UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Luis Carlos Campregher

Modelagem com equações de diferenças: Propostas de aplicação em sala

Blumenau
2021

Luis Carlos Campregher

Modelagem com equações de diferenças: Propostas de aplicação em sala

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Maicon José Benvenutti

Blumenau
2021

Ficha de identificação da obra

Campregher, Luis Carlos
Modelagem com equações de diferenças: Propostas de aplicação em sala / Luis Carlos Campregher ; orientador,Maicon JoséBenvenutti, 2021.
122 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de PósGraduação em Matemática Pura e Aplicada, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equações de diferenças. 3. Modelagem. 4. Crescimento populacional. 5. Teoria demanda/oferta. I. Benvenutti, Maicon José . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de PósGraduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Luis Carlos Campregher

Modelagem com equações de diferenças: Propostas de aplicação em sala

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Hugo José Lara Urdaneta
Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Blumenau

Prof. Dr. Luiz Rafael dos Santos
Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Blumenau

Prof. Drª Cláudia Aline Azevedo do Santos Mesquita
Universidade Federal de São Paulo – Campus de São José dos Campos

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 12/08/2021 18:19:33-0300
CPF: 270.670.858-10
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maicon Jose Benvenutti
Data: 12/08/2021 15:03:37-0300
CPF: 041.968.189-27
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti
Orientador

Blumenau, 2021.

Este trabalho é dedicado a minha linda família, colegas de classe, e aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus e aos bons espíritos que sempre me acompanham, dando norte e apresentando as melhores oportunidades, entre elas o PROFMAT 2018 e neste momento estar completando mais uma etapa em minha vida.

Agradeço a meus pais, que sempre me mostraram o caminho da honestidade e da perseverança, nunca desistindo dos meus objetivos.

Agradeço a minha esposa Kayra, pessoa iluminada por deus, de um coração enorme, exemplo de mãe e pessoa, sempre esteve ao meu lado, compreensiva, me apoiando, dando força, fazendo orações e não deixando que desistisse por motivo de cansaço. As minhas filhas Luísa e Isabela que me deram e dão forças para persistir neste meu sonho e a minha princesa Cecília que está a caminho, mas já sabe motivar bastante este papai.

Aos professores do PROFMAT que de uma forma ou de outra me ensinaram muito, em especial ao meu professor orientador que não mediu esforços nesta minha caminhada, sempre estando disponível e disposto a ajudar, ensinando e orientando com muita maestria.

Agradeço aos colegas de turma do PROFMAT 2018, primeira turma da UFSC Blumenau, com certeza nossa parceria fez toda a diferença para que eu conseguisse chegar até aqui. Agradeço em especial as minhas grandes amigas Nadir e Andresa, sempre dispostas para ajudar, seja na resolução de exercícios, nos desabafos, ou de uma forma ou de outra motivar-me, pessoas que tenho como exemplo de professoras e seres humanos, levarei comigo para vida. Não poderia deixar de incluir aqui a minha “musa inspiradora” e colega de Pós-graduação professora Rosane, pessoa responsável pela profissão que tenho hoje, pessoa batalhadora e que tenho orgulho de dizer que você foi o motivo de eu ser um matemático hoje, para completar tive o prazer de cursar este mestrado com você.

Por fim, agradeço aos amigos do meu ambiente de trabalho, que de uma forma ou de outra, contribuíram nesta etapa da minha vida, com muita parceria, companheirismo e alegria.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.” (Bertrand Russell)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos as equações de diferenças e aplicamos esta ferramenta matemática no ensino básico via a ideia de modelagem matemática. As equações de diferenças são de grande utilidade na modelagem de problemas envolvendo variação discreta das variáveis. Este tipo de equação está presente em diversas áreas do conhecimento, como ciências humanas (ciências sociais, geografia, antropologia, psicologia), ciências da natureza (biológicas, físicas, químicas), economia, farmacologia, dentre outros. Neste trabalho, estudamos as equações de diferenças lineares e não lineares de primeira ordem. No caso das não lineares, apresentamos uma teoria qualitativa através de pontos de equilíbrio, estabilidade e comportamento assintótico. Ainda, fazemos análises algébricas e gráfica (via Diagramas de Cobweb). Com base numa abordagem didática via modelagem, são apresentadas duas propostas de atividade que podem ser aplicadas no ensino. Uma está relacionada com a construção do modelo de crescimento populacional sugerido por Malthus (teoria Malthusiana). Nesta parte, é proposto, juntamente com os educandos, modelar a situação sugerida por Malthus, passando por todos os passos de uma modelagem. A outra proposta está relacionada à economia, onde juntamente com os educandos, construímos as equações de “preço – demanda” e “preço – oferta”, analisando como estas equações influenciam na determinação adequada do preço de um determinado produto. Desta forma, introduzimos, dentro de um contexto interessante para os alunos, conteúdos matemáticos previstos no ensino básico.

Palavras-chave: Equações de diferenças. Diagrama de Cobweb. Modelagem. Crescimento populacional. Malthusiano. Teoria oferta/demanda.

ABSTRACT

The current study presents the difference equations and the application of this Mathematics tool in primary education by the idea of mathematical modelling. The difference equations are very useful in modelling problems which involve discrete variation of variables. This type of equation is present in several areas of knowledge, such as Human Sciences (social sciences, geography, anthropology, psychology), natural sciences (biological, physical, chemical), economics, pharmacology, among others. In this work, the linear and nonlinear first order difference equations were studied. In the case of nonlinear ones, we present a qualitative theory through points of equilibrium, stability and asymptotic behavior. And also, we do algebraic and graphical analysis (by Diagrams of Cobweb). Based on a didactic approach by modelling, two proposals of activities that can be applied in a classroom are presented. One of them is related to the construction of the population growth model suggested by Malthus (Malthusian theory). In this part, it is proposed to model the situation suggested by Malthus with the students, going through all the steps of a modelling process. The other proposal is related to the economy, and with the students, we built the equations of "demand price " and "Supply price ", analyzing how these equations influence the proper determination of the price of a particular product. This way, we introduced, within an interesting context to students, provided mathematical content for primary education.

Keywords: Difference equations. Cobweb diagram. Modelling. Populational Growth. Malthusianism. Supply and demand theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

PCN’s – Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos dos avanços tecnológicos/científicos surgem a partir das necessidades advindas de problemas da vida real ou do nosso cotidiano. Como exemplo, um determinado medicamento, ou vacina, surge a partir da necessidade de se reduzir uma dor, diminuir determinada infecção ou conter uma pandemia. Conhecer como funcionam, ou acontecem, certos fenômenos naturais, nos auxilia na prevenção de desastres, ou no fornecimento dos elementos necessários para nossa sobrevivência. Assim acontece com várias áreas do conhecimento; busca-se compreender o funcionamento para então criar/desenvolver algo que solucione os problemas relacionados. Neste sentido a matemática surge como uma ferramenta para auxiliar nestes processos, permitindo que se modele processos naturais, de forma a compreendê-los e aplicá-los na resolução de problemas que podem ser de qualquer natureza.

É a partir destas ideias que surge o seguinte questionamento: se o homem vive em busca de equações que possam descrever processos naturais, se a ciência se constrói a partir dos problemas reais, por qual motivo a educação não pode ser construída também a partir de problemas reais? Como diz Bassanezi (2002):

> Na própria atividade de ensino, elementar e médio, o porquê de se ensinar matemática deve ser questionado. Os conhecimentos básicos de cálculo, geometria e estruturas algébricas seriam meros "jogos" destinados a desenvolver habilidades intelectuais (como ocorre com frequência em nossas escolas) ou deveriam ser instrumentos aplicáveis aos usos cotidianos? Esta pergunta é ainda mais relevante se considerarmos que a grande maioria dos alunos, mais tarde, saberá utilizar ou se lembrará de apenas uma pequena parcela dos conhecimentos matemáticos ensinados nesse estágio de formação e que, mesmo no ambiente de sala de aula, nem todos se divertem com os "jogos" aprendidos.

Neste sentido, buscamos trazer uma matemática trabalhada a partir de problemas do cotidiano dos educandos, tornando a aprendizagem muito mais prazerosa e palpável e o conhecimento matemático sendo adquirido de forma mais significativa e prática.

Desta forma, iniciaremos nossa discussão no capítulo 2 falando sobre o ensino via modelagem matemática. Primeiramente, iremos discorrer sobre o ensino da matemática no Brasil, trazendo algumas das metodologias que podem ou são aplicadas em sala. Entre elas, temos o método tradicional, a resolução de problemas, história da matemática, jogos matemáticos e modelagem matemática. Iremos focar nesta última metodologia e iremos discorrer sobre o que é modelagem matemática, o que são modelos matemáticos, quais as etapas de uma modelagem e, para concluir com o capítulo, abordaremos a modelagem como uma estratégia para o ensino – aprendizagem.

Como as equações de diferenças possuem uma enorme aplicação em várias áreas do conhecimento, como na física, química, biologia, engenharia, economia, psicologia, ciências sociais, entre outras, e são relativamente simples de serem introduzidas, e, portanto, podendo ser utilizadas no processo de modelagem nos ensinos básicos, este tópico será abordado no capítulo 3. Abordaremos equações de diferenças lineares e não lineares de primeira ordem. Nos casos lineares, veremos que é possível expressar de forma explicita sua solução geral. Já as não lineares são mais complexas, sendo, em geral, impossível obter a solução na forma explícita. Neste caso, trataremos de alguns tópicos relacionados com a teoria qualitativa, tais como, pontos de equilíbrio, estabilidade e comportamento assintótico. Veremos também um método gráfico chamado diagrama de Cobweb. Este diagrama permite uma investigação qualitativa das equações a partir do gráfico da função que estabelece a equação, e assim podemos identificar pontos de equilíbrio e analisar estabilidade de um ponto de vista mais visual.

No capítulo 4, baseados no fato de que as equações de diferenças nos permitem modelar inúmeras situações do meio em que vivemos e de que o ensino via modelagem sugere trabalhar os conteúdos a partir de um problema real, faremos duas propostas de ensino que sejam modelados via equações de diferenças.

Uma das preocupações que sempre esteve no meio científico é o aumento populacional. Tanto que em 1798 o economista Thomas Robert Malthus procurou descrever o crescimento populacional, pois ele observou que a população da Inglaterra, que inicialmente era constante, praticamente dobrou em pouco tempo. Sua teoria foi muito criticada por ser pessimista e por incluir métodos como guerras e doenças para controle de crescimento. Mas, apesar dos pontos negativos, ela serviu de alerta para os governos a pensarem sobre as consequências de um crescimento desordenado da população. Preocupação esta que podemos ver ainda hoje, pois efetua-se pesquisas como Censo (IBGE) para acompanhar dados. Desta forma, na proposta de aplicação, sugerimos uma atividade em que, juntamente com os educandos, seja modelado matematicamente as relações sugeridas por Malthus. A partir dos modelos encontrados pelos educandos, vamos avaliar o crescimento populacional brasileiro e verificar se, de fato, a teoria proposta por Malthus é falha e quais são suas falhas. Será ainda proposto a construção de gráficos que auxiliem na visualização dos fenômenos e que permitam visualizar as colocações equivocadas feitas por Malthus.

Uma segunda proposta surge como um questionamento acerta do mundo econômico, pois afinal, como se define os preços de venda de um determinado produto de tal forma que os consumidores fiquem satisfeitos com o preço de compra e os vendedores fiquem satisfeitos com os preços de venda. Alguns dos termos que ouvimos com frequência no meio econômico e em nosso dia a dia, é demanda e oferta. A partir da matemática básica e das equações de diferenças, é possível escrever equações relacionadas com demanda e oferta e, a partir delas, podemos definir o melhor preço para venda do produto. E por fim, com os diagramas de Cobweb, conseguimos analisar como se comporta o mercado para determinado produto, avaliando se o melhor preço é estável ou instável, conseguindo visualizar graficamente o que acontece em cada situação.

Vale citar aqui que já existem trabalhos na banca do PROFMAT que trabalharam as equações de diferenças aplicadas no ensino básico, inclusive envolvendo teoria de crescimento populacional, como as citadas abaixo:

- Equações de diferenças: uma abordagem mais completa para o ensino de sequências no ensino médio, autor: Elton Felix;
- Equações de diferenças: aplicações em conteúdos do ensino médio e em modelos populacionais, autor: Adriano Roberto Capilupe;
- Equações de diferenças na projeção de populações, autor: Cristiane Novaki;
- sistemas dinâmicos discretos, autor: Eliane Alves de Jesus.

Mas em nenhuma delas a abordagem foi realizada como a proposta neste trabalho. Desta forma, pretendemos neste trabalho conversar um pouco sobre as metodologias de ensino da matemática, em especial a modelagem, apresentar um pouco da teoria das equações de diferenças e por fim realizar propostas de modelagem matemática via equações de diferenças, para serem aplicadas no ensino básico.

2 ENSINO VIA MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 O ENSINO DA MATEMÁTICA

Sabemos que a matemática está presente nos mais variados aspectos do nosso cotidiano. Portanto, uma base adequada deste campo de conhecimento nos auxilia na resolução de inúmeros problemas reais. De fato, segundo a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a matemática é fundamental no ensino básico devido a sua grande aplicabilidade na sociedade contemporânea. Além disso, em vários trechos da BNCC é citado que ela é importante pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades, além de deixar claro que a matemática é responsável por desenvolver inúmeras habilidades, tais como: criatividade; interpretação; capacidade analítica; produção de estratégia; raciocínio rápido; espírito de investigação e de argumentação; compreensão das relações entre conceitos e procedimentos de diferentes campos do conhecimento; realização de processos de observação sistemática de aspectos quantitativos e qualitativos; utilização de ferramentas digitais; validação de estratégias e resultados etc.

No entanto, no Brasil, o ensino de matemática tem se mostrado um grande desafio para todos. A matemática é usualmente vista pelos alunos, e até por muitos educadores, como algo desagradável, cansativo, distante da realidade, difícil de aprender e sendo para poucos. Neste sentido, fica claro que o ensino de matemática nas escolas tem conseguido resultados bastante aquém do potencial que possui. Isto pode ser claramente constatado via resultados do sistema de avaliação do ensino básico (SAEB), mostrando que apenas 5% dos alunos brasileiros de escolas públicas concluintes do 3º do ensino médio alcançam o nível esperado de conhecimento em matemática. Além disso, 41% dominam apenas as operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão (veja QEdu, 2019). Então, diante desta realidade, uma pergunta que naturalmente surge é: se a matemática tem uma grande aplicabilidade e tanta importância no desenvolvimento do indivíduo, por qual motivo ela é vista como chata, complexa e não tão útil?

Um dos grandes problemas pode estar na forma como a matemática é abordada em sala de aula. Ao se realizar uma análise bibliográfica, podemos rapidamente observar que os livros didáticos ainda estão presos às metodologias tradicionais de ensino. Nestas, o professor é o detentor do conhecimento, o centro das atenções, transmitindo o conteúdo em forma de palestra, e os alunos são meros ouvintes e reprodutores do que foi transmitido. Segundo D' Ambrósio (1989), o ensino caracterizado por aulas em que o professor passa no quadro o que julga importante e então passa exercícios que nada mais são do que repetições de algo que foi previamente apresentado, baseia-se na falsa ideia de que é possível aprender matemática com qualidade por meio de uma simples transmissão de conhecimento. Como diz Medeiros:

> O aprender tem sido visto como emissão de respostas imediatas seguidas a estímulos, e não como compreensão, como estados de entendimento de um conhecimento científico que vão sendo atingidos a partir do conhecimento que o aluno já possui (MEDEIROS, apud IMENES, 1987, p. 27).

Devido a este panorama crítico da educação matemática brasileira, faz-se extremamente necessário refletir sobre novas (mas não tão novas assim) metodologias de ensino da matemática. Por metodologia de ensino entende-se a aplicação de diferentes métodos, contendo técnicas, ferramentas e perspectivas, no processo de ensino – aprendizagem de um determinado conteúdo. Para Vasconcellos (2002), a metodologia de ensino é vista como uma conexão de uma teoria do conhecimento e análise da realidade a uma prática específica. Como já mencionado anteriormente, uma metodologia muito conhecida e utilizada para o ensino da matemática é a tradicional. Esta metodologia consiste em uma aprendizagem pela recepção da informação. Neste modelo, o professor é o detentor de todo o conhecimento, enquanto o estudante somente ouve e toma a fala do professor como verdadeira, frequentemente sem maiores reflexões e questionamentos. Nesta metodologia, a matemática geralmente é trabalhada de uma maneira demasiadamente técnica e abstrata, sem grandes conexões com a realidade do aluno. Ainda, segundo Valente (1999), ensinar matemática na escola é também promover o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, o que torna o ensino tradicional ultrapassado. Foi a partir do fracasso deste método de ensino que, por volta de 1970, surgiram outras metodologias que buscavam relacionar a matemática a situações mais reais e cotidianas dos educandos (BRASIL, 2006). Algumas dessas metodologias são brevemente apresentadas a seguir.

A metodologia da resolução de situações – problema consiste em um método em que são apresentados problemas específicos de situações reais e, a partir de estratégias orientadas pelo professor, o aluno encontra suas soluções (veja Nunes Otaviano; Lima Soriano de Alencar; Fukuda, 2012). Aqui o professor deixa de ser o ator principal em sala e passa a ser um motivador, mediador das ideias apresentadas pelo aluno, os conduzindo à reflexões e, como consequência, à construção do conhecimento O aluno desenvolve seu raciocínio participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade que o cerca, fazendo uso de informações que dispõe.

> Se quisermos melhorar o presente estado de conhecimento, devemos nos questionar sobre como pode, de fato, nosso aluno desenvolver o pensamento crítico ou raciocínio lógico (SMOLE E CENTURIÓN, 1992).

Jogos matemáticos é um outro tipo de metodologia que consiste em um método lúdico, utilizando-se de um ambiente de jogos para obter a aprendizagem. Neste método, os alunos criam, testam e recriam estratégias até conseguirem atingir os objetivos (veja Dante, 1999). Como a atmosfera é de jogo, eles tendem a sentir-se mais confortáveis para cometer erros e repensar suas estratégias. Nesta metodologia, o professor é quem desenvolve e aplica o jogo, sendo que em sala sua função é incentivar o aluno na busca pelo conhecimento.

> Pode- se dizer que o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática (SMOLE; DINIZ E MILANI, 2007).

História da matemática é uma metodologia que consiste no uso de histórias para o desenvolvimento do aprendizado. Estas histórias podem ser no sentido histórico ou no sentido de criação de histórias para contextualizar o aprendizado de algum conceito.

> O uso dos fatos históricos na sala de aula proporciona um melhor entendimento dos alunos no que diz respeito à dimensão histórica dos assuntos envolvidos, despertando assim o interesse dos alunos, motivando-os ainda mais a buscar o conhecimento (OLIVEIRA, 2014).

A modelagem matemática como metodologia de ensino consiste na ideia de aprender matemática a partir do cotidiano dos alunos. Nesta metodologia, os alunos selecionam situações-problemas que os circundam e que os interessam e, através de processos exploratórios e reflexivos, são conduzidos a formulá-los numa linguagem matemática. Ademais, via uma investigação da própria matemática, são guiados a obter técnicas apropriadas para resolver o problema matemático criado, interpretando os resultados em termos da situação-problema original. Nesta metodologia, o aluno passa a ser o protagonista e o professor um mediador do processo, enquanto a matemática é vista como um instrumento eficiente para sintetizar ideias, descrever situações conectadas com a realidade e possuidora de ferramentas capazes de ajudar a entender e resolver problemas que circundam o cotidiano dos alunos. No decorrer das últimas décadas, vários autores vêm defendendo o uso da modelagem matemática como uma metodologia para o ensino. Biembengut e Hein (2005) diz que a modelagem matemática é um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda são desconhecidos para ele e ao mesmo tempo aprender a modelar, matematicamente. Para Bassanezi (2002), quando o educando recebe de forma pronta os conceitos, a matemática não é aprendida de forma efetiva. Ele ainda afirma que o conhecimento precisa ser construído juntamente com o educando, compondo uma junção entre as concepções já conhecidas pelo educando e o mundo que o cerca. Ainda, segundo Bassanezi (2002), como a modelagem alia a teoria à prática, faz com que seus usuários se sintam motivados para entender a sua realidade e buscar meios de agir sobre ela e transformá-la.

A modelagem matemática é explorada de forma mais detalhada neste capítulo. Nas próximas seções, descreveremos os conceitos de modelagem e modelo matemático, assim como algumas abordagens adequadas para que o professor aplique, de forma efetiva, estas ferramentas em sala de aula, tendo por objetivo mitigar os problemas apontados anteriormente e melhorar a qualidade da matemática aprendida no ensino básico.

2.2 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

Para Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e interpretar suas soluções no mundo real. Segundo o autor, o processo de modelagem é composto de cinco etapas: experimentação, abstração (seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação), resolução do problema, validação da resolução e modificação do método (caso necessário). Lingefjärd (2006) segue a mesma linha ao dizer que a modelagem matemática é muito mais do que simplesmente apresentar um problema matemático por escrito; ela envolve observar uma situação real, conjecturar, realizar a aplicação de ferramentas matemáticas, obter resultados, e então, se necessário, reinterpretar o modelo. Assim, podemos dizer uma modelagem matemática é um processo interativo entre uma realidade e a matemática e em que, como resultado, o modelador deve obter um modelo matemático que o leve a novas conclusões que façam sentido dentro daquela realidade.

No mundo das pesquisas científicas, a modelagem matemática tem estado cada vez mais presente e através dela está sendo possível estudar e compreender inúmeros fenômenos de distintas esferas do conhecimento. Inclusive, a evolução tecnológica dos computadores digitais vem impulsionando o uso da modelagem para além de suas áreas afins (física, química, biologia e economia) e permitindo alcançar campos mais distantes como da linguagem, arte, medicina e ciências sociais. Desta forma, a matemática tem passado a ser vista como uma robusta ferramenta capaz de unificar conhecimentos e descrever eventos naturais e humanos. Como consequência deste intenso uso nas outras áreas do conhecimento, a própria matemática vem sofrendo substancial evolução, desde que, a todo momento, ela é desafiada a apresentar novos conceitos, teorias e teoremas que possam ser aplicados na modelagem de novos problemas.

Claro que é irreal pensar que seja possível modelar toda e qualquer situação com absoluta precisão. Como veremos na próxima seção, o objeto final de uma modelagem, o modelo, usualmente descreve apenas uma forma aproximada da realidade e deve ser entendido e usado como tal. Além disso, certos fenômenos humanos, como os sentimentos de um indivíduo, ainda estão longe de serem modelados de maneira satisfatória. De qualquer forma, a matemática está cada vez mais presente na nossa sociedade, como ilustra a seguinte frase de Barbosa (2003):

> A Modelagem Matemática pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades mais democráticas.

2.3 O QUE UM MODELO MATEMÁTICO?

Um modelador, ao selecionar e isolar um objeto de estudo e iniciar o processo de modelagem matemática, tem por objetivo final a obtenção um sistema artificial, chamado modelo, que represente, de forma pelo menos aproximada, a situação-problema previamente selecionada. Para ter-se um modelo utilizável, ele deve ser suficientemente simples a ponto de ser tratável e ao mesmo tempo suficientemente completo a ponto gerar novas conclusões sobre o objeto modelado. Ademais, durante o processo de modelagem, deve ser criado um dicionário preciso que traduza a linguagem do problema real para a linguagem do problema matemático e que seja possível, sem maiores dificuldades, ser usado para deslocar-se de uma linguagem para a outra. Neste caso, os usuários finais do modelo, usualmente especialistas da área do objeto selecionado, podem se utilizar da matemática como um meio para obter novos conhecimentos sobre a realidade de seu interesse. Neste sentido, tem-se que a natureza da modelagem matemática é essencialmente multidisciplinar, sendo a matemática vista não como a estrela principal, mas sim um meio para estudar fenômenos humanos e da natureza. Portanto, um modelo matemático é considerado útil se puder contribuir para o desenvolvimento e compreensão do fenômeno analisado. Em geral, o melhor ator para analisar o sucesso de um modelo não é o modelador, mas sim o usuário final. É importante, portanto, que o conteúdo e a linguagem matemática utilizada estejam equilibradas e condizentes com o tipo de problema abordado e também com o objetivo que se propõe no modelo. As características de um modelo dependem natureza do objeto que está sendo modelado. A seguir apresentamos algumas classificações de modelos que são propostos por Bassanezi (2002).

Modelos estáticos, são aqueles em que os modelos não sofrem alterações no tempo. Estes geralmente são dados por sistemas de equações algébricas. Já em modelos dinâmicos, os modelos evoluem no tempo e geralmente são descritos por sistemas de equações diferenciais (no caso contínuo) ou de equações de diferenças (no caso discreto). Exemplos de modelos estáticos são descrições de formas como alvéolos, enquanto exemplos de modelos dinâmicos são crescimento populacional de espécies.

Modelos contínuos são aqueles em que as variáveis podem assumir quaisquer valores reais dentro de um intervalo. Em geral, nos modelos contínuos, temos a presença de funções reais, derivadas e integrais. No caso de modelos discretos, as variáveis assumem apenas uma quantidade enumerável de valores distintos e, em geral, temos a presença de sequências, médias e somatórios.

Em modelos determinísticos, uma vez fixadas as variáveis de controle, o sistema possui um único modo de evolução. Já em modelos estocásticos, mesmo fixadas as variáveis de controle, a evolução não é única, ou seja, seu estado é impreciso, havendo assim a presença de incertezas. Em situações do tipo estocástico, o modelo é dado em função de variáveis aleatórias enquanto nos determinísticos em termos de funções reais.

Modelos lineares são aqueles em que os sistemas de equações obtidos são lineares. Já modelos não lineares são aqueles em que os sistemas de equações obtidos são não lineares. Usualmente, um modelo não linear é considerado mais complexo e de difícil utilização, sendo necessário avançados métodos computacionais para o seu tratamento.

Modelos educacionais são modelos simples, ou bastante simplificados, tendo como principal objetivo o ensino e aprendizagem. Geralmente estes modelos não apresentam um elevado grau de precisão, mas podem ser bastante úteis em uma sala de aula.

A teoria matemática para a construção de um modelo matemático de certo problema específico pode ainda não existir. Neste caso, deve-se ocorrer desenvolvimento de um novo ramo da matemática para a posterior modelagem.

O processo de criação de um modelo costuma seguir um caminho curvo, único e influenciado por inúmeras situações relacionadas com o problema original e com o modelador. Não existe uma receita pronta para a modelagem. A arte de modelar envolve criatividade, conhecimento, inovação, dedicação e tempo, dentre outros. No entanto, além das características previamente mencionada, um bom modelo precisa passar por certas etapas e crivos. Na próxima seção, apresentaremos mais detalhes sobre estas etapas.

2.4 ETAPAS DE UMA MODELAGEM

Para se obter um modelo, é necessário primeiramente analisar de forma cuidadosa o objeto de estudo, extraindo argumentos e parâmetros que possam descrever a situação de forma rigorosa, e apresentar as conexões existentes entre estes. Neste ponto, é didático dividir o processo de modelagem em etapas. Diferentes autores têm dividido este processo de diferentes formas, embora sigam um mesmo arquétipo. A seguir, apresentamos as etapas como descritas por Bassanezi (2002), que são: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

Experimentação: É a fase de exploração, de observação do fenômeno a ser modelado. É onde se realiza a coleta e análise de dados e informações, busca-se levantar conjecturas e extrair conexões entre os diferentes objetos do fenômeno observado. Técnicas estatísticas podem ser bastante úteis nesta etapa, pois trazem um grau maior de confiança para os dados obtidos.

Abstração: É a fase que tem por objetivo a formulação precisa do problema a ser resolvido. Nesta fase, a partir da experimentação, busca-se estabelecer os seguintes itens:

a. Seleção de variáveis: É fundamental que as variáveis estejam bem definidas e distinguidas conforme sua função. Desta maneira, elas podem ser de controle ou de estado. De controle quando agem sobre o sistema e de estado quando descrevem o estado do sistema;
b. Problematização: Formula-se o problema que deve ser respondido ao final do processo. Em geral, esta formulação é dada inicialmente em uma linguagem da área do fenômeno que está sendo estudado. Aqui, os enunciados devem ser explícitos, exatos, compreensíveis e operacionais;
c. Formulação da hipótese: As hipóteses determinam as interrelações existentes entre as variáveis. Essa formulação pode ocorrer via diversas maneiras, tais como: por observação do fenômeno e dados coletados; por comparação com estudos e modelos prévios; por dedução lógica; por experiência do modelador etc. Uma adequada formulação de hipóteses é imprescindível para dar uma correta direção no processo de obtenção de um modelo;
d. Simplificação: Em geral, se quisermos representar um fenômeno na sua forma completa, considerando todos os detalhes que o cercam, o grau de complexidade pode ser excessivamente elevado. Sendo assim, aqui procura-se simplificar o problema de tal forma que este se torne tratável, tomando o devido cuidado, entretanto, para não simplificar demasiadamente a ponto de perder a conexão com a situação-problema original.

