

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC
CENTRO SÓCIO ECONÔMICO - CSE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS - CNM
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Vitor Scheffer Sabbi

Modelos de heterocedasticidade condicional: Um estudo comparativo

Florianópolis

2021

Vitor Scheffer Sabbi

Modelos de heterocedasticidade condicional: Um estudo comparativo

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do grau Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Pedro Luiz Paolino Chaim, Dr.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sabbi, Vitor Scheffer

Modelos de heterocedasticidade condicional : um estudo
comparativo / Vitor Scheffer Sabbi ; orientador, Pedro
Paolino Chaim, 2021.

60 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio
Econômico, Graduação em Ciências Econômicas, Florianópolis,
2021.

Inclui referências.

1. Ciências Econômicas. 2. Modelagem de volatilidade. 3.
Value at Risk. 4. Previsão fora da amostra. I. Chaim,
Pedro Paolino. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Graduação em Ciências Econômicas. III. Título.

Vitor Scheffer Sabbi

Modelos de heterocedasticidade condicional: um estudo comparativo

Florianópolis, 17 de setembro de 2021.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Guilherme Valle Moura, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) João Frois Caldeira, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Pedro Luiz Paolino Chaim, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Certifico que esta é a **versão original e final** do Trabalho de Conclusão de Curso que foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Economia por mim e pelos demais membros da banca examinadora.

Prof.(a) Pedro Luiz Paolino Chaim, Dr.(a)
Orientador(a)

Florianópolis, 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, os quais me ofereceram suporte em todas as áreas desde minha decisão de cursar Ciências Econômicas. Também gostaria de agradecer aos meus amigos, que dividiram o peso emocional e psicológico dos momentos difíceis. Por último, gostaria de agradecer ao meu orientador, que acreditou na minha capacidade e sem o qual este trabalho não seria possível.

“O saber deve ser como um rio, cujas águas doces, grossas, copiosas, transbordem do indivíduo e se espraíem, estancando a sede dos outros. Sem um fim social, o saber será a maior das futilidades.”

(Gilberto Freyre)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a comparação entre os modelos mais conhecidos de volatilidade condicional (ARCH, GARCH, EWMA e EGARCH) utilizando dados do mercado financeiro norte-americano, mais especificamente o índice S&P 500. O índice funciona como um “termômetro” do mercado de ações em nível global, representando o comportamento de ativos convencionais. O período de análise consiste no intervalo entre junho de 2014 e junho de 2020, compreendendo o momento de grande incerteza no mercado financeiro devido à crise do coronavírus, o qual é foco do trabalho. Foi utilizada a metodologia de valor em risco paramétrico de modo a descrever a eficiência empírica dos modelos a partir da quantidade de violações observadas em relação a seu valor crítico. Mostrou-se que, embora nos testes dentro da amostra os modelos conseguiram uma cobertura empírica suficientemente próxima dos 5% de violações esperadas, fora da amostra todos foram rejeitados como modelos precisos de valor em risco (acima de 10%), dado o período atípico. Além disso, o modelo mais simples, EWMA, apresentou a melhor performance dentro e fora da amostra em termos de violações do valor em risco, enquanto o modelo mais complexo, EGARCH, apresentou melhor performance em termos de precisão preditiva.

Palavras-chave: Gerenciamento de riscos, EWMA, ARCH, GARCH, EGARCH, Volatilidade, Valor em Risco.

ABSTRACT

This study aims to compare the most well-known models of conditional volatility (ARCH, GARCH, EWMA and EGARCH) using data from the United States financial market, more specifically the S&P 500 index. The index works as a "thermometer" of the stock market on a global level, representing the behavior of conventional assets. The period of analysis consists of the interval between June 2014 and June 2020, comprising the moment of great uncertainty in the financial market due to the coronavirus crisis, which is the focus of the work. The parametric value-at-risk methodology was used in order to describe the empirical efficiency of the models from the number of violations observed in relation to their critical value. It was shown that while in the in-sample tests the models achieved empirical coverage close enough to the 5% expected violations, out-of-sample all were rejected as accurate value-at-risk models (above 10%) given the atypical period. Furthermore, the simplest model, EWMA, performed best in and out of sample in terms of value at risk violations, while the most complex model, EGARCH, performed best in terms of predictive accuracy.

Keywords: Risk Management, EWMA, ARCH, GARCH, EGARCH, Volatility, Value at Risk.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Probabilidade associada aos retornos e ao VaR.....	23
Figura 2 - Função distribuição acumulada normal	25
Figura 3 - Série do preço de fechamento ajustado para o índice S&P 500.....	26
Figura 4 - Série do log-retorno diário para o índice S&P 500.....	27
Figura 5 - (A) Histograma dos retornos (B) Q-Q plot dos retornos.....	29
Figura 6 - Correlogramas para a série de retornos do índice S&P 500.....	34
Figura 7 - Correlogramas para a série de retornos absolutos do índice S&P 500	35
Figura 8 - Corte da série de retornos para estimação e previsão fora da amostra.....	36
Figura 9 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EWMA.....	38
Figura 10 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo ARCH(3).....	39
Figura 11 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo GARCH(1,1).....	39
Figura 12 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EGARCH(1,1)	40
Figura 13 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EGARCH(3,3)	40
Figura 14 - Comparação do VaR (5%) EWMA com os retornos do índice S&P 500.....	42
Figura 15 - Comparação do VaR (5%) ARCH(3) com os retornos do índice S&P 500.....	42
Figura 16 - Comparação do VaR (5%) GARCH(1,1) com os retornos do índice S&P 500.....	43
Figura 17 - Comparação do VaR (5%) EGARCH(1,1) com os retornos do índice S&P 500	43
Figura 18 - Comparação do VaR (5%) EGARCH(3,3) com os retornos do índice S&P 500	44
Figura 19 - Previsão EWMA comparada aos retornos absolutos do índice S&P 50.....	45
Figura 20 - Previsão VaR (5%) EWMA comparada aos retornos do índice S&P 500.....	45
Figura 21 - Previsão ARCH(3) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500.....	46
Figura 22 - Previsão VaR (5%) ARCH(3) comparada aos retornos do índice S&P 500.....	46
Figura 23 - Previsão GARCH(1,1) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500.....	47
Figura 24 - Previsão VaR (5%) GARCH(1,1) comparada aos retornos do índice S&P 500.....	47
Figura 25 - Previsão EGARCH(1,1) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500	48
Figura 26 - Previsão VaR (5%) EGARCH(1,1) comparada aos retornos do índice S&P 500	48
Figura 27 - Previsão EGARCH(3,3) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500	49
Figura 28 - Previsão VaR (5%) EGARCH(3,3) comparada aos retornos do índice S&P 500	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estatísticas descritivas para a série de retornos e retornos absolutos	28
Tabela 2 - Testes de raiz unitária para o índice S&P 500	30
Tabela 3 - Resultados do teste ARCH LM para a série de retornos do índice S&P 500	35
Tabela 4 - Resultados da estimação dos modelos GARCH	37
Tabela 5 - Estatísticas do Valor em Risco dentro da amostra	41
Tabela 6 - Estatísticas do Valor em Risco fora da amostra	50
Tabela 7 - Avaliação das previsões de volatilidade fora da amostra	50
Tabela 8 - Teste Diebold-Mariano	51
Tabela A1 - Seleção do modelo ARCH por critérios de informação	59
Tabela A2 - Seleção do modelo GARCH por critérios de informação	59
Tabela A3 - Seleção do modelo EGARCH por critérios de informação	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1	MERCADO DE CAPITAIS	14
2.2	RISCO.....	15
2.3	MODELOS DE VOLATILIDADE	16
2.4	MODELOS DE VOLATILIDADE CONDICIONAL	17
2.4.1	Modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).....	18
2.4.2	Modelo GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)	19
2.4.3	Modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average).....	20
2.4.4	Modelo EGARCH (Exponential General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)	21
2.5	APLICAÇÕES DE MODELOS DE VOLATILIDADE NO CÁLCULO DE RISCO DE MERCADO ATRAVÉS DA METODOLOGIA VAR (VALOR EM RISCO).....	22
3	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	26
3.1	DESCRIÇÃO DOS DADOS	26
3.2	ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE.....	35
3.3	BACKTEST PARA O VALOR EM RISCO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE	41
3.4	PREVISÕES	44
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A – Seleção dos modelos por critérios de informação	59

1 INTRODUÇÃO

A estimação de volatilidade é objeto de grande interesse nas ciências econômicas. A relação de risco-retorno é entendida por muitos investidores como sendo um dos pilares do mercado financeiro e, por essa razão, definiu-se como sendo de máxima importância a correta mensuração de ambos.

É indispensável que a análise da volatilidade seja realizada de forma adequada, não apenas para o delineamento de estratégias ótimas na administração de ativos, mas também para a percepção de momentos de incerteza no mercado. Com um elevado grau de incerteza em relação às crises ou elementos exógenos, tem-se também uma grande variação nos preços e na variância dos retornos, desencadeando a possibilidade de notáveis ganhos ou perdas e desestabilização do sistema financeiro (MORAIS; PORTUGAL, 1999). Para tanto, desde o surgimento do mercado financeiro, foram desenvolvidas diversas metodologias que buscam prever o comportamento dos ativos a partir de seu risco.

A métrica mais difundida para se avaliar o risco de um ativo ou uma carteira é a do Value at Risk ou Valor em Risco (VaR), por ser geralmente base de regulações econômicas, já que se traduz diretamente em um valor de capital obrigatório que as instituições financeiras são obrigadas a manter além de outros requisitos mínimos de capital. Ela designa o valor máximo que determinado portfólio de ativos pode perder em um horizonte de tempo e intervalo de confiança preestabelecidos (JORION, 2006). Uma das informações requeridas para desenvolver essa métrica é uma medida de volatilidade.

A maneira mais simples de se estabelecer uma medida de volatilidade é a partir da volatilidade histórica, dada pelo cálculo do desvio padrão dos retornos de uma amostra imediatamente anterior a que se pretende analisar (BODIE; KANE; MARCUS, 2014), o que permite determinar qual o desvio em relação à média das observações anteriores da amostra. O lado negativo de se utilizar a volatilidade histórica consiste justamente no fato de que o valor histórico da variância não obrigatoriamente prevalecerá no futuro. Portanto, se em períodos posteriores forem encontrados muitos períodos de incerteza, a variância condicional pode manifestar muitas alterações em pequenos períodos.

É notável, na análise de séries financeiras, períodos de alta e baixa volatilidade. Em razão da dificuldade dos modelos lineares em prever a volatilidade de ativos, ocorreu uma transição para modelos não lineares que procuravam modelar essas séries a partir de momentos condicionais de ordem maior que um (previamente interpretadas como perturbações aleatória), isto é, modelos que consideram a variância condicional de uma série como não constante (BUENO, 2011).

Do lado dos modelos não lineares temos os modelos da família Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH), propostos por Engle (1982), além de sua mais conhecida variação, o Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH), introduzido inicialmente por Bollerslev (1986). Existe uma grande diversidade de modelos da família GARCH. Exemplos são os modelos EGARCH e GJR-GARCH, os quais introduzem novos parâmetros e são ideais para capturar o efeito alavancagem. Tais modelos são amplamente empregados para modelar volatilidade e baseiam-se na estimação da variância condicional.

Tendo em vista a diversidade de instrumentos computacionais que permitem a simulação de variância, o problema envolve selecionar qual o método de modelagem que possibilite minimizar o erro de estimação. Deste modo, pretende-se comparar a performance dos modelos ARCH, GARCH, EGARCH e EWMA na previsão fora da amostra para cálculo de valor em risco, focando no período turbulento que se iniciou em março de 2020 devido ao COVID-19.

O presente trabalho está estruturado em quatro capítulos. No primeiro capítulo são apresentadas as motivações para o trabalho, assim como seus respectivos objetivos. No segundo capítulo é feita uma breve introdução à análise de risco e sua importância quanto à mensuração de determinados ativos, além de apresentar os modelos de volatilidade condicional utilizados no estudo. Ademais, o capítulo também trata do uso histórico de valor em risco, a metodologia de cálculo do Var e Var paramétrico, bem como sua aplicação específica para esta pesquisa. O terceiro capítulo realiza a descrição do estudo com os dados empíricos provenientes do índice Standard and Poor's 500 (S&P 500) e apresenta os resultados obtidos. Por fim, é elaborado um breve comentário acerca das conclusões da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MERCADO DE CAPITAIS

Conforme PINHEIRO (2009, p. 174)

O mercado de capitais pode ser definido como um conjunto de instituições e de instrumentos que negociam com títulos e valores mobiliários, objetivando a canalização dos recursos dos agentes compradores para os agentes vendedores. Ou seja, o mercado de capitais representa um sistema de distribuição de valores mobiliários que tem o propósito de viabilizar a capitalização das empresas e dar liquidez aos títulos emitidos por elas.

Em síntese, o mercado de capitais engloba as bolsas de valores, sociedades corretoras e diversas instituições financeiras, sendo utilizado com o propósito de capitalizar recursos dos indivíduos poupadores e orientá-los a agentes que necessitem de investimentos ou mesmo capital de giro. É possível afirmar que o surgimento do mercado de capitais ocorreu devido à baixa capacidade do mercado de crédito de atender as necessidades empresariais. Para ASSAF NETO (2011, p. 74)

O mercado de capitais assume papel dos mais relevantes no processo de desenvolvimento econômico. É o grande muniador de recursos permanentes para a economia, em virtude da ligação que efetua entre os que têm capacidade de poupança, ou seja, os investidores, e aqueles carentes de recursos de longo prazo, ou seja, que apresentam déficit de investimento.

Ele pode ser visualizado como uma alternativa às aplicações tradicionais em serviços oferecidos pelo governo e bancos, gerando um custo reduzido de financiamento para as empresas e maior acesso ao capital para a população média. Esse dispositivo financeiro possui duas subdivisões: o mercado de renda fixa, o qual compreende os títulos de dívida, e o mercado acionário, em que se realizam transações com ativos de patrimônio líquido (CARVALHO, 2014).

Para o mercado acionário em específico, há ainda outros dois segmentos: o mercado primário e o mercado secundário de ações. No primeiro, os valores mobiliários da empresa são negociados diretamente entre ela e os investidores e os recursos envolvidos são encaminhados

para o caixa ou projetos de investimento da companhia. No segundo, ocorrem transações de títulos entre os próprios investidores, de forma que não há transferência de recursos para a empresa emissora. Porém, a grande liquidez do mercado secundário atua como uma condição para a existência do mercado primário.

2.2 RISCO

No contexto de mercado de capitais, em especial no caso do mercado acionário, há um risco associado a cada operação efetuada pelas empresas e investidores tanto no mercado primário quanto no secundário. Portanto, é essencial o entendimento do conceito de risco e suas derivações em termos de mercado financeiro.

Pode-se definir risco como a possibilidade pelo menos dois resultados ocorrerem dentro de dado evento (BODIE; KANE; MARCUS, 2014), ou seja, quando houver incerteza a respeito de um determinado resultado, existirá algum tipo de risco. Contudo, o risco possui diferentes definições e classificações relativas à sua origem. Para Duarte (1996), risco é um conceito “multidimensional” que cobre quatro grandes grupos:

- Risco de mercado: é formado a partir de variações no preço de ativos financeiros que ocorrem naturalmente em função de mudanças do mercado. O risco de mercado pode ser encontrado no preço de ações, commodities, taxas de câmbio e taxas de juros.
- Risco operacional: advém de possíveis falhas humanas ou de gerenciamento, assim como defeitos dentro de um sistema.
- Risco de crédito: diz respeito à recursos do qual um dos contratantes não honra seus compromissos, fazendo com que os recursos não sejam recebidos como deveriam.
- Risco legal: está relacionado a perdas decorrentes de um contrato ilegal, seja ele qual for o motivo.

Para este trabalho, mais especificamente, concentrar-se-á no risco como um grau de incerteza dos retornos futuros, o qual está relacionado com o risco de mercado.

2.3 MODELOS DE VOLATILIDADE

A modelagem de incerteza é um elemento inevitável na prática financeira, com importantes aplicações na seleção de carteiras, gestão de riscos e formação de preços de derivativos. Os modelos de valor em risco (VaR), utilizados por instituições financeiras como uma medida de risco de perda financeira (com certo intervalo de confiança e horizonte de tempo), necessitam de uma estimativa de volatilidade para a sua elaboração (GALDI; PEREIRA, 2007).

A forma mais usual de se medir a volatilidade de um ativo é a partir do cálculo do desvio padrão dos seus retornos durante um período anterior àquele que se deseja prever, sendo sua fórmula definida como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n}}, \quad (1)$$

em que y_t representa o retorno do ativo no período t , \bar{y} simboliza a média aritmética dos retornos e n o número de observações (deve-se utilizar $n - 1$ para o desvio padrão amostral). Considerando um caso em que se calcula o desvio padrão com valores de retorno diário, a transformação para uso de diferentes frequências de dados se dá por meio da multiplicação do desvio padrão diário pela raiz quadrada do número de observações. Por exemplo, a volatilidade anualizada é obtida após se multiplicar o valor diário por raiz de 252, referente ao número médio de dias úteis no ano.

A adversidade encontrada por essa metodologia de cálculo é que seu uso implica atribuir pesos idênticos a todas as observações da amostra, ficando destacada uma falta de ênfase nas observações mais recentes. Tendo em vista que se busca determinar uma volatilidade futura, elementos mais próximos do presente apresentam acentuada relevância, entretanto, a qualidade da estimação depende de um elevado número de observações. Essas duas características podem ser descritas como um trade-off, pois desprezar dados antigos é análogo a ignorar informações históricas importantes, enquanto dados muito antigos podem distorcer a qualidade da informação.

Nesse sentido, diversos autores elaboraram sugestões para tornar a estimação da volatilidade histórica mais precisa. Parkinson (1980) mostrou que o uso de valores extremos (os preços altos e baixos) fornece uma estimativa muito superior ao que é tradicionalmente estimado usando apenas preços de fechamento. A ideia é que considerar a oscilação intradiária dos ativos permite alcançar um maior volume de informações e, desse modo, aumentar a qualidade da estimativa. De outro lado, Garman e Klass (1980) criticam os estimadores que se baseiam apenas nos extremos por ignorarem os efeitos articulares entre valores de abertura e fechamento, que podem ser utilizados para aumentar ainda mais a eficiência. Assim, concluem que existe um estimador possuindo um fator de eficiência que é mais de oito vezes melhor que o estimador clássico, considerando preços altos, baixos, aberturas e fechamentos.

