UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Rozimére Bernadete Guesser Schmitt

O JOGO ESCOVA: UMA ESTRATÉGIA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Florianópolis

2021

Rozimére Bernadete Guesser Schmitt

O JOGO ESCOVA: UMA ESTRATÉGIA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Leandro Batista Morgado

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

SCHMITT, Rozimere Bernadete Guesser
O JOGO ESCOVA: UMA ESTRATÉGIA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO / Rozimere Bernadete Guesser SCHMITT ; orientador, Leandro Batista Morgado, 2021.
121 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Jogo Escova. 3. Análise Combinatória e Probabilidade. 4. Simulação computacional . 5. Proposta de aplicação em sala de aula. I. Morgado, Leandro Batista . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Rozimére Bernadete Guesser Schmitt

O JOGO ESCOVA: UMA ESTRATÉGIA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Charles Aparecido de Almeida
UFMG

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Profmat-UFSC

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges
UFSC

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Profmat-UFSC

Certificamos que essa é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 21/05/2021 08:43:52-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Leandro Batista Morgado
Data: 21/05/2021 09:26:05-0300
CPF: 016.351.519-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Orientador

Florianópolis, 2021

Este trabalho é dedicado à minha família,
em especial aos meus filhos Airton e Isabela.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à Deus pela dádiva da vida, e por estar continuamente iluminando meus passos, e em quem deposito toda a minha confiança.

Agradeço aos meus pais que me ensinaram desde pequena a importância dos estudos, e por sempre me apoiarem nas minhas escolhas e compreenderem essa minha paixão pela matemática. Ao meu marido Airton, agradeço pela compreensão, e aos meus filhos, Airton Junior e Isabela, pelo suporte incondicional que fizeram toda a diferença.

Ao meu Orientador Professor Dr. Leandro Batista Morgado pelos ensinamentos, por toda dedicação, paciência e conduta de orientação que foram excelentes e imprescindíveis para a realização deste trabalho meus sinceros agradecimentos.

Ao Professor Dr. Leonardo Silveira Borges agradeço imensamente pela programação e simulação dos jogos que enriqueceram consideravelmente este trabalho.

Ao PROFMAT/UFSC, a todos os professores, colegas de curso e de trabalho que muito contribuíram ao longo da minha vida para o meu crescimento acadêmico e profissional o meu muito obrigada.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,
mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser,
mas graças à Deus,
não sou o que era antes."
(Martin Luther King)

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de aplicação do jogo Escova em sala de aula, adaptado a partir de um jogo de cartas conhecido como Escoba. Abordamos inicialmente conteúdos matemáticos relacionados ao jogo, como Análise Combinatória e Probabilidade. Em seguida, discutimos suas regras, critérios de pontuação, estratégias que podem ser adotadas pelos jogadores, além de outros aspectos. Na sequência, para estimar algumas probabilidades interessantes, são apresentados os resultados da simulação computacional do jogo. Por fim, apresentamos uma proposta de sua aplicação, com embasamento teórico e sequência didática, em uma turma do Ensino Médio.

Palavras-chave: Jogo Escova. Análise combinatória e Probabilidade. Simulação computacional. Proposta de aplicação em sala de aula.

Abstract

In this work, we present a proposal to apply the game Escova in the classroom, adapted from a card game known as Escoba. We initially approach mathematical content related to the game, such as Combinatorial Analysis and Probability. Then, we discuss its rules, scoring criteria, strategies that can be adopted by players, and other aspects. Then, to estimate some interesting probabilities, the results of the computer simulation of the game are presented. Finally, we present a proposal for its application, with theoretical basis and didactic sequence, in a high school class.

Keywords: Game Escova. Combinatorial Analysis and Probability. Computational Simulation. Classroom application proposal .

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais

Sumário

1 Introdução

Em geral, os jogos são uma boa ferramenta pedagógica para discutir temas matemáticos. De fato, os estudantes gostam de jogar, e os jogos são uma ótima oportunidade para estimular a interação social. Além disso, a competição controlada ajuda a quebrar padrões que existem na rotina escolar, principalmente nas aulas de Matemática (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 1996).

Segundo (BORIN, 2004), especialmente nas aulas de matemática, se for bem aplicado, um jogo pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração. Sabe-se que a falta de interesse nos estudos acaba gerando indisciplina, reclamação recorrente dos professores e equipes pedagógicas.

Tradicionalmente, a Matemática é vista pelos estudantes como uma ciência rigorosa, formal e abstrata. Nesse sentido, um grande obstáculo para os professores que a lecionam no Ensino Básico é fazer com que seus alunos tenham interesse pela disciplina e conseguir mostrar a eles como aplicar os conhecimentos matemáticos no seu cotidiano social (MIRANDA; PAULA, 2020).

Ao procurar por uma categoria de jogos competitivos e atrativos, que não necessitam de material elaborado e que se baseiam em fundamentos matemáticos, encontramos nos jogos de cartas uma boa opção. Nesse contexto, pretendemos apresentar uma proposta de atividade que pode ser aplicada para estudantes do Ensino Médio, abordando conteúdos de aritmética, análise combinatória e probabilidade. Para isto, elaboramos uma adaptação do jogo *Escoba*, que denominamos Escova.

No desenvolvimento desta dissertação veremos que o jogo Escova possui alguns temas matemáticos relacionados, bem como várias estratégias que os alunos vão desenvolvendo a medida em que vão jogando. Ao observar, em maio de 2019, os alunos do Projeto das Altas Habilidades da EEB Altamiro Guimarães jogando e, ao analisar os resultados dos jogos foram percebidos alguns aspectos interessantes: a soma das cartas restantes ao término do jogo geralmente dava 10, 25 ou 40. Aliás, se a soma não desse um desses 3 valores, os alunos deduziam que alguém tinha feito alguma conta errada durante o jogo. A partir desse ponto iniciamos os questionamentos: poderia a soma das cartas restantes dar valor igual a 55, 70, 85, 100, etc? E qual seria o valor máximo da soma das cartas restantes? Nesses casos, de quantas e quais maneiras isso poderia acontecer?

Tais questionamentos foram servindo de inspiração para esta pesquisa e, pelo fato deste jogo se basear no cálculo mental não dependendo totalmente do fator sorte para o bom andamento do jogo, percebemos que esse era o jogo ideal para este trabalho. Baseado na premissa de que os jogos podem contribuir para a melhoria do processo ensino-aprendizagem dos alunos nas aulas de matemática, apresentamos alguns objetivos desta pesquisa:

- Adaptar o jogo Escova para o uso didático em sala de aula, colaborando com o cálculo mental de números naturais, suas propriedades operatórias e também com problemas de contagem e de probabilidades condicionais.
- Determinar qual a maior soma possível com as cartas restantes de uma partida do Jogo Escova.
- Descobrir de quantas maneiras diferentes pode ocorrer cada um dos possíveis valores da soma das cartas restantes ao final de uma partida do Jogo Escova.
- Descobrir qual a maior quantidade de cartas que pode sobrar na mesa após o término de uma partida do jogo Escova.
- Descobrir, por meio de simulações computacionais, qual soma tem mais possibilidade de ocorrer no final de uma partida, qual jogador tem mais chances de vencer o jogo, e outros aspectos interessantes.

O texto deste trabalho foi estruturado da seguinte maneira: no segundo capítulo, são apresentados os conceitos básicos da análise combinatória, seguidos de exemplos clássicos relacionados à pesquisa. No terceiro capítulo, apresentamos noções básicas de probabilidade, seguidos de exemplos relacionados ao conteúdo desta pesquisa, com destaque especial para a probabilidade condicional.

No quarto capítulo, apresentamos o jogo Escova com suas regras, estratégias, critérios de pontuação e as situações que devem ocorrer para que no final de uma partida tenhamos uma determinada soma com as cartas restantes do jogo. Em seguida, no quinto capítulo apresentamos os dados de simulações computacionais do jogo Escova, discutindo os resultados obtidos.

No sexto capítulo apresentamos uma proposta de aplicação do jogo Escova em sala de aula, com o embasamento teórico e a sequência didática com foco em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio.

No último capítulo, apresentamos as considerações finais do trabalho, e em seguida, apresentamos as referências e os apêndices que foram construídos para complementar nossa pesquisa. Cabe destacar aqui que os apêndices de A a G se referem às tabelas das somas das cartas restantes que vão de 10 a 100. O apêndice H refere-se à soma 15, enquanto que os apêndices que vão de I a L, referem-se aos conteúdos para aplicação prática da nossa proposta em sala de aula.

2 Análise Combinatória

Em diversas situações-problema percebe-se que é muito útil ter um método eficaz para contar o número de maneiras pelas quais as coisas podem ocorrer. A teoria matemática da contagem é formalmente conhecida como Análise Combinatória.

Nos jogos de cartas, e em particular no jogo Escova, objeto principal deste trabalho, a habilidade de contar o número de possibilidades de algum evento específico ganha importância, e assim este assunto é pano de fundo para discutir diversos aspectos do jogo com os estudantes em uma eventual aplicação em sala de aula.

Ademais, muitos problemas de probabilidades podem ser resolvidos pela contagem do número de diferentes maneiras pelas quais certo evento pode ocorrer. Nesse contexto, nosso objetivo neste capítulo é relembrar a teoria básica e desenvolver alguns exemplos sobre as principais técnicas de contagem.

2.1 O princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem será primordial para esta dissertação. E como em muitas situações-problema, precisamos dividir o mesmo em casos, usamos tanto o princípio aditivo quanto o princípio multiplicativo, que seguem abaixo apresentados:

- **Princípio aditivo:** Dito de forma simples, se um elemento pode ser escolhido de m maneiras e um outro elemento pode ser escolhido de n maneiras, então a escolha de um ou outro elemento se realizará de $m + n$ maneiras. Matematicamente, isto quer dizer que, se A e B são dois conjuntos finitos disjuntos, com m e n elementos respectivamente, então a união do conjunto A com o conjunto B terá $m+n$ elementos.

Exemplo 2.1. *Dispondo de 3 mulheres num setor de uma microempresa e de 4 homens em outro setor da mesma microempresa, de quantas maneiras é possível escolher uma pessoa para representar a microempresa, independente de ela ser do sexo masculino ou do sexo feminino?*

Claramente aqui se percebe que, pelo princípio aditivo, temos $3 + 4 = 7$ maneiras diferentes de escolher uma pessoa para representar a microempresa.

Observação 2.1. *Se tivermos mais de dois conjuntos disjuntos é <u>óbvia</u> a verificação de que a quantidade de elementos da união deles terá valor igual a soma dos elementos de cada um dos conjuntos. Isto nos leva à generalização deste princípio.*

- **Princípio multiplicativo:** Segundo este princípio, se um experimento pode gerar m resultados possíveis e se, para cada um dos resultados deste experimento, houver n resultados possíveis para um segundo experimento, então os dois experimentos, nessa ordem, possuem conjuntamente $m \cdot n$ diferentes resultados possíveis.

O princípio multiplicativo pode ser demonstrado enumerando os possíveis resultados dos dois experimentos conjuntamente, isto é:

$$\begin{gathered}
(1,1),\ (1,2),\ \ldots,\ (1,n) \\
(2,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (2,n) \\
\vdots \\
(m,1),\ (m,2),\ \ldots,\ (m,n)
\end{gathered}$$

Aqui, dizemos que o resultado é (i, j), nessa ordem, se o experimento 1 levar ao seu i-ésimo resultado possível e o experimento 2 levar ao seu j-ésimo resultado possível. Portanto, o conjunto dos resultados possíveis consiste de m linhas, cada uma contendo n elementos. Dessa forma, temos um total de $m \cdot n$ resultados possíveis.

Exemplo 2.2. *Em uma lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro opções de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras diferentes um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um tipo de recheio?*

Supondo a escolha do pão como o resultado do primeiro experimento, e a subsequente escolha de um tipo de recheio como o resultado do segundo experimento, vemos a partir do princípio multiplicativo que há $2 \times 4 = 8$ maneiras diferentes de se montar um sanduíche.

Quando há mais que dois experimentos a serem realizados, temos uma versão mais geral deste princípio, que será abordada na próxima seção.

2.1.1 Generalizando o princípio multiplicativo

Se r experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de n_1 resultados possíveis onde, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento, e assim por diante, então haverá um total de $n_1 \ . \ n_2 \ . \cdots .n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

A demonstração desse resultado segue diretamente por indução finita. A seguir, apresentaremos uma série de exemplos que ilustram o tema:

Exemplo 2.3. *Quantas diferentes placas de automóvel com* 7 *caracteres são possíveis de confeccionar se os* 3 *primeiros campos forem ocupados por qualquer uma das* 26 *letras do nosso alfabeto e os* 4 *campos finais forem ocupados por qualquer um dos* 10 *algarismos do nosso sistema de numeração?*

Pela versão generalizada do princípio multiplicativo, a resposta é $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$ placas diferentes.

Exemplo 2.4. *No exemplo anterior, quantas placas de automóveis seriam possíveis, se a repetição entre as letras e entre os algarismos fosse proibida?*

Nesse caso, teríamos $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78.624.000$ placas de automóveis sem repetição de letras e sem repetição de algarismos.

Exemplo 2.5. *No Brasil, as placas padrão Mercosul estão em processo de substituição do modelo anterior, instituído a partir de 1990, no formato ABC1234. Com esse formato, as placas possuem 3 letras do nosso alfabeto seguidas por 4 algarismos. Em 17 de setembro de 2018, foi emitida uma resolução que estabeleceu o formato ABC1D23 para todos os veículos e uma tabela de conversão, na qual os veículos já emplacados terão o antepenúltimo caractere alterado de um algarismo para uma letra, conforme a tabela abaixo:*

Segundo dígito da placa (formato ABC – 1234)	Quarta letra da placa Mercosul (formato ABC – 1D34)
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H
8	I
9	J

Com essa nova configuração, quantas placas diferentes podem ser confeccionadas?

Nesse caso, poderiam ser confeccionadas $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456.976.000$ placas diferentes.

Exemplo 2.6. *Quantos são os números naturais pares que podem ser escritos com 3 algarismos diferentes?*

Nesse caso, o último algarismo do número pode ser escolhido de 5 modos (0, 2, 4, 6 ou 8). E o primeiro algarismo do número pode ser escolhido de quantos modos? Depende!

Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (veja que não podemos usar o algarismo já utilizado na última casa). Agora, se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo só pode ser escolhido de 8 modos (veja que não podemos usar nem o zero e nem o o algarismo já utilizado na última casa).

Nessa situação, vale a pena dividir o problema em casos. Ou seja, contamos separadamente os números que têm o zero como último algarismo e também aqueles números cujo último algarismo é diferente de zero. Assim temos:

- Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro algarismo e 8 modos de escolher o algarismo do meio, num total de $1 \times 8 \times 9 = 72$ números.
- Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o zero e nem o algarismo utilizado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (já que não podemos escolher os dois algarismos já utilizados nas casas extremas). Logo, temos $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que terminam com um algarismo diferente de zero.

Finalmente, usando o princípio aditivo, concluímos então que são $72 + 256 = 328$ os números naturais pares que podem ser escritos com 3 algarismos diferentes. Para o leitor interessado em mais detalhes e exemplos, procurar em (ROSS, 2010), (TANEJA; ARAÚJO, 2010) e também em (MORGADO et al., 2016).

2.2 Arranjos

Seja X um conjunto com m elementos, isto é, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Chamamos de arranjos dos m elementos tomados p a p, $(1 \leq p \leq m)$, a quaisquer p-uplas (sequências de p elementos) formadas com os elementos do conjunto X. Os arranjos podem ser simples ou com repetições, classificação esta que será analisada a seguir.

2.2.1 Arranjos simples

Um exemplo bem característico de um arranjo simples, é o número de senhas formadas por 4 algarismos diferentes que podemos confeccionar usando apenas os algarismos de 0 a 9. Nesse caso, ao digitar uma senha, devemos escolher 4 dentre 10 algarismos disponíveis e não podemos escolher duas vezes o mesmo algarismo.