Modelo Matemático e sua Resolução: O modelo matemático é obtido quando se substitui, nas hipóteses e nas suas consequências, a linguagem natural por uma linguagem matemática coerente via um dicionário entre as duas linguagens. Para a resolução do modelo, usa-se técnicas matemática conhecidas, que variam conforme a natureza do modelo obtido. Em situações mais complexas, soluções analíticas não são esperadas. Neste caso, softwares computacionais podem ser utilizados para gerar soluções aproximadas;

Validação: É a fase de avaliação em que se verifica se o modelo é ou não aceito. Aqui os modelos devem passar por processos de testagem, comparação e confronto. Ainda segundo Bassanezi (2002), um modelo é considerado eficiente se prever, no mínimo os fatos que lhes deram origem, e então permitir a previsão de novos fatos e/ou relações insuspeitas. A aceitação de um modelo também está circunstanciada aos fatores que motivam o modelador a investigar o fenômeno, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis;

Modificação: São as adaptações e ajustes no modelo. Em geral, um modelo não deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado.

Seguindo os passos descritos acima, pode-se modelar situações das mais variadas áreas, permitindo previsões, tomadas de decisões, explicações de situações diversas e entendimento de fenômenos. Note que, numa modelagem para fins de previsão, a principal tarefa de um matemático profissional encontra-se no item 3, na etapa de resolução do modelo. Nos outros passos, é natural que um especialista do fenômeno estudado seja o principal ator. Já na utilização de modelagem como ferramenta de ensino-aprendizagem, temos o aluno como o modelador, sendo o professor o mediador deste processo. Obviamente, nesse caso, o objetivo maior não é um modelo preciso de previsão, mas sim o aprendizado que ocorre em cada etapa do processo de modelagem. Neste ponto, é imprescindível a consciência de todos os envolvidos da multidisciplinaridade e imprevisibilidade desta atividade. Aqui a imprevisibilidade é tomada no sentido que, no início do processo de modelagem, não fica claro qual o conteúdo matemático deverá ser utilizado no decorrer do processo nem quais as características exatas terão o modelo e nem mesmo se o modelo poderá ser construído de forma satisfatória. Na próxima seção, apresentamos mais detalhes de como utilizar a modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem, assim como seus potenciais benefícios e dificuldades.

2.5 MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Uma das primeiras referências sobre o uso da modelagem matemática como método de ensino vem de Dionísio Burak na sua dissertação de mestrado de 1987 e sua tese de doutorado de 1992. Desde então, diversos outros estudos nesta direção têm sido realizados, fortalecendo a visão da modelagem matemática também como uma estratégia de ensino e hoje sendo defendida por vários educadores matemáticos, como Bassanezi (2002), D' Ambrósio (1986), Barbosa (2003), Burak (1987), ente outros. Uma das principais vantagens desta abordagem é a utilização de situações reais para tirar o aluno da sua área de conforto, passando a tê-lo como protagonista na construção do seu próprio conhecimento ao mesmo tempo em que é criado um ambiente favorável para se ter uma nova visão sobre a matemática, deixando de vê-la como um conjunto de regras sem muito sentido prático e vendo-a como uma ferramenta para resolução de problemas reais. Segundo Zbiek e Conner (2006), a modelagem matemática leva os alunos a uma compreensão conceitual mais profunda da matemática, pois é necessário a combinação de vários objetos, propriedades e parâmetros em uma única situação problema, e isso exige que o aluno selecione o procedimento adequado e realize as manipulações matemáticas necessárias. Biembengut e Hein (2005, p. 18), afirmam que:

> A Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo, que aprende a arte de modelar matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problemas por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

De acordo com Barbosa (2001, p. 06), a modelagem matemática gera:

> um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Essas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia a dia; os seus atributos e dados quantitativos existem em determinadas circunstâncias.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), a modelagem é tomada a partir da concepção de educar matematicamente. Assim os autores relacionam a matemática dentro de um contexto social, histórico e cultural e a modelagem como sendo cíclica, iniciada com um problema real, seguida por geração de hipóteses e simplificação, convertida para um problema matemático, resolvida, validada matematicamente e socialmente, finalizada ou, caso a solução não seja adequada, é reiniciado o processo para formular um novo modelo. Bassanezi (2002) elenca vários argumentos para a inclusão da modelagem matemática na estratégia de ensino – aprendizagem, tais como: torna os estudantes mais explorativos, criativos e habilidosos; prepara os estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade; prepara os estudantes para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas; fornece aos estudantes um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas; facilita aos estudantes compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados; valoriza a própria matemática; é uma metodologia mais adequada às diversas realidades socioculturais.

Na BNCC, modelagem é vista como uma estratégia para a aprendizagem válida para todo o ensino fundamental.

> "Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional."

Além disso, é mencionado que a utilização de ferramentas matemáticas para modelar problemas do cotidiano deve ser uma competência específica a ser adquirida pelos educandos.

> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BNCC, pg 267).

Diante de o exposto acima, a pergunta que naturalmente surge é a seguinte: por que a modelagem matemática é ainda pouco utilizada em sala de aula?

Biembengut (2009) diz que existem duas razões principais pelas quais o ensino por modelagem não ocorre; a formação dos professores de matemática e a forma de avaliação dos alunos. Para a autora, o ensino na graduação é demasiadamente vinculado ao ensino no formato de transmissão de conhecimento, enquanto os métodos avaliativos dos estudantes, como muitos vestibulares e concursos, não possuem vínculo algum com projetos, se sustentando apenas nos moldes tradicionais. Segundo Lozada (2009):

> [...]a falta de conhecimento sobre o processo de MM [Modelagem Matemática], dificuldades dos docentes em relação à alguns conteúdos matemáticos, as dificuldades dos alunos em relação à alguns conteúdos matemáticos, a falta de interesse dos alunos e o cumprimento do conteúdo programático, constituíram-se como motivos que impedem a utilização da MM em sala.

Já para Bassanezi (2002), existem principais 3 obstáculos que dificultam o uso desta metodologia. O primeiro é a existência de programas curriculares rígido. Como a modelagem pode ser um processo lento e incerto, isto pode acarretar num não cumprimento do programa de ensino ou no ensino de conteúdo fora do que foi inicialmente previsto. O segundo obstáculo é com relação aos estudantes, pois, em um primeiro momento, eles são retirados da sua área de conforto dentro do ensino tradicional, o que inicialmente pode gerar uma inércia contra a implementação de uma nova metodologia em que os estudantes tenham uma participação mais ativa. Outro fator complicador são turmas heterogêneas, pois temas (a serem modelados) motivantes para parte dos alunos podem ser temas desmotivantes para uma outra parte. O terceiro obstáculo é a falta de uma formação adequada dos professores para esta atividade. É importante ressaltar que, nesta metodologia, é exigido que o professor também saia da sua zona de conforto, se adentrando no mundo desafiador de conduzir um processo de modelagem.

Embora os problemas citados acima sejam consideráveis, é necessário dar-se o primeiro passo em direção a modelagem em sala de aula, para de fato tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo para os educandos. Neste ponto, frisamos que o mais importante não é a obtenção de um modelo que sirva de previsão acurada, mas sim que os conteúdos matemáticos, e eventualmente de outras áreas, sejam adquiridos durante o processo de modelagem.

> [...]o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado[...]. Mais importante do que os modelos obtidos, é o processo utilizado, a análise crítica e a sua inserção no contexto sócio – cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive. Bassanezi (2002)

É preciso que nós, enquanto educadores, demos os primeiros passos, saindo da nossa zona de conforto e iniciando a aplicação da modelagem em nossas aulas, desconstruindo a ideia de que a matemática é um campo isolado e sem aplicação imediata nas demais áreas do conhecimento, mas sim que ela está conectada com as demais ciências e, de forma prática, com o mundo que nos cerca.

3 TEORIA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

3.1 INTRODUÇÃO: MODELOS MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Neste capítulo iremos abordar a teoria das equações de diferenças. Como referência para escrita deste capítulo utilizamos os livros "*Introduction to Difference Equation, by Saber Elaydi", "Discrete Chaos, With Appplications in Science and Engineering, by Saber Elaydi" e "Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics, by Wei-bin Zhang".* Estes livros constam nas referências desta dissertação.

O ser humano sempre buscou criar mecanismos que possam descrever e facilitar a compreensão do nosso mundo e em que sejam possíveis buscar, com mais facilidade e precisão, padrões na natureza, podendo assim resolver problemas que nos afligem. Neste sentido, os modelos de previsão nos proporcionam uma grande vantagem sobre o controle do nosso próprio destino, pois, através deles, é possível analisar possibilidades de ocorrência de eventos futuros baseados em ações do presente e assim servir como uma ferramenta no desenvolvimento de estratégias para mitigar acontecimentos indesejáveis e induzir situações favoráveis.

Nas situações em que os modelos são de natureza quantitativa, a linguagem natural a ser empregada é a da matemática, podendo ser feito o uso dos mais diversos objetos matemáticos que se encontram nas distintas subáreas tais como aritmética, álgebra, geometria, probabilidade e equações diferenciais. Neste caso, chamamos estes de modelos matemáticos.

Muitos dos modelos matemáticos que possuem dependência temporal podem ser enquadrados como um sistema dinâmico. De forma mais precisa, por **sistema** entendemos um conjunto de elementos interdependentes e intelectualmente organizados e por um **estado de um sistema** entendemos um conjunto de características em que o sistema se encontra em um determinado momento. Assim, um **sistema dinâmico** é um sistema tal que, para cada elemento, temos um certo estado associado que evolui no tempo seguindo uma regra pré-determinada. Exemplos de fenômenos que podem ser descritos como sistemas dinâmicos são o balanço de um pêndulo do relógio, o crescimento do número de indivíduos de uma população e a órbita de um satélite ao redor da terra, dentre outros.

Os primeiros registros acerca dos sistemas dinâmicos apareceram em alguns trabalhos de mecânica celeste, descrito por Kepler e Newton, por volta do século XVI e XVII. Mas quem é considerado o pai do estudo da teoria moderna dos sistemas dinâmicos é o matemático francês Henri Poincaré, que foi responsável por introduzir o estudo qualitativo das equações diferenciais. Poincaré trouxe um ponto de vista novo, com métodos e ideias acerca das leis de gravitação de Newton. O início dos trabalhos com sistemas dinâmicos se deu em um artigo publicado em três volumes, intitulados "métodos *novos da mecânica celeste",* inclusive boa parte do seu trabalho sobre sistemas dinâmicos, foi estudando a mecânica celestes. Foi inclusive no estudo da estabilidade do sistema solar, tentando descrevê-lo, que Poincaré chegou a equações diferenciais muito complexas e difíceis, então surgiu a ideia de deixar de trabalhar no contínuo e passar para o discreto, facilitando a análise do problema. Para uma leitura mais completa sobre os fatos históricos relacionados com o desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos, recomendamos a leitura dos artigos: "*Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Dur´ee and Revolution, Disciplines and Cultures", "*Some Elements for a History of the Dynamical Systems Theory" e "*A Short History Of Dynamical Systems Theory: 1885- 2007",* tais artigos constam nas referências deste trabalho.

Assim no século XIX desenvolveu a teoria dos sistemas dinâmicos, que possuem sua classificação baseada na natureza das variáveis:

- Sistemas dinâmicos contínuos: as variáveis podem assumir valores reais. Neste caso, a dinâmica geralmente é dada por um sistema de equações diferenciais.
- Sistemas dinâmicos discretos: as variáveis assumem, no máximo, uma quantidade enumerável de valores. Neste caso, a dinâmica geralmente é dada por um sistema de equações de diferenças.

O mais interessante dos sistemas dinâmicos é a possibilidade descrever a evolução de fenômenos das mais variadas áreas, inclusive os sistemas dinâmicos estão sendo de grande valia para análise da evolução e comportamento da pandemia do COVID – 19, que está atingindo todo o mundo atualmente. Vale ressaltar que um brasileiro, Artur Avila ganhou a medalha Fields, estudando justamente os sistemas dinâmicos.

Neste capítulo, nosso objeto de estudo são as equações de diferenças.

Um dos primeiros registros do uso das equações de diferenças foi na resolução do problema dos coelhos, proposta por Fibonacci. O problema proposto era o seguinte:

"Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?"

Seja F(n) o número de pares de coelho no mês n. Como somente a partir do segundo mês os coelhos irão reproduzir-se, temos:

No primeiro e no segundo mês teremos somente 1 par, ou seja, $\mathrm{F}(1) = 1$ e $\mathrm{F}(2) = 1$.

No terceiro mês, passamos a ter 2 pares, pois o primeiro par gerou 1 par, ou seja, $F(3) = 2$.

No quarto mês, passamos a ter 3 pares, pois o primeiro par gerou mais um par e o segundo par ainda não se reproduziu, ou seja, $F(4) = 3$.

Desta forma, a evolução pode ser descrita pela tabela abaixo:

Tabela 1. Evolução do número de casais de coelhos

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Note que, no tempo $n + 2$, temos os pares de coelho que havia no tempo $n + 1$, sendo $F(n + 1)$ pares, mais os pares de coelhos novos que foram gerados. Neste caso, temos que esses novos pares foram gerados pelos pares que já existiam no tempo n, em números de $F(n)$. Como cada par gera um novo par, temos $F(n)$ novos pares no tempo $n + 2$. Logo, $F(n + 2) = F(n + 1) + F(n), \forall\, n > 0$. Portanto, temos a equação de diferenças

$$\begin{cases} F(n + 2) = F(n + 1) + F(n), \forall\, n > 0, \\ F(1) = F(2) = 1 \end{cases}$$

Atualmente, é possível encontrar aplicações de equações diferenças nas mais diversas áreas do conhecimento tais como teoria dos fractais, na farmacologia, na economia, na física, entre outros (MORAIS, 2014). Nas seções seguintes, trataremos equações de diferença lineares e não lineares. Para o caso não linear, nos restringiremos ao estudo das equações autônomas de primeira ordem.

3.2 CONCEITOS ELEMENTARES SOBRE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Apresentaremos a seguir alguns conceitos elementares envolvendo as equações de diferença.

Definição 3.2.1. Dada uma função f: $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma **equação de diferenças de primeira ordem** é uma expressão da forma

$$x(t+1) = f\big(t, x(t)\big), \;\; em\; que\;\; t \geq t_0\;\; e\; t \in \mathbb{N}. \qquad (3.2.1)$$

Se f não depende explicitamente de t, isto é, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a equação passa a ser

$$x(t+1) = f\big(\, x(t)\big) \qquad (3.2.2)$$

e, neste caso, ela é chamada de **equação autônoma**, ou invariante no tempo. Caso contrário, é chamada de **não autônoma**, ou variante no tempo.

Exemplo 3.2.1

a) $x(t+1) = 3x(t)$ → autônoma com f (x)=3 x.
b) $x(t+2) = 7x(t+1)$ → autônoma com f (x)=7 x.
c) $x(t+1) = \frac{4tsen(x(t))}{x(t)}$ → não autônoma com f (t, x)= $\frac{4tsen(x)}{x}$.
d) $x(t+1) = 8^t x(t) + 2t$ → não autônoma com f (t, x)= $8^t x + 2t$.

Dada uma equação de diferenças de primeira ordem como em (3.2.1), entendemos por **solução geral** uma função x(t,c): $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada c fixado, tem-se que :$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $x_c(t)$ = x(t,c), satisfaz (3.2.1). Neste caso, para cada c fixado, $x_c(t)$ é dita uma **solução particular** de (3.2.1). Usualmente impomos uma condição do tipo $x(t_0)$ = x_0, em que x_0 é conhecido. Esta é chamada **condição inicial.** Fixada uma condição inicial, geralmente é possível encontrar um valor c_0 tal que a solução particular $x_{c_0}(t)$ satisfaz também a condição inicial. Neste caso, dizemos que esta solução particular é a **solução do problema de valor inicial**:

$$\begin{cases} x(t+1) = f\big(t, x(t)\big), & t \geq t_0 \;\; e \; t \in \mathbb{N} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exemplo 3.2.2 (juros compostos). Consideramos um investimento tendo uma taxa de juros mensal fixada em r e um investimento inicial x_0. Seja $x(t)$ o capital após t meses. Então temos a seguinte equação de diferenças com condição inicial:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + rx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Temos que a solução geral é dada por $x(t, c)$= $(1+r)^t . c$ e a solução do problema de valor inicial é $x(t)$= $(1+r)^t . x_0$

■

De forma similar, podemos definir equações de diferenças de ordem superior:

Definição 3.2.2 Dado uma função f: $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma **equação de diferenças de ordem n** é uma expressão da forma

$$f(t, x(n+t), x(n-1+t), x(n-2+t), \ldots, x(1+t), x(t)) = 0, em\; que \;\; t \geq t_0 \;\; e \; t \in \mathbb{N}$$

De forma similar ao caso de primeira ordem, podemos definir o conceito de autônoma e não autônoma, solução geral, condição inicial, problema de valor inicial e solução particular para uma equação de ordem n. Neste caso, a solução geral terá n parâmetros x(t, $c_1, c_2, \ldots, c_n$) e há n expressões na condição inicial $x(t_0) = x_0$, $x(1+t_0) = x_1$, ..., $x(n-1+t_0) = x_{n-1}$.

Exemplo 3.2.3 (sequência de Fibonacci). Temos que

$$\begin{cases} x(t+2) = x(t+1) + x(t), \forall t > 0, \\ x(1) = x(2) = 1 \end{cases}$$

é uma equação de diferenças de ordem 2 com condição inicial. A solução geral é dada por

$$x(\mathrm{t}, c_1, c_2) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$x(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t}.$$

■

Além da ordem e da questão de ser autônoma ou não, uma equação de diferenças pode ser classificada também por sua linearidade (linear ou não linear). Neste trabalho, trataremos das equações de diferenças lineares e não lineares autônomas de primeira ordem.

3.3 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

Definição3.3.1 Uma equação de diferenças de ordem n

$$f\big(t, x(n+t), x(n-1+t), x(n-2+t), \ldots., x(1+t), x(t)\big) = 0$$

é dita **linear** se $existirem\ funções$

$$f^{i}, g\colon \mathbb{N} \to\ \mathbb{R}, com\ 0 \leq i \leq n,$$

tais que

$$f\big(t, x(n+t), x(n-1+t), x(n-2+t), \ldots., x(1+t), x(t)\big) = f^{0}(t)x(t) + f^{1}(t)x(1+t) + \cdots + f^{n}(t)x(n+t) - g(t).$$

Caso contrário, ela é dita é **não linear**.

Definição 3.3.2 Considere uma equação de diferenças linear

$$f^{0}(t)x(t) + f^{1}(t)x(1+t) + \cdots + f^{n}(t)x(n+t) = g(t).$$

i)Se $g(t) = 0$, dizemos que a equação de diferenças é **homogênea**;

ii)Se $g(t) \neq 0$, dizemos que a equação de diferenças é **não homogênea**.

Exemplo 3.3.1

(a) $2x(t+1) - sen(t).x(t) = 0$, é linear homogênea e de primeira ordem com $f^{0}(t) = sen(t)\ e\ f^{1}(t) = 2$.

(b) $x(t+2) - x(t+1) + x(t) = 0$, é linear homogênea e de segunda ordem com $f^{0}(t) = 1, f^{1}(t) = -1\ e\ f^{2}(t) = 1$.

(c) $x(t+2) - tx(t+1) - x(t) - 5 = 0$, é linear, não homogênea e de segunda ordem com $f^{0}(t) = -\,1, f^{1}(t) = -t, f^{2}(t) = 1\ e\ g(t) = 5$.

$(d)\ x(t+2)+2x(t+1)=3^{2t}$, é linear, não homogênea e de primeira ordem com $f^0(t)=2, f^1(t)=1\ e\ g(t)=3^{2t}$.

■

Exemplo 3.3.2: **(Resolução de uma equação linear homogênea de primeira ordem).**

Uma equação linear homogênea de primeira ordem, de forma geral, é dada por:

$$\begin{cases} x(t+1)=a(t)x(t),\ \ t\geq t_0\geq 0, onde\ a(t)\neq 0, \\ x(t_0)=x_0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

A solução da equação acima pode ser obtida por interações simples. De fato,

$$x(t_0+1)=a(t_0)x_0,$$

$$x(t_0+2)=a(t_0+1)x(t_0+1)=a(t_0+1)a(t_0)x_0,$$

$$x(t_0+3)=a(t_0+2)x(t_0+2)=a(t_0+2)a(t_0+1)a(t_0)x_0,$$

$$\vdots$$

$$x(t_0+k)=a\big(t_0+(k-1)\big)a\big(t_0+(k-2)\big)\dots a(t_0+1)a(t_0)x_0.$$

Assim a solução da equação linear homogênea de primeira ordem pode ser dada por:

$$x(t)=\left[\prod_{i=t_0}^{t-1}a(i)\right]x_0, se\ t>t_0. \tag{3.3.2}$$

Podemos mostrar (3.3.2) por indução finita. Com efeito, vimos anteriormente que o resultado é válido para (t_0+1). Supondo que seja válido para $k>t_0$ e vamos mostrar que é válido para $(k+1)$. Temos:

$$x(k+1)=a(k)x(k)=\ a(k)\left[\prod_{i=t_0}^{k-1}a(i)\right]x_0=\left[\prod_{i=t_0}^{(k+1)-1}a(i)\right]x_{0.}$$

Portanto, a fórmula (3.3.2) está demonstrada.

■

Exemplo 3.3.3 Aplicando o método visto no exemplo anterior, temos que a solução da equação

$$x(t+1)-(t+1)x(t)=0, \qquad x(0)=x_0$$

é dada por

$$x(t)=\left[\prod_{i=0}^{t-1}(i+1)\right]x_0=t!\,x_0.$$

■

Exemplo 3.3.4. Outra situação interessante que pode ser aplicada a solução dada em (3.3.2) é em aplicações financeiras. Considere um capital inicial de R$ 12000,00 investido a juros de 0,8% a.m. Queremos saber o valor que será resgatado após t meses, considerando o regime de juro composto (comumente aplicado em operações financeiras). Considere que $C(0)$ seja o valor aplicado inicialmente (condição inicial) e $C(t+1)$ o montante gerado após $(t+1)$º período. Então, temos a relação $C(t+1) = C(t) + 0{,}008.C(t)$. Portanto, obtemos a equação de diferenças:

$$\begin{cases} C(t+1) = (1{,}008).C(t), \\ C(0) = 12\,000. \end{cases}$$

De (3.3.2) temos que a solução a equação acima é dada por:

$$C(t) = \left[\prod_{i=0}^{t-1}(1{,}008)\right].12000 = 1{,}008^t.12000.$$

Portanto, o valor do resgate em função do tempo, pode ser escrito como

$$C(t) = 1{,}008^t.12000.$$

■

Exemplo 3.3.5: **(Resolução de uma equação linear não homogênea de primeira ordem)**

Uma equação linear não homogênea de primeira ordem, de forma geral, é dada por:

$$\begin{cases} x(t+1) = a(t)x(t) + g(t), t \geq t_0 \geq 0,\ a(t) \neq 0\ e\ g(t) \neq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

De forma análoga a (3.3.2), vamos mostrar por indução finita que a solução da equação acima é dada por:

$$x(t) = \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=t_0}^{t-1}\left[\prod_{i=r+1}^{t-1} a(i)\right] g(r)\ , para\ t > t_0, \tag{3.3.4}$$

em que $\prod_{i=t}^{t-1} a(i) = 1$ por convenção. De fato,

$$x(t_0+1) = a(t_0)x(t_0) + g(t_0) = a(t_0)x_0 + g(t_0) =$$

$$= \left[\prod_{i=t_0}^{(t_0+1)-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=t_0}^{(t_0+1)-1}\left[\prod_{i=r+1}^{(t_0+1)-1} a(i)\right] g(r),$$

Supondo que (3.3.4) seja válido para $t > t_0$, vamos mostrar que é também válido para $t+1$. De fato,

$$x(t+1) = a(t)x(t) + g(t) =$$

$$= a(t)\left\{\left[\prod_{i=t_0}^{t-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=t_0}^{t-1}\left[\prod_{i=r+1}^{t-1} a(i)\right] g(r)\right\} + g(t) =$$

$$= \left[\prod_{i=t_0}^{t} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=t_0}^{t-1}\left[\prod_{i=r+1}^{t} a(i)\right] g(r) + \left(\prod_{i=t+1}^{t} a(i)\right) g(t) =$$

$$= \left[\prod_{i=t_0}^{t} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=t_0}^{t}\left[\prod_{i=r+1}^{t} a(i)\right] g(r).$$

Portanto, (3.3.4) é válido.

■

Exemplo 3.3.6 Aplicando o método visto no exemplo anterior, temos que a solução da equação

$$x(t+1) - (t+1)x(t) = e^t, \qquad x(0) = x_0$$

é dada por

$$x(t) = \left[\prod_{i=0}^{t-1}(i+1)\right] x_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\left[\prod_{i=k+1}^{t-1}(i+1)\right] e^k = t!\, x_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\left[\frac{t!}{(k+1)!}\right] e^k.$$

Portanto a solução é

$$x(t) = t!\, x_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\left[\frac{t!}{(k+1)!}\right] e^k.$$

■

Existem dois casos especiais de (3.3.4):

i) Se $a(t)$ independe de t e $t_0 = 0$. então temos

$$x(t+1) = ax(t) + g(t), x(0) = x_0 \qquad (3.3.5)$$

e a solução da equação é dada por

$$x(t) = a^t x_0 + \sum_{r=0}^{t-1} a^{t-r-1} g(r) \qquad (3.3.6)$$

ii) Se $a(t)$ e $g(t)$ são constantes e $t_0 = 0$, então temos

$$x(t+1) = ax(t) + b, x(0) = x_0, \qquad (3.3.7)$$

e a solução da equação é dada por

$$x(t) = \begin{cases} a^t x_0 + \left(\dfrac{a^t - 1}{a - 1}\right) b \ se \ a \neq 1, \\ x_0 + tb \ se \ a = 1. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Exemplo 3.3.7. Podemos, com o uso de uma equação de diferenças, encontrar uma expressão que nos forneça o número máximo de regiões criadas por n retas que se interceptam no plano. Observe as figuras abaixo:

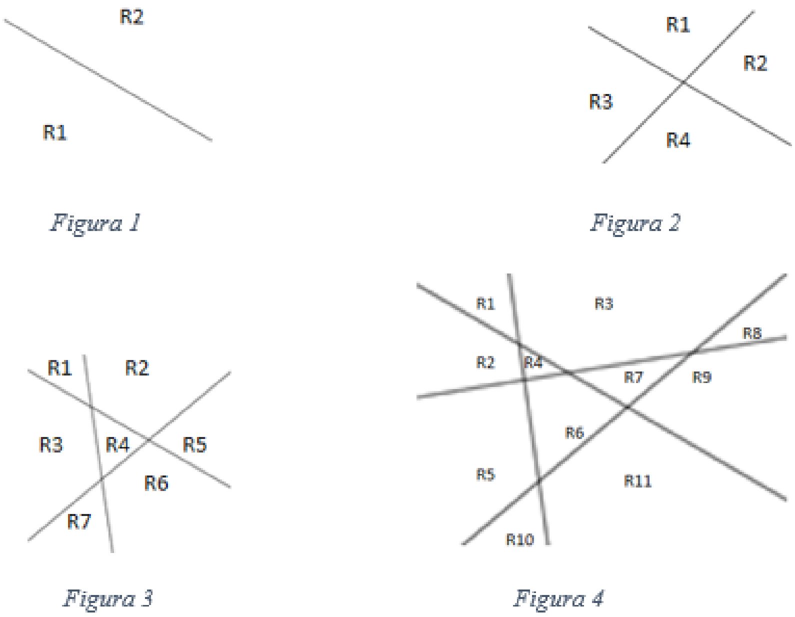


Figura 1. Retas dividindo o plano

Seja $P(n)$ o número de regiões máximas formadas por n retas no plano. Assim temos que $P(0) = 1$, pois, se não temos reta, teremos somente o próprio plano. Analisando as figuras acima, temos:

$$P(1) = 2; P(2) = 4; P(3) = 7; P(4) = 11.$$

Note que, quando adicionada a terceira reta, ela intersecta as outras duas em dois pontos distintos e passa por 3 regiões distintas, dividindo cada uma destas regiões em duas. Da mesma forma, quando adicionamos a quarta reta, observa-se que ela intersecta as três retas em pontos distintos e passa por 4 regiões, dividindo cada uma destas regiões em duas.

Analisando está dinâmica, temos que quando adicionamos a $(n+1)-$ ésima reta, para obter o máximo de regiões possíveis, ela deve interceptar as n retas em n pontos distintos, atravessando $n+1$ regiões e dividindo cada uma destas regiões em duas.

