sci.

**Prova:** Veja Bauschke e Combettes (2011, p. 13). ■

Para um espaço normado  $X$ , definimos o conjunto:

$$\Gamma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid F \text{ é convexa e sci}\}$$

**Proposição 2.9.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F \in \Gamma(X)$ . Se existir  $x_0 \in X$  tal que  $F(x_0) = -\infty$ , então  $F$  nunca assume um valor finito. Ou seja, para todo  $x \in X$ , temos que  $F(x) \in \{-\infty, \infty\}$ .

**Prova:** Veja Bauschke e Combettes (2011, p. 158). ■

Logo, funções  $F \in \Gamma(X)$  que atingem  $-\infty$  não são interessantes. Por conta disso, definimos o conjunto:

$$\Gamma_0(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty \mid F \text{ é própria, convexa e sci}\}$$

As funções do conjunto  $\Gamma_0(X)$  desempenham papel importante na teoria de otimização. Na próxima seção, mostramos a existência de solução para um problema de minimização envolvendo uma função  $F \in \Gamma_0(X)$ .

## 2.3 Existência de Solução para um Problema de Minimização

Seja  $X$  um espaço de Banach. Para  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  própria e  $S \subseteq X$  não-vazio, estamos interessados em resolver o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar:}} \quad F(x) \\
 & \text{sujeito a:} \quad x \in S
 \end{aligned}$$

Uma *solução* para o problema  $(\mathcal{P})$  é qualquer ponto  $\hat{x} \in S$  tal que:

$$F(\hat{x}) = \inf_S F \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{F(x) \mid x \in S\}$$

Quando  $F$  for uma função convexa e  $S \subseteq X$  for um subconjunto convexo, dizemos que o problema  $(\mathcal{P})$  é *convexo*.

**Proposição 2.10.** Se o problema  $(\mathcal{P})$  é convexo, então seu conjunto solução é convexo.

**Prova:**

Se o conjunto solução for vazio, o resultado segue. Do contrário, sejam  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in S$  soluções do problema  $(\mathcal{P})$ . Para  $\lambda \in (0, 1)$  qualquer, obtemos:

$$F((1 - \lambda)\hat{x}_1 + \lambda\hat{x}_2) \leq (1 - \lambda)F(\hat{x}_1) + \lambda F(\hat{x}_2) = \inf_S F \quad (2.2)$$

Como  $S$  é convexo, segue que  $(1 - \lambda)\hat{x}_1 + \lambda\hat{x}_2 \in S$ . A definição de  $\inf_S F$  e a desigualdade (2.2) implicam que  $F((1 - \lambda)\hat{x}_1 + \lambda\hat{x}_2) = \inf_S F$ . Logo, obtemos que a combinação convexa  $(1 - \lambda)\hat{x}_1 + \lambda\hat{x}_2$  também é uma solução. ■

**Teorema 2.11.** Suponha que:

- I.  $X$  é um espaço de Banach reflexivo.
- II.  $S \subseteq X$  é um subconjunto não-vazio, convexo e fechado.
- III.  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é tal que  $F \in \Gamma_0(X)$  e  $\text{dom}(F) \cap S \neq \emptyset$ .
- IV.  $\forall r \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $N_F(r) \cap S$  é limitado.

Sob tais hipóteses, temos que  $\inf_S F$  é finito e o problema  $(\mathcal{P})$  admite solução.

**Prova:**

Como  $\text{dom}(F) \cap S \neq \emptyset$ , existe um ponto  $x_0 \in S$  tal que  $F(x_0) < \infty$ . Portanto,  $\inf_S F$  ou é finito ou  $\inf_S F = -\infty$ . Tome  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x_0) < r$  e seja  $(x_n)$  uma sequência minimizadora para o problema  $(\mathcal{P})$ , isto é, uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq S$  satisfazendo:

$$F(x_n) \longrightarrow \inf_S F < r$$

Para  $n \geq 1$  suficientemente grande, temos  $F(x_n) \leq r$ . Logo, eventualmente temos que  $x_n \in N_F(r) \cap S$ . Portanto, a sequência  $(x_n)$  é limitada. Sendo  $X$  espaço de Banach reflexivo, segue da Proposição B.23 que  $(x_n)$  admite uma subsequência que converge fracamente. Assim, seja  $(x_{n_k})$  uma subsequência tal que  $x_{n_k} \xrightarrow{w} \hat{x} \in X$ . Como  $S$  é convexo e fechado, pelo Corolário B.26 temos que  $\hat{x} \in S$ . Como  $F$  é convexa e sci, pelo Teorema 2.7 obtemos que:

$$F(\hat{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \inf_S F$$

Portanto, segue que  $F(\hat{x}) = \inf_S F$  é finito e que  $\hat{x} \in S$  é uma solução do problema  $(\mathcal{P})$ . ■

**Observação 2.12.** No Teorema 2.11, podemos substituir a hipótese (IV) por uma das seguintes alternativas:

- (IV.A)  $S$  é limitado.
- (IV.B)  $F$  é coerciva em  $S$ , isto é, para qualquer sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$  satisfazendo  $\|x_n\| \longrightarrow \infty$ , temos  $F(x_n) \longrightarrow \infty$ .

**Corolário 2.13.** Suponha as mesmas hipóteses do Teorema 2.11 e, adicionalmente, suponha que  $F$  é estritamente convexa. Neste caso, a solução do problema  $(\mathcal{P})$  garantida pelo Teorema 2.11 é única. ■

**Prova:**

Suponha, por absurdo, que existam  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in S$  soluções distintas do problema  $(\mathcal{P})$ . Da Proposição 2.10, obtemos:

$$\inf_S F = F\left(\frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}\right) < \frac{F(\hat{x}_1) + F(\hat{x}_2)}{2} = \inf_S F$$

que claramente é uma contradição. Portanto, a solução é única. ■



## 2.4 Continuidade de Funções Convexas

Se  $X$  é um espaço normado de dimensão infinita, então existe um funcional linear  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  descontínuo. Sendo  $g$  linear, em particular é convexo. Assim, funções convexas não são necessariamente contínuas. Porém, como mostraremos nesta seção, sob algumas condições razoáveis temos que uma função convexa é contínua no interior de seu domínio efetivo.

**Teorema 2.14.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Para  $x_0 \in \text{dom}(F)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $F$  é Lipschitz-contínua em uma vizinhança de  $x_0$ .
- II.  $F$  é contínua em  $x_0$ .
- III.  $F$  é limitada em uma vizinhança de  $x_0$ .
- IV.  $F$  é limitada superiormente em uma vizinhança de  $x_0$ .

**Prova:** Veja Borwein e Vanderwerff (2010, p. 128). ■

Ressaltamos que o Teorema 2.14 é falso se trocarmos “limitada superiormente” por “limitada inferiormente”. De fato, considere o caso em que  $X$  é de dimensão infinita e  $F(x) = |g(x)|$  para algum funcional linear  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  descontínuo.

**Proposição 2.15.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Se  $F$  é contínua em algum ponto  $x_0 \in \text{dom}(F)$ , então  $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(F))$  e  $F$  é contínua em todo o interior de  $\text{dom}(F)$ . Além disso, para cada  $r \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $F(x_0) < r$  temos que  $(x_0, r) \in \text{int}(\text{epi}(F))$ .

**Prova:**

Como  $F$  é contínua em  $x_0 \in \text{dom}(F)$ , então do Teorema 2.14  $F$  é limitada superiormente em uma vizinhança de  $x_0$ . Sejam  $K_0 \in \mathbb{R}$  e  $U_0 \subseteq X$  vizinhança de  $x_0$  tais que  $F(x) \leq K_0$ , para todo  $x \in U_0$ . Portanto, vemos que  $U_0 \subseteq \text{dom}(F)$  e  $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(F)) \neq \emptyset$ . Seja  $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom}(F))$  qualquer. Tome  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que:

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x} + \delta(\bar{x} - x_0) = (1 + \delta)\bar{x} - \delta x_0 \in \text{dom}(F)$$

Considere  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \delta)^{-1} \in (0, 1)$  e note que  $\bar{x} = (1 - \lambda)x_0 + \lambda z$ . Logo,  $U \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \lambda)U_0 + \lambda z$  é uma vizinhança de  $\bar{x}$ . Vamos mostrar que  $F$  é limitada superiormente em  $U$  e concluir

que  $F$  é contínua em  $\bar{x}$ . Ainda, como  $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom}(F))$  foi arbitrário, vamos obter que  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ . Para  $y \in U_0$  obtemos:

$$F((1-\lambda)y + \lambda z) \leq (1-\lambda)F(y) + \lambda F(z) \leq (1-\lambda)K_0 + \lambda F(z) \stackrel{\text{def}}{=} K$$

Ou seja, para todo  $x \in U$ , temos  $F(x) \leq K < \infty$ . Por fim, seja  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x_0) < r$ . Tome  $s \in (F(x_0), r)$ . Da continuidade de  $F$  em  $x_0$ , existe uma vizinhança  $V \subseteq X$  de  $x_0$  tal que  $F(x) \leq s$ , para todo  $x \in V$ . Assim,  $(x_0, r) \in V \times (s, \infty) \subseteq \text{epi}(F)$  e, portanto,  $(x_0, r) \in \text{int}(\text{epi}(F))$ . ■

Usando a Proposição 2.15, para podermos afirmar que  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ , precisamos antes encontrar um ponto de continuidade. Esta etapa pode ser removida caso o espaço  $X$  seja completo. Um resultado preliminar é quando  $X$  é de dimensão finita.

**Proposição 2.16.** Sejam  $X$  um espaço de dimensão finita e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Então,  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ .

**Prova:**

Suponha  $\dim X = N$  e seja  $(e_i)_{i=1}^N$  uma base para  $X$ . Seja  $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(F))$ . Através de uma translação adequada, vamos assumir que  $x_0 = \theta$ . Como a origem é ponto interior de  $\text{dom}(F)$ , para  $r > 0$  suficientemente pequeno temos que  $r e_i \in \text{dom}(F)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$  e também que:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x = \sum_{i=1}^N x_i e_i \in X \mid \forall i = 1, 2, \dots, N, x_i \in \left(0, \frac{r}{N}\right) \right\} \subseteq \text{dom}(F)$$

Para  $x \in U$ , temos:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i e_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{r}\right) r e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{r}\right)\right) \theta$$

Note que  $\sum_i (r^{-1} x_i) \in (0, 1)$ . Como  $F$  é convexa, obtemos:

$$F(x) \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{r}\right) F(r e_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{r}\right)\right) F(\theta) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |F(r e_i)| + |F(\theta)| \stackrel{\text{def}}{=} K$$

Ou seja, para todo  $x \in U$ , temos  $F(x) \leq K < \infty$ . Como  $U$  é aberto, então  $U$  é uma vizinhança de cada um de seus pontos. Assim, para  $z \in U$  qualquer,  $U$  é uma vizinhança de  $z$  onde  $F$  é limitada superiormente. Logo,  $F$  é contínua em  $z$  e o resultado segue então da Proposição 2.15. ■

**Proposição 2.17.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $F \in \Gamma_0(X)$ . Então,  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ .

**Prova:**

Seja  $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(F))$ . Através de uma translação adequada, vamos assumir que  $x_0 = \theta$ . Tome  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $F(\theta) < \lambda$ . Para um dado  $x \in X$ , defina a função  $G_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  por  $G_x(s) = F(sx)$ . Note que  $G_x$  é própria e convexa. Como  $0 \in \text{int}(\text{dom}(G_x))$ , então da Proposição 2.16 segue que  $G_x$  é contínua na origem. Assim, para  $n \geq 1$  suficientemente grande, temos  $F(n^{-1}x) \leq \lambda$  e, portanto,  $n^{-1}x \in N_F(\lambda)$ . Repetindo este argumento para cada  $x \in X$ , obtemos  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n N_F(\lambda)$ . Como  $F \in \Gamma_0(X)$ , então o conjunto de nível  $N_F(\lambda)$  é fechado. Portanto, do Teorema da Categoria de Baire (veja Brezis (2010, p. 31)) existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $n_0 N_F(\lambda)$  possui interior não-vazio. Logo,  $U = \text{int}(N_F(\lambda)) \neq \emptyset$  é um aberto em que  $F$  é limitada superiormente por  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pelo mesmo argumento que foi utilizado no final da prova da Proposição 2.16, temos que  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ . ■

**Observação 2.18.** Resumindo, se  $X$  é um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é uma função própria e convexa, temos que  $F$  é contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$  se:

- $F$  é contínua em algum ponto de  $\text{dom}(F)$ .
- $X$  é de dimensão finita.
- $X$  é um espaço de Banach e  $F$  é sci.

■

## 2.5 Subdiferencial

**Definição 2.19.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Dizemos que  $x^* \in X^*$  é um *subgradiente* de  $F$  no ponto  $x_0 \in \text{dom}(F)$  se satisfaz a seguinte propriedade:

$$\forall x \in X, F(x) - F(x_0) \geq \langle x^* | x - x_0 \rangle$$

Dizemos que  $F$  é *subdiferenciável* em  $x_0$  se  $F$  admitir ao menos um subgradiente em  $x_0$ . O conjunto de todos os subgradientes de  $F$  no ponto  $x_0$  será denotado por  $\partial F(x_0)$ . Ainda, definimos  $\text{dom}(\partial F) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \text{dom}(F) \mid \partial F(x) \neq \emptyset\}$ .

■

Um funcional  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser *afim* se difere apenas por uma constante de um funcional linear. Ou seja,  $g$  é afim se existem  $x^* \in X^*$  e  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $g(x) = \langle x^* | x \rangle + c$ . O elemento do dual  $x^* \in X^*$  é chamado de *inclinação* de  $g$ . Seja  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Dizemos que  $g$  é um *funcional suporte* de  $F$  em  $x_0 \in \text{dom}(F)$  se  $g(x_0) = F(x_0)$  e  $g(x) \leq F(x)$ , para todo  $x \in X$ . Se  $g(x) = \langle x^* | x \rangle + c$  é tal que  $g(x_0) = F(x_0)$ , então necessariamente  $c = F(x_0) - \langle x^* | x_0 \rangle$  e  $g$  assume a forma  $g(x) = \langle x^* | x - x_0 \rangle + F(x_0)$ . Agora, observe que:

$$\forall x \in X, g(x) \leq F(x) \iff \forall x \in X, \langle x^* | x - x_0 \rangle + F(x_0) \leq F(x) \iff x^* \in \partial F(x_0)$$

Portanto,  $\partial F(x_0)$  consiste nas inclinações  $x^*$  que tornam  $g(x) = \langle x^* | x - x_0 \rangle + F(x_0)$  um funcional suporte de  $F$  em  $x_0$ .

**Proposição 2.20.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Então, para  $x_0 \in \text{dom}(F)$  temos que  $\partial F(x_0)$  é um conjunto convexo.

**Prova:**

O resultado segue caso  $\partial F(x_0)$  seja vazio. Do contrário, tome  $x_1^*, x_2^* \in \partial F(x_0)$ . Para um  $x \in X$  arbitrário, temos:

$$F(x) - F(x_0) \geq \langle x_1^* | x - x_0 \rangle \tag{2.3}$$

$$F(x) - F(x_0) \geq \langle x_2^* | x - x_0 \rangle \tag{2.4}$$

Seja  $\lambda \in (0, 1)$ . Multiplique (2.3) por  $(1 - \lambda)$  e (2.4) por  $\lambda$ . Após somar as desigualdades resultantes, vemos que  $(1 - \lambda)x_1^* + \lambda x_2^* \in \partial F(x_0)$ . ■

Uma consequência imediata da definição de subgradiente é:

$$\forall x \in X, F(x_0) \leq F(x) \iff \theta \in \partial F(x_0) \tag{2.5}$$

que é uma similaridade com o que fazemos em cursos de Cálculo quando procuramos candidatos de pontos de mínimo de uma função de uma variável real resolvendo  $F'(x) = 0$ . Para funções  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  temos dois conceitos de diferenciabilidade:

**Definição 2.21.** Sejam  $X$  um espaço normado,  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função e  $x_0 \in X$  um ponto tal que  $F(x_0)$  é um número finito. Definimos a *derivada direcional* de  $F$  em  $x_0$  com direção  $v \in X$ , denotada por  $F'(x_0, v)$ , como:

$$F'(x_0, v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

sempre que o limite acima existir em  $[-\infty, \infty]$ . Caso  $F'(x_0, v)$  exista e seja finito para todo  $v \in X$ , podemos definir o funcional  $F'(x_0, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se ainda,  $F'(x_0, \cdot)$  for linear e contínuo, então dizemos que  $F$  é *Gâteaux-diferenciável* em  $x_0$ . Denotamos por  $F'(x_0) \in X^*$  o elemento do dual tal que  $\langle F'(x_0) | v \rangle = F'(x_0, v)$ , para todo  $v \in X$ . Chamamos  $F'(x_0)$  de *derivada de Gâteaux* de  $F$  em  $x_0$ . Ademais, dizemos que  $F$  é *Fréchet-diferenciável* em  $x_0$  se  $F$  é Gâteaux-diferenciável em  $x_0$  e, adicionalmente, sua derivada de Gâteaux satisfaz:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0^+} \frac{|F(x_0 + v) - F(x_0) - \langle F'(x_0) | v \rangle|}{\|v\|} = 0$$

Por fim, dizemos que  $F$  é Gâteaux-diferenciável (Fréchet-diferenciável) em  $U \subseteq X$  se  $F$  é Gâteaux-diferenciável (Fréchet-diferenciável) em todo  $x \in U$ .

■

**Proposição 2.22.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Então, para  $x_0 \in \text{dom}(F)$  temos que a derivada direcional  $F'(x_0, v)$  existe para todas as direções  $v \in X$  e vale que:

$$F'(x_0, v) = \inf_{t > 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

**Prova:**

Basta verificar que, para um dado  $v \in X$  arbitrário, a função  $g(t) = (F(x_0 + tv) - F(x_0)) / t$  é não-decrescente em  $(0, \infty)$ . De fato, sejam  $0 < s < t$ . Com uma pequena manipulação dos termos obtemos:

$$g(s) \leq g(t) \iff F(x_0 + sv) \leq \left(\frac{s}{t}\right) F(x_0 + tv) + \left(1 - \frac{s}{t}\right) F(x_0)$$

sendo a segunda desigualdade verdadeira, uma vez que  $F$  é convexa.

■

**Exemplo 2.23.** Defina a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  pondo  $F(x) = -\sqrt{1-x^2}$  caso  $|x| \leq 1$  e  $F(x) = \infty$  do contrário. Então,  $F$  é própria e convexa. Note que  $\text{dom}(F) = [-1, 1]$  e  $F'(1, \pm 1) = \pm \infty$ . Observe ainda que as derivadas direcionais de  $F$  existem em qualquer ponto no interior de  $\text{dom}(F)$ , mas se tornam ilimitadas na fronteira de  $\text{dom}(F)$ . Este é um simples exemplo ilustrando que  $F'(x_0, v)$  pode atingir os valores extremos  $\pm \infty$ , mesmo quando  $x_0 \in \text{dom}(F)$ .

■

**Teorema 2.24.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Então, para  $x_0 \in \text{dom}(F)$  temos que:

$$\partial F(x_0) = \{x^* \in X^* \mid \forall v \in X, F'(x_0, v) \geq \langle x^* \mid v \rangle\}$$

**Prova:**

Seja  $x^* \in \partial F(x_0)$ . Então, da definição de subdiferencial segue que:

$$\forall v \in X, \forall t > 0, F(x_0 + tv) - F(x_0) \geq \langle x^* \mid tv \rangle = t \langle x^* \mid v \rangle$$

Logo, vale  $F'(x_0, \cdot) \geq \langle x^* \mid \cdot \rangle$ . Por outro lado, seja  $x^* \in X^*$  tal que  $F'(x_0, \cdot) \geq \langle x^* \mid \cdot \rangle$ . Neste caso, temos que:

$$\forall v \in X, F(x_0 + v) - F(x_0) \geq \inf_{t>0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} = F'(x_0, v) \geq \langle x^* \mid v \rangle$$

Ou seja,  $x^* \in \partial F(x_0)$ . ■

Uma consequência imediata do Teorema 2.24 revela a ligação entre os conceitos de Gâteaux-diferenciabilidade e subdiferenciabilidade para funções convexas.

**Corolário 2.25.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Se  $F$  é Gâteaux-diferenciável em  $x_0 \in \text{dom}(F)$ , então  $F$  é subdiferenciável neste ponto e  $\partial F(x_0)$  é igual ao conjunto unitário  $\{F'(x_0)\}$ . ■

Para a função dada no Exemplo 2.23 temos que  $\partial F(1)$  e  $\partial F(-1)$  são conjuntos vazios, enquanto que  $\partial F(x)$  é unitário para  $x \in (-1, 1) = \text{int}(\text{dom}(F))$ . É possível que uma função convexa possua subdiferencial vazio mesmo em pontos interiores de seu domínio efetivo. Por exemplo, se  $X$  é de dimensão infinita e  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear descontínuo, então  $\partial g(x)$  é vazio em todos os pontos. No entanto, este fenômeno não ocorre em pontos de continuidade.

**Teorema 2.26.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Suponha que  $F$  é contínua no ponto  $x_0 \in \text{dom}(F)$ . Então, temos que  $\partial F(x_0)$  é um conjunto não-vazio e limitado.

**Prova:** Veja Clarke (2013, p. 62). ■

Assim, sempre que  $F$  for contínua em  $\text{int}(\text{dom}(F))$  (veja Observação 2.18) temos que  $F$  é subdiferenciável em  $\text{int}(\text{dom}(F))$ .

Vamos considerar o caso em que  $X = \mathbb{R}$ . Se  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa, então para  $x < z < y$  obtemos:

$$\frac{F(z) - F(x)}{z - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(z)}{y - z} \quad (2.6)$$

No caso em que  $F$  é diferenciável, segue de (2.6) que:

$$F'(x) \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq F'(y)$$

Em particular, temos que  $F'$  é não-decrescente. Sendo monótona,  $F'$  pode ter somente descontinuidades de salto. Porém, do Teorema de Darboux,  $F'$  possui a propriedade do valor intermediário, impossibilitando a ocorrência de descontinuidades de salto. Ou seja,  $F'$  é contínua. Portanto, se  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa e diferenciável, então necessariamente é continuamente diferenciável. É possível generalizar este resultado para espaços  $X$  mais gerais, embora certo esforço seja necessário e aqui apenas indicamos uma referência:

**Teorema 2.27.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $F \in \Gamma_0(X)$ . Suponha que  $F$  é contínua e Gâteaux-diferenciável num aberto  $U \subseteq X$ . Então,  $F$  é Fréchet-diferenciável em  $U$  se, e somente se, a função  $x \in U \mapsto F'(x) \in X^*$  é contínua (quando  $X$  e  $X^*$  estão ambos equipados com suas topologias forte).

**Prova:** Veja Zălinescu (2002, p. 195). ■

**Teorema 2.28.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F, G: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  funções próprias e convexas. Suponha que exista um ponto  $x_0 \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$  onde pelo menos uma das funções é contínua. Então, temos que:

$$\forall x \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G), \partial(F + G)(x) = \partial F(x) + \partial G(x)$$

**Prova:** Veja Clarke (2013, p. 63). ■

**Teorema 2.29.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados,  $F: Y \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa e  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  um operador linear e contínuo. Suponha que exista um ponto  $x_0 \in X$  tal que  $F$  é finita e contínua em  $\mathcal{A}x_0 \in Y$ . Então, a função  $G(x) = F(\mathcal{A}x)$  é convexa e temos que:

$$\forall x \in \text{dom}(G), \partial G(x) = \mathcal{A}^*(\partial F(\mathcal{A}x)) \quad (2.7)$$

onde  $\mathcal{A}^*: Y^* \rightarrow X^*$  denota a adjunta de Banach do operador  $\mathcal{A}$ .

**Prova:** Veja Clarke (2013, p. 64). ■

O significado de (2.7) é que para todo  $x^* \in \partial G(x)$  existe  $y^* \in \partial F(\mathcal{A}x)$  satisfazendo:

$$\forall z \in X, \langle x^* | z \rangle = \langle y^* | \mathcal{A}z \rangle$$

e, reciprocamente, todo  $x^* \in X^*$  da forma  $\mathcal{A}^*y^*$  para algum  $y^* \in \partial F(\mathcal{A}x)$ , pertence ao conjunto  $\partial G(x)$ . Também podemos estender (2.7) para o caso em que  $G(x) = F(\mathcal{A}x - v)$ , para algum  $v \in Y$ . De fato, para  $H(y) = F(y - v)$  vamos mostrar que  $\partial H(y) = \partial F(y - v)$ . Se  $y^* \in \partial H(y)$ , então segue que:

$$\forall u \in Y, F(u - v) - F(y - v) = H(u) - H(y) \geq \langle y^* | u - y \rangle$$

Fazendo  $w = u - v$  obtemos:

$$\forall w \in Y, F(w) - F(y - v) \geq \langle y^* | w - (y - v) \rangle$$

Ou seja,  $y^* \in \partial F(y - v)$ . Assim,  $\partial H(y) \subseteq \partial F(y - v)$  e da mesma forma podemos mostrar a inclusão contrária. Logo, para  $G(x) = F(\mathcal{A}x - v)$  temos que  $G(x) = H(\mathcal{A}x)$  e, portanto,  $\partial G(x) = \mathcal{A}^*(\partial H(\mathcal{A}x)) = \mathcal{A}^*(\partial F(\mathcal{A}x - v))$ .

## 2.6 Conjugada de Fenchel

**Definição 2.30.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função. A função *conjugada de Fenchel*  $F^*: X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  de  $F$  é definida por:

$$\begin{aligned} \forall x^* \in X^*, F^*(x^*) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \langle x^* | x \rangle - F(x) \mid x \in X \right\} \\ &= \sup \left\{ \langle x^* | x \rangle - F(x) \mid x \in \text{dom}(F) \right\} \end{aligned}$$

Ainda, definimos a *biconjugada*  $F^{**}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  de  $F$  por:

$$\begin{aligned} \forall x \in X, F^{**}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \langle x^* | x \rangle - F^*(x^*) \mid x^* \in X^* \right\} \\ &= \sup \left\{ \langle x^* | x \rangle - F^*(x^*) \mid x^* \in \text{dom}(F^*) \right\} \end{aligned}$$
■



**Observação 2.31.** Note que se  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é própria, então  $F^*: X^* \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  não atinge  $-\infty$  e, portanto, está bem-definida como uma função com contradomínio  $\mathbb{R}_\infty$ . Observe também que o domínio de  $F^{**}$  é  $X$ , e não o bidual  $X^{**}$ . Portanto,  $F^{**}$  não se trata da conjugada de  $F^*$ . Em geral, temos  $F^{**}(x) = (F^*)^*(\mathcal{J}(x))$ , onde  $\mathcal{J}: X \rightarrow X^{**}$  denota a injeção canônica de  $X$  em  $X^{**}$ . Assim, se  $X$  for um espaço reflexivo, então é possível identificar  $F^{**}$  com  $(F^*)^*$ . ■

**Proposição 2.32.** Sejam  $X$  um espaço vetorial normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Então, para  $x^* \in X^*$  e  $x \in X$  quaisquer, vale a *desigualdade de Fenchel-Young*:

$$F(x) + F^*(x^*) \geq \langle x^* | x \rangle \quad (2.8)$$

com igualdade se, e somente se,  $x^* \in \partial F(x)$ .