Surgindo como alternativa para mitigar algumas das restrições do desvio padrão histórico, o *Método de Suavização Exponencial* consiste em obter uma estimação de forma adaptativa ponderando as observações passadas através de um coeficiente λ entre 0 e 1, o qual indica a importância das informações mais recentes. Dado que cada termo em sequência é multiplicado por $(1 - \lambda)^n$, os pesos decaem exponencialmente e somam 1, gerando uma fórmula recursiva. De acordo com Bueno (2011), o modelo que utiliza médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA) pode ser entendido como um modelo do tipo GARCH integrado (IGARCH) sem intercepto, pois os coeficientes apresentam soma unitária $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$.

2.4 MODELOS DE VOLATILIDADE CONDICIONAL

Uma das principais características de séries temporais financeiras é que elas apresentam uma volatilidade dinâmica, no sentido de períodos com maior volatilidade ficarem agrupados e a distribuição dos retornos manifestarem excesso de curtose relativo a uma distribuição normal (PERLIN et al., 2021). Modelos econométricos como o modelo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA)¹, os quais consideram a variância como constante, carecem de um poder explicativo satisfatório em atividades dessa área. Por essa razão, Engle (1982) propôs um modelo que possibilita a modelagem da própria variância de uma série em função dos retornos passados.

¹ Ver BOX e JENKINS (1976)

2.4.1 Modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Engle (2004) descreve que concebeu o modelo ARCH durante uma pesquisa em 1979 sobre a validade das teses macroeconômicas de Milton Friedman, nas quais afirmava que a inflação era a principal causa de ciclos econômicos (FRIEDMAN, 1977). Para esse autor, a incerteza relativa à variação de preços futuros era o que limitava a capacidade de investimento dos empresários e o que potencialmente geraria ciclos de recessão.

Engle (1982) notou que o sistema teórico apenas teria sentido se a incerteza variasse ao longo do tempo, em outros termos, se a variância fosse heterocedástica. Logo, propôs o primeiro modelo que aborda a heterocedasticidade condicional em séries financeiras, em seu artigo “Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation”. Este modelo estabelece que a variância condicional da série no presente depende dos quadrados dos retornos passados. Considerando r_t uma série temporal estacionária de retornos, temos que o modelo ARCH é dado por:

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (4)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-p}^2 \quad (5)$$

onde h_t representa a variância condicional de r_t , α_0 uma constante e ε_t uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média igual a zero e variância igual a um. Para garantir que h_t seja positivo, deve-se respeitar que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i > 0$. Pode-se supor, por exemplo, que ε_t segue uma distribuição normal ou uma distribuição t de Student com v graus de liberdade (MORETTIN, 2008).

Ainda segundo Engle (2004), os modelos ARCH apresentam notável prestígio nas finanças devido a sua grande utilidade na análise da relação risco e retorno de carteiras de ativos, tendo em vista a capacidade de conseguir prever um número melhor de valores extremos do que em modelos de variância homocedástica, além de reproduzir a dinâmica da reversão a média de séries financeiras.

2.4.2 Modelo GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Em 1986, uma generalização do modelo ARCH foi introduzida por Bollerslev, denominada GARCH, modelo generalizado de heterocedasticidade condicional autorregressivo. Ele surgiu como uma alternativa para o problema do modelo ARCH, que frequentemente exigia o uso de muitos parâmetros para uma descrição adequada do processo de volatilidade dos retornos (TSAY, 2010).

Neste modelo, conceitua-se que a variância condicional do processo de erro está associada não só com os quadrados dos valores passados da série, mas também com as próprias variâncias condicionais passadas. A definição de um modelo GARCH (p,q), onde p é a ordem referente ao número de defasagens das inovações quadráticas e q é a ordem referente ao número de defasagens da variância condicional, é dada da seguinte forma:

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (6)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (7)$$

em que ε_t denota uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média igual a zero e variância igual a um, r_t descreve uma série temporal estacionária de retornos e h_t a variância condicional de r_t . Para garantir a positividade da variância condicional deve-se ter que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \beta_i) < 1$. Tal como no modelo ARCH, é possível supor que ε_t segue uma distribuição normal ou uma distribuição t de Student com v graus de liberdade, entre outras (MORETTIN, 2008).

Dados que os resíduos sejam os menores possíveis, o melhor modelo será o mais parcimonioso (com menor número de parâmetros), sendo essa uma vantagem do GARCH em relação ao ARCH. O modelo mais parcimonioso deverá gerar menos imprecisão de estimativas justamente porque tem menos parâmetros do que o outro modelo (BUENO, 2011). Segundo Alexander (2008), dificilmente se faz uso de um modelo maior que GARCH (1,1), o qual representa o uso

de apenas um erro ao quadrado defasado e um termo autorregressivo, havendo ampla aplicação desse arranjo para modelagem de séries financeiras. O modelo assumiria o formato

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad \text{sendo que } \alpha_1 \geq 0, \beta_1 < 1 \text{ e } \alpha_1 + \beta_1 < 1 \quad (10)$$

2.4.3 Modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

O EWMA, ou médias móveis exponencialmente ponderadas, é um método de suavização exponencial utilizado principalmente em séries financeiras, o qual atribui maior peso relativo para valores mais recentes da série. O modelo foi difundido, sobretudo, por ter sido utilizado como ferramenta de análise de risco para estimar volatilidade no documento Risk Metrics do banco J.P. Morgan (1996), tornando essa metodologia um instrumento primário na realização de atividades similares durante muitos anos no mercado financeiro. Como Fogliatto e Pellegrini (2001) comentam, os modelos de suavização exponencial são largamente empregados por conta de sua simplicidade, facilidade de ajuste e bons resultados. O modelo EWMA assume um processo gerador de retornos, do qual

$$y_t = \mu + \varepsilon_t \sigma_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (2)$$

em que μ é a média incondicional do processo e σ_t^2 é uma medida da variância condicional de y_t . Makridakis et al (1998) explica o modelo como simplesmente a previsão antiga somada a um ajuste para o erro que ocorreu na última previsão, com variância definida como

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) y_{t-1}^2, \quad (3)$$

sendo λ o fator de decaimento (onde $0 < \lambda < 1$), σ_t^2 a variância no período t e y o retorno de um determinado ativo. A equação apresenta dois termos, ambos dependentes de λ . O termo $(1 - \lambda) y_{t-1}^2$ é responsável pela reatividade, isto é, representa o impacto que os movimentos recentes na série terão sobre a volatilidade. O outro termo, $\lambda \sigma_{t-1}^2$, determina a persistência da volatilidade.

Dado que os dois dependem de λ , a regulagem entre a reatividade total, alcançada com $\lambda = 0$, e a resistência total a mudanças, $\lambda = 1$, se dá justamente na escolha do valor desse fator. Quanto

menor for o fator, maiores serão as oscilações apresentadas nas séries, havendo respostas mais rápidas às mudanças nos retornos. Ao mesmo tempo, quanto maior for o fator, mais suave será a série, havendo uma alta resistência para se deslocar de patamares prévios. O banco J.P. Morgan (1996) sugere um fator de decaimento de 0,94 para séries diárias e 0,97 para conjuntos de dados mensais.

2.4.4 Modelo EGARCH (Exponential General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Nelson (1991) afirma que os modelos iniciais de variância condicional heterocedástica, ARCH e GARCH, apresentavam determinadas limitações na reprodução da dinâmica dos retornos, em especial para mensurar os efeitos da assimetria dos retornos sobre a volatilidade. Os modelos citados não consideram o sinal dos retornos, somente o efeito da magnitude sobre a variância.

Outra crítica do autor sobre os modelos GARCH concerne a necessidade de atribuir estruturas rígidas ao modelo, no qual os parâmetros α_0 , α_1 e β_1 devem ser positivos para assegurar que a variância condicional fique positiva para todo t, ou seja, para todo aumento nos retornos, haverá um aumento respectivo na volatilidade. A terceira crítica diz respeito a capacidade do modelo GARCH de identificar o período de efeito da persistência de choques, uma vez que a literatura já distingue choques efêmeros de choques que modificam a média de longo prazo da variância.

O modelo defendido por Nelson (1991) opta por uma estrutura alternativa para garantir que a variância condicional seja sempre não negativa, utilizando $\ln(\sigma_t^2)$ em função do tempo e dos erros defasados, no sentido de poder relaxar a restrição de não negatividade dos parâmetros. EGARCH (p,q) é um modelo não-linear que pode ser definido a partir de

$$\varepsilon_t/\psi_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (11)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|r_{t-i}| + \gamma_i r_{t-i}}{\sigma_{t-1}} + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

onde, incluindo o parâmetro r_{t-i} em seu valor absoluto, permite-se a captura da assimetria na variância condicional e nos retornos do mercado, oriunda do efeito alavancagem, que pode, ou não, ser identificado pelo coeficiente γ . Quando $\gamma < 0$, conclui-se a existência do efeito alavancagem, havendo efeitos diferenciados entre choques negativos e positivos na volatilidade.

2.5 APLICAÇÕES DE MODELOS DE VOLATILIDADE NO CÁLCULO DE RISCO DE MERCADO ATRAVÉS DA METODOLOGIA VAR (VALOR EM RISCO)

Subestimar a incerteza de curto prazo pode sair muito caro (BOLLERSLEV; ENGLE; NELSON, 1994). Ao assumir a volatilidade constante, um analista subestima o risco interno dos contratos financeiros e, possivelmente, é surpreendido por perdas extremas inesperadas na carteira de investimentos. Da mesma forma, dado que os bancos agem como centros de liquidez, um cálculo incorreto de volatilidade e risco pode ameaçar a estabilidade de todo um sistema financeiro, pois um choque financeiro inesperado pode forçar os bancos a liquidar rapidamente contratos financeiros e aumentar sua posição de caixa (PERLIN et al., 2021). Assim, as medidas de controle de risco devem avaliar a possibilidade de uma grande perda acontecer.

As instituições financeiras, principalmente depois da crise de 2008, têm aplicado diversas medidas para diminuir o risco de suas operações, seja por critérios modificados de avaliação de risco ou regulações do mercado financeiro. Uma dessas abordagens é conhecida como valor em risco de mercado (VaR), que Alexander (2008, p.13) define como: "...uma perda da qual se tem razoável certeza de que não será excedida caso mantiver-se o portfólio por certo período de tempo".

As determinações mínimas referentes ao capital de risco exigidas pelo Acordo da Basiléia de 1988 foram adotadas pelos países do G10, o que influenciou muitos outros países a adotar os mesmos princípios. As medidas apoiadas durante o ano de 1988 serviram para uniformizar os padrões de capital mínimo ao risco de crédito, contudo, foi no ano de 1996, durante a Emenda do Acordo da Basiléia, que as diretrizes de capital mínimo foram estendidas ao risco de mercado. O modelo de capital de risco de mercado indicado pela Emenda de 1996 estabelece uma perda máxima ao longo de dez dias de negociação com nível de confiança de 99%. É possível aferir o modelo a partir de um conjunto de cenários, porém, foi com o modelo VaR

que muitas empresas resolveram avaliar seu capital mínimo ao risco de mercado (ALEXANDER, 2008).

Definida uma probabilidade, o valor em risco (VaR) retorna a perda de um ativo para um intervalo de tempo limitado caso ocorram movimentos adversos do mercado. Pode-se ainda descrever o VaR como o percentil inferior da distribuição de retornos previstos dos fatores de risco de mercado para um horizonte de risco específico. O retorno (X_t) de uma carteira de ativos é definido como a variação do valor do ativo entre os momentos t e $t - 1$

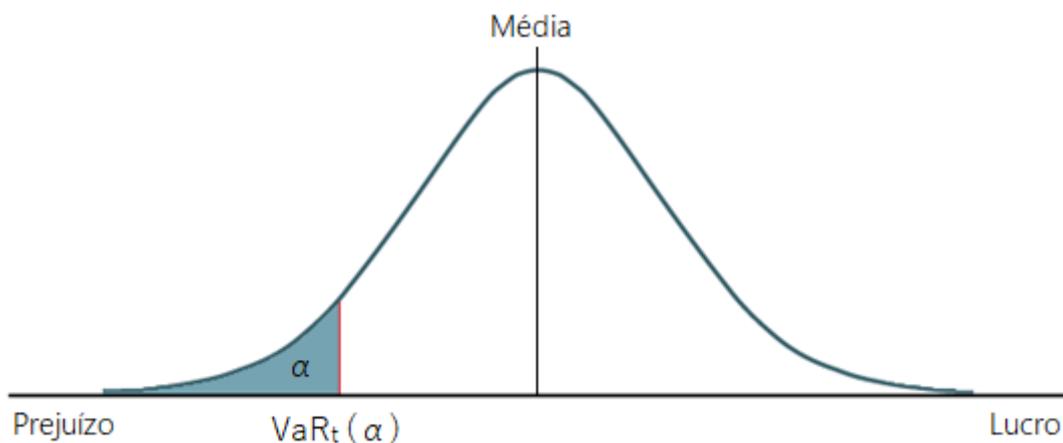
$$X_t = \frac{v_t}{v_{t-1}} - 1 \approx \log(v_t) - \log(v_{t-1}) \quad (12)$$

em que v_t é o valor da carteira de ativos no instante t . A expressão no lado direito da equação (12) indica o log-retorno. O nível de significância do VaR especifica a probabilidade de dado nível de perda se concretizar. Logo, tendo em conta um VaR de 5%, espera-se que o valor seja excedido na proporção de um dia em cada 20 dias. Pode-se descrever que,

$$Prob(X_t < VaR_t(\alpha)) = \alpha, \quad (13)$$

sendo α o nível de significância do modelo VaR. Na Figura 1, existe uma marcação denotando o ponto crítico $VaR_t(\alpha)$. A área ao lado esquerdo da distribuição de probabilidade dos retornos representa a probabilidade do nível de significância α . Já ao lado direito, tem-se a probabilidade do retorno não alcançar perdas extremas

Figura 1 - Probabilidade associada aos retornos e ao VaR



FONTE: Elaboração do autor

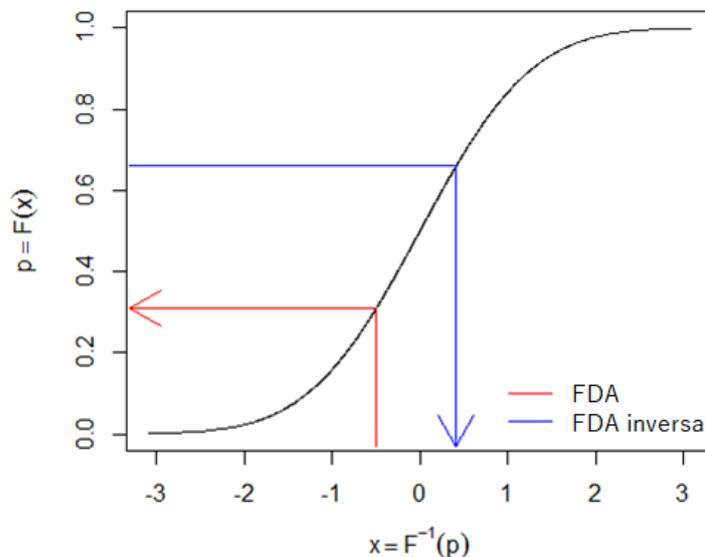
Uma maneira de classificar os modelos de VaR é distinguindo-os entre modelos não paramétricos e paramétricos. No caso não paramétrico, a distribuição de probabilidade dos retornos é adquirida empiricamente, não havendo especificação predeterminada. Os modelos categorizados como paramétricos precisam assumir uma distribuição para os dados e, através dessa suposição, efetuar a estimação dos parâmetros e, em seguida, estimar o VaR pelo α -quantil da distribuição estimada. Nesses casos, é bastante comum utilizar a distribuição normal e estimar seus parâmetros de média e variância. Os modelos ARCH e GARCH são também paramétricos (REGIS, 2017).

Matematicamente, considerando que $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ denota uma série temporal de retornos positivos e negativos e Ω_t denota a informação até o tempo t, o VaR paramétrico no tempo t pode ser definido como

$$VaR_t(\alpha) = F^{-1}(\alpha | \Omega_t) \quad (14)$$

onde $F^{-1}(\cdot | \Omega_t)$ denota a função quantílica da série no tempo t. Enquanto a equação (13) representa uma função distribuição acumulada $F_t(\cdot)$, por retornar as probabilidades de X ser menor ou igual a algum valor Y, a equação (14) representa sua inversa, expressando qual X faria com que $F_t(\cdot)$ indicasse a probabilidade p desejada. Isso é ilustrado na figura 2, que usa a função distribuição acumulada normal (e seu inverso) como exemplo

Figura 2 – Função distribuição acumulada normal



FONTE: Elaboração do autor

Backtesting é o método que utiliza dados históricos para medir a precisão do modelo ao comparar as perdas previstas com as perdas reais percebidas no final de um horizonte de tempo fixo. Os valores de VaR podem então ser recalculados se o resultado do backtesting indicar que não são precisos, ajudando pesquisadores e instituições a reduzir sua exposição a perdas inesperadas (ZHANG; NADARAJAH, 2018).

Uma “violação” pode ser definida como um evento em que a observação excede o VaR, isto é

$$\begin{aligned} I_{t+1}(\alpha) &= 1 \text{ if } X_{t+1} \leq VaR_t(\alpha) \\ I_{t+1}(\alpha) &= 0 \text{ if } X_{t+1} > VaR_t(\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

onde $I_{t+1}(\alpha)$ denota uma função indicadora para as violações. Um dos métodos mais básicos de backtesting consiste em contar o número de violações em um determinado período e compará-lo com o número esperado dentro de um determinado intervalo de confiança. Uma convenção comum é empregar um nível de confiança de 95% (J.P. MORGAN, 1996). No caso específico deste estudo, considerando $\{I_t(\alpha)\}$ como independentes e identicamente distribuídos e $Prob [I_{t+1}(\alpha) = 1] = \alpha$, então o número total de violações H apresenta uma distribuição binomial, para o qual se busca realizar um teste estatístico em que a hipótese nula corresponde à existência de um modelo preciso de VaR.