Portanto, podemos deduzir que o número de regiões geradas pode ser descrito pela equação:

$$\begin{cases} P(n+1) = P(n) + (n+1) \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

Com o uso de (3.3.6), podemos definir uma expressão que nos dá o número de regiões formadas em função do número de retas. Assim temos:

$$P(n) = 1.1 + \sum_{r=0}^{n-1} 1^{n-r-1}.(r+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

Exemplo 3.3.8. Outra situação interessante é na aplicação de alguns tipos de droga no organismo e o tempo de eliminação dele. Considere, por exemplo, que um indivíduo iniciou um tratamento com uma certa droga, que é aplicada a cada 5 horas, e seja $x(t)$ é a quantidade desta droga no sistema sanguíneo após o t-ésimo intervalo de aplicação. Considere que o corpo elimina uma certa quantia da droga a cada intervalo de tempo. Seja x_0 a quantidade aplicada em cada intervalo e k a fração da droga que é eliminada a cada intervalo de tempo. Então, temos:

$$x(0) = x_0,$$
$$x(1) = x_0 + x(0) - kx(0),$$
$$x(2) = x_0 + x(1) - \ kx(1),$$
$$\vdots$$
$$x(t) = x_0 + x(t-1) - kx(t-1) = (1-k)x(t-1) + x_0,$$

ou seja, após o intervalo t, temos a nova aplicação x_0 somado ao que tinha no intervalo $t-1$, denotado por $x(t-1)$ e retirada a fração que foi eliminada pelo organismo, denotada por $kx(t-1)$. Logo, temos a equação de diferença:

$$\begin{cases} x(t) = (1-k)x(t-1) + x_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Aplicando (3.3.8) com $a = 1 - k$ e $b = x_0$, temos

$$x(t) = (1-k)^t x_0 + x_0\left(\frac{(1-k)^t - 1}{1-k-1}\right)$$

$$x(t) = \ (1-k)^t x_0 - \frac{x_0(1-k)^t}{k} + \frac{x_0}{k}$$

$$x(t) = (1-k)^t x_0\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{x_0}{k}$$

Portanto a quantidade de droga no sistema sanguíneo após o t-ésimo intervalo é dado por

$$x(t) = (1-k)^t x_0\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{x_0}{k}.$$

■

Exemplo 3.3.9. Podemos ainda utilizar os casos especiais em situações financeiras, como no caso de amortizações. Digamos que um empréstimo de R$ 80000,00 será amortizado por pagamentos mensais iguais. Se quiséssemos quitar este empréstimo em 30 anos, sendo o juro composto de 10% a.m., qual seria o valor da parcela?

Consideramos $g(t)$ o pagamento efetuando no período t e $p(t)$ o capital devido após o t-ésimo pagamento. Seja i a taxa de juro paga sobre $p(t)$. Então temos que capital a ser pago após o (t+1)º período é descrito por:

$$p(t+1) = p(t) + i.p(t) - \ g(t) = (1+i).p(t) - g(t).$$

Como a taxa é de 0,1 a.m, então temos:

$$p(t+1) = (1{,}01).p(t) - g(t)$$

O valor inicial da dívida é de R$ 80000,00, ou seja, $p(0) = 80000$. Logo, de (3.3.6), temos que:

$$p(t) = t.80000 - \sum_{k=0}^{t-1}(1{,}01)^{t-k-1}.g(t)$$

Como $g(t)$ é constante, chamaremos de T:

$$p(t) = (1{,}01)^t.80000 - \sum_{k=0}^{t-1}(1{,}01)^{t-k-1}.T$$

$$p(t) = (1{,}01)^t.80000 - \frac{[(1{,}01)^t.T - T]}{0{,}01}$$

Como empréstimo será pago em 360 meses (30 anos), ao final deste período a dívida estará quitada, ou seja $p(360) = 0$. Isolando T, obtemos o valor de cada parcela:

$$0 = (1{,}01)^{360}.80000 - [(1{,}01)^{360} - 1].\frac{T}{0{,}01},$$

$$[(1{,}01)^{360} - 1].\frac{T}{0{,}01} = (1{,}01)^{360}.80000,$$

$$[(1{,}01)^{360} - 1].T = (1{,}01)^{360}.80000.0{,}01,$$

$$T = \frac{(1{,}01)^{360}.80000\,.0{,}01)}{(1{,}01)^{360} - 1},$$

$$T = 822{,}8900775.$$

Portanto o valor fixo de cada parcela deverá ser de R$ 822,89.

■

3.4 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Nas equações de diferença não lineares dificilmente é possível, salvo exceções, encontrar soluções na forma fechada, mesmo no caso de equações de primeira ordem. Geralmente, neste caso, só é possível encontrar soluções numéricas a partir do processo de recorrência. Desta forma, faz-se necessário uma análise qualitativa das equações para buscar entender seu comportamento geral. Nesta seção, estudaremos alguns aspectos qualitativos de equações não lineares autônomas de primeira ordem. Para isto, abordaremos conceitos tais como órbita, diagrama de Cobweb, pontos de equilíbrio, estabilidade, comportamento assintótico etc. A seguir, introduzimos o conceito de órbita.

Dada uma equação de diferenças não linear de primeira ordem e autônoma

$$\begin{cases} x(t+1) = f\big(x(t)\big), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

em que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos descrever a evolução do sistema a partir do termo x_0 pela sequência:

$$x(1) = f(x_0)$$

$$x(2) = f\big(x(1)\big) = f\big(f(x_0)\big) = f^2(x_0).$$

$$x(3) = f\big(x(2)\big) = f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) = f^3(x_0).$$

$$\vdots$$

$$x(t) = f\big(x(t)\big) = f\Big(\ldots f\big(f(x_0)\big)\Big) = f^t(x_0).$$

Assim temos

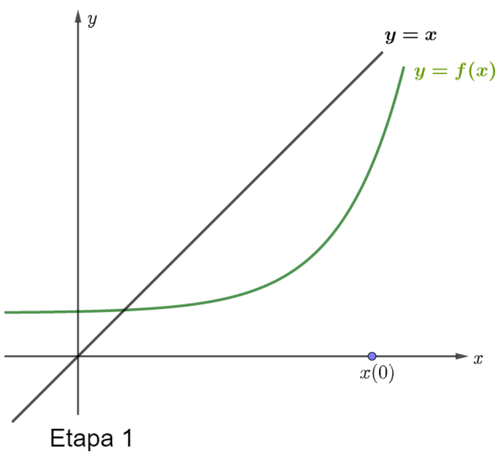
$$x(t+1) = f\big(x(t)\big) = f^{t+1}(x_0), t \in \mathbb{N}, t \geq 0.$$

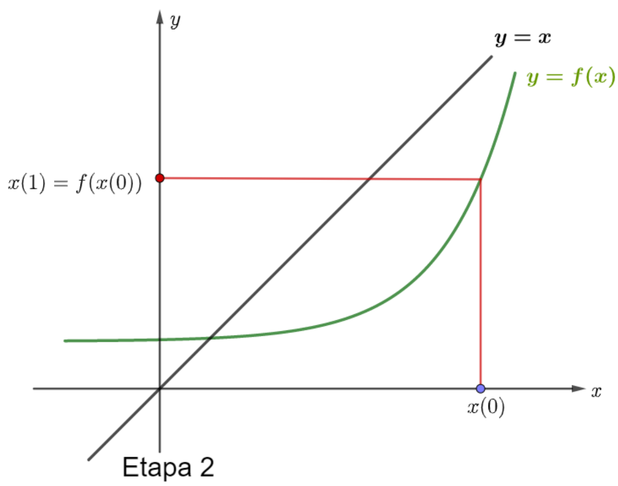
Aqui $f(x_0)$ é chamada de primeira iteração de x_0 em f e $f^t(x_0)$ é chamada de $\boldsymbol{t}-$**ésima iteração** de x_0 em f. O conjunto de todas as iterações de x_0 em f é chamada **órbita de $\boldsymbol{x_0}$**, denotada por $O(x_0) = \{f^t(x_0); t \geq 0\}$, sendo que $f^0(x_0) = x_0$. Além disso, temos que f é chamada de **mapa** associado a equação.

Note que o conhecimento de uma órbita em particular fornece informações sobre uma solução particular da equação $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$. No entanto, a princípio, isto não nos dá muitas informações sobre a solução geral. Nas próximas seções, apresentaremos ferramentas que são úteis para se extrair propriedades relativas ao conjunto das órbitas, e consequentemente, relativas à dinâmica geral do sistema.

3.5 DIAGRAMA DE COBWEB (TEIA DE ARANHA) PARA EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE PRIMEIRA ORDEM

Diagrama de Cobweb é um método gráfico que nos permite visualizar a orbita de um ponto x_0 a partir do conhecimento do gráfico de f. Vamos considerar um sistema cartesiano de coordenadas xy em que esteja desenhado o gráfico de $y = f(x)$. Se identificarmos o ponto $x(0) = x_0$ no eixo x, então podemos identificar o ponto $x(1) = f(x_0)$ no eixo y. Projetando agora $x(1)$ no eixo x e aplicando f, podemos identificar $x(2) = f\big(x(1)\big)$ no eixo y e, então, também projetá-lo no eixo x. Esta projeção de $x(1)$ e $x(2)$ no eixo x pode ser obtida graficamente através da reflexão pela reta $y = x$, como ilustra a seguinte figura.





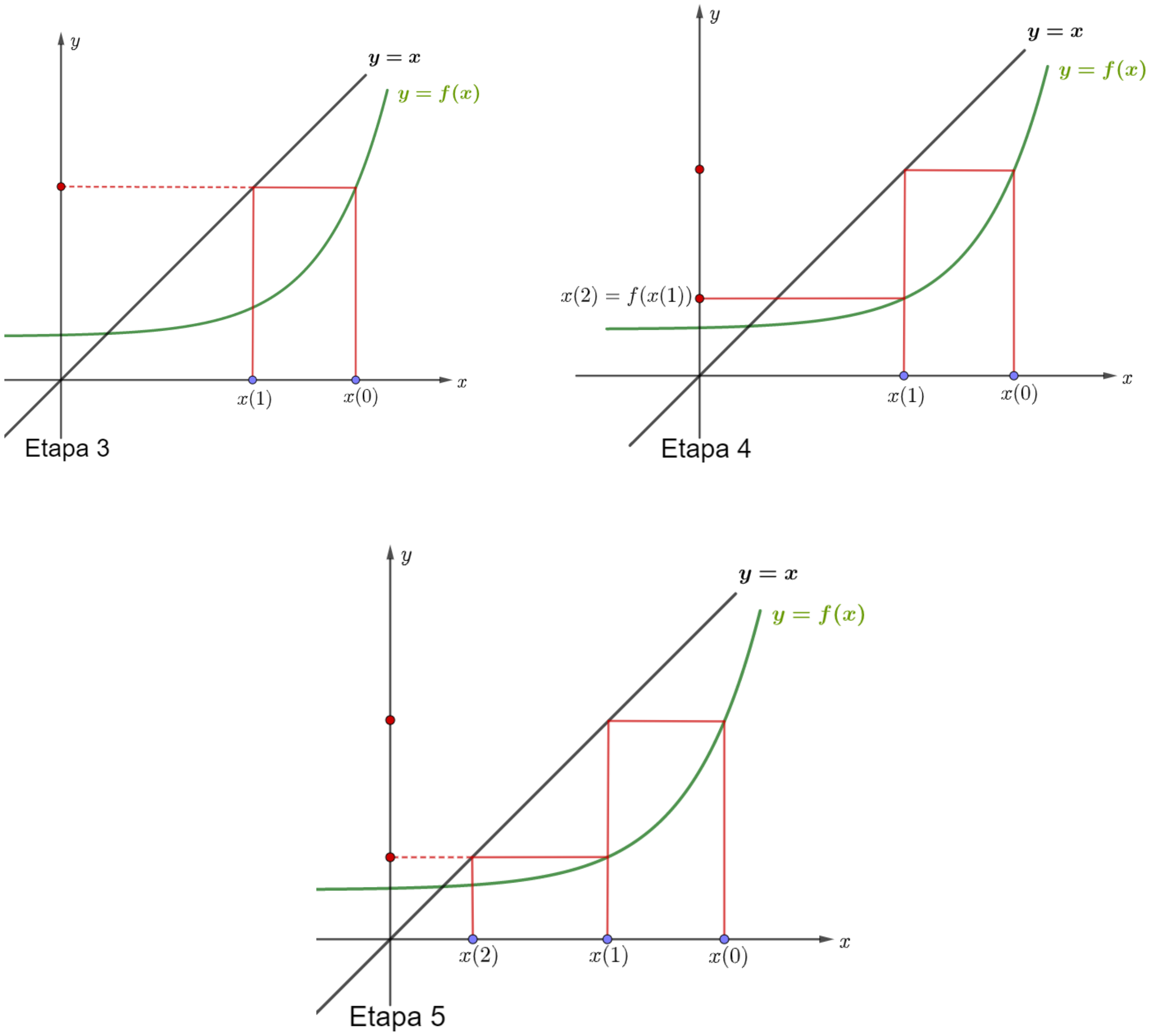


Figura 2. Identificação de pontos da órbita de x_0 a partir do gráfico de $y = f(x)$

Podemos dar continuidade ao processo iterativo acima e obter, de forma gráfica, uma representação para a órbita de $x(0) = x_0$.

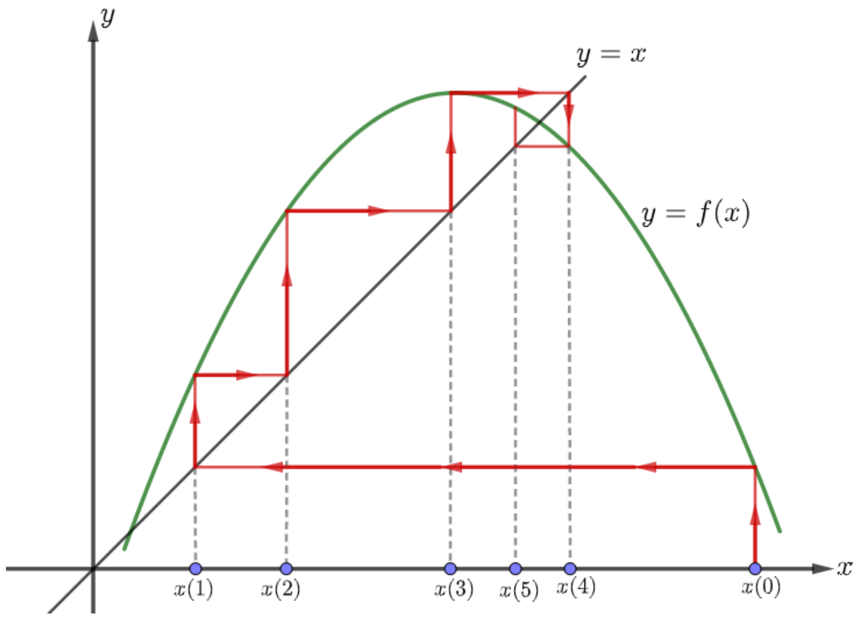


Figura 3. Representação gráfica da órbita de x_0

Adiante estudaremos conceitos como pontos de equilíbrios e estabilidade e veremos que é possível também estudar estes conceitos via o diagrama de Cobweb. Neste sentido, ele é uma ferramenta importante que nos auxilia na análise do sistema, nos permitindo compreender o comportamento das soluções a partir apenas do gráfico de f.

3.6 PONTOS DE EQUÍLIBRIO

Equações de diferenças não lineares aparecem nas mais diversas áreas tais como físicas, economia, química, engenharia etc. Como já mencionado, no caso não linear, em geral, não se obtém uma fórmula explícita para a solução geral. Nesta situação, uma saída é considerar métodos iterativos para o cálculo de órbitas. Atualmente, com a ajuda dos computadores, é possível efetuar milhares de recorrência sem tempos relativamente curtos e obter, em muitos casos, resultados bastante precisos e abrangentes. No entanto, como métodos computacionais geralmente apresentam soluções apenas aproximadas, em certas situações, há o risco de erros de aproximação se acumularem ao longo do tempo e os resultados serem consideravelmente distintos do correto. Nesta direção, é preciso fazer um estudo do quão sensível é o sistema considerado. Nesta análise, os pontos de equilíbrio do sistema, que são os pontos fixos de f, desempenham um papel essencial. Através deles, podemos analisar certas sensibilidades através de conceitos como estabilidade, comportamento assintótico, atratores etc. Para além disso, estas técnicas qualitativas também servem de método para extrair uma previsão da dinâmica geral do sistema e inferir resultados sobre os problemas reais que estão sendo modelados.

Definição 3.6.1. Um ponto x^* no domínio de f é dito **ponto de equilíbrio** (ou **ponto estacionário**) da equação

$$x(t+1) = f(x(t)),$$

se x^* é **ponto fixo** de f, isto é, se

$$f(x^*) = x^*.$$

Observação: Note que é x^* ponto de equilíbrio se, e somente se. $x(t) = x^*$ é solução de

$$\begin{cases} x(t+1) = f\big(x(t)\big), \\ \quad x(0) = x^*. \end{cases}$$

De fato, temos que

$$x(1) = f\big(x(0)\big) = f(x^*) = x^*,$$
$$x(2) = f\big(x(1)\big) = f(x^*) = x^*,$$
$$x(3) = f\big(x(2)\big) = f(x^*) = x^*.$$

e assim por diante. Logo, os pontos de equilíbrio são as soluções constantes da equação de diferenças.

Note também que x^* é um ponto fixo de f, se, e somente, se o par (x^*, x^*) satisfaz o sistema

$$\begin{cases} y = f(x), \\ \; y = x \end{cases}$$

Portanto, no diagrama de Cobweb, os pontos de equilíbrio podem ser identificados como os pontos de intersecção dos gráficos de $y = f(x)$ com $y = x$.

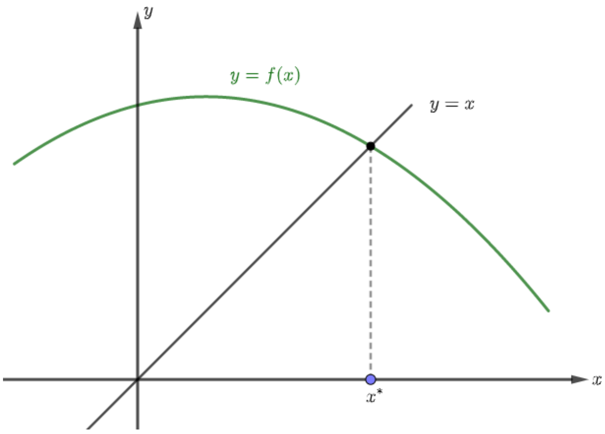


Figura 4. Representação gráfica de um ponto de equilíbrio.

É válido observar que uma equação de diferenças pode ter uma infinidade de pontos de equilíbrio.

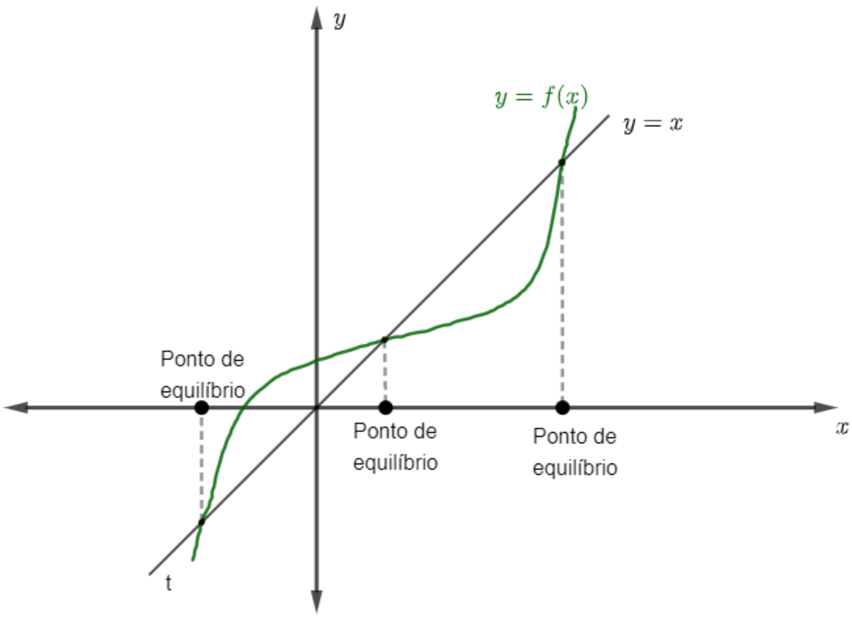


Figura 5. Representação gráfica de uma função possuindo 3 pontos fixos.

Exemplo 3.6.1. Vamos achar os pontos de equilíbrios da equação

$$x(t+1) = x^4(t).$$

Para isso, notemos que $f(x) = x^4$. Então temos

$$f(x^*) = x^*,$$

$$(x^*)^4 = x,^*$$

$$(x^*)^4 - x^* = 0,$$
$$x^*[(x^*)^3 - 1] = 0,$$

Assim seus pontos de equilíbrio são $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Com os diagramas de cobweb, podemos visualizar estes pontos

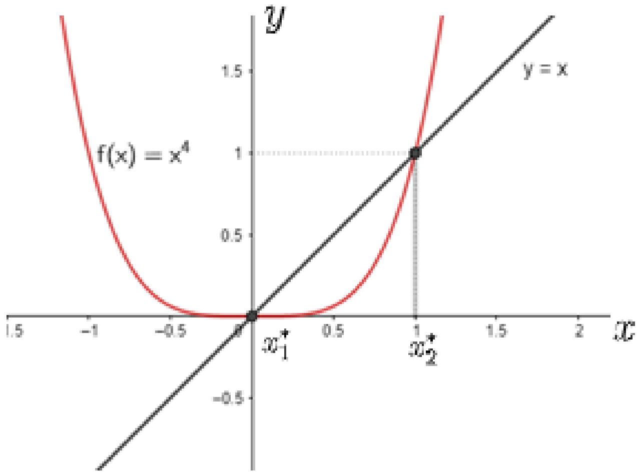


Figura 6. Pontos de equilíbrio de $x(t+1) = x^4(t)$.

∎

Exemplo 3.6.2. Considere agora a equação

$$x(t+1) = x^2(t) - 7x(t) + 17.$$

Note que $f(x) = x^2 - 7x + 16$. Logo:

$$f(x^*) = x^*,$$

$$(x^*)^2 - 7x^* + 16 = x^*,$$
$$(x^*)^2 - 7x^* - x^* + 16 = 0,$$
$$(x^*)^2 - 8x^* + 16 = 0,$$
$$(x^* - 4)^2 = 0,$$
$$x^* = 4.$$

Neste caso, teremos somente um ponto de equilíbrio, que é $x^* = 4$. Graficamente temos:

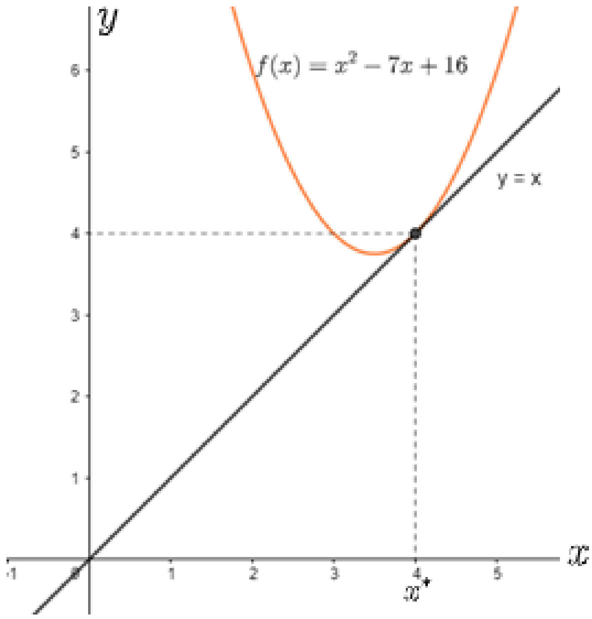


Figura 7. Diagrama Cobweb. Ponto de equilíbrio de $x(t+1) = x^2(t) - 7x(t) + 17$.

■

Numa equação de diferenças pode ocorrer de um ponto inicial x_0 não ser de equilíbrio, mas, após um número finito iterações, atingir um ponto de equilíbrio. Neste caso, como definido a seguir, chamamos este de ponto de ponto de equilíbrio eventual.

Definição 3.6.2 Seja x um ponto do domínio de f. Se existir um $r \in \mathbb{N}$ e um ponto de equilíbrio x^* para $x(t+1) = f(x(t))$ de modo que $f^r(x) = x^*$ e $f^{r-1}(x) \neq x^*$, então x é dito um **ponto de equilíbrio eventual** de ordem r associado a x^*.

Exemplo 3.6.3 Abaixo temos dois diagramas de Cobweb que ilustram duas situações em que temos pontos de equilíbrio eventuais de ordem 1 e 3. Graficamente, é possível ver que a ordem é o número de interações necessárias para que, a partir do ponto eventual, a dinâmica alcance x^*.

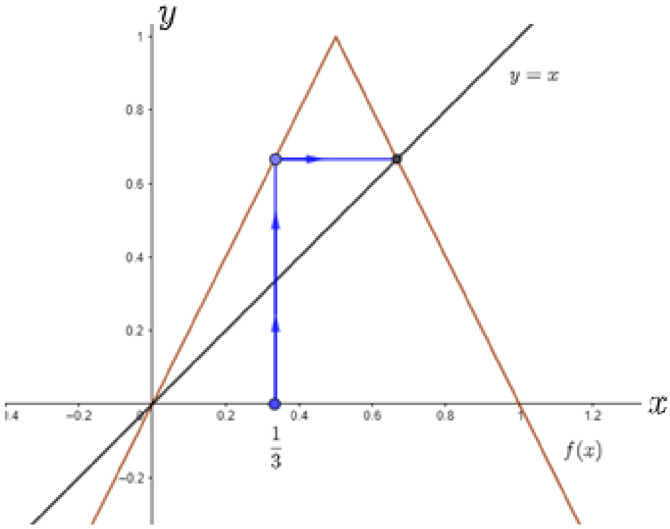


Figura 8. Diagrama Cobweb. $\frac{1}{3}$ é um eventual ponto de equilíbrio de ordem 1

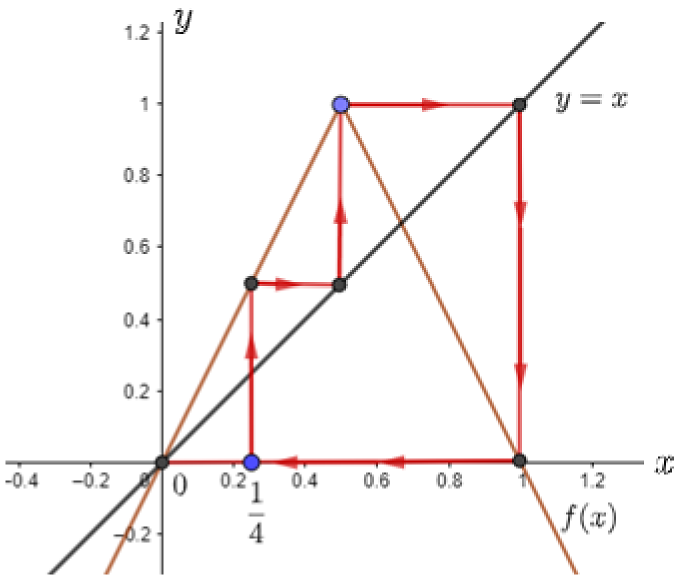


Figura 9. Diagrama Cobweb. $\frac{1}{4}$ é um eventual ponto de equilíbrio de ordem 3.

Exemplo 3.6.4 A partir da equação abaixo, vamos verificar se ela possui pontos de equilíbrio e de equilíbrio eventual.

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & se\ x(t) \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2\big(1 - x(t)\big), & se\ x(t) > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Note que temos $f(x) = 2x, se\ x \leq \frac{1}{2}$ e $f(x) = 2(1-x), se\ x > \frac{1}{2}$. Então, temos que os pontos de equilíbrio são:

Para $x \leq \frac{1}{2}$,

$$2x^* = x^*,$$
$$x^* = 0.$$

Para $x > \frac{1}{2}$,

$$2(1 - x^*) = x^*,$$
$$3x^* = 2,$$
$$x^* = \frac{2}{3}.$$

Graficamente, é fácil observar estes pontos.

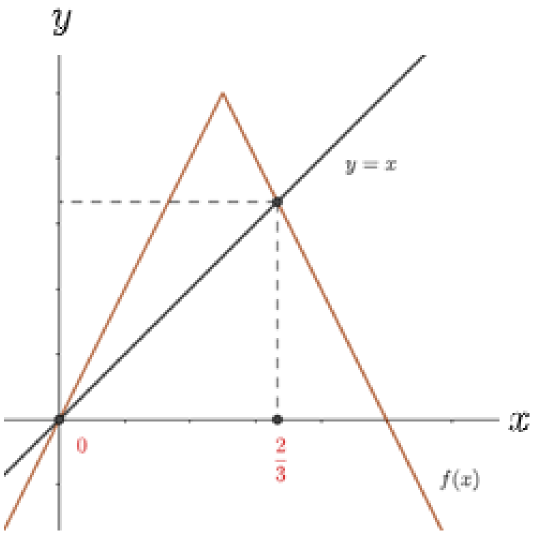


Figura 10. Pontos de equilíbrio de $f(x)$.