Dito de maneira fácil, o arranjo simples é aquele onde não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $A_{m,p}$ o número de arranjos simples dos m elementos de X tomados p a p. Então cada arranjo é uma sequência de p elementos em que cada elemento pertence a X e são todos distintos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de arranjos simples é dado por:

$$A_{m,p} = m.(m-1).(m-2).\cdots.(m-(p-1)) = \frac{m!}{(m-p)!}, \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq m.$$

A seguir, vamos apresentar alguns exemplos deste tipo de arranjo:

Exemplo 2.7. *De um baralho do qual foram extraídas todas as cartas de rei, dama e valete, isto é, de um baralho com 40 cartas, 2 cartas são retiradas sucessivamentes e sem reposição. Quantas sequências de 2 cartas é possível obter?*

Cada sequência de cartas é um par ordenado (x, y) onde x é a primeira carta e y é a segunda carta retirada. Observemos que x e y são cartas distintas. O número de arranjos simples é $A_{40,2} = 40 \times 39 = 1560$.

Exemplo 2.8. *Quantas senhas de 4 algarismos distintos, é possível confeccionar dispondo dos algarismos de 0 a 9 ?*

Cada senha é uma sequência de 4 algarismos (w, x, y, z) onde w, x, y e z são todos algarismos diferentes. O número de arranjos simples, nesse caso, é $A_{10,4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 504$.

2.2.2 Arranjos com repetição

Neste caso, todos os elementos podem aparecer repetidos nos grupos de p elementos. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $N(A_R)$ o número de arranjos com repetição de elementos, tomados p a p. Então cada arranjo com repetição é uma seqüência de p elementos, em que cada elemento pertence a X. Pelo Principio Fundamental da Contagem, o número de arranjos com repetição, será dado por:

$$N(A_R) = \underbrace{m.m.\cdots.m}_{p\,\text{vezes}} = m^p, \quad \text{em que} \quad 1 \leq p \leq m.$$

Exemplo 2.9. *Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantos números de dois algarismos podemos formar com os elementos do conjunto X?*

Observemos que cada número é uma sequência de 2 algarismos, podendo ter algarismos repetidos ou não. Temos portanto, um exemplo de arranjo com repetição. Como $m = 4$ e $p = 2$, podemos formar $4^2 = 16$ números.

A seguir, vamos estudar as permutações, que consistem em um caso particular de arranjo, em que todos os elementos do conjunto são escolhidos.

2.3 Permutações simples

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ um conjunto com m elementos. Chamamos de permutação dos m elementos todo arranjo dos m elementos tomados m a m , ou seja, uma permutação de m objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se P_m representa o número das permutações simples dos m objetos, então

$$P_m = m.(m-1).(m-2).\cdots.2.1 = m!$$

Em particular, claro que se $m = 1$, então $P_1 = 1$. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de contagem por permutações:

Exemplo 2.10. *Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Então as permutações dos elementos de X são todos os arranjos constituídos de 3 elementos, ou seja, são todas as sequências formadas pelos 3 elementos, a saber:*

$$(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1)$$

Veja que, nesse caso, o total de triplas é $P_3 = 3! = 6$.

Exemplo 2.11. *Quantos são os anagramas da palavra ESCOVA?*

Cada anagrama da palavra ESCOVA nada mais é, que uma ordenação das letras E, S, C, O, V e A. Assim o número de anagramas da palavra ESCOVA é $P_6 = 6! = 720$.

Exemplo 2.12. *Quantos são os anagramas da palavra ESCOVA que começam por vogal e terminam com consoante?*

Observemos que a vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras e a consoante final também de 3 maneiras. As quatro letras restantes podem ser permutadas entre a vogal e consoante de $P_4 = 4!$ maneiras. Sendo assim a resposta é $3 \times 4! \times 3 = 3 \times 24 \times 3 = 216$ anagramas.

Exemplo 2.13. *De quantas maneiras diferentes podemos embaralhar um baralho com 52 cartas?*

Cada embaralhamento do baralho nada mais é do que uma permutação das 52 cartas do mesmo. Sendo assim, existem 52!, ou seja,

80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000 maneiras diferentes de se embaralhar as 52 cartas de um baralho.

Agora uma pergunta: O que acontece com a ordenação quando, dentre os objetos, há objetos repetidos? Se tentarmos o mesmo procedimento com as letras da palavra ASA, teríamos as triplas: ASA, AAS, AAS, SAA, SAA, ASA.

No entanto, é fácil perceber que, pelo fato de termos duas letras A iguais, temos somente 3 anagramas diferentes (ASA, AAS, SAA), e não 6. Tal situação nos leva a deduzir uma fórmula para o cálculo de permutações em que alguns elementos são repetidos.

2.4 Permutações com elementos repetidos

Vamos calcular o número de permutações que podemos formar quando alguns elementos a serem permutados são iguais. Inicialmente, consideremos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos diferentes entre si e diferentes de a_1.

Vamos representar por $P_n^{n_1}$ a quantidade de permutações nessas condições e calcular esse número. Observemos que cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada em que a_1 aparece em n_1 posições.

Das n posições que existem na permutação, vamos escolher as $n - n_1$ posições para colocar os elementos que são diferentes de a_1. Então existem $\begin{pmatrix} n \\ n - n_1 \end{pmatrix}$ modos de escolher essas posições. Para cada escolha das $n - n_1$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo existem, $\begin{pmatrix} n \\ n - n_1 \end{pmatrix} \cdot (n - n_1)! = \dfrac{n!}{n_1!}$ maneiras de dispormos os elementos distintos de a_1 na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes. Logo $P_n^{n_1} = \dfrac{n!}{n_1!}$.

Em geral, se considerarmos n elementos, dos quais

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r, \end{gathered}$$

então o número de permutações, nessas condições, pode ser calculado através da fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}.$$

A seguir, ilustramos com alguns exemplos relacionados a permutações com alguns elementos repetidos.

Exemplo 2.14. *Quantos números de 7 algarismos podem ser formados usando os algarismos 2, 2, 2, 3, 3, 4 e 5?*

Se todos os algarismos fossem distintos teríamos, $P_7 = 7!$ números. Porém, como há três algarismos 2 e dois algarismos 3, teremos uma quantidade menor que é calculado por $P_7^{3,2} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ números.

Exemplo 2.15. *Quantos são os anagramas da palara URUGUAI que começam com uma vogal?*

Para encontrar a solução deste problema, veja que podemos dividir em casos, conforme a vogal inicial. Assim, temos:

- Começando com U temos $P_6^2 = \dfrac{6!}{2!} = 360$ anagramas.
- Começando com A temos $P_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 120$ anagramas.
- Começando com I temos também $P_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 120$ anagramas.

Pelo princípio aditivo temos um total de $360 + 120 + 120 = 600$ anagramas.

Exemplo 2.16. *De quantas maneiras diferentes podemos embaralhar as 104 cartas de 2 jogos de baralho comum?*

Observemos que, como são 2 jogos de baralho, existem 52 cartas repetidas. Assim o monte das 104 cartas pode ser embaralhado de $P_{104}^{2,2,\ldots,2} = \dfrac{104!}{2! \cdot 2! \cdots 2!} = \dfrac{104!}{2^{52}}$ maneiras.

Para o leitor interessado em mais exemplos e detalhes, recomendamos a leitura de (TANEJA; ARAÚJO, 2010).

Na próxima seção, vamos analisar situações nas quais a ordem dos elementos escolhidos não é importante na formação dos grupos.

2.5 Combinações

Muitas vezes estamos interessados em determinar o número de grupos ou conjuntos diferentes de p objetos que podem ser formados de um total de n objetos, sem levar em consideração a ordem em que estes objetos são escolhidos. Em análise combinatória, estes tipos de agrupamentos são denominados combinações.

Em particular, nos jogos de cartas, esta situação acontece com muita frequência. A ordem das cartas que o jogador recebe para iniciar um jogo de canastra ou pôquer é irrelevante. Em um exemplo ainda mais simples, podemos questionar quantos grupos diferentes de três itens podem ser selecionados a partir dos itens A, B, C, D e E.

Para responder a essa questão, podemos pensar da seguinte forma: há 5 maneiras de selecionar o item inicial, 4 maneiras diferentes de selecionar o item seguinte e 3 maneiras diferentes de selecionar o item final. Portanto, teríamos $5 \cdot 4 \cdot 3$ maneiras de selecionar esses itens, se a ordem fosse relevante.

Entretanto, procedendo a contagem dessa maneira, cada grupo de três itens seria contado 6 vezes (por exemplo, para o grupo formado pelos itens A, B e C temos as permutações ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA). Assim, o número total de grupos que podem ser formados é igual a:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

De uma forma mais geral, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto com n elementos. A quantidade de maneiras diferentes pelas quais um grupo de p elementos pode ser selecionado a partir de n é dada por:*

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, \quad \text{em que} \quad 1 \leq p \leq m.$$

Demonstração. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número N de maneiras distintas pelas quais podemos escolher p elementos a partir de n elementos se a ordem de escolha fosse relevante seria:

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(p-1)).$$

Porém, dessa forma, cada grupo de p elementos é contado repetidamente $p!$ vezes. Sendo assim, o número de grupos diferentes de p elementos que podem ser formados a partir de um conjunto de n elementos é dado por:

$$\frac{n \cdot (n-1). \cdots .(n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!},$$

conforme queríamos demonstrar. $\square$

A seguir, apresentamos alguns exemplos concretos deste tipo de contagem:

Exemplo 2.17. *Uma comissão de* 3 *pessoas deve se formada a partir de um grupo de* 20 *pessoas. Quantas comissões diferentes são possíveis?*

A ordem de seleção das pessoas não é relevante nessa situação. Assim há $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ comissões possíveis.

Exemplo 2.18. *Considere cartas de um jogo de baralho comum, onde se tem à disposição quatro cartas de* 10*, quatro cartas de* 9*, quatro cartas de* 7 *e quatro cartas de* 2*. De quantas maneiras diferentes podemos selecionar quatro cartas de* 10*, quatro cartas de* 9*, uma carta de* 7 *e uma carta de* 2*?*

Observemos que nessse caso, a soma das cartas selecionadas será sempre 85 e que a ordem de seleção das mesmas não é relevante nessa situação. Sendo assim, temos:

- $\binom{4}{4} = 1$ maneira de selecionar as quatro cartas de 10,
- $\binom{4}{4} = 1$ maneira de selecionar as quatro cartas de 9,
- $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 7,
- $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 2.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem há $1 \times 1 \times 4 \times 4 = 16$ maneiras diferentes de selecionar as cartas conforme o enunciado.

Exemplo 2.19. *Considere um jogo de baralho onde foram retiradas as cartas de rei, dama e valete. De quantas formas podemos selecionar 5 cartas de modo que a soma delas seja igual a 15?*

A tabela a seguir mostra, na sua primeira coluna, todos os grupos de 5 cartas onde a soma é 15. Na segunda coluna, temos a quantidade de combinações possíveis para cada grupo.

Tabela 1 – Possíveis grupos de 5 cartas com soma igual a 15

Grupos de cartas com soma igual a 15	Número de Combinações
$1, 1, 1, 2, 10$	64
$1, 1, 1, 3, 9$	64
$1, 1, 1, 4, 8$	64
$1, 1, 1, 5, 7$	64
$1, 1, 1, 6, 6$	24
$1, 1, 2, 2, 9$	144
$1, 1, 2, 3, 8$	384
$1, 1, 2, 4, 7$	384
$1, 1, 2, 5, 6$	384
$1, 1, 3, 3, 7$	144
$1, 1, 3, 4, 6$	384
$1, 1, 3, 5, 5$	144
$1, 1, 4, 4, 5$	144
$1, 2, 2, 2, 8$	64
$1, 2, 2, 3, 7$	384
$1, 2, 2, 4, 6$	384
$1, 2, 2, 5, 5$	144
$1, 2, 3, 3, 6$	384
$1, 2, 3, 4, 5$	1024
$1, 2, 4, 4, 4$	64
$1, 3, 3, 3, 5$	64
$1, 3, 3, 4, 4$	144
$2, 2, 2, 2, 7$	4
$2, 2, 2, 3, 6$	64
$2, 2, 2, 4, 5$	64
$2, 2, 3, 3, 5$	144
$2, 2, 3, 4, 4$	144
$2, 3, 3, 3, 4$	64
Total de combinações	5.532

Fonte: elaborada pela autora.

Na primeira linha da tabela, por exemplo, temos a situação onde foram selecionadas três cartas de 1, uma carta de 2 e uma carta de 10. Observemos que esse grupo pode ser selecionado da seguinte maneira:

- $\binom{4}{3} = 4$ maneiras de selecionar as três cartas de 1,
- $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 2,
- $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 10.

Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem há $4 \times 4 \times 4 = 64$ maneiras diferentes de selecionar esse grupo de cartas. Sendo assim, considerando todos os casos expressos na tabela, usando o princípio aditivo, concluímos que existem 5.532 modos de selecionar as 5 cartas conforme o enunciado do exemplo.

Como vimos nesse último exemplo, são muitas as combinações de 5 cartas cuja soma é 15. Mas qual a chance de, ao retirar 5 cartas desse jogo de baralho de 40 cartas, que a soma dessas 5 cartas seja 15? Questionamentos como esses estão relacionados à teoria de probabilidades, objeto do próximo capítulo desta dissertação.

3 Noções de Probabilidade

A teoria de probabilidades é o ramo de Matemática que cria, desenvolve e, em geral, pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios (MORGADO et al., 2016).

Mas o que é um experimento ou fenômeno aleatório? Antes de responder a essa pergunta veremos o que é um experimento determinístico. Dizemos que um experimento é determinístico quando, repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos, como por exemplo, a água que quando é aquecida a 100ºC, sob pressão normal, entra em ebulição.

Já os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados distintos são chamados de experimentos aleatórios. Quando lançamos um dado de 6 faces, o resultado pode ser qualquer um dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. É por isso que o lançamento de um dado é um exemplo de um experimento aleatório, uma vez que não podemos determinar antecipadamente qual será o resultado do experimento.

Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nosso cotidiano e na natureza, como as dezenas que serão sorteadas no próximo jogo da Mega Sena, a trajetória de um grão de pólen quando colocado na superfície da água, entre muitos outros exemplos. E o objetivo da teoria de probabilidades é descrever e estudar tais fenômenos.

Nesse sentido, em jogos de cartas, a retirada da próxima carta entre as disponíveis no monte é um fenômeno aleatório, e portanto o estudo da teoria probabilidades tem especial importância para discutir o jogo Escova, objeto principal deste trabalho.

3.1 Espaço amostral

Mesmo que não seja possível prever de forma antecipada o resultado de um experimento aleatório, podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis deste experimento. Esse conjunto é conhecido como espaço amostral do experimento, que em geral denotaremos por S. A seguir, apresentamos alguns exemplos deste conjunto.

Exemplo 3.1. *Se o experimento consiste em retirar uma bola de uma urna que contém apenas bolas pretas e vermelhas, então* $S = \{P, V\}$ *onde* P *significa que a bola retirada é preta e* V *significa que a bola retirada é vermelha.*

Exemplo 3.2. *Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida entre* 10 *cavalos numerados de* 1 *a* 10*, então o espaço amostral S é conjunto de todas as possíveis permutações entre os números de 1 a 10. O resultado* $(2, 5, 3, 10, 4, 9, 7, 8, 1, 6)$ *significa, por exemplo, que o cavalo número 2 chegou em primeiro lugar, em seguida o cavalo número 5 e assim por diante.*

Exemplo 3.3. *Se o experimento consiste em jogar duas moedas e observar a face voltada para cima, então o espaço amostral é $S = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}$. O resultado será (k, k) se em ambos os lançamentos a face superior for cara, (k, c) se no primeiro lançamento a face superior for cara e no segundo coroa, e assim sucessivamente.*

Exemplo 3.4. *Se o experimento consiste em jogar dois dados de 6 faces e observar a face voltada para cima, então o espaço amostral é formado por* 36 *pares ordenados, ou seja:*

$$S = \{\ (i, j)\}, \ onde \ \ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Neste exemplo, ocorre o resultado (i, j) ocorre se i é o número que aparece na face superior do primeiro dado e j é o resultado que aparece na face superior do segundo dado.