3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

3.1 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Nesta seção será realizada uma análise da volatilidade dos retornos referentes ao índice S&P 500, utilizando os modelos ARCH, GARCH, EWMA e EGARCH, descritos na seção anterior. A ideia do índice é representar as 500 maiores empresas do mundo, pertencentes às principais bolsas de valores dos Estados Unidos, fazendo com que seja uma medida padrão do desempenho médio do mercado de ações norte-americano. Nesse sentido, o S&P 500 funciona como um “termômetro” do mercado de ações em nível global, sendo utilizado como uma referência em relação à possível rentabilidade em títulos de renda variável, logo representa adequadamente o comportamento de ativos convencionais.

Figura 3 – Série do preço de fechamento ajustado para o índice S&P 500

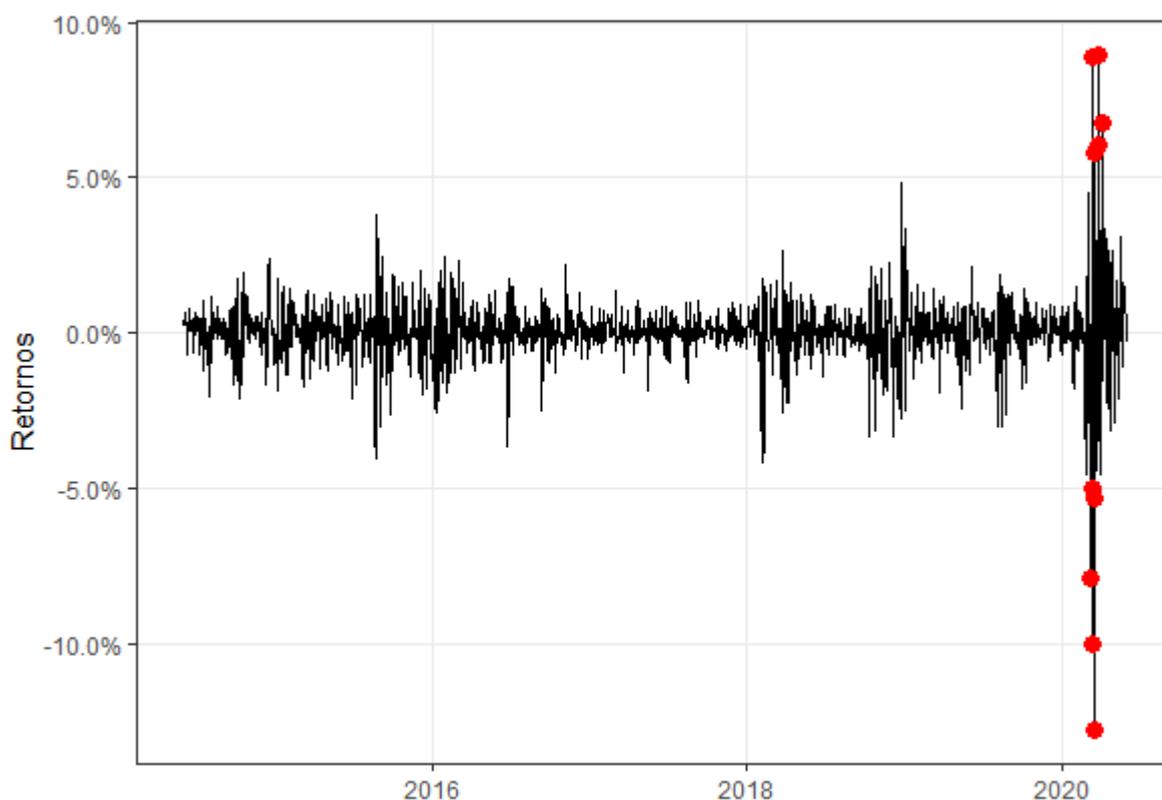


FONTE: Elaboração do autor

Os dados de preço são compostos por valores de fechamento diários do índice de 01/06/2014 a 01/06/2020 (ajustados a dividendos e splits), o que inclui o episódio recente de pandemia do

COVID-19 e a queda do mercado de ações em 2018, ocasionada tanto pela guerra comercial do presidente Donald Trump com a China quanto a desaceleração do crescimento econômico global e a preocupação de que o Federal Reserve estava elevando as taxas de juros muito rapidamente. Em relação à escolha do período, buscou-se uma janela de tempo grande o suficiente para abranger diferentes condições de mercado e regimes de volatilidade. A origem dos dados é o Yahoo Finance, escolha justificada por sua natureza de acesso aberto.

Figura 4 – Série do log-retorno diário para o índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

Olhando para a Figura 4, nota-se que a maioria dos retornos estão centrados em torno do valor de zero, indicando que a série alcançou estacionariedade na média após a primeira diferença, característica reforçada pelos testes de raiz unitária na Tabela 2 abaixo. A preferência pela utilização do log-retorno, descrito na equação (12), se dá por propriedades mais favoráveis à análise estatística do que os retornos aritméticos, entre elas a característica do retorno de vários períodos ser simplesmente a soma dos retornos de períodos individuais. Quando se modela o mercado de ações, é comum assumir que os retornos são normalmente distribuídos. Neste contexto, os log-retornos são superiores aos retornos aritméticos, uma vez que a soma de

amostras repetidas de uma distribuição normal é normalmente distribuída, ao passo que o produto de amostras repetidas de uma distribuição normal não é normalmente distribuído (MEUCCI, 2010).

Além disso, observa-se que grandes mudanças de preço tendem a acontecer dentro de um período próximo, em outras palavras, existe uma aglomeração dos eventos de alta volatilidade, fenômeno comumente chamado de "volatility clustering". Das dez maiores variações absolutas de preços (pontos vermelhos no gráfico), todas elas ocorreram no momento de surto do coronavírus. Ao modelar retornos, deve-se levar tal efeito em consideração e não considerar uma volatilidade constante dos retornos. Esta é exatamente a solução que um modelo ARCH/GARCH oferece.

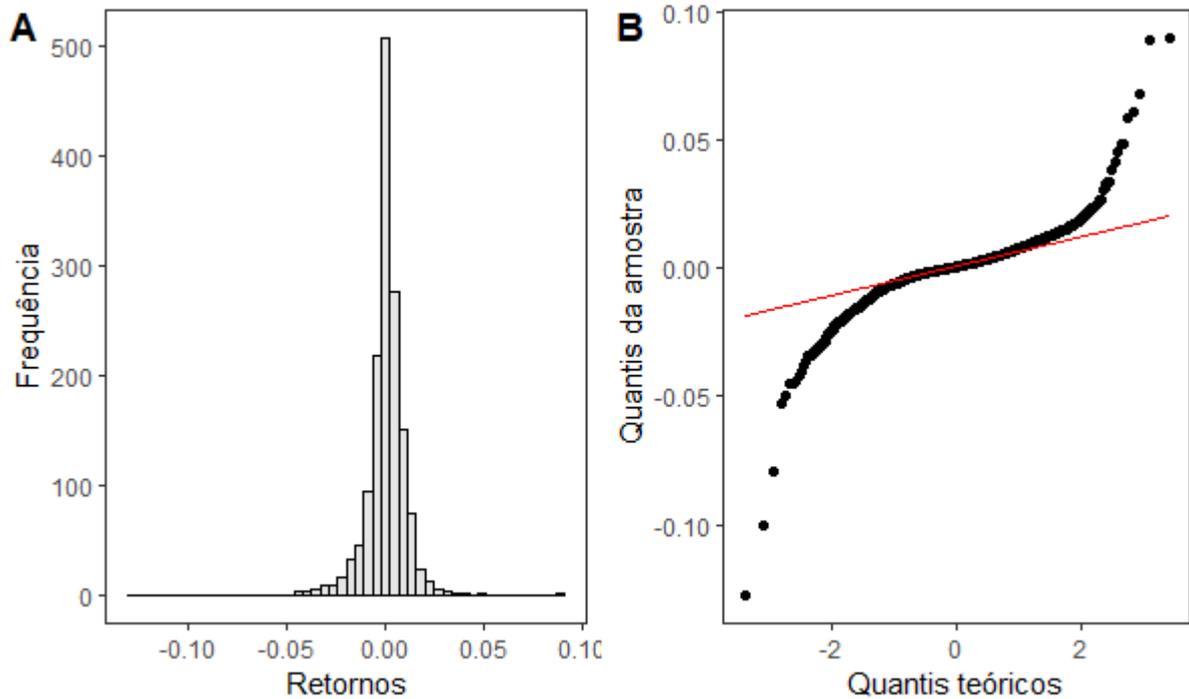
Tabela 1 – Estatísticas descritivas para a série de retornos e retornos absolutos

	Retornos	Retornos absolutos
Observações	1.508	1.508
Mínimo	-12,765	0,001
Média	0,030	0,672
Mediana	0,051	0,402
Máximo	8,968	12,765
Desvio padrão	1,143	0,924
Assimetria	-1,005	4,955
Curtose	26,480	44,074

FONTE: Elaboração do autor

A Tabela 1 apresenta as estatísticas descritivas da série de retornos e retornos absolutos multiplicadas por cem, de modo a mostrar os valores em termos de porcentagem e, assim, facilitar a interpretação da tabela. Como pode ser visto, o menor valor dos retornos foi -12,765% e o maior retorno 8,968%, com média e mediana positivas, ainda que situadas bem próximas de zero. Os retornos são assimétricos a esquerda, enquanto a curtose bruta acima de três sugere comportamento leptocúrtico. O número total de observações da amostra é de 1.508.

Figura 5 – (A) Histograma dos retornos (B) Q-Q plot dos retornos



FONTE: Elaboração do autor

Figura 5A é um histograma de retornos do S&P 500. É possível ver que os retornos têm um pico alto e são moderadamente desequilibrados para a esquerda. Isso significa que eles são maiores na extremidade negativa e a probabilidade de alcançar esses valores negativos é superior a probabilidade assumida pela distribuição normal. Um valor elevado de curtose está associado a um alto nível de risco para um investimento porque indica que há altas probabilidades de retornos extremamente grandes e extremamente pequenos. A Figura 5B representa um gráfico “quantile-quantile”, método utilizado para comparar duas distribuições de probabilidade, plotando seus quantis uns contra os outros. Nota-se que os retornos não seguem uma distribuição normal. Na verdade, podemos dizer que eles são de cauda pesada, uma vez que os maiores e menores valores são mais extremos do que o esperado de uma distribuição normal. Os modelos de heteroscedasticidade condicional conseguem reproduzir justamente esse comportamento de distribuições mais “extremas”.

A Tabela 2 apresenta os resultados dos testes de raiz unitária para os retornos e retornos absolutos. Empregou-se os testes de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), Phillips-Perron (PP) e Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS).

Tabela 2 – Testes de raiz unitária para o índice S&P 500

Retornos	Estatística de teste	p-valor
ADF	-10,470	0,01
PP	-1943,389	0,01
KPSS	0,021	0,10
Volatilidade	Estatística de teste	p-valor
ADF	-5,808	0,01
PP	-1120,803	0,01
KPSS	1,275	0,01

FONTE: Elaboração do autor

Uma forma geral de analisar a existência de estacionariedade é realizando um teste de raiz unitária, que presume o modelo autorregressivo a seguir

$$y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (16)$$

Quando $\varphi = 1$ o modelo é um passeio aleatório, ou seja, valor da série amanhã é seu valor hoje mais uma mudança imprevisível. O passeio aleatório sem deslocamento é um processo estocástico não estacionário no sentido de que sua variância aumenta com o tempo, a despeito da média constante. Diante disso, a hipótese nula ($\varphi = 1$) sugere a presença de raiz unitária e conseqüentemente não estacionariedade da série, enquanto a hipótese alternativa $|\varphi| < 1$ indica estacionariedade (STOCK; WATSON, 2019).

O teste ADF é mais facilmente implementado estimando uma versão modificada da Equação (16), obtida subtraindo y_{t-1} de ambos os lados. Seja $\alpha = \varphi - 1$, então a equação anterior torna-se

$$\Delta y_t = (\varphi - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

A estatística t testando $\alpha = 0$ na equação (17) é chamada de estatística Dickey-Fuller. Sob a hipótese nula de haver raiz unitária, essa estatística não possui uma distribuição normal, exigindo um conjunto diferente de valores críticos. Conforme demonstrado por Dickey e Fuller (1979), se $\alpha = 0$, o valor t estimado para o coeficiente de y_{t-1} segue a estatística tau (τ). A estimativa pode ocorrer de três maneiras diferentes, a saber:

a) Se a série temporal representa um passeio aleatório:

$$H_0: \alpha = 0; \quad \Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \tau \quad (18)$$

b) Se a série temporal representa um passeio aleatório com deslocamento:

$$H_0: \alpha = 0; \quad \Delta y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \tau_\mu \quad (19)$$

c) Se a série temporal representa um passeio aleatório com deslocamento em torno de uma tendência determinística:

$$H_0: \alpha = 0; \quad \Delta y_t = \mu + \delta_t + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \tau_\tau \quad (20)$$

Se o valor calculado τ for menor que o valor crítico de τ (teste unicaudal à esquerda), rejeita-se $H_0: \alpha = 0$ e ficam constatados indícios de estacionariedade da série. Caso a hipótese nula não seja rejeitada, pode ser concluído que a série possui uma tendência estocástica, logo não sendo estacionária. O problema do teste acima é que os autores consideraram o erro um ruído branco. Porém, frequentemente, o erro é um processo estacionário qualquer, fato que pode causar distorções no poder do teste. O teste Dickey-Fuller aumentado assume que os termos de erro (ε_t) são correlacionados e verifica se um modelo autoregressivo possui ou não raiz unitária

$$\Delta y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (21)$$

em que:

$$\alpha = -\left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i\right); \quad \lambda_i = -\sum_{j=1}^{p-1} \varphi_{j+1} \quad (22)$$

O teste pode ser feito, então, empregando-se os mesmos valores críticos descobertos por Dickey e Fuller. Em outras palavras, desde que seja feita a correção do modelo, de modo a levar em conta as demais variáveis defasadas, em nada se alteram os valores críticos do teste ou a interpretação do modelo (BUENO, 2011). O teste de Phillips e Perron (1988) faz uma correção não paramétrica ao teste ADF, possibilitando que seja consistente mesmo que haja variáveis defasadas dependentes e correlação serial nos erros

$$\hat{z}_{t,\mu} = \hat{t}_\mu \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\nu}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\nu}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\nu} \sqrt{T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}} \right) \quad (23)$$

O termo $\hat{\nu}^2$ representa a variância de longo prazo, em que estão incluídas todas as autocovariâncias do processo μ_t . O teste PP torna dispensável, assim, a especificação de um modelo com ordem autorregressiva suficientemente grande para filtrar a correlação serial dos resíduos. As equações estimadas e os testes designados são idênticos aos do ADF. Portanto, a interpretação também é análoga (BUENO, 2011).

Segundo Bueno (2011, p. 129), “Um dos problemas do teste de raiz unitária desenvolvido por Dickey e Fuller é seu baixo poder, particularmente ante a presença de um componente de médias móveis perto do círculo unitário.”, o que significa que o teste ADF possui baixa probabilidade de rejeitar corretamente a hipótese nula de não-estacionariedade para uma infinidade de séries econômicas. Por esse motivo, outros testes foram desenvolvidos. Um deles é o teste KPSS. A hipótese nula é de estacionariedade da série, ou seja, $H_0: y_t \sim I(0)$ contra $H_1: y_t \sim I(1)$. A ideia dos autores é usar o teste KPSS de forma complementar aos testes de raiz unitária, sob o argumento de que é possível distinguir a raiz unitária das séries cujos dados não são suficientemente conclusivos. Inicialmente, considere uma série temporal com um componente de nível e um componente irregular, tal que não possua tendência claramente definida. Em particular, suponha

$$y_t = x_t + \mu_t \quad (24)$$

em que x_t é o componente nível e μ_t é o componente irregular, ruído branco com variância σ_u^2 . Pode-se supor que o nível muda aleatoriamente ao longo do tempo da seguinte maneira

$$x_t = x_{t-1} + v_t \quad (25)$$

em que $v_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$. Assume-se que os componentes irregulares μ e v não são correlacionados nem serialmente dependentes. O componente v tem a capacidade de deslocar o nível da série original para cima ou para baixo. Se $\sigma_u^2 = 0$, não há componente irregular em y_t , fazendo com que o processo siga um passeio aleatório. Se $\sigma_v^2 = 0$, o nível é constante e y_t só se desloca em razão de μ_t . O objetivo é testar a variância de passeio aleatório x_t . Se essa variância for nula, o processo é estacionário. Nessa estrutura, a hipótese a ser testada é

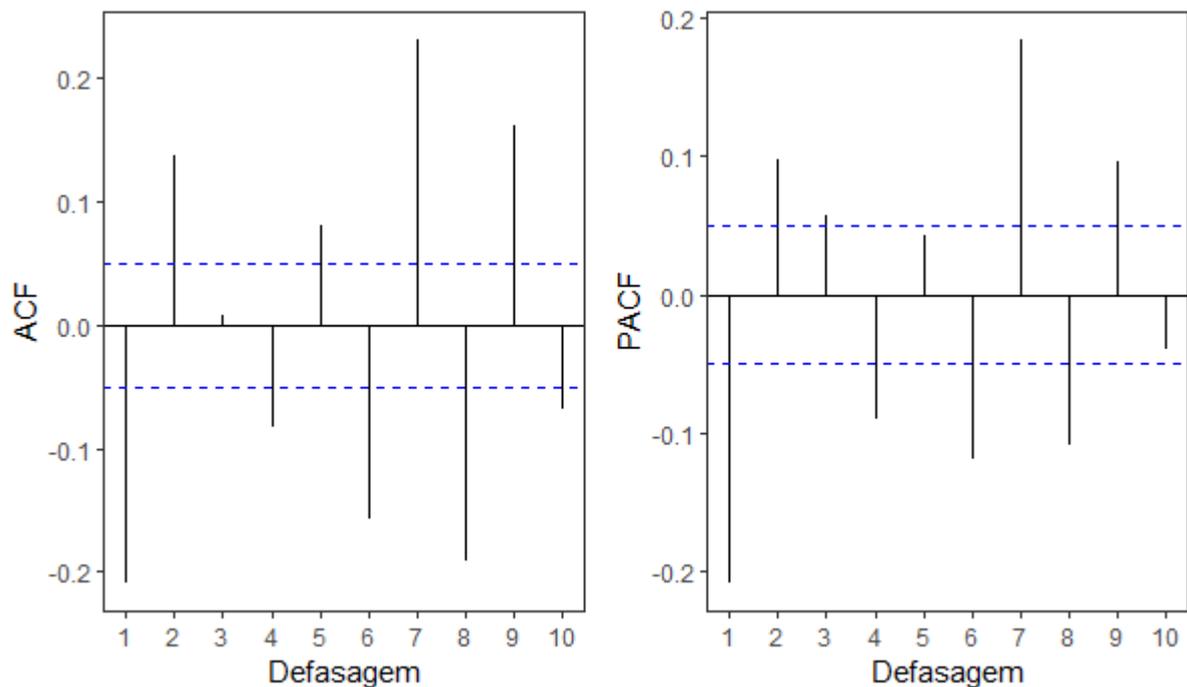
$$H_0: \sigma_v^2 = 0 \quad X \quad H_1: \sigma_v^2 > 0 \quad (26)$$

Os testes KPSS são definidos em η , η_μ e η_v conforme se especifica o modelo sem constante ou tendência, com constante ou com constante e tendência, respectivamente (BUENO, 2011). Isto posto, a estacionariedade depende da rejeição da hipótese nula nos testes ADF e PP ao mesmo tempo em que não se rejeita a hipótese nula no teste KPSS. Os três testes propostos indicaram estacionariedade dos retornos em nível. Por outro lado, há indícios de quebra estrutural na série de volatilidade, relacionado ao choque do COVID que afetou todos os mercados do mundo no início de 2020. A proposta do estudo envolve verificar o desempenho dos modelos em "tempo real" mesmo com esse problema de quebra estrutural, o que inclui realizar um corte na amostra com o objetivo de realizar previsões (processo detalhado na próxima seção). Em um novo exame da subamostra, revelam-se resultados para a volatilidade indistintos daqueles apresentados pelos retornos da Tabela 2.