**Prova:**

A desigualdade de Fenchel-Young é uma consequência imediata da definição de  $F^*$ . Agora, sejam  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$  tais que temos igualdade em (2.8). Neste caso,  $F(x)$  e  $F^*(x^*)$  são finitos e, utilizando (2.8), temos que o funcional afim  $g(z) = \langle x^* | z - x \rangle + F(x)$  satisfaz  $g(z) = \langle x^* | z \rangle - F^*(x^*) \leq F(z)$ , para todo  $z \in X$ . Portanto,  $x^* \in \partial F(x)$  (veja a discussão logo após a Definição 2.19). Reciprocamente, sejam  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$  tais que  $x^* \in \partial F(x)$ . Da definição de subgradiente segue que  $F(x)$  é finito e também:

$$\forall z \in \text{dom}(F), F(z) \geq \langle x^* | z - x \rangle + F(x)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} F^*(x^*) &= \sup \left\{ \langle x^* | z \rangle - F(z) \mid z \in \text{dom}(F) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \langle x^* | z \rangle + \langle x^* | x - z \rangle - F(x) \mid z \in \text{dom}(F) \right\} = \langle x^* | x \rangle - F(x) \end{aligned}$$

A desigualdade contrária é dada por (2.8), obtendo-se assim a igualdade. ■

Isolando  $F(x)$  em (2.8) e tomando o supremo em  $x^* \in \text{dom}(F^*)$ , obtemos que  $F^{**} \leq F$ . Vamos estudar em que situação temos a igualdade  $F^{**} = F$ . Primeiramente, note que se usarmos  $\mathcal{I} = \text{dom}(F)$  como conjunto de índices, podemos definir a família de funcionais  $\{F_x: X^* \rightarrow \mathbb{R} \mid x \in \text{dom}(F)\}$  dados por  $F_x(x^*) = \langle x^* | x \rangle - F(x)$ . Note que cada  $F_x$  é um funcional afim e contínuo e, portanto,  $F_x \in \Gamma(X^*)$ . Das Proposições 2.2 e 2.8, vemos que  $F^* \in \Gamma(X^*)$ . Similarmente, temos  $F^{**} \in \Gamma(X)$ . Ou seja, a igualdade

$F^{**} = F$  deve estar relacionada com o fato de  $F$  ser uma função convexa e sci. De fato, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.33** (Fenchel-Moreau). Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Então,  $F \in \Gamma_0(X)$  se, e somente se,  $F^*$  é própria e  $F = F^{**}$ . Em particular, se  $F \in \Gamma_0(X)$ , então  $F^* \in \Gamma_0(X^*)$ .

**Prova:** Veja Clarke (2013, p. 69). ■

## 2.7 Dualidade em Otimização Convexa

Seja  $X$  um espaço normado. Para uma função  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  própria, definimos o *problema primal*:

$$(\mathcal{P}) \quad \inf \{ F(x) \mid x \in X \} \quad (2.9)$$

O problema dual é construído por meio de perturbações do problema primal. Para isso, seja  $Y$  um espaço normado e  $\Phi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria satisfazendo  $\Phi(x, \theta) = F(x)$ , para todo  $x \in X$ . Denominamos  $X$  como o *espaço das variáveis primais*,  $Y$  como o *espaço das variáveis de perturbação* e  $\Phi$  a *função de perturbação*. O *problema primal perturbado* por  $y \in Y$  é dado por:

$$(\mathcal{P}_y) \quad \inf \{ \Phi(x, y) \mid x \in X \} \quad (2.10)$$

Na ausência de perturbações ( $y = \theta$ ), o problema  $(\mathcal{P}_\theta)$  coincide com  $(\mathcal{P})$ . O *problema dual* (com relação a função de perturbação  $\Phi$ ) é definido por:

$$(\mathcal{P}^*) \quad \sup \{ -\Phi^*(\theta, y^*) \mid y^* \in Y^* \} \quad (2.11)$$

onde  $\Phi^*: X^* \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é a conjugada de Fenchel de  $\Phi$ . Também definimos perturbações do problema dual, dadas por:

$$(\mathcal{P}_{x^*}^*) \quad \sup \{ -\Phi^*(x^*, y^*) \mid y^* \in Y^* \} \quad (2.12)$$

o que nos permite definir o *problema bidual*:

$$(\mathcal{P}^{**}) \quad \inf \{ \Phi^{**}(x, \theta) \mid x \in X \} \quad (2.13)$$

Logo, se  $\Phi = \Phi^{**}$ , então os problemas  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{P}^*)$  são duais um do outro e, portanto, existe uma simetria entre os problemas primal e dual. Por este motivo, estamos particularmente

interessados no caso em que  $F \in \Gamma_0(X)$  e  $\Phi \in \Gamma_0(X \times Y)$ . Daqui em diante vamos assumir que  $F$  e  $\Phi$  satisfazem tais condições.

Para  $x_0 \in X$  e  $y_0^* \in Y^*$  arbitrários, obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi^*(\theta, y_0^*) &= \sup \left\{ \langle (\theta, y_0^*) | (x, y) \rangle - \Phi(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y \right\} \\ &= \sup \left\{ \langle y_0^* | y \rangle - \Phi(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y \right\} \\ &\geq -\Phi(x_0, \theta)\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\sup(\mathcal{P}^*) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ -\Phi^*(\theta, y^*) \mid y^* \in Y^* \right\} \leq \inf \left\{ \Phi(x, \theta) \mid x \in X \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \inf(\mathcal{P})$$

Qualquer  $x_0 \in X$  satisfazendo  $\Phi(x_0, \theta) = \inf(\mathcal{P})$  é denominado uma *solução do problema primal*, e qualquer  $y_0^* \in Y^*$  satisfazendo  $-\Phi^*(\theta, y_0^*) = \sup(\mathcal{P}^*)$  é denominado uma *solução do problema dual*.

**Definição 2.34.** Dizemos que o problema  $(\mathcal{P})$  é *normal* se  $\sup(\mathcal{P}^*) = \inf(\mathcal{P})$  e este valor comum é um número finito. Ainda, dizemos que o problema  $(\mathcal{P})$  é *estável* se  $(\mathcal{P})$  é normal e se  $(\mathcal{P}^*)$  admite ao menos uma solução. ■

**Proposição 2.35** (Critério de estabilidade). Suponha que  $\inf(\mathcal{P})$  é um número finito e que exista  $x_0 \in X$  satisfazendo as seguintes condições:

- $\Phi(x_0, \theta) < \infty$ .
- A função convexa  $\Phi(x_0, \cdot): Y \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é contínua na origem.

Sob tais hipóteses, temos que  $(\mathcal{P})$  é estável.

**Prova:** Veja Ekeland e Témam (1999, p. 52). ■

**Definição 2.36.** A função  $\mathfrak{L}: X \times Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  dada por:

$$\forall x \in X, \forall y^* \in Y^*, -\mathfrak{L}(x, y^*) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \langle y^* | y \rangle - \Phi(x, y) \mid y \in Y \right\}$$

é denominada de *Lagrangeano* do problema  $(\mathcal{P})$  com relação a função de perturbação  $\Phi$ . ■

Se fixarmos  $x \in X$  e denotarmos por  $\Phi_x$  a função  $y \mapsto \Phi(x, y)$ , então temos que  $-\mathfrak{L}(x, y^*) = \Phi_x^*(y^*)$ , onde  $\Phi_x^*$  é a conjugada de Fenchel de  $\Phi_x$ . Como  $\Phi \in \Gamma_0(X \times Y)$ , temos  $\Phi_x^{**} = \Phi_x$ . Disto obtemos que:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi_x(y) = \Phi_x^{**}(y) \\ &= \sup \left\{ \langle y^* | y \rangle - \Phi_x^*(y^*) \mid y^* \in Y^* \right\} \\ &= \sup \left\{ \langle y^* | y \rangle + \mathfrak{L}(x, y^*) \mid y^* \in Y^* \right\} \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte caracterização do problema primal:

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} \mathfrak{L}(x, y^*) \quad (2.14)$$

Similarmente, temos:

$$\begin{aligned} \Phi^*(x^*, y^*) &= \sup \left\{ \langle x^* | x \rangle + \langle y^* | y \rangle - \Phi(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y \right\} \\ &= \sup_{x \in X} \left\{ \langle x^* | x \rangle + \sup_{y \in Y} \left\{ \langle y^* | y \rangle - \Phi(x, y) \right\} \right\} \\ &= \sup_{x \in X} \left\{ \langle x^* | x \rangle - \mathfrak{L}(x, y^*) \right\} \end{aligned}$$

de onde segue que:

$$(\mathcal{P}^*) \quad \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} \mathfrak{L}(x, y^*) \quad (2.15)$$

**Exemplo 2.37.** Vamos ilustrar os conceitos apresentados com o seguinte problema:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar:} & F(x) \\ \text{sujeito a:} & x \in S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X \mid G(x) \leq 0 \right\} \end{array} \quad (2.16)$$

onde assumimos que:

- $X$  é um espaço de Banach reflexivo.
- $F \in \Gamma_0(X)$  é coerciva em  $S$  e limitada inferiormente.
- $G \in \Gamma_0(X)$ .
- Existe um ponto  $\hat{x} \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$  tal que  $G(\hat{x}) < 0$ . O ponto  $\hat{x}$  é chamado de *ponto de Slater* pois satisfaz a desigualdade estritamente.

Do Teorema 2.11 sabemos que o problema  $(\mathcal{P})$  admite solução. Agora, considere a função  $\bar{F}: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  dada por:

$$\bar{F}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in S \\ \infty & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

e a função de perturbação  $\Phi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  definida por:

$$\Phi(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F(x) & \text{se } G(x) + \lambda \leq 0 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso temos  $\Phi(x, 0) = \bar{F}(x)$  e o problema primal é exatamente o problema  $(\mathcal{P})$  em (2.16). Vamos usar a Proposição 2.35 para mostrar que  $(\mathcal{P})$  é estável. Como  $F$  é própria e limitada inferiormente, segue que  $\inf(\mathcal{P})$  é finito. Para o ponto de Slater  $\hat{x}$  temos que  $\Phi(\hat{x}, 0) = F(\hat{x}) < \infty$ . Como  $G(\hat{x}) < 0$ , então para  $|\lambda|$  pequeno temos  $G(\hat{x}) + \lambda < 0$ . Ou seja, existe uma vizinhança aberta da origem onde  $\Phi(\hat{x}, \cdot)$  permanece constante em  $\Phi(\hat{x}, \lambda) = F(\hat{x})$ . Logo, todas as condições da Proposição 2.35 são satisfeitas e o problema  $(\mathcal{P})$  é estável. Ainda, observe que:

$$\mathfrak{L}(x, \lambda) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \notin \text{dom}(F) \text{ ou } x \notin \text{dom}(G) \\ F(x) + \lambda G(x) & \text{se } x \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G) \text{ e } \lambda \geq 0 \\ -\infty & \text{se } x \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G) \text{ e } \lambda < 0 \end{cases}$$

Daí, usando (2.15), obtemos o problema dual:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^*) \quad & \text{maximizar: } \inf_{\lambda} \{ F(x) + \lambda G(x) \mid x \in X \} \\ & \text{sujeito a: } \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

■

**Proposição 2.38.** Para cada  $x_0 \in X$ , a função  $\mathfrak{L}_{x_0}: Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  dada por:

$$\forall y^* \in Y^*, \mathfrak{L}_{x_0}(y^*) = \mathfrak{L}(x_0, y^*)$$

é côncava e scs. Ainda, para cada  $y_0^* \in Y^*$ , a função  $\mathfrak{L}_{y_0^*}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  dada por:

$$\forall x \in X, \mathfrak{L}_{y_0^*}(x) = \mathfrak{L}(x, y_0^*)$$

é convexa (mas não necessariamente sci).

**Prova:** Veja Ekeland e Témam (1999, p. 55). ■

**Definição 2.39.** Um ponto  $(x_0, y_0^*) \in X \times Y^*$  é chamado de *ponto de sela* para o Lagrangeano  $\mathfrak{L}$  se satisfazer a condição:

$$\forall x \in X, \forall y^* \in Y^*, \mathfrak{L}(x_0, y^*) \leq \mathfrak{L}(x_0, y_0^*) \leq \mathfrak{L}(x, y_0^*)$$

Logo, um ponto de sela  $(x_0, y_0^*) \in X \times Y^*$  é um par tal que  $y_0^*$  é ponto de máximo da função côncava  $\mathfrak{L}_{x_0}$  e  $x_0$  é ponto de mínimo da função convexa  $\mathfrak{L}_{y_0^*}$ .

**Proposição 2.40.** As seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $(x_0, y_0^*) \in X \times Y^*$  é um ponto de sela do Lagrangeano.
- II.  $x_0 \in X$  é uma solução de  $(\mathcal{P})$ ,  $y_0^* \in Y^*$  é uma solução de  $(\mathcal{P}^*)$  e  $-\Phi^*(\theta, y_0^*) = \Phi(x_0, \theta)$  (isto é,  $\sup(\mathcal{P}^*) = \inf(\mathcal{P})$ ).

**Prova:** Veja Ekeland e Témam (1999, p. 57). ■

**Proposição 2.41.** Se o problema  $(\mathcal{P})$  é estável, então  $x_0 \in X$  é uma solução de  $(\mathcal{P})$  se, e somente se, existe algum  $y_0^* \in Y^*$  tal que  $(x_0, y_0^*)$  é um ponto de sela do Lagrangeano.

**Prova:** Veja Ekeland e Témam (1999, p. 57). ■

**Exemplo 2.42.** Voltamos para o problema do Exemplo 2.37. Já mostramos que  $(\mathcal{P})$  é estável e admite solução. Seja  $x_0 \in X$  uma solução do problema primal. Da Proposição 2.41, existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(x_0, \lambda_0)$  é ponto de sela do Lagrangeano. Da Proposição 2.40, temos  $G(x_0) \leq 0$  (viabilidade primal),  $\lambda_0 \geq 0$  (viabilidade dual) e segue que:

$$F(x_0) = \inf(\mathcal{P}) = \sup(\mathcal{P}^*) = \inf \left\{ F(x) + \lambda_0 G(x) \mid x \in X \right\} \quad (2.18)$$

De (2.18) e de  $\lambda_0 G(x_0) \leq 0$ , obtemos:

$$\forall x \in X, F(x_0) + \lambda_0 G(x_0) \leq F(x_0) \leq F(x) + \lambda_0 G(x) \quad (2.19)$$

Fazendo  $x = x_0$  em (2.19), segue que  $\lambda_0 G(x_0) = 0$ . Também segue de (2.19) que:

$$x_0 \in \arg \min \{F(x) + \lambda_0 G(x) \mid x \in X\}$$

Logo, se  $x_0$  é solução do problema primal, então existe um *multiplicador de Lagrange*  $\lambda_0$  tal que o par  $(x_0, \lambda_0)$  satisfaz as seguintes condições:

- **viabilidade primal:**  $G(x_0) \leq 0$
- **viabilidade dual:**  $\lambda_0 \geq 0$
- **folga complementar:**  $\lambda_0 G(x_0) = 0$
- **minimização:**  $x_0 \in \arg \min \{F(x) + \lambda_0 G(x) \mid x \in X\}$

As condições acima também são chamadas de *condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*. ■

## 2.8 Funções Uniformemente Convexas

**Definição 2.43.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Dizemos que  $F$  é *uniformemente convexa* caso existir alguma função não-decrescente  $\Theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  que se anula somente na origem (isto é, temos  $\Theta(s) = 0 \iff s = 0$ ) satisfazendo a seguinte propriedade: Para quaisquer  $x, y \in \text{dom}(F)$  e  $\lambda \in (0, 1)$  segue:

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) + (1 - \lambda)\lambda \Theta(\|x - y\|) \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) \quad (2.20)$$

A função  $\Theta$  é chamada de *módulo de convexidade* de  $F$ . Ainda, caso seja possível tomar  $\Theta(s) = \beta/p s^p$  para alguma escolha de  $\beta > 0$  e  $p > 1$ , então dizemos que  $F$  é *p-convexa* (com constante  $\beta$ ). No caso mais específico em que  $p = 2$ , dizemos que  $F$  é *fortemente convexa*. ■

**Exemplo 2.44.** Em um espaço de Hilbert  $X$ , a função  $F(x) = 1/2 \|x\|^2$  é fortemente convexa. ■

Note que  $F$  uniformemente convexa implica em  $F$  estritamente convexa, que por sua vez implica em  $F$  convexa.

**Proposição 2.45.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria e convexa. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

I.  $F$  é uniformemente convexa.

II.  $F$  possui a seguinte propriedade: Dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in \text{dom}(F)$  satisfazendo  $\|x - y\| \geq \epsilon$  e para qualquer  $\lambda \in (0, 1)$  temos:

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) + (1 - \lambda)\lambda\delta \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

III.  $F$  possui a seguinte propriedade: Dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in \text{dom}(F)$  satisfazendo  $\|x - y\| \geq \epsilon$  temos:

$$F\left(\frac{x + y}{2}\right) + \delta \leq \frac{F(x) + F(y)}{2}$$

**Prova:**

(I)  $\Rightarrow$  (III) Imediato,  $\delta(\epsilon) = \frac{1}{4}\Theta(\epsilon) > 0$ .

(III)  $\Rightarrow$  (II) Sejam  $\epsilon > 0$ ,  $x, y \in \text{dom}(F)$  satisfazendo  $\|x - y\| \geq \epsilon$  e  $\lambda \in (0, 1)$  quaisquer. De (III), existe um  $\delta > 0$  tal que:

$$F\left(\frac{x + y}{2}\right) + \delta \leq \frac{F(x) + F(y)}{2}$$

Ou seja, o caso  $\lambda = 1/2$  não precisa ser analisado. Suponha  $\lambda \neq 1/2$  e divida em dois casos:

Caso 1:  $\lambda \in (0, 1/2)$

Neste caso, temos  $2\lambda \in (0, 1)$ . Como  $F$  é convexa, segue que:

$$\begin{aligned} F((1 - \lambda)x + \lambda y) &= F((1 - 2\lambda)x + \lambda(x + y)) \\ &= F\left((1 - 2\lambda)x + 2\lambda\left(\frac{x + y}{2}\right)\right) \\ &\leq (1 - 2\lambda)F(x) + 2\lambda F\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ &\leq (1 - 2\lambda)F(x) + \lambda(F(x) + F(y)) - 2\lambda\delta \\ &= (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) - 2\lambda\delta \\ &\leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) - 2(1 - \lambda)\lambda\delta \end{aligned}$$



Caso 2:  $\lambda \in (1/2, 1)$

Neste caso, temos  $\alpha = 2\lambda - 1 \in (0, 1)$ . Como  $F$  é convexa, segue que:

$$\begin{aligned}
 F((1-\lambda)x + \lambda y) &= F((1-\lambda)(x+y) - (1-\lambda)y + \lambda y) \\
 &= F\left(2(1-\lambda)\left(\frac{x+y}{2}\right) + (2\lambda-1)y\right) \\
 &= F\left((1-\alpha)\left(\frac{x+y}{2}\right) + \alpha y\right) \\
 &\leq (1-\alpha)F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \alpha F(y) \\
 &\leq 2(1-\lambda)\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} - \delta\right) + (2\lambda-1)F(y) \\
 &= (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) - 2(1-\lambda)\delta \\
 &\leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) - 2(1-\lambda)\lambda\delta
 \end{aligned}$$

(II)  $\Rightarrow$  (I) Considere a função  $\Theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  definida por:

$$\Theta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \frac{(1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) - F((1-\lambda)x + \lambda y)}{(1-\lambda)\lambda} \mid \begin{array}{l} x, y \in \text{dom}(F), \|x-y\| \geq s, \\ \lambda \in (0, 1) \end{array} \right\}$$

Como  $F$  é convexa, temos  $\Theta(s) \geq 0$ . Ainda,  $\Theta$  é não-decrescente, pois ao aumentarmos o valor do argumento passamos a tomar o ínfimo em um conjunto menor. Note que  $\Theta(0) = 0$  e para  $s > 0$  temos  $\Theta(s) \geq \delta(s) > 0$ . Ou seja,  $\Theta$  se anula somente na origem. Por fim, (2.20) segue diretamente da definição de  $\Theta$  e, portanto,  $F$  é uniformemente convexa. ■

**Definição 2.46.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Dizemos que  $F$  possui a *propriedade de Kadec-Klee* (também chamada de *propriedade de Radon-Riesz*) se para toda sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \text{dom}(F)$  e  $x \in \text{dom}(F)$  satisfazendo:

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{e} \quad F(x_n) \rightarrow F(x)$$

temos que  $x_n \rightarrow x$  (convergência em norma). ■

**Proposição 2.47.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $F \in \Gamma_0(X)$  uniformemente convexa. Então,  $F$  possui a propriedade de Kadec-Klee.

**Prova:**

Sejam  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{dom}(F)$  e  $x \in \text{dom}(F)$  tais que  $x_n \xrightarrow{w} x$  e  $F(x_n) \rightarrow F(x)$ . Suponha, para obter contradição, que  $x_n \not\rightarrow x$ . Então, passando para uma subsequência caso necessário, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\|x_n - x\| \geq \epsilon_0$ , para todo  $n \geq 1$ . Como  $F$  é uniformemente convexa, da Proposição 2.45 existe um  $\delta > 0$  tal que:

$$\forall n \geq 1, F\left(\frac{x_n + x}{2}\right) + \delta \leq \frac{F(x_n) + F(x)}{2}$$

Como  $(x_n + x)/2 \xrightarrow{w} x$  e  $F \in \Gamma_0(X)$ , segue que:

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \leq F(x) - \delta$$

daí a contradição. ■

## 2.9 Distâncias de Bregman

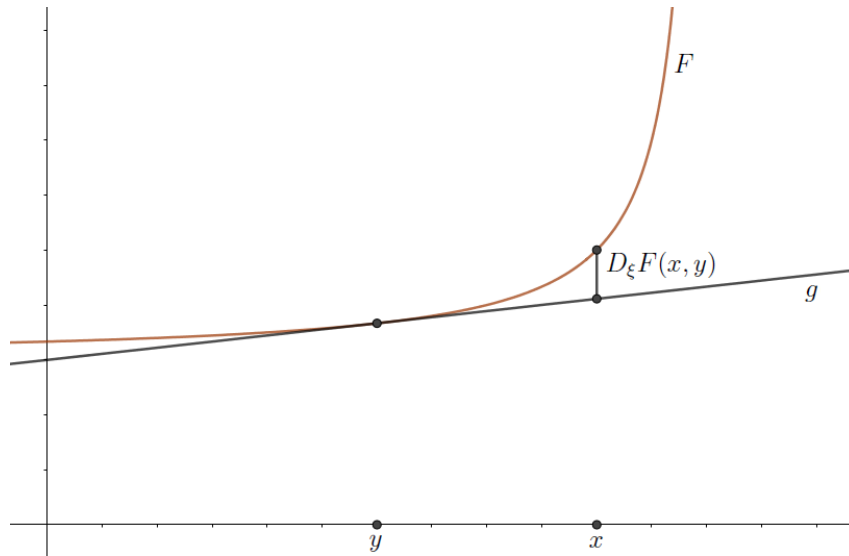
**Definição 2.48.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$  uma função própria. Para dois pontos  $x \in X$  e  $y \in \text{dom}(\partial F)$ , definimos a *distância de Bregman* entre  $x$  e  $y$  (induzida por  $F$  e  $\xi \in \partial F(y)$ ) como:

$$D_{\xi}F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) - F(y) - \langle \xi | x - y \rangle$$
■

Como  $\xi \in \partial F(y)$ , então o funcional afim  $g(x) = \langle \xi | x - y \rangle + F(y)$  é suporte de  $F$  em  $y$ . Note que  $D_{\xi}F(x, y) = F(x) - g(x)$  e, portanto, segue que  $D_{\xi}F(x, y) \geq 0$ . A equação  $D_{\xi}F(x, y) = F(x) - g(x)$  também nos dá uma interpretação geométrica (Figura 1) da distância de Bregman: O funcional  $g$  é uma aproximação linear de  $F$  em  $y$ , de modo que  $D_{\xi}F(x, y)$  mede o erro de linearização no ponto  $x$ .

**Observação 2.49.** Note que o valor de  $D_{\xi}F(x, y)$  depende da escolha do subgradiente  $\xi \in \partial F(y)$ . Para remover tal dependência, alguns autores definem a distância de Bregman como  $D_F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) - F(y) - F'(y, x - y)$ , para  $x, y \in \text{dom}(F)$ . No caso em que  $F$  é Gâteaux-diferenciável em  $y$ , temos uma única escolha de subgradiente  $\xi = F'(y)$  e, além disso,  $\langle F'(y) | x - y \rangle = F'(y, x - y)$ . Ou seja, estas duas definições coincidem neste caso. ■

Figura 1 – Ilustração geométrica da distância de Bregman



Fonte: Do autor.

**Exemplo 2.50.** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $F(x) = 1/2 \|x\|^2$ . Como a função  $F$  é Gâteaux-diferenciável e  $F'(x_0, v) = \langle v, x_0 \rangle$ , usando a definição dada na Observação 2.49 obtemos que  $D_F(x, y) = 1/2 \|x - y\|^2$ .

■

Será comum utilizarmos a distância de Bregman em situações onde temos como objetivo nos aproximar especificamente de um determinado ponto  $x^\dagger \in \text{dom}(\partial F)$ . Assim, fixados  $x^\dagger$  e  $\xi \in \partial F(x^\dagger)$ , consideramos a função  $D_\xi F(\cdot, x^\dagger): X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ . Como exposto anteriormente, existe um funcional afim  $g$  tal que  $D_\xi F(x, x^\dagger) = F(x) - g(x)$ . Logo, vemos que  $D_\xi F(\cdot, x^\dagger)$  é (estritamente) convexa sempre que  $F$  é (estritamente) convexa. No caso em que  $F$  é estritamente convexa, obtemos ainda que  $D_\xi F(x, x^\dagger) = 0$  se, e somente se,  $x = x^\dagger$ . De fato, que  $D_\xi F(x^\dagger, x^\dagger) = 0$  é imediato. Agora, suponha que  $D_\xi F(x, x^\dagger) = 0$ , porém  $x \neq x^\dagger$ . Neste caso, uma vez que  $D_\xi F(\cdot, x^\dagger)$  é estritamente convexa, temos:

$$D_\xi F\left(\frac{x + x^\dagger}{2}, x^\dagger\right) < \frac{D_\xi F(x, x^\dagger) + D_\xi F(x^\dagger, x^\dagger)}{2} = 0$$

que claramente é uma contradição.

**Proposição 2.51.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Sejam  $x_1 \in \text{dom}(\partial F)$ ,  $x_2 \in \text{dom}(F)$ ,  $x_3 \in \text{dom}(\partial F)$ ,  $\xi_1 \in \partial F(x_1)$  e  $\xi_3 \in \partial F(x_3)$ . Então, temos a chamada *identidade dos três pontos*:

$$D_{\xi_1} F(x_2, x_1) - D_{\xi_1} F(x_3, x_1) = D_{\xi_3} F(x_2, x_3) - \langle \xi_3 - \xi_1 | x_3 - x_2 \rangle$$

**Prova:**

A prova é direta, bastando usar a definição:

$$\begin{aligned} D_{\xi_1}F(x_2, x_1) - D_{\xi_1}F(x_3, x_1) &= F(x_2) - F(x_3) - \langle \xi_1 | x_2 - x_3 \rangle \\ &= D_{\xi_3}F(x_2, x_3) + \langle \xi_3 | x_2 - x_3 \rangle - \langle \xi_1 | x_2 - x_3 \rangle \\ &= D_{\xi_3}F(x_2, x_3) - \langle \xi_3 - \xi_1 | x_3 - x_2 \rangle \end{aligned}$$

■

Suponha que temos uma sequência  $(x_k)$  gerada por algum algoritmo iterativo que tenta aproximar um determinado ponto  $x^\dagger$ . Se  $X$  for um espaço de Hilbert, temos que:

$$\frac{1}{2} \|x^\dagger - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x^\dagger - x_k\|^2 = -\frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x^\dagger \rangle$$

Caso seja possível mostrar a estimativa  $\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x^\dagger \rangle \leq 0$ , então vamos obter que  $\|x^\dagger - x_{k+1}\| \leq \|x^\dagger - x_k\|$ . Isto é, obtemos a monotonia do erro de iteração. A identidade dos três pontos nos permite obter uma equação similar quando trabalhamos com um espaço de Banach:

$$D_{\xi_{k+1}}F(x^\dagger, x_{k+1}) - D_{\xi_k}F(x^\dagger, x_k) = -D_{\xi_k}F(x_{k+1}, x_k) + \langle \xi_{k+1} - \xi_k | x_{k+1} - x^\dagger \rangle$$

**Proposição 2.52.** Seja  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função uniformemente convexa com módulo de convexidade  $\Theta$ . Sejam  $x \in \text{dom}(F)$ ,  $y \in \text{dom}(\partial F)$  e  $\xi \in \partial F(y)$ . Então, temos que:

$$D_\xi F(x, y) \geq \Theta(\|x - y\|)$$

**Prova:**

Seja  $\lambda \in (0, 1)$  arbitrário. Como  $\xi \in \partial F(y)$ , segue da definição de subdiferencial que:

$$\begin{aligned} F((1 - \lambda)x + \lambda y) - F(y) &\geq \langle \xi | (1 - \lambda)(x - y) \rangle \\ &= (1 - \lambda) \langle \xi | (x - y) \rangle \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sendo  $F$  uniformemente convexa, temos:

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) + (1 - \lambda)\lambda \Theta(\|x - y\|) \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

Ou ainda:

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) - F(y) + (1 - \lambda)\lambda\Theta(\|x - y\|) \leq (1 - \lambda)(F(x) - F(y)) \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22), segue que:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(F(x) - F(y)) &\geq (1 - \lambda)\langle \xi | (x - y) \rangle + (1 - \lambda)\lambda\Theta(\|x - y\|) \\ \Rightarrow F(x) - F(y) &\geq \langle \xi | (x - y) \rangle + \lambda\Theta(\|x - y\|) \\ \Rightarrow F(x) - F(y) - \langle \xi | (x - y) \rangle &\geq \lambda\Theta(\|x - y\|) \\ \Rightarrow D_\xi F(x, y) &\geq \lambda\Theta(\|x - y\|) \end{aligned}$$

Como  $\lambda \in (0, 1)$  foi arbitrário, fazendo  $\lambda \rightarrow 1^-$  obtemos a desigualdade desejada. ■

**Proposição 2.53.** Sejam  $X$  um espaço normado e  $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma função própria. Para  $x_0 \in \text{dom}(\partial F)$  e  $\xi \in \partial F(x_0)$ , considere a função  $G(x) = D_\xi F(x, x_0)$ . Então, temos que  $\text{dom}(\partial F) = \text{dom}(\partial G)$ . Além disso, vale que  $\partial G(x) = \partial F(x) - \xi$ .