Vamos agora verificar que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de equilíbrio eventual de ordem 2 e associado $x^* = 0$. Note que

$$f(x) = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

Então

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1,$$
$$f(1) = 1 - 2\left|1 - \frac{1}{2}\right| = 0,$$

Logo $f^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e $f^1\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Portanto $\frac{1}{2}$ é um ponto de equilíbrio eventual de ordem 2 e associado $x^* = 0$. Graficamente temos

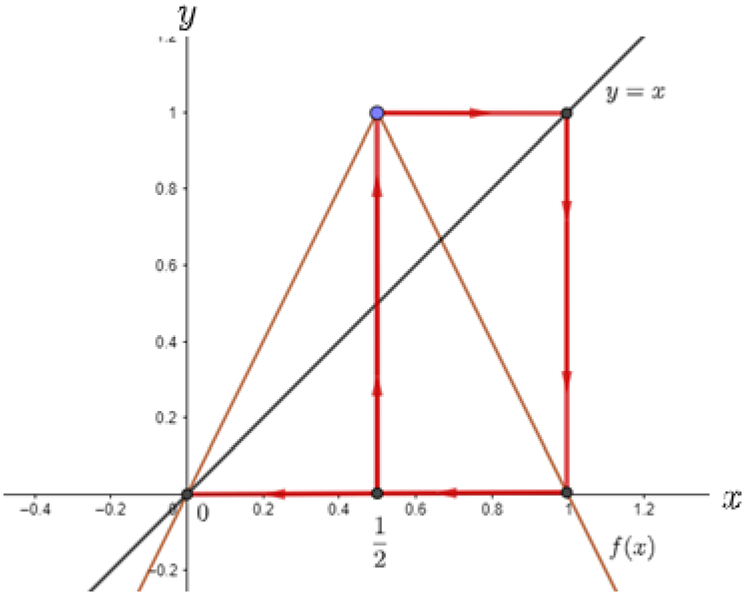


Figura 11. Ponto de equilíbrio eventual de ordem 2.

■

3.7 ESTABILIDADE DE PONTOS DE EQUILÍBRIO.

Dentro da teoria de estabilidade, classificamos os pontos de equilíbrio entre estáveis e instáveis. Um ponto de equilíbrio x^* dito é estável se, para qualquer ponto inicial suficientemente próximo de x^*, a dinâmica permanece indefinidamente próxima de x^*. Caso contrário, o ponto é dito instável. Isto significa que existem pontos iniciais arbitrariamente próximos de x^* tais que a dinâmica eventualmente se afasta de x^*. A seguir, estes conceitos são definidos de forma precisa.

Definição 3.7.1. Um ponto de equilíbrio x^* da equação $x(t+1) = f(x(t))$ dito **estável** se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se

$$|x(0) - x^*| \leq \delta, \mathit{então}\ |x(t) - x^*| \leq \varepsilon, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $x(t) = f^t(x(0))$.

Podemos reescrever a definição acima da seguinte maneira: Dado qualquer intervalo da forma $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, por menor que seja este intervalo, sempre é possível encontrar um intervalo da forma $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ e de maneira que, se uma dinâmica começa dentro de $(x^* - \delta, x^* + \delta)$, então ela permanece indefinidamente dentro de $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. O valor de

δ depende do valor de ε e certamente tem-se que $\delta \leq \varepsilon$. A seguir, apresentamos uma figura representativa de um ponto estacionário estável num gráfico em termos de $(t, x(\mathrm{t}))$.

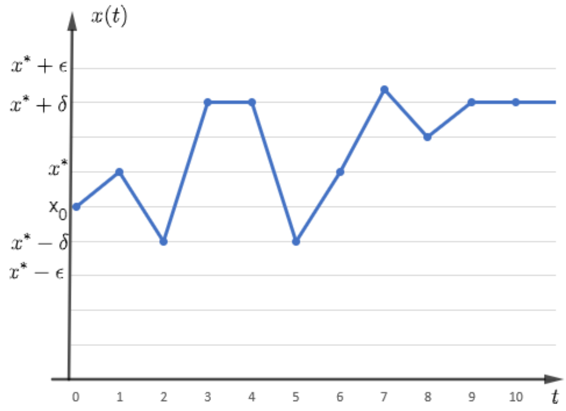


Figura 12. x^* estável

Definição 3.7.2. Um ponto de equilíbrio x^* é dito **instável** se não for estável, isto é, se existe $\varepsilon > 0$, tal que para cada $\delta > 0$, existe $x(0)$ e $t > 0$, tal que

$$|x(0) - x^*| \leq \delta \ e \ |x(t) - x^*| > \varepsilon, \text{com } x(t) = f^t\big(x(0)\big).$$

Podemos reescrever a definição acima da seguinte maneira: Existe um intervalo da forma $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ com a seguinte propriedade: dado qualquer intervalo da forma $(x^* - \delta, x^* + \delta)$, por menor que seja este intervalo, sempre podemos encontrar um ponto inicial x_0 neste intervalo $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ tal que a dinâmica eventualmente sairá do intervalo $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Obviamente, o ponto x_0 depende de δ . A seguir, apresentamos uma figura representativa de um ponto estacionário instável num gráfico em termos de $(t, x(\mathrm{t}))$.

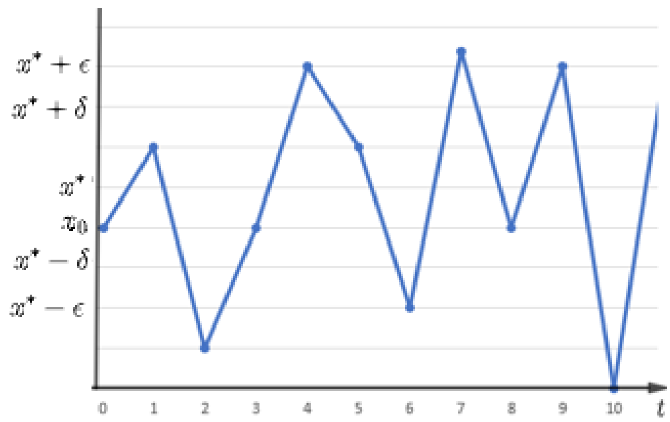


Figura 13. x^*instável

Exemplo 3.7.1. Considere a equação

$$x(t+1) = 1 - x(t).$$

Temos que $f(x) = 1 - x$. Logo os pontos es equilíbrios são:

$$f(x^*) = x^*,$$

$$1 - x^* = x^*,$$

$$x^* = \frac{1}{2}.$$

Dado um ponto inicial x_0, temos

$$x(1) = 1 - x_0,\ x(2) = x_0,\ x(3) = 1 - x_0, \dots, x(2t-1) = 1 - x_0,\ x(2t) = x_0, \dots$$

Logo, temos que

$$|x(t) - 0{,}5| = |x(0) - 0{,}5|, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto, o ponto de equilíbrio é estável. De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher δ como sendo ε na definição 3.7.1.

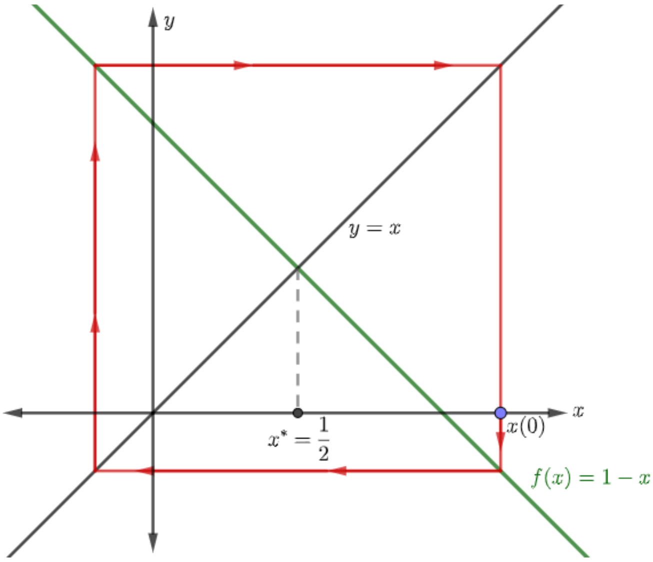


Figura 14. $x^* = \frac{1}{2}$ é estável.

■

Exemplo 3.7.2. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}8x, & se\ x \leq 0, \\ 2x, & se\ x > 0. \end{cases}$$

Claramente a função acima possui um único ponto fixo, que é $x^* = 0$. Analisando graficamente, via Cobweb, a dinâmica de $x(t+1) = f(x(t))$ para pontos iniciais $x(0)$ positivos próximos de 0, mas diferentes de 0, é possível constatar que $x(t)$ diverge para infinito, como ilustra a seguinte figura:

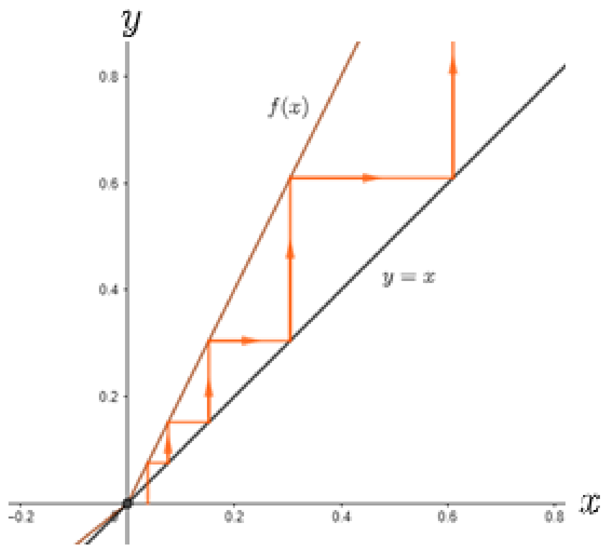


Figura 15. $x^* = 0$ é instável

Portanto $x^* = 0$ é um ponto estacionário instável. Note que isso pode ser constatado também algebricamente, pois

$$x(t) = 2^t x_0, se \ x_0 > 0.$$

Então, neste caso, de fato, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

■

Observe que, no exemplo anterior, embora $x^* = 0$ seja instável, ele atrai as órbitas negativas no sentido que $se \ x_0 < 0$, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 = x^*$. De fato, isso pode ser constatado algebricamente, pois

$$x(t) = (0{,}8)^t x_0, \qquad se \ x_0 < 0.$$

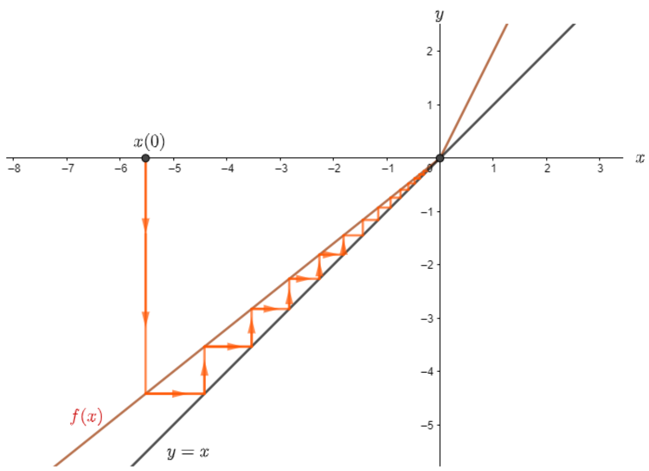


Figura 16. Para $x < 0$, x^* atrai as órbitas.

Na próxima seção lidamos com o conceito de um ponto estacionário atrair, ou não, as órbitas que estão em sua volta.

3.8 ATRATOR LOCAL E GLOBAL

Definição 3.8.1 Um ponto de equilíbrio x^* é dito **atrator local**, se existir $\eta > 0$, tal que:

$$|x(0) - x^*| < \eta \rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x^*.$$

Se $\eta = \infty$, então x^* é dito de **atrator global**.

Observação: Lembramos aqui da definição de limite:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $t_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $t > t_0$, tem-se $|x(t) - x^*| < \varepsilon$.

Exemplo 3.8.1 Considere e equação

$$x(t+1) = x(t)^2.$$

Temos que $f(x) = x^2$ e, portanto os pontos estacionários são $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Vamos primeiramente tratar o caso $x^* = 0$. Temos que este ponto é um atrator local com $\eta = 1$. De fato, se $|x_0| < 1$, então $\lim_{x \to \infty} x(t) = \lim_{x \to \infty} (x_0)^{2^t} = 0 = x^*$.

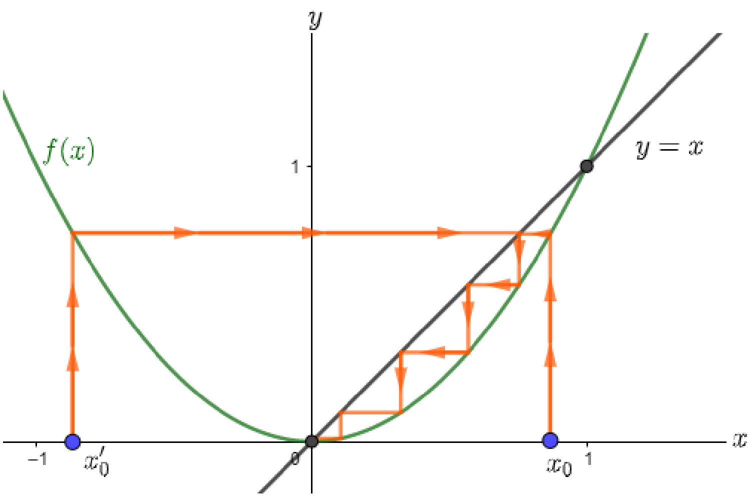


Figura 17. $x^* = 0$ é atrator local de $f(x) = x^2$

Note que se $x_0 > 1$, então $\lim_{x \to \infty} x(t) = \lim_{x \to \infty} (x_0)^{2^t} = \infty$. Portanto, $x^* = 0$ não é um atrator global.

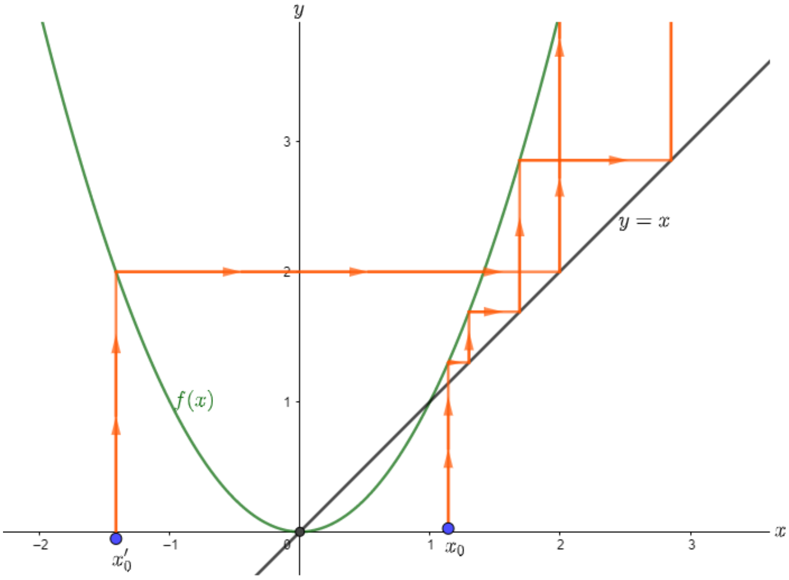


Figura 18. $x^* = 0$ não é atrator global

Já para o caso $x^* = 1$, claramente este não é um atrator local.

■

Exemplo 3.8.2 Considere a equação

$$x(t+1) = 1 - x(t).$$

Pelo que foi visto no exemplo 3.7.1, temos que $x^* = \frac{1}{2}$ é um ponto de equilíbrio estável, mas não é um atrator local. ■

Exemplo 3.8.3 Considere a equação $x(t+1) = f(x(t))$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0, \\ 1, & se\ 0 < x < 1, \\ 0, & se\ x \geq 1. \end{cases}$$

Temos que x^*= 0 é o único ponto de equilíbrio. Note que qualquer ponto $x \neq 0$ é um ponto de equilíbrio eventual associado com x^*= 0. De fato, se x< 0 ou x ≥1, temos que $f(x) = 0$=x^*. Portanto, neste caso, x é ponto de equilíbrio eventual de ordem 1. Agora se, $0 < x < 1$, então $f^2(x) = f(f(x)) = f(1) = 0$= x^*. Portanto, neste caso, x é ponto de equilíbrio eventual de ordem 2. Diante destes fatos, é imediato constatar que x^*= 0 é um atrator global.

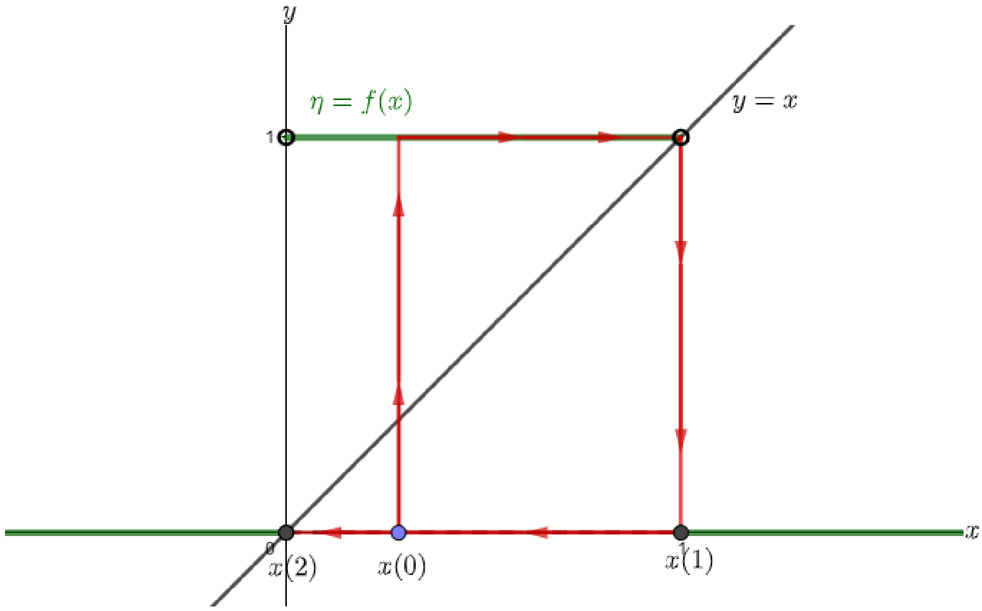


Figura 19. x^* é atrator global

Agora veremos que, no entanto, $x^*= 0$ não é estável, isto é, é instável. De fato, escolha $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dado $\delta > 0$, escolha $0 < x(0) < 1$ tal que $x(0) < \delta$. Então

$$|x(0) - x^*| = |x(0) - 0| = x(0) < \delta$$

e

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - 0| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, seguindo a definição 3.7.2, temos que $x^*= 0$ é instável.

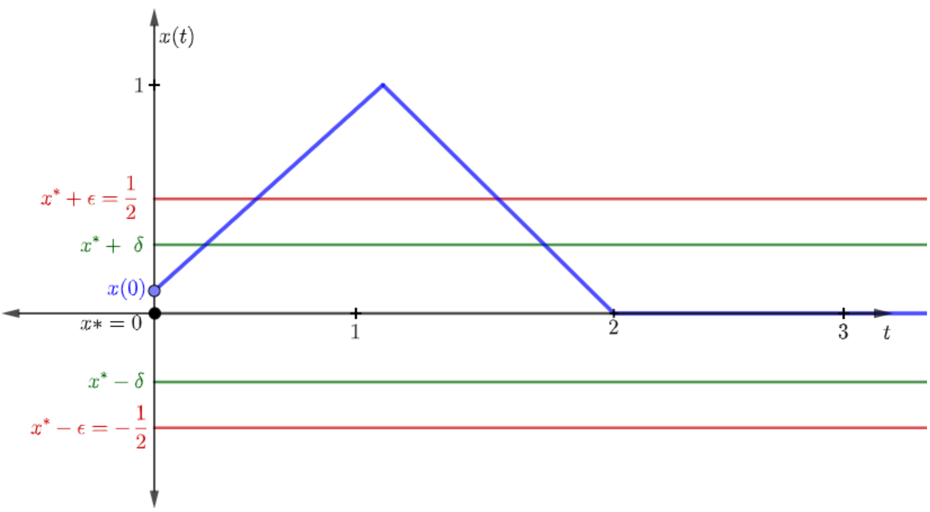


Figura 20. $x^*= 0$ é atrator global, mas instável

■

3.9 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Definição 3.9.1 Um ponto x^* de equilíbrio é dito **localmente assintoticamente estável** se for um ponto atrator local e estável. Se x^* for um ponto atrator global e estável, então x^* é dito de **globalmente assintoticamente estável.**

Em outras palavras, dado um ponto de equilíbrio x^*, todas as órbitas que pertencem a um determinado intervalo, permanecem neste intervalo e convergem para o ponto de equilíbrio x^*.

Exemplo 3.9.1 Considere e equação

$$x(t+1) = x(t)^2.$$

Pela análise já feita no exemplo 3.8.3, podemos constatar que $x^* = 0$ é um ponto localmente assintoticamente estável, enquanto $x^* = 1$ não é localmente assintoticamente estável.

■

Exemplo 3.9.2 Vamos analisar outra situação, seja

$$x(t+1) = \frac{x(t)}{2} + 2.$$

Temos $f(x) = \frac{x}{2} + 2.$ Logo o único ponto de equilíbrio é $x^* = 4$. De (3.3.8), temos que uma solução geral de $x(t+1) = ax(t) + b, x(0) = x_0$, com a e b constantes, pode ser dada por:

$$x(t) = \begin{cases} a^t x_0 + b\left(\dfrac{a^t - 1}{a - 1}\right) \; se \; a \neq 1, \\ x_0 + b \; se \; a = 1. \end{cases}$$

Como aqui, $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$, logo

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t . x_0 + 2\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2^t} + 2\left(\frac{\frac{1}{2^t} - 1}{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2^t} + 2\left(-\frac{2}{2^t} + 2\right).$$

Temos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x_0}{2^t} + 2\left(-\frac{1}{2^{t-1}} + 2\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{x_0}{2^t} + 2\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2^{t-1}} + 2\right)$$

$$= 0 + 2\ \times 2$$

$$= 4.$$

Portanto $x^* = 4$ é atrator global.

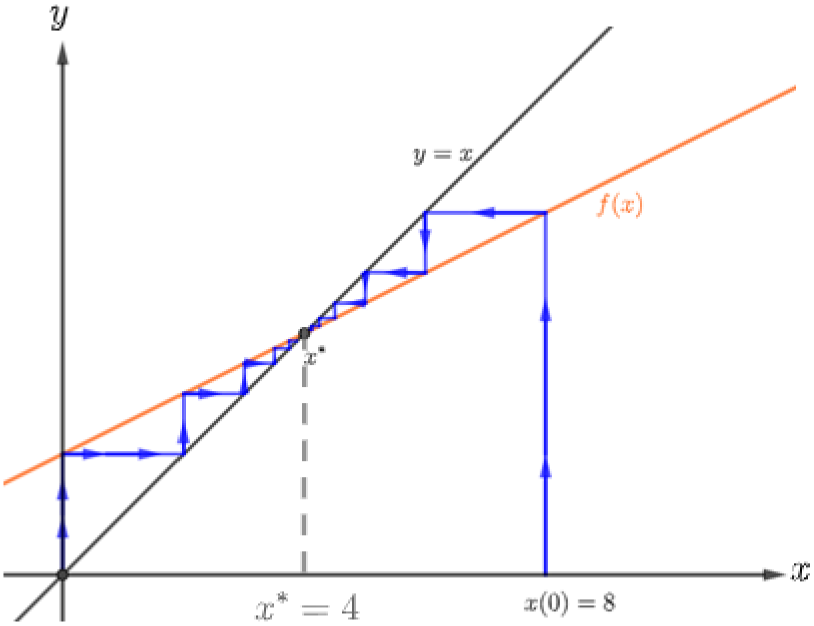


Figura 21. $x^* = 4$ é *atrator globa*

Agora vamos verificar que $x^* = 4$ também é estável. De fato, note que

$$|x(t) - 4| = |\frac{x_0}{2^t} + 2\left(-\frac{2}{2^t} + 2\right) - 4| = |\frac{x_0 - 4}{2^t}| \leq |x_0 - 4|, para\ todo\ t\ \geq 0$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, escolha para todo $\delta = \varepsilon$. Logo, se $|x(0) - x^*| \leq \delta$, então

$$|x(t) - x^*| = |x(t) - 4|\ \leq\ |x(0) - 4| \leq \delta =\ \varepsilon, para\ todo\ t\ \geq 0.$$

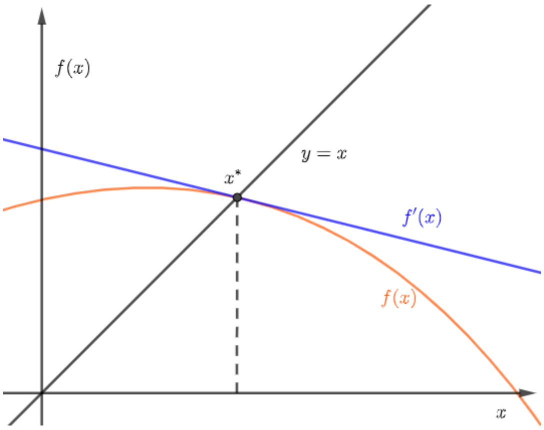
Portanto, pela definição 3.7.1, $x^* = 4$ é estável.

■

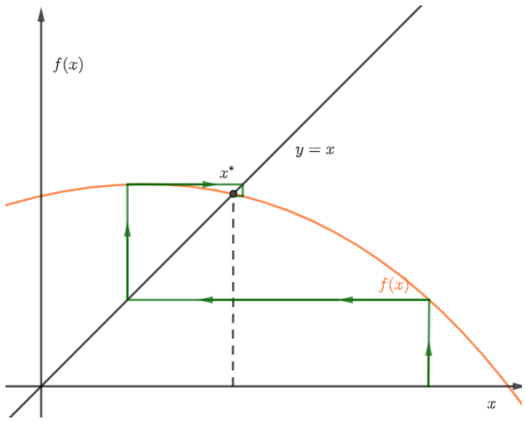
3.10 ANÁLISE DE ESTABILIDADE ASSINTÓTICA VIA DERIVADAS

Determinar a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio é, em geral, uma tarefa difícil, dado que normalmente não temos a geral solução explícita para $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$. Porém no caso de funções f continuamente diferenciáveis, uma análise pode ser feita via as derivadas de f. De maneira intuitiva, temos as seguintes situações para um ponto estacionário x^*:

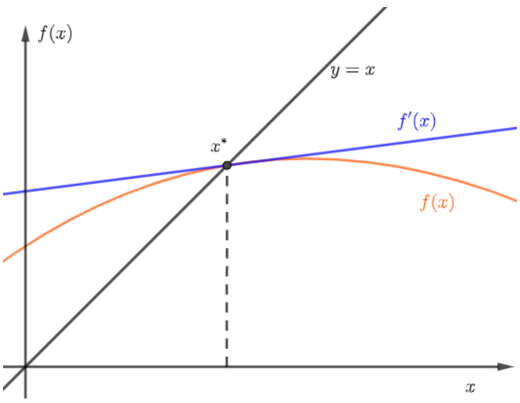
Se $|f'(x^*)| < 1$, a pequena inclinação do gráfico ao redor de x^* irá empurrar, ao longo da dinâmica, pontos próximos de x^* para pontos mais próximos de x^*. Portanto, neste caso, x^* é localmente assintoticamente estável. Abaixo temos figuras ilustrando esta situação.



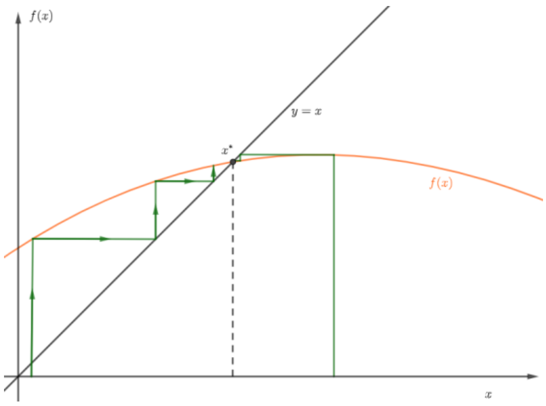
$-1 < f'(x^*) < 0$



(a) Diagrama Cobweb



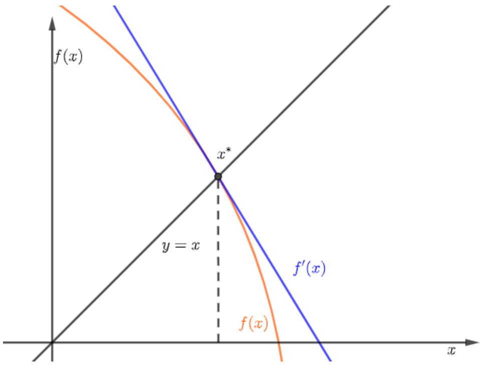
$0 < f'(x^*) < 1$



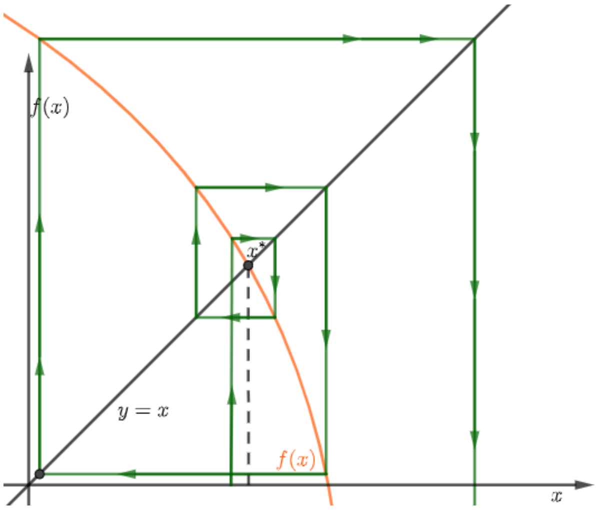
(b) Diagrama de Cobweb

Figura 22. $|f'(x^*)| < 1$, localmente assintoticamente estável

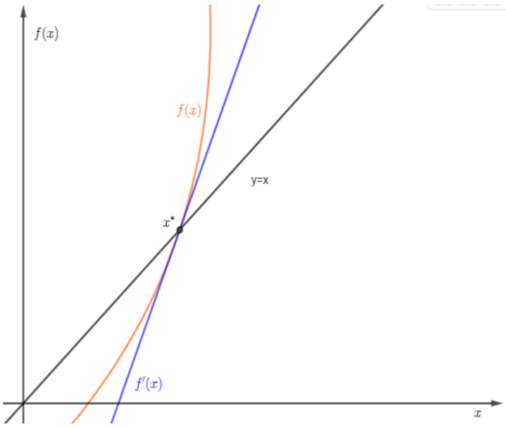
Já no caso de $|f'(x^*)| > 1$ a grande inclinação do gráfico no redor de x^* irá empurrar pontos próximos de x^* para relativamente longe de x^* Portanto, neste caso, x^* instável. Abaixo temos figuras ilustrando esta situação.