Na Figura 6 pode-se verificar a Função de Autocorrelação (ACF) e a Função de Autocorrelação Parcial (PACF) dos retornos do S&P 500. No geral, os retornos não apresentam forte interdependência, embora seja possível observar que há algumas defasagens acima da faixa significativa. Isso levanta a seguinte pergunta: os retornos exibem autocorrelação? A fim de responder esta pergunta foi realizado um teste Ljung-Box para as primeiras 10 defasagens. O

qui-quadrado do teste foi 335,71 e o p-valor $2,2e-16$, o que significa que rejeitamos a hipótese nula de ausência de autocorrelação no nível dos retornos. Isso vai de encontro a hipótese da eficiência fraca de mercado (FAMA, 1970), um dos fatos estilizados mais bem estabelecidos sobre retornos de ativos financeiros. Em exercícios preliminares, experimentou-se incluir uma estrutura ARMA na dinâmica da média dos retornos, mas essa sofisticação não altera quantitativamente ou qualitativamente os resultados, então não será considerada neste trabalho.

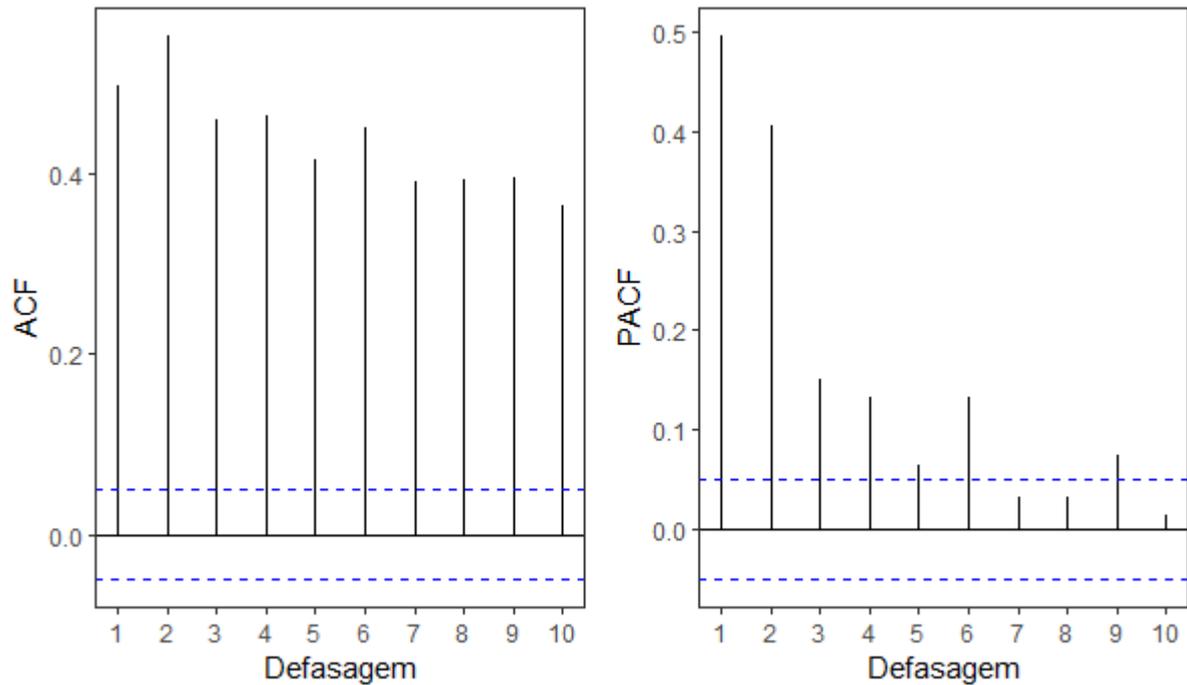
Figura 6 – Correlogramas para a série de retornos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

A Figura 7 apresenta o ACF e o PACF dos retornos absolutos. O PACF mostra uma autocorrelação significativa até a décima defasagem. Analisando o ACF podemos ver que há dependência positiva entre retornos absolutos em dias próximos. A distribuição da série de retornos diários possui caudas pesadas, como descrito acima. Isso pode acontecer se os retornos quadrados estiverem correlacionados ou, em outras palavras, se os retornos tiverem heterocedasticidade condicional. Para testar o efeito ARCH foi realizado um teste de Multiplicador de Lagrange para heterocedasticidade condicional autorregressiva (ARCH). O teste funciona regredindo os erros ao quadrado em suas defasagens e testando a hipótese de que todos os coeficientes da regressão defasada são iguais a zero. Ele toma como entrada uma série de retornos e uma dada defasagem. Com ambas as informações, testa a hipótese nula de que não há efeitos ARCH nos dados (TSAY, 2010).

Figura 7 – Correlogramas para a série de retornos absolutos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

Tabela 3 – Resultados do teste ARCH LM para a série de retornos do índice S&P 500

Defasagem	Estatística LM	p-valor (χ^2 dist)
1	410,32	0,001
2	594,92	0,001
3	598,16	0,001
4	598,11	0,001
5	625,89	0,001

FONTE: Elaboração do autor

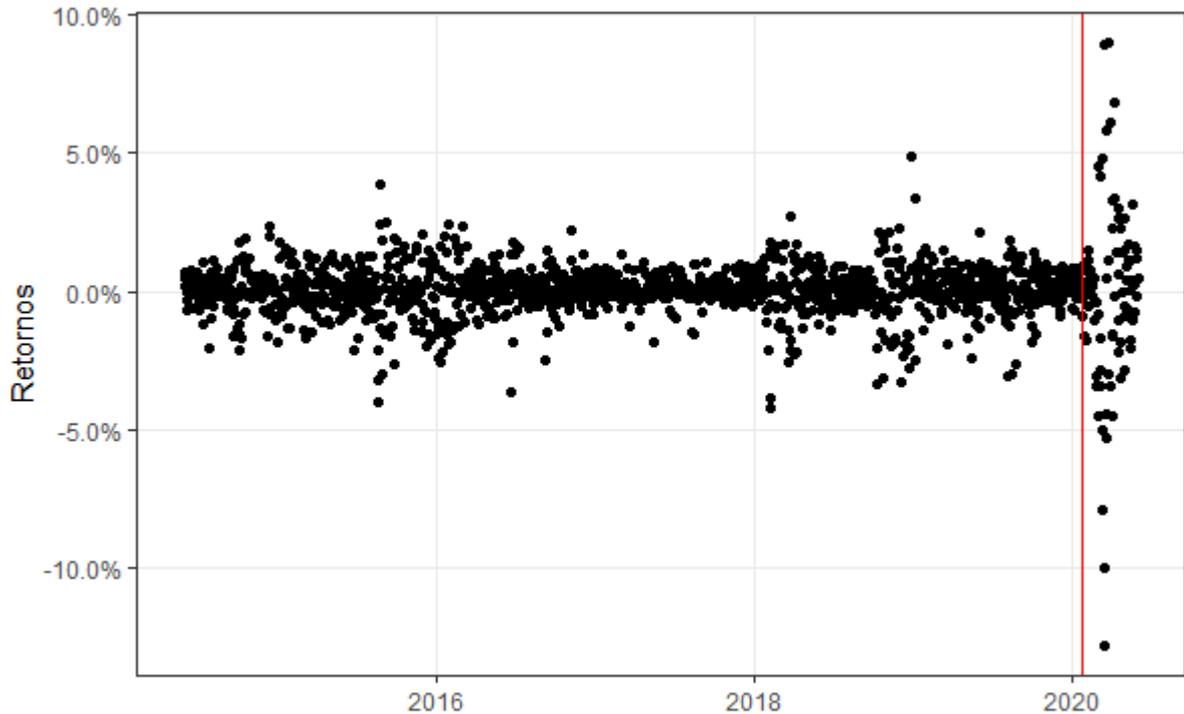
Na Tabela 3 encontram-se os resultados do teste ARCH LM até cinco defasagens, pois o efeito ARCH geralmente pode ser detectado na primeira ou segunda. Os p-valores demonstram que rejeitamos a hipótese nula, logo os retornos são condicionalmente heterocedásticos.

3.2 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE

Dado que o objetivo do trabalho envolve a previsão fora da amostra com foco no período de crise do COVID-19, optou-se por criar uma subamostra limitada ao dia 21/01/2020, data em

que foi confirmado o primeiro caso do novo coronavírus nos Estados Unidos. O procedimento é ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Corte da série de retornos para estimação e previsão fora da amostra



FONTE: Elaboração do autor

O primeiro passo para estimar um modelo GARCH é identificar o modelo, ou seja, definir o número de defasagens usado em cada parte, a equação de variância e os parâmetros da distribuição. Para simplificar, serão estimados quatro modelos diferentes, cada um com uma fórmula de volatilidade distinta, mas a mesma suposição de distribuição. A estimação foi feita utilizando o pacote do R de Ghalanos (2020), que por sua vez opera via máxima verossimilhança com otimização numérica. Na Tabela 4, percebe-se que todos os coeficientes são estatisticamente significantes ao nível de 5% (ver asteriscos próximos aos valores do parâmetro). As últimas três estatísticas, log-verossimilhança, Critério de Informação de Akaike (AIC) e “Critério de informação de Bayes” (BIC), estão relacionadas à estimativa do modelo. AIC e BIC são medidas de qualidade de ajuste e podem ser usadas para selecionar uma defasagem ideal. A log-verossimilhança indica o valor final da log-verossimilhança depois de ser maximizada em busca dos parâmetros de todos os modelos. Para cada conjunto de dados, é possível encontrar o modelo mais apropriado apenas comparando medidas de qualidade de ajuste. Assim, em vez de escolher manualmente suas defasagens, utiliza-se um método

quantitativo. Na prática, realizar uma busca automática pela especificação do modelo é uma boa política de pesquisa, pois pode atenuar um potencial viés do pesquisador.

Tabela 4 - Resultados da estimação dos modelos GARCH

	EWMA	ARCH(3)	GARCH(1,1)	EGARCH(1,1)	EGARCH(3,3)
λ	0,930522***				
Ω		0,000025***	0,000004***	-0,680478***	-2,451173***
α_1		0,250397***	0,212677***	-0,239933***	-0,255837***
α_2		0,222016***			-0,540070***
α_3		0,227306***			-0,287801***
β_1			0,734668***	0,930891***	-0,999962***
β_2					0,839526***
β_3					0,916808***
γ_1				0,183596***	0,299799***
γ_2					0,453142***
γ_3					0,148193***
$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$			0,947345	0,690958	-0,327336
Distribuição	norm	norm	norm	norm	norm
Log-verossimilhança	4901,769	4935,945	4979,630	5032,514	5072,647
AIC	-6,9157	-6,9597	-7,0228	-7,0960	-7,1442
BIC	-6,9083	-6,9411	-7,0079	-7,0774	-7,1034

Nota. ***p < 0,001; **p < 0,01; *p < 0,05

FONTE: Elaboração do autor

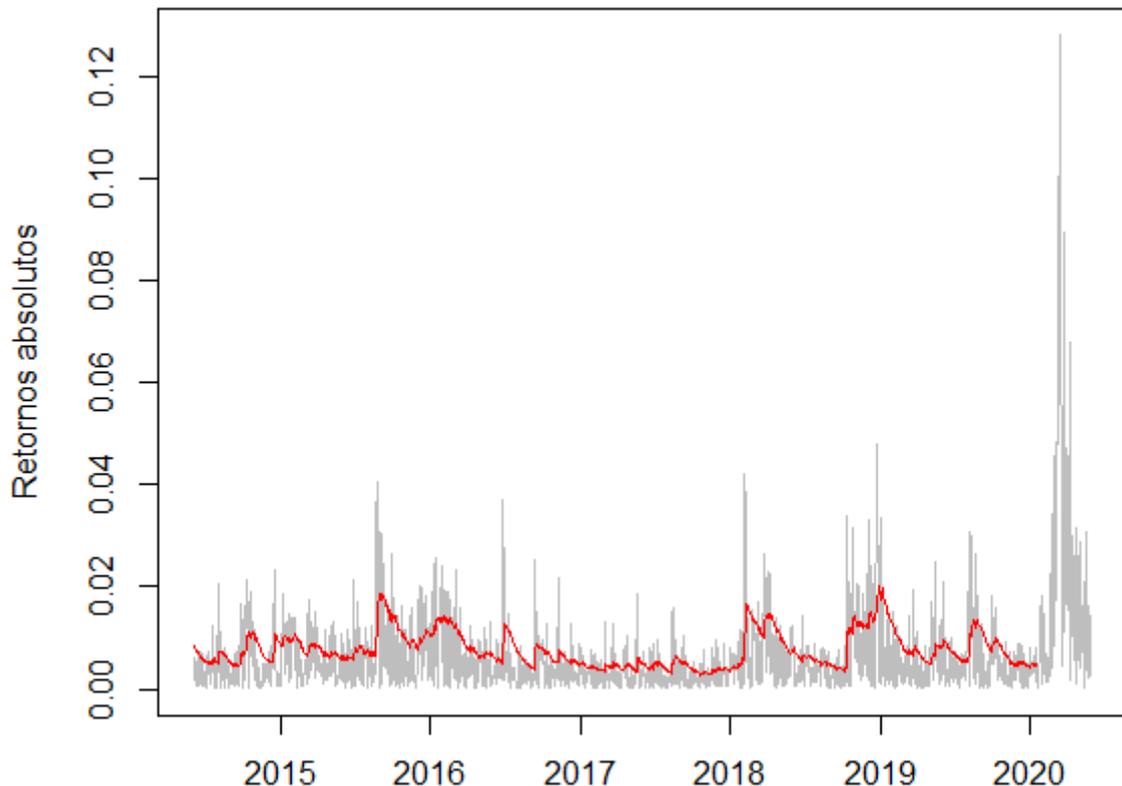
A regra é: quanto melhor o modelo, menor o valor de AIC ou BIC. Deve-se, no entanto, escolher quais critérios usar. A diferença de um para o outro é como eles penalizam o número de coeficientes no modelo, como pode ser visto pelas equações abaixo

$$AIC = -2(\loglik) + 2K \quad (27)$$

$$BIC = -2(\loglik) + K \cdot \ln(N) \quad (28)$$

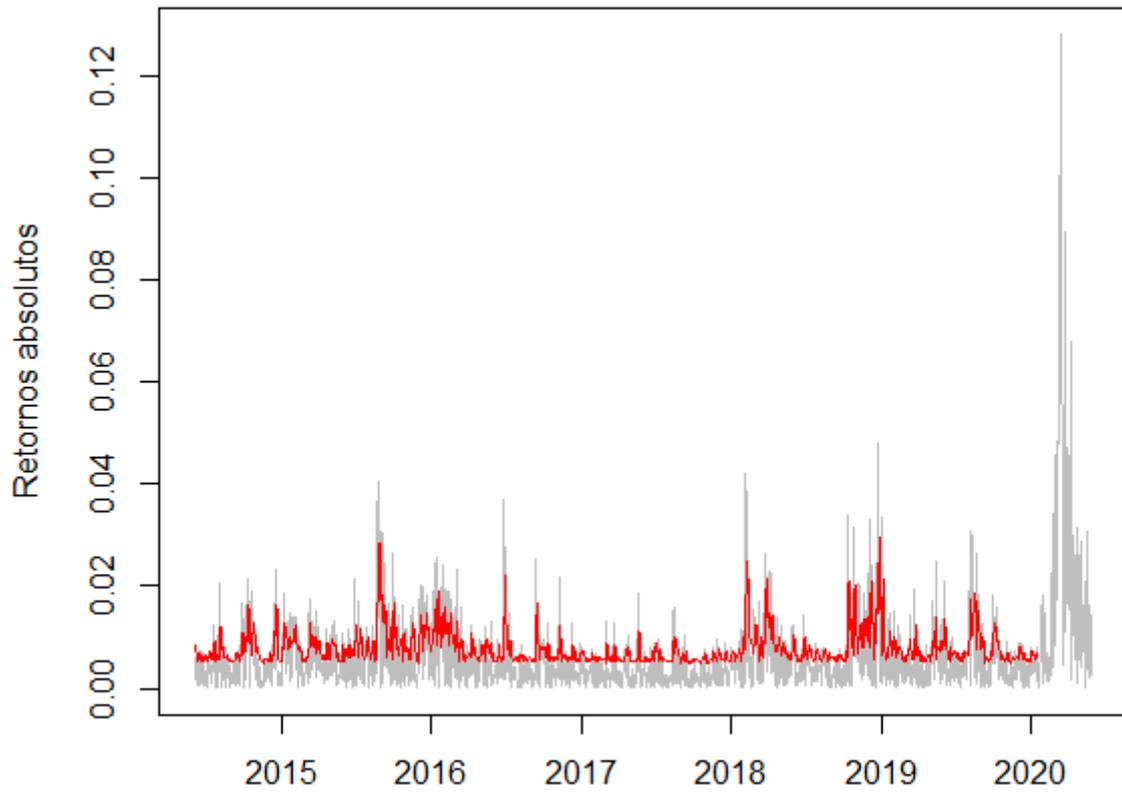
onde \loglik é a log-verossimilhança resultante do modelo estimado, K é o número de parâmetros estimados e N é o número de observações (TSAY, 2010). O AIC é mais flexível que a BIC e tende a escolher modelos com um grande número de parâmetros. Por outro lado, o BIC penaliza coeficientes extras e observações adicionais, resultando na escolha de modelos parcimoniosos com um número relativamente pequeno de coeficientes. Conforme sugerem as tabelas encontradas no apêndice A, selecionou-se os modelos ARCH(3), GARCH(1,1) e EGARCH(3,3) para a previsão fora da amostra. Em geral, é melhor manter os modelos GARCH simples e parcimoniosos. Os benefícios vêm de estimativas rápidas e melhores previsões de volatilidade (PERLIN et al., 2021). Por esse motivo, decidiu-se incluir o modelo EGARCH(1,1) para comparação. Os desvios-padrões condicionais estimados pelos modelos para as séries de retornos do índice S&P 500 podem ser visualizados nas Figuras 9 a 13.