**Prova:**

Sejam  $x \in \text{dom}(\partial F)$  e  $\xi_x \in \partial F(x)$ . Observe que:

$$\forall z \in X, G(z) - G(x) = F(z) - F(x) - \langle \xi | z - x \rangle$$

Como  $\xi_x \in \partial F(x)$ , da definição de subdiferencial segue que:

$$\forall z \in X, F(z) - F(x) \geq \langle \xi_x | z - x \rangle$$

Portanto, obtemos:

$$\forall z \in X, G(z) - G(x) \geq \langle \xi_x - \xi | z - x \rangle$$

Logo,  $x \in \text{dom}(\partial G)$  e  $(\xi_x - \xi) \in \partial G(x)$ . Por outro lado, sejam  $x \in \text{dom}(\partial G)$  e  $\xi_x \in \partial G(x)$ . Neste caso, temos:

$$\forall z \in X, F(z) - F(x) - \langle \xi | z - x \rangle = G(z) - G(x) \geq \langle \xi_x | z - x \rangle$$

Ou ainda:

$$\forall z \in X, F(z) - F(x) \geq \langle \xi_x + \xi | z - x \rangle$$

Portanto,  $x \in \text{dom}(\partial F)$  e  $(\xi_x + \xi) \in \partial F(x)$ . ■

## 2.10 Operador de Dualidade

**Definição 2.54.** Dizemos que  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é uma *função peso* se satisfazer as seguintes propriedades:

- $\varphi(0) = 0$ .
- $\varphi$  é contínua e estritamente crescente.
- $\varphi(s) \rightarrow \infty$  quando  $s \rightarrow \infty$ .

■

**Definição 2.55.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função peso. Definimos o *operador de dualidade*  $J_\varphi: X \rightarrow 2^{X^*}$  com função peso  $\varphi$  por:

$$\forall x \in X, J_\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^* \in X^* \mid \langle x^* | x \rangle = \|x^*\| \|x\| \text{ e } \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}$$

No caso em que  $\varphi(s) = s^{p-1}$  para algum  $p > 1$ , vamos usar a notação  $J_p$ .

■

**Proposição 2.56.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função peso. Então, para todo  $x \in X$  temos que  $J_\varphi(x)$  é não-vazio.

**Prova:**

Note que  $J_\varphi(\theta) = \{\theta\}$ . Para  $x \neq \theta$ , temos  $\varphi(\|x\|) x \neq \theta$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach (e seus Corolários), existe  $x^* \in X^*$  tal que  $\|x^*\| = 1$  e  $\langle x^* | \varphi(\|x\|) x \rangle = \varphi(\|x\|) \|x\|$ . Assim, obtemos  $\|\varphi(\|x\|) x^*\| = \varphi(\|x\|)$  e também:

$$\langle \varphi(\|x\|) x^* | x \rangle = \langle x^* | \varphi(\|x\|) x \rangle = \varphi(\|x\|) \|x\| = \|\varphi(\|x\|) x^*\| \|x\|$$

Portanto,  $\varphi(\|x\|) x^* \in J_\varphi(x)$ .

■

Por definição, note que:

$$\forall p > 1, \forall x \in X, J_p(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^* | x \rangle = \|x^*\| \|x\| \text{ e } \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}$$

Logo,  $x^* \in J_p(x)$  possui propriedades similares as de um produto interno:

$$\forall z \in X, |\langle x^* | z \rangle| \leq \|x\|^{p-1} \|z\| \text{ e } \langle x^* | x \rangle = \|x\|^p$$

**Proposição 2.57.** Se  $X$  é um espaço de Hilbert, então  $J_2$  é o operador identidade. Mais precisamente,  $J_2$  é o isomorfismo entre  $X$  e  $X^*$  dado pelo Teorema da Representação de Riesz. Além disso,  $J_2(x)$  é unitário em todo ponto e  $J_2: X \rightarrow X^*$  é linear se, e somente se,  $X$  é um espaço de Hilbert.

**Prova:**

Seja  $X$  um espaço de Hilbert e tome  $x \in X$  qualquer. Como  $J_2(\theta) = \{\theta\}$ , supomos  $x \neq \theta$ . Considere  $x^* \in X^*$  definido por  $\langle x^* | z \rangle = \langle z, x \rangle$ , para todo  $z \in X$ . Então, é imediato que  $x^* \in J_2(x)$ . Seja  $\bar{x}^* \in J_2(x)$ . Vamos mostrar que  $\bar{x}^* = x^*$  e concluir que  $J_2(x) = \{x^*\}$ . Seja  $\bar{x} \in X$  tal que  $\|\bar{x}^*\| = \|\bar{x}\|$  e  $\langle \bar{x}^* | z \rangle = \langle z, \bar{x} \rangle$ , para todo  $z \in X$ . Observe que:

$$\|x - \bar{x}\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, \bar{x} \rangle + \|\bar{x}\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$$

Logo,  $\bar{x} = x$ . Agora, suponha que  $X$  é um espaço de Banach,  $J_2(x)$  é unitário em todo ponto e que  $J_2: X \rightarrow X^*$  é linear. Para  $x, y \in X$ , sejam  $x^* = J_2(x)$  e  $y^* = J_2(y)$ . Como  $x^* \pm y^* = J_2(x \pm y)$ , segue:

$$\|x + y\|^2 = \langle x^* + y^* | x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x^* | y \rangle + \langle y^* | x \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x^* - y^* | x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x^* | y \rangle - \langle y^* | x \rangle$$

Ou seja,  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ . Logo, a norma provém de um produto interno e, por consequência,  $X$  é um espaço de Hilbert. A recíproca é imediata. ■

**Proposição 2.58.** Seja  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função peso e considere as funções  $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  e  $f_\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^s \varphi(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad f_\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\|x\|} \varphi(\tau) d\tau = \psi(\|x\|)$$

Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- I.  $\psi$  é estritamente crescente, contínua e diferenciável em  $(0, \infty)$  com  $\psi'(s) = \varphi(s)$ .
- II. Para quaisquer  $s, t \geq 0$ , temos  $\psi(s) - \psi(t) \geq \varphi(t)(s - t)$ . Ainda, a desigualdade é estrita sempre que  $s \neq t$ .
- III.  $\psi$  é estritamente convexa.
- IV.  $f_\varphi$  é convexa e contínua.

**Prova:**

(I) Imediato, segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

(II) Para  $s = t$  a desigualdade é trivial. Sejam  $s, t \geq 0$  distintos. Considere os dois casos:

Caso 1:  $s > t$

Neste caso, como  $\varphi$  é estritamente crescente temos:

$$\psi(s) - \psi(t) = \int_t^s \varphi(\tau) d\tau > \varphi(t) \int_t^s d\tau = \varphi(t)(s - t)$$

Caso 2:  $s < t$

Neste caso, como  $\varphi$  é estritamente crescente temos:

$$\psi(t) - \psi(s) = \int_s^t \varphi(\tau) d\tau < \varphi(t) \int_s^t d\tau = \varphi(t)(t - s)$$

Ou seja, em qualquer caso obtemos que  $\psi(s) - \psi(t) > \varphi(t)(s - t)$ .

(III) Sejam  $s, t \geq 0$  distintos e  $\lambda \in (0, 1)$ . Considere  $s_\lambda = (1 - \lambda)s + \lambda t$  e observe que:

$$t = s_\lambda + \frac{1 - \lambda}{\lambda} (s_\lambda - s)$$

Logo, do item (II) segue que:

$$\psi(s) - \psi(s_\lambda) > \varphi(s_\lambda)(s - s_\lambda) \tag{2.23}$$

e também:

$$\psi(t) - \psi(s_\lambda) > \frac{1 - \lambda}{\lambda} \varphi(s_\lambda)(s_\lambda - s) \tag{2.24}$$

Multiplicando (2.23) por  $(1 - \lambda)/\lambda$  e somando com (2.24), obtemos:

$$\frac{1 - \lambda}{\lambda} \psi(s) + \psi(t) - \frac{1}{\lambda} \psi(s_\lambda) > 0$$

Ou ainda:

$$(1 - \lambda) \psi(s) + \lambda \psi(t) > \psi(s_\lambda) = \psi((1 - \lambda)s + \lambda t)$$

Portanto,  $\psi$  é estritamente convexa.



(III) A continuidade de  $f_\varphi$  segue da continuidade de  $\|\cdot\|$  e  $\psi$ . Agora, sejam  $x, y \in X$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . Como  $\|\cdot\|$  é convexa e  $\psi$  é estritamente convexa e crescente, obtemos:

$$\begin{aligned} f_\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) &= \psi(\|(1-\lambda)x + \lambda y\|) \\ &\leq \psi((1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|) \\ &\leq (1-\lambda)\psi(\|x\|) + \lambda\psi(\|y\|) \\ &= (1-\lambda)f_\varphi(x) + \lambda f_\varphi(y) \end{aligned}$$

Com desigualdade estrita sempre que  $\|x\| \neq \|y\|$  (pois  $\psi$  é estritamente convexa). ■

**Teorema 2.59** (Asplund). Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função peso. Então, temos que:

$$\forall x \in X, J_\varphi(x) = \partial f_\varphi(x)$$

**Prova:**

Para  $x = \theta$ , temos  $J_\varphi(\theta) = \partial f_\varphi(\theta) = \{\theta\}$ . Que  $J_\varphi(\theta) = \{\theta\}$  é imediato e para concluir que  $\partial f_\varphi(\theta) = \{\theta\}$  basta observar que:

$$\forall v \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_\varphi(tv)}{t} = 0$$

Ou seja,  $f_\varphi$  é Gâteaux-diferenciável na origem com derivada nula. Portanto, seja  $x \in X$  e suponha que  $x \neq \theta$ .

( $J_\varphi(x) \subseteq \partial f_\varphi(x)$ ) Seja  $x^* \in J_\varphi(x)$ . Para  $z \in X$  qualquer, temos:

$$\begin{aligned} \langle x^* | z - x \rangle &= \langle x^* | z \rangle - \langle x^* | x \rangle \\ &= \langle x^* | z \rangle - \|x^*\| \|x\| \\ &\leq \|x^*\| (\|z\| - \|x\|) \end{aligned}$$

Logo, utilizando o item (II) da Proposição 2.58 obtemos:

$$\begin{aligned} \forall z \in X, f_\varphi(z) - f_\varphi(x) &= \psi(\|z\|) - \psi(\|x\|) \\ &\geq \varphi(\|x\|) (\|z\| - \|x\|) \\ &= \|x^*\| (\|z\| - \|x\|) \\ &\geq \langle x^* | z - x \rangle \end{aligned}$$

Portanto,  $x^* \in \partial f_\varphi(x)$ .

( $\partial f_\varphi(x) \subseteq J_\varphi(x)$ ) Seja  $x^* \in \partial f_\varphi(x)$ . Suponha que  $z \in X$  é tal que  $\|z\| = \|x\|$ . Neste caso, observe que:

$$0 = f_\varphi(z) - f_\varphi(x) \geq \langle x^* | z - x \rangle \Rightarrow \langle x^* | z \rangle \leq \langle x^* | x \rangle$$

Como  $(-z) \in X$  também satisfaz  $\| -z \| = \|x\|$ , segue que  $|\langle x^* | z \rangle| \leq \langle x^* | x \rangle$ . Assim, obtemos:

$$\|x^*\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle x^* | w \rangle| = \frac{1}{\|x\|} \sup_{\|z\|=\|x\|} |\langle x^* | z \rangle| \leq \frac{\langle x^* | x \rangle}{\|x\|}$$

Portanto,  $\|x^*\| \|x\| \leq \langle x^* | x \rangle$ . Como a desigualdade contrária é sempre válida, segue que  $\langle x^* | x \rangle = \|x^*\| \|x\|$ . Vamos mostrar que  $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$  e concluir que  $x^* \in J_\varphi(x)$ . Para  $t > 0$ , seja  $z = t \|x\|^{-1} x$ . Note que:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \psi(\|x\|) &= \psi(\|z\|) - \psi(\|x\|) \\ &= f_\varphi(z) - f_\varphi(x) \\ &\geq \langle x^* | z - x \rangle \\ &= \frac{t - \|x\|}{\|x\|} \langle x^* | x \rangle \\ &= (t - \|x\|) \|x^*\| \end{aligned}$$

Assim, para  $t < \|x\|$  temos:

$$\frac{\psi(t) - \psi(\|x\|)}{t - \|x\|} \leq \|x^*\| \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \|x\|^-} \frac{\psi(t) - \psi(\|x\|)}{t - \|x\|} \leq \|x^*\|$$

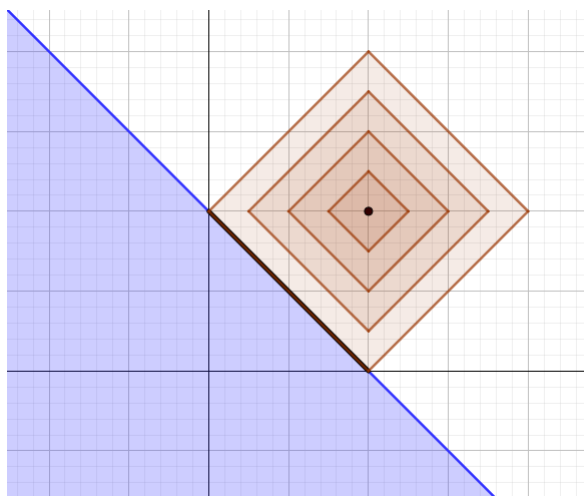
Enquanto para  $t > \|x\|$  temos:

$$\frac{\psi(t) - \psi(\|x\|)}{t - \|x\|} \geq \|x^*\| \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \|x\|^+} \frac{\psi(t) - \psi(\|x\|)}{t - \|x\|} \geq \|x^*\|$$

Porém, do item (I) da Proposição 2.58 os limites laterais coincidem em  $\psi'(\|x\|) = \varphi(\|x\|)$ . ■

Usando o Teorema de Asplund 2.59, vemos que:

$$J_p(x) = \partial \left( \frac{1}{p} \|\cdot\|^p \right) (x) \tag{2.25}$$

Figura 2 – Ilustração geométrica do problema de projeção no espaço  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ 

Fonte: Do autor.

Assim, podemos deduzir algumas propriedades de  $J_p$  a partir das propriedades do funcional da norma  $F(x) = p^{-1} \|x\|^p$  (para  $p > 1$ ). Por exemplo, se  $F$  é Gâteaux-diferenciável, então sabemos que  $J_p(x)$  é um conjunto unitário em todo ponto. Portanto, podemos considerar  $J_p: X \rightarrow X^*$  como um operador com contradomínio  $X^*$ . Além disso, se  $F$  é Fréchet-diferenciável, então do Teorema 2.27 temos que  $J_p$  é contínuo.

## 2.11 Geometria dos Espaços de Banach

Seja  $X$  um espaço normado. Usaremos as notações:  $\mathring{B}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ ,  $\overline{B}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$  e  $S_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ .

Equipe o espaço  $X = \mathbb{R}^2$  com a norma  $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ . Considere o seguinte conjunto não-vazio, convexo e fechado  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$ . Para o ponto  $z = (1, 1) \notin S$ , considere o seguinte problema de projeção:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar}}: \quad \|x - z\|_1 \\
 & \text{sujeito a:} \quad x \in S
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como  $\mathbb{R}^2$  é de dimensão finita, então é reflexivo. Assim, do Teorema 2.11 sabemos que o problema  $(\mathcal{P})$  admite solução. No entanto, não temos que a solução é única. De fato, o conjunto solução é composto por todos os pontos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  satisfazendo  $x_1, x_2 \geq 0$  e  $x_1 + x_2 = 1$ . Isto pode ser provado analiticamente e, geometricamente, podemos observar este resultado aumentando o raio da bola centrada em  $z$  até que intercepte o conjunto  $S$ , como ilustrado na Figura 2.

Intuitivamente falando, podemos ver que a ausência de unicidade em (2.26) foi provocada pelo fato de que a fronteira de  $\overline{B}_X$  contém segmentos de reta. Outra propriedade

indesejada surge quando a fronteira de  $\overline{B}_X$  contém “bicos”, pois nestes pontos não existe um único hiperplano suporte de  $\overline{B}_X$ . Neste sentido, o estudo da geometria de espaços de Banach tem como objetivo identificar quais condições um espaço de Banach  $X$  deve satisfazer para que apresente boas propriedades geométricas.

**Definição 2.60.** Dizemos que um espaço de Banach  $X$  é *estritamente convexo* se para quaisquer  $x, y \in S_X$  distintos temos:

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1$$

■

**Proposição 2.61.** Para um espaço de Banach  $X$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $X$  é estritamente convexo.
- II. Para quaisquer  $x, y \in S_X$  distintos e  $\lambda \in (0, 1)$ , temos que  $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$ .
- III. Para quaisquer  $x, y \in X$  não-nulos satisfazendo  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , existe um  $\alpha > 0$  tal que  $x = \alpha y$ .

**Prova:**

(I)  $\iff$  (II) Que (II)  $\Rightarrow$  (I) é imediato e (I)  $\Rightarrow$  (II) segue as mesmas linhas da prova da implicação (III)  $\Rightarrow$  (II) da Proposição 2.45.

(I)  $\iff$  (III)

(I)  $\Rightarrow$  (III) Sejam  $x, y \in X$  não-nulos satisfazendo  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $0 < \|x\| \leq \|y\|$ . Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} \|x + y\| - \|y\| \left( \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|} (\|x\| + \|y\|) - \|y\| \left( \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = 2 \end{aligned}$$

Portanto, fazendo  $u = \|x\|^{-1}x$  e  $v = \|y\|^{-1}y$  temos  $\|u + v\| = 2$ . Como  $u, v \in S_X$  e  $X$  é estritamente convexo, segue que  $u = v$ . Logo,  $x = \alpha y$  com  $\alpha = \|x\| \|y\|^{-1} > 0$ .

(III)  $\Rightarrow$  (I) Sejam  $x, y \in S_X$  distintos. É imediato que  $\|x + y\| \leq 2$ . Suponha, para obter contradição, que  $\|x + y\| = 2$ . Neste caso, temos que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Assim, existe  $\alpha > 0$  tal que  $x = \alpha y$ . Como  $x, y \in S_X$ , segue que  $\alpha = 1$  e, por consequência,  $x = y$ . Logo,  $\|x + y\| < 2$ . ■

Dizer que  $X$  é estritamente convexo não significa que  $\|\cdot\|$  é uma função estritamente convexa. De fato, isso nunca é verdade: Para  $x \neq \theta$ ,  $y = \theta$  e  $\lambda \in (0, 1)$ , note que:

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| = (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\|$$

Ou seja, a norma  $\|\cdot\|$  de um espaço é sempre convexa, mas nunca estritamente convexa. No entanto, é comum vermos a expressão “ $\|\cdot\|$  é estritamente convexa”, a qual deve ser entendida como “ $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço estritamente convexo”.

Da Proposição 2.61 vemos que  $X$  é estritamente convexo quando o segmento de reta (excluindo as extremidades) que liga dois pontos distintos da fronteira de  $\overline{B}_X$  sempre fica contido no interior de  $\overline{B}_X$ . Em particular, a fronteira de  $\overline{B}_X$  não pode conter segmentos de reta.

Para uma função peso  $\varphi$  (Definição 2.54), seja  $f_\varphi$  como na Proposição 2.58. No próximo Teorema adicionamos uma quarta equivalência na Proposição 2.61.

**Teorema 2.62.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi$  uma função peso. Então, o espaço  $X$  é estritamente convexo se, e somente se,  $f_\varphi$  é uma função estritamente convexa.

**Prova:** Veja Zălinescu (2002, p. 228). ■

O resultado do Teorema 2.62 independe da função peso. Para a escolha particular de  $\varphi(s) = s^{p-1}$  para algum  $p > 1$ , temos  $f_\varphi(x) = p^{-1}\|x\|^p$ . Portanto,  $X$  é estritamente convexo se, e somente se, o funcional da norma  $F(x) = p^{-1}\|x\|^p$  é estritamente convexo para algum (todo)  $p > 1$ .

**Exemplo 2.63.** Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e estritamente convexo. Para um subconjunto  $S \subseteq X$  não-vazio, convexo e fechado, tome  $z \notin S$  e considere o problema:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar}}: && \|x - z\| \\ & \text{sujeito a:} && x \in S \end{aligned} \tag{2.27}$$

Observe que  $(\mathcal{P})$  compartilha do mesmo conjunto solução que o problema:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_2) \quad & \underset{x}{\text{minimizar:}} \quad \frac{1}{2} \|x - z\|^2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad x \in S
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Como  $X$  é estritamente convexo, temos que  $F(x) = 1/2 \|x - z\|^2$  é estritamente convexa. Do Corolário 2.13 temos que  $(\mathcal{P}_2)$  admite uma única solução. Assim, a solução de  $(\mathcal{P})$  é única e, portanto, recuperamos a unicidade em um espaço estritamente convexo. ■

**Definição 2.64.** Dizemos que um espaço de Banach  $X$  é *suave* se para todo  $x \in X$  não-nulo existe um único  $x^* \in X^*$  tal que  $\|x^*\| = 1$  e  $\langle x^* | x \rangle = \|x\|$ . ■

Note que a existência de um elemento do dual como na Definição 2.64 é garantida pelo Teorema de Hahn-Banach (e seus Corolários). Assim,  $X$  ser suave é somente uma questão de unicidade.

**Proposição 2.65.** Um espaço de Banach  $X$  é suave se, e somente se, para cada  $x \in X$  não-nulo existe um único hiperplano suporte de  $\|x\| \overline{B}_X$  no ponto  $x$ .

**Prova:** Veja Ciorănescu (1990, p. 22). ■

**Teorema 2.66.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi$  uma função peso. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $X$  é suave.
- II.  $\|\cdot\|$  é Gâteaux-diferenciável em  $X \setminus \{\theta\}$ .
- III.  $f_\varphi$  é Gâteaux-diferenciável (em todo o espaço  $X$ ).

**Prova:** Veja Zălinescu (2002, p. 228). ■

Logo, o espaço  $X$  é suave se, e somente se, o funcional da norma  $F(x) = p^{-1} \|x\|^p$  é Gâteaux-diferenciável para algum (todo)  $p > 1$ .

Existe uma relação de dualidade entre os conceitos de um espaço suave e um espaço estritamente convexo.

**Proposição 2.67.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Se  $X^*$  é suave (estritamente convexo), então  $X$  é estritamente convexo (suave). Caso  $X$  seja reflexivo, então vale a recíproca:  $X^*$  é suave (estritamente convexo) se, e somente se,  $X$  é estritamente convexo (suave).

**Prova:** Veja Zălinescu (2002, p. 230). ■

Seja  $X$  um espaço de Banach. Defina a função  $\rho_X: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\rho_X(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \frac{\|x + \tau v\| + \|x - \tau v\| - 2}{2} \mid x, v \in S_X \right\}$$

Chamamos  $\rho_X$  de *módulo de suavidade de  $X$* . Existe ainda uma versão local. Para  $x_0 \in X$  não-nulo, defina  $\rho_X(\cdot, x_0): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\rho_X(\tau, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \frac{\|x_0 + \tau v\| + \|x_0 - \tau v\| - 2\|x_0\|}{2} \mid v \in S_X \right\}$$

A função  $\rho_X(\cdot, x_0)$  é denominada de *módulo de suavidade de  $X$  no ponto  $x_0$* . Note que:

$$2\|x_0\| = \|(x_0 + \tau v) + (x_0 - \tau v)\| \leq \|x_0 + \tau v\| + \|x_0 - \tau v\|$$

Ou seja,  $\rho_X(\tau) \geq 0$  e  $\rho_X(\tau, x_0) \geq 0$ . Além disso, para  $v \in S_X$  temos  $\|x_0 \pm \tau v\| \leq \|x_0\| + \tau$ , de forma que:

$$\|x_0 + \tau v\| + \|x_0 - \tau v\| - 2\|x_0\| \leq 2\tau$$

Portanto,  $\rho_X(\tau) \leq \tau$  e  $\rho_X(\tau, x_0) \leq \tau$ .

**Definição 2.68.** Dizemos que um espaço de Banach  $X$  é:

- *uniformemente suave* se  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$ .
- *localmente uniformemente suave* se  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\rho_X(\tau, x_0)}{\tau} = 0$  para todo  $x_0 \in X \setminus \{\theta\}$ . ■

**Exemplo 2.69.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Então, vale que:

$$(\|x + \tau v\| + \|x - \tau v\|)^2 \leq 2(\|x + \tau v\|^2 + \|x - \tau v\|^2) = 4(\|x\|^2 + \tau^2\|v\|^2)$$

Para  $x, v \in S_X$ , obtemos a estimativa  $\|x + \tau v\| + \|x - \tau v\| \leq 2\sqrt{1 + \tau^2}$ . Logo, segue que  $\rho_X(\tau) \leq \sqrt{1 + \tau^2} - 1 \leq 1/2 \tau^2$  e, portanto,  $X$  é uniformemente suave. ■

**Teorema 2.70.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi$  uma função peso. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $X$  é localmente uniformemente suave.
- II.  $\|\cdot\|$  é Fréchet-diferenciável em  $X \setminus \{\theta\}$ .
- III.  $f_\varphi$  é Fréchet-diferenciável (em todo o espaço  $X$ ).

**Prova:** Veja Zălinescu (2002, p. 232). ■

Logo, o espaço  $X$  é localmente uniformemente suave se, e somente se, o funcional da norma  $F(x) = p^{-1} \|x\|^p$  é Fréchet-diferenciável para algum (todo)  $p > 1$ .

**Definição 2.71.** Dizemos que um espaço de Banach  $X$  é *uniformemente convexo* se para todo  $\epsilon \in (0, 2]$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, 1]$  tal que para quaisquer  $x, y \in S_X$  satisfazendo  $\|x - y\| \geq \epsilon$  temos que:

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$
■

**Exemplo 2.72.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Então, vale que:

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Para  $\epsilon \in (0, 2]$  e  $x, y \in S_X$  satisfazendo  $\|x - y\| \geq \epsilon$ , obtemos a estimativa:

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$$

Fazendo  $\delta(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/4}$  temos que  $X$  é uniformemente convexo. ■

**Teorema 2.73** (Milman-Pettis). Todo espaço de Banach uniformemente convexo é um espaço reflexivo.

**Prova:** Veja Ciorănescu (1990, p. 49). ■



**Proposição 2.74.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Então, temos que  $X^*$  é uniformemente suave (convexo) se, e somente se,  $X$  é uniformemente convexo (suave).