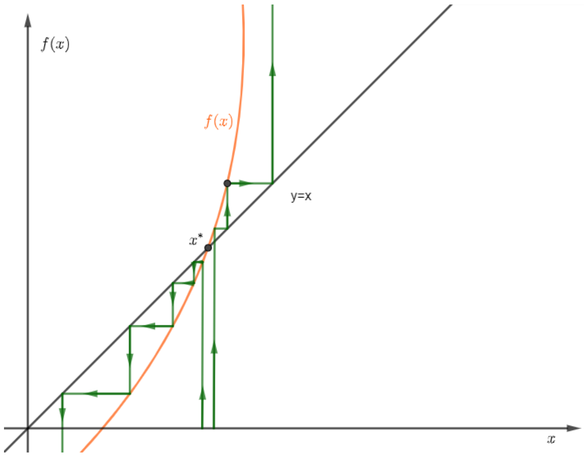
(a) $-1 > f'(x^*)$



(a) Diagrama Cobweb



(b) $f'(x^*) > 1$



(b) Diagrama de Cobweb

Figura 23. $|f'(x^*)| > 1$. Instável.

A questão mais crítica se dá no caso $|f'(x^*)| = 1$. Nesta situação, uma análise mais cuidadosa precisa ser feita baseada nas derivadas de maior ordem de f. Esse caso será tratado adiante. Com o objetivo de diferenciar os casos, apresentamos a seguinte definição.

Definição 3.10.1 Suponha que f continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja x^* um ponto fixo de f. Se

$$|f'(x^*)| = 1,$$

então x^* é dito um ponto **não hiperbólico**. Se

$$|f'(x^*)| \neq 1,$$

então x^* é dito um ponto **hiperbólico**.

3.11 ESTABILIDADE DE PONTOS HIPERBÓLICOS

A seguir, apresentamos um teorema que torna precisa a intuição apresentada anteriormente sobre os pontos hiperbólicos.

Teorema 3.11.1 (estabilidade linear de pontos hiperbólicos). Suponha que f continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja x^* um ponto fixo de f. Então:

(i) se $|f'(x^*)| < 1,$ $então$ x^* é $localmente$ $assintoticamente$ $estável$;

(ii) se $|f'(x^*)| > 1,$ $então$ x^*é $instável.$

Demonstração:

(i) Seja $\beta > 0$, tal que

$$|f'(x^*)| < \beta < 1.$$

Como f' é contínuo, temos que existe um intervalo da forma $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$, tal que

$$|f'(x)| < \beta, para\ todo\ x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon). \qquad (A) \quad .$$

Fixado $x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, pelo teorema do valor médio (veja livro cálculo – volume 1 de James Stewart página 258), existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$f(x) - f(x^*) = (x - x^*)f'\big(x^* + \theta(x - x^*)\big).$$

Como $x^* + \theta(x - x^*) \ \in \ (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, por (A), temos que

$$|f(x) - f(x^*)| = \big|(x - x^*)f'\big(x^* + \theta(x - x^*)\big)\big| \leq \beta|x - x^*|.$$

Como $f(x^*) = x^*$ e $0 < \beta < 1$, pela desigualdade acima, $f(x)$ também pertence ao intervalo $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$.

Portanto, usando os fatos acima e o processo iterativo, fixado qualquer $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, a sequência $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$, começando em x_0, satisfaz

$$|x(t+1) - x^*| = \big|f\big(x(t)\big) - f(x^*)\big| \leq \beta|x(t) - x^*| = \beta\big|f\big(x(t-1)\big) - x^*\big| =$$
$$\beta\big|f\big(x(t-1)\big) - f(x^*)\big| \leq \beta.\beta|x(t-1) - x^*| \leq \cdots \leq \beta^t|x_0 - x^*|.$$

Desde que $0 < \beta < 1$, temos

$$\lim_{t\to\infty}|x(t+1) - x^*| \leq \lim_{t\to\infty} \beta^t|x_0 - x^*| = 0.$$

Portanto a estabilidade assintótica local segue de imediato.

(ii) Seja β, tal que

$$|f'(x^*)| > \beta > 1.$$

Como f' é contínuo, temos que existe um intervalo da forma $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$, tal que

$$|f'(x)| > \beta, para\ todo\ x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \qquad (A')$$

Como a derivada é positiva em $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, temos a injetividade neste intervalo, isto é,

$$f(x) \neq f(y), \text{ se } x \neq y \text{ e } x, y \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon). \qquad (B')$$

Além disso, fixado $x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, com $x \neq x^*$, pelo teorema do valor médio, existe $\bar{\bar{x}} \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ tal que

$$f(x) - f(x^*) = (x - x^*)f'(\bar{\bar{x}}).$$

Logo, por (A')

$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| = |(x - x^*)||f'(\bar{\bar{x}})| > \beta|x - x^*|.$$

Suponha agora, por contradição, que x^* seja estável. Então, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ e

$$|x(0) - x^*| < \delta \to |x(t) - x^*| < \varepsilon,\ \forall\, t \geq 0. \qquad (C')$$

Fixe $x(0)$ tal que $|x(0) - x^*| < \delta\ e\ x(0) \neq x^*$. Por $(A'), (B')$ e (C'), temos que $x(t) \neq x^*\ e$

$$|x(t) - x^*| = |f(x(t-1)) - x^*| \geq \beta|x(t-1) - x^*| =$$

$$= \beta|f(x(t-2)) - x^*| \geq \beta^2|x(t-2) - x^*| =$$

$$= \cdots \geq \beta^t |x(0) - x^*|, \text{ para todo t.}$$

Logo, desde $\beta > 1$, temos

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| > \lim_{t\to\infty} \beta^t |x(0) - x^*| = \infty. \qquad (D')$$

Temos que (D') é uma contradição com (C'). Logo, x^* não é estável, portanto, é instável.

■

Exemplo 3.11.1 Vamos utilizar a ideia de cálculo do preço de um determinado produto. Seja $S(t)$ o número de unidades ofertadas em um período t, $D(t)$ o número de unidades vendidas no período t e $p(t)$ o preço por unidade no período t. Vamos assumir que $D(t)$ é linearmente dependente de $p(t)$ da seguinte forma:

$$D(t) = -m_d p(t) + b_d, \quad com \qquad m_d > 0, \qquad b_d > 0.$$

Esta equação é conhecida como *preço – demanda* e m_d é uma constante que representa a sensibilidade do consumidor ao preço (também é conhecida como elasticidade do preço), ou seja, é o grau em que o preço determina a inclinação para comprar o produto. Vamos assumir também que a curva *preço – oferta* seja dada linearmente por

$$S(t+1) = m_s p(t) + b_s, \quad com \qquad m_s > 0, \qquad b_s > 0.$$

Neste caso m_s é uma constante que representa a sensibilidade dos fornecedores ao preço.

Note que a inclinação da curva *preço – demanda* é negativa, pois o aumento no preço gera uma diminuição nas vendas. Já na curva *preço – oferta*, a inclinação é positiva, pois um aumento no preço causa um aumento na oferta.

Então, podemos supor que o preço de mercado é o preço pelo qual a quantidade demanda e oferta são iguais, ou seja, quando $D(t+1) = S(t+1)$. Logo, temos que:

$$-m_d p(t+1) + b_d = m_s p(t) + b_s,$$
$$-m_d p(t+1) = m_s p(t) + (b_s - b_d),$$
$$p(t+1) = -\frac{m_s p(t)}{m_d} - \frac{(b_s - b_d)}{m_d}.$$

Fazendo $A = -\frac{m_s}{m_d}$ e $B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$, obtemos:

$$p(t+1) = Ap(t) + B = f\big(p(t)\big).$$

Esta é uma equação de diferença linear de primeira ordem, não homogênea, com coeficientes constantes A e B. Vamos determinar os pontos de equilíbrio.

$$f(p*) = p*,$$

$$Ap^* + B = p^*,$$
$$p^* = \frac{B}{1-A}.$$

Outra forma de encontrar p^* é notar que este é a intersecção da reta $S(p) = m_s p + b_s$ com a reta $D(p) = -m_d p + b_d$.

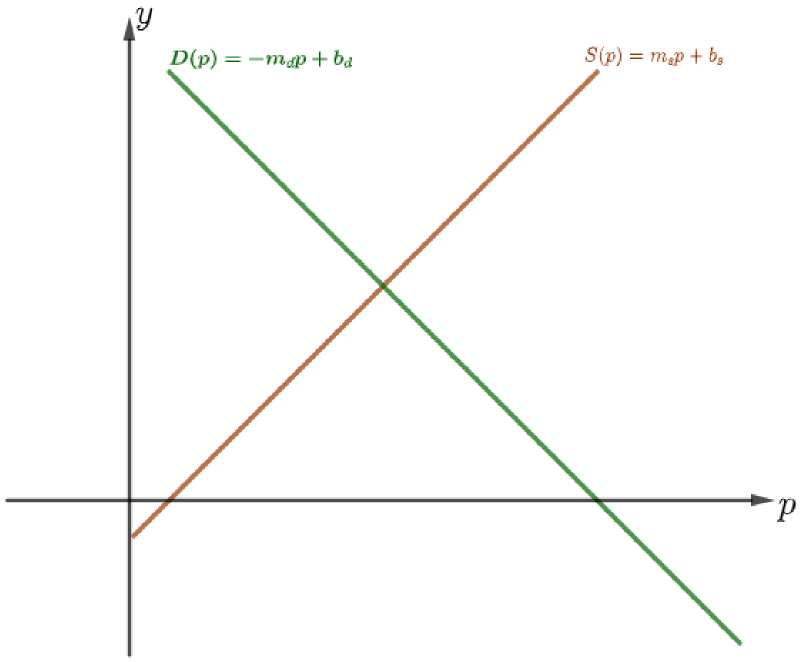


Figura 24. Interseção de $S(p) e\ D(p)$

Desde que $f(x) = Ax + B, temos\ que\ f'(x) = A = -\frac{m_s}{m_d}$. Então, utilizando o teorema 3.11 1, podemos observar que:

$(i)\ Se\ |A| < 1$, então $p^* = \frac{B}{1-A}$ é assintoticamente estável.

$(ii)\ Se\ |A| > 1$, então $p^* = \frac{B}{1-A}$ é instável.

Então concluímos as seguintes situações:

(a) Caso $-1 < A < 0$, ou seja, $m_d > m_s$: Os preços convergem para p^* e temos um mercado estável.

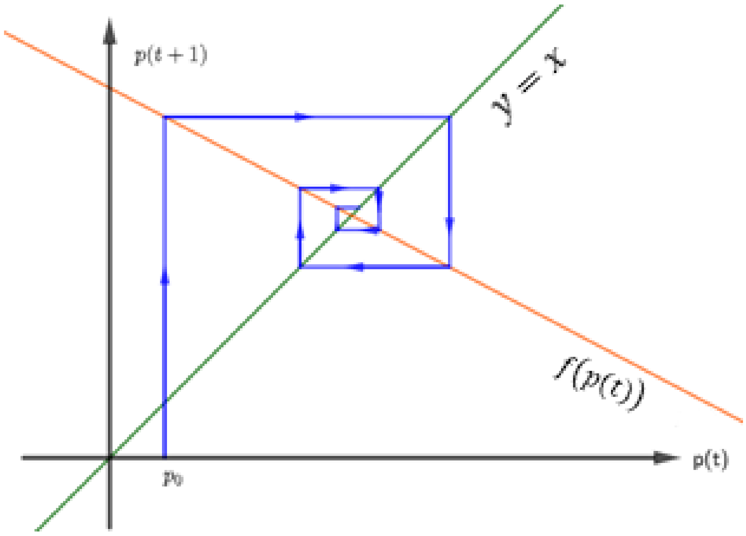


Figura 25. Preço de equilíbrio assintoticamente estável. Diagrama Cobweb.

Note que, desde que a equação é linear, o preço é dado explicitamente por

$$p(t) = A^t p_0 + B\left[\frac{A^t - 1}{(A - 1)}\right],$$

$$p(t) = A^t p_0 + \frac{BA}{A - 1} - \frac{B}{A - 1},$$

$$p(t) = A^t\left[p_0 + \frac{B}{A - 1}\right] + \frac{B}{1 - A}.$$

Logo, de fato, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = A^t\left[p_0 - \frac{B}{1 - A}\right] + \frac{B}{1 - A}$$

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{B}{1 - A} = p^*.$$

(b) $Caso\ A < -1$, ou seja, $m_d < m_s$: os preços divergem, isto é, se afastam de p^* e temos um mercado instável.

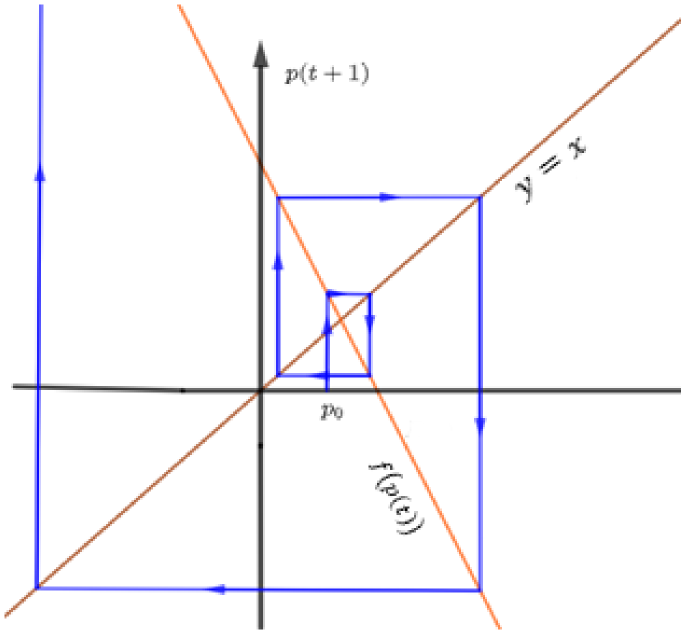


Figura 26. Preço de equilíbrio instável. Diagrama Cobweb.

De fato, se $p_0 \neq \frac{B}{1-A}$, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = A^t \left[p_0 - \frac{B}{1-A}\right] + \frac{B}{1-A} = \pm\infty,$$

(c) Caso $A = -1$, ou seja, $m_d = m_s$: Este caso não é contemplado pelo teorema 3.11.1. Desde que temos um ponto não hiperbólico. No entanto, desde temos solução geral explícita, vemos que, se t for par,

$$p(t) = A^t \left[p_0 - \frac{B}{1-A}\right] + \frac{B}{1-A} = \left[p_0 - \frac{B}{2}\right] + \frac{B}{2} = p_0$$

e, se t for ímpar,

$$p(t) = A^t \left[p_0 - \frac{B}{1-A}\right] + \frac{B}{1-A} = (-1)\left[p_0 - \frac{B}{2}\right] + \frac{B}{2} = -p_0 + B$$

Portanto, neste caso, os preços oscilam.

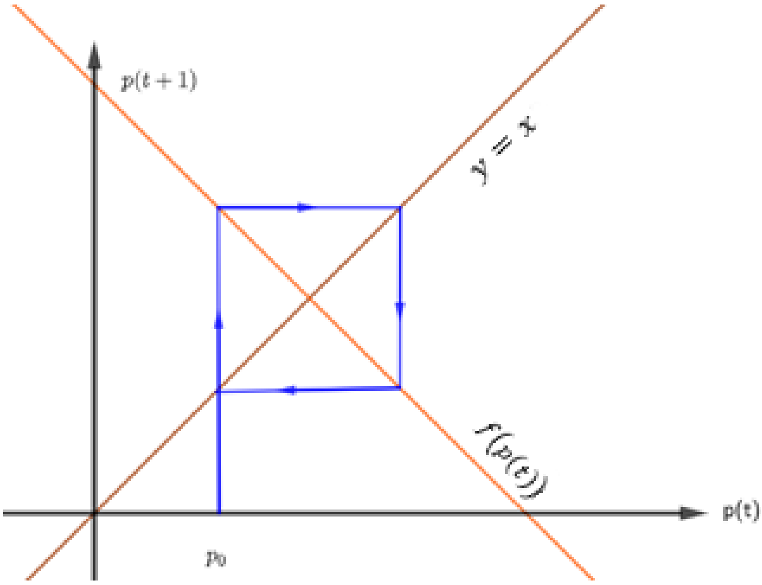


Figura 27. Preço de equilíbrio estável. Diagrama Cobweb.

Matematicamente, temos que p^* um ponto estável, mas não atrator. Do ponto de vista do fenômeno modelado, podemos dizer que o mercado é instável.

■

Exemplo 3.11.2 (Método de Newton – Rapson). Aqui apresentaremos um método, via equações de diferenças, para encontrar aproximações para as raízes de uma equação do tipo

$$g(x) = 0, \tag{3.11.1}$$

em que g é uma função continuamente diferençável até segunda ordem e com derivada não nula. Para isto, considere e equação de diferenças

$$x(t+1) = x(t) - \frac{g(x(t))}{g'(x(t))}. \tag{3.11.2}$$

Neste caso, temos $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ e esta é chamada de função de Newton de g, e geralmente denotada por f_N. Note que os pontos estacionários de (3.11.2) são precisamente as soluções de (3.11.1). De fato,

$$x^* = f_N(x^*),$$

$$x^* = x^* - \frac{g(x^*)}{g'(x^*)},$$

$$\frac{g(x^*)}{g'(x^*)} = 0,$$

$$g(x^*) = 0,$$

Note também que, para cada ponto estacionário x^*, temos que

$$\left|f_N{}'(x^*)\right| = \left|1 - \frac{([g'(x^*)]^2 - g(x^*)g''(x^*)}{[g'(x^*)]^2}\right| = \left|1 - \frac{([g'(x^*)]^2}{[g'(x^*)]^2}\right| = 0.$$

logo, pelo teorema 3.11.1, todos os pontos estacionários são localmente assintoticamente estáveis. Isto significa, que se conhecemos uma aproximação $x_0$para x^*, podemos obter outras aproximações melhores considerando a equação de diferenças

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) - \dfrac{g\big(x(t)\big)}{g'\big(x(t)\big)}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De fato, se x_0 for suficientemente próximo de x^*, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$. ■

Exemplo 3.11.3 Vamos aplicar o método de Método de Newton – Rapson para achar aproximações de raiz quadrada de um número positivo a. Neste caso, basta considerar

$$g(x) = x^2 - a.$$

Note que

$$f_N(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Portanto, a equação de diferenças é dada por

$$x(t+1) = \frac{1}{2}\left(x(t) + \frac{a}{x(t)}\right)$$

Note que temos dois pontos de equilíbrio. De fato,

$$f_N(x^*) = x^*,$$

$$\frac{1}{2}\left(x^* + \frac{a}{x^*}\right) = x^*,$$
$$2(x^*)^2 = x^* + a,$$
$$(x^*)^2 = a,$$
$$x^* = \pm\sqrt{a}.$$

Portanto os pontos de equilíbrio da equação são $x_1^* = \sqrt{a}$ e $x_2^* = -\sqrt{a}$.

Construindo um diagrama de Cobweb, atribuindo $a = 2$, para analisar o comportamento de f_N, podemos ver que o algoritmo converge relativamente rápido para as raízes $\sqrt{2}$ e -$\sqrt{2}$.

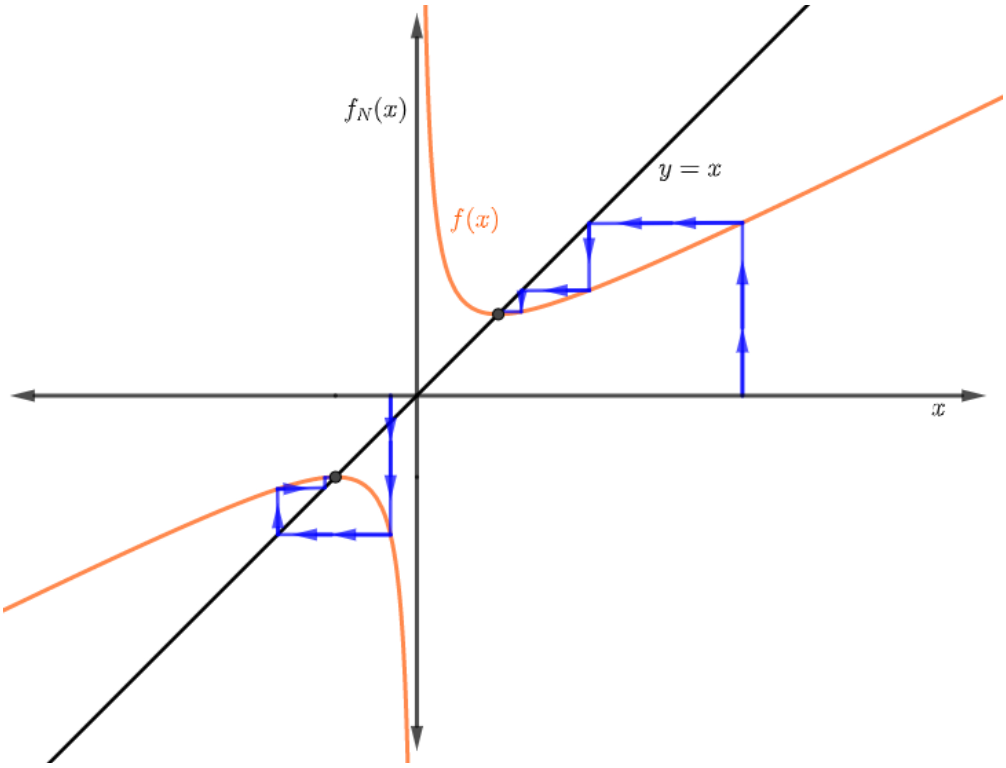


Figura 28. Diagrama de Cobweb para f_N.

3.12 ESTABILIDADE DE PONTOS NÃO HIPERBÓLICOS

Nesta seção, iremos abordar situações em que o ponto de equilíbrio é não hiperbólico. Para isso, faremos uma análise separadamente dos casos $f'(x^*) = 1$ e $f'(x^*) = -1$. Assumiremos que f possui até a terceira derivada contínua.

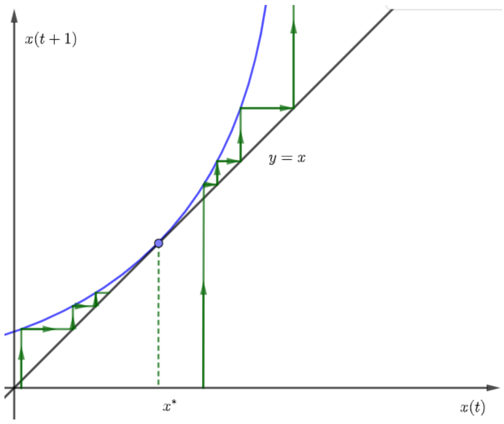
Teorema 3.12.1 Seja f continuamente derivável até terceira ordem e x^* um ponto de equilíbrio da equação $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$ com $f'(x^*) = 1$. Então:

(i) Se $f''(x^*) \neq 0,$ então x^* é instável;

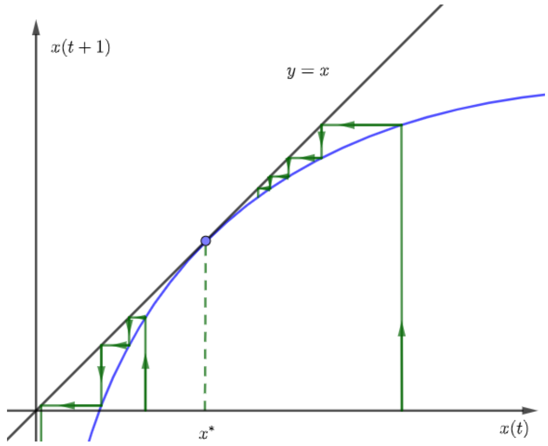
(ii) Se $f''(x^*) = 0\ \ e\, f'''(x^*) > 0,$ então x^* é instável;

(iii) Se $f''(x^*) = 0\ \ e\, f'''(x^*) < 0,$ então x^* é localmente assintoticamente estável.

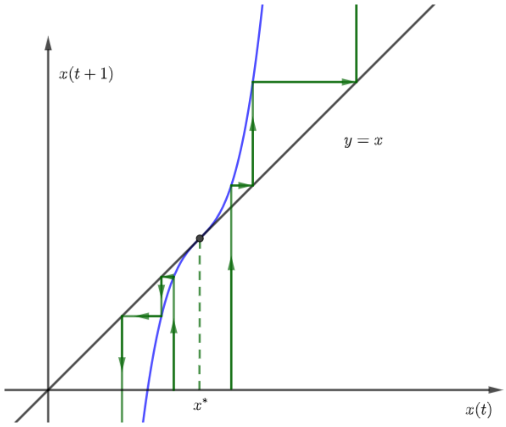
Não será apresentada a demonstração deste teorema. Ela se encontra no livro "*Discrete chãos* - *With Applications In Science And Engineering, by Saber N Elaydi, theorem 1.5.* Vamos apresentar apenas uma ideia intuitiva item a). De fato, suponha que $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) \neq 0$. Então a curva $y = f(x)$ é localmente côncava para cima $(se\, f''(x^*) > 0)$ ou localmente côncava para baixo $(se\, f''(x^*) < 0)$, conforme figura 25 (a) e (b). Suponha que $f''(x^*) > 0$. Então, pela continuidade, $f'(x)$ é crescente em um pequeno intervalo contendo x^*. Portanto, existe $\delta > 0$ de forma que $f'(\,x) > 1$, para todo $x \in (x^*, x + \delta)$. De forma análoga ao caso do teorema (3.11.1), podemos concluir que a dinâmica irá empurrar os pontos de $(x^*, x + \delta)$ para longe de x^*. Logo, x^* é instável. O caso $f''(x^*) < 0$ pode ser analisado forma similar num intervalo $(x^* - \delta, x^*)$, para algum $\delta > 0$ e pequeno.



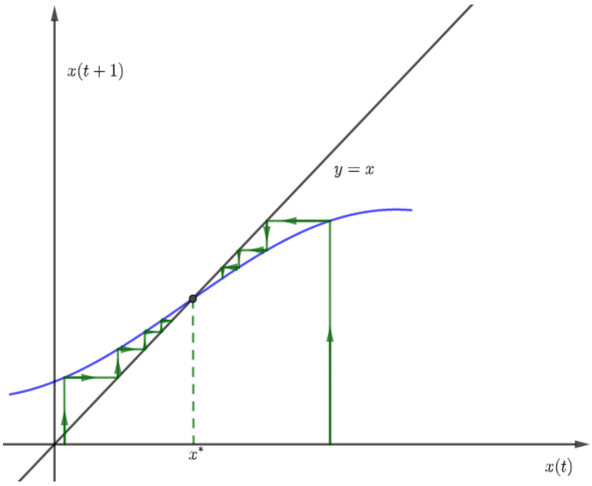
$(a)\ f''(x^*) > 0$



(b) $f''(x^*) < 0$



$(c)\ \ f''(x^*) = 0\ \ e\ f'''(x^*) > 0$



(d) $f''(x^*) = 0\ \ e\ f'''(x^*) < 0$

Figura 29 Situações possíveis

Observação: Considere a solução $x(t)$ da equação

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)), \\ \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

em que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Suponha que o limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ exista. Seja x^*, este limite, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*.$$

Então x^* é um ponto fixo de f. De fato, temos

$$x^* = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} f\big(x(t-1)\big) = f\left(\lim_{t\to\infty} x(t-1)\right) = f\left(\lim_{u\to\infty} x(u)\right) = f(x^*).$$

Em outras palavras, no caso de f ser contínua, se uma órbita converge, então ela deve convergir para um ponto estacionário.

Exemplo 3.12.1 Considere

$$x(t+1) = x(t) - x^2(t).$$

Temos que $f(x) = -x^2 + x$, e o ponto de equilíbrio $x^* = 0$. Note que

$$f'(0) = 1 \qquad e\ f''(0) = -2 < 0.$$

Como $f''(0) \neq 0$, então pelo teorema 3.12.1 temos que x^* é um ponto de equilíbrio instável. A seguir, vamos analisar o que acontece em cada caso.