Exemplo 3.5. *Se o experimento consiste em retirar uma carta de baralho de um monte que contém quarenta cartas, sendo estas numeradas de* 1 *a* 10 *e naipes de ouros, copas, paus e espadas, então o espaço amostral S é o conjunto dessas quarenta cartas, identificadas por número e naipe.*

Em particular, este último exemplo é de especial importância para o jogo Escova, que será discutido posteriormente. Para o leitor interessado em mais exemplos de experimentos aleatórios e seus espaços amostrais, veja (ROSS, 2010).

3.2 Eventos

Nesse contexto, qualquer subconjunto E do espaço amostral é denominado evento. Em outras palavras, um evento é um conjunto formado por possíveis resultados do experimento, ao qual atribuíremos posteriormente uma probabilidade. Se o resultado do experimento estiver contido em E dizemos que o evento ocorreu. A seguir listamos alguns exemplos de eventos, vinculados aos espaços amostrais da seção anterior.

No **exemplo 3.1**, tomando $E = \{P\}$, então E é o evento em que a bola retirada da urna é preta. De modo similar, se $E = \{V\}$, então E é o evento em que a bola retirada é vermelha.

No **exemplo 3.2**, tomando E como o subconjunto das permutações entre os números de 1 a 10 em que o primeiro termo é 5, então E é o evento em que o cavalo de número 5 vence a corrida.

No **exemplo 3.3**, tomando $E = \{(k, k), (c, c)\}$, então E é o evento em que, nos dois lançamentos da moeda, a face superior apresentou o mesmo resultado.

No **exemplo 3.4**, tomando $E = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, então E é o evento em que a soma dos números que aparecem nas faces superiores dos dados é igual a 5.

No **exemplo 3.5**, tomando $E = \{$4 de ouros, 4 de copas, 4 de paus, 4 de espadas$\}$, então E é o evento em que o número associado à carta retirada do monte é 4.

Agora, considere S um espaço amostral finito com n elementos. Neste caso, por teoria de conjuntos, segue que este experimento admite 2^n eventos possíveis (subconjuntos de S). Considerando as possíveis uniões e interseções entre esses subconjuntos, temos as seguintes situações:

- Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se os eventos A ou B ocorrerem. Nesse contexto, **no exemplo 3.3**, se $A = \{(k, k), (k, c)\}$ e $B = \{(c, k)\}$, então $A \cup B = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$. Nesse caso, $A \cup B$ é o evento em que a face superior de pelo menos um lançamento é cara.

- Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se A e B ocorrerem. Assim, **no exemplo 3.3**, se $A = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$ e $B = \{(k, c), (c, k), (c, c)\}$, então $A \cap B = \{(k, c), (c, k)\}$ é o evento em que as faces superiores dos lançamentos tem resultados diferentes.

Pode ocorrer que a interseção de dois eventos seja o conjunto vazio. De fato, no **exemplo 3.4**, se $G = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ é o evento em que a soma dos dados é igual a 4 e $H = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ é o evento em que a soma dos dados é igual a 5, então o subconjunto $G \cap H$ não pode ocorrer no experimento em questão. Este evento é chamado de evento vazio e é representado pelo símbolo $\emptyset$. Quando $G \cap H = \emptyset$, dizemos que G e H são eventos mutuamente exclusivos.

Se E for um evento, o evento complementar de E (que denotaremos por E^c) é o evento que ocorrerá, se e somente se, não ocorrer o evento E.

Generalizando as noções de união e interseção de eventos, se $\{A_j : j \in J\}$ for qualquer coleção, finita ou infinita de eventos, então $\bigcup_{j \in J} A_i$ será o evento que ocorrerá, se e somente se, ao menos um dos eventos A_j ocorrer. Da mesma forma, $\bigcap_{j \in J} A_j$ será o evento que ocorrerá, se e somente se, todos os eventos A_j ocorrerem.

Como vimos anteriormente, os eventos aleatórios caracterizam-se por apresentar resultados distintos quando são repetidos nas mesmas condições. Nesse sentido, se A for um subconjunto próprio do espaço amostral, não podemos afirmar com certeza se o evento A irá ocorrer ou não.

Por isso, torna-se muito importante associar um número ao evento A, que medirá de alguma maneira com que frequência este evento ocorre. A partir desta ideia, vamos apresentar a definição de probabilidade na próxima seção.

3.3 Probabilidade e seus axiomas

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório, e $E \subset S$ um evento associado a este experimento. Nesse contexto, uma probabilidade é uma função que associa a cada evento E um número real, satisfazendo os axiomas a seguir.

Axioma 3.1. $0 \leq P(E) \leq 1$.

Nesse sentido, a imagem da função probabilidade deve estar contida no intervalo $[0, 1]$, podendo em casos específicos assumir os extremos desse intervalo.

Axioma 3.2. $P(S) = 1$.

A ideia é evidenciar que temos certeza que o resultado do experimento será um elemento do espaço amostral. Por isso, associamos ao conjunto S a probabilidade 1.

Axioma 3.3. *Dada uma sequência de eventos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, ...,$ isto é, eventos disjuntos dois a dois, temos que:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)\cdot$$

Portanto, segundo este axioma, se os eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade de pelo menos um desses eventos ocorrer é a soma de suas probabilidades.

Exemplo 3.6. *Se um experimento consiste no lançamento de um dado, e assumindo que as seis faces tenham a mesma probabilidade de ocorrer, segue do axioma 3.3 que a probabilidade do resultado ser um número par é:*

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

A seguir, vamos apresentar algumas proposições simples sobre a função probabilidade, que podem ser deduzidas a partir dos axiomas indicados. Iniciamos com uma proposição que nos dá uma ferramenta para o cálculo de probabilidades. Em algumas situações práticas, para calcular a probabilidade atribuída a um evento E, pode ser mais simples estimar a probabilidade deste evento não ocorrer.

Proposição 3.1. *Seja S o espaço amostral de um evento aleatório. Seja $E \subset S$ um evento e E^c o seu evento complementar. Então $P(E^c) = 1 - P(E)$.*

Demonstração. Temos que E e E^c são sempre eventos mutuamente exclusivos e que $E \cup E^c = S$. Assim pelos axiomas 3.2 e 3.3 temos que:

$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$, como queríamos demonstrar. □

É intuitivo que em um lançamento de um dado, a probabilidade de sair 1 na face superior é menor ou igual do que a probabilidade de sair um número ímpar, independente do peso atribuído a cada uma de suas faces. Generalizando, temos:

Proposição 3.2. *Seja S o espaço amostral de um evento aleatório. Sejam $E, F \subset S$ eventos tais que $E \subset F$. Nessas condições, $P(E) \leq P(F)$.*

Demonstração. Como $E \subset F$, vale que $F = E \ \cup \ (E^c \cap F)$. Como os eventos E e $E^c \cap F$ são mutuamente exclusivos, segue pelo Axioma 3.3 que:

$P(E) = P(E) + 0 \leq P(E) + P(E^c \cap F) = P(F)$, o que conclui a demonstração. □

A seguir apresentamos uma proposição que nos fornece a relação entre a probabilidade da união de dois eventos, expressa em termos de suas probabilidades individuais e da probabilidade da interseção desses eventos.

Proposição 3.3. *Seja S o espaço amostral de um evento aleatório. Sejam $E, F \subset S$ eventos. Então $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.*

Demonstração. Inicialmente, veja que podemos escrever $E \cup F$ como uma união de eventos disjuntos, pois $E \cup F = E \ \cup \ (E^c \cap F)$. Pelo axioma 3.3, segue que:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(E^c \cap F) \quad (*). \tag{3.1}$$

Analogamente, F pode ser escrito como a união disjunta $F = (E \cap F) \ \cup \ (E^c \cap F)$, e novamente pelo Axioma 3.3, $P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$.

Assim, segue que $P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$. Substituindo em $(*)$, obtemos que $P(E \cup F)= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$, como queríamos demonstrar. □

Via indução matemática, podemos generalizar a proposição acima para concluir que a probabilidade da união de n eventos é a soma das probalidades individuais desses eventos, menos a soma das probabilidades desses eventos dois a dois, mais a soma das probabilidades desses eventos três a três, e assim sucessivamente. Para ver mais detalhes e resultados, veja (ROSS, 2010).

3.4 Espaços amostrais com resultados igualmente prováveis

Em muitas situações práticas, como no lançamento de um dado, moeda, retirada de uma carta do baralho, entre outros, podemos supor que os elementos do espaço amostral são igualmente prováveis. Quando isso ocorre, por exemplo, em um experimento com espaço amostral S com n elementos podemos escrever:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{n\}) = \frac{1}{n}\cdot$$

Usando o fato acima e o terceiro axioma, segue que a probabilidade de um evento $E \subset S$ é dada por:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos de E}}{\text{número de elementos de S}}\cdot$$

Trata-se da fórmula clássica no ensino de probabilidade no Ensino Médio, ou seja, número de casos favoráveis dividido pelo número total de casos. Vale ressaltar que só podemos usar este resultado quando os elementos do espaço amostral são equiprováveis, isto é, tem a mesma chance de ocorrer. Vamos usar esta ideia para estimar a probabilidade de um evento no exemplo a seguir.

Exemplo 3.7. *No lançamento de dois dados honestos, qual a probabilidade da soma das faces superiores ser igual a 8?*

Seja E o evento da soma das faces superiores ser igual a 8. Nessa situação, o espaço amostral possui 36 elementos, que podemos supor igualmente prováveis. Veja que há 5 resultados cuja soma é oito: $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$. Portanto $P(E) = \frac{5}{36}\cdot$

3.5 Probabilidade condicional

Em muitas situações práticas, estamos interessados em calcular probabilidades a partir de alguma informação <u>parcial</u> que já temos sobre o experimento. Neste caso, tais probabilidades são denominadas probabilidades condicionais.

Vamos discutir em seguida uma situação problema que exemplifica bem esta situação. Suponha que sejam lançados dois dados. O espaço amostral desse experimento possui 36 resultados. Suponha também que os dados sejam honestos, e assim cada um desses 36 resultados possíveis seja igualmente provável, com probabilidade $\frac{1}{36}$.

Agora, suponha que conseguimos descobrir, de alguma maneira, que o número na face superior do primeiro dado seja 4. Então, dada essa informação privilegiada, qual a probabilidade de que a soma dos dois dados seja 8?

Para calcular essa probabilidade, pensemos da seguinte maneira: sabendo que saiu um 4 no lançamento do primeiro dado, passamos a ter apenas 6 resultados possíveis para o nosso experimento, isto é, $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$.

Assim, de certa forma, o nosso espaço amostral inicial ficou bem mais reduzido. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade de ocorrer, os resultados que ainda são possíveis continuarão a ter a mesma probabilidade de ocorrer.

Assumindo que a face superior do primeiro dado é 4, a probabilidade condicional de cada um dos resultados $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$ passou a ser $\frac{1}{6}$. Por outro lado, a probabilidade condicional dos outros 30 pares ordenados do "antigo espaço amostral" passou a ser zero. Assim, a probabilidade condicional de que a soma dos dados seja 8 é $\frac{1}{6}$, pois apenas o par $(4,4)$ satisfaz essa condição.

Por outro lado, sem essa informação privilegiada, lembre que a probabilidade de que a soma dos dados seja igual a 8 é $\frac{5}{36}$, como calculamos no final da seção anterior.

Se A e B representarem, respectivamente, o evento em que a soma dos dados é 8 e o evento em que o resultado do primeiro dado é 4, então a probabilidade condicional que discutimos é denotada por $P(A|B)$. Esta probabilidade também pode ser estimada de outra maneira. Como temos a informação privilegiada que o evento B ocorreu, basta calcular a probabilidade de $A \cap B$ relativa à probabilidade de B. E assim definimos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Vale ressaltar que este conceito é importante para jogos de cartas em geral, e em particular para o objeto do nosso trabalho, pois os jogadores tem informação parcial sobre as cartas que já saíram e precisam estar constantemente atualizando o espaço amostral para estimar as probabilidades das cartas que ainda não saíram. A seguir, vamos apresentar e discutir um outro exemplo sobre o tema.

Exemplo 3.8. *Suponhamos um experimento no qual uma carta é retirada, ao acaso, de um baralho que contém apenas as cartas de 1 a 10, ou seja, 40 cartas no total. Sabendo* *que esta carta é do naipe de espadas, qual a probabilidade de que ela seja a carta com o número 5?*

Cabe destacar aqui que, antes de sabermos que a carta retirada é do naipe de espadas, o espaço amostral desse experimento é:

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} (1, \text{copas}), & \dots, & (10, \text{copas}) \\ (1, \text{espadas}), & \dots, & (10, \text{espadas}) \\ (1, \text{ouros}), & \dots, & (10, \text{ouros}) \\ (1, \text{paus}), & \dots, & (10, \text{paus}) \end{array} \right\}$$

com 40 resultados possíveis e equiprováveis. Agora, sabendo que a carta retirada é do naipe de espadas, seja A o evento em que a carta tem o número 5, e B o evento em que a carta é do naipe de espadas, isto é:

$$B = \{(1, \text{espadas}),\ (2, \text{espadas}),\ \dots,\ (10, \text{espadas})\}.$$

Observemos que B é o nosso novo espaço amostral, agora reduzido com 10 resultados possíveis e equiprováveis. Logo a probabilidade procurada é $\frac{1}{10}$. Este resultado também pode ser obtido pela definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{10}{40}} = \frac{1}{10}.$$

Muitas das situações-problema apresentadas neste capítulo e no capítulo anterior foram formuladas a partir de circunstâncias que ocorrem durante o jogo Escova, cuja apresentação será feita no próximo capítulo desta dissertação.

4 O Jogo Escova

Neste capítulo, iremos tratar especificamente do jogo Escova, objeto principal desta dissertação. Vamos apresentar as regras, os critérios de pontuação, algumas estratégias que podem ser adotadas pelo jogadores, soma das cartas que podem restar na mesa ao final de uma partida, além de outros aspectos.

Adaptar jogos e usá-los em uma dinâmica com os estudantes do Ensino Médio ou Fundamental pode ser uma boa estratégia pedagógica para diversificar ou ampliar uma aula, propiciando ao aluno um melhor aprendizado dos conteúdos em questão.

Nesse sentido, adaptamos o jogo Escova a partir do já existente Escoba, que é um jogo de cartas em que os participantes precisam acumular a cada rodada 15 pontos em cartas, seguindo algumas regras e orientando-se pelos seus valores numéricos por rodada e para os seus pontos no final de cada partida (BASTOS, 2015).

Uma rodada significa que cada um dos jogadores teve a sua vez no jogo. Uma partida consiste em várias rodadas realizadas até que o baralho se esgote e não seja possível formar as somas correspondentes. Para o leitor interessado em mais detalhes sobre o jogo original, sugerimos a consulta ao site (MEGAJOGOS, 2015).

4.1 Regras e pontuação

Em nossa adaptação, e também pensando nas simulações computacionais que vamos realizar posteriormente, convencionamos as seguintes regras para o jogo Escova:

- Usamos somente as cartas de 1 a 10 de um baralho comum, de todos os naipes. Dessa forma, são utilizadas 40 cartas no total.
- Para as simulações que serão realizadas neste trabalho, vamos assumir que participam do jogo dois jogadores. Em uma dinâmica em sala de aula, podemos admitir mais jogadores, e assim mais estudantes podem participar, divididos ou não em duplas.
- Se for jogado por mais de dois jogadores, divididos ou não em duplas, a ordem das jogadas ocorrerá no sentido anti-horário.
- Decide-se de comum acordo ou por sorteio quem será o primeiro a jogar, bem como quantas cartas serão abertas e colocadas sobre a mesa inicialmente. Em nossas simulações, assumimos que a quantidade de cartas inicialmente abertas pode variar de zero a quatro.

- O deck de cartas é embaralhado e em seguida as cartas iniciais são abertas e colocadas sobre a mesa. Caso seja possível formar a soma 15 com duas ou mais dessas cartas, o primeiro jogador já começa pontuando.
- O restante das cartas é colocado em um monte com as faces ocultas.
- O primeiro a jogar deve pegar uma carta do monte e, em seguida, verificar se consegue formar a soma 15 com as cartas disponíveis, incluindo as cartas na mesa. Em caso afirmativo, este jogador pega essas cartas, mostra aos demais e em seguida coloca essas cartas em um monte à sua frente com as faces viradas para baixo.
- Se não for possível formar a soma 15 com as cartas disponíveis, o jogador deixa aberta na mesa a carta retirada do monte, e o jogo continua com o próximo jogador.
- Quando um jogador conseguir pegar todas as cartas que estão na mesa de uma única vez, formando a soma 15, então ele faz uma 'escova'. Nesse caso, deve colocar na sua frente as cartas, sendo uma delas com a face voltada para cima para indicar que fez uma escova. Quando isso acontece com o primeiro jogador, dizemos que ele ganhou uma escova de mão.