**Prova:** Veja Ciorănescu (1990, p. 52–53). ■

**Corolário 2.75.** Todo espaço de Banach uniformemente suave é um espaço reflexivo.

**Prova:**

Seja  $X$  um espaço de Banach uniformemente suave. Da Proposição 2.74 temos que  $X^*$  é uniformemente convexo. Segue do Teorema 2.73 que  $X^*$  é reflexivo. Portanto,  $X$  é reflexivo. ■

**Exemplo 2.76.** Seja  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  um espaço de medida e considere os espaços de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  para  $p \in [1, \infty]$ . Além do espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , é possível mostrar que para  $p \in (1, \infty)$  temos que  $L^p(\Omega)$  é uniformemente convexo e uniformemente suave. Como os espaços  $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  não são reflexivos, então não são uniformemente convexos nem uniformemente suaves. É possível mostrar ainda que  $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  não são nem mesmo estritamente convexos ou suaves. ■

# 3 Método das Projeções Relaxadas

O algoritmo que será apresentado neste capítulo foi introduzido por Machado, Margotti e Leitão (2018, 2020) e é aplicável para solução de problemas lineares mal-postos em espaços de Banach. Trata-se de um método Tikhonov iterado não-estacionário com uma escolha *a posteriori* dos parâmetros de regularização. A penalização se dá por meio da distância de Bregman induzida por uma função uniformemente convexa.

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Estamos interessados em resolver o problema inverso:

$$\mathcal{A}x = y, \|y - y^\delta\| \leq \delta$$

onde  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  é o vetor exato e  $\delta \geq 0$  é o nível de ruídos. Admitimos que  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  pois supomos a existência de ao menos uma solução exata: Existe  $\hat{x} \in X$  tal que  $\mathcal{A}\hat{x} = y$ . Ainda, supomos que o problema inverso é mal-posto.

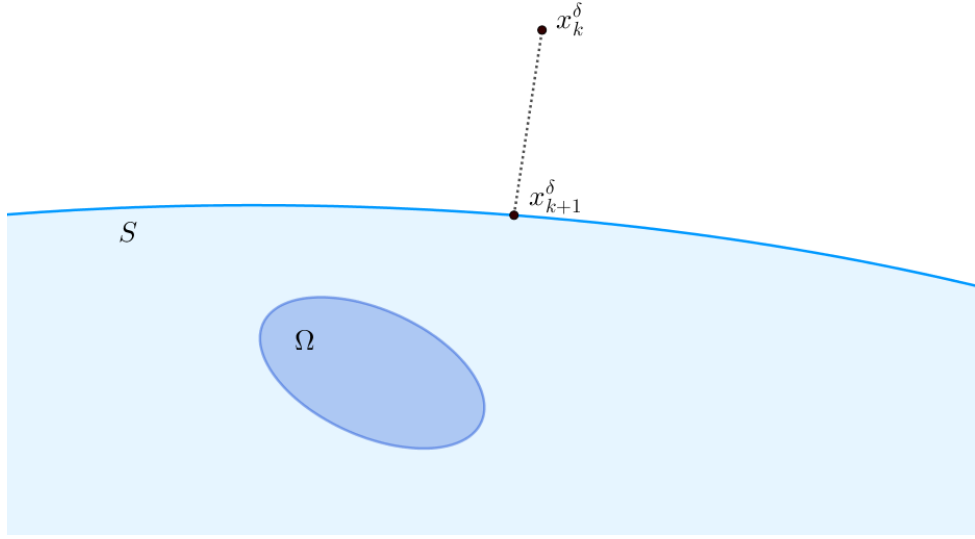
Grosso modo, vamos definir um algoritmo iterativo que gera uma sequência  $(x_k^\delta)$  onde  $x_{k+1}^\delta$  é obtido a partir de  $x_k^\delta$  da seguinte forma: Seja  $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \mathcal{A}x = y\}$  o conjunto de todas as soluções e suponha que  $x_k^\delta \notin \Omega$ . Tome um conjunto  $S$  (não-vazio, convexo e fechado) que separa o ponto  $x_k^\delta$  do conjunto  $\Omega$ . Em seguida,  $x_{k+1}^\delta$  é definido como a projeção de  $x_k^\delta$  em  $S$ , como ilustrado na Figura 3. A iteração continua até que um determinado critério de parada seja satisfeito. Aqui, vamos adotar o chamado *princípio da discrepância*.

Como  $\Omega \subseteq \{x \in X \mid \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta\}$ , em cada iteração vamos escolher um  $\mu \geq 0$  apropriado e tomar  $S = \{x \in X \mid \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \mu\}$ . Ainda, a projeção de  $x_k^\delta$  em  $S$  (a saber,  $x_{k+1}^\delta$ ) se encontrará na fronteira de  $S$ . Ou seja,  $x_{k+1}^\delta$  satisfaz  $\|\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta\| = \mu$ . Logo, fica claro que a escolha de  $\mu$  é uma tarefa de extrema importância que possui implicações na convergência do algoritmo. Ao invés de explicitamente determinarmos o valor de  $\mu$ , vamos permitir que em cada iteração este parâmetro possa ser escolhido dentro de um intervalo, gerando assim o *método das projeções relaxadas*. Como a escolha de  $\mu$  não é única, segue que  $x_{k+1}^\delta$  não é unicamente determinado a partir de  $x_k^\delta$ .

## 3.1 Definição

Para a definição formal do algoritmo, vamos assumir as seguintes hipóteses:

Figura 3 – Ilustração geométrica da iteração do algoritmo



Fonte: Do autor.

- A1**  $X$  é um espaço reflexivo e  $Y$  é um espaço localmente uniformemente suave.
- A2**  $F \in \Gamma_0(X)$  é uma função uniformemente convexa. Ainda, seu módulo de convexidade  $\Theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  se caracteriza como uma função peso (Definição 2.54).
- A3** Existe  $\hat{x} \in \text{dom}(F)$  tal que  $\mathcal{A}\hat{x} = y$ , onde  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  é o vetor de dados exato (sem ruídos). Isto é,  $\text{dom}(F) \cap \Omega$  é não-vazio.

O método iterativo está apresentado no Algoritmo 1. Para a inicialização precisamos escolher um chute inicial  $x_0 \in \text{dom}(\partial F)$  e  $\xi_0 \in \partial F(x_0)$ . Também precisamos pré-fixar as constantes  $\tau > 1$ ,  $r > 1$  e  $0 < \bar{\eta} \leq \eta < 1$ . Iremos assumir que nosso chute inicial satisfaz  $\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| > \tau\delta \geq \delta$ , pois do contrário a iteração sequer inicia. A iteração irá terminar no primeiro índice  $k \geq 1$  que satisfazer  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta$ . Portanto, definimos:

$$k_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{k \geq 1 \mid \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta\} \quad (3.1)$$

Para  $k_\delta < \infty$  segue que  $\|\mathcal{A}x_{k_\delta}^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta$  e em geral temos:

$$\forall 0 \leq k < k_\delta, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta \quad (3.2)$$

Nosso primeiro objetivo será mostrar que de fato existem  $\bar{x}$  e  $\bar{\lambda}$  como descritos nas linhas 7, 8 e 9 do Algoritmo 1. Suponha que dispomos de  $x_k^\delta \in \text{dom}(\partial F)$  e  $\xi_k^\delta \in \partial F(x_k^\delta)$ . Se neste estágio ainda precisamos da próxima iteração, então o critério de parada não foi satisfeito. Portanto, assumimos que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta \geq \delta$ . Para  $\mu \geq 0$ , definimos:

**Algoritmo 1:** Método iterativo

**Dados:**  $\mathcal{A}$ ,  $F$ ,  $y^\delta$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $x_0$ ,  $\xi_0$ ,  $0 < \bar{\eta} \leq \eta < 1$ ,  $\tau > 1$ ,  $r > 1$ .

- 1  $x_0^\delta = x_0$ ;
- 2  $\xi_0^\delta = \xi_0$ ;
- 3  $k = 0$ ;
- 4 **enquanto**  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau \delta$  **faça**
- 5      $c_k = (1 - \bar{\eta})\delta + \bar{\eta}\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ ;
- 6      $d_k = (1 - \eta)\delta + \eta\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ ;
- 7     encontre  $\bar{x} \in X$  e  $\bar{\lambda} > 0$  tais que:
  - 8          $\bar{x} = \arg \min \left\{ \bar{\lambda} r^{-1} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \mid x \in X \right\}$ ;
  - 9          $\|\mathcal{A}\bar{x} - y^\delta\| \in [c_k, d_k]$ ;
- 10      $\lambda_k^\delta = \bar{\lambda}$ ;
- 11      $x_{k+1}^\delta = \bar{x}$ ;
- 12      $\xi_{k+1}^\delta = \xi_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta)$ ;
- 13      $k = k + 1$ ;
- 14 **fim**

$$S_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X \mid \frac{1}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r \leq \frac{1}{r} \mu^r \right\} = \left\{ x \in X \mid \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \mu \right\}$$

Inserimos o parâmetro  $r > 1$  na definição do conjunto  $S_\mu$  por conta de um detalhe que será explicado posteriormente. Agora, considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar:}} && D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \\
 & \text{sujeito a:} && x \in S_\mu
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Proposição 3.1.** Se  $\delta \leq \mu < \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ , então o problema (3.3) admite uma única solução. Ainda, a solução de (3.3) é distinta do ponto  $x_k^\delta$ .

**Prova:**

É evidente que  $\Omega \subseteq S_\mu$  e, portanto,  $S_\mu$  é não-vazio. Que  $S_\mu$  é fechado e convexo é uma consequência imediata de sua definição. Como  $\mu < \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ , então  $x_k^\delta \notin S_\mu$ . Assim, certamente a solução será distinta de  $x_k^\delta$ . Uma vez que  $F \in \Gamma_0(X)$  é estritamente convexa,

segue que  $D_{\xi_k^\delta} F(\cdot, x_k^\delta) \in \Gamma_0(X)$  é estritamente convexa. Da Proposição 2.52, temos que  $D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \geq \Theta(\|x - x_k^\delta\|)$ . Como assumimos (A2), segue que  $D_{\xi_k^\delta} F(\cdot, x_k^\delta)$  é coerciva. Logo, aplicando o Corolário 2.13 temos que (3.3) admite uma única solução. ■

Considerando  $G(x) = \|\mathcal{A}x - y^\delta\|$ , temos  $S_\mu = \{x \in X \mid G(x) \leq \mu\}$ . Como exposto no Exemplo 2.37, temos a estabilidade do problema (3.3) caso exista um ponto de Slater. Por conta disso, vamos impor que  $\mu > \delta$ .

**Proposição 3.2.** Se  $\delta < \mu < \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ , então existem  $\bar{x} \in X$  e  $\bar{\lambda} > 0$  satisfazendo:

$$\bar{x} = \arg \min \left\{ \frac{\bar{\lambda}}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \mid x \in X \right\} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{A}\bar{x} - y^\delta\| = \mu$$

**Prova:**

Para  $\hat{x} \in \text{dom}(F)$  de (A3), temos que  $\|\mathcal{A}\hat{x} - y^\delta\| = \|y - y^\delta\| \leq \delta < \mu$ . Ou seja,  $\hat{x}$  é um ponto de Slater para o problema (3.3). Seja  $\bar{x} \in X$  a única solução de (3.3) garantida pela Proposição 3.1. Seguindo os Exemplos 2.37 e 2.42 para  $G(x) = r^{-1} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r - r^{-1} \mu^r$ , existe um multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  satisfazendo as condições de KKT:

- **viabilidade primal:**  $\|\mathcal{A}\bar{x} - y^\delta\|^r - \mu^r \leq 0$
- **viabilidade dual:**  $\bar{\lambda} \geq 0$
- **folga complementar:**  $\bar{\lambda} (\|\mathcal{A}\bar{x} - y^\delta\|^r - \mu^r) = 0$
- **minimização:**  $\bar{x} = \arg \min \left\{ \bar{\lambda} r^{-1} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \mid x \in X \right\}$

Suponha, para obter contradição, que  $\bar{\lambda} = 0$ . Neste caso, segue da condição de minimização que  $\bar{x} = x_k^\delta$ . Mas da Proposição 3.1 sabemos que  $\bar{x} \neq x_k^\delta$ , daí a contradição. Logo,  $\bar{\lambda} > 0$  e, por consequência,  $\|\mathcal{A}\bar{x} - y^\delta\| = \mu$ . ■

**Observação 3.3.** Comparando com o Exemplo 2.42, note que trocamos “ $\in$ ” por “ $=$ ” na condição de minimização, uma vez que  $D_{\xi_k^\delta} F(\cdot, x_k^\delta)$  é estritamente convexa. É também por conta da condição de minimização que inserimos o parâmetro  $r > 1$  na definição de  $S_\mu$ , pois desta forma obtemos a expressão desejada. ■

Agora é imediato que  $\bar{x} \in X$  e  $\bar{\lambda} > 0$  como descritos no Algoritmo 1 existem: Basta aplicar a Proposição 3.2 para  $\mu \in [c_k, d_k]$ , uma vez que  $[c_k, d_k] \subseteq (\delta, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|)$  (veja linhas 5 e 6 do Algoritmo 1).

Outro aspecto que devemos nos certificar é que  $\xi_{k+1}^\delta \in \partial F(x_{k+1}^\delta)$ . Observe que:

$$x_{k+1}^\delta = \arg \min \left\{ \frac{\lambda_k^\delta}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta) \mid x \in X \right\}$$

De (2.5) e usando (2.25), os Teoremas 2.28 e 2.29, bem como a Proposição 2.53, segue que:

$$\theta \in \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta) + \partial F(x_{k+1}^\delta) - \xi_k^\delta$$

Agora, como  $Y$  é localmente uniformemente suave (hipótese (A1)), em particular temos que  $J_r(y)$  é unitário em todo ponto. Assim, obtemos:

$$\xi_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta) \in \partial F(x_{k+1}^\delta)$$

Ou seja,  $\xi_{k+1}^\delta \in \partial F(x_{k+1}^\delta)$ .

Com tudo que foi exposto e discutido nesta seção, conclui-se que o Algoritmo 1 está bem-definido.

## 3.2 Análise de Convergência

### 3.2.1 Convergência com Dados Exatos

Primeiramente vamos analisar o caso em que temos dados exatos. Isto é, vamos assumir que temos  $\delta = 0$  e  $y^\delta = y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Neste caso, vamos abandonar o sobrescrito  $\delta$  e denotaremos seqüências geradas pelo Algoritmo 1 somente como  $(x_k)$ ,  $(\xi_k)$  e  $(\lambda_k)$ .

Observe que não paramos a iteração enquanto  $\|\mathcal{A}x_k - y\| > 0$ . Isto é, só paramos em algum índice  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{A}x_k = y$ . No entanto, isto nunca ocorre. Note que:

$$\|\mathcal{A}x_k - y\| \geq \bar{\eta} \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| = c_{k-1}$$

Como inicialmente temos  $\|\mathcal{A}x_0 - y\| > 0$ , vemos que  $\|\mathcal{A}x_k - y\| > 0$  para todo  $k \geq 1$ . Logo, seqüências geradas pelo Algoritmo 1 para  $\delta = 0$  são infinitas.

Começamos com um resultado que estabelece o decaimento do resíduo  $\|\mathcal{A}x_k - y\|$ .

**Proposição 3.4.** Seja  $(x_k)_{k=0}^\infty$  uma possível seqüência gerada pelo Algoritmo 1 com dados exatos. Então, para todo  $k \geq 1$  temos que:

$$\bar{\eta} \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| \quad (3.4)$$

e também que:

$$\bar{\eta}^k \|\mathcal{A}x_0 - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta^k \|\mathcal{A}x_0 - y\| \quad (3.5)$$

**Prova:**

Para  $k \geq 1$  temos que:

$$c_{k-1} = \bar{\eta} \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| = d_{k-1}$$

de onde segue (3.4). A prova de (3.5) é feita por indução. Para  $k = 1$  já estabelecemos o resultado. Suponha que o resultado se mantenha para  $(k-1) \geq 1$  e vamos mostrar a validade para  $k$ . Observe que:

$$\|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| \leq \eta \eta^{k-1} \|\mathcal{A}x_0 - y\| = \eta^k \|\mathcal{A}x_0 - y\|$$

e de maneira análoga estabelecemos a cota inferior. ■

**Proposição 3.5.** Sejam  $(x_k)_{k=0}^\infty$ ,  $(\xi_k)_{k=0}^\infty$  e  $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$  possíveis sequências geradas pelo Algoritmo 1 com dados exatos. Seja  $\hat{x} \in \text{dom}(F) \cap \Omega$  uma solução do problema inverso. Então, para todo  $k \geq 1$  segue que:

$$D_{\xi_k} F(\hat{x}, x_k) = D_{\xi_{k-1}} F(\hat{x}, x_{k-1}) - D_{\xi_{k-1}} F(x_k, x_{k-1}) - \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r \quad (3.6)$$

Além disso, temos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r < \infty \quad (3.7)$$

**Prova:**

Da identidade dos três pontos (Proposição 2.51) temos:

$$\begin{aligned} D_{\xi_k} F(\hat{x}, x_k) - D_{\xi_{k-1}} F(\hat{x}, x_{k-1}) &= -D_{\xi_{k-1}} F(x_k, x_{k-1}) + \langle \xi_k - \xi_{k-1} \mid x_k - \hat{x} \rangle \\ &= -D_{\xi_{k-1}} F(x_k, x_{k-1}) - \lambda_{k-1} \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_k - y) \mid x_k - \hat{x} \rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a segunda igualdade foi obtida usando a definição de  $\xi_k$  (linha 12 do Algoritmo 1). Usando as propriedades do operador de dualidade  $J_r$  temos:

$$\lambda_{k-1} \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_k - y) \mid x_k - \hat{x} \rangle = \lambda_{k-1} \langle J_r(\mathcal{A}x_k - y) \mid \mathcal{A}x_k - y \rangle = \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r \quad (3.9)$$

De (3.8) e (3.9) temos (3.6). Agora, observe que de (3.6) segue:

$$\lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r \leq D_{\xi_{k-1}} F(\hat{x}, x_{k-1}) - D_{\xi_k} F(\hat{x}, x_k)$$

Logo, para  $N \geq 1$  temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r &\leq \sum_{k=1}^N \left( D_{\xi_{k-1}} F(\hat{x}, x_{k-1}) - D_{\xi_k} F(\hat{x}, x_k) \right) \\ &= D_{\xi_0} F(\hat{x}, x_0) - D_{\xi_N} F(\hat{x}, x_N) \\ &\leq D_{\xi_0} F(\hat{x}, x_0) < \infty \end{aligned}$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$  temos (3.7). ■

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad &\underset{x}{\text{minimizar:}} \quad D_{\xi_0} F(x, x_0) \\ &\text{sujeito a:} \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para mostrar que (3.10) admite uma única solução seguimos as mesmas linhas da prova da Proposição 3.1. Seja  $x^\dagger \in \text{dom}(F) \cap \Omega$  a única solução de (3.10). Note que  $x^\dagger$  é a solução do problema inverso mais próxima (no sentido da distância de Bregman) do ponto  $x_0$ .

**Teorema 3.6.** Sejam  $(x_k)_{k=0}^\infty$ ,  $(\xi_k)_{k=0}^\infty$  e  $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$  possíveis sequências geradas pelo Algoritmo 1 com dados exatos. Então, temos que  $x_k \rightarrow x^\dagger$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Começamos com um resultado intermediário.

Afirmção:  $(x_k)_k$  é uma sequência de Cauchy.

Sejam  $m > k \geq 1$ . Da identidade dos três pontos temos:

$$D_{\xi_k} F(x_m, x_k) - D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k) = -D_{\xi_m} F(x^\dagger, x_m) + \langle \xi_m - \xi_k \mid x_m - x^\dagger \rangle \tag{3.11}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \left| \langle \xi_m - \xi_k \mid x_m - x^\dagger \rangle \right| &= \left| \sum_{i=k+1}^m \langle \xi_i - \xi_{i-1} \mid x_m - x^\dagger \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=k+1}^m -\lambda_{i-1} \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_i - y) \mid x_m - x^\dagger \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=k+1}^m -\lambda_{i-1} \langle J_r(\mathcal{A}x_i - y) \mid \mathcal{A}x_m - y \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=k+1}^m \lambda_{i-1} \|\mathcal{A}x_i - y\|^{r-1} \|\mathcal{A}x_m - y\| \end{aligned}$$



Da Proposição 3.4, temos que  $\|\mathcal{A}x_m - y\| \leq \|\mathcal{A}x_i - y\|$  para todo  $i \leq m$ . Portanto, obtemos:

$$\left| \langle \xi_m - \xi_k \mid x_m - x^\dagger \rangle \right| \leq \sum_{i=k+1}^m \lambda_{i-1} \|\mathcal{A}x_i - y\|^r \quad (3.12)$$

De (3.11) e (3.12) segue:

$$D_{\xi_k} F(x_m, x_k) \leq D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k) - D_{\xi_m} F(x^\dagger, x_m) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_{i-1} \|\mathcal{A}x_i - y\|^r \quad (3.13)$$

Segue da Proposição 3.5 que  $(D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k))_k$  é uma sequência monótona decrescente. Como também é limitada inferiormente (por zero), segue que  $(D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k))_k$  é uma sequência convergente (em particular, Cauchy). Observe também que o último termo de (3.13) se trata de uma diferença de somas parciais da série em (3.7). Uma vez que a série converge, a sequência de somas parciais também é de Cauchy. Ou seja, para um dado  $\epsilon > 0$  arbitrário e considerando  $\epsilon^* = \Theta(\epsilon) > 0$ , existe um índice  $k_0^* \geq 1$  tal que:

$$\forall m > k \geq k_0^*, D_{\xi_k} F(x_m, x_k) < \epsilon^* \quad (3.14)$$

Da Proposição 2.52, temos  $D_{\xi_k} F(x_m, x_k) \geq \Theta(\|x_m - x_k\|)$ . Ou seja, de (3.14) segue:

$$\forall m > k \geq k_0^*, \|x_m - x_k\| < \epsilon$$

Logo, a afirmação está provada.

Como  $(x_k)_k$  é Cauchy e  $X$  é completo, existe  $\bar{x} \in X$  tal que  $x_k \rightarrow \bar{x}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . A prova está completa se mostrarmos que  $\bar{x} = x^\dagger$ . Se  $\bar{x} \in \Omega$  e  $D_{\xi_0} F(\bar{x}, x_0) \leq D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0)$ , então da definição de  $x^\dagger$  temos  $\bar{x} = x^\dagger$ . Como  $\eta \in (0, 1)$ , segue da Proposição 3.4 que  $\|\mathcal{A}x_k - y\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Da continuidade de  $\mathcal{A}$  segue que  $\mathcal{A}\bar{x} = y$  e, portanto,  $\bar{x} \in \Omega$ . Resta mostrar que  $D_{\xi_0} F(\bar{x}, x_0) \leq D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0)$ . Como  $\xi_k \in \partial F(x_k)$ , segue que  $\xi_k - \xi_0 \in \partial D_{\xi_0} F(\cdot, x_0)(x_k) = \partial F(x_k) - \xi_0$ . Disto temos:

$$\langle \xi_k - \xi_0 \mid x^\dagger - x_k \rangle \leq D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0) - D_{\xi_0} F(x_k, x_0) \quad (3.15)$$

Como  $D_{\xi_0} F(\cdot, x_0) \in \Gamma_0(X)$ , de (3.15) segue:

$$\begin{aligned} D_{\xi_0} F(\bar{x}, x_0) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} D_{\xi_0} F(x_k, x_0) \\ &\leq D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle \xi_k - \xi_0 \mid x_k - x^\dagger \rangle \end{aligned}$$

Temos o resultado uma vez concluída a prova da próxima afirmação.

Afirmação:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \xi_m - \xi_0 | x_m - x^\dagger \rangle = 0$ .

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário. Como já argumentamos, o lado direito de (3.12) trata-se da diferença de somas parciais da série em (3.7). Logo, existe um índice  $k_1^* \geq 1$  tal que:

$$\forall m > k \geq k_1^*, \left| \langle \xi_m - \xi_k | x_m - x^\dagger \rangle \right| < \epsilon/2$$

Em particular:

$$\forall m > k_1^*, \left| \langle \xi_m - \xi_{k_1^*} | x_m - x^\dagger \rangle \right| < \epsilon/2$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \left| \langle \xi_{k_1^*} - \xi_0 | x_m - x^\dagger \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^{k_1^*} \langle \xi_i - \xi_{i-1} | x_m - x^\dagger \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{k_1^*} -\lambda_{i-1} \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_i - y) | x_m - x^\dagger \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{k_1^*} -\lambda_{i-1} \langle J_r(\mathcal{A}x_i - y) | \mathcal{A}x_m - y \rangle \right| \\ &\leq \|\mathcal{A}x_m - y\| \sum_{i=1}^{k_1^*} \lambda_{i-1} \|\mathcal{A}x_i - y\|^{r-1} \end{aligned}$$

Como  $\|\mathcal{A}x_m - y\| \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ , existe um índice  $k_2^* \geq 1$  tal que:

$$\forall m > k_2^*, \left| \langle \xi_{k_1^*} - \xi_0 | x_m - x^\dagger \rangle \right| < \epsilon/2$$

Assim, para  $k_3^* \geq \max\{k_1^*, k_2^*\}$  temos:

$$\forall m > k_3^*, \left| \langle \xi_m - \xi_0 | x_m - x^\dagger \rangle \right| < \epsilon$$

Logo, a afirmação está provada. ■

**Corolário 3.7.** Seja  $(x_k)_{k=0}^\infty$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1 com dados exatos. Então, temos que  $D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova:**

Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário. Como exposto em (3.14) existe um índice  $k_0^* \geq 1$  tal que:

$$\forall m > k \geq k_0^*, D_{\xi_k} F(x_m, x_k) < \epsilon$$

Ou seja:

$$\forall k \geq k_0^*, \lim_{m \rightarrow \infty} D_{\xi_k} F(x_m, x_k) \leq \epsilon$$

Como  $x_m \rightarrow x^\dagger$  quando  $m \rightarrow \infty$  e  $D_{\xi_k} F(\cdot, x_k) \in \Gamma_0(X)$ , segue que:

$$\forall k \geq k_0^*, D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} D_{\xi_k} F(x_m, x_k) \leq \epsilon$$

■

### 3.2.2 Introduzindo Ruídos: Estabilidade e Regularização

Agora vamos assumir que nossos dados são imprecisos e  $\delta > 0$ . Vamos provar as propriedades de estabilidade e regularização do Algoritmo 1. Começamos de uma maneira similar ao caso de dados exatos, mostrando o decaimento do resíduo  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ .

**Proposição 3.8.** Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1 para  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então, para todo  $k = 1, 2, \dots, k_\delta$  temos que:

$$\bar{\eta} (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) \leq \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) \quad (3.16)$$

e também que:

$$\bar{\eta}^k (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \leq \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta^k (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \quad (3.17)$$

**Prova:**

Para  $k = 1, 2, \dots, k_\delta$  temos que:

$$c_{k-1} = \delta + \bar{\eta} (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) \leq \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \delta + \eta (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) = d_{k-1}$$

de onde segue (3.16). A prova de (3.17) é feita por indução. Para  $k = 1$  já estabelecemos o resultado. Suponha que o resultado se mantenha para  $(k-1) \geq 1$  e vamos mostrar a validade para  $k$ . Observe que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta &\leq \eta (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) \leq \eta \eta^{k-1} (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \\ &= \eta^k (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \end{aligned}$$

e de maneira análoga estabelecemos a cota inferior.

■

Uma importante consequência da Proposição 3.8 é que na presença de ruídos ( $\delta > 0$ ) as seqüências  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  são finitas, pois a iteração do algoritmo termina em um número finito de passos ( $k_\delta < \infty$ ).