Suponha $x(0) < 0$. Então temos:

$$x(1) = -x^2(0) + x(0) < x(0).$$

Por indução, temos que $x(t) < x(t-1) < 0$ para todo t. Assim a sequência $x(t)$ ou converge para um ponto estacionário negativo ou diverge para $-\infty$. Como o único ponto fixo é zero, $\{x(t)\}$ diverge para o $-\infty$.

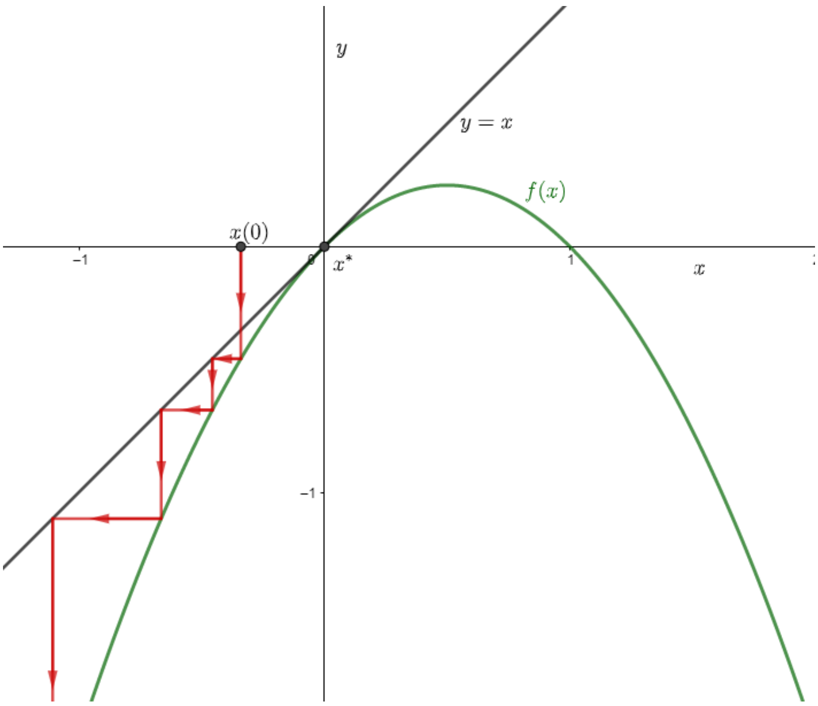


Figura 30. $x(0) < 0$. Diverge para $-\infty$.

Suponha agora $0 < x(0) < 1$. Então temos,

$$0 < x(1) = -x^2(0) + x(0) \ < x(0)$$

Por indução temos que $0 < x(t) < x(t-1) < 1$, para todo t. Assim a sequência $\{x(t)\}$ converge para zero.

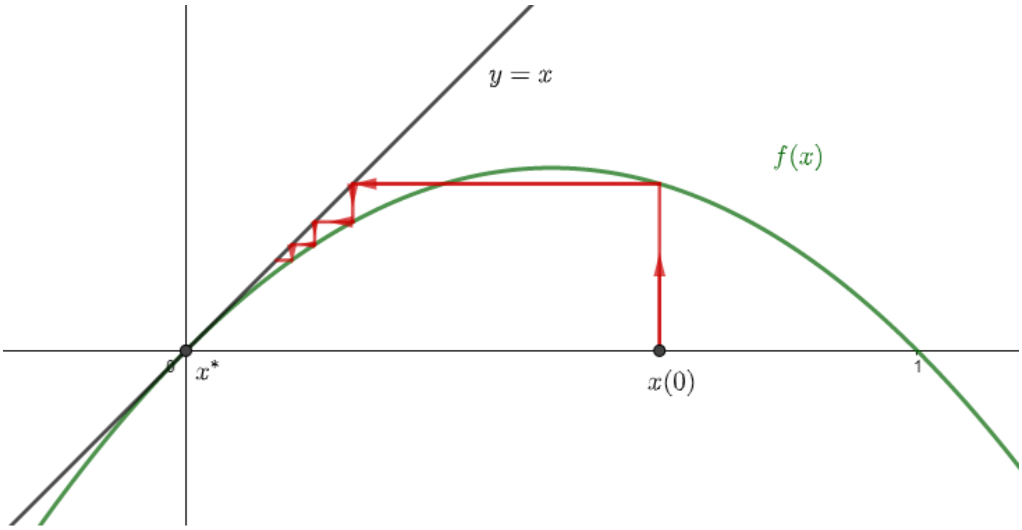


Figura 31. $0 < x(0) < 1$. Converge para x^*

Suponha $x(0) = 1$. Então temos, que $x(0) = 1$ é é um ponto estacionário eventual, pois

$$x(1) = -x^2(0) + x(0) = 0 = \ x^*.$$

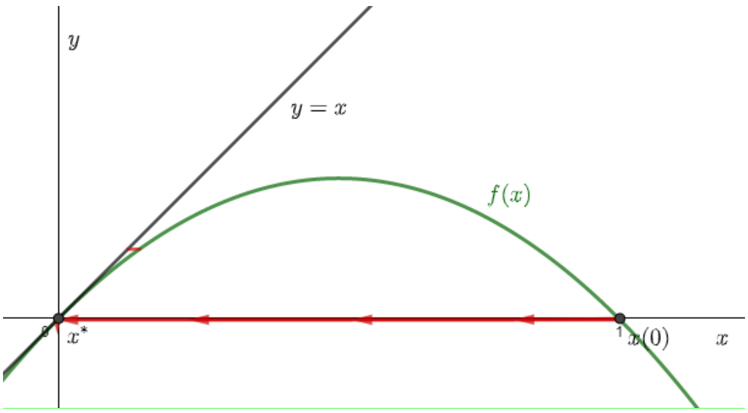


Figura 32. $x(0) = 1$. É eventual ponto de equilíbrio

Finalmente suponha $x(0) > 1$. Então

$$x(1) = -x^2(0) + x(0) < 0$$

e caímos no primeiro caso acima, isto é, $\{x(t)\}$ diverge para o $-\infty$.

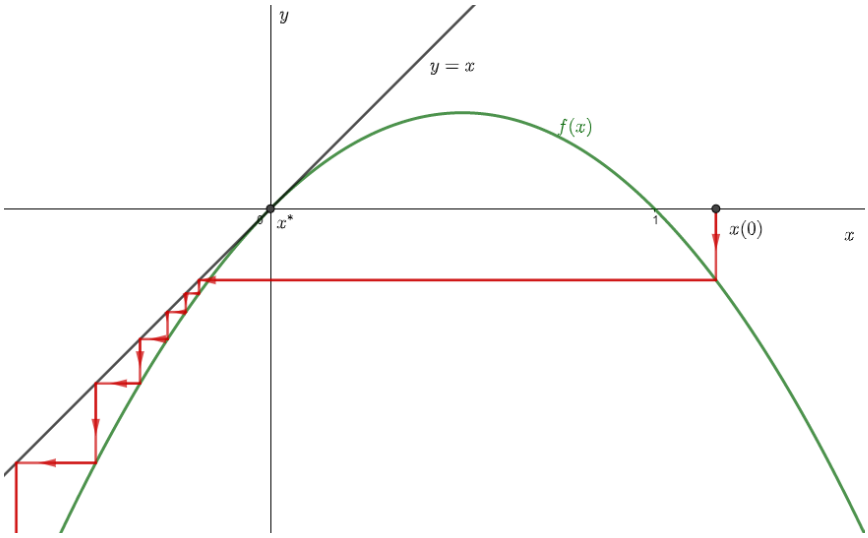


Figura 33. $x(0) > 0$. Diverge para $-\infty$

■

Exemplo 3.12.2. Considere a equação

$$x(t+1) = x^3(t) + x(t).$$

Temos que $f(x) = x^3 + x$ e o ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Temos

$$f'(0) = 1; \qquad f''(0) = 0; \qquad f'''(0) = 6 > 0.$$

Do teorema 3.12.1 item (ii) temos que x^* é um ponto de equilíbrio instável. A seguir, vamos analisar o que acontece em cada caso.

Suponha $x(0) > 0$. Então temos:

$$x(1) = x^3(0) + x(0) > x(0)$$

Por indução, temos que $x(t) > x(t-1)$, para todo t. Assim a sequência $\{x(t)\}$ ou converge para um ponto de equilíbrio positivo, ou diverge para ∞. Como o único ponto de equilíbrio é $x^* = 0$, temos que a sequência $\{x(t)\}$ diverge para ∞.

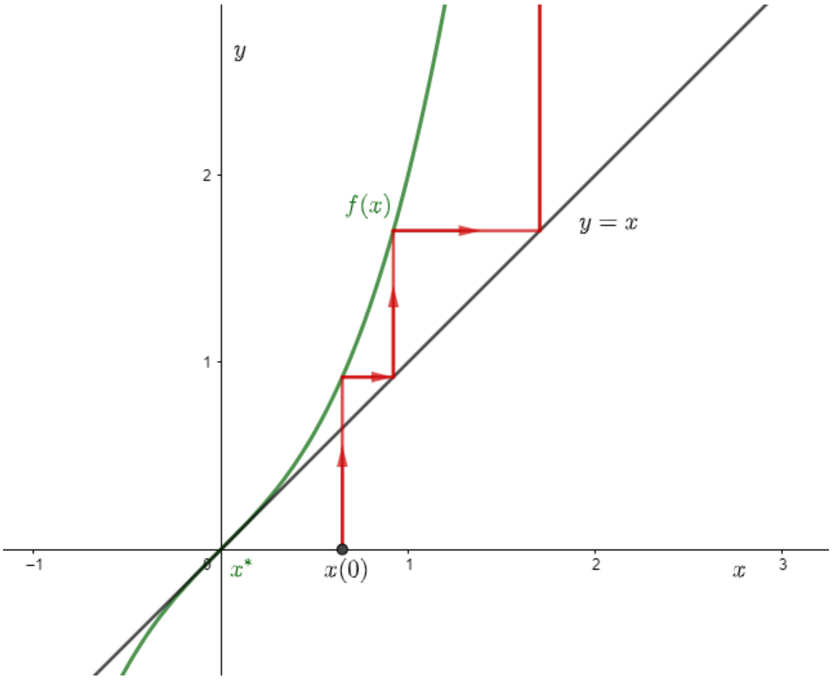


Figura 34. $x(0) > 0$. Diverge para $+\infty$

Suponha agora $x(0) < 0$. Então temos:

$$x(1) = x^3(0) + x(0) < x(0)$$

Por indução, temos que $x(t) < x(t-1)$ para todo t. Assim, a sequência $\{x(t)\}$ ou converge para um ponto de equilíbrio negativo, ou diverge para $-\infty$. Como o único ponto de equilíbrio é $x^* = 0$, temos que a sequência $\{x(t)\}$ diverge para $-\infty$.

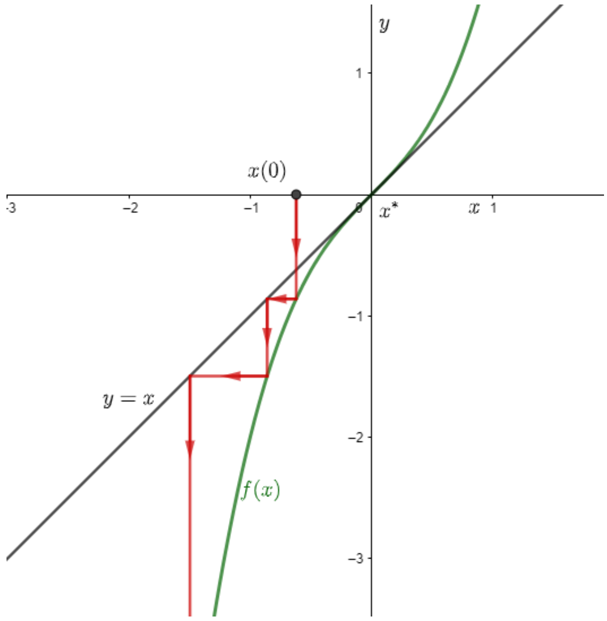


Figura 35. $x(0) < 0$. Diverge para $-\infty$

∎

Antes de apresentar o caso para $f'(x^*) = -1$, vamos definir a **derivada Schwarziana** de uma função f, que é dada por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$$

Assim, se $f'(x^*) = -1$, temos

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \tfrac{3}{2}[f''(x)]^2.$$

Teorema 3.12.2 Seja f continuamente derivável até terceira ordem e x^* um ponto de equilíbrio da equação $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$ com $f'(x^*) = -1$. Então

(i) Se $Sf(x^*) < 0$, então x^* é localmente assintoticamente estável.

(ii) Se $Sf(x^*) > 0$, então x^* é instável.

Não será apresentada a demonstração deste teorema. Ela se no livro *"Discrete Chaos- With Applications In Science And Engineering, By Saber N. Elaydi, página 30-31, Theorem 1.6"*.

Exemplo 3.12.3. Vamos considerar $f(x) = x^2 + 3x$, e determinar a estabilidade da equação de diferenças associada. Para tanto precisamos os pontos de equilíbrio. Temos

$$(x^*)^2 + 3x^* = x^*,$$
$$(x^*)^2 + 2x^* = 0,$$
$$x^*(x^* + 2) = 0$$

Logo os pontos de equilíbrio são $x_1^* = 0$ e $x_2^* = -2$.

Temos $f'(0) = 3$ e portanto, pelo teorema 3.12.1, $x_1^* = 0$ é instável.

Temos $f'(-2) = -1$ e

$$Sf(-2) = -f'''(-2) - \frac{3}{2}[f''(-2)]^2 = 0 - \frac{3}{2}[2]^2 = -6$$

Logo do teorema 3.9.1 temos que $x_2^* = -2$ é localmente assintoticamente estável.

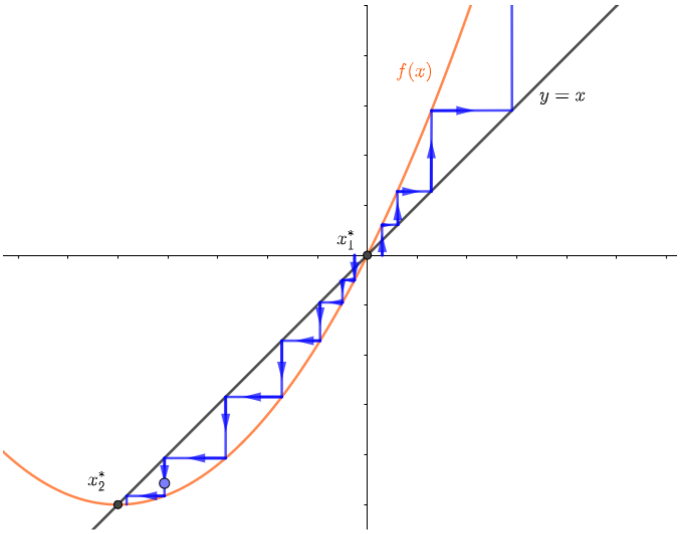


Figura 36. Estabilidade de x_1^* e x_2^*

∎

As equações de diferenças nos possibilitam a modelagem das mais variadas situações, desde as mais simples até as mais complexas. Desta forma, as equações de diferenças podem ser trabalhadas no ensino básico, para construção de vários conceitos a partir do cotidiano dos educandos.

4 PROPOSTAS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo serão realizadas algumas propostas de atividades envolvendo equações de diferenças e modelagem que podem ser aplicadas no ensino médio. Não será especificado a turma do ensino médio, pois na BNCC não é estipulado habilidades a serem desenvolvidas em cada ano de ensino, mas sim habilidades que deverão ser desenvolvidas durante todo o ensino médio. Tais propostas podem ser aplicadas nas aulas de formação geral básica (FGR) ou nos itinerários formativos (IF).

4.1 CRESCIMENTO POPULACIONAL

4.1.1 Objetivos

- Utilizar a linguagem matemática para expressar situações que se assemelhem a realidade.
- Investigar possíveis padrões no crescimento de uma determinada população.
- Utilizar softwares como ferramenta de apoio.
- Relacionar o crescimento populacional a funções que são exploradas no ensino médio.
- Determinar, com uso de software, funções que se assemelham a curva de crescimento de determinada população.
- Determinar pontos de equilíbrio destas populações (se existir).

4.1.2 Conteúdos

- Sequências.
- Recursividade.
- Teorias demográficas.

4.1.3 Habilidades da BNCC

- **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

4.1.4 Procedimentos metodológicos

Para que esta proposta seja realizada de forma efetiva, sugere-se um trabalho com um professor da área de ciências humanas, mas especificadamente geografia. Claro que, em função de o assunto ser amplo, poderia envolver demais disciplinas, como sociologia, filosofia, história, entre outras. O professor de geografia faz-se necessário para introduzir a ideia de teorias de crescimento populacional, que servirão de base para o estudo desenvolvido em sala. Então, os passos descritos a seguir consideram que já foi realizada uma discussão e explanação sobre as teorias de crescimento populacional.

1º momento: inicia-se a aula solicitando que os alunos respondam no caderno a seguinte pergunta:

➔ O que são as teorias de crescimento populacional? Você acredita que elas são importantes? Justifique.

O tempo para a realização desta atividade é de 5 a 10 min. Passado este tempo, leva-se a discussão para o grande grupo, buscando verificar quais informações pertinentes acerca das teorias de crescimento populacional os alunos obtiveram. Espera-se que nesta fase os alunos cheguem a citar os modelos Malthusiano, pós Malthusiano e Verhulst.

A partir deste momento, inicia-se uma discussão sobre o filme “Vingadores – Guerra infinita”. É passando alguns trechos do filme e questiona-se os alunos se há alguma relação com uma das teorias citadas acima. Espera-se que o aluno relacione o filme com o modelo Malthusiano, pois Malthus acreditava que a solução para o crescimento populacional descontrolado seria o controle de natalidade, assim como Thanos, que acreditava ser necessário a extinção de metade da população terrestre, para que houvesse evolução. Após várias colocações que relacionam o filme a teoria de Malthus, fazemos o seguinte questionamento, que será levado como uma provocação para a próxima atividade:

- ➔ Qual motivo levou Malthus a ter a ideia de que seria necessário um controle de natalidade?

<u>*2º momento*</u>: Inicia-se a aula conversando sobre a pergunta da última aula e então coloca-se no quadro a seguinte colocação de Malthus em sua teoria:

“A população cresce numa progressão geométrica enquanto o alimento cresce em uma progressão aritmética”

A partir disto, questiona-se os alunos:

- ➔ O que Malthus quis dizer com está afirmação?
- ➔ Seria possível descrever matematicamente está afirmação?

Espera-se um momento para discussão do grande grupo, deixando cada um fazer suas colocações. Acredita-se que os educandos irão dizer que sim, é possível descrever matematicamente. Caso não cheguem a isto, o professor faz seu papel de motivar e mediar os educandos a esta conclusão. Agora a turma é dividida em grupos de 3 alunos e, neste momento, será iniciado o processo de abstração, ou seja, os alunos darão início ao processo de modelagem.

Para auxiliar no processo de abstração, entrega-se a *tabela 1* do apêndice, que é semelhante a que está abaixo, porém sem os dados em vermelho. Então, solicita-se que cada trio, com uso da tabela, resolva a situação proposta.

➔ Considere que a população de determinada cidade era de 15 000 habitantes em 2013 e a partir de algumas análises, contatou-se que a taxa de crescimento anual desta população é de 1%, então qual era a população desta cidade em 2020?

Tabela 2. Cálculo de crescimento populacional para $\boldsymbol{P_0 = 15000}$

Tempo	Cálculo necessário	População
0	15000	15000
1	$1500 + 1500 \times 0{,}01$	15150
2	$15150 + 15150 \times 0{,}01$	$15301{,}5$
3	$15301{,}5 + 15301{,}5 \times 0{,}01$	$15454{,}515$
4	$15454{,}515 + 15454{,}515 \times 0{,}01$	$15609{,}06015$
5	$15609{,}06015 + 15609{,}06015 \times 0{,}01$	$15765{,}15075$
6	$15765{,}15075 + 15765{,}15075 \times 0{,}01$	$15922{,}80226$
7	$15922{,}80226 + 15922{,}80226 \times 0{,}01$	16082,03028

Fonte: Autor.

Após um tempo de discussão e troca de ideias nos trios, traz-se a discussão para o grande grupo, solicitando que cada grupo expresse qual número estimado de habitantes da população em 2020 e de que forma conseguiram chegar a este resultado.

Nesta etapa, é possível verificar se algum aluno possui algum tipo de defasagem de ensino, em especial no que tange as ideias associadas a cálculo de porcentagem. Caso faça-se necessário, deve-se retomar estes conceitos para uma aprendizagem efetiva dos educandos.

Ao final desta atividade é esperado que os trios tenham conseguido preencher a tabela de forma semelhante a exposta acima.

Neste momento, a partir da análise da tabela acima, faz-se novos questionamentos aos trios:

- ➔ Existe alguma relação entre os dados de cada linha da tabela?
- ➔ De que forma estes dados estão relacionados?
- ➔ Haveria uma forma geral para escrever a projeção desta população a qualquer período?

Deixa-se um tempo (quanto baste) para cada grupo fazer suas considerações/colocações sobre os questionamentos acima e então vem a parte da "mão na massa". Agora é o momento em que de fato os trios irão atribuir variáveis para alguns termos da tabela, para então levantar algumas hipóteses e tentar, de alguma forma, modelar a situação dada acima. Neste momento, é necessário que o educador tenha paciência e saiba de fato ser um mediador, não dando resposta aos grupos, mas sim persistindo e questionando o grupo de forma a conduzi-los a obtenção de um modelo.

Após toda a discussão nos grupos, espera-se que os educandos consigam relacionar cada termo da sequência ao elemento que o antecede, ou seja, a população no tempo $(t+1)$ é igual a população no tempo t mais 1% da população no tempo t. As variáveis poderão ser as mais variadas, vai depender de cada trio. Mas, de uma forma geral, o objetivo é que eles sigam algo semelhante ao que será apresentado abaixo. Nós iremos considerar como t sendo o período em anos, e $P(t)$ a população no tempo t. Assim, teríamos:

$$P(0) = 15\,000$$
$$P(1) = P(0) + P(0) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(0)$$
$$P(2) = P(1) + P(1) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(1)$$
$$P(3) = P(2) + P(2) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(2)$$
$$P(4) = P(3) + P(3) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(3)$$
$$P(5) = P(4) + P(4) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(4)$$
$$\vdots$$
$$P(t) = P(t-1) + P(t-1) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(t-1)$$
$$P(t+1) = P(t) + P(t) \times 0{,}01 = (1 + 0{,}01).P(t)$$

<u>3º momento</u>: Agora que os alunos acabaram de descrever uma sequência, é o momento para abordarmos os conceitos de equações de diferença. Inicialmente questiona-se os educandos:

- ➔ Para saber qual a população no tempo $t = 1$, além da taxa de crescimento, qual(is) informação(ões) foi necessário? E para o tempo $t = 2, t = 3, t = 4$?
- ➔ Então para o tempo $(t + 1)$, quais as informações necessárias?

Provavelmente, após discussão nos trios, os alunos chegarão à conclusão de que para saber uma determinada população é necessário que se saiba a população no período imediatamente anterior, ou seja, para saber a população $P(t + 1)$ é necessário, além da taxa de variação, a população no tempo t, no caso $P(t)$. Assim já é possível conversar com os alunos sobre o que é uma equação de diferenças.

Agora coloca-se no quadro a seguinte expressão e solicita-se que cada grupo tente simplificar:

$$P(t + 1) - P(t)$$

Após alguns minutos, novamente traz a discussão para o grande grupo e descreve a resolução (que deverá ser construída com os educandos), que deverá ser a seguinte:

$$P(t + 1) - P(t) = (1{,}01)P(t) - P(t)$$
$$P(t + 1) - P(t) = (1{,}01 - 1)P(t).$$

Agora o educando já é capaz de compreender a ideia associada a linearidade, homogeneidade e ordem. Mas não é necessário trabalhar com o educando de forma explicita estes conceitos, pois pode desmotivá-los e acabar recaindo em uma aula com metodologia tradicional (o professor explicando o que é cada coisa). Assim, pode-se até lançar alguns questionamentos sobre a expressão encontrada e o comportamento dela, para que os educandos reflitam sobre estes conceitos.

4º Momento: Lançar o seguinte questionamento para os trios:

- ➔ Se eu desejar fazer uma projeção do crescimento populacional para daqui 20, 30, 50 anos, o método aplicado acima seria prático?

É muito provável que, de forma unanime, os educandos diriam não. Então, lança-se uma situação para os trios resolverem:

➔ Se não é prático, haveria alguma forma de manipular esta expressão, ou escrever uma outra que seja mais prática?

➔ Após um tempo de discussão nos trios, traz-se a problemática para o grande grupo. Apresenta-se a tabela 2 no quadro, juntamente com uma tabela em branco (tabela 1 do apêndice) e então, juntamente com os educandos, preenche-se a tabela, escrevendo cada linha em função do valor inicial, da seguinte forma:

Tabela 3. Descrevendo a evolução em termos de $P(0)$

Tempo	Cálculo necessário	População
0	$15000 = (1{,}01)^0.15000$	15000
1	$(1{,}01).15000 = (1{,}01)^1.15000$	15150
2	$(1{,}01).(1{,}01).\ 15000 = (1{,}01)^2.15000$	$15301{,}5$
3	$(1{,}01)(1{,}01).(1{,}01).\ 15000 = (1{,}01)^3.15000$	$15454{,}515$
4	$(1{,}01).(1{,}01)(1{,}01).(1{,}01).15000 = (1{,}01)^4.15000$	$15609{,}06015$
5	$(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01)(1{,}01).(1{,}01).15000 = (1{,}01)^5.1500$	$15765{,}15075$
6	$(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01)(1{,}01).(1{,}01).15000 = (1{,}01)^6.15000$	$15922{,}80226$
7	$(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01)(1{,}01).(1{,}01).15000 = (1{,}01)^7.15000$	$16082{,}03028$

Fonte: autor.

Então pode-se concluir que $P(t) = (1{,}01)^t.15000$ nos dá a população no tempo $t.$ E está é uma solução da nossa equação de diferenças.

<u>*5º momento*</u>: Agora com o objetivo de obter uma expressão geral e uma solução geral para qualquer caso, faz-se o seguinte questionamento:

➔ Qual seria a equação de diferenças que poderia descrever de uma forma geral o nosso problema inicial de descrever o crescimento da população?

Novamente dá-se tempo para os trios discutirem possíveis soluções, atribuírem novas variáveis. Então, ao final desta discussão, o objetivo é que os alunos cheguem à seguinte conclusão (novamente as variáveis ficarão a critério de cada trio):

$$\text{Variáveis}\begin{cases} P(0) \rightarrow População\ inicial \\ i \rightarrow Taxa\ de\ crescimento\ da\ população \\ t \rightarrow Período \\ P(t+1) \rightarrow População\ no\ tempo\ t+1 \end{cases}$$

Assim a equação de diferença é

$$P(t+1) = P(t) + i.P(t),$$
$$P(t+1) = (1+i)P(t).$$

E a Solução geral do problema pode ser dada por

$$P(t) = (1+i)^t.P(0), \qquad t \geq 0$$

E ainda pode-se dizer que, se $\alpha = 1 + i$, então a solução pode ser dada por

$$P(t) = \alpha^t.P(0), \qquad t \geq 0$$

Agora que os educandos conseguiram chegar a uma equação diferença, pode-se propor uma nova situação:

- ➔ A partir das expressões descritas acima, teria a possibilidade de escrevermos uma expressão que nos dê a taxa de crescimento populacional?

Acredita-se que os educandos conseguirão chegar de forma prática e rápida a expressão. Espera-se que cheguem à seguinte conclusão:

Como $P(t+1) = P(t) + i.P(t)$, então

$$P(t+1) - P(t) = i.P(t),$$
$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = i.$$

Agora é o momento de aplicar algumas situações problema de forma que os alunos verifiquem a aplicação das expressões encontradas acima.

Pode solicitar que os alunos pesquisem, no site do IBGE, informações sobre a população brasileira no censo de 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010 e preencham a *tabela 2* disponível no apêndice deste trabalho. Os dados deverão ser preenchidos com 3 casas decimais. Não consta 2020, pois o censo foi adiado em função da pandemia do covid-19. A tabela deverá ser preenchida como a indicada abaixo:

Tabela 4. População conforme censo demográfico.

Período	População, segundo censo. (em milhões)
1970	93,191
1980	119,003
1991	146,825
2000	169,799
2010	190,733

Fonte: autor.

Par esta atividade, será necessário o uso de calculadora cientifica, pois envolverá raízes de valores muito altos. A partir desta tabela, primeira pergunta a ser feita:

➔ Qual a taxa média de crescimento anual da população brasileira de 1970 a 1980?

Espera-se aqui que os trios percebam que se passaram 10 anos. Então, precisam fazer a seguinte relação:

$$P(0) = 91{,}191 \quad e \quad P(10) = 119{,}003.$$

Então temos que

$$P(10) = (1+i)^{10}.93{,}191$$

$$\frac{119{,}003}{93{,}191} = (1+i)^{10}$$

$$\sqrt[10]{\frac{119{,}003}{93{,}191}} = 1+i$$

$$1{,}0247743 \cong 1+i$$

$$i \cong 0{,}0247743$$

Então a taxa média de crescimento anual populacional brasileiro neste período foi de aproximadamente 2,47743%.