Seguindo essa dinâmica, o jogo continua até que não seja mais possível formar uma soma 15 com as cartas que restaram. Posteriormente, voltaremos a esse tema para discutir as possíveis somas de cartas ao final do jogo. Finalmente, em relação aos critérios de pontuação, assumimos que:

- O jogador soma 1 ponto cada vez que realizar uma escova, ou seja, utilizar todas as cartas disponíveis somando 15.
- Ao final do jogo, soma 1 ponto o jogador que tiver o maior número de cartas em seu monte.
- Ao final do jogo, soma 1 ponto o jogador que tiver o maior número de cartas de ouros em seu monte.
- O jogador que tiver o 7 de ouros em seu monte soma 1 ponto.
- O jogador soma 1 ponto para cada conjunto de quatro cartas de um mesmo número que tiver em seu monte (por exemplo, se ele conseguir juntar o 2 de ouros, 2 de espadas, 2 de paus e 2 de copas).

Obviamente, o jogador ou a dupla que atingir o maior número de pontos vencerá o jogo, podendo eventualmente ocorrer empates.

4.2 Algumas possíveis estratégias

De acordo com (PCN, 2000):

> *Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação.*

O Jogo Escova é um jogo estratégico, pois permite que o estudante crie estratégias de ação para uma melhor atuação como jogador. Destacamos a seguir algumas estratégias que podem ser utilizadas durante uma partida do Jogo Escova.

- Vimos na seção anterior que um dos critérios de pontuação do Jogo Escova é conseguir o maior número de cartas. Sendo assim, uma das estratégias é obter a soma 15 usando o maior quantidade possível de cartas.

  Nesse sentido, suponha, como na figura a seguir, que na mesa estejam as seguintes cartas: 4 de copas, 10 de paus, 3 de espadas e 6 de ouros. Suponha ainda que o jogador pegue do monte a carta 5 de copas. Nesse caso, ele teria duas opções para formar a soma desejada: a primeira é usar a carta 10 de paus com o 5 de copas. A segunda é usar a carta 4 de copas, o 6 de ouros e o 5 de copas. Nessa situação, qual a melhor estratégia?

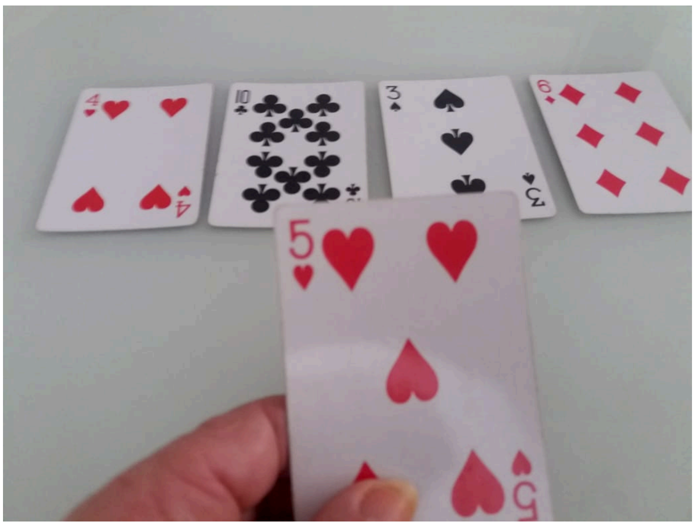


Figura 1 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Na segunda opção, o jogador estará usando 3 cartas ao invés de 2 como na primeira opção. Além disso, ele estará adquirindo uma carta de ouros, que também pode ajudar pensando nos critérios de pontuação. Portanto, concluímos que a segunda opção é a melhor estratégia.

- Vimos também que outro critério de pontuação é conseguir o 7 de ouros. Sendo assim, suponha que estejam disponíveis na mesa estejam as seguintes cartas: 7 de ouros, 10 de copas, 3 de copas e 7 de espadas.

  Suponhamos que o jogador pegue do monte a carta 5 de paus. Nesse caso, ele teria três opções: a primeira é usar a carta 10 de copas com o 5 de paus. A segunda é usar a carta 7 de ouros, o 3 de copas e o 5 de paus. A terceira opção é usar o 7 de espadas, o 3 de copas e o 5 de paus. Qual a melhor estratégia neste caso?

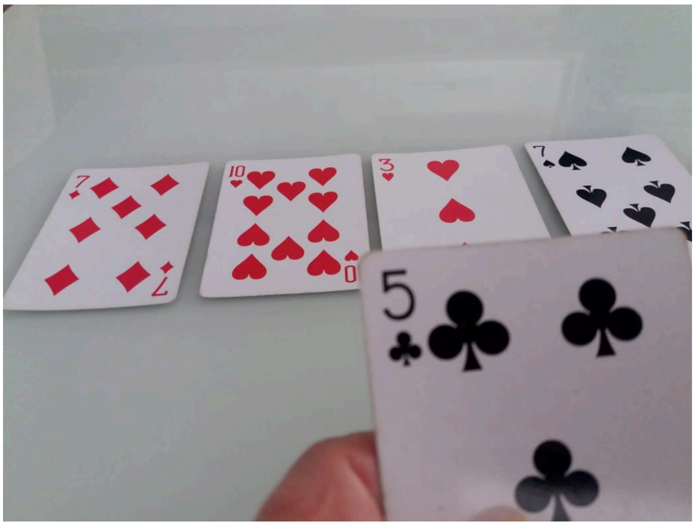


Figura 2 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

  Na primeira opção, o jogador estará usando apenas 2 cartas. Na segunda e na terceira opção ele estará usando 3 cartas. Porém, na segunda opção ele estará conseguindo um ponto extra por estar obter o 7 de ouros. Portanto, a segunda opção é a melhor estratégia nesse caso.

- Na seção anterior, destacamos que o jogador conseguir quatro cartas de um mesmo número somará 1 ponto.

  Nesse sentido, suponha que na mesa estejam as cartas 2 de paus, 2 de copas, 10 de espadas, 8 de ouros e o 4 de ouros. Suponha também que o jogador lembre que já tem no seu monte três cartas com o número 4, e que agora tenha pego do monte a carta 3 de paus. Nessas condições, qual a melhor estratégia neste caso?

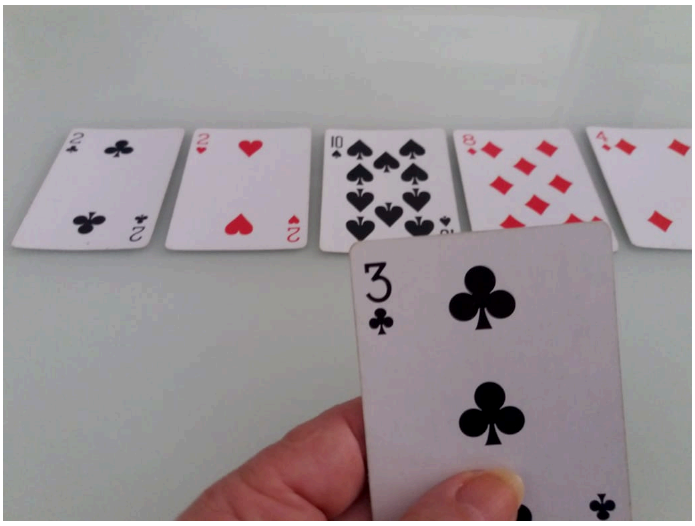


Figura 3 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Analisemos as opções do jogador. Uma primeira opção é usar o 3 de paus, o 4 de ouros e o 8 de ouros. Uma segunda opção é usar o 3 de paus, o 2 de paus e o 10 de espadas. Por outro lado, uma terceira opção é usar o 3 de paus, o 2 de copas e o 10 de espadas e, finalmente uma quarta opção é usar o 3 de paus, o 8 de ouros, o 2 de paus e o 2 de copas.

Nesse caso, verificamos que a primeira opção é a mais vantajosa, pois o jogador já possui em seu monte as outras três cartas com o número 4, e estará usando 2 cartas do naipe de ouros.

- Vimos na seção anterior que um dos critérios de pontuação é conseguir o maior número de cartas de ouros.

  Nesse sentido, suponha que conforme mostra a Figura 4, na mesa estejam abertas as seguintes cartas: 4 de espadas, 3 de ouros, 3 de espadas, 6 de paus e 4 de ouros. Suponha ainda, que o jogador pegue do monte a carta 8 de ouros. Nesse caso, o jogador teria 4 opções para conseguir a soma 15: a primeira é usar o 4 de espadas, o 3 de ouros e o 8 de ouros. A segunda opção é usar o 4 de espadas, o 3 de espadas e o 8 de ouros. A terceira opção é usar o 4 de ouros, o 3 de espadas e o 8 de ouros. A quarta e última opção é usar o 4 de ouros, o 3 de ouros e o 8 de ouros. Observemos que o número de cartas é o mesmo em todas as opções mas, na última opção o jogador estará obtendo 3 cartas de ouro em seu monte, sendo essa então, a melhor estratégia nessa situação.

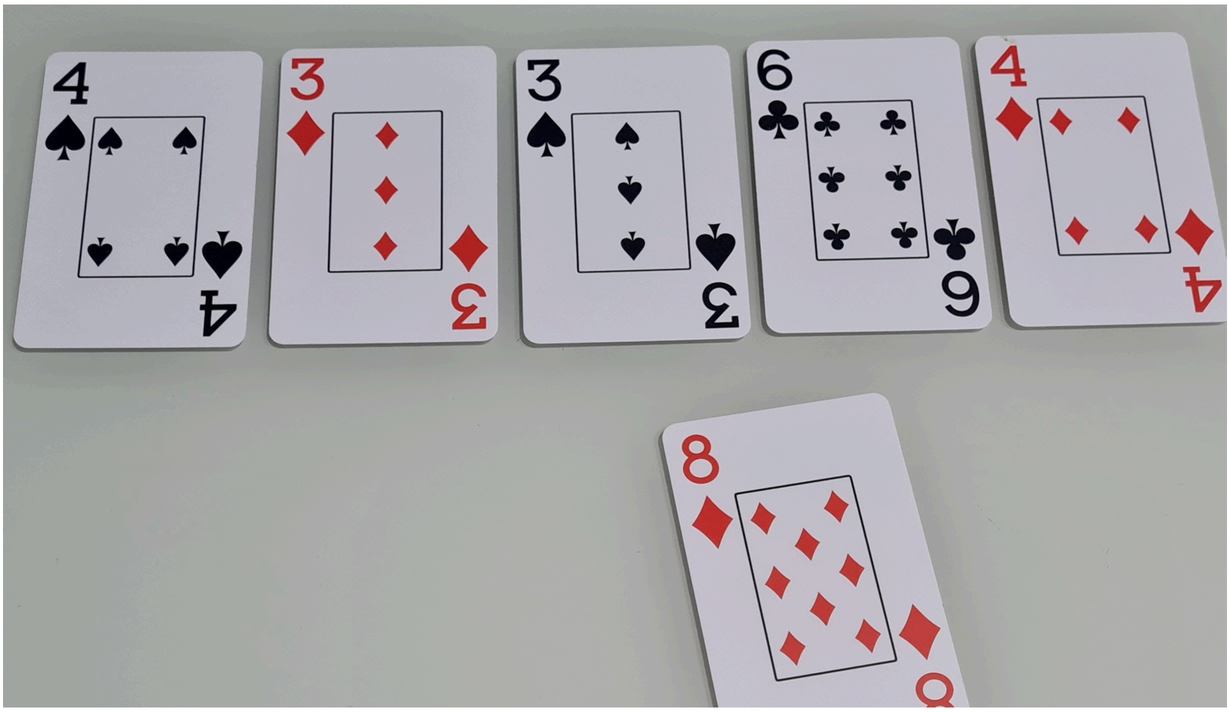


Figura 4 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

4.3 Cartas restantes na mesa ao final de uma partida e outros aspectos do jogo

Como em uma partida do jogo Escova são utilizadas as cartas de 1 a 10 de um baralho comum, a soma de todas essas cartas é dada por:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{10} k = 220.$$

Durante a partida, os jogadores retiram grupos de cartas cuja soma é igual a 15. Essa soma 15 é obtida quando o jogador dispõe de uma das combinações de cartas, apresentadas na tabela do Apêndice H desta dissertação. Esta tabela apresenta também o número de combinações possíveis para cada configuração.

Como 220 não é múltiplo de 15, não é possível esgotar todas as cartas da mesa ao final de uma partida. Nesse sentido, em uma dinâmica em sala de aula, debater com os estudantes as possíveis somas das cartas que sobraram na mesa é interessante para estimular o raciocínio aritmético.

Verificamos que a menor soma possível com as cartas restantes é 10. E isso ocorre precisamente quando os jogadores retiram 14 grupos cuja soma é 15, pois $220 = 14 \cdot 15 + 10$. Outras possíbilidades de restos são da forma $10 + 15k$, com $k \in \mathbb{N}$, como 25 (quando os jogadores retiram 13 grupos de cartas), 40 (quando os jogadores retiram 12 grupos de cartas), e assim sucessivamente.

A seguir, discutiremos alguns aspectos de análise combinatória que eventualmente poderiam ser discutidos com os estudantes em cada uma dessas possibilidades.

- **Caso 1: soma das cartas que restam ao final da partida é 10.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 10, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão apresentadas no Apêndice A desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos com aquelas em que é possível obter a soma 10 usando apenas uma carta do baralho, depois duas, três, e assim por diante, até o limite de 7 cartas, visto que é impossível obter a soma 10 usando mais que 7 cartas do baralho.

  O número de possibilidades de cada combinação ocorrer é calculado através da generalização do princípio básico da contagem. Para isso, lembremos que o baralho deste jogo contém quatro cartas de cada número (ouros, copas, espadas e paus).

  Dessa forma, ao se escolher uma carta de um certo número teremos $C_{4,1} = 4$ possibilidades de escolhas diferentes para ela; ao se escolher duas cartas de um mesmo número teremos $C_{4,2} = 6$ possibilidades diferentes de escolhas para essas duas cartas; ao se escolher três cartas de um mesmo número teremos $C_{4,3} = 4$ possibilidades de escolhas diferentes para essas três cartas; e finalmente se escolhermos todas as quatro cartas de um mesmo número teremos $C_{4,4} = 1$ possibilidade.

  Por exemplo, uma combinação possível usando duas cartas em que a soma é igual a 10 é usar uma carta 6 e uma carta 4. Nesse contexto, existem $C_{4,1} \cdot C_{4,1} = 4 \cdot 4 = 16$ possibilidades de isso ocorrer. Por outro lado, se escolhermos duas cartas 5, teremos $C_{4,2} = 6$ possibilidades.

  Conforme a verificação caso a caso que fizemos no Apêndice A, existem 1.702 maneiras diferentes da soma das cartas restantes na mesma ser igual a 10.

- **Caso 2: soma das cartas que restam ao final da partida é 25.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 25, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão registradas no Apêndice B desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos listando aquelas em que é possível obter a soma 25 usando três cartas do baralho, depois quatro, e assim por diante, até o limite de 6 cartas, visto que é impossível obter a soma 25 usando mais que 6 cartas do baralho. Cabe destacar aqui que, pelas regras do jogo, não podemos ter cartas cuja soma é 15 entre as combinações consideradas.

Conforme pode ser verificado no Apêndice B, existem 4.376 maneiras diferentes da soma das cartas restantes ser igual a 25.

- **Caso 3: soma das cartas que restam ao final da partida é 40.**

  Da mesma forma, as combinações possíveis para que a soma das cartas restantes após a partida seja igual a 40, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer, estão apresentadas no Apêndice C desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos listando aquelas em que é possível obter a soma 40 usando quatro cartas do baralho, depois cinco, e assim por diante, até o limite de 10 cartas, visto que é impossível obter a soma 40 usando mais que 10 cartas do baralho. Mais uma vez, tomamos o cuidado de não incluir entre as combinações cartas cuja soma seja igual a 15.