**Corolário 3.9.** Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível seqüência gerada pelo Algoritmo 1 para  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então, a iteração termina em um número finito de passos e temos a estimativa:

$$|\ln \bar{\eta}|^{-1} \ln \left( \frac{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta}{(\tau - 1)\delta} \right) \leq k_\delta \leq |\ln \eta|^{-1} \ln \left( \frac{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta}{(\tau - 1)\delta} \right) + 1 \quad (3.18)$$

**Prova:**

Suponha, para obter contradição, que  $k_\delta = \infty$ . Isto é, estamos assumindo que o critério de parada nunca é satisfeito e, por consequência, temos:

$$\forall k \geq 1, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau \delta \Rightarrow \forall k \geq 1, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta > (\tau - 1)\delta$$

Disto e da Proposição 3.8 segue que:

$$\forall k \geq 1, \eta^k (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \geq (\tau - 1)\delta > 0$$

onde obtemos uma contradição, pois como  $\eta \in (0, 1)$  temos que  $\eta^k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, a iteração termina em um número finito de passos e  $k_\delta < \infty$ . Agora, aplicando (3.2) para  $k = k_\delta - 1$  e novamente a Proposição 3.8, obtemos:

$$(\tau - 1)\delta < \|\mathcal{A}x_{k_\delta-1}^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta^{k_\delta-1} (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta)$$

de onde segue a cota superior de (3.18) após uma pequena manipulação. Para a cota inferior, note que  $\|\mathcal{A}x_{k_\delta}^\delta - y^\delta\| \leq \tau \delta$  e, portanto,  $\|\mathcal{A}x_{k_\delta}^\delta - y^\delta\| - \delta \leq (\tau - 1)\delta$ . Aplicando a Proposição 3.8 temos:

$$\bar{\eta}^{k_\delta} (\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \leq (\tau - 1)\delta$$

de onde segue a cota inferior de (3.18) após uma pequena manipulação. ■

Uma segunda consequência da Proposição 3.8 trata da convergência da família  $(k_\delta)_{\delta > 0}$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ . Note que  $k_\delta$  não depende exclusivamente do nível de ruídos  $\delta > 0$ , mas também do vetor  $y^\delta$ .

**Corolário 3.10.** Seja  $(k_\delta)_{\delta>0}$  uma possível família gerada pelo Algoritmo 1, onde para cada  $\delta > 0$  temos  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então,  $k_\delta \rightarrow \infty$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ .

**Prova:**

Do Corolário 3.9 temos:

$$\forall \delta > 0, k_\delta \geq |\ln \bar{\eta}|^{-1} \ln \left( \frac{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta}{(\tau - 1)\delta} \right)$$

Portanto, fazendo  $\delta \rightarrow 0^+$  temos  $k_\delta \rightarrow \infty$ . ■

**Lema 3.11.** Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1 para  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então, existe uma constante  $\beta \in (1, \tau)$  tal que:

$$\forall k = 1, 2, \dots, k_\delta, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \beta \delta$$

**Prova:**

Para  $k = 1, 2, \dots, k_\delta$  temos que:

$$\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \geq (1 - \bar{\eta})\delta + \bar{\eta}\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| = c_{k-1}$$

Usando (3.2), temos  $\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| > \tau\delta$ . Assim:

$$\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > (1 - \bar{\eta})\delta + \bar{\eta}\tau\delta = (1 + (\tau - 1)\bar{\eta})\delta$$

Fazendo  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1 + (\tau - 1)\bar{\eta} \in (1, \tau)$ , temos o resultado. ■

**Proposição 3.12.** Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1 para  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Seja  $\hat{x} \in \text{dom}(F) \cap \Omega$  uma solução do problema inverso. Então, para todo  $k = 1, 2, \dots, k_\delta$  segue que:

$$D_{\xi_k^\delta} F(\hat{x}, x_k^\delta) \leq D_{\xi_{k-1}^\delta} F(\hat{x}, x_{k-1}^\delta) - D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) - \lambda_{k-1}^\delta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^r \quad (3.19)$$

onde a constante  $\beta \in (1, \tau)$  é dada pelo Lema 3.11.

**Prova:**

Da identidade dos três pontos (Proposição 2.51) temos:

$$\begin{aligned} D_{\xi_k^\delta} F(\hat{x}, x_k^\delta) - D_{\xi_{k-1}^\delta} F(\hat{x}, x_{k-1}^\delta) &= -D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) + \langle \xi_k^\delta - \xi_{k-1}^\delta \mid x_k^\delta - \hat{x} \rangle \\ &= -D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) - \lambda_{k-1}^\delta \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid x_k^\delta - \hat{x} \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde a segunda igualdade foi obtida usando a definição de  $\xi_k^\delta$  (linha 12 do Algoritmo 1).

Usando as propriedades do operador de dualidade  $J_r$  temos:

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}^\delta \langle \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid x_k^\delta - \hat{x} \rangle &= \lambda_{k-1}^\delta \langle J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid \mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta \rangle \\ &= \lambda_{k-1}^\delta \langle J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid \mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta \rangle \\ &\quad + \lambda_{k-1}^\delta \langle J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid y^\delta - y \rangle \\ &= \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r + \lambda_{k-1}^\delta \langle J_r(\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta) \mid y^\delta - y \rangle \\ &\geq \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r - \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^{r-1} \|y^\delta - y\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

De (3.20) e (3.21), temos:

$$\begin{aligned} D_{\xi_k^\delta} F(\hat{x}, x_k^\delta) - D_{\xi_{k-1}^\delta} F(\hat{x}, x_{k-1}^\delta) &\leq -D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) - \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r \\ &\quad + \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^{r-1} \|y^\delta - y\| \\ &\leq -D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) - \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r \\ &\quad + \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^{r-1} \delta \end{aligned} \quad (3.22)$$

Do Lema 3.11 e (3.22), temos:

$$\begin{aligned} D_{\xi_k^\delta} F(\hat{x}, x_k^\delta) - D_{\xi_{k-1}^\delta} F(\hat{x}, x_{k-1}^\delta) &\leq -D_{\xi_{k-1}^\delta} F(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) - \lambda_{k-1}^\delta \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r \\ &\quad + \frac{\lambda_{k-1}^\delta}{\beta} \|\mathcal{A} x_k^\delta - y^\delta\|^r \end{aligned}$$

de onde segue (3.19). ■

Queremos estudar as propriedades de convergência da família  $(x_{k,\delta}^\delta)_{\delta>0}$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ . Primeiramente, vamos determinar um resultado de estabilidade que conecta  $x_k^\delta$  com  $x_k$ : Para um dado índice  $k \geq 0$  qualquer, segue do Corolário 3.10 que para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno a sequência  $(x_m^\delta)_{m=0}^{k\delta}$  contém o elemento  $x_k^\delta$ . Neste sentido, queremos mostrar que  $x_k^\delta \rightarrow x_k$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ . Uma vez que o Algoritmo 1 não determina unicamente suas sequências, este desafio ganha uma dificuldade adicional, pois não sabemos para qual  $x_k$  a família  $(x_k^\delta)_{\delta>0}$  deveria convergir (e também, a família  $(x_k^\delta)_{\delta>0}$  não é única). Assim, para cada  $k \geq 0$  vamos mostrar que existem escolhas para as quais obtemos  $x_k^\delta \rightarrow x_k$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ .

Antes de enunciarmos e provarmos o resultado de estabilidade, vamos definir os *funcionais de Tikhonov*  $T_{\lambda_k}, T_{\lambda_k^\delta}: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  por:

$$T_{\lambda_k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_k}{r} \|\mathcal{A}x - y\|^r + D_{\xi_k} F(x, x_k)$$

$$T_{\lambda_k^\delta}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_k^\delta}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + D_{\xi_k^\delta} F(x, x_k^\delta)$$

Sabemos que  $D_{\xi_k} F(\cdot, x_k) \in \Gamma_0(X)$  é estritamente convexa e coerciva. Assim, temos que o operador  $T_{\lambda_k} \in \Gamma_0(X)$  também é estritamente convexo e coercivo. Como  $X$  é reflexivo (hipótese (A1)), segue que  $T_{\lambda_k}$  admite um único minimizador. Ou seja,  $\arg \min \{T_{\lambda_k}\}$  é um conjunto não-vazio e unitário. O mesmo comentário vale para  $T_{\lambda_k^\delta}$ . Note que por definição do Algoritmo 1 temos:

$$x_{k+1}^\delta = \arg \min \left\{ T_{\lambda_k^\delta}(x) \mid x \in X \right\}$$

**Teorema 3.13** (Estabilidade). Seja  $(\delta_j)_{j=1}^\infty \subseteq (0, \infty)$  uma sequência tal que  $\delta_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Para cada  $j \geq 1$ , fixe possíveis sequências  $(x_m^{\delta_j})_{m=0}^{k\delta_j}$  e  $(\xi_m^{\delta_j})_{m=0}^{k\delta_j}$  geradas pelo Algoritmo 1 para  $\delta_j > 0$  e  $y^{\delta_j} \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^{\delta_j}\| \leq \delta_j$ . Então, existem sequências  $(x_k)_{k=0}^\infty$  e  $(\xi_k)_{k=0}^\infty$  geradas pelo Algoritmo 1 com dados exatos tal que para cada índice  $k \geq 0$  podemos tomar uma subsequência  $(\delta_{j_m})_{m=1}^\infty$  (dependendo de  $k$ ) que satisfaz:

$$\forall n = 0, 1, \dots, k, x_n^{\delta_{j_m}} \rightarrow x_n, \xi_n^{\delta_{j_m}} \rightarrow \xi_n \text{ e } F(x_n^{\delta_{j_m}}) \rightarrow F(x_n) \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

**Prova:**

A prova será feita por indução em  $k$ . O argumento consiste em sucessivamente construir subsequências apropriadas de  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  e, para simplificar a notação, não vamos reindexar tais subsequências. Isto é, uma subsequência de  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  será ainda denotada por  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$ . Para

$k = 0$  o resultado é imediato, uma vez que  $x_0^\delta = x_0$  e  $\xi_0^\delta = \xi_0$  para todo  $\delta \geq 0$ . Suponha que o resultado se mantenha para  $k \geq 0$  e vamos mostrar a validade para  $k + 1$ . Assim, existe uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  satisfazendo:

$$\forall n = 0, 1, \dots, k, x_n^{\delta_j} \longrightarrow x_n, \xi_n^{\delta_j} \longrightarrow \xi_n \text{ e } F(x_n^{\delta_j}) \longrightarrow F(x_n) \text{ quando } j \longrightarrow \infty$$

Sem perda de generalidade (Corolário 3.10), vamos assumir que  $k < k_{\delta_j}$  para todo  $j \geq 1$ , de forma que  $k + 1 \leq k_{\delta_j}$  para todo  $j \geq 1$ . Devemos mostrar que existem sucessores  $x_{k+1}$  e  $\xi_{k+1}$ , bem como uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  tais que  $x_{k+1}^{\delta_j} \longrightarrow x_{k+1}$ ,  $\xi_{k+1}^{\delta_j} \longrightarrow \xi_{k+1}$  e  $F(x_{k+1}^{\delta_j}) \longrightarrow F(x_{k+1})$  quando  $j \longrightarrow \infty$ . A prova será dividida em vários passos, os quais explicamos agora:

Passo 1: Encontramos  $\bar{x} \in X$  e uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  tais que  $x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} \bar{x}$  quando  $j \longrightarrow \infty$ .

Passo 2: Mostramos que a sequência de multiplicadores  $(\lambda_k^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  é limitada. Em seguida, escolhemos uma subsequência convergente e definimos:

$$\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_k^{\delta_j} \in [0, \infty) \quad (3.23)$$

Bem como:

$$x_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min \{T_{\lambda_k}(x) \mid x \in X\} \text{ e } \xi_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_k - \lambda_k \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1} - y) \quad (3.24)$$

Passo 3: Mostramos que  $x_{k+1} = \bar{x}$ . Em vista do Passo 1, temos  $x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} x_{k+1}$  quando  $j \longrightarrow \infty$ .

Passo 4: Mostramos que  $F(x_{k+1}^{\delta_j}) \longrightarrow F(x_{k+1})$  quando  $j \longrightarrow \infty$ . Uma vez que  $F$  possui a propriedade de Kadec-Klee (Definição 2.46 e Proposição 2.47), segue (em vista do Passo 3) que  $x_{k+1}^{\delta_j} \longrightarrow x_{k+1}$  quando  $j \longrightarrow \infty$ .

Passo 5: Mostramos que  $\xi_{k+1}^{\delta_j} \longrightarrow \xi_{k+1}$  quando  $j \longrightarrow \infty$ .

Passo 6: Validamos  $x_{k+1}$  como uma possível atualização de  $x_k$  de acordo com o Algoritmo 1, completando o argumento de indução.

Passamos para a prova de cada um dos passos.

Passo 1: Usando a Proposição 3.12 temos que:

$$\forall j \geq 1, D_{\xi_{k+1}^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_{k+1}^{\delta_j}) \leq D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_k^{\delta_j}) \leq \dots \leq D_{\xi_0^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_0^{\delta_j}) = D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0)$$



Da Proposição 2.52 segue:

$$\forall j \geq 1, \Theta(\|x^\dagger - x_{k+1}^{\delta_j}\|) \leq D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0) < \infty$$

Como  $\Theta(s) \rightarrow \infty$  quando  $s \rightarrow \infty$  (hipótese (A2)), segue que  $(x_{k+1}^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  é limitada. Sendo o espaço  $X$  reflexivo (hipótese (A1)), existem  $\bar{x} \in X$  e uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  tais que  $x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} \bar{x}$  quando  $j \rightarrow \infty$  (Proposição B.23).

Passo 2: Suponha, para obter contradição, que a afirmação é falsa. Neste caso, existe uma subsequência tal que  $\lambda_k^{\delta_j} \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \|\mathcal{A} x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}\|^r &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j})}{\lambda_k^{\delta_j}} \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x^\dagger)}{\lambda_k^{\delta_j}} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r} \|\mathcal{A} x^\dagger - y^{\delta_j}\|^r + \frac{D_{\xi_k} F(x^\dagger, x_k^\delta)}{\lambda_k^{\delta_j}} \right) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r} \delta_j^r + \frac{D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0)}{\lambda_k^{\delta_j}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Disto e da Proposição 3.8, segue:

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{\eta}^{k+1} \|\mathcal{A} x_0 - y\| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\eta}^{k+1} (\|\mathcal{A} x_0 - y^{\delta_j}\| - \delta_j) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} (\|\mathcal{A} x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}\| - \delta_j) = 0 \end{aligned}$$

o que contradiz nossa hipótese de  $x_0$  não ser uma solução do problema inverso. Portanto, a sequência  $(\lambda_k^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  é limitada. Assim, tomamos uma subsequência convergente e definimos  $\lambda_k$ ,  $x_{k+1}$  e  $\xi_{k+1}$  como em (3.23) e (3.24).

Passo 3: Vamos mostrar que o limite fraco  $\bar{x} \in X$  de  $(x_{k+1}^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  estabelecido no Passo 1 é precisamente  $x_{k+1}$ . Para mostrar que  $\bar{x} = x_{k+1}$ , vamos mostrar que  $\bar{x}$  é um minimizador do funcional  $T_{\lambda_k}$ . Sendo  $x_{k+1}$  o único minimizador de  $T_{\lambda_k}$ , temos a igualdade  $\bar{x} = x_{k+1}$ . Observe que:

$$\begin{aligned}
& \left| \langle \xi_k | \bar{x} - x_k \rangle - \langle \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle \right| \\
&= \left| \langle \xi_k | \bar{x} - x_{k+1}^{\delta_j} \rangle + \langle \xi_k | x_k^{\delta_j} - x_k \rangle + \langle \xi_k - \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle \right| \\
&\leq \left| \langle \xi_k | \bar{x} - x_{k+1}^{\delta_j} \rangle \right| + \left| \langle \xi_k | x_k^{\delta_j} - x_k \rangle \right| + \left| \langle \xi_k - \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle \right| \\
&\leq \left| \langle \xi_k | \bar{x} - x_{k+1}^{\delta_j} \rangle \right| + \|\xi_k\| \|x_k^{\delta_j} - x_k\| + \|\xi_k - \xi_k^{\delta_j}\| \|x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j}\|
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Segue da hipótese de indução que  $\|x_k^{\delta_j} - x_k\| \rightarrow 0$  e  $\|\xi_k - \xi_k^{\delta_j}\| \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . No Passo 1 mostramos que  $(x_{k+1}^{\delta_j})_{j=1}^{\infty}$  é limitada e  $(x_k^{\delta_j})_{j=1}^{\infty}$  também é limitada, uma vez que é convergente. Disto, de (3.25) e da Proposição B.22 obtemos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle = \langle \xi_k | \bar{x} - x_k \rangle \tag{3.26}$$

Do fato de que  $F \in \Gamma_0(X)$  e  $x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} \bar{x}$  quando  $j \rightarrow \infty$ , da hipótese de indução e de (3.26), obtemos:

$$\begin{aligned}
D_{\xi_k} F(\bar{x}, x_k) &= F(\bar{x}) - F(x_k) - \langle \xi_k | \bar{x} - x_k \rangle \\
&\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_{k+1}^{\delta_j}) - F(x_k) - \langle \xi_k | \bar{x} - x_k \rangle \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} F(x_{k+1}^{\delta_j}) - \lim_{j \rightarrow \infty} F(x_k^{\delta_j}) - \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j})
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Como o operador linear  $\mathcal{A}$  é contínuo, então é fracamente contínuo (Teorema B.27). Assim, temos  $\mathcal{A}x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} \mathcal{A}\bar{x}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Disto, de (3.27) e da Proposição B.22, temos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda_k}(\bar{x}) &= \frac{\lambda_k}{r} \|\mathcal{A}\bar{x} - y\|^r + D_{\xi_k} F(\bar{x}, x_k) \\
&\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_k^{\delta_j}}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}\|^r + D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}) \right) \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j}) \\
&\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x_{k+1}) \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_k^{\delta_j}}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^{\delta_j}\|^r + D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}, x_k^{\delta_j}) \right) \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_k^{\delta_j}}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^{\delta_j}\|^r + F(x_{k+1}) - F(x_k^{\delta_j}) - \langle \xi_k^{\delta_j} \mid x_{k+1} - x_k^{\delta_j} \rangle \right) \\
&= \frac{\lambda_k}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y\|^r + F(x_{k+1}) - F(x_k) - \langle \xi_k \mid x_{k+1} - x_k \rangle \\
&= \frac{\lambda_k}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y\|^r + D_{\xi_k} F(x_{k+1}, x_k) = T_{\lambda_k}(x_{k+1})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ou seja,  $\bar{x} = x_{k+1}$  e, por consequência, temos  $x_{k+1}^{\delta_j} \xrightarrow{w} x_{k+1}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Antes de prosseguirmos para o próximo passo, note que fazendo  $\bar{x} = x_{k+1}$  em (3.26) obtemos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \xi_k^{\delta_j} \mid x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle = \langle \xi_k \mid x_{k+1} - x_k \rangle \tag{3.29}$$

e também de (3.28) junto com  $\bar{x} = x_{k+1}$  segue:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j}) = T_{\lambda_k}(x_{k+1}) \tag{3.30}$$

Passo 4: Suponha que temos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}) = D_{\xi_k} F(x_{k+1}, x_k) \tag{3.31}$$

Neste caso, de (3.29) e (3.31) junto com a hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} F(x_{k+1}^{\delta_j}) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}) + F(x_k^{\delta_j}) + \langle \xi_k^{\delta_j} | x_{k+1}^{\delta_j} - x_k^{\delta_j} \rangle \right) \\ &= D_{\xi_k} F(x_{k+1}, x_k) + F(x_k) + \langle \xi_k | x_{k+1} - x_k \rangle = F(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Ou seja, temos o resultado desejado se provarmos que (3.31) se mantém para alguma subsequência. Primeiramente, note que da Proposição 3.12 temos:

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1, D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}) &\leq D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_k^{\delta_j}) \\ &\leq D_{\xi_{k-1}^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_{k-1}^{\delta_j}) \\ &\leq \dots \leq D_{\xi_0^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_0^{\delta_j}) = D_{\xi_0} F(x^\dagger, x_0) \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que a sequência  $(D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}))_{j=1}^\infty$  é limitada. Agora, lembre que  $\mathcal{A}x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j} \xrightarrow{w} \mathcal{A}x_{k+1} - y$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Assim, a sequência  $(\mathcal{A}x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  é também limitada. Logo, tomando subsequências podemos garantir a convergência das seguintes sequências:

$$\forall j \geq 1, D_j \stackrel{\text{def}}{=} D_{\xi_k^{\delta_j}} F(x_{k+1}^{\delta_j}, x_k^{\delta_j}) \text{ e } M_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \|\mathcal{A}x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}\|^r$$

onde definimos:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} D_j \text{ e } M \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} M_j$$

Segue de (3.30) que podemos escolher tal subsequência de forma que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_{\lambda_k^{\delta_j}}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j}) = T_{\lambda_k}(x_{k+1}) \quad (3.32)$$

Observe ainda que da Proposição 3.8 temos:

$$\forall j \geq 1, M_j \geq \frac{1}{r} \left( \delta_j + \bar{\eta}^{k+1} (\|\mathcal{A}x_0 - y^{\delta_j}\| - \delta_j) \right)^r$$

de onde segue que  $M \geq \bar{\eta}^{k+1} r^{-1} \|\mathcal{A}x_0 - y\|^r > 0$ . Agora, definindo  $E \stackrel{\text{def}}{=} D_{\xi_k} F(x_{k+1}, x_k)$  temos que (3.31) se reduz em  $D = E$ . De (3.27) junto com  $\bar{x} = x_{k+1}$  temos  $E \leq D$ . Resta mostrar que  $D \leq E$ . Suponha, para obter contradição, que  $D > E$ . Como  $(\lambda_k^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  é limitada (Passo 2), seja  $\lambda_k^{\max} > 0$  tal que  $\lambda_k^{\delta_j} \leq \lambda_k^{\max}$  para todo  $j \geq 1$ . Da definição de limite existe um índice  $j_0^* \geq 1$  tal que para todo  $j \geq j_0^*$  temos:

- $T_{\lambda_k}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j}) < T_{\lambda_k}(x_{k+1}) + \frac{D-E}{2}$
- $M < M_j + \frac{D-E}{6\lambda_k^{\max}}$
- $\lambda_k < \lambda_k^{\delta_j} + \frac{D-E}{6M}$
- $D < D_j + \frac{D-E}{6}$

Assim, para todo  $j \geq j_0^*$  temos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda_k}(x_{k+1}) &\leq \lambda_k M + E = (\lambda_k - \lambda_k^{\delta_j}) M + \lambda_k^{\delta_j} M + D - (D - E) \\
&< \left(\frac{D-E}{6M}\right) M + \lambda_k^{\delta_j} \left(M_j + \frac{D-E}{6\lambda_k^{\max}}\right) + \left(D_j + \frac{D-E}{6}\right) - (D - E) \\
&\leq \lambda_k^{\delta_j} M_j + D_j - \frac{D-E}{2} = T_{\lambda_k}^{\delta_j}(x_{k+1}^{\delta_j}) - \frac{D-E}{2} < T_{\lambda_k}(x_{k+1})
\end{aligned}$$

onde obtemos uma contradição. Portanto,  $D \leq E$  e temos (3.31).

Passo 5: Ao concluirmos o Passo 4, obtemos que  $x_{k+1}^{\delta_j} \rightarrow x_{k+1}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Como o espaço  $Y$  é localmente uniformemente suave (hipótese **(A1)**), temos que o operador de dualidade  $J_r: Y \rightarrow Y^*$  é contínuo. Disto e da hipótese de indução, segue que:

$$\begin{aligned}
\xi_{k+1}^{\delta_j} &= \xi_k^{\delta_j} - \lambda_k^{\delta_j} \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A} x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}) \\
&\rightarrow \xi_k - \lambda_k \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A} x_{k+1} - y) = \xi_{k+1} \quad \text{quando } j \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Passo 6: Seguindo o Algoritmo 1,  $x_{k+1}$  é uma possível atualização de  $x_k$  caso  $\lambda_k > 0$  e se é válido que:

$$\bar{\eta} \|\mathcal{A} x_k - y\| \leq \|\mathcal{A} x_{k+1} - y\| \leq \eta \|\mathcal{A} x_k - y\| \quad (3.33)$$

Da Proposição 3.8 temos que:

$$\forall j \geq 1, (1 - \bar{\eta}) \delta_j + \bar{\eta} \|\mathcal{A} x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j}\| \leq \|\mathcal{A} x_{k+1}^{\delta_j} - y^{\delta_j}\| \leq (1 - \eta) \delta_j + \eta \|\mathcal{A} x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j}\|$$

de onde segue (3.33) fazendo  $j \rightarrow \infty$ . Por definição, sabemos que  $\lambda_k \geq 0$ . Suponha, para obter contradição, que  $\lambda_k = 0$ . Neste caso, temos  $x_{k+1} = x_k$  e (3.33) implica que

$\|\mathcal{A}x_k - y\| = 0$ . Da Proposição 3.4 segue  $\bar{\eta}^k \| \mathcal{A}x_0 - y \| = 0$ , o que contradiz nossa hipótese de  $x_0$  não ser uma solução do problema inverso. Logo,  $\lambda_k > 0$ . ■

**Teorema 3.14** (Regularização). Seja  $(\delta_j)_{j=1}^\infty \subseteq (0, \infty)$  uma sequência tal que  $\delta_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Para cada  $j \geq 1$ , fixe uma possível sequência  $(x_m^{\delta_j})_{m=0}^{k_{\delta_j}}$  gerada pelo Algoritmo 1 para  $\delta_j > 0$  e  $y^{\delta_j} \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^{\delta_j}\| \leq \delta_j$ . Então, temos que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} = x^\dagger \quad (3.34)$$

**Prova:** Começamos com um resultado intermediário.

Afirmação: Para todo  $\epsilon > 0$ , existem uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  e um índice  $j_0^* \geq 1$  (ambos dependendo de  $\epsilon$ ) tais que:

$$\forall j \geq j_0^*, D_{\xi_{k_{\delta_j}}^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j}) < \epsilon$$

De fato, seja  $\epsilon > 0$  arbitrário. Tome uma sequência  $(x_k)_{k=0}^\infty$  construída por meio do Teorema 3.13. Do Teorema 3.6 e do Corolário 3.7, existe um índice  $N \geq 1$  tal que:

$$\|x_N - x^\dagger\| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \quad \text{e} \quad D_{\xi_N} F(x^\dagger, x_N) < \frac{\epsilon}{2}$$

Do Teorema 3.13, existem uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  e um índice  $j_1^* \geq 1$  tais que:

$$\forall j \geq j_1^*, \|x_N^{\delta_j} - x_N\| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \quad \text{e} \quad \|\xi_N^{\delta_j} - \xi_N\| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$$

Do Corolário 3.10, temos que existe um índice  $j_2^* \geq 1$  tal que  $k_{\delta_j} \geq N$  para todo  $j \geq j_2^*$ . Finalmente, segue da Proposição 3.8 e da identidade dos três pontos (Proposição 2.51) que para todo  $j \geq j_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{j_1^*, j_2^*\}$  temos:

$$\begin{aligned} D_{\xi_{k_{\delta_j}}^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j}) &\leq D_{\xi_N^{\delta_j}} F(x^\dagger, x_N^{\delta_j}) \\ &= D_{\xi_N} F(x^\dagger, x_N) - D_{\xi_N} F(x_N^{\delta_j}, x_N) + \langle \xi_N^{\delta_j} - \xi_N \mid x_N^{\delta_j} - x^\dagger \rangle \\ &\leq D_{\xi_N} F(x^\dagger, x_N) + \langle \xi_N^{\delta_j} - \xi_N \mid x_N^{\delta_j} - x^\dagger \rangle \\ &\leq D_{\xi_N} F(x^\dagger, x_N) + \|\xi_N^{\delta_j} - \xi_N\| \|x_N^{\delta_j} - x^\dagger\| \\ &\leq D_{\xi_N} F(x^\dagger, x_N) + \|\xi_N^{\delta_j} - \xi_N\| (\|x_N^{\delta_j} - x_N\| + \|x_N - x^\dagger\|) < \epsilon \end{aligned}$$

Logo, a afirmação está provada.