Questiona-se novamente os educandos:

➔ E de 2000 a 2010, qual foi a taxa de crescimento anual? Se manteve igual?

Novamente, os educandos deverão chegar à seguinte conclusão:

$$P(0) = 169{,}799 \quad e \quad P(10) = 190{,}733$$

Então temos que

$$P(10) = (1 + i)^{10}.169{,}799$$

$$\frac{190{,}733}{169{,}799} = (1 + i)^{10}$$

$$\sqrt[10]{\frac{190{,}733}{169{,}799}} = 1 + i$$

$$1{,}0116938 \cong 1 + i$$

$$i \cong 0{,}0116938$$

Assim, a taxa média de crescimento anual neste período foi de aproximadamente 1,16938%.

Próxima pergunta:

➔ Qual a taxa média de crescimento anual da população brasileira de 1970 a 2010?

Novamente, os educandos deverão chegar a seguinte conclusão:

$$P(0) = 93{,}191 \, e \quad P(40) = 190{,}733$$

Então temos que

$$P(40) = (1 + i)^{40}.93{,}191$$

$$\frac{190{,}733}{93{,}191} = (1 + i)^{10}$$

$$\sqrt[40]{\frac{190{,}733}{93{,}191}} = 1 + i$$

$$1{,}0180668 \cong 1 + i$$

$$i \cong 0{,}0180668$$

Assim a taxa média de crescimento anual no período dado foi de $1{,}180668\%$.

Próxima questão:

➔ Considerando a taxa média de crescimento anual de 1970 a 1980, qual seria a população brasileira estimada em 2021, considerando que o tempo inicial seja 1980?

Agora espera-se que os alunos, a partir da equação diferença $P(t+1) = (1+i)^t . P(0)$ cheguem ao raciocino abaixo:

$$P(0) = 119{,}003; \quad i = 0{,}0247743 \; e \; t = 41$$

logo

$$P(41) = (1 + 0{,}0247743)^{41} . 119{,}003$$

$$P(41) \cong 324{,}575$$

Assim a população estimada seria de 324, 575 milhões de habitantes.

➔ E considerando a taxa média de crescimento anual de 1970 a 2010, qual seria a população brasileira estimada em 2021, considerando que o tempo inicial seja 2010?

$$P(0) = 190{,}733; \quad i = 0{,}0180668 \quad \text{e } \mathrm{t} = 11$$

Logo

$$P(11) = (1 + 0{,}0180668)^{11} . 190{,}733$$

$$P(11) \cong 232{,}255$$

Ou seja, mantendo a taxa média de crescimento anual dos últimos 40 anos, teríamos uma população estimada de 232,255 milhões de pessoas.

➔ Mas se considerássemos a taxa de crescimentos de 2000 a 2010, qual seria a população estimada em 2021, considerando que 2010 seja o nosso período inicial?

Novamente, esperamos que os educandos concluam que

$$P(0) = 190{,}733; \quad i = 0{,}0116938 \quad e \; t = 11$$

Logo,

$$P(11) = (1 + 0{,}0116938)^{11} . 190{,}733$$

$$P(11) \cong 216{,}753$$

Ou seja, a população estimada para o Brasil seria de 216, 753 milhões de habitantes.

Agora faz-se alguns questionamentos, com o objetivo de fechar esta primeira etapa de modelagem. As perguntas que os grupos deverão responder são:

➔ Analisando as taxas de crescimento encontradas neste caso específico, o que podemos observar/ concluir?

Espera-se que os educandos percebam que ela não se manteve igual em todos os períodos considerados, além de que, de 1970 a 1980 a taxa foi consideravelmente maior em relação ao período de 2000 a 2010.

➔ Consulte no site do IBGE qual a população estimada do Brasil em 2021.

O site do IBGE trará a população estimada para agora junho de 2021, e os alunos encontrarão 213,264 milhões de habitantes, valor próximo ao encontrado pelos alunos ao calcular a projeção de crescimento populacional da população brasileira. Aqui é válido salientar aos educandos que, em função de alguns arredondamentos realizados (como a tabela com o número de habitantes), acaba-se por dar esta diferença nos dados, mas que de fato uma projeção de crescimento da população pode ser feita da forma como realizado acima.

Neste momento faz-se um fechamento desta primeira etapa de avaliação do crescimento populacional em PG. Aqui é hora de discutir com os alunos mais detalhes sobre equações de diferenças, solução geral e como é possível encontrar, de forma relativamente fácil, a solução geral no caso homogênea e linear de primeira ordem. Ainda pode ser comentado ou abordado com os alunos o fato de que o modelo visto pode ser aplicado a vários tipos de população, não sendo restrito somente a população humana.

6º Momento: Agora é o momento de considerar a questão da alimentação, citada por Malthus.

Para auxiliar no processo de abstração, entrega-se a *tabela 2* do apêndice, que é semelhante a que está abaixo, porém sem os dados em vermelho. Então, solicita-se que cada trio, com uso da tabela, resolva a situação proposta.

➔ Considerando que na cidade citada na primeira atividade (com 15000 habitantes) tenha-se, em 2013, uma quantidade de alimento igual a 15 000 toneladas/ano e a cada ano a produção aumenta 200 toneladas, qual seria a quantidade de alimento disponível em 2020, para alimentar a população?

Tabela 5. Quantidade de alimento disponível A(0) = 1500 t

Tempo	Cálculo necessário	Alimento disponível (toneladas)
0	15000	15000
1	$15000 + 200$	15200
2	$15150 + 200$	15400
3	$15300 + 200$	15600
4	$15450 + 200$	15800
5	$15600 + 200$	16000
6	$15750 + 200$	16200
7	$1500 + 200$	16400

Fonte: autor

Então de forma análoga a realizada anteriormente, espera-se que os educandos consigam preencher a tabela de forma semelhante ao que foi preenchido acima. Então, lança-se um novo questionamento aos educandos:

- ➔ Observando a expressão, qual seria a equação de diferenças que descreve a situação acima?

Novamente a escolha da variável fica a cargo de cada trio. Espera-se que nesta etapa os alunos consigam concluir de forma mais rápida qual a expressão que descreve a situação, mas, de qualquer forma, deve-se, após passado um tempo, trazer para o grande grupo a discussão e construir juntos a expressão que fornece a quantia de alimento disponível. Realizar algumas perguntas semelhantes as anteriores, para provocar os educandos:

- ➔ Existe alguma relação entre os dados de cada linha da tabela?
- ➔ De que forma estes dados estão relacionados?
- ➔ Haveria uma forma geral para escrever a projeção desta alimentação a qualquer período?

Aqui vamos considerar que $A(t)$ é a quantidade de alimento no tempo t, espera-se que cheguem a seguinte conclusão:

$$A(0) = 15000$$
$$A(1) = A(0) + 200$$
$$A(2) = A(1) + 200$$
$$A(3) = A(2) + 200$$
$$A(4) = A(3) + 200$$
$$A(5) = A(4) + 200$$
$$\vdots$$
$$A(t) = A(t-1) + 200$$
$$A(t+1) = A(t) + 200$$

Como já foram abordados os conceitos de Equação de diferenças, linearidade, homogeneidade e ordem, agora questiona-se os educandos:

- ➔ Esta equação também é linear?
- ➔ Esta equação é homogênea?
- ➔ Qual a sua ordem?

Acredita-se que os educandos conseguiram chegar as respostas de forma análoga a anterior, fazendo:

$$A(t+1) - A(t) = A(t) + 200 - A(t)$$
$$A(t+1) - A(t) = b$$

Ou seja, aqui os educandos podem ficar um pouco incomodados, pois irão verificar que a variação alimentar ocorre de maneira constante. Neste caso, temos uma equação de diferença linear, não homogênea de primeira ordem.

Neste momento faz-se o seguinte questionamento:

➔ Para se ter uma ideia do alimento disponível daqui 20, 30, 40 anos, o procedimento acima também não será prático, então de que forma poderíamos escrevê-la, de maneira a torná-la prática e interessante?

Acredita-se que nesta etapa os alunos chegaram de forma muito rápida a expressão, mas ao trazer para o grande grupo, é interessante pegar novamente a tabela 2, preenchendo-a juntamente com os educandos, de forma que se obtenha o resultado abaixo:

Tabela 4.

Tabela 6. Quantidade de alimento disponível, em termos de b.

Tempo	Cálculo necessário	Alimento (toneladas)
0	$15000 + 200 \times 0$	15000
1	$15000 + 200 \times 1$	15200
2	$15000 + 200 \times 2$	15400
3	$15000 + 200 \times 3$	15600
4	$15000 + 200 \times 4$	15800
5	$15000 + 200 \times 5$	16000
6	$15000 + 200 \times 6$	16200
7	$15000 + 200 \times 7$	16400

Fonte: autor.

Então pode-se concluir que a quantidade de alimento disponível após t anos, pode ser descrita por

$$A(t+1) = 15000 + 200 \times t$$

Sendo que $A(t+1)$ será dado em toneladas.

Por fim questiona-se os alunos sobre qual a expressão que nos daria a quantidade de alimento.

$$\text{Variáveis} \begin{cases} A(0) \rightarrow Alimentação\ inicial \\ b \rightarrow diferença\ de\ alimento\ entre\ períodos\ consecutivos \\ t \rightarrow Período \\ A(t+1) \rightarrow Quantidade\ de\ alimento\ no\ tempo\ t+1 \end{cases}$$

Logo a equação diferença seria

$$A(t+1) = A(t) + b$$

E a solução seria dado por

$$A(t) = A(0) + t.b, \qquad t \geq 0$$

Então neste momento faz-se um fechamento desta primeira etapa de avaliação da quantidade de alimento disponível, descrito por uma PA.

7º momento: Agora analisaremos graficamente as duas equações. Pode-se sugerir que os alunos usem algum software de plotagem (um gratuito e de boa qualidade seria o geogebra). Caso os alunos não tenham acesso a equipamentos eletrônicos em sala, o professor pode reservar uma sala de informática para proceder a plotagem, ou o professor pode projetar a plotagem do gráfico (mas, neste caso, o aprendizado não será tão significativo quanto no caso dos próprios alunos construírem os gráficos). Caso os educandos nunca tenham acessado o geogebra, o professor pode sugerir, com antecedência, que os educandos assistam o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=KmZpuF818a8 e baixem o programa no equipamento. Então, durante a aula, o professor pode apresentar, de forma breve, as funcionalidades no aplicativo e solicitar que construam o gráfico da equação que descreve o crescimento da população que inicialmente possui 15000 habitantes e a que descreve a quantidade de alimento disponível para estes 15000 habitantes. Inicialmente, iremos considerar que, por ano, cada indivíduo consuma em média 1 tonelada de alimento. O gráfico obtido deverá ser:

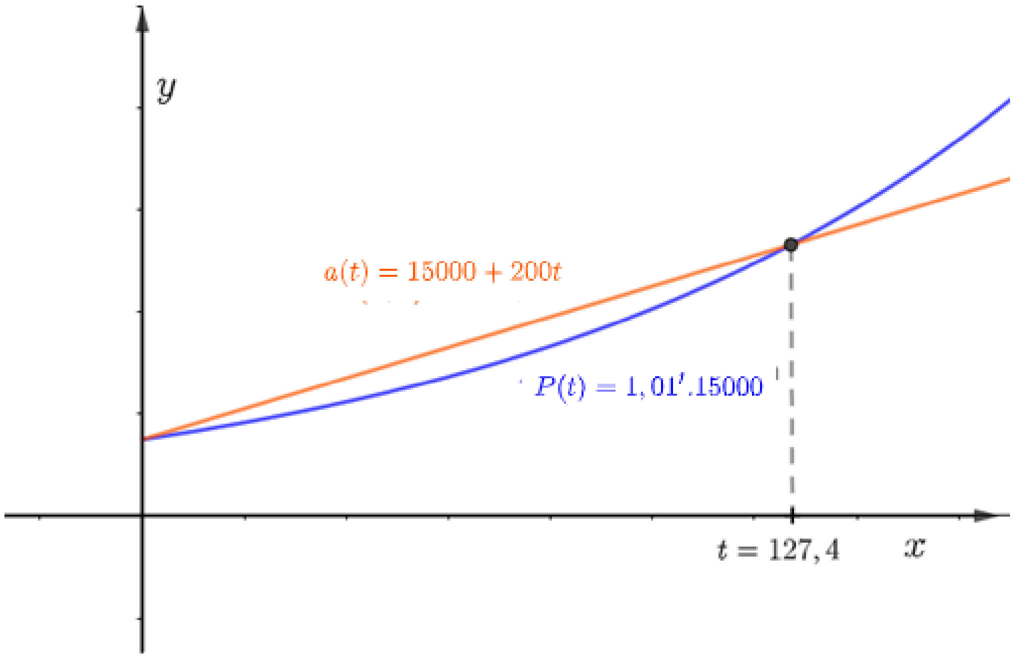


Figura 37. Gráfico A(t) e P(t).

A partir deste gráfico, fazer alguns questionamentos aos educandos:

- ➔ O que podemos observar que acontece quando $0 \leq t < 127{,}4$?
- ➔ O que acontece a partir de $t > 127{,}4$?

Após discussão nos trios, trazemos para o grande grupo. O esperado é que os alunos percebam que no intervalo $[0, 127{,}4)$ há alimento suficiente para alimentar a população, ou seja, a capacidade de produção de alimento dá conta do aumento populacional. Porém após 127,4 anos a quantidade de alimento se torna cada vez menor e, como consequência, chegará determinado instante em que a quantidade de alimento será insuficiente para alimentar a população, ou seja, a capacidade de produção não será suficiente para produzir alimento que supre a demanda de crescimento populacional, tendo como consequência um aumento gritante da pobreza, a ponto de a alimentação entrar em colapso. Para Malthus, este ponto de intercessão da curva era chamado de "início da crise" ou "ponto de crise".

8º momento: hora de fechar a discussão sobre o modelo Malthusiano. Nesta etapa, acredita-se que o educando já conseguiu modelar a equação diferença que descreve o modelo Malthusiano. Agora vamos ao fechamento do processo de modelagem matemática, para tanto, vamos lançar a seguinte pergunta aos grupos:

Para Malthus, em sua obra *ensaio sobre o princípio da população* de 1798, sugeria que a população mundial dobraria a cada 25 anos, desta forma teríamos uma população faminta, vivendo em situação de miséria e como consequência, desestruturadas na vida social. Observando a população mundial atualmente, pode-se afirmar que Malthus estava certo em suas previsões?

Espera-se que o educando perceba que de fato as previsões de Malthus não foram satisfeitas, mas claro que nesta discussão virá muitos questionamentos acerca da fome no mundo e fatores que levam a tal situação, mas o objetivo é concluir que suas previsões não se concretizaram. Concluído isto, faz-se um novo questionamento:

- ➔ Por que as previsões de Malthus não se concretizaram?

Novamente deixa-se a discussão acontecer nos trios e depois traz-se para o grande grupo. Espera-se que os alunos percebam que ele não levou em consideração as evoluções tecnológicas que surgiriam e aumentariam a produção de alimento de forma muito maior do que o previsto. Pode-se também, neste momento, deixar que os alunos realizem pesquisas, de forma a verificar que além de Malthus não ter levado em conta a evolução tecnológica, a população não evoluiu de forma exponencial. Exemplo disto é os cálculos que realizamos com dados do censo demográfico brasileiro. Para fechar a discussão, pode-se relembrar, das aulas de geografia, que a teoria Malthusiana foi muito criticada, pois era considerada pessimista e cruel. Para ele, a humanidade estava fadada a miséria, e sugeria o corte do assistencialismo aos mais pobres, pois, caso contrário, isso aumentaria a taxa de natalidade, agravando o problema. Por fim, ele também sugeriu um controle da reprodução das famílias mais pobres da sociedade, por meio de abstinência sexual e casamento tardio.

4.1.5 Avaliação

O processo de avaliação deve ser contínuo, não se restringindo a um único momento. Desta forma, deve-se avaliar todo o processo de aprendizagem dos educandos durante esta proposta. Assim, como aferição dos conhecimentos adquiridos, sugere-se que cada trio construa um portifólio contendo todas as etapas e atividades realizadas. Desta forma, o educador pode analisar se de fato o aprendizado ocorreu e se ficaram lacunas no aprendizado, ou seja, algo que precise ser revisto. Além da análise do material, é necessário um olhar do educador durante todo o desenvolvimento do projeto, desde interação dos educandos nos trios, no grande grupo e na realização das atividades propostas.

Seria interessante também o educador entregar uma pequena folha para os educandos e solicitar que eles indiquem pontos que consideraram positivos durante o projeto, pontos que acharam negativo e as maiores dificuldades encontradas. É necessário que o educador também avalie a sua prática pedagógica, pois, a partir disto, é possível realizar mudanças que tornem o processo de aprendizagem mais efetivo.

Uma observação importante sobre a proposta é que nosso objetivo geral foi abordar crescimento populacional via equações de diferenças. Mas, claramente, vimos que foi possível trabalhar inúmeras outras habilidades dentro desta proposta, como funções, sequências (em especial PA e PG), recorrências, dentre outras possibilidades.

4.2 CÁLCULO DE PREÇO DE UM PRODUTO

4.2.1 Objetivos

- Utilizar a linguagem matemática para expressar situações que se assemelhem a realidade.
- Reconhecer a matemática como uma ferramenta essencial no mercado financeiro.
- Investigar questões que influenciam na determinação do preço dos produtos.
- Utilizar softwares como ferramenta de apoio.
- Construir a equação demanda.
- Construir a equação oferta.
- Reconhecer que a relação entre a demanda e a oferta influenciam no preço final de qualquer produto.
- Determinar, com uso de software, o gráfico das funções demanda e oferta.
- Determinar pontos de equilíbrio (se existir).

4.2.2 Conteúdos

- Equação preço – demanda.
- Equação preço – oferta.

- Equações de diferença.
- Mercado financeiro.

4.2.3 Habilidades da BNCC

- **(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
- **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
- **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
- **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos

quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

- **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4.2.4 Procedimentos metodológicos

Para que esta proposta de atividade seja aplicada de forma efetiva, é necessário que os educandos tenham uma noção dos conceitos de funções afim e sua determinação. Caso os alunos não possuam esta noção, sugere-se uma breve revisão dos conceitos que envolvem as funções polinomiais do primeiro grau. Tal sugestão de atividade inicialmente será aplicada nas aulas de matemática, mas nada impede que possa ser relacionada com outras áreas do conhecimento, como a geografia (que trabalha questões econômicas no ensino médio) e história (expansão comercial). Abaixo será descrito o passo a passo das atividades, considerando que os alunos já tenham os conhecimentos necessários acerca de funções polinomiais do primeiro grau.

1º momento: inicia-se a aula com uma breve fala sobre o mundo em que vivemos e a necessidade que temos em consumir, sejam produtos essenciais para nossa sobrevivência (alimentos, vestuários, higiene pessoal, entre outros), sejam produtos não tão essenciais (vídeo-games, celulares, computadores, TV a cabo, entre outros). Todos esses produtos possuem um determinado preço. Inclusive, existem produtos que, a princípio, possuem uma mesma função, mas com preços diferentes. Neste momento inicia-se alguns questionamentos aos educandos:

➔ O que leva alguns produtos que, a princípio, teriam uma mesma função, possuírem preços diferentes?

- ➔ Como são definidos os preços de venda de determinados produtos?
- ➔ O proprietário simplesmente acredita que o produto dele vale aquilo e pronto, define o preço?

Solicita-se que os educandos respondam a estas perguntas em seus cadernos. Dá-se em torno de 5 a 10 min para responderem (pode ser um tempo maior, isto depende de como o educador estiver sentindo a turma). Passado este tempo, traz-se a discussão para o grande grupo e o educador registra no quadro (ou num computador, projetando no quadro) as colocações dos alunos. Provavelmente surgirão várias colocações, como o preço de custo para produzir, a qualidade da matéria prima, a marca do produto, enfim, os mais variados questionamentos. Acredita-se que dificilmente chegarão à ideia de oferta e demanda.

Para auxiliar os educandos a chegarem nas ideias de oferta e demanda, sugerimos mais alguns questionamentos aos educandos:

- ➔ O que acontece com o número de unidades vendidas de um determinado produto, quando o seu preço diminui, ou seja, entra em promoção?

Espera-se que os educandos percebam e cheguem a conclusão de que, ao diminuir o preço de um determinado produto, o número de unidades vendidas aumente, ou seja, quanto menor o preço, maior será o número de unidades vendidas (caso não cheguem a este raciocínio, o professor pode instigá-los com outros questionamentos que auxiliam a chegar nesta conclusão). Neste momento o professor deve fazer uma breve fala sobre o que é demanda.

Demanda de um produto é a quantidade de unidades do produto que os consumidores estão dispostos a comprar. Em geral, a demanda varia de acordo com o preço deste produto. Desta forma, quanto maior o preço, menor a demanda e quanto menor o preço, maior a demanda. A demanda também é conhecida como curva do consumidor. Além do preço, vários outros fatores podem influenciar na demanda, como a renda do consumidor, o preço de outros produtos similares, os hábitos dos consumidores etc.

Agora faremos novos questionamentos, com o intuito de construir a ideia de *preço - oferta.*

Vimos que uma redução no preço, geralmente causa uma maior procura pela compra de determinado produto. Em contrapartida, se o preço aumentar, tende-se a diminuir a procura, por parte dos consumidores, a este produto. Mas agora, pensando no produtor, o que acontece quando um produto é supervalorizado? Ou seja, quando seu valor sofre um aumento, o que acontece com o número de produtores? O que acontece com a quantidade de produto? Há um aumento ou redução?

Neste momento aguarda-se para que os alunos reflitam sobre esta questão, pois em função de acabarem de discutir sobre Demanda, pode gerar confusão ao pensar na oferta.

Espera-se e instiga-se os alunos a chegarem à conclusão de que se o preço de determinado produto sofre um aumento, e, portanto, um aumento de lucros para os produtores, há uma tendência de mais pessoas quererem participar do mercado, ou seja, haverá uma quantidade maior de produto sendo ofertado. Já se o preço de determinado produto sofre uma diminuição, e, portanto, uma diminuição de lucros para os produtores, há uma tendência de menos pessoas quererem participar do mercado, ou seja, haverá uma quantidade menor de produto sendo ofertado. Agora o professor também pode fazer uma breve explanação sobre o significado de oferta.

Oferta de um produto é a quantidade de unidades do produto disponíveis para serem compradas. Em geral, a oferta também varia de acordo com o preço deste produto. Desta forma, quanto maior o preço, maior a oferta e quanto menor o preço, menor a oferta. A oferta também chamada de curva do produtor. Além do preço, vários outros fatores podem influenciar na oferta, entre eles, o preço de produção, a tecnologia aplicada na produção e o preço de outros bens. De fato, se o custo de produção for reduzido (em função de novas tecnologias), irá gerar um aumento no lucro e, como consequência, mais pessoas irão investir neste produto.

Agora pode-se fazer um fechamento deste primeiro momento, solicitando que os educandos acessem o link https://administradores.com.br/artigos/teoria-da-oferta-e-demanda e realizem, em casa, a leitura do artigo sobre a teoria da oferta e demanda. Caso os alunos não possuam computador em casa, o educador pode acessar, colocar o arquivo em um editor de texto e imprimir uma cópia para os educandos levarem para casa.

2º momento: Agora vamos começar a falar um pouco sobre as equações preço – demanda e preço – oferta. Para iniciar a discussão, pode-se iniciar a aula questionado os educandos sobre o texto sugerido para leitura, interagindo e conversando sobre os significados de demanda e oferta. Então solicita-se que a sala se divida em trios e lança-se a primeira situação problema para que os alunos reflitam, modelem e então encontrem uma solução para ela.

➔ Um determinado tipo de bola é vendido por R$ 25,00. A este preço, temos que são vendidos exatamente 75 unidades do produto ao dia. Se o preço cobrado for de R$20,00 o número de unidades vendidas sobe para 100. Supondo que a função que descreve a procura por este produto em termo do preço é polinomial de 1º grau, qual a equação que representa a demanda deste produto?

Após uma certa discussão nos trios, como os educandos já possuem uma noção de funções polinomiais do primeiro grau, irão utilizar estratégias já conhecidas para resolver os problemas, uma delas é taxa média de variação (TMV). De qualquer forma, indiferente das estratégias utilizadas (que isto também faz parte de um processo de ensino), vamos apresentar abaixo uma forma de resolução do problema proposto.

Como a função é polinomial do 1º, temos que é da forma $f(x) = ax + b$

$$f(25) = 75 \qquad\qquad f(20) = 100$$

Então $TMV = \frac{100-75}{20-25} = \frac{25}{-5} = -5$

$$f(20) = 100$$
$$-5.20 + b = 100$$
$$-100 + b = 100$$
$$b = 200$$

Logo a função que representa a situação acima é dada por $f(x) = -5x + 200$, que é a chamada equação demanda e pode ser escrita da forma $D(x) = -5x + 200$.

Após os educandos terem chegado a esta função, voltamos a realizar questionamentos que deverão ser respondidos pelos trios. Os questionamentos são:

➔ O que representa a variável x nesta função?

➔ Por qual motivo o coeficiente de x é negativo? Ele pode ser positivo?

➔ O preço de venda é sempre o mesmo, em qualquer época do ano?

Espera-se a discussão ocorrer nos trios, certa de 10 a 15 min (depende de como o educador sentir a turma). Terminado o tempo, traz-se a discussão para o grande grupo e as respostas esperadas são de que x representa o preço de venda de determinado produto. Já na segunda questão podem surgir algumas dúvidas, e talvez alguns educandos acabem colocando que possa ser positivo. Caso isto ocorra, o educador deve levá-los a refletir com alguns questionamentos acerca do que foi conversado no primeiro momento, onde definimos que um aumento do preço causa uma redução na demanda, ou seja, a curva da demanda é decrescente e isto só ocorre se o coeficiente for positivo. Nesta segunda questão, pode-se dizer aos educandos que no meio econômico a $|TMV|$ acima é conhecida como "sensibilidade do consumidor ao preço, ou elasticidade do preço. E com relação a última questão é muito provável que os educandos dirão que o preço dos produtos passa por inúmeras alterações no seu valor ao longo do tempo, pois o custo de produção pode aumentar ou reduzir, a matéria prima ter um curso mais alto, enfim, várias situações. Então, novamente não damos respostas aos educandos, mas os instigamos a pensar. Surge um novo questionamento:

➔ Se o preço depende do tempo, faz sentido deixar na expressão somente um x como variável, ou será que poderíamos escrevê-lo como uma função que depende do tempo?

Acredita-se que com o questionamento acima, os educandos chegarão ao esperado, percebendo que a demanda de fato depende do preço do produto em determinado período. Portanto, pode-se escrever a equação demanda do problema anterior da seguinte forma:

$$D(t) = -5p(t) + 200,$$

sendo que $p(t)$ representa o preço por unidade no período t.

Agora vamos lançar outro questionamento para que os alunos cheguem à equação que representa a oferta. Pergunta a ser projetada no quadro (ou ser realizada em voz alta, ou entregue impressa para os trios):

➔ Quando a bola do problema anterior estiver com o preço igual a R$ 10,00 a quantidade de bolas disponível no mercado é igual a zero, enquanto para cada R$5,00 aumentado no preço, 500 bolas a mais estarão disponíveis. Supondo que a função que descreve a oferta deste produto em termos do preço é polinomial de 1º grau, qual a equação que representa a oferta deste produto?

Deixa-se os trios discutirem a questão e tentarem chegar em uma solução, que provavelmente não será muito difícil. Assim que o educador perceber que os educandos conseguiram chegar à equação, traz a discussão para o grande grupo e escreve no quadro a resolução da questão. Os passos para a resolução será:

$$f(10) = 0 \qquad\qquad f(15) = 500$$

$$TMV = \frac{500}{15 - 10} = 100$$

$$100 \times 10 + b = 0$$
$$b = -1000$$

Logo a função oferta pode ser dada por $f(x) = 100x - 1000$. Está função pode ser escrita da forma $S(x) = 100x - 1000$.

Aqui novamente indaga-se os trios para responderem outras questões:

- ➔ O que representa a variável x nesta função?
- ➔ Por qual motivo o coeficiente de x é positivo? Ele pode ser negativo?
- ➔ O preço de venda é sempre o mesmo, em qualquer época do ano?

É provável que mais facilmente os educandos concluam que o x representa o preço de venda do produto. Com relação ao coeficiente ser positivo, espera-se que os educandos relembrem o que é a equação preço – oferta, que quanto maior o preço, mais pessoas interessadas no mercado, ou seja, a curva neste caso é crescente. Aqui vale comentar com os educandos que a $|TMV|$ da oferta é conhecida no meio econômico como sensibilidade dos fornecedores ao preço. E por fim, os educandos devem sugerir que o preço pode ser escrito em função do tempo, mas é muito provável que cometam um equívoco, escrevendo a equação preço – demanda como:

$$S(t) = 100p(t) - 1000$$

Então o educador deve fazer o seguinte questionamento:

➔ A oferta é uma situação que irá ocorrer dependendo do preço em determinado período, ou seja, se o preço aumentar, a demanda do próximo período irá aumentar, então podemos dizer que a expressão acima está correta?