  Conforme as contas registradas no Apêndice C, existem 55.509 maneiras diferentes da soma das cartas restantes ser igual a 40.

- **Caso 4: soma das cartas que restam ao final da partida é 55.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 55, e também o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão apresentadas no Apêndice D desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações, iniciamos com aquelas em que é possível obter a soma 55 usando seis cartas do baralho, depois sete, e assim por diante, até o limite de 10 cartas, visto que é impossível obter a soma 55 usando mais que 10 cartas do baralho. Cabe destacar aqui que, pelas regras do jogo Escova, não incluímos entre as combinações cartas cuja soma seja igual a 15.

  Conforme pode ser verificado no Apêndice D, existem 17.980 maneiras diferentes da soma das cartas restantes ser igual a 55.

- **Caso 5: soma das cartas que restam ao final da partida é 70.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 70, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão apresentadas nas tabelas apresentadas no Apêndice E desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos listando aquelas em que é possível obter a soma 70 usando oito cartas do baralho, depois nove, e assim por diante, até o limite de 13 cartas, visto que é impossível obter a soma 70 usando mais que 13 cartas do baralho. Cabe destacar aqui que, entre as cartas da combinação, não pode ter cartas cuja soma seja igual a 15.

Conforme pode ser verificado no Apêndice E, existem 34.350 maneiras diferentes de a soma das cartas restantes ser igual a 70.

- **Caso 6: soma das cartas que restam ao final da partida é 85.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 85, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão apresentadas no Apêndice F desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos listando aquelas em que é possível obter a soma 85 usando dez cartas do baralho, depois onze, e assim por diante, até o limite de 13 cartas, visto que é impossível obter a soma 85 usando mais que 13 cartas do baralho. Cabe destacar aqui que, entre as cartas da combinação, não pode ter cartas cuja soma seja igual a 15.

  Conforme pode ser verificado no Apêndice F, existem 5.140 maneiras diferentes de a soma das cartas restantes ser igual a 85.

- **Caso 7: soma das cartas que restam ao final da partida é 100.**

  As combinações possíveis para que a soma das cartas restantes seja igual a 100, bem como o número de possibilidades de cada combinação ocorrer estão apresentadas no Apêndice G desta dissertação.

  Para listar todas essas combinações começamos listando aquelas em que é possível obter a soma 100 usando doze cartas do baralho e depois treze, visto que é impossível obter a soma 100 usando mais que 13 cartas do baralho. Cabe destacar aqui que, entre as cartas da combinação, não pode ter cartas cuja soma seja igual a 15.

  Conforme pode ser verificado no Apêndice G, existem 250 maneiras diferentes de a soma das cartas restantes ser igual a 100.

- **Caso 8: soma das cartas que restam ao final da partida é 115.**

  Finalmente, vamos abordar o último caso da soma das cartas restantes após a partida. Vale considerar que a única possibilidade da soma em questão ser igual a 115 é quando restam quatro cartas de 10, três cartas de 9, quatro cartas de 8 e quatro cartas de 4, situação esta que pode ocorrer de $C_{4,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,4} \cdot C_{4,4} = 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ maneiras diferentes.

Finalmente, vamos verificar que **não é possível obter a soma 130 com as cartas restantes do jogo**. De fato, para obtermos somas maiores precisamos que sobrem cartas com numeração maior.

Suponha inicialmente que sobrem cartas com os números 10, 9, 8 e 4. Então nesse caso, não poderá sobrar cartas 7, pois $(8 + 7 = 15)$, nem 6, pois $(9 + 6 = 15)$, nem 5 pois $(10 + 5 = 15)$, nem 3, pois $(8 + 4 + 3 = 15)$, nem 2, pois $(9 + 4 + 2 = 15)$ e nem 1, pois $(10 + 4 + 1 = 15)$.

Assim, mesmo que sobrem quatro cartas com o número 10, quatro cartas com o número 9, quatro cartas com o número 8 e quatro cartas com o número 4, a soma será apenas igual a 124, que é uma soma impossível de se obter, pelas razões que citamos anteriormente.

Da mesma forma, suponha que sobrem cartas com os números 10, 9, 7, 4 e 3. Nesse caso, não podem sobrar cartas 8, pois $(8 + 7 = 15)$, nem 6, pois $(9 + 6 = 15)$, nem 5, pois $(10 + 5 = 15)$, nem 2, pois $(10 + 3 + 2 = 15)$, e nem 1, pois $(10 + 4 + 1 = 15)$. Observe também que, nesse caso, não poderá sobrar duas cartas com o número 4, pois $(7 + 4 + 4 = 15)$, e nem duas cartas com o número 3, pois $(9 + 3 + 3 = 15)$.

Assim, mesmo que sobrem quatro cartas de 10, quatro cartas de 9, quatro cartas de 7 uma carta de 4 e uma carta de 3, a soma será apenas igual a 111, que também é uma soma impossível de se obter no jogo Escova.

Portanto, concluímos que a maior soma possível ocorre quando sobram quatro cartas de 10, três cartas de 9, quatro cartas de 8 e quatro cartas de 4, que é a configuração que apresentamos para a soma 115.

Vimos no início deste capítulo que o jogo Escova inicia com nenhuma, uma, duas, três ou quatro cartas do monte que são abertas e colocadas sobre a mesa, conforme combinado entre os jogadores antes de iniciar a partida. Seguindo a dinâmica do jogo, quantas cartas no máximo, podem ficar na mesa durante o jogo sem que dê a soma 15?

O número máximo de cartas vai ocorrer quando na mesa ficarem todas as cartas pares do baralho: quatro cartas de 2, quatro cartas de 4, quatro cartas de 6, quatro cartas de 8 e quatro cartas de 10, ou seja, 20 cartas.

Já a maior quantidade de cartas que pode restar na mesa após o término de uma partida é 17 cartas. Esta situação ocorre quando restam as seguintes cartas (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10), cuja soma é 100.

4.4 Algumas probabilidades interessantes

O jogo Escova propicia situações nas quais é possível discutir com os estudantes algumas probabilidades interessantes. Nesse contexto, ganha especial importância a noção de probabilidade condicional, conforme exemplos a seguir.

Exemplo 4.1. *Qual a probabilidade condicional de que o primeiro jogador consiga uma escova de mão (em sua primeira jogada), sabendo que as 4 cartas colocadas sobre a mesa são as apresentadas em cada item abaixo?*

A) 4 copas, 3 de ouros, 3 de paus, 2 de copas

Figura 5 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Nesse caso, denotamos por A o evento em que ocorre uma escova com 5 cartas e denotamos por B o evento em que as cartas abertas sobre a mesa são: 4 de copas, 3 de ouros, 3 de paus e 2 de copas.

Dessa forma, o evento $A \cap B$ é o evento em que ocorre uma escova com 5 cartas, sendo que as quatro primeiras cartas são o 4 de copas, 3 de ouros, 3 de paus e o 2 de copas, conforme mostra a Figura 5. Para que isso ocorra, precisamos necessariamente que a quinta carta seja um 3 de espadas ou um 3 de copas. Temos assim as seguintes probabilidades:

$$P(B) = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{37}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{2}{36}.$$

Segue, portanto, pela fórmula que apresentamos na Seção 3.4, que a probabilidade condicional do primeiro jogador conseguir uma escova na sua primeira jogada, sabendo que as 4 cartas colocadas sobre a mesa são as descritas acima é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{2}{36}}{\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{37}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Vale considerar que esse mesmo valor pode ser encontrado quando reduzimos o nosso espaço amostral depois de sabermos as quatro cartas colocadas sobre a mesa. Nesse caso, como restam apenas duas cartas com o número 3 entre 36 possíveis, a probabilidade procurada é $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

B) 5 de ouros, 1 de espadas, 2 de copas, 4 de copas

Figura 6 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Nesse caso, o jogador precisa que a carta retirada do monte tenha o número 3. Como na mesa não temos nenhum 3, existem quatro cartas favoráveis em um total de 36 cartas do monte. Portanto, a probabilidade condicional desejada é $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

C) 8 de copas, 6 de espadas, 3 de espadas, 4 de ouros

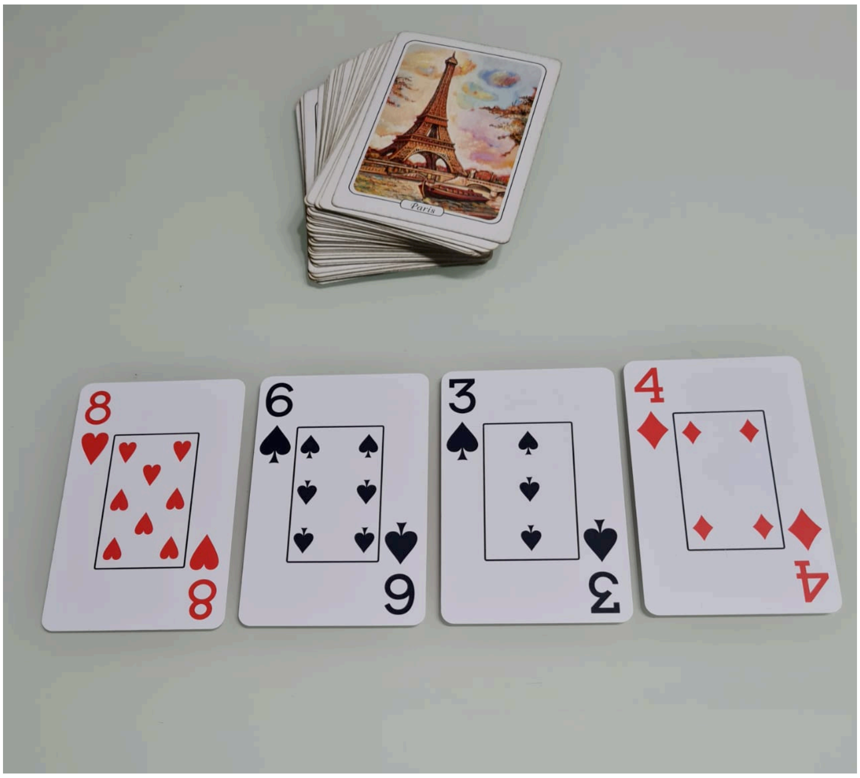


Figura 7 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Nesse caso, claramente a probabilidade condicional do jogador fazer uma escova é zero, visto que a soma das cartas sobre a mesa é igual a 21. Assim, é impossível obter uma soma 15 com uma carta do monte e usando todas as cartas que estão sobre a mesa.

D) 3 de ouros, 3 de espadas, 3 de copas, 3 de paus

Figura 8 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Aqui a probabilidade também é zero, pois o jogador precisa de uma carta com o número 3, mas no monte não há nenhuma dessas cartas, pois todas estão sobre a mesa.

Uma outra situação interessante que pode ser discutida com os estudantes é a probabilidade de obter uma soma 15 (não necessariamente uma escova) usando as cartas abertas na mesa logo na primeira jogada.

Exemplo 4.2. *Qual a probabilidade condicional de que o primeiro jogador consiga uma combinação tal que a soma das cartas seja 15 em sua primeira jogada sabendo que as 4 cartas abertas sobre a mesa são: 2 de ouros, 10 de paus, 4 de copas e 7 de espadas?*

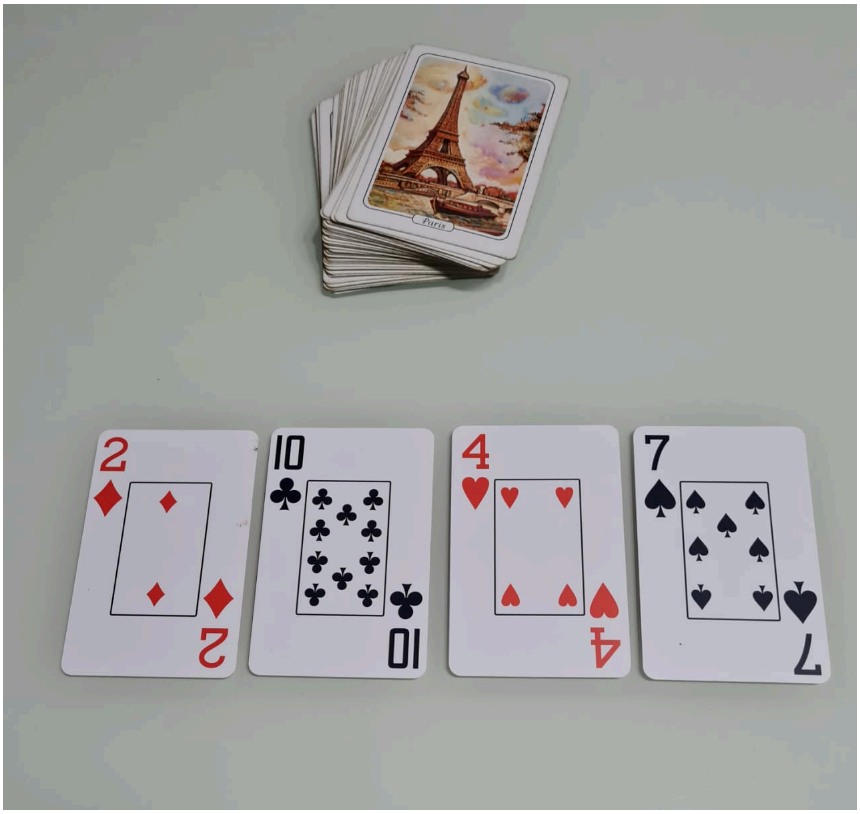


Figura 9 – Exemplo de possível situação durante o Jogo Escova
Fonte: da autora (2021)

Inicialmente, listamos as diversas possibilidades de obter uma soma 15 com uma carta tirada do monte, dada a configuração inicial de cartas citada acima. São elas:

- uma carta com o número 5 (10+5);
- uma carta com o número 3 (2+10+3);
- uma carta com o número 9 (2+4+9);
- uma carta com o número 2 (2+4+7+2);
- uma carta com o número 4 (4+7+4);
- uma carta com o número 1 (10+4+1);
- uma carta com o número 8 (7+8).

Como no monte ainda temos quatro cartas 5, quatro cartas 3, quatro cartas 9, três cartas 2, três cartas 4, quatro cartas 1 e quatro cartas de 8, a probabilidade desejada é:

$$P(A|B) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

No próximo capítulo, vamos apresentar alguns resultados de simulações computacionais que fizemos do jogo Escova, que nos possibilitam estimar probabilidades mais complexas, via lei dos grandes números.

Vale ressaltar, mais uma vez, que o objetivo principal da autora ao criar o jogo Escova foi ajudar no desenvolvimento por parte dos estudantes de habilidades e competências relacionadas à contagem e teoria de probabilidades. Neste contexto, apresentaremos, no último capítulo desta dissertação, uma proposta concreta de aplicação do jogo em sala de aula, com estudantes do Ensino Médio.

5 Simulação computacional do Jogo Escova

Como discutimos anteriormente, a Teoria das Probabilidades está envolvida na observação do comportamento de fenômenos naturais regidos pela incerteza e busca maneiras de estimar percentualmente as chances que um determinado evento tem de ocorrer (MIRANDA; PAULA, 2020).

Vimos também que quando os elementos do espaço amostral são equiprováveis, podemos calcular a probabilidade de um evento E usando a relação a seguir:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos em } E}{\text{número de elementos de } S}.$$

Entretanto, a medida em que os fenômenos aleatórios crescem em complexidade, nem sempre conseguimos calcular essas quantidades. Surge então a necessidade de uma outra abordagem, capaz de resolver com eficiência esse impasse. Nesse contexto, a solução é apresentada como definição frequentista de probabilidade (MIRANDA; PAULA, 2020).

A ideia desta abordagem é repetir o experimento aleatório uma grande quantidade de vezes, exatamente sobre as mesmas condições, aguardando obter resultados diferentes, mas com uma certa regularidade. Essa regularidade pode ser traduzida em termos da frequência relativa da ocorrência de um evento de interesse. A justificativa teórica para este procedimento é um importante resultado da teoria de probabilidades, denominado Lei dos Grandes Números (MIRANDA; PAULA, 2020).