Para  $\epsilon = 1$ , existem uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  e um índice  $j_1 \geq 1$  tais que:

$$D_{\xi_{k\delta_{j_1}}^{\delta_{j_1}}} F(x^\dagger, x_{k\delta_{j_1}}^{\delta_{j_1}}) < 1$$

Repetindo este argumento para  $\epsilon = 1/2$ , podemos tomar novamente uma subsequência  $(\delta_j)_{j=1}^\infty$  e um índice  $j_2 \geq j_1$  tais que:

$$D_{\xi_{k\delta_{j_2}}^{\delta_{j_2}}} F(x^\dagger, x_{k\delta_{j_2}}^{\delta_{j_2}}) < \frac{1}{2}$$

Seguindo este raciocínio indutivamente, construímos uma subsequência  $(\delta_{j_m})_{m=1}^\infty$  com a seguinte propriedade:

$$\forall m \geq 1, D_{\xi_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}} F(x^\dagger, x_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}) < \frac{1}{m}$$

e, por consequência, temos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{\xi_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}} F(x^\dagger, x_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}) = 0$$

Usando a Proposição 2.52 segue que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Theta \left( \|x^\dagger - x_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}\| \right) = 0 = \Theta(0) \quad (3.35)$$

Como  $\Theta$  é uma função peso, segue que  $\Theta$  admite uma função inversa que também é uma função peso. Da continuidade da inversa de  $\Theta$  e de (3.35) obtemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^\dagger - x_{k\delta_{j_m}}^{\delta_{j_m}}\| = 0$$

Assim, obtemos uma subsequência tal que (3.34) se mantém. Repetindo este procedimento, mostramos que toda subsequência de  $(x_{k\delta_j}^{\delta_j})_{j=1}^\infty$  possui ela própria uma subsequência convergindo para  $x^\dagger$ . Assim, concluímos (3.34) e a prova está completa. ■

Vale ressaltar que a convergência do Algoritmo 1 (Teoremas 3.6 e 3.14) não se dá a uma solução arbitrária do problema inverso. Lembre que  $x^\dagger$  é a única solução de (3.10). Como já observamos, isto implica que  $x^\dagger$  é a solução do problema inverso que se

---

encontra mais próxima do chute inicial  $x_0$ . Isso configura uma vantagem ao método, pois se tivermos alguma informação *a priori* de qual solução estamos interessados (por exemplo, uma função descontínua ou com uma expansão esparsa em determinada base), podemos escolher adequadamente a função  $F$  e o ponto  $x_0$  para impor que o método convirja para a solução desejada.



## 4 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste trabalho estudamos um algoritmo para solução de sistemas lineares mal-postos em espaços de Banach (Algoritmo 1). Entre os principais pontos, podemos citar:

- Em cada iteração os multiplicadores de Langrange são calculados por meio de um problema de projeção, onde a função objetivo é a distância de Bregman e o conjunto viável se trata de um conjunto de nível do funcional do resíduo. Mostramos que tal problema admite solução aplicando princípios de dualidade em otimização convexa, resultando nos critérios conhecidos como as condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- A estratégia *a posteriori* para escolha dos multiplicadores de Lagrange gerou o método das projeções relaxadas. Este método resulta em um decaimento geométrico do resíduo (Proposições 3.4 e 3.8), bem como uma estimativa do número de iterações (Corolário 3.9).
- Mostramos a convergência com dados exatos no Teorema 3.6. Na presença de ruídos, provamos as propriedades de estabilidade (Teorema 3.13) e regularização (Teorema 3.14).

Foi possível observar as dificuldades adicionais que nos são impostas quando estudamos métodos de regularização em espaços de Banach. Vimos como o uso combinado da distância de Bregman com o operador de dualidade nos permite mimetizar algumas das propriedades de um produto interno, e assim estabelecer certos resultados. Ainda, a distância de Bregman se mostrou uma boa alternativa para o termo de penalização de um método de Tikhonov. Isto se deve ao fato de que podemos induzir a distância de Bregman a partir de uma função  $F$  adequada, garantindo boas propriedades para a função  $D_{\xi_k} F(\cdot, x_k)$ . A escolha de tomarmos  $F$  uniformemente convexa nos permitiu explorar a coercividade de  $D_{\xi_k} F(\cdot, x_k)$ , como também usufruir da propriedade de Kadec-Klee de  $F$  (Definição 2.46 e Proposição 2.47) para provarmos a convergência forte das soluções computadas pelo algoritmo.

Uma extensão natural deste trabalho seria a implementação do método apresentado para realização de experimentos numéricos que possam dar suporte aos resultados teóricos. Como focamos em operadores lineares, também podemos avaliar a possibilidade de se utilizar o método das projeções relaxadas para a definição de um método iterativo capaz de resolver sistemas não-lineares. Ainda, poderíamos tentar exigir menos propriedades dos espaços  $X$  e  $Y$ , bem como da função  $F$ , para generalizar os resultados aqui estabelecidos. Por fim, podemos também conduzir um estudo sobre taxas de convergência utilizando condições de fonte apropriadas.

# Referências

- BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. *Topics in Inverse Problems*. Lecture Notes: 25<sup>th</sup> CBM, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- BAUSCHKE, H. H.; COMBETTES, P. L. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 408.
- BORWEIN, J. M.; VANDERWERFF, J. D. *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 2010. v. 172.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- CIORĂNESCU, I. *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1990. v. 62.
- CLARKE, F. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 264.
- CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1990. v. 96.
- EKELAND, I.; TÉMAM, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. [S.l.]: SIAM, 1999.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. v. 375.
- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, p. 49–52, 1902.
- KESAVAN, S. *Functional Analysis*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 52.
- KIRSCH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. 3. ed. [S.l.]: Springer Nature, 2021. v. 120.
- MACHADO, M.; MARGOTTI, F.; LEITÃO, A. On nonstationary iterated Tikhonov methods for ill-posed equations in Banach spaces. In: *New Trends in Parameter Identification for Mathematical Models*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 175–193.
- MACHADO, M.; MARGOTTI, F.; LEITÃO, A. On the choice of Lagrange multipliers in the iterated Tikhonov method for linear ill-posed equations in Banach spaces. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 28, n. 6, p. 796–826, 2020.
- NASHED, M. A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In: *Inverse and ill-posed problems*. [S.l.]: Elsevier, 1987. p. 53–75.
- RIEDER, A. *Keine Probleme mit inversen Problemen: eine Einführung in ihre stabile Lösung*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003.

SCHUSTER, T.; KALTENBACHER, B.; HOFMANN, B.; KAZIMIERSKI, K. S. *Regularization Methods in Banach Spaces*. [S.l.]: de Gruyter, 2012.

ZĂLINESCU, C. *Convex Analysis in General Vector Spaces*. [S.l.]: World scientific, 2002.

# APÊNDICE A – Problemas Inversos

## A.1 Pseudo-Inversa ou Inversa de Moore-Penrose

Nesta seção, vamos assumir que  $X$  e  $Y$  são espaços de Hilbert e  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  é linear e contínuo. Isto é,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ .

A Definição 1.1 é muito restritiva e, por conta disso, vamos investigar se é possível atribuir um novo significado para o conceito do sistema  $\mathcal{A}x = y$  ser bem-posto. Vamos querer manter todas as condições (H1), (H2) e (H3). Nosso primeiro passo é generalizar o conceito de solução: Inicialmente, vamos procurar por  $\hat{x} \in X$  que seja solução do problema de mínimos quadrados. Isto é, queremos um vetor que minimiza o resíduo:

$$\forall x \in X, \|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x - y\| \quad (\text{A.1})$$

Existem maneiras diferentes, porém equivalentes, de dizer que um vetor minimiza o resíduo.

**Teorema A.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  e  $y \in Y$ . Considere o subespaço fechado  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$  de  $Y$ . Então, são equivalentes:

- I.  $\hat{x} \in X$  satisfaz (A.1).
- II.  $\hat{x} \in X$  é tal que  $\mathcal{A}\hat{x} = \text{proj}_M(y)$ .
- III.  $\hat{x} \in X$  satisfaz a equação normal  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y$ .

**Prova:**

Primeiramente, faremos uma observação sobre a equação normal:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y &\iff \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\hat{x} - y) = \theta \\ &\iff (\mathcal{A}\hat{x} - y) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^*) \\ &\iff (\mathcal{A}\hat{x} - y) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Assim, o resíduo  $(\mathcal{A}\hat{x} - y)$  é perpendicular (normal) ao subespaço  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Daí a origem do nome “equação normal”.

(I)  $\Rightarrow$  (II) Assuma que  $\hat{x} \in X$  satisfaz (A.1). Queremos mostrar que  $\mathcal{A}\hat{x} = \text{proj}_M(y)$  ou, o que é o mesmo, mostrar que  $\mathcal{A}\hat{x}$  é o vetor de  $M$  que minimiza a distância até  $y$ . Que  $\mathcal{A}\hat{x} \in M$  é imediato. Agora, tome  $w \in M$  qualquer e seja  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$  uma sequência tal que  $\mathcal{A}x_n \rightarrow w$ . Perceba que:

$$\forall n \geq 1, \|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x_n - y\|$$

Da continuidade da norma, no limite obtemos que  $\|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|w - y\|$ . Como  $w \in M$  foi arbitrário, temos que  $\mathcal{A}\hat{x} = \text{proj}_M(y)$ .

(II)  $\Rightarrow$  (III) Assuma que  $\mathcal{A}\hat{x} = \text{proj}_M(y)$ . Então, sabemos que  $(\mathcal{A}\hat{x} - y) \in M^\perp \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Por (A.2), temos o resultado.

(III)  $\Rightarrow$  (I) Assuma que  $\hat{x}$  satisfaz a equação normal. Então, por (A.2) sabemos que  $(\mathcal{A}\hat{x} - y) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Tome  $x \in X$  qualquer. Agora, considere a decomposição trivial  $\mathcal{A}x - y = (\mathcal{A}x - \mathcal{A}\hat{x}) + (\mathcal{A}\hat{x} - y)$ . É imediato que  $(\mathcal{A}x - \mathcal{A}\hat{x}) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Daí, usando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x - y\|^2 &= \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}\hat{x}\|^2 + \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|^2 \\ &\geq \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|^2 \end{aligned}$$

Como  $x \in X$  foi arbitrário, temos o resultado. ■

Temos um importante resultado sobre o conjunto solução da equação normal.

**Teorema A.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  e  $y \in Y$ . Então, temos que:

- I. O conjunto solução da equação normal  $\mathcal{U}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y\}$  é não-vazio se, e somente se,  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ .
- II. O conjunto  $\mathcal{U}(y)$  definido acima é convexo e fechado.

**Prova:**

(I)

( $\Rightarrow$ ) Assuma que  $\mathcal{U}(y)$  é não-vazio e tome  $x \in \mathcal{U}(y)$ . Como  $x$  é solução da equação normal, então por (A.2) temos que  $(\mathcal{A}x - y) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Daí, considerando a decomposição trivial  $y = \mathcal{A}x + (y - \mathcal{A}x)$ , segue  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ .

( $\Leftarrow$ ) Assuma que  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Faça a decomposição  $y = \mathcal{A}\hat{x} + v$ , onde  $\hat{x} \in X$  e  $v \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Considere  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp\perp}$ . Aplique o operador projeção ortogonal  $\text{proj}_M(\cdot)$  em ambos os lados da equação para obter:

$$\text{proj}_M(y) = \text{proj}_M(\mathcal{A}\hat{x}) + \text{proj}_M(v) = \mathcal{A}\hat{x}$$

Logo, segue do Teorema A.1 que  $\hat{x}$  é solução da equação normal. Em particular,  $\mathcal{U}(y)$  é não-vazio.

(II) Que o conjunto  $\mathcal{U}(y)$  é convexo (fechado) é uma consequência imediata da linearidade (continuidade) do operador  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ .

■

**Observação A.3.** Nem sempre temos que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = Y$ . Caso  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y$  seja um subespaço fechado, então temos a igualdade. Do contrário, podemos apenas afirmar que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$  é um subespaço denso de  $Y$ .

■

Vejamos o que obtemos até aqui. Para que o sistema  $\mathcal{A}x = y$  admita uma solução no sentido usual, precisamos que  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Agora, para que este mesmo sistema admita uma solução de mínimos quadrados, precisamos que  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Portanto, ao mudarmos o que aceitamos como solução, conseguimos atribuir resultados ao problema dentro de um conjunto maior. No entanto, não temos unicidade para este novo tipo de solução. Garantimos a unicidade se adotarmos algum critério de escolha, de forma que exista uma única solução que atenda tal critério. A proposição a seguir nos fornece uma saída para este problema.

**Proposição A.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  e  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Considere o conjunto  $\mathcal{U}(y)$  como definido no Teorema A.2. Então, existe um único vetor de norma mínima em  $\mathcal{U}(y)$ . Ou seja, existe  $\hat{x} \in \mathcal{U}(y)$  tal que para todo  $x \in \mathcal{U}(y)$  distinto de  $\hat{x}$  temos  $\|\hat{x}\| < \|x\|$ .

**Prova:**

Considere a função  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = 1/2 \|x\|^2$  e o problema de minimização:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar:}} \quad F(x) \\ & \text{sujeito a:} \quad x \in \mathcal{U}(y) \end{aligned}$$

Como  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ , sabemos que  $\mathcal{U}(y)$  é não-vazio, convexo e fechado. Além disso, temos que  $F$  é contínua, estritamente convexa e coerciva. Logo, o problema  $(\mathcal{P})$  admite uma única solução (veja Corolário 2.13).

■

Assim, para cada  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp \subseteq Y$  temos uma maneira de associar um único elemento  $\hat{x} \in \mathcal{U}(y) \subseteq X$ . A pseudo-inversa de  $\mathcal{A}$  vem ser justamente o operador que faz tal associação.

**Definição A.5.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Considere o conjunto  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Definimos  $\mathcal{A}^\dagger: \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq Y \rightarrow X$  como sendo o operador que associa cada  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  com o único vetor de norma mínima que é solução da equação normal  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} x = \mathcal{A}^* y$ . O operador  $\mathcal{A}^\dagger$  é chamado de *pseudo-inversa* (ou *inversa de Moore-Penrose*) de  $\mathcal{A}$ . O vetor  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  é chamado de *solução de norma mínima* para o sistema  $\mathcal{A} x = y$ .

■

Se  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ , então  $\mathcal{N}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado de  $X$  e podemos fazer a decomposição  $X = \mathcal{N}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Sejam  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  e  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ . Então,  $x^\dagger$  não possui componente em  $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ . De fato, escreva  $x^\dagger = \hat{x} + z$ , onde  $\hat{x} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  e  $z \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Observe que  $\mathcal{A}^* y = \mathcal{A}^* \mathcal{A} x^\dagger = \mathcal{A}^* \mathcal{A} \hat{x}$ . Como  $x^\dagger$  é a solução de norma mínima da equação normal, segue que  $z = \theta$ . Além disso, note que o conjunto  $\mathcal{U}(y)$  é uma translação do conjunto solução da equação homogênea  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} x = \theta$ , e tal conjunto é simplesmente  $\mathcal{N}(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Esta translação é feita precisamente por  $x^\dagger$ , ou seja, temos que  $\mathcal{U}(y) = x^\dagger + \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . De fato, se  $\hat{x} \in \mathcal{U}(y)$ , então de  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} \hat{x} = \mathcal{A}^* y = \mathcal{A}^* \mathcal{A} x^\dagger$  obtemos  $\mathcal{A}^* (\mathcal{A} (\hat{x} - x^\dagger)) = \theta$ . Assim,  $(\hat{x} - x^\dagger) \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ , pois  $\mathcal{A} (\hat{x} - x^\dagger) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{A}^*) = \{\theta\}$ . Daí, basta considerar a decomposição trivial  $\hat{x} = x^\dagger + (\hat{x} - x^\dagger)$ . Como a outra inclusão é imediata, ao todo provamos o seguinte resultado:

**Teorema A.6.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  e  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ . Considere o conjunto  $\mathcal{U}(y)$  como definido no Teorema A.2 e o vetor  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ . Então, temos que  $x^\dagger \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  e também que  $\mathcal{U}(y) = x^\dagger + \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Em particular,  $x^\dagger$  é a única solução da equação normal que pertence ao subespaço  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ .

■

Apresentaremos agora dois importantes teoremas.

**Teorema A.7.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Então,  $\mathcal{A}^\dagger$  possui as seguintes propriedades:

- I.  $\mathcal{A}^\dagger$  está definido em todo o espaço  $Y$  se, e somente se,  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado.
- II.  $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ .
- III.  $\mathcal{N}(\mathcal{A}^\dagger) = \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ .

IV.  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear.

V.  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínuo se, e somente se,  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado.

**Prova:**

(I) Se  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y$  for um subespaço fechado, então sabemos que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = Y$ . Reciprocamente, assumamos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = Y$ . Tome  $\bar{v} \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp\perp}$  qualquer e faça a decomposição  $\bar{v} = v + \hat{v}$ , onde  $v \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  e  $\hat{v} \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Daí, temos:

$$0 = \langle \bar{v}, \hat{v} \rangle = \langle v, \hat{v} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle$$

Assim,  $\hat{v} = \theta$  e, por consequência,  $\bar{v} \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Logo,  $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$  e temos que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado.

(II) Do Teorema A.6, temos que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Agora, tome  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  qualquer e considere o vetor  $y = \mathcal{A}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ . Neste caso, é evidente que  $x \in \mathcal{U}(y) = \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Como  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ , então segue que  $x = \mathcal{A}^\dagger y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger)$ .

(III) Tome  $y \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^\dagger)$  qualquer. Sabemos que o vetor  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y = \theta$  é uma solução da equação normal  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y$ . Mas como  $x^\dagger = \theta$  é solução, obtemos que  $\mathcal{A}^* y = \theta$ . Ou seja,  $y \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Assim, temos a primeira inclusão desejada. Reciprocamente, tome  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}^*)$ . Como o vetor  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  é a solução de norma mínima da equação normal  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y = \theta$ , é evidente que temos  $\mathcal{A}^\dagger y = x^\dagger = \theta$  e, portanto,  $y \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^\dagger)$ .

Antes de prosseguirmos com a prova, vamos deduzir um resultado auxiliar: Considere o subespaço fechado  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Então, é válida a seguinte equação de Moore-Penrose (veja o próximo Teorema):

$$\mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger = \text{proj}_M \Big|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)}$$

De fato, tome  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  e considere  $\hat{x} = \mathcal{A}^\dagger y$ . Como  $\hat{x}$  é solução da equação normal  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y$ , segue do Teorema A.1 que  $\mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y = \mathcal{A} \hat{x} = \text{proj}_M(y)$ .

(IV) Primeiramente, perceba que uma consequência do segundo item é que podemos afirmar que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger)$  é um subespaço de  $X$  e que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) \cap \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\theta\}$ . Agora, tome vetores  $y, \bar{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Note que:



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y}) &= \lambda \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger \bar{y} \\
&= \lambda \text{proj}_M(y) + \text{proj}_M(\bar{y}) \\
&= \text{proj}_M(\lambda y + \bar{y}) \\
&= \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y}) \\
&= \mathcal{A}(\mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y}))
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que  $(\lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y} - \mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y})) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) \cap \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\theta\}$ . Ou seja, temos  $\mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y}) = \lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y}$ .

(V)

( $\Rightarrow$ ) Assuma que  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínuo. Do item anterior, temos que  $\mathcal{A}^\dagger$  é um operador linear e contínuo definido num subespaço denso de  $Y$ . Assim, existe uma extensão linear e contínua  $\mathcal{S}: Y \rightarrow X$  de  $\mathcal{A}^\dagger$ . Como  $\mathcal{A}$  também é contínuo, temos que  $\mathcal{A}\mathcal{S}: Y \rightarrow Y$  é contínuo. Considere o subespaço fechado  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Lembre que o operador  $\text{proj}_M: Y \rightarrow Y$  é contínuo. Além disso, perceba que:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \mathcal{A}\mathcal{S}y = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y = \text{proj}_M(y)$$

Então,  $\mathcal{A}\mathcal{S}$  e  $\text{proj}_M$  são operadores contínuos que coincidem num subconjunto denso. Logo, eles coincidem em todo o espaço. Daí,  $\mathcal{A}\mathcal{S} = \text{proj}_M$  e disto obtemos que:

$$\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = M = \mathcal{R}(\text{proj}_M) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$$

Logo,  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado.

( $\Leftarrow$ ) Assuma que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado. Pelo primeiro item temos  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = Y$ . Queremos mostrar que  $\mathcal{A}^\dagger: Y \rightarrow X$  é contínuo. Como já sabemos que  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear, então basta mostrar que  $\mathcal{A}^\dagger$  é limitado. Perceba que  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \subseteq X$  e  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y$  são ambos subespaços fechados e, portanto, ambos são completos. Defina o operador:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}: \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}) \\
x &\longmapsto \mathcal{A}x
\end{aligned}$$

Daí,  $\widehat{\mathcal{A}}$  é bijetivo, linear e contínuo. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que  $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  é limitado. Além disso, como sabemos que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ , então para  $y \in Y$  fica bem definida a expressão  $\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y$ . Agora, podemos fazer a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
 \forall y \in Y, \|\mathcal{A}^\dagger y\| &= \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y)\| \\
 &\leq \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y\| \\
 &= \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y\|
 \end{aligned}$$

Considere o subespaço fechado  $M = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Dado  $y \in Y$  qualquer, fazemos a decomposição  $y = \text{proj}_M(y) + \text{proj}_{M^\perp}(y)$ . Perceba que:

$$\|y\| \geq \|\text{proj}_M(y)\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y\| \geq \frac{1}{\|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\|} \|\mathcal{A}^\dagger y\|$$

Logo, temos que:

$$\|\mathcal{A}^\dagger\| = \sup_{y \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}^\dagger y\|}{\|y\|} \leq \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| < \infty$$

Assim,  $\mathcal{A}^\dagger$  é limitado e temos o resultado desejado. ■

**Teorema A.8.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Sejam  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$  e  $W = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Então,  $\mathcal{A}^\dagger$  é caracterizado como sendo o único operador que satisfaz as quatro equações de Moore-Penrose:

**MP1**  $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \text{proj}_M \Big|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)}$

**MP2**  $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \text{proj}_W$

**MP3**  $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{A}$

**MP4**  $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger$

**Prova:**

Primeiramente, vamos mostrar que  $\mathcal{A}^\dagger$  satisfaz as quatro equações de Moore-Penrose.

(MP1) Já foi mostrado no Teorema anterior.

(MP2) Note que os domínios e contradomínios coincidem. Agora, tome  $x \in X$  qualquer e considere o vetor  $y = \mathcal{A}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ . Neste caso, é evidente que  $x \in \mathcal{U}(y) = \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Logo, seja  $x = \mathcal{A}^\dagger y + \widehat{x}$ , onde  $\widehat{x} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Daí, obtemos que  $\text{proj}_W(x) = \mathcal{A}^\dagger y = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}x$ . Como  $x \in X$  foi arbitrário, temos o resultado.

(MP3) Note que os domínios e contradomínios coincidem. Agora, tome  $x \in X$  qualquer e faça a decomposição  $x = \text{proj}_W(x) + \text{proj}_{W^\perp}(x)$ . Combinando (MP2) com o fato de que  $W^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}(\text{proj}_{W^\perp}(x)) = \theta$ , obtemos:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\text{proj}_W(x)) = \mathcal{A}x$$

Como  $x \in X$  foi arbitrário, temos o resultado.

(MP4) Note que os domínios e contradomínios coincidem. Agora, tome  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  qualquer e faça a decomposição  $y = \text{proj}_M(y) + \text{proj}_{M^\perp}(y)$ . Usando a linearidade de  $\mathcal{A}^\dagger$ , (MP1) e o fato de que  $M^\perp \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}^\dagger) \Rightarrow \mathcal{A}^\dagger(\text{proj}_{M^\perp}(y)) = \theta$ , obtemos:

$$\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y = \mathcal{A}^\dagger(\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y) = \mathcal{A}^\dagger(\text{proj}_M(y)) = \mathcal{A}^\dagger y$$

Como  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  foi arbitrário, temos o resultado.

Para provar a unicidade, seja  $\mathcal{S}: \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp \subseteq Y \rightarrow X$  um operador que satisfaz (MP1) — (MP4). Tome  $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$  qualquer e seja  $\hat{x} = \mathcal{S}y$ . Vamos verificar que  $\mathcal{S}y = \mathcal{A}^\dagger y$  mostrando que  $\hat{x}$  é uma solução da equação normal  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*y$  que está no subespaço  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Que  $\hat{x} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp = W$  segue de  $\mathcal{S}y = \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}y = \text{proj}_W(\mathcal{S}y)$ . Agora, faça a decomposição  $y = \text{proj}_M(y) + \text{proj}_{M^\perp}(y)$ . Como  $M^\perp \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}^*)$ , temos que  $\mathcal{A}^*(\text{proj}_{M^\perp}(y)) = \theta$ . Assim,  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{S}y = \mathcal{A}^*(\text{proj}_M(y)) = \mathcal{A}^*y$ . ■

Considerando tudo o que foi discutido até agora, suponha que  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  tenha a imagem fechada. Sendo assim, temos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = Y$  e  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínuo. Logo, para cada  $y \in Y$  temos uma maneira de atribuir uma única solução ao sistema  $\mathcal{A}x = y$  de forma que tal solução dependa continuamente de  $y$ . De fato, basta tomar  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  como solução. Portanto, ao generalizarmos o conceito de solução, conseguimos garantir todas as condições (H1), (H2) e (H3), porém de uma forma menos restritiva do que a que foi exposta na Definição 1.1, pois neste caso só precisamos que a imagem de  $\mathcal{A}$  seja fechada. Tal forma de classificar um problema como bem-posto foi proposta por Nashed (1987).

**Definição A.9.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dizemos que o sistema  $\mathcal{A}x = y$  é *bem-posto* (no sentido de Nashed) se  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado de  $Y$ . Caso o sistema não seja bem-posto, então este é chamado de *mal-posto*. ■

**Convenção A.10.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Daqui em diante, sempre que mencionarmos que  $\mathcal{A}x = y$  é um sistema mal-posto, tal afirmação deve ser interpretada no sentido de Nashed. ■

Terminamos esta seção mostrando que apesar dos nossos esforços em generalizar o conceito de um sistema bem-posto, os problemas em que o operador é compacto continuam sendo, em geral, mal-postos.

**Teorema A.11.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Então,  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado se, e somente se,  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão finita.

**Prova:**

Se  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão finita, então sabemos que é um subespaço fechado. Reciprocamente, suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é um subespaço fechado. Neste caso, observe que  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \subseteq X$  e  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y$  são ambos subespaços fechados e, portanto, ambos são completos. Considere o operador:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}: \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto \mathcal{A}x \end{aligned}$$

Daí,  $\widehat{\mathcal{A}}$  é bijetivo, linear e compacto. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que  $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  é limitado. Assim,  $\text{id}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  é compacto, pois é a composição de um operador compacto com um limitado. Sendo  $\text{id}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$  compacto, segue que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão finita. ■

**Corolário A.12.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Então, o sistema  $\mathcal{A}x = y$  é mal-posto. ■

## A.2 Métodos de Regularização para Problemas Lineares

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Por um *operador de reconstrução* para resolver o sistema  $\mathcal{A}x = y$ , entendemos um operador contínuo (não necessariamente linear)  $\mathcal{R}: Y \rightarrow X$  satisfazendo  $\mathcal{R}(\theta) = \theta$ . Uma vez que dispomos de um operador de reconstrução  $\mathcal{R}$ , podemos tomar (de forma estável)  $\widehat{x} = \mathcal{R}y$  como uma solução do problema inverso.

É desejável que façamos a escolha  $\mathcal{R} = \mathcal{A}^\dagger$  como operador de reconstrução, mas tal escolha é estável (e também, está definida em todo o espaço  $Y$ ) somente no caso em que o sistema é bem-posto. Quando o sistema é mal-posto, a estratégia é aproximar  $\mathcal{A}^\dagger$  por uma família  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$  de operadores de reconstrução estáveis. A vantagem dessa abordagem é que estamos trocando um sistema mal-posto por uma família de sistemas bem-postos, o que nos permite calcular uma aproximação para a solução do problema inverso na presença

de ruídos. Para  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  e uma versão com ruídos  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ , queremos ser capazes de extrair uma família de elementos do conjunto  $(\mathcal{R}_\alpha y^\delta)_{\alpha > 0}$  que se aproxime de  $\mathcal{A}^\dagger y$  assintoticamente com o nível de ruídos decrescente. Ou seja, queremos selecionar um subconjunto  $(\alpha = \alpha(\delta, y^\delta))_{\delta > 0}$  do conjunto de parâmetros  $\alpha > 0$  para o qual se aplica  $\|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ . A escolha de parâmetros deve ser possível para todo  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  e a convergência do erro deve ocorrer uniformemente em uma bola fechada centrada em  $y$  (conjunto onde assumimos que estão os vetores  $y^\delta$ ). Resumimos nossas considerações na definição dos métodos de regularização.