Figura 9 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EWMA



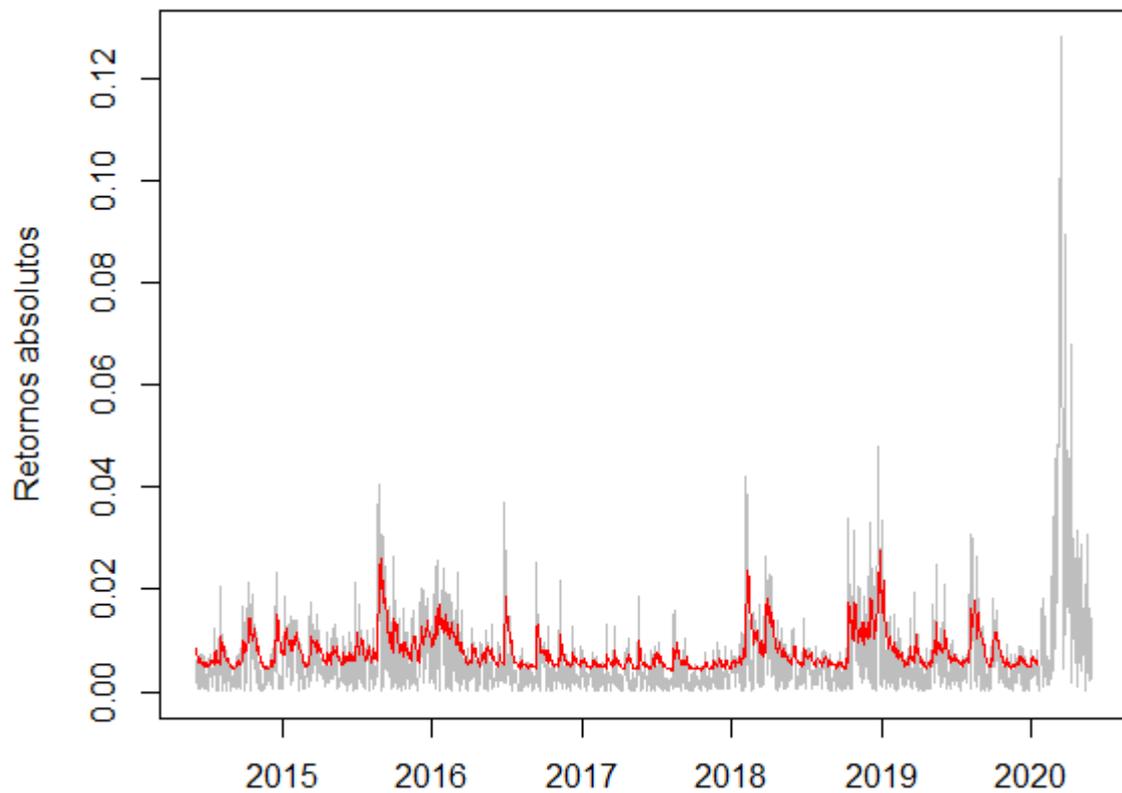
FONTE: Elaboração do autor

Figura 10 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo ARCH(3)



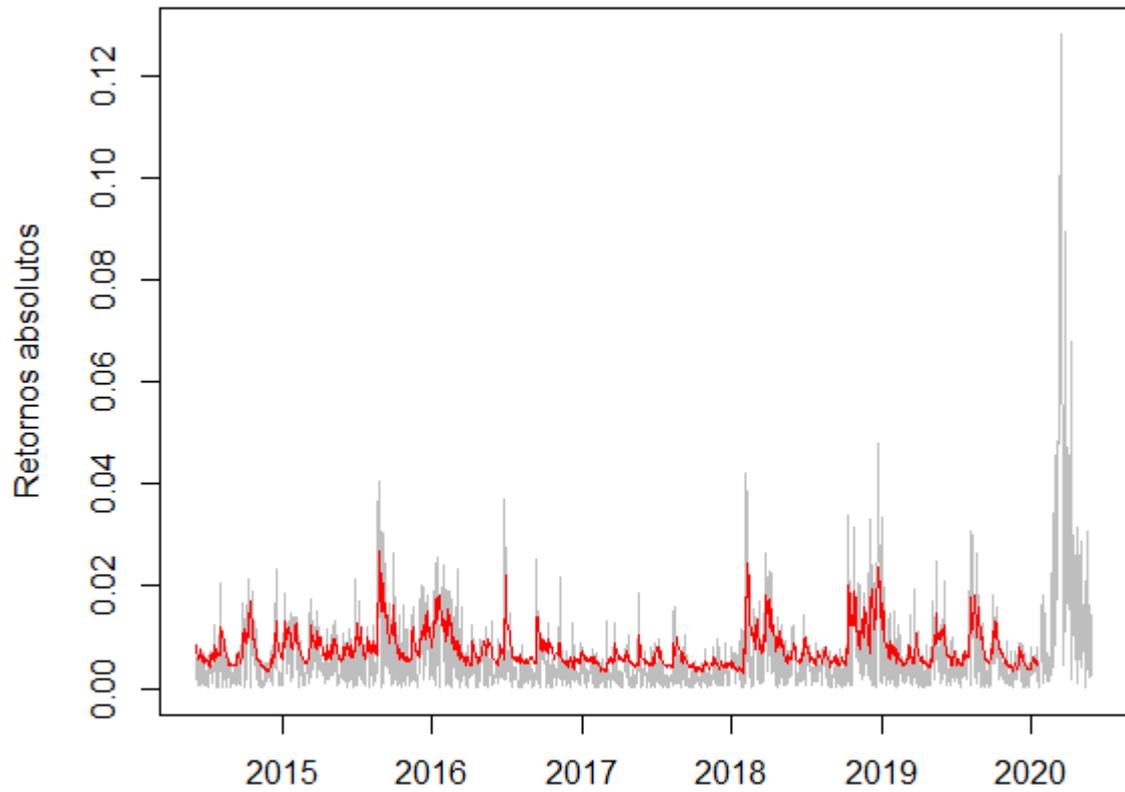
FONTE: Elaboração do autor

Figura 11 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo GARCH(1,1)



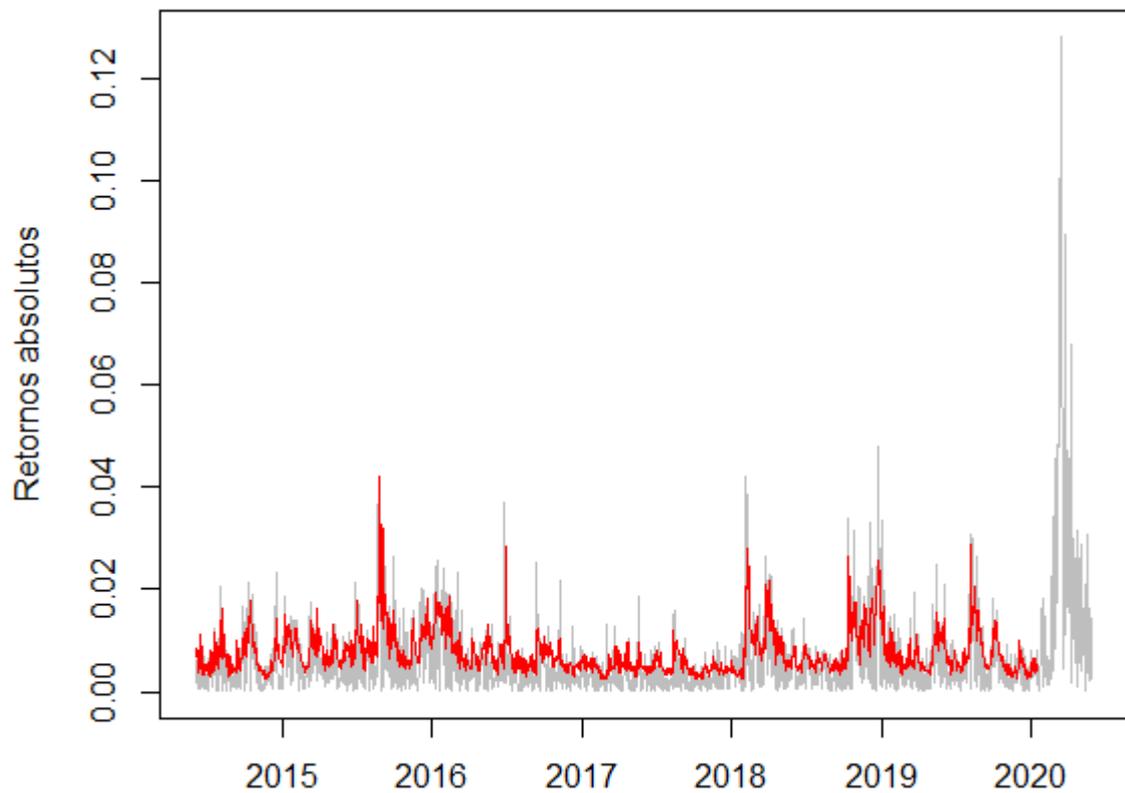
FONTE: Elaboração do autor

Figura 12 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EGARCH(1,1)



FONTE: Elaboração do autor

Figura 13 - Desvio padrão condicional estimado pelo modelo EGARCH(3,3)



FONTE: Elaboração do autor

3.3 BACKTEST PARA O VALOR EM RISCO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE

Na comparação dos modelos empregados neste estudo, será utilizado o VaR paramétrico, servindo como uma medida de desempenho de cada modelo em proporcionar intervalos sobre as possíveis perdas dos agentes. Para o melhor modelo de volatilidade, espera-se um valor em risco que tenha o menor número de violações sobre os limites previstos. Conforme metodologia explicada na seção 2.5, utiliza-se um teste estatístico de distribuição binomial para determinar se existem evidências de qualquer inadequação no modelo VaR subjacente.

A Tabela 5 apresenta o número de violações de cada modelo, incluindo o p-valor para o teste binomial. A porcentagem de violações do modelo EWMA ficou ligeiramente acima dos 5% esperados, porém o p-valor indica que não houve rejeição da hipótese nula de que se está operando um modelo preciso de VaR. Os modelos ARCH e GARCH apresentaram resultados similares. Já o modelo EGARCH(3,3) ficou com um número consideravelmente maior de violações, não sendo indicado como um bom modelo de VaR, enquanto sua versão mais parcimoniosa obteve resultado positivo, ainda que bem próximo ao valor crítico. Pode-se observar as estimações de VaR 5% para a série de retornos nas Figuras 14 a 18.

Tabela 5 – Estatísticas do Valor em Risco dentro da amostra

	Número de violações	Porcentagem de violações	p-valor (teste binomial)
EWMA	77	5,43%	0,429
ARCH(3)	81	5,72%	0,222
GARCH(1,1)	79	5,58%	0,329
EGARCH(1,1)	87	6,14%	0,051
EGARCH(3,3)	89	6,28%	0,033