Nesse contexto, segundo a Lei dos Grandes Números, a medida em que repetimos um experimento aleatório, o valor da frequência relativa de um determinado evento converge para o valor numérico de sua probabilidade. Assim, com uma quantidade cada vez maior de observações, obtemos uma estimativa cada vez mais precisa da probabilidade desejada. Para o leitor interessado em mais detalhes teóricos, demonstração da Lei dos Grandes Números, bem como estimativas de erro, sugerimos a leitura de (ROSS, 2010).

É a Lei dos Grandes Números que nos dá o embasamento teórico para estimar probabilidades de vários aspectos do jogo Escova via simulações computacionais. Com o uso do programa MATLAB e a colaboração do Professor Dr. Leonardo Silveira Borges, foi possível implementar computacionalmente o jogo Escova. Após uma simulação de 100.000 jogos entre dois jogadores, foram obtidos os resultados que discutimos nas próximas seções deste Capítulo.

5.1 Soma das cartas restantes na mesa

No Capítulo 4 desta dissertação, discutimos as possíveis somas dos números das cartas sobre a mesa ao final de uma partida do jogo Escova. Usando análise combinatória, obtemos os seguintes resultados:

- A soma 10 pode ocorrer de 1.702 maneiras diferentes;
- A soma 25 pode ocorrer de 4.376 maneiras diferentes;
- A soma 40 pode ocorrer de 55.509 maneiras diferentes;
- A soma 55 pode ocorrer de 17.980 maneiras diferentes;
- A soma 70 pode ocorrer de 34.350 maneiras diferentes;
- A soma 85 pode ocorrer de 5.140 maneiras diferentes;
- A soma 100 pode ocorrer de 250 maneiras diferentes;
- A soma 115 pode ocorrer somente de 4 maneiras diferentes.

Mas qual a probabilidade aproximada de ocorrer de fato cada uma destas somas? Essa pergunta pode ser respondida pelas simulações realizadas.

Nesse sentido, após a simulação de 100.000 partidas, verificamos que a soma 10 ocorreu 64.136 vezes; a soma 25 ocorreu 16.494 vezes; a soma 40 ocorreu 17.498 vezes; a soma 55 ocorreu 1.732 vezes; a soma 70 ocorreu 135 vezes e a soma 85 apenas 5 vezes, conforme pode ser verificado na Figura 10.

É interessante constatar que mesmo tendo menos combinações possíveis que somam 10, esta é a soma mais frequente das cartas restantes na mesa ao final de uma partida do jogo Escova.

Podemos explicar esse fato considerando o próprio objetivo do jogo, que é formar o maior número possível de somas 15, retirando as cartas respectivas da mesa. Portanto, é natural que sobrem poucas cartas na mesa ao final, ou seja, é pouco provável obter somas maiores com as cartas restantes. A soma 70, por exemplo, precisa de um mínimo de 8 cartas para ocorrer.

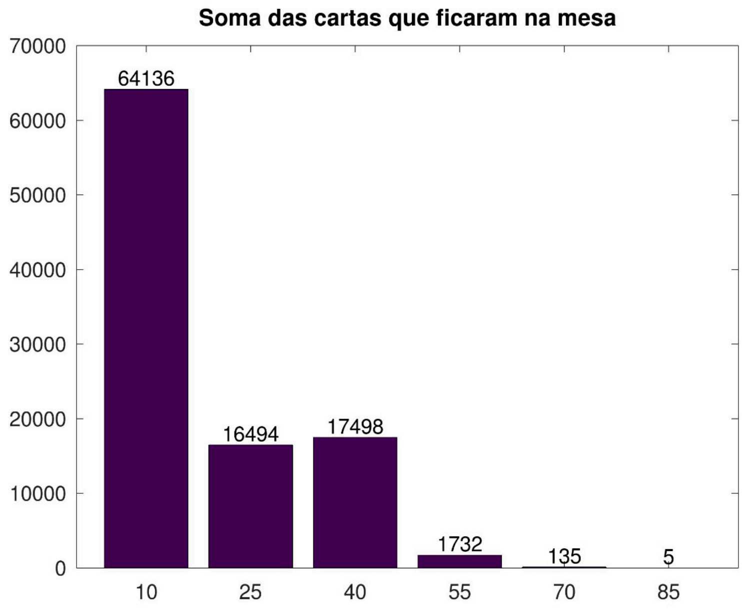


Figura 10 – Simulação da soma das cartas restantes ao final do jogo.
Fonte: elaborado pela autora (2021)

5.2 Quantidade de cartas restantes na mesa

Pelos argumentos que expomos anteriormente, a tendência é que sobrem poucas cartas na mesa no final de uma partida. De fato, essa tendência foi confirmada nas simulações, conforme Figura 11.

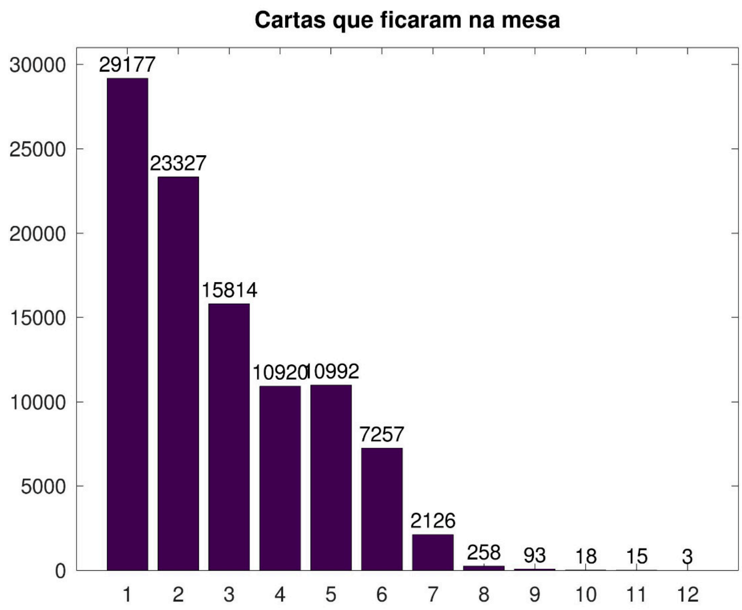


Figura 11 – Simulação da quantidade de cartas na mesa ao final de uma partida.
Fonte: elaborado pela autora (2021)

Veja que em praticamente um terço das partidas sobra apenas uma carta, ou seja, uma carta com o número 10. Ademais, em pouco mais da metade das partidas, sobram 2, 3 , 4 ou 5 cartas. Sobrar mais de 7 cartas na mesa é algo bem raro: menos de um por cento, e em apenas 3 simulações sobraram 12 cartas na mesa.

5.3 Quantidade de escovas obtidas em cada jogo

Um dos objetivos iniciais de nossa pesquisa era estimar quantas escovas podiam ser obtidas durante um jogo. E mais uma vez, as respostas mais prováveis para esta indagação podem ser obtidas via simulação computacional. Após a simulação das 100.000 partidas, verificamos que:

- Em 23.789 jogos não ocorreu nenhuma escova.
- Já em 32.252 jogos ocorreu apenas uma escova, ou seja, praticamente em $\frac{1}{3}$ dos jogos um dos jogadores obteve uma escova.
- Em 24.008 jogos foram obtidas duas escovas durante o jogo.
- A quantidade de três escovas foi obtida em 12.594 jogos.
- Obter quatro ou mais escovas durante uma partida é bem mais raro ocorrer. Em apenas 1.706 jogos, foram obtidos 5 escovas.

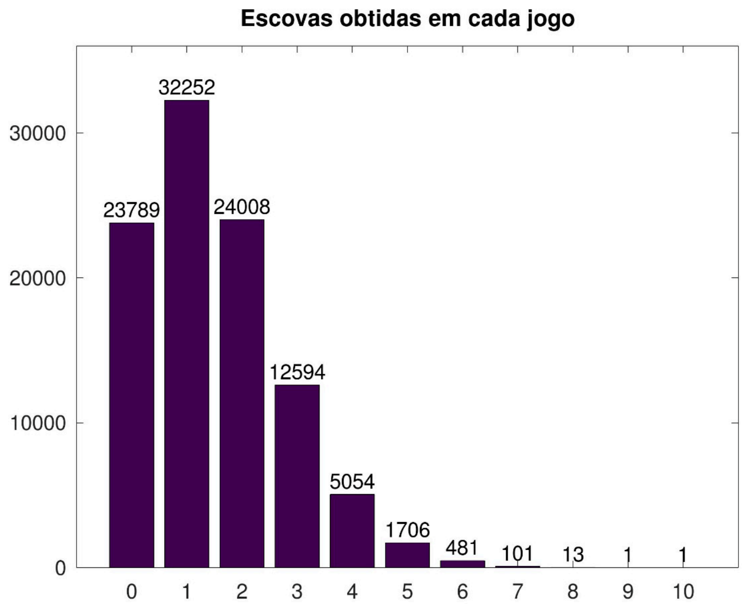


Figura 12 – Simulação da quantidade de escovas obtidas em cada jogo.
Fonte: elaborado pela autora (2021)

5.4 Pontuação do vencedor

Lembrando o que vimos no capítulo anterior, contam pontuação no jogo Escova: cada escova realizada; o maior número de cartas ao final da partida; o maior número de cartas de ouros ao final da partida; o 7 de ouros; quatro cartas de mesmo número.

Depois das 100.000 simulações realizadas, verificamos que em 26.847 partidas o vencedor marcou 4 pontos, ou ambos os jogadores marcaram 4 pontos (no caso de empate).

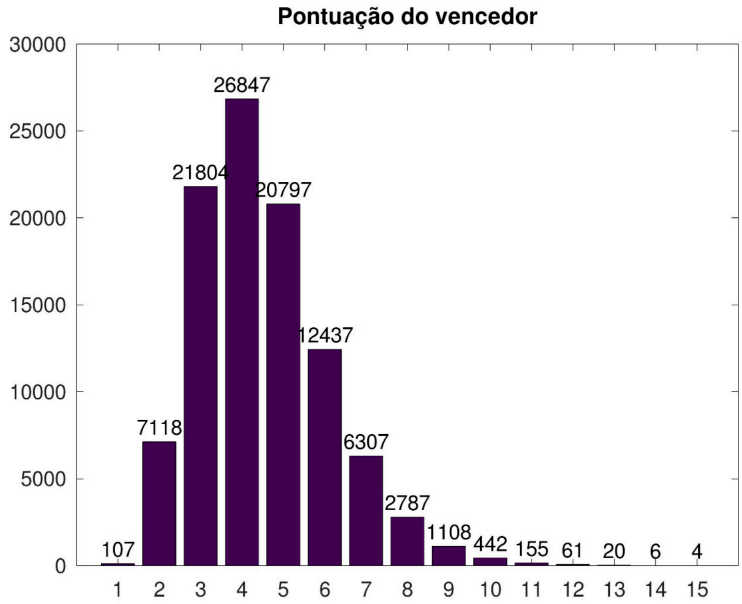


Figura 13 – Simulação da pontuação do vencedor.
Fonte: elaborado pela autora (2021)

Um resultado curioso foi a ocorrência de 107 simulações em que houve empate e cada um dos jogadores marcou somente 1 ponto. Um possível cenário em que esse resultado pouco provável pode acontecer é o seguinte: os jogadores obtiveram o mesmo número de cartas de ouros, não fizeram escovas, e não obtiveram quatro cartas de mesmo número. Além disso, um deles deve ter obtido mais cartas e o outro conseguido o 7 de ouros.

Outro resultado de certa forma já esperado foi o pequeno número de simulações em que o vencedor obteve uma pontuação maior ou igual a 10 pontos, com probabilidade menor que 1%. Vale ressaltar também que em torno de 70% das simulações o vencedor marca 3, 4 ou 5 pontos.

5.5 Maior quantidade de cartas na mesa durante o jogo

Um dos objetivos iniciais da pesquisa era estimar qual a maior quantidade de cartas que ficam abertas na mesa em algum momento do jogo. Como discutimos no capítulo anterior, em uma situação extrema, poderíamos ter 20 cartas abertas na mesa: quatro cartas de número 2, quatro cartas de número 4, quatro cartas de número 6, quatro cartas de número 8 e quatro cartas de número 10.

Em nenhuma das 100.000 simulações essa situação ocorreu. Conforme a Figura 14, o número máximo de cartas que ficaram na mesa foi 16, situação que ocorreu em apenas 2 simulações. Ademais, em mais de 65% dos jogos, o número máximo de cartas abertas na mesa durante todo o jogo foi 6 ou 7 cartas.

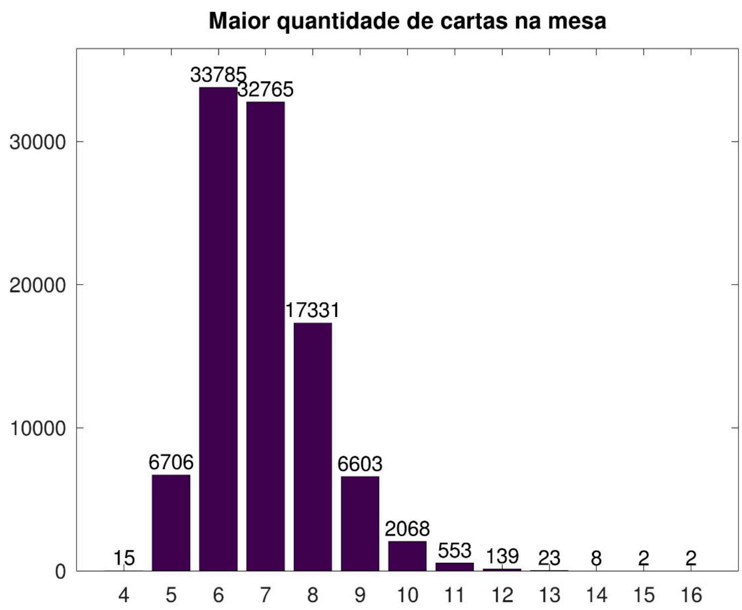


Figura 14 – Simulação da maior quantidade de cartas na mesa durante o jogo
Fonte: elaborado pela autora (2021)

Outra situação que destacamos é que em 15 simulações ficaram abertas na mesa um máximo de quatro cartas durante todo o jogo, uma situação muito favorável à ocorrência de escovas.

5.6 Número de vitórias em função do número inicial de cartas

Conforme vimos no capítulo anterior, no início do jogo decide-se de comum acordo quantas cartas serão abertas sobre a mesa inicialmente. Uma questão interessante é a influência desse número inicial de cartas nas probabilidades de vitória dos jogadores 1 e 2.

Para obter estimativas, realizamos 10.000 simulações para cada possível cenário: 0, 1, 2, 3 ou 4 cartas abertas sobre a mesa. O resultado das simulações pode ser verificado na Figura 15, que apresenta um gráfico contendo o número de vitórias de cada jogador, bem como o número de empates, em função do número inicial de cartas.

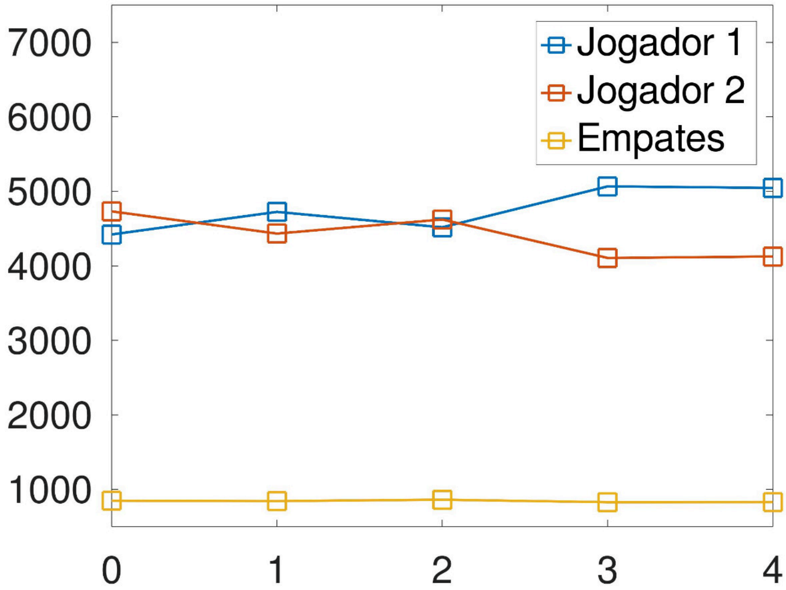


Figura 15 – Número de vitórias em função da quantidade de cartas no início do jogo.
Fonte: elaborado pela autora (2021)

Para um melhor comparativo, apresentamos os mesmos dados em forma de tabela, obtidos a partir das 10.000 simulações realizadas.