**Definição A.13.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Seja  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$  uma família de operadores de reconstrução. Se existir uma função  $\alpha: (0, \infty) \times Y \rightarrow (0, \infty)$  tal que para todo  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  temos:

$$\sup \left\{ \alpha(\delta, y^\delta) \mid y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.3})$$

$$\sup \left\{ \left\| \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y \right\| \mid y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.4})$$

então o par  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$  é chamado de *método de regularização* para o operador  $\mathcal{A}^\dagger$ . Falamos de *regularização linear* se todos os  $\mathcal{R}_\alpha$  forem lineares. A função  $\alpha$  é chamada de *escolha de parâmetro* e o valor numérico  $\alpha(\delta, y^\delta)$  é chamado de *parâmetro de regularização*. Se  $\alpha$  depende apenas de  $\delta$ , então falamos de uma escolha de parâmetro *a priori*, e caso contrário, de uma escolha de parâmetro *a posteriori*. ■

**Observação A.14.** Podemos restringir os valores que o parâmetro  $\alpha > 0$  atinge. Isto é, podemos assumir que  $\alpha \in S \subseteq (0, \infty)$ , onde  $S$  é tal que zero é um ponto de acumulação deste conjunto, de forma que faça sentido fazer o limite  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Por exemplo, podemos considerar o conjunto discreto  $S = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ . Em geral, vamos formular definições e enunciar resultados para  $S = (0, \infty)$ , mas que fique implícito que sempre é possível fazer tal restrição. ■

Uma consequência de (A.4) é a convergência do limite:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y)} y - \mathcal{A}^\dagger y \right\| = 0 \quad (\text{A.5})$$

Definindo o conjunto  $\Lambda = \{\alpha(\delta, y) \mid \delta > 0, y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)\}$ , resumimos todos os parâmetros de regularização que desempenham um papel no limite em (A.5). Por causa de (A.3), temos que zero é ponto de acumulação de  $\Lambda$ . Além disso, temos que (A.5) implica em:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \Lambda}} \|\mathcal{R}_\lambda y - \mathcal{A}^\dagger y\| = 0 \quad (\text{A.6})$$

Ao todo, provamos o seguinte resultado:

**Proposição A.15.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Seja  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$  um método de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$ . Então, a subfamília  $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  converge pontualmente em  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  para  $\mathcal{A}^\dagger$  quando  $\lambda \rightarrow 0^+$ . ■

No caso geral em que temos descontinuidade de  $\mathcal{A}^\dagger$ , tal convergência pontual implica no caráter ilimitado de toda regularização linear para  $\mathcal{A}^\dagger$ .

**Proposição A.16.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Seja  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$  um método de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$ . Se a imagem de  $\mathcal{A}$  não é fechada em  $Y$ , então o conjunto  $(\|\mathcal{R}_\alpha\|)_{\alpha > 0}$  não é limitado superiormente.

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 54). ■

O erro de reconstrução  $\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\|$  de uma regularização linear é composto pelo erro de dados e pelo erro de aproximação:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| &\leq \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{R}_\alpha y\|}_{\text{erro de dados}} + \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\|}_{\text{erro de aproximação}} \\ &\leq \delta \|\mathcal{R}_\alpha\| + \|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A estimativa acima é geralmente precisa, ou seja, não muito pessimista. Quando o parâmetro  $\alpha > 0$  tende a zero, temos que o erro de aproximação tende a zero. Por outro lado, o erro de dados fica arbitrariamente grande. Em geral, o erro de reconstrução explode tanto para  $\alpha \rightarrow 0^+$  quanto para  $\alpha \rightarrow \infty$ . A questão que se coloca é a escolha do parâmetro de regularização ótimo, que se caracteriza por minimizar o erro de reconstrução na medida em que atinge o equilíbrio entre os erros de aproximação e de dados.

Note que na Definição A.13 discutimos a possibilidade de  $\alpha$  não depender de  $y^\delta$ . Daí, é natural nos perguntarmos: Seria possível  $\alpha$  não depender de  $\delta$ ? No caso em que o problema é mal-posto, a resposta é negativa, como mostra a proposição a seguir.

**Teorema A.17** (Veto de Bakushinskii). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Então, existe um método de regularização  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  para  $\mathcal{A}^\dagger$  tal que  $\alpha$  não depende de  $\delta$  se, e somente se,  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ .

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Assuma a existência de tal método de regularização. Como  $\alpha$  não depende de  $\delta$ , escrevemos  $\alpha = \alpha(y^\delta)$ . Fixe uma sequência  $(\delta_k)_{k=1}^\infty \subseteq (0, \infty)$  satisfazendo  $\delta_k \rightarrow 0^+$ . Segue de (A.4) que para todo  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  temos que:

$$\sup \left\{ \left\| \mathcal{R}_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y \right\| \mid y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.8})$$

Em particular, para todo  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  obtemos  $\mathcal{R}_{\alpha(y)} y = \mathcal{A}^\dagger y$ . Seja  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  arbitrário e tome uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Queremos mostrar que  $\mathcal{A}^\dagger y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$  para concluir a continuidade de  $\mathcal{A}^\dagger$ . Tome uma subsequência  $(\mathcal{A}^\dagger y_{n_k})$  tal que  $\|y - y_{n_k}\| \leq \delta_k$  para todo  $k \geq 1$ . Segue de (A.8) que  $\mathcal{R}_{\alpha(y_{n_k})} y_{n_k} = \mathcal{A}^\dagger y_{n_k} \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Repetindo este procedimento, mostramos que toda subsequência de  $(\mathcal{A}^\dagger y_n)$  possui ela própria uma subsequência convergindo para  $\mathcal{A}^\dagger y$ . Logo,  $\mathcal{A}^\dagger y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$ . Assim,  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínua e, portanto,  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ .

( $\Leftarrow$ ) Assuma que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Neste caso, sabemos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = Y$  e que  $\mathcal{A}^\dagger: Y \rightarrow X$  é contínua. Para qualquer função  $\alpha$  que não dependa de  $\delta$ , faça  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{A}^\dagger$  que temos um método de regularização. ■

### A.3 Erro do Pior Caso

Suponha que temos disponíveis dois métodos de regularização distintos. Queríamos ter algum critério que nos permitisse classificar um método como superior ao outro. Um critério útil seria a velocidade de convergência do erro em (A.4). Infelizmente, essa convergência é arbitrariamente lenta, para todos os métodos de regularização.

**Teorema A.18.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Seja  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  um método de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$ . Se a imagem de  $\mathcal{A}$  não é fechada em  $Y$ , então **não** existe uma função  $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} h(\delta) = 0$  de modo que mantenha a desigualdade:

$$\sup \left\{ \left\| \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y \right\| \mid y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \|y\| \leq 1, y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \leq h(\delta)$$

para todo  $\delta > 0$ .

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 55). ■

O resultado acima mostra que, com o que foi exposto até aqui, não é possível determinarmos a velocidade de convergência de um método de regularização. Teremos informações sobre essa velocidade uma vez que possuímos condições de fonte, isto é, informações adicionais sobre a solução.

Para exemplificar a necessidade de introduzirmos condições de fonte, vamos adaptar uma discussão feita por Baumeister e Leitão (2005, pg. 12). Suponha que  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  é injetivo, de forma que podemos inverter sobre a imagem. Assuma que o operador  $\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y \rightarrow X$  não é contínuo. Para um vetor de dados sem ruídos  $y^e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , seja  $x^e = \mathcal{A}^{-1}y^e$  a solução exata do sistema  $\mathcal{A}x = y^e$ . Agora, seja  $y^\delta = y^e + \xi$  um vetor com ruídos, onde  $\|\xi\| \leq \delta$ . Nosso objetivo é: Baseados em  $y^\delta$ , determinar uma boa aproximação  $x^\delta$  para  $x^e$ . Não podemos afirmar que  $y^\delta \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  e, mesmo que esse fosse o caso, tomar  $x^\delta = \mathcal{A}^{-1}y^\delta$  como aproximação para  $x^e$  não é uma boa abordagem, pois  $\mathcal{A}^{-1}$  não é contínuo. Primeiramente, vamos considerar o seguinte problema de reconstrução:

$$\text{Encontre } x^\delta \text{ tal que } x^\delta \in M \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta\} \quad (\text{A.9})$$

Como  $\mathcal{A}^{-1}$  não é contínuo, não temos garantia que o conjunto  $M$  seja limitado. Assim, um vetor  $x^\delta$  satisfazendo (A.9) pode ser uma péssima aproximação para  $x^e$ . Como forma de “encolher” o conjunto  $M$ , assumimos uma informação *a priori* sobre a solução exata: Adicionamos a restrição que  $x^e \in S$ , onde  $S \subseteq X$  é um conjunto limitado. O conjunto  $S$  será denominado de *conjunto fonte*, e a afirmação “ $x^e \in S$ ” será denominada de *condição de fonte*. Assim, reformulamos o problema de reconstrução (A.9) como:

$$\text{Encontre } x^\delta \text{ tal que } x^\delta \in M_S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in S, \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta\} \quad (\text{A.10})$$

Agora,  $M_S$  é limitado e para todo vetor  $x^\delta$  satisfazendo a condição (A.10) temos a estimativa  $\|x^\delta - x^e\| \leq \text{diam}(M_S)$ .

Usualmente será o caso em que vamos resolver o problema (A.10) utilizando um operador de reconstrução  $\mathcal{R}$ . Assim, nossa aproximação tem a forma  $x^\delta = \mathcal{R}y^\delta$ . Agora, nos perguntamos: Qual é o pior erro de reconstrução possível que podemos obter quando temos condições de fonte sobre a solução, porém os dados estão corrompidos por ruídos? A resposta é dada pelo supremo:

$$E(\delta, S, \mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \|\mathcal{R}y^\delta - x\| \mid x \in S, y^\delta \in Y, \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta \right\} \quad (\text{A.11})$$



que chamamos de “pior erro” associado ao operador  $\mathcal{R}$ . Quanto menor for  $E(\delta, S, \mathcal{R})$ , mais adequado será o método de reconstrução. Então, nos preocupamos com o “melhor pior erro”, que chamamos de *erro do pior caso* (*worst case error*):

$$E(\delta, S) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ E(\delta, S, \mathcal{R}) \mid \mathcal{R}: Y \longrightarrow X \text{ é contínuo e satisfaz } \mathcal{R}(\theta) = \theta \right\} \quad (\text{A.12})$$

Podemos dizer então que um operador de reconstrução  $\mathcal{R}$  é ótimo se  $E(\delta, S, \mathcal{R}) = E(\delta, S)$ .

O conjunto fonte  $S$  pode ser escolhido de diversas maneiras. É comum tomarmos ele da forma  $S = \{x \in X \mid x \in X_a, \|x\|_a \leq \rho\}$ , onde  $\rho > 0$  é uma constante,  $X_a \subseteq X$  é um subespaço de  $X$  e  $\|\cdot\|_a$  é uma norma definida em  $X_a$  que vem a ser mais forte do que a norma original do espaço, isto é, existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\|x\| \leq c\|x\|_a$ , para todo  $x \in X_a$ .

Vamos estudar o caso particular em que  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita, do contrário segue do Teorema A.11 que o sistema  $\mathcal{A}x = y$  é bem-posto. Consideramos os espaços:

$$\forall s \geq 0, X_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(|\mathcal{A}|^s) = \left\{ |\mathcal{A}|^s z \mid z \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \right\} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$$

onde  $|\mathcal{A}| = (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/2}$  (veja Apêndice B.2 para detalhes). Na medida em que o índice aumenta os espaços ficam cada vez menores, e o maior espaço é  $X_0 = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . De fato, se  $s > r \geq 0$ , então segue que  $|\mathcal{A}|^s = |\mathcal{A}|^r \circ |\mathcal{A}|^{s-r}$  e, portanto,  $X_s \subseteq X_r$ . Vale ressaltar que  $X_1 = \mathcal{R}(\mathcal{A}^*)$  e  $X_2 = \mathcal{R}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$ .

Seja  $x = |\mathcal{A}|^s z$ , onde  $z \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Podemos usar a decomposição em valores singulares de  $\mathcal{A}$  (Corolário B.18) para obter a representação:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^s \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Disto obtemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle x, \varphi_n \rangle|^2}{\mu_n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{2s} |\langle z, \varphi_n \rangle|^2}{\mu_n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \varphi_n \rangle|^2 = \|z\|^2 < \infty$$

Essa relação motiva e permite a definição da norma  $\|\cdot\|_s$  no espaço  $X_s$ :

$$\|x\|_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle x, \varphi_n \rangle|^2}{\mu_n^{2s}} = \|z\|^2 \quad (\text{A.13})$$

Note que  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$ . Se  $s > 0$  e  $x \in X_s$ , então  $\|x\| \leq \|\mathcal{A}\|^s \|x\|_s$  e, portanto,  $\|\cdot\|_s$  é mais forte que a norma original. Ainda, observe que os espaços  $X_s$  admitem a seguinte caracterização:

$$X_s = \{x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \mid \|x\|_s < \infty\}$$

Para o conjunto fonte  $S = \{x \in X \mid x \in X_s, \|x\|_s \leq \rho\}$ , vamos usar as seguintes notações:

$$E_s(\delta, \rho, \mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \|\mathcal{R}y^\delta - x\| \mid x \in X_s, \|x\|_s \leq \rho, y^\delta \in Y, \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta \right\}$$

$$E_s(\delta, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ E_s(\delta, \rho, \mathcal{R}) \mid \mathcal{R}: Y \longrightarrow X \text{ é contínuo e satisfaz } \mathcal{R}(\theta) = \theta \right\}$$

$$e_s(\delta, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \|x\| \mid x \in X_s, \|x\|_s \leq \rho, \|\mathcal{A}x\| \leq \delta \right\}$$

**Teorema A.19.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Então, segue que  $E_s(\delta, \rho) = e_s(\delta, \rho)$ .

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 58). ■

A importância do Teorema A.19 está no fato de que o cálculo do erro  $e_s(\delta, \rho)$  é independente de qualquer método de reconstrução. Ou seja, sem conhecer nem mesmo um método de reconstrução sequer, podemos estimar o tamanho do erro do pior caso baseados na condição de fonte adotada.

Para um dado  $\rho > 0$ , naturalmente gostaríamos que  $e_s(\delta, \rho) \longrightarrow 0$  quando  $\delta \longrightarrow 0^+$ . O próximo resultado mostra que não temos essa convergência para o espaço  $X_0$  que está equipado com a norma original. Ou seja, existe a necessidade de tomarmos uma norma mais forte.

**Proposição A.20.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Então, para cada  $\rho > 0$ , existem constantes  $c_0 > 0$  e  $\delta_0 > 0$  tais que para todo  $\delta \in (0, \delta_0)$ , temos que  $e_0(\delta, \rho) \geq c_0$ .

**Prova:** (Adaptada de Kirsch (2021, p. 14))

Seja  $\rho > 0$  arbitrário, porém fixo. Suponha, por absurdo, que a afirmação é falsa. Neste caso, existem sequências  $(\delta_k)_{k=1}^\infty \subseteq (0, \infty)$  satisfazendo  $\delta_k \longrightarrow 0^+$  e  $e_0(\delta_k, \rho) \longrightarrow 0$  quando  $k \longrightarrow \infty$ . Fixe uma sequência  $(\delta_k)$  com tais propriedades. Considere o operador:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{A}}: \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto \mathcal{A}x\end{aligned}$$

Seja  $(\mathcal{A}x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$  (onde  $x_n \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ ) tal que  $\mathcal{A}x_n \rightarrow \theta$ . Queremos mostrar que  $x_n \rightarrow \theta$  para concluir a continuidade de  $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  na origem e, portanto, a continuidade de  $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  em todo o domínio. Tome uma subsequência  $(\mathcal{A}x_{n_k})$  tal que  $\|\mathcal{A}x_{n_k}\| \leq \delta_k$  para todo  $k \geq 1$ . Definimos:

$$z_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_{n_k} & \text{se } \|x_{n_k}\| \leq \rho \\ \frac{\rho}{\|x_{n_k}\|} x_{n_k} & \text{se } \|x_{n_k}\| > \rho \end{cases}$$

Daí, temos  $\|z_k\| \leq \rho$  e  $\|\mathcal{A}z_k\| \leq \delta_k$  para todo  $k \geq 1$ . Portanto,  $\|z_k\| \leq e_0(\delta_k, \rho) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim, para  $k \geq 1$  suficientemente grande temos que  $z_k = x_{n_k}$ . Ou seja,  $x_{n_k} \rightarrow \theta$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Repetindo este procedimento, mostramos que toda subsequência de  $(x_n)$  possui ela própria uma subsequência convergindo para  $\theta$ . Logo,  $x_n \rightarrow \theta$ . Assim,  $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  é contínuo e  $\text{id}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{A}}^{-1}$  é compacto, pois é a composição de um operador compacto com um limitado. Porém, como  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita, a identidade não poderia ser um operador compacto neste espaço, daí a contradição. ■

No entanto, quando  $s > 0$  temos a convergência desejada de  $e_s(\delta, \rho)$ , como mostra a próxima proposição.

**Proposição A.21.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Sejam  $s > 0$  e  $\rho > 0$  arbitrários. Então, para todo  $\delta > 0$  é válida a seguinte estimativa:

$$e_s(\delta, \rho) \leq \rho^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \tag{A.14}$$

Além disso, existe uma sequência  $\delta_n \rightarrow 0^+$  satisfazendo:

$$\forall n \geq 1, e_s(\delta_n, \rho) = \rho^{1/(s+1)} \delta_n^{s/(s+1)}$$

Ou seja, a estimativa feita em (A.14) não pode ser melhorada.

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 59). ■

Considerando a Proposição A.21, vemos que a taxa de convergência do erro do pior caso quando  $\delta \rightarrow 0^+$  de um método de regularização não pode ser melhor do que a ordem de  $\mathcal{O}(\delta^{s/(s+1)})$  quando assumimos a condição de fonte  $x^e \in X_s$ . Apresentamos agora o conceito de um método de ordem ótima.

**Definição A.22.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Dizemos que uma família de métodos de reconstrução  $(\mathcal{T}_\delta)_{\delta > 0}$  é de *ordem ótima* (com relação à  $\mathcal{A}$  e  $X_s$ ), se existir uma constante  $c_s \geq 1$  de modo que para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e para todo  $\rho > 0$ , temos que:

$$E_s(\delta, \rho, \mathcal{T}_\delta) \leq c_s \rho^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)}$$

Se a estimativa acima for satisfeita com a constante  $c_s = 1$ , então falamos que a família de métodos de reconstrução é *ótima*. ■

Os métodos de regularização  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$  formam uma família de métodos de reconstrução:  $\mathcal{T}_\delta y \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y)} y$ . Os conceitos de otimalidade apresentados acima são, portanto, também definidos para métodos de regularização.

## A.4 Construindo Métodos de Regularização

Vamos discutir como podemos gerar métodos de regularização para um operador  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  linear e compacto, onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Hilbert. Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita, do contrário segue do Teorema A.11 que o sistema  $\mathcal{A}x = y$  é bem-posto. Se  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ , então pelo Teorema B.19 temos:

$$\mathcal{A}^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n \quad (\text{A.15})$$

onde  $\mu_n > 0$  é a sequência de valores singulares de  $\mathcal{A}$  a qual satisfaz  $\mu_n \rightarrow 0^+$ . A construção de métodos de regularização é então baseada em filtros capazes de controlar os coeficientes  $1/\mu_n$ . Primeiramente, apresentamos um resultado auxiliar.

**Proposição A.23.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Então, temos que:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \mathcal{A}^\dagger y = (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^\dagger \mathcal{A}^* y$$

**Prova:**

Seja  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  arbitrário. Temos o resultado desejado se mostrarmos que  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $\forall x \in X, \|\mathcal{A}^* \mathcal{A} x^\dagger - \mathcal{A}^* y\| \leq \|\mathcal{A}^* \mathcal{A} x - \mathcal{A}^* y\|$
- $x^\dagger \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^\perp$

Do Teorema A.7, temos que  $x^\dagger \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^\perp$ . Como  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ , fazemos a decomposição  $y = \mathcal{A} \hat{x} + w$ , onde  $w \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ . Considere  $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp\perp}$ . Do Teorema A.8, obtemos que:

$$\|\mathcal{A}^* y - \mathcal{A}^* \mathcal{A} x^\dagger\| = \|\mathcal{A}^* y - \mathcal{A}^*(\text{proj}_M(y))\| = \|\mathcal{A}^* w\| = 0$$

uma vez que  $\text{proj}_M(y) = \mathcal{A} \hat{x}$  e  $\mathcal{A}^* w = \theta$ . ■

Note que a descontinuidade de  $\mathcal{A}^\dagger$  é refletida pela descontinuidade de  $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^\dagger$ . Portanto, vamos tentar estabilizar o operador  $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^\dagger$ . Seja  $\omega = \|\mathcal{A}\|^2$  e considere uma família  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  de funções  $g_\alpha: [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínuas. De (B.4), vemos que para  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  obtemos:

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* y &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\mu_n^2) \langle \mathcal{A}^* y, \varphi_n \rangle \varphi_n + g_\alpha(0) \underbrace{\text{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}^* y)}_{=\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\mu_n^2) \mu_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n \end{aligned} \tag{A.16}$$

Comparando (A.15) e (A.16), vemos que se para todo  $t \in (0, \omega]$  tivermos que  $g_\alpha(t) \rightarrow 1/t$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , então  $g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^\dagger$  pontualmente em  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

Nossa intenção é tomarmos  $\mathcal{R}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^*$  como operadores de reconstrução. Para encontrarmos uma escolha de parâmetro que torne a família  $(\mathcal{R}_\alpha)$  um método de regularização, precisamos estimar o erro de aproximação  $\|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\|$ . Para um dado  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ , note que  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y = \mathcal{A}^* \mathcal{A} x^\dagger = \mathcal{A}^* y$ . Disto obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger y - \mathcal{R}_\alpha y &= \mathcal{A}^\dagger y - g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* y \\ &= \mathcal{A}^\dagger y - g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y \\ &= (\text{id}_X - g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^\dagger y \\ &= r_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^\dagger y \end{aligned}$$

onde  $r_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - t g_\alpha(t)$ . Caso a expressão  $t |g_\alpha(t)|$  se manter limitada para quaisquer  $t \in [0, \omega]$  e  $\alpha > 0$ , vamos obter que  $r_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$  é um operador limitado. Após essa discussão inicial, definimos:

**Definição A.24.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$  e  $\omega = \|\mathcal{A}\|^2$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Uma família  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  de funções  $g_\alpha: [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínuas é denominada um *filtro de regularização* para  $\mathcal{A}^\dagger$  se satisfazer as seguintes propriedades:

- I. Para qualquer  $t \in (0, \omega]$ , temos que  $g_\alpha(t) \rightarrow 1/t$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ .
- II. Existe uma constante  $C > 0$  tal que para quaisquer  $t \in [0, \omega]$  e  $\alpha > 0$ , temos que  $t |g_\alpha(t)| \leq C$ .

■

**Teorema A.25.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Seja  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  um filtro de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$  e considere os operadores  $\mathcal{R}_\alpha = g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^*$ . Então, temos que:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{R}_\alpha y = \mathcal{A}^\dagger y$$

Além disso, se  $y \notin \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  então  $\|\mathcal{R}_\alpha y\| \rightarrow \infty$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 62).

■

**Teorema A.26.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Seja  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  um filtro de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$  e considere os operadores  $\mathcal{R}_\alpha = g_\alpha(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \mathcal{A}^*$ . Sejam  $y, y^\delta \in Y$  tais que  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Sejam  $x^\alpha = \mathcal{R}_\alpha y$  e  $x^{\alpha, \delta} = \mathcal{R}_\alpha y^\delta$ . Sob tais hipóteses, temos as seguintes estimativas:

$$\|\mathcal{A} x^\alpha - \mathcal{A} x^{\alpha, \delta}\| \leq C \delta \quad \text{e} \quad \|x^\alpha - x^{\alpha, \delta}\| \leq \delta \sqrt{C M(\alpha)}$$

onde:

$$M(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |g_\alpha(t)| \mid t \in [0, \omega] \}$$

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 64).

■

Assim como fizemos em (A.7), decompos o erro de reconstrução nos erros de dados e de aproximação:

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha,\delta} - x^\dagger\| &\leq \underbrace{\|x^{\alpha,\delta} - x^\alpha\|}_{\text{erro de dados}} + \underbrace{\|x^\alpha - x^\dagger\|}_{\text{erro de aproximação}} \\ &\leq \delta \sqrt{C M(\alpha)} + \|x^\alpha - x^\dagger\| \end{aligned}$$

Do Teorema A.25 obtemos que o erro de aproximação tende a zero quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ . No entanto, o erro de dados causa problemas, pois como  $g_\alpha(t) \rightarrow 1/t$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , temos que  $M(\alpha) \rightarrow \infty$  quando  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Portanto, a escolha de parâmetro deve ser feita de forma que seja capaz de estabilizar o erro de dados.

**Corolário A.27.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Seja  $(g_\alpha)_{\alpha>0}$  um filtro de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$  e considere os operadores  $\mathcal{R}_\alpha = g_\alpha(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\mathcal{A}^*$ . Para uma função  $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  satisfazendo:

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ e } \delta^2 M(\alpha(\delta)) \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.17})$$

temos que  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  define um método de regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$ . ■

Apresentaremos dois exemplos de filtros os quais podemos aplicar a teoria que foi desenvolvida no decorrer desta seção. Nos exemplos, considere as hipóteses que  $X$  e  $Y$  são espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$  e que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Além disso,  $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n=1}^\infty$  denota a família descrita no Corolário B.18.

**Exemplo A.28** (Truncamento dos valores singulares). Como sugerido pela nomenclatura, este método é caracterizado por descartar valores singulares de  $\mathcal{A}$  que são muito pequenos. A família de filtros  $(g_\alpha)_{\alpha>0}$  para este método é dada por:

$$g_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t \geq \alpha \\ 0 & \text{se } t < \alpha \end{cases}$$

Note que a família  $(g_\alpha)_{\alpha>0}$  satisfaz as condições listadas na Definição A.24 com  $C = 1$ . Além disso, temos  $M(\alpha) = 1/\alpha$ . Logo, (A.17) pode ser escrita como:

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.18})$$

Por exemplo, a escolha de parâmetro  $\alpha(\delta) = \delta$  pode ser utilizada. Por fim, vemos que  $x^\alpha = \mathcal{R}_\alpha y$  é dado por:

$$x^\alpha = \sum_{\mu_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\mu_n} \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n$$

Ou seja, a representação espectral (A.15) é interrompida após um número finito de passos. A soma leva em consideração apenas os índices  $n \geq 1$  tais que  $\mu_n \geq \sqrt{\alpha}$ .

■

**Exemplo A.29** (Método de Tikhonov-Phillips). Neste método, ao invés de descartarmos os valores singulares que são muito pequenos (como feito no Exemplo A.28), nós os afastamos da origem. Para isso, consideramos a família de filtros  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  dada por:

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{t + \alpha}$$

Note que a família  $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$  satisfaz as condições listadas na Definição A.24 com  $C = 1$ . Além disso, temos  $M(\alpha) = 1/\alpha$ . Logo, (A.17) pode ser escrita como foi feito em (A.18). Observe que  $x^\alpha = \mathcal{R}_\alpha y$  é dado por:

$$x^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \alpha} \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n$$

Dependendo do operador, a determinação da família  $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n=1}^{\infty}$  pode ser um trabalho difícil, mesmo que computacionalmente. Felizmente, o vetor  $x^\alpha$  é também caracterizado como a única solução da seguinte equação:

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} x + \alpha x = \mathcal{A}^* y \tag{A.19}$$

De fato, usando o Corolário B.18 vemos que  $x^\alpha$  é solução de (A.19). Reciprocamente, suponha que  $\hat{x}$  é uma solução de (A.19) e faça a decomposição:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \text{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp}(\hat{x}) + \text{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(\hat{x}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{x}, \varphi_n \rangle \varphi_n + \text{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(\hat{x}) \end{aligned}$$

Substituindo em (A.19), obtemos:



$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 + \alpha) \langle \hat{x}, \varphi_n \rangle \varphi_n + \alpha \operatorname{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(\hat{x}) &= \mathcal{A}^* \mathcal{A} \hat{x} + \alpha \hat{x} \\
 &= \mathcal{A}^* y \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n
 \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{A}^* y \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ , segue que  $\operatorname{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(\hat{x}) = \theta$ . Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\forall n \geq 1, \langle \hat{x}, \varphi_n \rangle = \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \alpha} \langle y, \psi_n \rangle$$

Ou seja, temos que  $\hat{x} = x^\alpha$ . Com isso, concluímos que para obter o vetor  $x^\alpha$  não é necessário determinar a família  $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n=1}^\infty$ . Ao invés disso, calculamos a solução do sistema linear bem-posto (A.19). É também possível mostrar (veja Kirsch (2021, p. 38)) que  $x^\alpha$  é o único minimizador do *funcional de Tikhonov*  $T_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$\forall x \in X, T_\alpha(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2$$

■

# APÊNDICE B – Análise Funcional

## B.1 Teoria Espectral e Decomposição em Valores Singulares

Nesta seção, todos os espaços vetoriais considerados serão espaços complexos.