Nota: Nível de confiança de 95% - Porcentagem de violações esperadas é de 5%

FONTE: Elaboração do autor

Figura 14 - Comparação do VaR (5%) EWMA com os retornos do índice S&P 500

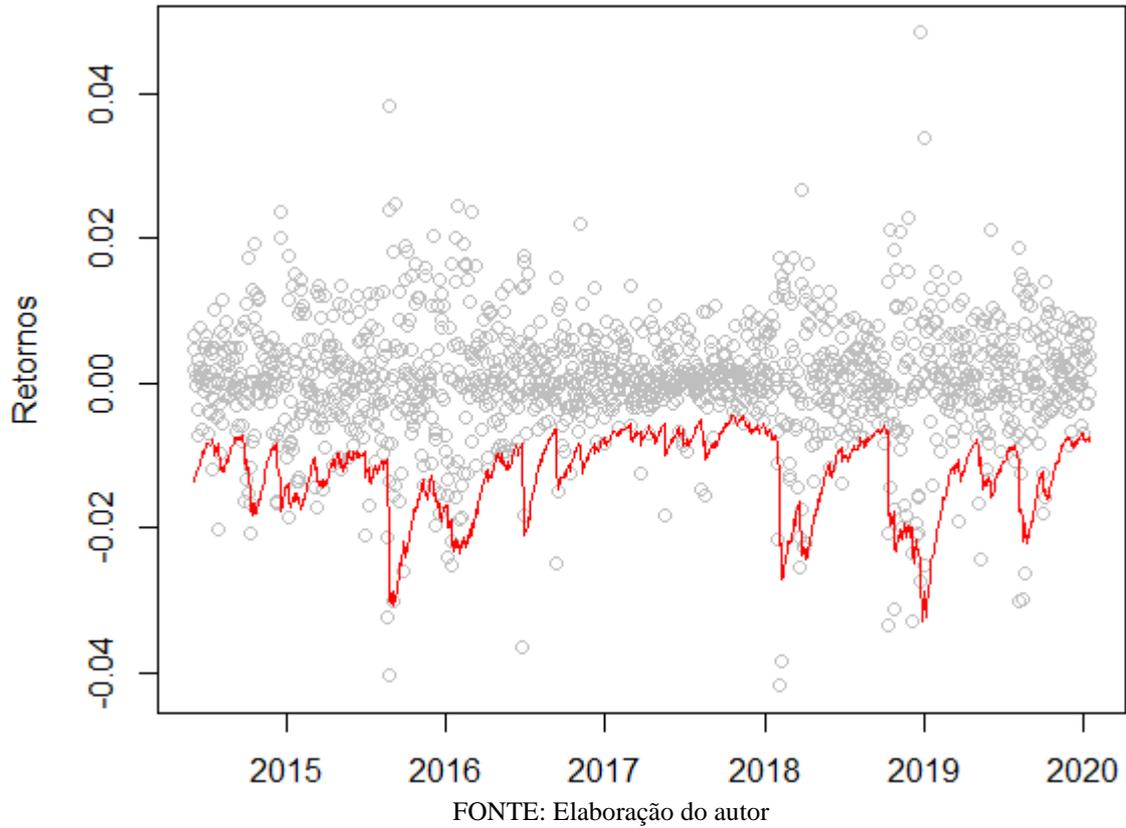


Figura 15 - Comparação do VaR (5%) ARCH(3) com os retornos do índice S&P 500

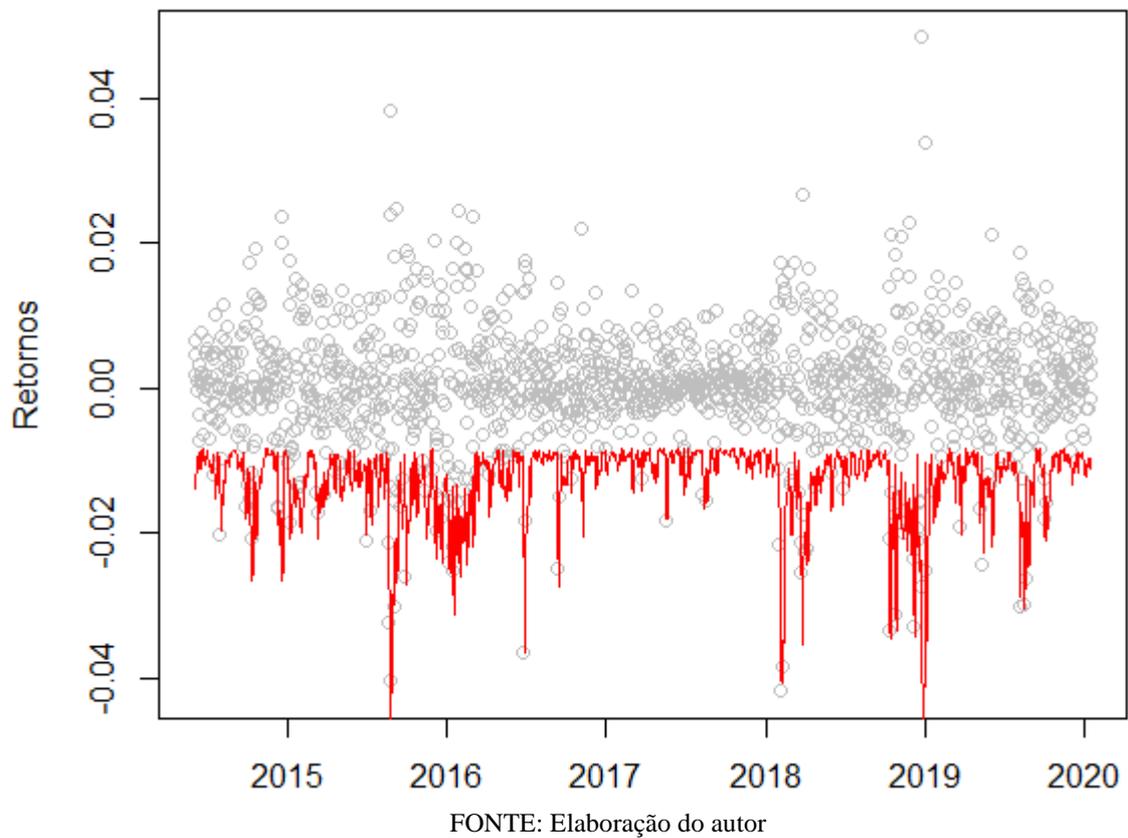
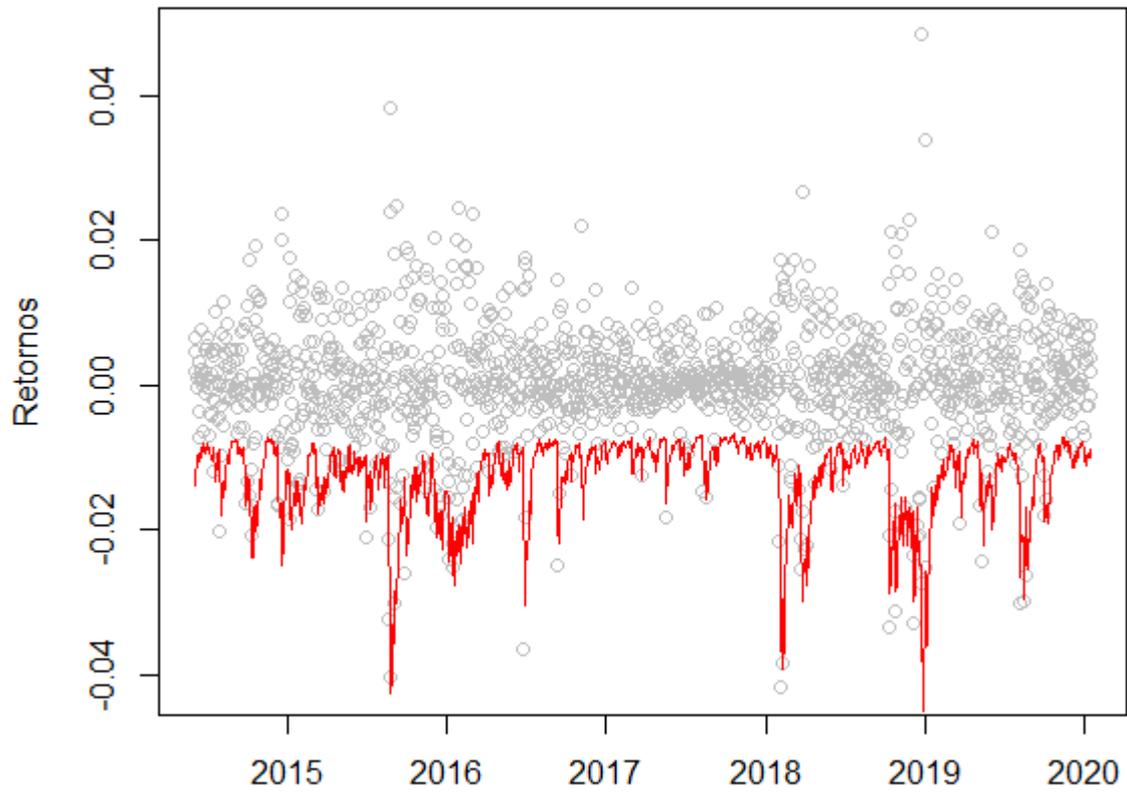
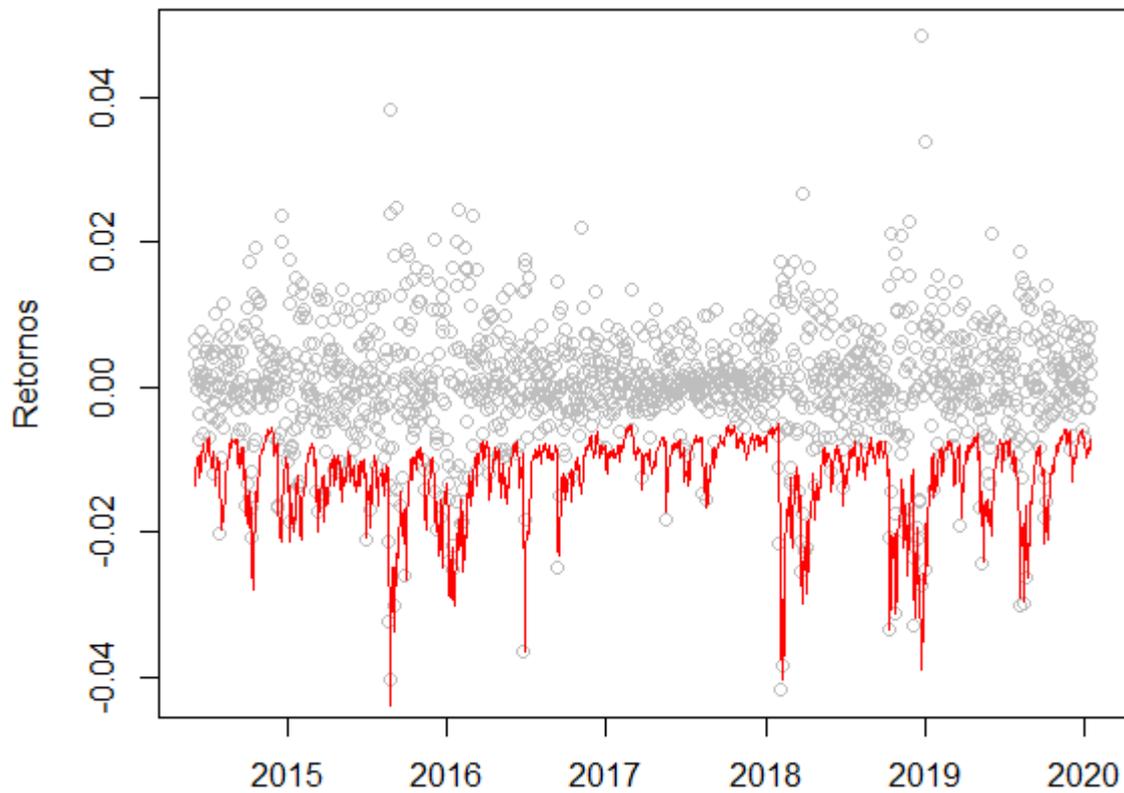


Figura 16 - Comparação do VaR (5%) GARCH(1,1) com os retornos do índice S&P 500



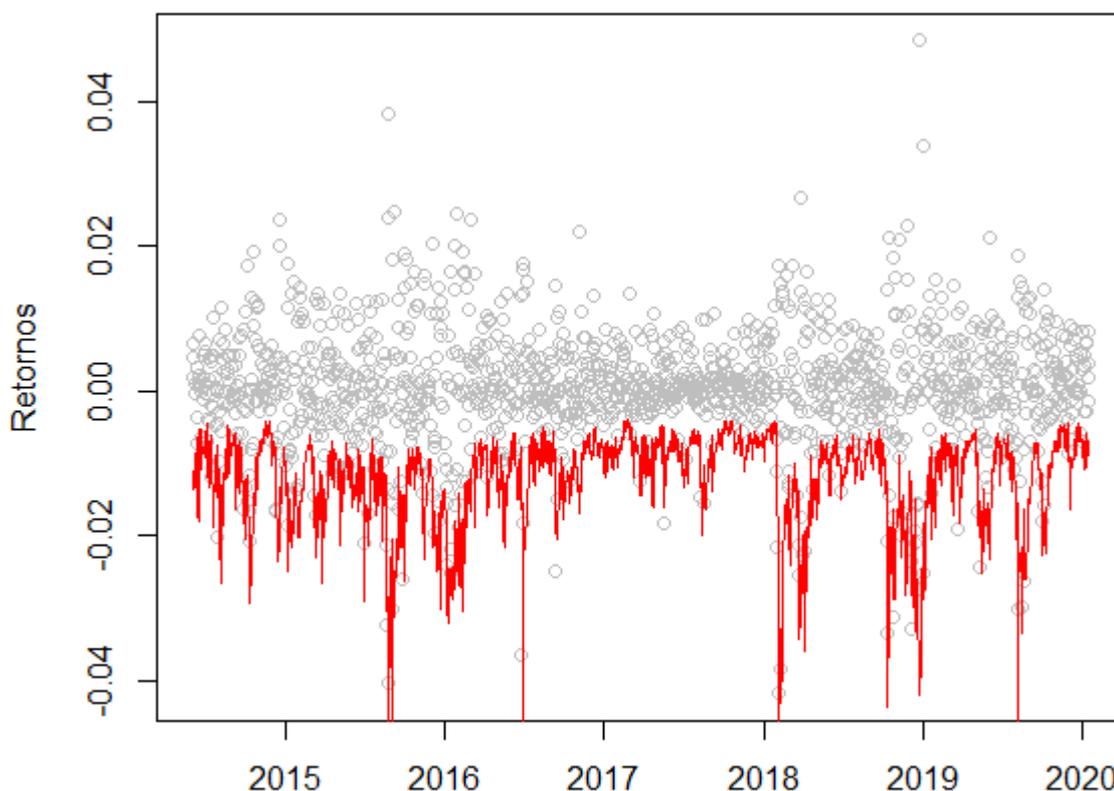
FONTE: Elaboração do autor

Figura 17 - Comparação do VaR (5%) EGARCH(1,1) com os retornos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

Figura 18 - Comparação do VaR (5%) EGARCH(3,3) com os retornos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

3.4 PREVISÕES

Para testar a capacidade prática de previsão dos modelos, foram realizadas pseudoprevisões fora da amostra entre as datas 22/01/2021 e 06/01/2021. Esse método é chamado de pseudoprevisão fora da amostra pois não é uma previsão verdadeira. A previsão verdadeira ocorre em tempo real, ou seja, faz-se previsões sem conhecer os valores futuros da série. Na pseudoprevisão fora da amostra, simula-se a previsão em tempo real utilizando um modelo, mas existem dados "futuros" contra os quais é possível avaliar essas previsões simuladas. Mais especificamente, foi usado um sistema de previsão contínua do tipo "expanding window" para um passo à frente, em que se incorpora novas observações a amostra original ao aumentar o número de dados na janela, reestimando o modelo a cada observação adicionada. Como o tamanho da amostra de estimação é muito maior que o da amostra de previsão, o impacto quantitativo de se utilizar um tamanho de janela fixo ("rolling window") é mínimo. Os resultados das previsões podem ser observados nas Figuras 19 a 28.

Figura 19 - Previsão EWMA comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500

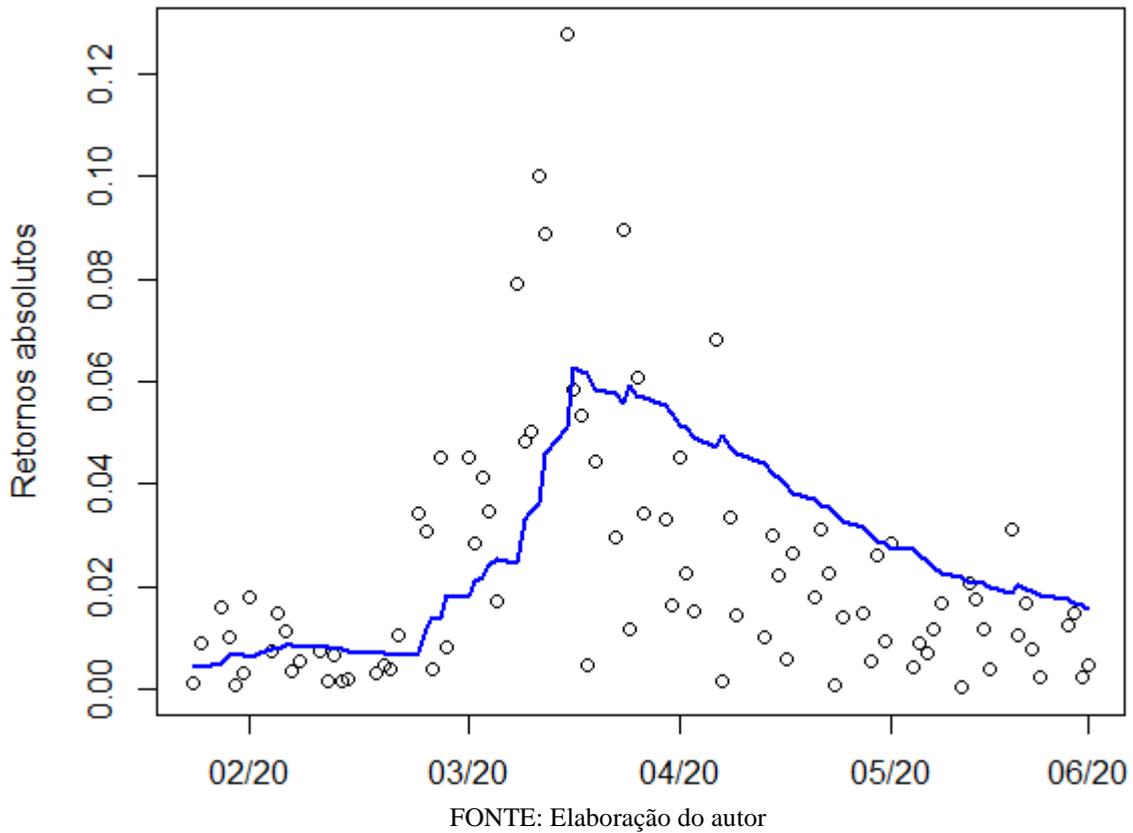


Figura 20 - Previsão VaR (5%) EWMA comparada aos retornos do índice S&P 500

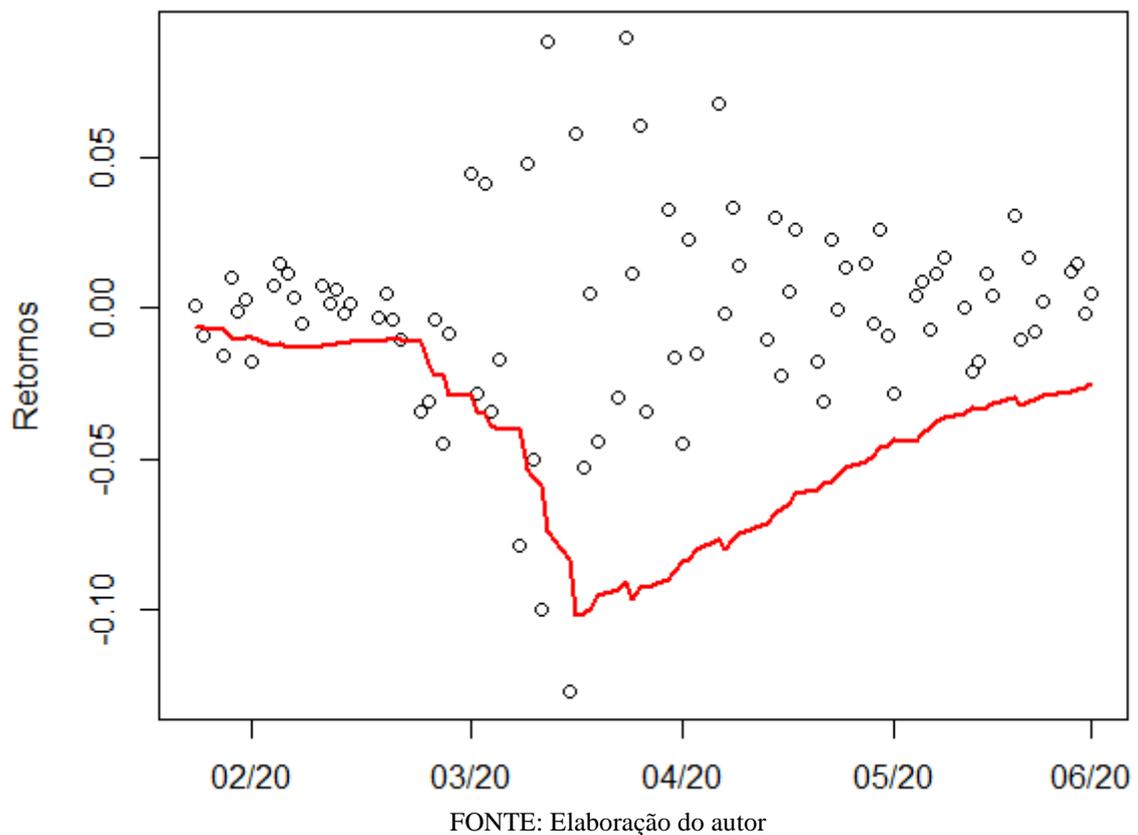


Figura 21 - Previsão ARCH(3) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500