Tabela 2 – Número de vitórias em função da quantidade de cartas no início do jogo.

Número de cartas sobre a mesa no começo do jogo	Vitórias do jogador 1	Vitórias do jogador 2	Empates
0	4.421	4.731	848
1	4.724	4.433	843
2	4.517	4.622	861
3	5.066	4.106	828
4	5.046	4.125	829

Fonte: elaborada pelo autora (2021).

Analisando os resultados apresentados no gráfico e tabela acima, destacamos os seguintes pontos:

- Quando não é colocada nenhuma carta sobre a mesa, ficam 40 cartas no monte, e nesse caso o jogador 2 leva uma certa vantagem. São 4.731 vitórias do jogador 2 contra 4.421 vitórias do jogador 1.

De certa forma, essa situação já era esperada porque, pois independentemente da carta que o jogador 1 tire do monte, é impossível ele pontuar na primeira rodada, já que não é possível obter a soma 15 com apenas uma carta. Por outro lado, a probabilidade do jogador 2 pontuar em sua primeira jogada, obtendo uma escova, é estritamente positiva, e pode ser expressa por:

$$P = \frac{48}{C_{40,2}} = \frac{48}{780} = \frac{4}{65},$$

uma vez que existem 48 possibilidades de ser obter a soma 15 usando 2 cartas do baralho (veja apêndice H).

- Quando é colocada uma carta sobre a mesa é o jogador 1 que leva vantagem, pois este jogador tem probabilidade estritamente positiva de pontuar na primeira jogada. De fato, nessa situação obtemos 4.724 vitórias do jogador 1 contra 4.433 vitórias do jogador 2, ou seja, uma vantagem de aproximadamente 7%.

- Quando são colocadas 2 cartas sobre a mesa no início da partida, o número de vitórias do jogador 1 praticamente é igual ao número de vitórias do jogador 2. De fato, aqui o jogo é bastante equilibrado, pois é neste cenário que acontecem o maior número de empates.

- Na situação em que são colocadas 3 cartas sobre a mesa no início do jogo, observamos 5.066 vitórias do jogador 1 e 4.106 vitórias do jogador 2. Aqui claramente temos um favorecimento do primeiro jogador, que possui uma chance de vitória 23% maior.

  De fato, esta situação já era esperada, pois além do jogador 1 comprar 19 cartas do monte contra 18 cartas do jogador 2, em sua primeira jogada o jogador 1 tem as seguintes possibilidades:

  i) conseguir uma escova com quatro cartas;

  Nesse caso, temos $C_{40,4} = 91.390$ possíveis conjuntos de quatro primeiras cartas. Destas, existem 3.120 maneiras de se obter a soma 15 com quatro cartas, conforme pode ser verificado no Apêndice H desta dissertação. Sendo assim, a probabilidade do primeiro jogador obter uma escova na sua primeira jogada é dada por $\frac{3.120}{91.390} = \frac{24}{703}$.

  ii) conseguir a soma 15 com três cartas;

  Considerando que existem 740 maneiras diferentes de se obter a soma 15 com três cartas e que $C_{40,3} = 9.880$, a probabilidade do primeiro jogador conseguir a soma 15 com três cartas logo na primeira jogada é $\frac{740}{9880} = \frac{37}{494}$.

iii) conseguir a soma 15 com 2 cartas.

Neste caso, veja que existem 48 maneiras diferentes de se obter a soma 15 com duas cartas e que $C_{40,2} = 780$. Assim, a probabilidade do primeiro jogador conseguir a soma 15 com duas cartas na primeira jogada é $\dfrac{48}{780} = \dfrac{4}{65}$.

Dessa forma, somando as probabilidades citadas acima, concluímos que a probabilidade de o jogador 1 pontuar na primeira rodada é aproximadamente 17%, o que explica o favorecimento deste jogador quando são abertas três cartas sobre a mesa no início da partida.

- Quando são colocadas inicialmente quatro cartas sobre a mesa, mais uma vez as chances do jogador 1 vencer a partida são significativamente maiores. Nas simulações, obtemos 5046 vitórias do jogador 1 contra 4125 vitórias do jogador 2 neste cenário. Destacamos que esse resultado ocorre em função das chances iniciais do primeiro jogador, que tem as seguintes possibilidades:

i) conseguir uma escova com cinco cartas;

Nesse caso, temos $C_{40,5} = 658.008$ possíveis conjuntos de cinco primeiras cartas. Destes, existem 5532 maneiras de se obter a soma 15 com cinco cartas, conforme pode ser verificado no Apêndice H desta dissertação. Assim, a probabilidade do jogador 1 obter uma escova na sua primeira jogada é $\dfrac{5.532}{658.088} = \dfrac{1.383}{164.522}$.

ii) conseguir a soma 15 usando quatro cartas;

Considerando que existem 3.120 maneiras diferentes de se obter a soma 15 com quatro cartas e que $C_{40,4} = 91.390$, a probabilidade do primeiro jogador conseguir a soma 15 com quatro cartas na primeira jogada é $\dfrac{3.120}{91.390} = \dfrac{24}{703}$.

iii) conseguir a soma 15 usando três cartas;

Considerando que existem 740 maneiras diferentes de se obter a soma 15 com três cartas e que $C_{40,3} = 9.880$, a probabilidade do primeiro jogador conseguir a soma 15 com três cartas na primeira jogada é $\dfrac{740}{9.880} = \dfrac{13}{494}$.

iv) conseguir a soma 15 usando duas cartas.

Considerando que existem 48 maneiras diferentes de se obter a soma 15 com duas cartas e que $C_{40,2} = 780$, a probabilidade do primeiro jogador conseguir a soma 15 com duas cartas na primeira jogada é $\dfrac{48}{780} = \dfrac{4}{65}$.

Dessa forma, somando as probabilidades citadas acima, podemos concluir que a probabilidade de o jogador 1 obter uma vantagem em sua primeira jogada é aproximadamente 18%, o que explica o seu favorecimento quando são abertas quatro cartas sobre a mesa no início da partida.

Finalmente, vale considerar também que, independentemente do número de cartas colocadas sobre a mesa no início do jogo, o número de empates permaneceu praticamente o mesmo, variando entre 828 e 861, dentre as 10.000 simulações que realizamos em cada um dos cenários correspondentes.

No próximo capítulo vamos apresentar uma proposta concreta de aplicação do jogo Escova em sala de aula com estudantes do Ensino Médio, tendo como pano de fundo conteúdos de análise combinatória e probabilidade.

6 Uma proposta de aplicação prática do Jogo Escova no Ensino Médio

Neste capítulo, pretendemos desenvolver uma proposta de aplicação do jogo Escova no Ensino Médio. Resumidamente, nossa proposta consiste em trabalhar os pré-requisitos necessários, e em seguida aplicar o jogo Escova em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, discutindo com os alunos os aspectos matemáticos do jogo.

A ideia inicial era aplicar o jogo com os alunos numa escola da rede estadual de Santa Catarina, mas em razão da pandemia e suspensão das aulas presenciais, resolvemos fazer uma discussão mais geral.

Nossa preferência por uma turma do 3º ano do Ensino Médio deve-se ao fato dos conteúdos e habilidades necessárias para a realização das atividades serem contempladas na Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina para este ano letivo. Nesse sentido, espera-se que os alunos do 3º ano do Ensino Médio já tenham estudado os conteúdos de análise combinatória e probabilidade, possibilitando que a interação com o experimento seja bastante significativa.

Para que o desempenho dos alunos durante o experimento seja o melhor possível, elaboramos duas apresentações em PowerPoint: o primeiro sobre análise combinatória, abordando os conceitos do princípio fundamental da contagem, arranjos e permutações simples, permutações com repetição e combinações simples. A outra apresentação versa sobre teoria de probabilidades, abordando os conceitos de espaço amostral, evento, probabilidade e probabilidade condicional. Os slides de cada apresentação encontram-se disponíveis nos Apêndices I e J desta dissertação.

A ideia é que esses slides ajudem na discussão prévia desses assuntos e, por meio de cada um deles, os conceitos associados sejam apresentados e eventualmente aprofundados. Os exemplos, a medida em que forem apresentados, devem ser solucionados com a participação dos alunos e intermediação do professor. Sugerimos ainda a utilização de **duas aulas de 45 minutos**, em dias diferentes, para a discussão dos conteúdos.

Dando sequência à proposta de trabalho, a etapa seguinte é a apresentação do jogo Escova para os alunos, com as regras, critérios de pontuação, bem como algumas estratégias do mesmo. Para apresentar o jogo aos estudantes, sugerimos o uso de outra apresentação, cujos slides encontram-se no Apêndice K desta dissertação. Para esta etapa, sugerimos a utilização de **uma aula de 45 minutos**.

Em seguida, passamos à implementação do jogo entre os alunos da turma. Nesta etapa, sugerimos a divisão da turma em duplas, entregando a cada dupla uma ficha, onde os estudantes farão as anotações de cada partida disputada. Um possível modelo desta ficha encontra-se no Apêndice L desta dissertação. Para a implementação, sugerimos a utilização de **uma aula de 45 minutos** para que os estudantes possam jogar um número significativo de partidas.

Finalmente, para responder o questionário, fazer os exercícios propostos pelo professor, discutir, avaliar e fazer as considerações finais dos resultados obtidos durante os jogos, sugerimos a utilização de **duas aulas de 45 minutos**.

Portanto, de acordo com o exposto, entendemos que o ideal é disponibilizar seis aulas de 45 minutos para a implementação desta proposta. Segue abaixo tabela com uma sugestão de cronograma:

Número de aulas e duração	**Conteúdo de cada aula**
Uma aula de 45 minutos	Apresentação dos slides sobre Análise Combinatória, com discussão dos exemplos respectivos.
Uma aula de 45 minutos	Apresentação dos slides sobre Probabilidade, com discussão dos exemplos respectivos.
Uma aula de 45 minutos	Apresentação do jogo Escova com suas regras, critérios de pontuação e estratégias, seguida de algumas partidas iniciais até que os alunos entendam a dinâmica do jogo.
Uma aula de 45 minutos	Implementação do jogo Escova em duplas de estudantes com as anotações dos resultados de cada partida.
Duas aulas de 45 minutos	Aplicação de um questionário sobre toda a dinâmica, seguida de socialização e discussão das respostas.

Quanto aos materiais necessários para aplicar nossa proposta, destacamos a necessidade de um projetor para a parte teórica dos conteúdos, dos exemplos e das regras do jogo Escova. Também serão utilizados jogos de baralho fichas impressas, para que os estudantes registrem os resultados das partidas.

Em seguida, passamos a apresentar a fundamentação teórica de nossa proposta, estruturada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN, 2000), bem como Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina (PCSC, 2014).

Quanto à necessidade de rever os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidades antes da aplicação do Jogo Escova, vale transcrever (PCN, 2000):

> *"O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões."*

Em nossa proposta, após cada dupla ter jogado diversas vezes o jogo Escova, é importante a aplicação de exercícios com perguntas que instiguem o aluno a pensar coletivamente, complementando a aprendizagem. Após cada pergunta, o aluno vai aprofundando a compreensão dos conteúdos.

O estudante analisa os resultados dos jogos e o professor vai mediando o processo. A partipação ativa do estudante na construção do conhecimento é fundamental e, nesse sentido, cabe ao professor entender que a resolução pode não ser única e a socialização das estratégias pode ser bastante oportuna e enriquecedora. Sobre o tema, nossa proposta vai ao encontro ao texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018):

> *"Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados".*

Ainda conforme (BNCC, 2018), destacamos:

> *"No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos".*

Nossa proposta ajuda a complementar alguns conteúdos de Matemática no Ensino Médio. Destacamos que para algumas atividades envolvendo problemas de contagem, bem como para o cálculo de probabilidades será solicitada a descrição do espaço amostral, eventos e a contagem das possibilidades. Em relação às habilidades previstas em (BNCC, 2018) que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em análise combinatória e probabilidade, destacamos:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios

> multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
>
> (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
>
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Destacamos ainda que os jogos auxiliam na descentralização e na capacidade de se observar algo de outro ponto de vista que não o seu. Essas habilidades são essenciais ao Ensino da Matemática e à resolução de problemas em geral(PIRES, 2016). Além disso, os alunos em geral gostam destas dinâmicas e da interação, verificando se os resultados que obtiveram estão de acordo com os demais colegas. De acordo com a (BNCC, 2018):

> *"Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar-se ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros".*

Na seção a seguir, destacamos alguns questionamentos que o docente responsável pela aplicação da proposta pode trabalhar com os alunos após a realização de algumas partidas do jogo Escova.

6.1 Tópicos para discutir com os estudantes

Após cada dupla ter jogado algumas vezes o jogo Escova, sugerimos que os alunos respondam os questionamentos a seguir. Em um momento posterior, recomendamos a socialização destas respostas, com uma troca de ideias mediada pelo docente.

1. Qual o valor da soma das 40 cartas usadas no jogo Escova?

   Nesta questão os alunos podem usar seu conhecimento prévio em progressão aritmética ou outro método para a resolução.

2. Quais foram os resultados das somas das cartas restantes na mesa ao final de cada partida?

   Aqui esperamos que os alunos apresentem respostas valores que satisfaçam a expressão $10+15k$, em que $k \in \mathbb{N}$. Caso os estudantes apontem algum valor diferente, o docente pode explicar à turma durante a socialização que algum jogador fez uma conta errada durante o jogo.

3. Qual a menor quantidade de cartas que pode restar no final de uma partida do jogo Escova? Em que situação isso acontece? De quantas maneiras isso pode ocorrer?

   Esperamos que os alunos não tenham dificuldades nesta questão, uma vez que é possível sobrar apenas uma carta 10 ao final da partida.

4. Apresente, ao menos, 10 combinações diferentes de como podemos conseguir a soma 15 usando apenas as 40 cartas do baralho.

   Nesta questão, recomendamos que na socialização, um ou dois alunos escrevam as combinações no quadro. E que, após uma mediação por parte do professor se necessário, que essas combinações sejam organizadas da seguinte forma: soma 15 usando duas cartas, soma 15 usando três cartas e assim sucessivamente.

5. Para cada combinação apresentada no item anterior, determinar o número de possibilidades que ela pode ocorrer.

   Dificuldades podem surgir nesta questão, e o professor deve estar atento para saná-las, uma vez que é possível que alguns estudantes não considerem todas as possibilidades de naipes diferentes.

6. No final de uma partida do jogo Escova sempre vão sobrar cartas na mesa. É possível que a soma seja igual a 100? Se for, apresente uma combinação em que isso acontece.

   Recomendamos um tempo maior para a resolução desta questão, que normalmente é feita por tentativa e erro. Se os estudantes tiverem dificuldades, o professor pode sugerir o uso de números maiores nas tentativas.

7. Suponha que as quatro cartas sobre a mesa no início de uma partida do jogo Escova sejam: 5 de copas, 4 de espadas, 2 de ouros, 3 de paus. Qual a probabilidade que o primeiro jogador tem, de fazer uma escova logo no início da partida?

   Nesta questão, espera-se que o aluno chegue a conclusão de que só será feita uma escova se, ele conseguir comprar uma carta que contenha o número 1, de qualquer um dos naipes.

8. Suponha que as quatro cartas sobre a mesa no início de uma partida do jogo Escova sejam: 3 de copas, 8 de espadas, 5 de ouros, 6 de paus. Qual a probabilidade que o primeiro jogador tem, de conseguir a soma 15 nessa situação? Faça uma lista das possibilidades e depois calcule a probabilidade.

   Nesta questão também recomendamos um tempo maior para a resolução, uma vez que deve ser feita uma lista de possibilidades.

Em relação ao último questionamento, destacamos que o docente pode explicar aos alunos que, quando a resolução exige uma listagem muito grande de possibilidades, mas com um certo padrão, é possível usar técnicas que facilitam a resolução. Nesse contexto, vale destacar inclusive a importância da programação e do uso dos computadores para a resolução de problemas que envolvem técnicas de contagem.