Após a discussão nos trios, traz-se para o grande grupo e então inicia-se a discussão a cerca disto. Ao final da discussão, vale algumas considerações do educador, alertando os educandos que não tem como uma oferta ser negativa. Outra observação interessante a ser levantada é o fato de que a quantidade ofertada em um período está diretamente relacionada com o preço no período anterior e por este motivo a representação adequada para esta equação preço – oferta é:

$$S(t+1) = 100.p(t) - 1000$$

<u>3º momento</u>: Agora que construímos juntos as equações preço – demanda e preço oferta, vêm o questionamento mais interessante:

➔ A partir das equações demanda e oferta da situação das bolas, como seria possível estipular o preço mais adequado para a bola?

Deixa-se os trios discutirem uma solução. Se não surgirem muitas ideias por partes dos educandos (o que acredito ser bem difícil acontecer), o educador pode fazer algumas observações que conduzam o educando ao raciocínio, como dizer:

➔ Sabemos que se o preço do produto reduzir teremos uma grande demanda, porém a oferta será pequena. Agora, se o preço do produto aumentar, teremos uma redução na demanda, porém um aumento na oferta. Então como saber o preço ideal para venda desta bola?

Provavelmente após está colocação, os educandos irão chegar à conclusão de que o preço ideal será quando a demanda for igual a oferta. Neste momento, o professor deve lançar uma nova situação a ser modelada:

➔ Encontre a expressão que dará a dinâmica ideal do preço para a venda das bolas ao longo do tempo.

Espera-se que primeiramente o educando chegue ao seguinte raciocínio:

Podemos considerar como ideal quando, em cada tempo, todo os itens disponíveis sejam vendidos e no maior valor possível. Para isso ocorrer, em cada tempo t+1, é preciso que a demanda neste tempo, que é dada por D(t+1)= $-5p(t+1)+200$, seja igual a oferta neste tempo (t+1), que é dada por $S(t+1) = 100.p(t) - 1000$. Logo, idealmente, devemos ter:

$$D(t+1) = S(t+1).$$

Substituindo as expressões, temos:

$$-5p(t+1) + 200 = 100p(t) - 1000,$$

$$p(t+1) = -\frac{100p(t)}{5} - \frac{(-1000-200)}{5},$$

$$p(t+1) = -20p(t) + 240.$$

Portanto, para a demanda ser igual a oferta, é necessário que a dinâmica do preço ao longo do tempo seja dada por

$$p(t+1) = -20p(t) + 240.$$

Agora que os alunos acabaram de descrever toda a situação, é o momento para abordarmos os conceitos de equações de diferenças. Inicialmente questiona-se os educandos:

➔ Para saber qual o preço no tempo $t = 1$, além da equação, qual(is) informação(ões) foi necessário? E para o tempo $t = 2, t = 3, t = 4$?

➔ Então para o tempo $(t+1)$, quais as informações necessárias?

Provavelmente, após discussão nos trios, os alunos chegarão à conclusão de que para saber um determinado preço a ser cobrado por um produto é necessário que se saiba preço no período imediatamente anterior, ou seja, para saber $P(t+1)$ é necessário, além da elasticidade do preço, o preço do produto no tempo t, no caso $P(t)$. Assim já é possível conversar com os alunos sobre o que é uma equação de diferenças.

Agora coloca-se no quadro a seguinte expressão e solicita-se que cada grupo tente simplificar:

$$P(t+1) - P(t)$$

Após alguns minutos, novamente traz a discussão para o grande grupo e descreve a resolução (que deverá ser construída com os educandos), que deverá ser a seguinte:

$$P(t+1) - P(t) = -20p(t) + 240 + \ 20p(t)$$
$$P(t+1) - P(t) = 240.$$

Agora pode-se discutir com os alunos que em termos de equações de diferenças; esta equação é classificada como linear, não homogênea e de primeira ordem e com coeficientes constantes. Assim, neste momento, é possível definir, de forma geral, e juntamente com os educandos, o que é uma equação de diferença linear, o que é uma equação de diferença homogênea e o que é a ordem de uma equação de diferenças. Mas lembrado que precisa ser uma construção destes conceitos, não é necessário que o professor explique isto de forma explicita, pois recairíamos sobre a metodologia tradicional novamente (professor explica e aluno replica), então é preciso muito cuidado.

Solicite que na próxima aula os educandos tragam notebook, ou caso os educandos não possuam, reserve a sala de informática da escola. Caso não seja possível as situações anteriores, o professor deverá trazer o computador para projetar no quadro o trabalho que será realizado com um software educacional (mas, neste caso, o aprendizado não será tão significativo quanto no caso de os próprios alunos construírem os gráficos). Caso os educandos nunca tenham acessado o geogebra, o professor pode sugerir que, em casa, os educandos assistam o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=KmZpuF818a8 e baixem o programa no equipamento, procurando conhecer o aplicativo (caso os alunos não tenham o equipamento, o educador deve baixar nos computadores da escola o geogebra e então em um primeiro momento de aula explicar as funcionalidades do aplicativo).

4º momento: Nesta etapa, o educador pode iniciar a aula falando um pouco sobre ponto de equilíbrio e o que ele representa. A princípio sem muita explanação teórica acerca do assunto, só diga que ele um ponto da equação de diferença, geralmente representado por uma letra minúscula elevado a um * e que satisfaz a seguinte situação $f(p^*) = p^*$. Então, no caso da nossa equação, o ponto de equilíbrio representa o preço no qual, se atingido, não haverá mais variação de preço para venda da bola nem de demanda nem de oferta. Neste sentido, podemos dizer que este é o preço ideal. Então solicitamos aos trios que tentem encontrar qual é este preço. Espera-se que os educandos cheguem ao seguinte raciocínio:

$$f(p^*) = p^*,$$
$$-20p^* + 240 = p^*,$$
$$-20p^* - p^* = -240,$$
$$-21p^* = -240,$$
$$p^* = \frac{240}{21}.$$

Portanto, no exemplo das bolas, o melhor preço de venda é de aproximadamente R$11,53.

Agora solicite aos educandos que acessem o geogebra e então o educador solicita aos alunos realizem os seguintes passos

- Digitar na janela de álgebra do geogebra a função $f(x) = -20x + 240$
- Digitar na janela de álgebra a função $y = x$;
- Selecionar, na aba de ferramentas do geogebra, a opção *ponto de intersecção entre objetos,* então clicar sobre o gráfico das funções digitadas acima;
- Observar na aba janela de álgebra qual as coordenadas do ponto de intersecção.

Espera-se que os alunos cheguem ao diagrama abaixo:

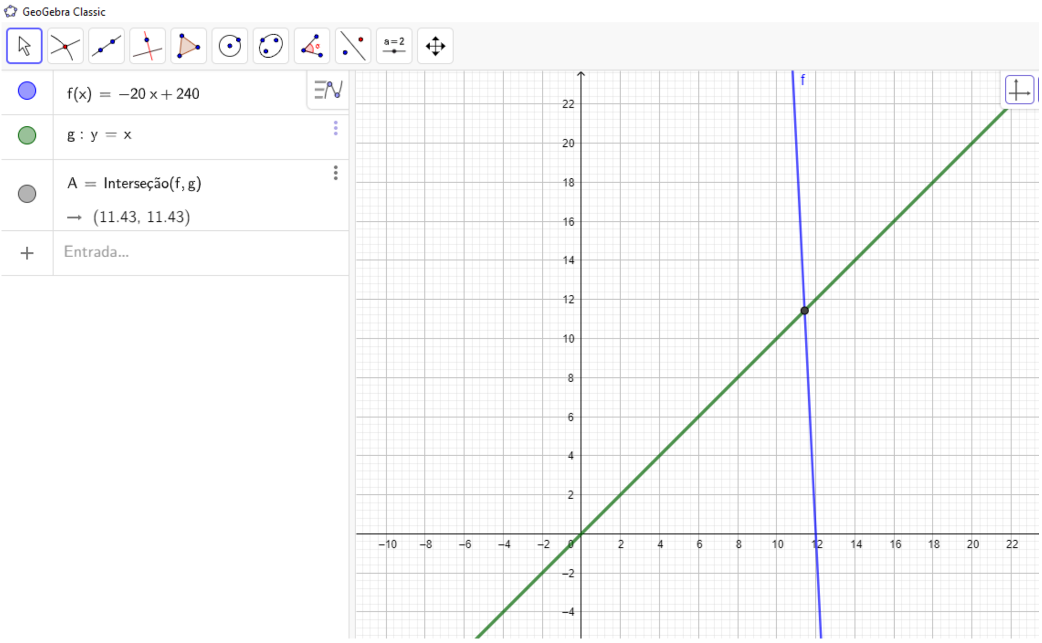


Figura 38. Diagrama de cobweb, demanda/oferta

Agora questiona-se os alunos:

➔ Que relação existe entre o gráfico e o melhor preço de venda do produto?

Espera-se que neste momento os educandos percebam que o ponto de intersecção entre $y = x$ e $f(x) = -20x + 240$ é justamente o melhor preço para venda (ponto de equilíbrio).

Agora convém ao educador explanar com seus educandos o diagrama de Cobweb (teia de aranha), pode ser utilizado como subsídio para esta explanação a sessão 3.5 desta dissertação, que apresenta o passo a passo para construir um diagrama de cobweb, inclusive descrever a evolução do sistema, quando é dado um ponto inicial. Agora solicite aos educandos que no geogebra, tracem a reta $y = x$ e o educador escreve no quadro uma função por vez, o interessante é que se escreva as mais variadas funções, incluindo as mais variadas e de tal forma que os educandos percebam que pode haver mais de um ponto de equilíbrio para uma mesma função. É interessante também solicitar que os educandos atribuam condições iniciais varias e analisarem a órbita, para ver o que acontece. Pode-se utilizar em torno de 50 min com os educandos "brincando" e conhecendo os diagramas de cobweb e o que é possível observar através dele.

Agora vamos questionar os educandos, com o intuito de que percebam o que acontece com a dinâmica do sistema, conforme varia o coeficiente angular da função linear $f(x) = ax + b$ que determina a evolução do preço

$$p(t+1) = ap(t) + b.$$

Então, solicitamos aos educandos (após já terem visto como construir a órbita de um ponto inicial) que construam a dinâmica de vários pontos iniciais próximos a p^* e veja o que acontece com sua órbita para o caso $p(t+1) = -20p(t) + 240$. Eles irão perceber que por mais próximo que peguem o ponto inicial, a órbita sempre irá divergir.

Então, o professor solicita que os educandos escolham qualquer valor para o coeficiente angular a que esteja contido no intervalo $(-1,1)$, achem o novo ponto de equilíbrio p^*, e então tentem novamente construir a órbita de pontos próximos de p^*. Aqui os educandos irão perceber que as órbitas irão tender a. Neste momento o educador deve solicitar que os educandos escrevam no caderno, com suas palavras, o que acontece quando o coeficiente angular está entre $(-1,1)$ e o que acontece quando não está neste intervalo. Eles também devem escrever como o ponto de equilíbrio varia com os coeficientes a e b.

Após deixar os alunos escreverem com suas palavras, o educador escreve no quadro as colocações. Então o professor deve questionar:

➔ O que isto significa no mundo econômico? Se qualquer que seja o preço inicial, o valor sempre tenderá ao melhor preço?

Eles deverão chegar à colocação de que o mercado é considerado estável quando o coeficiente a estiver no intervalo $(-1,1)$. O educador pode complementar dizendo que isto é o desejado no mercado econômico. Agora quando os coeficientes são menores que -1 ou maiores que 1, as órbitas divergem do melhor preço para venda, então o mercado é chamado de instável. O educador pode complementar dizendo que isto pode dificultar o bom funcionamento do mercado daquele produto.

Por fim, pode-se questionar os educandos sobre o que ocorre se o coeficiente for 1 ou -1. Com o uso da ferramenta geogebra, prontamente os educandos chegarão à conclusão de que no caso de ser 1, as retas $y = x + b$ e $y = x$ são paralelas e não há ponto de equilíbrio. Já no caso -1, indiferente do ponto que se inicia, o preço fica oscilando. O educador ainda pode complementar aqui, informando que neste caso, as retas serão perpendiculares, por este motivo ocorre esta oscilação. Estas situações também não são interessantes para o mercado do produto.

<u>5º momento</u>: Agora é hora de tornar geral as definições acerca da equação preço-demanda e equação preço-oferta. Então lança-se as seguintes perguntas para os educandos:

- ➔ Acabamos de verificar que a função demanda da situação das bolas é $D(t) = -5p(t) + 200$ e que -5 é a sensibilidade do consumidor ao preço. Então descreva de uma forma geral, como poderia ser dada a equação $preço - demanda$, para qualquer que seja a situação.

Espera-se que os educandos determinem algumas variáveis e cheguem à seguinte conclusão:

$$\begin{cases} m_d \rightarrow sensibilidade\ do\ consumidor\ ao\ preço \\ b_d \rightarrow Demanda\ máxima \\ D(t) \rightarrow o\ número\ de\ unidades\ vendidas\ no\ tempo\ t \end{cases}$$

Assim temos que a equação $preço - demanda$ é dada por

$$D(t) = -m_d p(t) + b_d$$

De forma análoga, solicite aos alunos que determinem uma expressão geral para a equação $preço - oferta$. Espera-se que os educandos determinem algumas variáveis e cheguem a seguinte conclusão:

$$\begin{cases} m_S \rightarrow sensibilidade\ do\ consumidor\ ao\ preço \\ b_s \rightarrow Demanda\ máxima \\ S(t) \rightarrow o\ número\ de\ unidades\ vendidas\ no\ tempo\ t \end{cases}$$

Assim temos que a equação $preço - demanda$ é dada por

$$S(t + 1) = m_s p(t) + b_s$$

Agora continuamos os questionamentos e solicitamos aos alunos que encontrem uma expressão geral para determinar o preço de equilíbrio. Acredita-se que irão chegar ao resultado, mas podem apresentar dificuldades ao manipular expressões com muitas variáveis. O esperado é que se lembrem de que precisam escrever $D(t + 1) = m_d p(t + 1) + b_d$ e então:

$$D(t+1) = S(t+1)$$
$$-m_d p(t+1) + b_d = m_s p(t) + b_s$$
$$-m_d p(t+1) = m_s p(t) + b_s - b_d$$
$$p(t+1) = \frac{(m_s p(t) + b_s - b_d)}{-m_d}$$
$$p(t+1) = -\frac{m_s}{m_d} p(t) - \frac{b_s - b_d}{m_d}$$
$$p(t+1) = -\frac{m_s}{m_d} p(t) + \frac{b_d - b_s}{m_d}$$

Agora pode-se dizer aos educandos que esta é uma equação de diferença e sugerir que eles façam uma substituição de variável, para a expressão ficar mais simples. Uma sugestão, após eles tentarem fazer esta substituição é:

$$A = -\frac{m_s}{m_d} \qquad e \qquad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$

Então a equação de diferença será escrita da forma $p(t+1) = Ap(t) + B$

Solicita-se que os educandos façam

$$p(t+1) - p(t)$$

Facilmente eles chegarão a:

$$p(t+1) - p(t) = Ap(t) + B - Ap(t)$$
$$p(t+1) - p(t) = B$$

Então, agora o educando já é capaz de compreender a ideia associada a linearidade, homogeneidade e ordem. Mas não é necessário trabalhar com o educando de forma explicita estes conceitos, pois pode desmotivá-los e acabar recaindo em uma aula com metodologia tradicional (o professor explicando o que é cada coisa). Assim, pode-se até lançar alguns questionamentos sobre a expressão encontrada e o comportamento dela, para que os educandos reflitam sobre estes conceitos.

- ➔ É possível determinar uma expressão geral para encontrar o preço de equilíbrio? Se sim, juntamente com seu trio, defina-a.

Espera-se que os educandos consigam realizar as manipulações algébricas necessárias, chegando ao resultado:

$$f(p^*) = p^*$$
$$Ap^* + B = p^*$$
$$Ap^* - p^* = -B$$
$$p^*(A-1) = B$$
$$p^* = \frac{B}{1-A}$$

Ainda pode-se questionar os alunos se teria outra forma de encontrar p^* a partir das equações $D(t)$ e $S(t)$. Acredita-se que possam ter dificuldade, mais ao final, irão observar que se pode fazer $D(p) = S(p)$ e chegar ao mesmo resultado. E para finalizar pode-se instigar os educandos a concluírem, ou o próprio educador pode passar, as situações em que o mercado é instável e estável, da seguinte forma:

$$(i) Se\ |A| < 1, \quad então\ p^*\ é\ estável$$
$$(ii)\ Se\ |A| > 1, então\ p^* é\ instável.$$

E assim finalizamos está proposta de ensino. Fica a critério do educador, se desejar, aplicar mais situações cotidianas envolvendo as equações de demanda e oferta, assim como cálculo de ponto de equilíbrio, e estabilidade dos pontos de equilíbrio.

4.2.5 Avaliação

O processo de avaliação deve ser contínuo, não se restringindo a um único momento. Desta forma, deve-se avaliar todo o processo de aprendizagem dos educandos durante esta proposta. Assim, como aferição dos conhecimentos adquiridos, sugere-se que cada educando registre em seu caderno as etapas e atividades realizadas. Então o educador deve solicitar o caderno destes educandos ao final de cada momento, para verificar se de fato tal habilidade foi desenvolvida, tendo o educador a possibilidade de preencher certas lacunas no processo de ensino. Além da análise do material, é necessário um olhar do educador durante todo o desenvolvimento do projeto, desde interação dos educandos nos trios, no grande grupo e na realização das atividades propostas.

Seria interessante também o educador entregar uma pequena folha para os educandos e solicitar que eles indiquem pontos que consideraram positivos durante o projeto, pontos que acharam negativo e as maiores dificuldades encontradas. É necessário que o educador também avalie a sua prática pedagógica, pois, a partir disto, é possível realizar mudanças que tornem o processo de aprendizagem mais efetivo.

Uma observação importante sobre a proposta é que nosso objetivo geral foi abordar equações preço – demanda, equações preço – oferta e pontos de equilíbrio de mercado via equações de diferenças. Mas, claramente, vimos que que é possível trabalhar inúmeras outras habilidades dentro desta proposta, como funções afins que apresentam uma aplicação considerável durante está proposta.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos modelagem matemática, teoria das equações de diferenças e sugerimos algumas propostas de atividades relacionando estes dois temas. No âmbito da modelagem, estudamos o que são modelos, o que é modelagem, métodos de modelagem e modelagem aplicada ao ensino. A modelagem matemática mostra-se uma grande alternativa para o ensino da matemática no ensino básico, tendo em vista que envolve todos os educandos, desde o momento em participam da escolha de um tema, até o momento em que determinam um modelo adequado para o caso que deu início aos estudos. Com este envolvimento, os educandos sentem-se protagonistas na construção do próprio conhecimento e isto é motivador. A modelagem promove reflexão, o debate e a percepção de problemas reais que fazem parte da sua realidade, assim desenvolve-se um cidadão consciente e socialmente ativo.

Já o estudo das equações de diferenças se deu pelo fato de serem úteis para descrever sistemas que variam em tempo discreto e, portanto, apresentam muitas aplicações, nas mais variadas áreas como física, química, ciências biológicas, ecologia, estudo demográfico, economia (equilíbrio de mercado, preço-demanda, preço – oferta), ente outros. Diante disto, realizamos um estudo sobre as soluções das equações de diferenças e foi possível observar que equações de diferenças lineares de primeira ordem são relativamente fáceis de se encontrar uma solução geral. Em contrapartida, em equações de diferenças não lineares de primeira ordem não é possível de se encontra uma solução explicita, salvo exceções, e, desta forma, faz-se necessário um estudo qualitativo destas equações. Uma ferramenta poderosa para esta análise qualitativa são os diagramas de Cobweb, que permitem compreender, de uma maneira visual e didática, a dinâmica de um sistema, possibilitando análises interessantes, como ponto de equilíbrio, órbita e estabilidade. Foram apresentados exemplos durante a explanação da teoria, como forma de dar mais sentido ao conteúdo matemático, além de mais interessante.

Tendo em vista as inúmeras aplicações das equações de diferenças em problemas simples do cotidiano e a importância de se trabalhar a modelagem como uma estratégia de ensino, decidimos propor duas aplicações de modelagem matemática com equações de diferença, afinal é necessário levar a realidade para a sala de aula.

Uma das propostas envolveu a teoria de crescimento populacional proposta por Malthus, onde a partir de uma frase dita por Malthus, propomos modelar a situação e analisar se de fato os modelos propostos por ele fazem sentido. Nesta proposta o educando irá construir o modelo proposto e ao final concluir que aquele modelo de fato não faz mais sentido hoje, mas que em pequenos períodos pode fazer sentido sim.

Na segunda proposta de aplicação, envolvemos a microeconomia, desenvolvendo parte da teoria de oferta e demanda. A proposta é que os educandos construam as equações de preço-demanda, preço – oferta e sejam capazes de analisar, a partir do diagrama de Cobweb, o melhor preço que pode ser atribuído a um produto, de tal forma que consumidores e produtores estejam satisfeitos. Ainda, a partir do diagrama de Cobweb, é possível analisar quando determinado preço de equilíbrio é estável, ou instável.

Assim, a escolha da modelagem matemática com equações de diferenças se mostrou muito interessante para se trabalhar no ensino básico, tento em vista que se pode modelar várias situações do cotidiano dos educandos, como descrever uma expressão que dê o crescimento populacional e o relacione com a quantidade de alimento disponível para esta população, até a construção de uma equação de diferenças capaz de dar o melhor preço de venda que satisfaça consumidor e fornecedor da melhor forma possível.

Por fim, vale ressaltar a importância que foi o programa de mestrado profissional em rede nacional – PROFMAT, para o meu crescimento profissional. A partir do programa tive a possibilidade de compreender mais a fundo conceitos que são trabalhados no ensino básico. Além de todo o conhecimento adquirido com os professores, nas disciplinas ministradas, aprendi muito no processo de escrita da dissertação, pude perceber como de fato não sabia escrever um texto científico e o programa me possibilitou este aprendizado. Com todo este aprendizado, o programa me levou a refletir muito sobre a minha prática em sala e quais estratégias eu posso aderir a partir de agora, para de fato levar o conhecimento verdadeiro pra meus educandos, ensiná-los a pensar, a fazer ciência já na escola, pois nada como aprender fazendo.

6 REFERÊNCIAS

Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <**http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase**>. Acesso em: 15 de maio de 2021.

BASSANEZI, Ronei Carlos. **Ensino – Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 4ª edição, editora contexto. 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: 24ª Reunião anual da ANPED, Anais... Caxambu,2003.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação**. Bolema, Rio Claro, n. 15, 2001.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **30 Anos de Modelagem Matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: <http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/mariasalett.pdf>. Acesso em: 22 maio. 2021.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5ª edição. São Paulo, editora Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino** – 4ª edição – São Paulo: Contexto, 2005.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (Pcn's).** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília:MEC/SEF, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf >. Acesso em: 22 de maio de 2021.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, Unesp, 1987.

CAPILUPE, Adriano Roberto. **Equações De Diferenças: Suas Aplicações Em Conteúdos Do Ensino Médio e Em Modelos Populacionais.** Dissertação de mestrado – PROFMAT, UFSC, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=3374_db04a40e8cc1e7b2f126f20d904ea42973c4e5a8>. Acesso em: 09 de agosto de 2021.

CARVALHO, José Alberto M. **Crescimento populacional e estrutura demográfica no Brasil**. Belo Horizonte: UFMG/Cedeplar, (Texto para Discussão nº 227), 2004.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano 2. Nº 2, página 15-19, 1989.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Matemática, ensino e aprendizagem: uma proposta global.** São Paulo: Temas & Debates, 1991.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Matemática e desenvolvimento. In: Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus, 1986.

DALMÊNICO, Amy Dahan; AUBIN, David. **Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Dur´ee and Revolution, Disciplines and Cultures.** Historia

Mathematica nº 29, 2002. Disponível em: < https://core.ac.uk/download/pdf/81139703.pdf>. Acesso em: 11 de agosto de 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 1ª a 5ª séries – 12ª edição., Ática, 1999.

ELAYDI, Saber N. **Discrete Chaos – With Applications In Science And Engineering**. 2º edição, editora Chapman & Hall/CRC, 2007.

ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equation.** 3ª Edição, editora Springer. 2005.

FELIX, Elton. **Equações De Diferenças: Uma Abordagem Mais Completa Para O Ensino De Sequências No Ensino Médio.** Dissertação de mestrado – PROFMAT, UDESC. 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=4115_4bb9e1a6447a24a53bc0481b973f61933065bf6e>. Acesso em: 09 de agosto de 2021.

FERNANDES, Raul. **Teorias da Oferta e Demanda.** Administradores.com, Café com administração. Disponível em: <https://administradores.com.br/artigos/teoria-da-oferta-e-demanda>. Acesso em: 23 de maio de 2021.

HOLMES, Philip. **A Short History Of Dynamical Systems Theory: 1885- 2007.** Princeton University, Princeton. Disponível em: <http://www.eolss.net/sample-chapters/c02/e6-132-21.pdf>. Acesso em: 11 de agosto de 2021.

IMENES, Luiz Márcio. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem matemática**. São Paulo: FNBEC, 1987.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Resultados SAEB. Disponível em: < https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>. Acesso em: 18 de maio de 2021.

KRUGMAN, P. R.; WELLS, R. **Introdução à Economia**. Rio de Janeiro. Editora Elsevier, 2007.

JESUS, Eliane Alves. **Sistemas Dinâmicos Discretos.** Dissertação de mestrado – PROFMAT, UFSC, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=2663_cabf8560eb9b94a83043e51fc8584cda8f7617a3>. Acesso em: 06 de agosto de 2021.

LETELLIER, C. et. al. Some **Elements For A History Of The Dynamical Systems Theory.** AIP Publishing, nº 31, 2021. Disponível em: <http://www.stat.physik.uni-potsdam.de/~pikovsky/pdffiles/2021/Chaos_31_053110.pdf>. Acesso em: 09 de agosto de 2021.

LINGEFJÄRD, Thomas. **Faces of mathematical modeling.** ZDM – The International Journal on Mathematics Education, Vol. 38 n. 2, pp. 96-112, 2006.

LOZADA, Cláudia de Oiveira. A prática da Modelagem Matemática e a formação de professores: as percepções iniciais dos professores em um curso de especialização em modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6ª edição, 2009, Londrina. **Anais**... Londrina: UEL, 2009.

MALTHUS, Thomas. **Ensaio sobre a população**. São Paulo. Editora Nova Cultural, 1996.

Matemática com Profa Jaqueline Silva. Como Baixar e Instalar o Geogebra em 2020. YOUTUBE, 26 de janeiro de 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=KmZpuF818a8>. Acesso em: 20 de maio de 2021.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática** – 3ª edição- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

MORAIS, Leonardo. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**, dissertação de mestrado – PROFMAT, UFSC. Florianópolis, SC, 2014.

NOVAKI, Cristiane. Equações de diferença na projeção de populações. Dissertação de mestrado – PROFMAT, UTFPR, 2017. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=3111_56b8ebd81e79a4e26737e80cfc81a878e65ae256>. Acesso em: 06 de agosto de 2021.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A História da matemática e o processo de ensino aprendizagem**. XX EREMAT, 2014.

OTAVIANO, Alessandra B. Nunes; ALENCAR, Eunice M.L.S; FUKUDA, Cláudia C. **Estímulo à criatividade por professores de Matemática e motivação do aluno. Psicologia Escolar e Educacional,** 2012**.**

PAGNONCELLI, Bernardo Kulnig.; PALMEIRA, Carlos Frederico Borges. **Dinâmica discreta aplicada a economia**. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.

QEDU, **Aprendizagem do Alunos no Brasil**. 2019. Disponível em: < https://www.qedu.org.br/brasil/aprendizado >. Acesso em: 18 de maio de 2021.

SANTIS, Dirceu Grando Diaz. **Geografia 1º ano EM.** Editora Edebê Brasil, Brasília 2017.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; CENTURIÓN, Marília. **A matemática de jornais e revistas**. RPM n.º 20, 1.º quadrimestre de 1992.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano**. Porto alegre: Artmed, 2007.

STEWART, James. **Cálculo – volume 1.** 7ª edição. Editora Cengage Learning, 2013.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: UNICAMP/ Núcleo de Informática Aplicada à Educação-NIED, 1999, página 34, 35.

VASCONCELLOS, Celso do Santos. **Planejamento: Projeto de ensino-aprendizagem e projeto político pedagógico – elementos metodológicos para elaboração e realização**. 10ª edição. São Paulo: Libertad, 2002.

ZBIEK, Rose Mary; CONNER, Annamarie. **Além da motivação: explorando a modelagem matemática como um contexto para aprofundar a compreensão dos alunos sobre matemática curricular**. In: Educational Studies in Mathematics, Netherlands, v. 63, n. 1, 2006.

ZHANG, Wei-bin**. Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics.** 1ª Edição, editora Elsevier, 2006.

APÊNDICE A – Tabelas da proposta 4.1.

Tabela 2

Tempo	Cálculo necessário	População
0	15000	15000

Tabela 2.

Tempo	Cálculo necessário	Alimento disponível (toneladas)
0	15000	15000