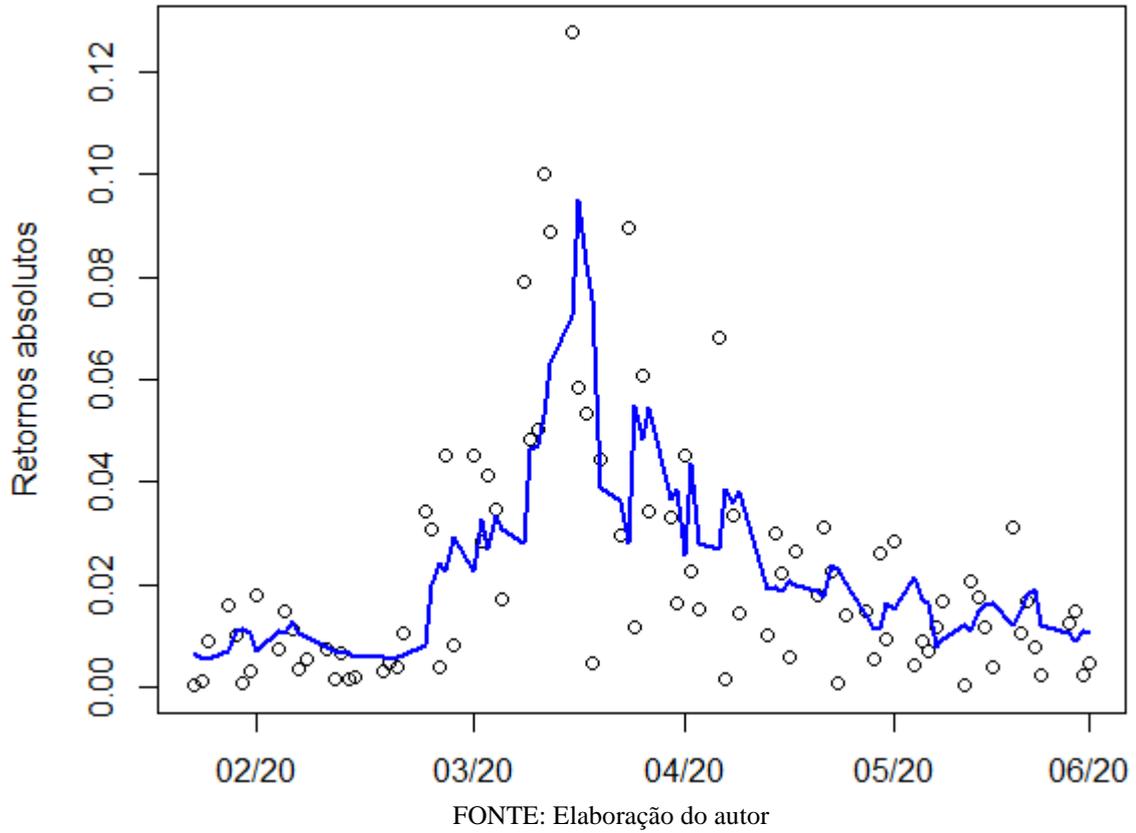


Figura 22 - Previsão VaR (5%) ARCH(3) comparada aos retornos do índice S&P 500

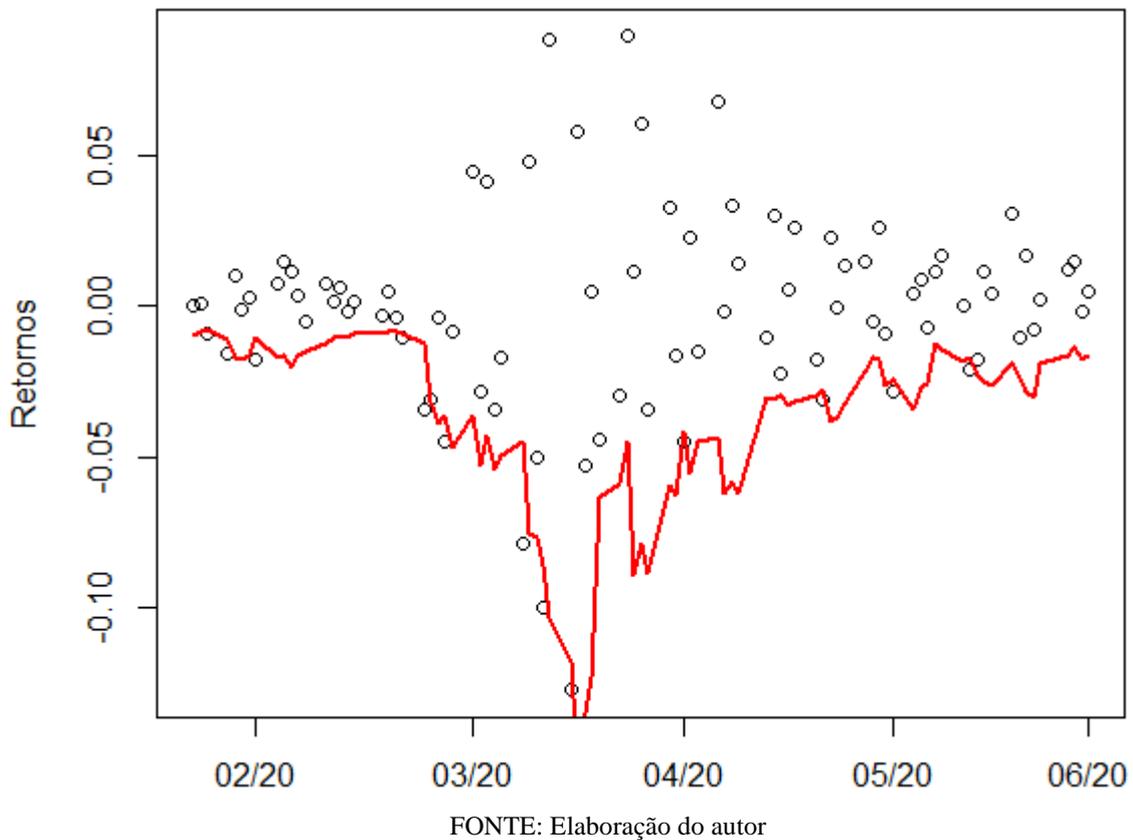
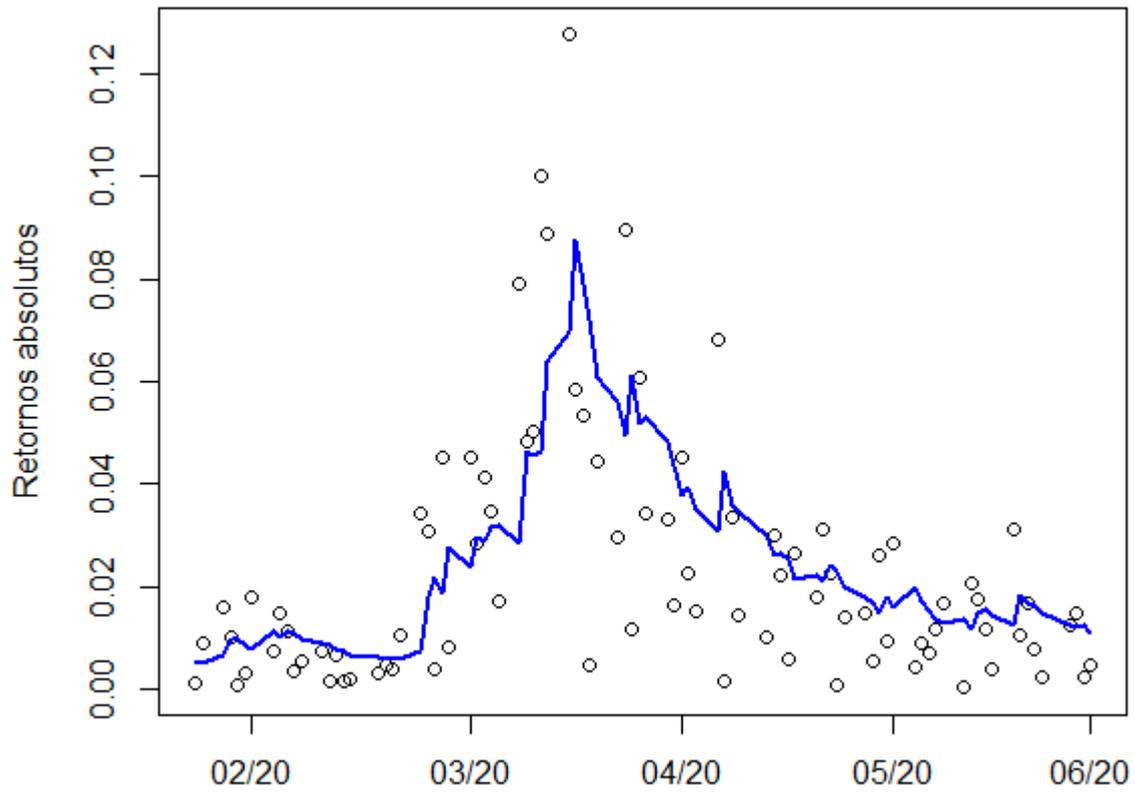
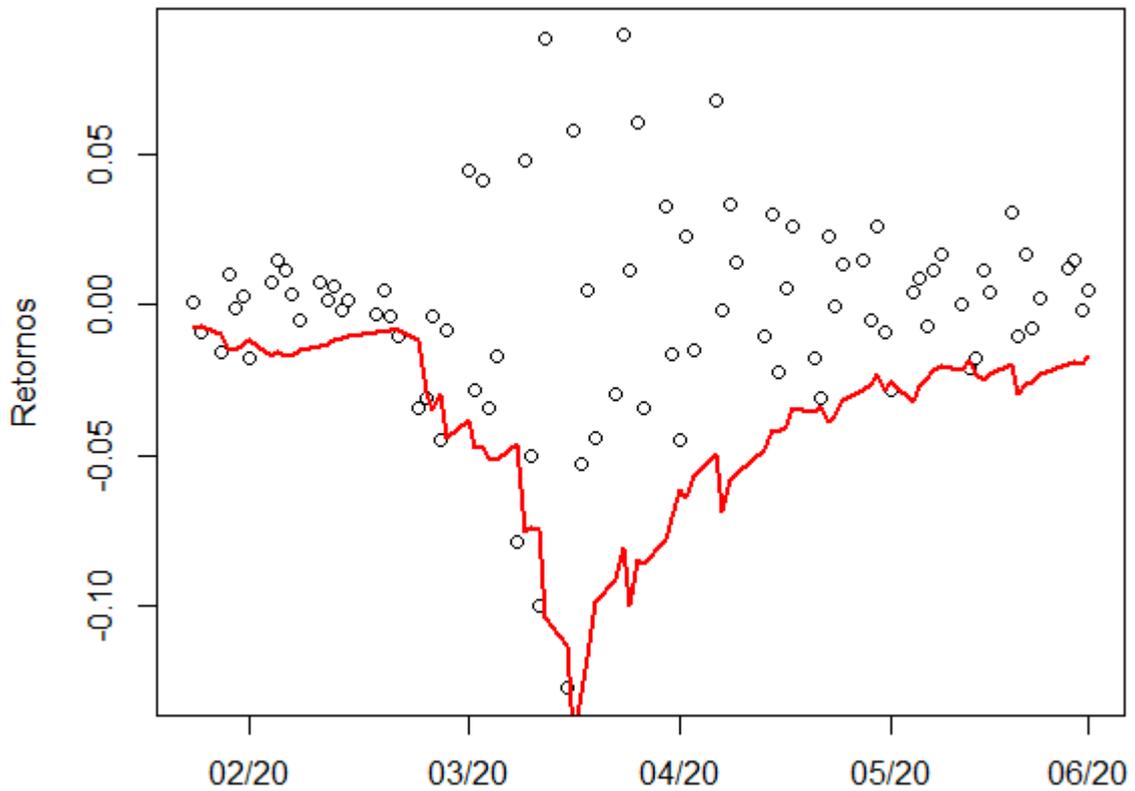


Figura 23 - Previsão GARCH(1,1) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500



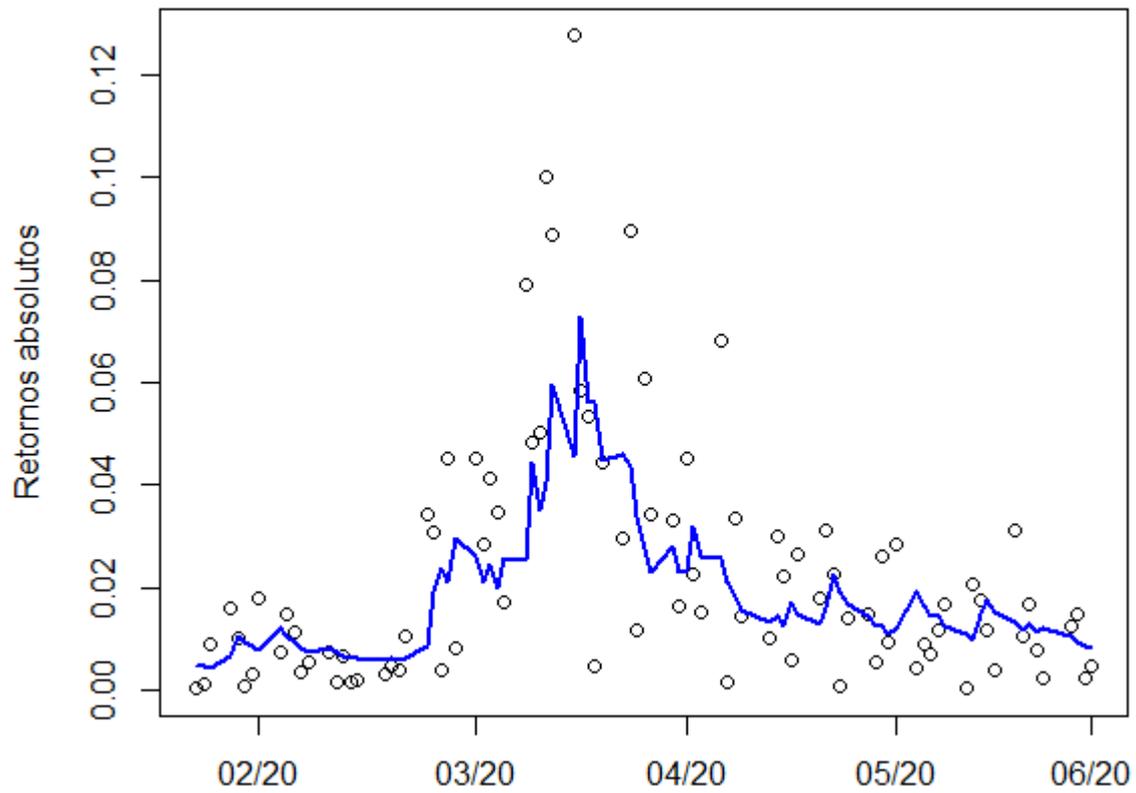
FONTE: Elaboração do autor

Figura 24 - Previsão VaR (5%) GARCH(1,1) comparada aos retornos do índice S&P 500



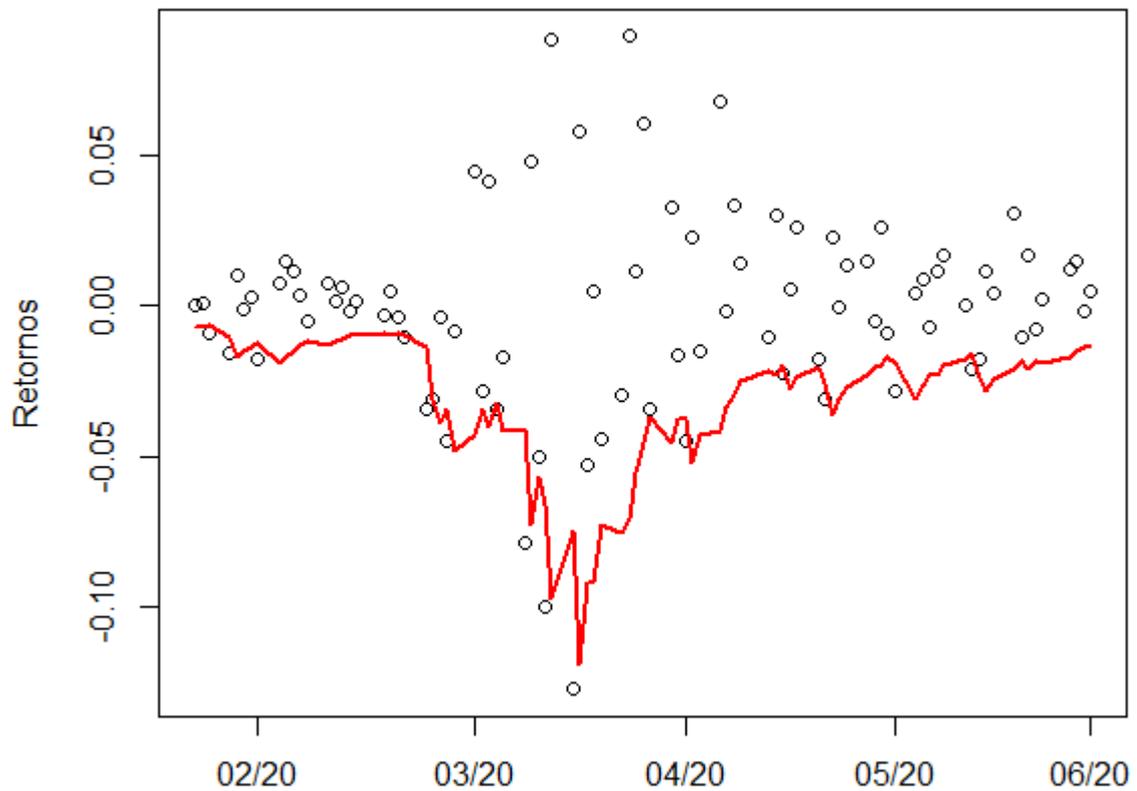
FONTE: Elaboração do autor

Figura 25 - Previsão EGARCH(1,1) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500



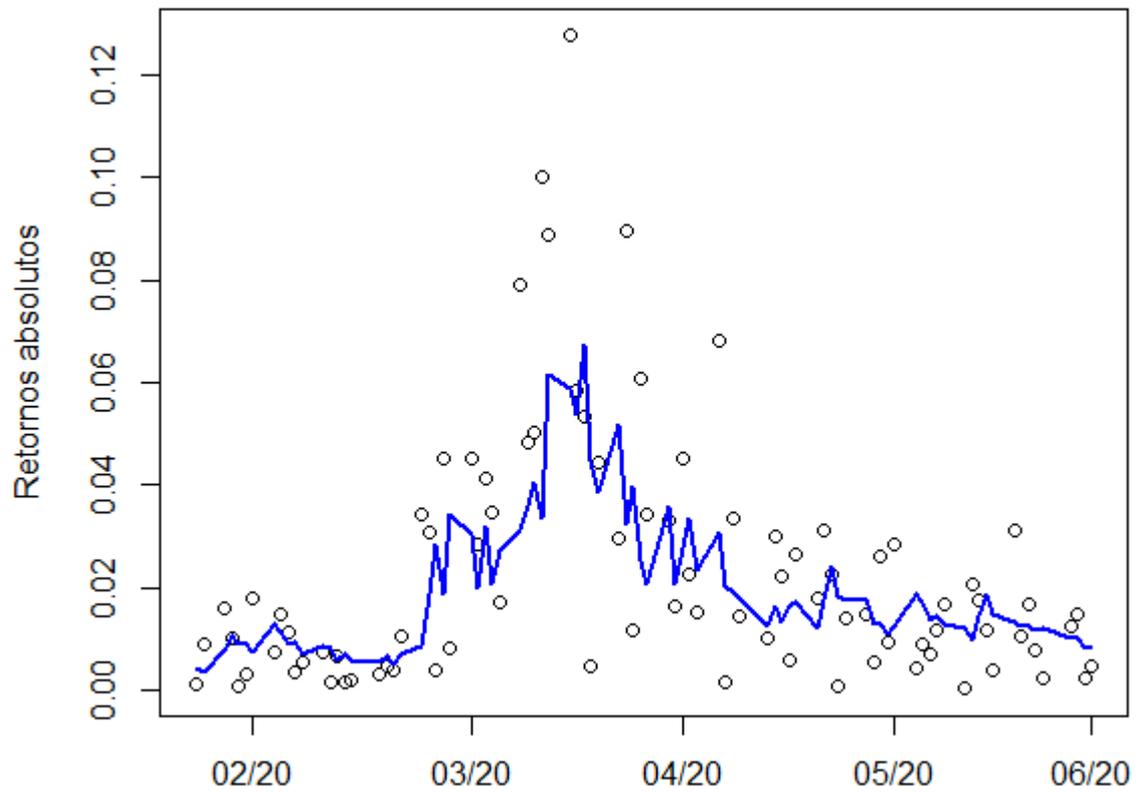
FONTE: Elaboração do autor

Figura 26 - Previsão VaR (5%) EGARCH(1,1) comparada aos retornos do índice S&P 500