**Definição B.1.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ . O *espectro* de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\sigma(\mathcal{A})$ , é o conjunto definido por:

$$\sigma(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) \text{ não é bijetivo} \right\}$$

onde  $\mathbf{I}: X \rightarrow X$  é o operador identidade no espaço  $X$ . Definimos também o *espectro pontual* de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\sigma_p(\mathcal{A})$ , como sendo o conjunto:

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\} \right\}$$

Todo escalar  $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$  é denominado um *autovalor* do operador  $\mathcal{A}$ , e todo vetor não-nulo  $v \in \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I})$  é denominado um *autovetor* associado ao autovalor  $\lambda$ . Para simplificar, dizemos que  $(\lambda, v)$  é um *autopar* do operador  $\mathcal{A}$  se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $\mathcal{A}$  e  $v \in X$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . Para  $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ , definimos sua *multiplicidade geométrica* por  $m_g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I})$ , pondo  $m_g(\lambda) = \infty$  se  $\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I})$  é de dimensão infinita. ■

Se  $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ , então  $(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I})$  não é injetivo e, portanto,  $(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I})$  não é bijetivo. Logo, o espectro pontual é um subconjunto do espectro. Se  $X$  é de dimensão finita, então não há distinção entre o espectro e o espectro pontual.

**Proposição B.2.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ . Então, o espectro do operador  $\mathcal{A}$  é um subconjunto não-vazio e compacto do plano complexo. Ainda, temos a inclusão  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|\}$ .

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 245). ■

**Observação B.3.** Para que o espectro  $\sigma(\mathcal{A})$  seja não-vazio, é necessário assumirmos que estamos trabalhando com espaços complexos. De fato, se considerarmos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

então o operador linear em  $\mathbb{R}^2$  associado possui espectro vazio, enquanto que o espectro para o operador em  $\mathbb{C}^2$  é  $\{-i, i\}$ . ■

**Exemplo B.4.** Considere os *operadores shifts*  $\mathcal{S}, \mathcal{T}: \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$  dados por:

$$\mathcal{S}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

É possível mostrar que (veja Kesavan (2009, p. 247)):

- $\mathcal{S}^* = \mathcal{T}$ .
- $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ .
- $\sigma_p(\mathcal{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ .
- $\sigma_p(\mathcal{T}) = \emptyset$ .

Logo, em espaços de dimensão infinita, o espectro de um operador pode ser de diferentes tipos. De fato, para o operador  $\mathcal{S}$  existe uma quantidade não-enumerável de escalares nos conjuntos  $\sigma_p(\mathcal{S})$  e  $\sigma(\mathcal{S}) \setminus \sigma_p(\mathcal{S})$ . Já para o operador  $\mathcal{S}^* = \mathcal{T}$ , existe uma quantidade não-enumerável de escalares no conjunto  $\sigma(\mathcal{T})$ , enquanto que  $\sigma_p(\mathcal{T})$  é vazio. ■

Se o operador  $\mathcal{A}$  for compacto, então situações como as expostas no Exemplo B.4 não podem ocorrer, pois o espectro  $\sigma(\mathcal{A})$  possui propriedades especiais.

**Teorema B.5.** Sejam  $X$  um espaço de Banach de dimensão infinita e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$ . Então, temos que:

- I.  $0 \in \sigma(\mathcal{A})$ .
- II. Todo escalar não-nulo  $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$  é um autovalor de  $\mathcal{A}$  com multiplicidade geométrica finita. Em particular,  $\sigma(\mathcal{A}) = \{0\} \cup \sigma_p(\mathcal{A})$ .
- III. Se  $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de autovalores não-nulos (distintos aos pares) de  $\mathcal{A}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , então necessariamente  $\lambda = 0$ . Em particular, os escalares não-nulos de  $\sigma(\mathcal{A})$  são todos pontos isolados.

IV. Uma, e somente uma, das seguintes alternativas é verdadeira:

- $\sigma(\mathcal{A}) = \{0\}$ .
- $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  é finito (e não-vazio).
- $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  é infinito-enumerável e consiste de uma sequência de autovalores não-nulos (distintos aos pares) de  $\mathcal{A}$  convergindo para zero.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 248). ■

Além de operadores compactos, os operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert também possuem espectros com propriedades especiais.

**Proposição B.6.** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$  autoadjunto. Se  $\lambda \neq \mu$  são autovalores distintos de  $\mathcal{A}$ , então segue que  $\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) \perp \mathcal{N}(\mathcal{A} - \mu \mathbf{I})$ .

**Prova:** Veja Conway (1990, p. 47). ■

**Proposição B.7.** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$  autoadjunto. Então, todo autovalor de  $\mathcal{A}$  é um número real.

**Prova:** Veja Conway (1990, p. 48). ■

Obtemos uma rica teoria quando combinamos as propriedades de operadores compactos e autoadjuntos.

**Proposição B.8.** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  autoadjunto. Então, temos que  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Prova:** Se  $X$  for de dimensão finita, segue diretamente da Proposição B.7. Caso  $X$  seja de dimensão infinita, segue do Teorema B.5 junto com a Proposição B.7. ■

**Proposição B.9.** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  autoadjunto. Então, existe um autovalor  $\lambda \in \mathbb{R}$  de  $\mathcal{A}$  tal que  $|\lambda| = \|\mathcal{A}\|$ .

**Prova:** Veja Conway (1990, p. 48). ■

**Observação B.10.** Por conta das Proposições B.8 e B.9, resultados envolvendo um operador  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  autoadjunto podem ser aplicados mesmo quando o espaço de Hilbert  $X$  for real. Nem mesmo o fato que foi exposto na Observação B.3 é violado, uma vez que  $\|\mathcal{A}\|$  ou  $-\|\mathcal{A}\|$  pertence ao conjunto  $\sigma_p(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ .

■

Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  não-nulo e autoadjunto. Segue da Proposição B.9 que  $\mathcal{A}$  admite ao menos um autovalor não-nulo. Se  $X$  for de dimensão finita, então  $\sigma_p(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  é finito. Por outro lado, se  $X$  é de dimensão infinita, então do Teorema B.5 temos que  $\sigma_p(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  continua podendo ser finito e é no máximo infinito-enumerável. Sendo assim, vamos convencionar que  $(\lambda_n)_n$  pode denotar tanto uma seqüência finita  $(\lambda_n)_{n=1}^N$  quanto uma seqüência infinita  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ . O próximo Teorema trata de uma generalização do Teorema Espectral visto em cursos de Álgebra Linear.

**Teorema B.11** (Teorema Espectral). Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  não-nulo e autoadjunto. Seja  $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{R}$  a seqüência (finita ou infinita) de autovalores não-nulos (distintos aos pares) de  $\mathcal{A}$ , ordenada de forma que  $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$ . Para cada  $\lambda_n$ , seja  $\mathcal{P}_n$  a projeção ortogonal de  $X$  sobre  $\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_n \mathbf{I})$ . Sob tais hipóteses, o operador  $\mathcal{A}$  admite a seguinte decomposição:

$$\mathcal{A} = \sum_n \lambda_n \mathcal{P}_n \tag{B.1}$$

**Prova:** Veja Conway (1990, p. 46).

■

**Observação B.12.** Caso em (B.1) se trate de uma soma finita, então não temos problema de convergência. Mas se for de fato uma série, a convergência é em norma (do operador). De fato, durante a prova do Teorema B.11 é mostrado que:

$$\left\| \mathcal{A} - \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathcal{P}_n \right\| = |\lambda_{N+1}| \longrightarrow 0 \text{ quando } N \longrightarrow \infty$$

■

Antes de enunciarmos um importante Corolário do Teorema Espectral, vamos introduzir uma definição e apresentar um resultado relacionado.

**Definição B.13.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Dizemos que um conjunto de vetores  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$  é *ortonormal* se:

- Para todo  $i \in \mathcal{I}$ ,  $\|e_i\| = 1$ .
- $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  sempre que  $i \neq j$ .

Um conjunto ortonormal  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$  é denominado *completo* se o menor subespaço fechado de  $X$  que contém todos os vetores  $e_i$  é o próprio espaço  $X$ . Em outras palavras, o subespaço gerado pelo conjunto  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$  é denso em  $X$ . Todo conjunto ortonormal completo será denominado *base ortonormal* de  $X$ .

■

**Teorema B.14** (Desigualdade de Bessel). Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Para um conjunto de vetores ortonormais  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$ , temos que:

$$\forall x \in X, \sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 216).

■

Em Álgebra Linear, chamamos de base de um espaço vetorial  $X$  um conjunto de vetores linearmente independentes que geram todo o espaço  $X$ . Assim, todo vetor de  $X$  admite uma única representação como uma combinação linear (finita) de vetores da base. O próximo resultado mostra que uma base ortonormal num espaço de Hilbert possui propriedades similares.

**Teorema B.15.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Para um conjunto de vetores ortonormais  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $\{e_i \in X \mid i \in \mathcal{I}\}$  é completo.
- II. Se  $x \in X$  é tal que  $\langle x, e_i \rangle = 0$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ , então  $x = \theta$ .
- III. Para todo  $x \in X$ , temos que  $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle x, e_i \rangle e_i$ .
- IV. (Identidade de Parseval) Para todo  $x \in X$ , temos que  $\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2$ . Ou seja, para todo vetor existe igualdade na desigualdade de Bessel.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 218).

■

Agora, suponha as mesmas hipóteses do Teorema B.11 e seja  $x \in X$  arbitrário. Como  $\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \perp \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_m \mathbf{I})$  se  $n \neq m$ , então aplicando o Teorema de Pitágoras (válido também para o caso de uma sequência infinita, pois temos garantia da convergência da série) obtemos:

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \left\| \sum_n \lambda_n \mathcal{P}_n(x) \right\|^2 = \sum_n \|\lambda_n \mathcal{P}_n(x)\|^2 = \sum_n |\lambda_n|^2 \|\mathcal{P}_n(x)\|^2$$

Logo, obtemos a seguinte equivalência:

$$x \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \iff \forall n, x \in \mathcal{N}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_n \mathbf{I})^\perp \quad (\text{B.2})$$

Como cada  $\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_n \mathbf{I})$  é de dimensão finita, podemos selecionar bases ortonormais (formadas por autovetores de  $\mathcal{A}$ )  $\{\varphi_{n,i} \in \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \mid i = 1, 2, \dots, m_g(\lambda_n)\}$ . Assim, a equivalência (B.2) pode ser reescrita como:

$$x \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \iff \forall n, \forall i = 1, 2, \dots, m_g(\lambda_n), \langle x, \varphi_{n,i} \rangle = 0 \quad (\text{B.3})$$

Como cada  $\lambda_n \neq 0$  e cada  $\varphi_{n,i} \neq \theta$ , obtemos  $\mathcal{A}\varphi_{n,i} = \lambda_n \varphi_{n,i} \neq \theta$ . Assim, cada  $\varphi_{n,i}$  pertence ao subespaço fechado  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Sendo  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  um subespaço fechado, então é, por si só, um espaço de Hilbert. Aplicando o Teorema B.15 e usando (B.3), vemos que o conjunto  $\{\varphi_{n,i} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \mid n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, m_g(\lambda_n)\}$  constitui uma base ortonormal para  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Usando a decomposição  $X = \mathcal{N}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  e novamente o Teorema B.15, vemos que todo  $x \in X$  admite uma representação da forma:

$$x = x_0 + \sum_n \sum_{i=1}^{m_g(\lambda_n)} \langle x, \varphi_{n,i} \rangle \varphi_{n,i}$$

onde  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ . Logo, para todo  $x \in X$  obtemos que:

$$\mathcal{A}x = \sum_n \sum_{i=1}^{m_g(\lambda_n)} \lambda_n \langle x, \varphi_{n,i} \rangle \varphi_{n,i}$$

Após esta discussão, podemos enunciar um Corolário do Teorema Espectral, também conhecido como Teorema de Hilbert-Schmidt. Para simplificar a notação, vamos admitir repetições na sequência dos autovalores.

**Corolário B.16** (Hilbert-Schmidt). Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  não-nulo e autoadjunto. Então, existe uma sequência  $(\lambda_n, \varphi_n)_n$  (finita ou infinita) de autopares de  $\mathcal{A}$  tal que:

- I.  $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{R}$  é a sequência de autovalores não-nulos (com repetições de acordo com a multiplicidade geométrica de cada autovalor) de  $\mathcal{A}$ , ordenada de forma que  $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$ .
- II.  $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  constitui uma base ortonormal para o subespaço fechado  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Ou seja, para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ , temos que  $x = \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .
- III. Para todo  $x \in X$ , temos que  $\mathcal{A}x = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .

■

Se  $\mathcal{A}$  é autoadjunto, então segue que  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{A}^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Portanto, a sequência  $(\varphi_n)_n$  apresentada no Corolário B.16 é também uma base para o espaço  $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Ainda, cada  $\varphi_n \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , pois temos que  $\varphi_n = \mathcal{A}(\lambda_n^{-1} \varphi_n)$ . Como  $(\varphi_n)_n$  é um conjunto ortonormal, então é, em particular, um conjunto linearmente independente. Logo, vemos que a quantidade de vetores na sequência  $(\varphi_n)_n$  é determinada pelo posto do operador  $\mathcal{A}$ . Definimos  $r(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , pondo  $r(\mathcal{A}) = \infty$  se  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Então, podemos escrever  $(\varphi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  (e também, indexar todas as demais sequências desta forma). Assim, as sequências apresentadas no Corolário B.16 serão finitas somente no caso em que  $\mathcal{A}$  é um operador de posto finito.

Discutiremos agora a decomposição em valores singulares de um operador compacto. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Note que os operadores  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}: X \rightarrow X$  e  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*: Y \rightarrow Y$  são ambos operadores compactos e autoadjuntos. Pode acontecer que  $\lambda = 0$  seja autovalor de apenas um desses operadores, mas o mesmo não pode ocorrer caso  $\lambda \neq 0$ . De fato, se  $(\lambda, \varphi)$  é um autopar de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  com  $\lambda \neq 0$ , então  $(\lambda, \mathcal{A}\varphi)$  é um autopar de  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ . Note que este argumento falha quando  $\lambda = 0$ , pois neste caso temos  $\varphi \in \mathcal{N}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathcal{N}(\mathcal{A})$  e, portanto,  $\mathcal{A}\varphi = \theta$  não pode ser um candidato para autovetor. Similarmente, se  $(\lambda, \psi)$  é um autopar de  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  com  $\lambda \neq 0$ , então  $(\lambda, \mathcal{A}^*\psi)$  é um autopar de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ . Logo, os operadores  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  compartilham os mesmos autovalores não-nulos. Ainda, se  $(\lambda, \varphi)$  é um autopar de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , segue que:

$$\frac{\|\mathcal{A}\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\langle \mathcal{A}\varphi, \mathcal{A}\varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \frac{\langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \frac{\langle \lambda\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \frac{\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \lambda$$

Logo,  $\lambda \geq 0$ . Assim, fica bem-definido o escalar  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , bem como a próxima definição.

**Definição B.17.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$  não-nulo. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um autovalor não-nulo de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  (e de  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ ), então o escalar  $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$  é chamado de *valor singular* do operador  $\mathcal{A}$ .

■



Agora, aplicamos o Teorema de Hilbert-Schmidt para o operador  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  e extraímos a sequência  $(\lambda_n, \varphi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  de autopares de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{N}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathcal{N}(\mathcal{A})$ , temos que os vetores  $(\varphi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  formam uma base ortonormal para o espaço  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Considere os valores singulares  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$  de  $\mathcal{A}$  e defina os vetores:

$$\forall n = 1, 2, \dots, r(\mathcal{A}), \psi_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu_n} \mathcal{A} \varphi_n \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$$

Então,  $(\lambda_n, \psi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  são autopares de  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  e observe que  $\mathcal{A}\varphi_n = \mu_n\psi_n$  e  $\mathcal{A}^*\psi_n = \mu_n\varphi_n$ . Além disso, obtemos:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\mu_n \mu_m} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Como  $\mathcal{N}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \mathcal{N}(\mathcal{A}^*)$ , temos que os vetores  $(\psi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  formam uma base ortonormal para o espaço  $\mathcal{N}(\mathcal{A}^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Para  $x \in X$  e  $y \in Y$  quaisquer, temos  $\mathcal{A}x \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$  e  $\mathcal{A}^*y \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Expandindo  $\mathcal{A}x$  e  $\mathcal{A}^*y$  nas bases  $(\psi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  e  $(\varphi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$ , obtemos que:

$$\mathcal{A}x = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n \quad \text{e} \quad \mathcal{A}^*y = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n$$

Por fim, temos o seguinte resultado:

**Corolário B.18** (Decomposição em valores singulares). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$  não-nulo. Então, existe uma família  $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})}$  tal que:

- I.  $(\mu_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \subseteq (0, \infty)$  é a sequência de valores singulares (com repetições de acordo com a multiplicidade geométrica de cada autovalor associado) de  $\mathcal{A}$ , ordenada de forma que  $\mu_n \geq \mu_{n+1}$ .
- II. Para todo  $n = 1, 2, \dots, r(\mathcal{A})$ , temos que  $\mathcal{A}\varphi_n = \mu_n\psi_n$ ,  $\mathcal{A}^*\psi_n = \mu_n\varphi_n$ ,  $(\mu_n^2, \varphi_n)$  é autopar de  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  e  $(\mu_n^2, \psi_n)$  é autopar de  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ .
- III.  $(\varphi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$  constitui uma base ortonormal para o subespaço fechado  $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ . Ou seja, para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ , temos que  $x = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .
- IV.  $(\psi_n)_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$  constitui uma base ortonormal para o subespaço fechado  $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ . Ou seja, para todo  $y \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ , temos que  $y = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \langle y, \psi_n \rangle \psi_n$ .
- V. Para todo  $x \in X$ , temos que  $\mathcal{A}x = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n$  e  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n^2 \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .
- VI. Para todo  $y \in Y$ , temos que  $\mathcal{A}^*y = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n$  e  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*y = \sum_{n=1}^{r(\mathcal{A})} \mu_n^2 \langle y, \psi_n \rangle \psi_n$ .

■

Do Teorema A.11 sabemos que  $\mathcal{A}$  possui uma quantidade finita de valores singulares somente no caso em que o sistema  $\mathcal{A}x = y$  é bem-posto. No caso geral em que  $\mathcal{A}x = y$  é mal-posto, a decomposição em valores singulares também fornece informações sobre a pseudo-inversa  $\mathcal{A}^\dagger$ .

**Teorema B.19.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$  não-nulo. Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita e seja  $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n=1}^\infty$  a família obtida pela decomposição em valores singulares de  $\mathcal{A}$ . Então, temos que:

- I. (Critério de Picard)  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  se, e somente se,  $\sum_{n=1}^\infty \frac{|\langle y, \psi_n \rangle|^2}{\mu_n^2} < \infty$ .
- II. Para todo  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ , temos que  $\mathcal{A}^\dagger y = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mu_n} \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n$ .

**Prova:** Veja Engl, Hanke e Neubauer (1996, p. 38). ■

## B.2 Cálculo Funcional

Nesta seção, apresentamos alguns tópicos de cálculo funcional para operadores compactos.

Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$  não-nulo e autoadjunto. Suponha que  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  é de dimensão infinita. Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua, onde  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo compacto que contém  $\sigma(\mathcal{A})$ . O Corolário B.16 nos permite definir o operador  $f(\mathcal{A}): X \rightarrow X$  pondo:

$$\forall x \in X, f(\mathcal{A})x = \sum_{n=1}^\infty f(\lambda_n) \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n + f(0) \text{proj}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(x) \quad (\text{B.4})$$

A série em (B.4) converge, uma vez que  $f$  é limitada no compacto  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Portanto, o operador  $f(\mathcal{A})$  está bem-definido, é linear e limitado. Ou seja,  $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{B}(X)$ . Note que a necessidade do segundo termo do lado direito da equação (B.4) se deve ao fato que se  $f \equiv 1$ , então  $f(\mathcal{A}) = \text{id}_X$ .

Se  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ , então podemos tomar funções dos operadores  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  e  $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$ . Seja  $\omega = \|\mathcal{A}\|^2$ . Como  $\sigma(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) \subseteq [0, \omega]$ , podemos aplicar a função  $f(t) = \sqrt{t}$  em  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ . Chamamos  $|\mathcal{A}| = (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/2}$  de *módulo* de  $\mathcal{A}$ . Similarmente, definimos  $|\mathcal{A}^*| = (\mathcal{A} \mathcal{A}^*)^{1/2}$ . Da decomposição em valores singulares e de (B.4), vemos que:

$$\forall x \in X, |\mathcal{A}|x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (\text{B.5})$$

Do Corolário B.18, vemos que o comportamento de  $\mathcal{A}$  e  $|\mathcal{A}|$  é essencialmente o mesmo, porém  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq Y$  enquanto que  $\mathcal{R}(|\mathcal{A}|) \subseteq X$ . Observe que  $|\mathcal{A}|$  é compacto e autoadjunto. Para  $x \in X$  arbitrário, obtemos:

$$\| |\mathcal{A}|x \|^2 = \langle |\mathcal{A}|x, |\mathcal{A}|x \rangle = \langle |\mathcal{A}|^2x, x \rangle = \langle \mathcal{A}^* \mathcal{A}x, x \rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \| \mathcal{A}x \|^2$$

Ou seja,  $\| |\mathcal{A}|x \| = \| \mathcal{A}x \|$ . Também vemos que  $\langle |\mathcal{A}|x, x \rangle \geq 0$ , isto é,  $|\mathcal{A}|$  é um operador positivo.

**Proposição B.20.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ . Então, temos que  $\mathcal{R}(|\mathcal{A}|) = \mathcal{R}(\mathcal{A}^*)$  e  $\mathcal{R}(|\mathcal{A}^*|) = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

**Prova:** Veja Rieder (2003, p. 37). ■

### B.3 Topologia Fraca

Seja  $X$  um espaço normado sobre o corpo de escalares  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . O *espaço dual topológico* de  $X$ , denotado por  $X^*$ , é o conjunto de todos os funcionais  $x^*: X \rightarrow \mathbb{F}$  lineares e contínuos (para verificar a continuidade, a topologia em  $\mathbb{F}$  é a usual e a topologia em  $X$  é aquela gerada pela norma). Em outras palavras, temos  $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$  e, portanto,  $X^*$  é um espaço de Banach. Para quaisquer  $x^* \in X^*$  e  $x \in X$ , usaremos a notação  $\langle x^* | x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x^*(x)$ .

Para um ponto  $x_0 \in X$  arbitrário, os subconjuntos de  $X$  que são da forma:

$$U = \left\{ x \in X \mid \forall i \in \mathcal{I}, |\langle x_i^* | x - x_0 \rangle| < \epsilon \right\} \quad (\text{B.6})$$

onde  $\epsilon > 0$ ,  $\mathcal{I}$  é um conjunto finito de índices e  $x_i^* \in X^*$ , geram uma base de vizinhanças abertas de  $x_0$ . A topologia de  $X$  gerada por tais vizinhanças é denominada de *topologia fraca* de  $X$ . A topologia natural de  $X$  (isto é, aquela gerada pela norma) será denominada de *topologia forte* de  $X$ . Subconjuntos de  $X$  que são abertos (fechados) dentro da topologia fraca, serão denominados de fracamente abertos (fechados), enquanto que para a topologia forte, chamaremos simplesmente de aberto (fechado).

Sejam  $\tau_c$  e  $\tau$  duas topologias em um espaço  $X$ . Caso todo subconjunto aberto em  $\tau_c$  também seja aberto em  $\tau$ , então dizemos que  $\tau_c$  é uma *topologia mais fraca* que  $\tau$ , ou que  $\tau_c$  é *menor* que  $\tau$ . Assim, temos um fato antecipado pela nomenclatura: a topologia

fraca de um espaço normado  $X$  é mais fraca que a topologia forte. De fato, como cada  $x_i^*$  em (B.6) é contínuo na topologia forte, então o conjunto  $U$  assim definido será aberto. Portanto, todo subconjunto fracamente aberto (fechado), será também aberto (fechado).

Quando uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  convergir para  $x \in X$  na topologia fraca, usaremos a notação  $x_n \xrightarrow{w} x$ , enquanto que  $x_n \rightarrow x$  indica convergência na topologia forte. A seguir, apresentaremos alguns fatos sobre a topologia fraca.

**Proposição B.21.** A topologia fraca de um espaço de Banach  $X$  é Hausdorff.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 132) ■

Como a topologia fraca é Hausdorff, então em particular temos que o limite de uma sequência fracamente convergente é único.

**Proposição B.22.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  uma sequência. Então, temos que:

- I.  $x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall x^* \in X^*, \langle x^* | x_n \rangle \rightarrow \langle x^* | x \rangle$ .
- II. Se  $x_n \rightarrow x$ , então  $x_n \xrightarrow{w} x$ .
- III. Se  $x_n \xrightarrow{w} x$ , então a sequência  $(x_n)$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .
- IV. Se  $x_n \xrightarrow{w} x$  e  $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$  é uma sequência no espaço dual tal que  $x_n^* \rightarrow x^*$  (convergência em norma), então segue que  $\langle x_n^* | x_n \rangle \rightarrow \langle x^* | x \rangle$ .

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 133) ■

**Proposição B.23.** Se  $X$  é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 151) ■

**Proposição B.24.** Se  $X$  é um espaço de Banach de dimensão finita, então as topologias forte e fraca coincidem.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 134). ■

Em particular, em um espaço de dimensão finita, temos que a topologia fraca é metrizable e, portanto, pode ser caracterizada por seqüências. No entanto, se  $X$  é de dimensão infinita, então a topologia fraca não é metrizable (veja Brezis (2010, p. 60)) e é estritamente menor do que a topologia forte (veja Clarke (2013, p. 51)), isto é, existe um subconjunto aberto (fechado) que não é fracamente aberto (fechado).

Dizemos que um subconjunto  $S \subseteq X$  é *convexo* se  $S = \emptyset$  ou se satisfaz a seguinte propriedade: Para quaisquer  $x, y \in S$  e  $\lambda \in (0, 1)$ , temos que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in S$ . Para subconjuntos convexos, a topologia fraca é, em algum sentido, mais comportada.

**Teorema B.25.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $S \subseteq X$  um subconjunto convexo e fechado. Então,  $S$  é fracamente fechado. A recíproca sempre é verdadeira, mesmo que  $S$  não seja convexo.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 135). ■

**Corolário B.26.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $S \subseteq X$  um subconjunto convexo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- I.  $S$  é seqüencialmente fracamente fechado.
- II.  $S$  é seqüencialmente fechado.
- III.  $S$  é fechado.
- IV.  $S$  é fracamente fechado.

**Prova:**

(I)  $\Rightarrow$  (II) Segue do fato de que se uma seqüência converge fortemente, então ela também converge fracamente para o mesmo limite.

(II)  $\Rightarrow$  (III) Imediato, válido para qualquer espaço métrico.

(III)  $\Rightarrow$  (IV) Segue do Teorema B.25.

(IV)  $\Rightarrow$  (I) Imediato, pois se um conjunto é fechado em uma topologia, então será seqüencialmente fechado nesta mesma topologia. ■

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Dizemos que o operador  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  é *fracamente contínuo* se  $\mathcal{A}$  é contínuo quando  $X$  e  $Y$  estão equipados com suas topologias fracas.

**Teorema B.27.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  um operador linear. Então,  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$  se, e somente se,  $\mathcal{A}$  é fracamente contínuo.

**Prova:** Veja Kesavan (2009, p. 139).