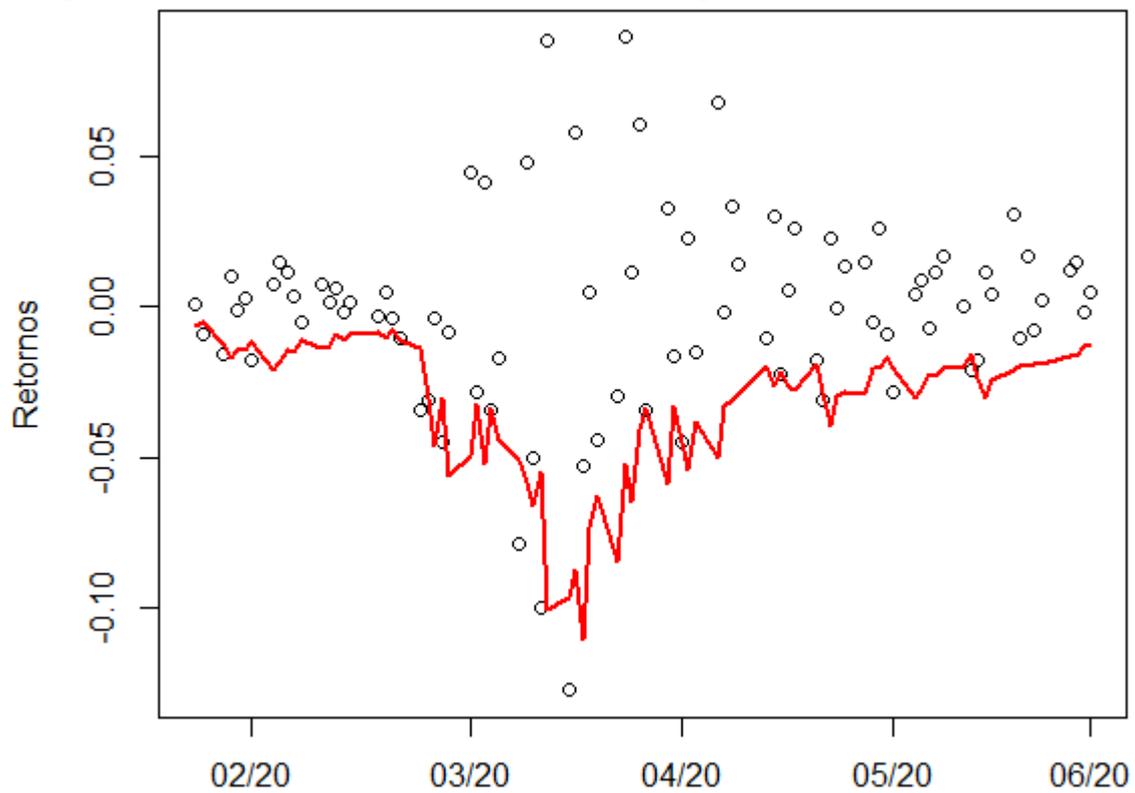
FONTE: Elaboração do autor

Figura 27 - Previsão EGARCH(3,3) comparada aos retornos absolutos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

Figura 28 - Previsão VaR (5%) EGARCH(3,3) comparada aos retornos do índice S&P 500



FONTE: Elaboração do autor

Tabela 6 – Estatísticas do Valor em Risco fora da amostra

	Número de violações	Porcentagem de violações	p-valor (teste binomial)
EWMA	10	11,11%	0,015
ARCH(3)	13	14,44%	0,001
GARCH(1,1)	12	13,33%	0,002
EGARCH(1,1)	15	16,67%	0,001
EGARCH(3,3)	15	16,67%	0,001

Nota: Nível de confiança de 95% - Porcentagem de violações esperadas é de 5%

FONTE: Elaboração do autor

A Tabela 6 apresenta o número de violações de cada modelo para as pseudoprevisões fora da amostra, nos mesmos moldes da Tabela 5. Já era esperado um desempenho menos satisfatório comparado ao backtest, mas nenhum modelo conseguiu obter uma cobertura empírica suficientemente próxima da cobertura nominal, tendo em vista que todos foram rejeitados no teste binomial. Em termos comparativos, novamente o EWMA apresentou os melhores resultados, enquanto os modelos EGARCH apresentaram os piores resultados, mesmo sendo mais complexos e conseguindo acomodar o efeito alavancagem.

Tabela 7 – Avaliação das previsões de volatilidade fora da amostra

	RMSE	MAE	MAPE
EWMA	0,0462	0,0324	521,5018
ARCH(3)	0,0459	0,0298	391,4360
GARCH(1,1)	0,0463	0,0301	408,7212
EGARCH(1,1)	0,0406	0,0264	330,9513
EGARCH(3,3)	0,0417	0,0268	340,0453

FONTE: Elaboração do autor

A Tabela 7 descreve as estatísticas de precisão das pseudoprevisões fora da amostra. A precisão de cada modelo é medida com a raiz do erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio

(MAE) e o erro percentual absoluto médio (MAPE). Aqui os modelos EGARCH se sobressaíram aos demais para todas as métricas de erro utilizadas, comportamento inverso ao esperado pelos resultados anteriores relativos a value-at-risk. Do mesmo modo, o modelo EWMA passou a apresentar a pior performance, enquanto o ARCH e o GARCH mantiveram resultados intermediários.

Tabela 8 – Teste Diebold-Mariano

Erros absolutos	Estatística de teste*	p-valor
EWMA	-4,7256	0,0001
ARCH(3)	-3,4100	0,0006
GARCH(1,1)	-3,8836	0,0001
EGARCH(1,1)	-0,8056	0,4205
Erros quadráticos	Estatística de teste*	p-valor
EWMA	-4,0037	0,0001
ARCH(3)	-3,0483	0,0023
GARCH(1,1)	-3,8814	0,0001
EGARCH(1,1)	-1,201	0,2298

Nota: *Distribuição assintótica normal padrão

FONTE: Elaboração do autor

A Tabela 8 reporta os resultados do teste Diebold-Mariano. A hipótese nula empregada é que o modelo EGARCH(3,3) possui mesma precisão do modelo identificado na linha em termos de erros absolutos ou erros quadráticos. Esse teste é semelhante a um teste t em um modelo de regressão linear: percebe-se que um coeficiente não é zero, mas se deseja inspecionar a probabilidade de que o desvio de zero ocorreu ao acaso. Se o p-valor correspondente for baixo, é improvável que a diferença de zero estimada seja tão grande quanto foi devido à pura aleatoriedade. Da mesma forma, a diferença entre RMSEs (por exemplo) não é zero, mas quer verificar-se se isso é devido à aleatoriedade. Assim, é empregado um teste t como proposto por Diebold e Mariano (1995).

Matematicamente, suponha que um par de previsões h passos à frente produziu erros $(e_{1t}, e_{2t}); t = 1, \dots, n$. A qualidade da previsão é testada em uma função $g(e)$ do erro de previsão, e . Assim, a hipótese nula de mesma performance de previsão é

$$E[g(e_{1t}) - g(e_{2t})] = 0 \quad (29)$$

Definindo

$$d_t = g(e_{1t}) - g(e_{2t}); t = 1, \dots, n \quad (30)$$

é natural basear um teste na média da amostra observada

$$\bar{d} = n^{-1} \sum_{t=1}^n d_t \quad (31)$$

Assumindo que para previsões h -passos à frente todas as autocorrelações de ordem h ou superior da sequência d_t são zero, pode-se mostrar que a variância de \bar{d} é, assintoticamente,

$$V(\bar{d}) \cong n^{-1} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \gamma_k \right] \quad (32)$$

onde γ_k é a k -ésima autocovariância de d_t , a qual pode ser estimada por

$$\gamma_k = n^{-1} \sum_{t=k+1}^n (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d}) \quad (33)$$

A estatística de teste Diebold-Mariano então fica

$$S_1 = [V(\bar{d})]^{-1/2} \bar{d} \quad (34)$$

em que $V(\bar{d})$ é obtido substituindo a estimativa da equação (33) na equação (32) (HARVEY, LEYBOURNE, NEWBOLD, 1997). Voltando a Tabela 8 e observando os p -valores do teste,

existem indícios de que as duas especificações do EGARCH apresentam mesma performance de previsão. Dado que a hipótese nula foi rejeitada em todas as outras instâncias, reitera-se o fato do EGARCH alcançar poder preditivo superior aos demais modelos, conforme indicado na tabela anterior.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se concentrou na capacidade de previsão da volatilidade com os modelos da família GARCH. Foram comparados quatro modelos GARCH para analisar qual modelo apresenta o melhor desempenho na construção de medidas de valor em risco paramétrico utilizando uma série de retornos do índice S&P 500, especificamente quanto a momentos de grande incerteza no mercado (como a crise relacionada ao COVID-19), simulando o que um profissional da área enfrentaria em tempo real na presença desse problema.

Em primeiro lugar, foi realizado um backtest baseado em violações do valor em risco para observar possíveis problemas de especificação dos modelos, ao se empregar um teste estatístico de distribuição binomial. Nesse teste dentro da amostra, os modelos EWMA, ARCH e GARCH obtiveram uma cobertura empírica suficientemente próxima da cobertura nominal de 5%. O EGARCH foi o único considerado como um modelo impreciso de VaR, embora a troca por uma versão mais parcimoniosa (mesmo com os critérios de informação indicando o contrário) tenha permitido um veredito favorável. Ainda assim, em termos comparativos, o EGARCH apresentou a pior performance entre os modelos testados, enquanto o EWMA se destacou positivamente.

Em seguida, realizou-se a mesma análise a partir de pseudoprevisões fora da amostra para o período turbulento entre março e junho de 2020. Como esperado, observou-se um desempenho geral bem menos satisfatório que o backtest, sendo todos os modelos rejeitados no teste binomial (porcentagem de violações acima dos 10%). Novamente, o EWMA apresentou os melhores resultados, enquanto o EGARCH apresentou os piores resultados, mesmo consistindo no modelo mais complexo e conseguindo tratar choques positivos e negativos de forma assimétrica.

Por fim, foi ainda examinado a precisão das pseudoprevisões em termos de RMSE, MAE e MAPE. Curiosamente, a performance relativa entre os modelos nesse caso foi inversa ao renunciado pelos resultados anteriores. Os modelos EGARCH se sobressaíram aos demais para todas as métricas de erro utilizadas, ao passo que o EWMA passou a apresentar a pior performance e o ARCH e GARCH mantiveram resultados intermediários. Esse fato pode ser indicativo de que os EGARCHs estimados se adequam melhor aos quantis centrais do que aos

quantis extremos da distribuição dos retornos. Um teste de Diebold-Mariano confirmou as diferenças obtidas. Ao mesmo tempo, o teste reitera a circunstância do EGARCH(1,1) alcançar poder preditivo pelo menos equivalente ao EGARCH(3,3), sinal de que os critérios de informação apontaram para um modelo sobrespecificado.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics**. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
- ALEXANDER, C. **Value-at-Risk Models**. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
- ASSAF NETO, A. **Mercado financeiro**. 10ª Ed. São Paulo: Atlas, 2011.
- BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. **Investimentos**. Tradução de Samy Dana e Beth Honorato . 10ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F.; NELSON, D. B. Arch models. **Handbook of Econometrics**, 4th ed., p. 2959–3038, 1994.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time series analysis forecasting and control**. San Francisco: Holden-Day, Edição revisada, 1976.
- BUENO, R. L. S. **Econometria de séries temporais**. 2ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- CARVALHO, F. B. **A Importância do Mercado de Capitais: considerações das teorias econômica e financeira**. Araraquara, 2014.
- DICKEY, D. A; W. A. FULLER. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, n. 366, p. 427-431, 1979.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing Predictive Accuracy. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 13, n. 3, p. 253–263, 1995.
- DUARTE, A. M. Risco: Definições, Tipos, Medição e Recomendações para seu Gerenciamento. **Revista Resenha BM&F**, [S.I], n. 114, p. 25-33, 1996.
- ENGLE, R, F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of U.K. inflation. **Econometrica**, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.
- ENGLE, R, F. Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice. **The American Economic Review**, v. 94, n. 3, p. 405-420, 2004.
- FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383-417, 1970.
- FRIEDMAN, M. Nobel lecture: inflation and unemployment. **The Journal of Political Economy**, v. 85, n. 3, p. 451-472, 1977.

GALDI, F. C.; PEREIRA, L. M. Valor em Risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica. **Brazilian Business Review**, v. 4, n. 1, p. 74-95, 2007.

GHALANOS, A. **rugarch: Univariate GARCH models**. R package version 1.4-4. 2020.

GARMAN, M.; KLASS, M. On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**, v. 53, n. 1, p. 67-78, 1980.

HARVEY D.; LEYBOURNE S.; NEWBOLD P. Testing the equality of prediction mean squared errors. **International Journal of Forecasting**, v. 13, n. 2, p. 281-291, 1997.

JORION, P. **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. 3rd ed. McGraw-Hill, 2006.

J.P. MORGAN & CO. **Risk Metrics™** – Technical Document. 4th ed. New York, 1996.

MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S. C.; HYNDMAN, R. J. **Forecasting: Methods and Applications**. New York: John Willey & Sons, 1998.

MEUCCI, A. Quant Nugget 2: Linear vs. Compounded Returns – Common Pitfalls in Portfolio Management (May 1, 2010). **GARP Risk Professional**, p. 49-51, 2010.

MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa. **Estudos Econômicos**, v. 29, n. 3, p. 303-341, 1999;

MORETTIN, P. A. **Econometria Financeira: um curso em séries temporais**. São Paulo: Blucher, 2008.

PARKINSON, M. The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. **Journal of Business**, v. 53, n. 1, p. 61-65, 1980.

PELLEGRINI, F. R.; FOGLIATTO, F. S. Passos para Implantação de Sistemas de Previsão de Demanda - Técnicas e Estudo de Caso. **Revista PRODUÇÃO**, v. 11, n. 1, p. 43-64, 2001.

PERLIN, Marcelo Scherer et al. A GARCH Tutorial with R. **Rev. adm. contemp.**, Curitiba, v. 25, n. 1, e200088, 2021.

PHILLIPS, P. C. B.; PERRON, P. Testing for a Unit Root in Time Series Regression. **Biometrika**, v. 75, n. 2, p. 335-346, 1988.

PINHEIRO, J. L. **Mercado de Capitais: Fundamentos e Técnicas**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2009.

REGIS, R. O. **Regressão Quantílica e VaR: Uma Aplicação de Quantis Condicionais Extremos para os Retornos Relativos ao IBOVESPA e Petrobrás**. 2017. Dissertação (Mestrado em Economia) – Programa de Pós-Graduação em Economia, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

STOCK, J. H; WATSON, M. W. **Introduction to Econometrics**. 4th ed. Harlow: Pearson, 2019.

TSAY, R. **Analysis of financial time series**. 3rd ed. Chicago: John Wiley & Sons, 2010.

ZHANG, Y; NADARAJAH, S. A review of backtesting for value at risk. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 47, n. 15, p. 3616-3639, 2018.

APÊNDICE A – Seleção dos modelos por critérios de informação

Tabela A1 – Seleção do modelo ARCH por critérios de informação

	AIC	min(AIC)	BIC	min(BIC)
ARCH(0,1)	-6,858666	0,00	-6,847538	0,00
ARCH(0,2)	-6,917634	0,00	-6,902796	0,00
ARCH(0,3)	-6,959697	1,00*	-6,941149	1,00*

FONTE: Elaboração do autor

Tabela A2 – Seleção do modelo GARCH por critérios de informação

	AIC	min(AIC)	BIC	min(BIC)
GARCH(1,1)	-7,022766	1,00*	-7,007928	1,00*
GARCH(1,2)	-7,021226	0,00	-7,002679	0,00
GARCH(1,3)	-7,021263	0,00	-6,999006	0,00
GARCH(2,1)	-7,020896	0,00	-7,002348	0,00
GARCH(2,2)	-7,019814	0,00	-6,997558	0,00
GARCH(2,3)	-7,019852	0,00	-6,993886	0,00
GARCH(3,1)	-7,019225	0,00	-6,996969	0,00
GARCH(3,2)	-7,018114	0,00	-6,992148	0,00
GARCH(3,3)	-7,019380	0,00	-6,989704	0,00

FONTE: Elaboração do autor

Tabela A3 – Seleção do modelo EGARCH por critérios de informação

	AIC	min(AIC)	BIC	min(BIC)
EGARCH(1,1)	-7,095997	0,00	-7,077449	0,00
EGARCH(1,2)	-7,096692	0,00	-7,070726	0,00
EGARCH(1,3)	-7,095410	0,00	-7,062025	0,00
EGARCH(2,1)	-7,095031	0,00	-7,072775	0,00
EGARCH(2,2)	-7,096857	0,00	-7,067182	0,00
EGARCH(2,3)	-7,094616	0,00	-7,057522	0,00
EGARCH(3,1)	-7,092954	0,00	-7,066988	0,00
EGARCH(3,2)	-7,094965	0,00	-7,061580	0,00
EGARCH(3,3)	-7,144173	1,00*	-7,103369	1,00*

FONTE: Elaboração do autor