Quanto à nossa proposta de aplicação do jogo Escova numa turma do terceiro ano do Ensino Médio, destacamos que as situações-problema que podem ser encontradas durante a aplicação do jogo possibilitam um estudo mais amplo e detalhado dos conteúdos de análise combinatória e probabilidade.

Além disso, essa proposta pode trazer outras contribuições para a melhoria do ensino da Matemática, tais como o desenvolvimento de habilidades de tomada de decisão, rapidez do cálculo mental, organização do pensamento, uso de estratégias, melhora da concentração e da atenção, entre outras. Enfim, são vários os benefícios que a implementação dessa proposta pode trazer aos nossos estudantes do Ensino Médio.

7 Considerações finais

O objetivo principal deste trabalho era adaptar o jogo Escova para o uso didático em sala de aula, colaborando com o cálculo mental de números naturais, suas propriedades operatórias e também com problemas de contagem e de probabilidades condicionais. Conforme vimos nos capítulos anteriores, este jogo pode ser usado como pano de fundo para um estudo mais amplo da análise combinatória e probabilidade, pois são inúmeras as situações que ocorrem durante o jogo e que permitem, por exemplo, explorar problemas de contagem bem como o cálculo de uma probabilidade condicional.

No capítulo sobre análise combinatória, bem como no capítulo sobre noções de probalilidade, relembramos a teoria básica relacionada a esses assuntos e desenvolvemos alguns exemplos sobre as principais técnicas de contagem, alguns deles focando em situações que ocorrem durante o jogo.

No capítulo sobre o jogo Escova apresentamos as suas regras, os critérios de pontuação, algumas estratégias que podem ser adotadas pelo jogadores, soma das cartas que podem restar na mesa ao final de uma partida, além de outros aspectos. Na explanação deste capítulo, descobrimos algumas situações interessantes, tais como:

- É possível obter a soma 100 com as cartas restantes de uma partida do jogo Escova. Existem 250 combinações onde isso acontece.

- A maior soma possível com as cartas restantes ao final de uma partida do jogo Escova é 115. Isso acontece quando sobram quatro cartas de 10, três cartas de 9, quatro cartas de 8 e quatro cartas de 4, ou seja, (10, 10, 10, 10, 9, 9, 9, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4). Esta situação pode ocorrer de 4 maneiras diferentes.

- Quando partida do jogo Escova termina, sobram algumas cartas na mesa. Essas cartas restantes podem ter 119.311 configurações distintas. Além disso, outro resultado interessante que descobrimos é que essas cartas restantes podem ter 8 somas diferentes. Essas somas podem ser: 10, 25, 40, 55, 70, 85, 100 e 115. Para cada uma dessas somas foi feita uma tabela mostrando as possíveis combinações de cartas e o número de possibilidades de ocorrência.

- A maior quantidade de cartas que pode restar na mesa após o término de uma partida é 17 cartas. Esta situação ocorre quando restam as seguintes cartas (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10), cuja soma é 100.

- Durante o jogo, cada jogador, em cada rodada, procura obter a soma 15 com as cartas da mesa e a carta que compra do monte. Existem 16.064 maneiras diferentes de se obter a soma 15 durante uma partida do jogo Escova.

- A maior quantidade de cartas que pode ficar na mesa durante o jogo é 20 cartas, situação que ocorre quando ficam 4 cartas de 2, 4 cartas de 4, 4 cartas de 6, 4 cartas de 8 e 4 cartas de 10.

No capítulo destinado à simulação computacional,o objetivo era conseguir estimar algumas probabilidades mais complexas do jogo Escova. Nesse contexto, destacamos algumas conclusões interessantes:

- Mesmo tendo menos combinações possíveis que somam 10, esta é a soma mais frequente das cartas restantes na mesa ao final de uma partida.
- Se na mesa não houver nenhuma carta aberta no início do jogo, o segundo jogador tem mais chances de vencer a partida. Por outro lado, se na mesa houver apenas uma carta aberta no início do jogo, o primeiro jogador tem mais chances de vitória.
- Em praticamente $\frac{1}{3}$ dos jogos ocorre somente uma escova. A obtenção de 4 ou mais escovas durante uma partida é pouco provável. Por exemplo, a probabilidade de obter 5 escovas em um jogo é menor que 2%.

Finalmente, no último capítulo apresentamos uma proposta de aplicação do jogo Escova no Ensino Médio. De fato, este jogo instiga os estudantes a pensar, organizar as ideias, bem como questionar o que pode acontecer durante o jogo. Dessa forma, entendemos que o jogo Escova é uma boa estratégia para as aulas de Matemática no Ensino Médio, em especial no aprofundamento dos conteúdos de análise combinatória e de probabilidade.

Referências

BASTOS, C. L. de. *Some 15 pontos! Aprenda a jogar Escopa e adapte o jogo para a sala de aula*. 2015. Disponível em: <https://www.ticsnamatematica.com/2015/03/some-15-pontos-aprenda-jogar-Escopa-adapte-jogo-sala-aula.html>. Acesso em: 22/02/2021.

BNCC. *Base Nacional Comum Curricular - Etapa Ensino Médio*. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>. Acesso em: 04/01/2020.

BORIN, J. *Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. [S.l.]: IME-USP, 2004. ISBN 9788588697201.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos – A Experiência Russa*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1996. ISBN 9788524403101.

MEGAJOGOS. *Regras do Jogo Escoba*. 2015. Disponível em: <https://www.megajogos.com.br/escoba-online/regras>. Acesso em: 25/03/2021.

MIRANDA, H. M. de; PAULA, M. de. *Uma proposta gráfica para o ensino da lei dos grandes números em probabilidade e estatística na educação básica*. [s.n.], 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052214>.

MORGADO, A. C. de O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. ISBN 9788583370833.

PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conaes-comissao-nacional-de-avaliacao-da-educacao-superior/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 04/01/2020.

PCSC. *Proposta Curricular de Santa Catarina*. 2014. Disponível em: <http://www.sed.sc.gov.br/professores-e-gestores/16977-nova-proposta-curricular-de-sc-2014>. Acesso em: 04/01/2020.

PIRES, W. F. *O jogo de escopa adaptado para o uso em sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, Dissertações - Matemática em Rede Nacional - IBILCE, janeiro de 2016.

ROSS, S. *Probabilidade – Um curso moderno com aplicações*. [S.l.]: Pearson Education, Inc., 2010. ISBN 9788577806218.

TANEJA, I. J.; ARAÚJO, A. L. A. *Fundamentos da Matemática II*. [S.l.]: CFM-UFSC, 2010. ISBN 9788599379714.

APÊNDICE A – Soma 10

Tabela 3 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 10

Cartas restantes com soma igual a 10	Número de possibilidades
10	4
$1, 9$	16
$2, 8$	16
$3, 7$	16
$4, 6$	16
$5, 5$	6
$1, 1, 8$	24
$1, 2, 7$	64
$1, 3, 6$	64
$1, 4, 5$	64
$2, 2, 6$	24
$2, 3, 5$	64
$2, 4, 4$	24
$3, 3, 4$	24
$1, 1, 1, 7$	16
$1, 1, 2, 6$	96
$1, 1, 3, 5$	96
$1, 1, 4, 4$	36
$1, 2, 2, 5$	96
$1, 2, 3, 4$	256
$1, 3, 3, 3$	16
$2, 2, 2, 4$	16
$2, 2, 3, 3$	36
$1, 1, 1, 1, 6$	4
$1, 1, 1, 2, 5$	64
$1, 1, 1, 3, 4$	64
$1, 1, 2, 2, 4$	144
$1, 1, 2, 3, 3$	144
$1, 2, 2, 2, 3$	64
$1, 1, 1, 1, 2, 4$	16
$1, 1, 1, 1, 3, 3$	6
$1, 1, 1, 2, 2, 3$	96
$1, 1, 2, 2, 2, 2$	6
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2$	4
Total de combinações	1702

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE B – Soma 25

Tabela 4 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 25

Cartas restantes com soma igual a 25	Número de possibilidades
$7, 9, 9$	24
$8, 8, 9$	24
$1, 8, 8, 8$	16
$2, 5, 9, 9$	96
$2, 7, 7, 9$	96
$3, 4, 9, 9$	96
$3, 5, 8, 9$	256
$3, 6, 8, 8$	96
$4, 4, 8, 9$	96
$4, 5, 7, 9$	256
$4, 5, 8, 8$	96
$4, 7, 7, 7$	16
$5, 6, 6, 8$	96
$5, 6, 7, 7$	96
$6, 6, 6, 7$	16
$1, 3, 5, 8, 8$	384
$1, 4, 4, 8, 8$	144
$1, 5, 6, 6, 7$	384
$1, 6, 6, 6, 6$	4
$2, 2, 3, 9, 9$	144
$2, 2, 5, 7, 9$	384
$2, 2, 7, 7, 7$	24
$2, 4, 5, 7, 7$	384
$2, 5, 6, 6, 6$	64
$3, 3, 3, 8, 8$	24
$3, 3, 5, 6, 8$	384
$3, 4, 4, 5, 9$	384
$4, 4, 4, 4, 9$	4
$4, 4, 4, 5, 8$	64
$1, 1, 5, 6, 6, 6$	96
$1, 4, 4, 4, 4, 8$	16
$2, 2, 2, 5, 7, 7$	96
$3, 3, 3, 3, 5, 8$	16
Total de combinações	4376

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE C – Soma 40

Tabela 5 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 40

Cartas restantes com soma igual a 40	Número de possibilidades
$10, 10, 10, 10$	1
$1, 9, 10, 10, 10$	64
$2, 8, 10, 10, 10$	64
$2, 9, 9, 10, 10$	144
$3, 7, 10, 10, 10$	64
$3, 8, 9, 10, 10$	384
$3, 9, 9, 9, 10$	64
$4, 6, 10, 10, 10$	64
$4, 7, 9, 10, 10$	384
$4, 8, 8, 10, 10$	144
$4, 8, 9, 9, 10$	384
$4, 9, 9, 9, 9$	4
$5, 8, 9, 9, 9$	64
$6, 6, 8, 10, 10$	144
$6, 7, 7, 10, 10$	144
$6, 8, 8, 8, 10$	64
$7, 7, 7, 9, 10$	64
$1, 1, 8, 10, 10, 10$	96
$1, 1, 9, 9, 10, 10$	216
$1, 2, 7, 10, 10, 10$	256
$1, 2, 8, 9, 10, 10$	1536
$1, 2, 9, 9, 9, 10$	256
$1, 3, 6, 10, 10, 10$	256
$1, 3, 7, 9, 10, 10$	1536
$1, 3, 8, 8, 10, 10$	576
$1, 3, 8, 9, 9, 10$	1536
$1, 3, 9, 9, 9, 9$	16
$1, 4, 8, 9, 9, 9$	256
$1, 6, 6, 7, 10, 10$	576
$2, 2, 6, 10, 10, 10$	96
$2, 2, 7, 9, 10, 10$	576
$2, 2, 8, 8, 10, 10$	216
$2, 2, 8, 9, 9, 10$	576
$2, 2, 9, 9, 9, 9$	6
$2, 3, 8, 9, 9, 9$	256
$2, 4, 4, 10, 10, 10$	96
$2, 4, 6, 8, 10, 10$	1536
$2, 4, 7, 7, 10, 10$	576

Cartas restantes com soma igual a 40	Número de possibilidades
2, 4, 8, 8, 8, 10	256
2, 6, 6, 6, 10, 10	96
2, 6, 6, 8, 8, 10	576
2, 6, 8, 8, 8, 8	16
2, 7, 7, 7, 7, 10	16
3, 3, 4, 10, 10, 10	96
3, 3, 6, 8, 10, 10	576
3, 3, 7, 7, 10, 10	216
3, 3, 8, 8, 8, 10	96
3, 4, 4, 9, 9, 10	576
3, 4, 6, 7, 10, 10	1536
3, 4, 7, 7, 9, 10	1536
3, 5, 5, 9, 9, 9	96
3, 5, 8, 8, 8, 8	16
3, 6, 7, 7, 7, 10	256
3, 7, 7, 7, 7, 9	16
4, 4, 4, 8, 10, 10	96
4, 4, 4, 9, 9, 10	96
4, 4, 5, 9, 9, 9	96
4, 4, 6, 6, 10, 10	216
4, 4, 6, 8, 8, 10	576
4, 4, 8, 8, 8, 8	6
4, 5, 5, 8, 9, 9	576
4, 6, 6, 6, 8, 10	256
4, 6, 6, 7, 7, 10	576
4, 6, 6, 8, 8, 8	96
5, 5, 6, 8, 8, 8	96
5, 5, 7, 7, 7, 9	96
6, 6, 6, 6, 8, 8	6
6, 6, 7, 7, 7, 7	6
1, 1, 1, 7, 10, 10,10	64
1, 1, 1, 8, 9, 10, 10	384
1, 1, 1, 9, 9, 9, 10	64
1, 1, 2, 6, 10, 10, 10	384
1, 1, 2, 7, 9, 10, 10	2304
1, 1, 2, 8, 8, 10, 10	864
1, 1, 2, 8, 9, 9, 10	2304
1, 1, 2, 9, 9, 9, 9	24
1, 1, 3, 8, 9, 9, 9	384
1, 1, 6, 6, 6, 10, 10	144
1, 2, 2, 8, 9, 9, 9	384
1, 3, 3, 3, 10, 10, 10	64

Cartas restantes com soma igual a 40	Número de possibilidades
1, 3, 3, 6, 7, 10, 10	2304
1, 4, 4, 4, 9, 9, 9	64
2, 2, 2, 4, 10, 10, 10	64
2, 2, 2, 6, 8, 10, 10	384
2, 2, 2, 7, 7, 10, 10	144
2, 2, 2, 8, 8, 8, 10	64
2, 2, 4, 4, 8, 10, 10	864
2, 2, 4, 6, 6, 10, 10	864
2, 2, 4, 6, 8, 8, 10	2304
2, 2, 4, 8, 8, 8, 8	24
2, 2, 6, 6, 6, 8, 10	384
2, 2, 6, 6, 8, 8, 8	144
2, 3, 3, 8, 8, 8, 8	24
2, 4, 4, 4, 6, 10, 10	384
2, 4, 4, 4, 8, 8, 10	384
2, 4, 4, 6, 6, 8, 10	2304
2, 4, 4, 6, 8, 8, 8	384
2, 4, 6, 6, 6, 8, 8	384
2, 4, 6, 6, 6, 6, 10	64
2, 4, 6, 6, 6, 8, 8	384
2, 5, 5, 7, 7, 7, 7	24
3, 3, 3, 3, 8, 10, 10	24
3, 3, 3, 4, 7, 10, 10	384
3, 3, 3, 7, 7, 7, 10	64
3, 3, 4, 4, 6, 10, 10	864
3, 3, 4, 6, 7, 7, 10	2304
3, 3, 5, 5, 8, 8, 8	144
3, 3, 6, 7, 7, 7, 7	24
4, 4, 4, 4, 6, 8, 10	64
4, 4, 4, 4, 8, 8, 8	4
4, 4, 4, 5, 5, 9, 9	144
4, 4, 4, 6, 6, 6, 10	64
4, 4, 4, 6, 6, 8, 8	144
4, 4, 6, 6, 6, 6, 8	24
1, 1, 1, 1, 6, 10, 10, 10	16
1, 1, 1, 1, 7, 9, 10, 10	96
1, 1, 1, 1, 8, 8, 10, 10	36
1, 1, 1, 1, 8, 9, 9, 10	96
1, 1, 1, 1, 9, 9, 9, 9	1
1, 1, 1, 2, 8, 9, 9, 9	256

Cartas restantes com soma igual a 40	Número de possibilidades
1, 3, 3, 3, 3, 7, 10, 10	96
2, 2, 2, 2, 4, 8, 10, 10	96
2, 2, 2, 2, 6, 6, 10, 10	36
2, 2, 2, 2, 6, 8, 8, 10	96
2, 2, 2, 2, 8, 8, 8, 8	1
2, 2, 2, 4, 4, 6, 10, 10	576
2, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 10	576
2, 2, 2, 4, 6, 6, 8, 10	1536
2, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 8	256
2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 10	16
2, 2, 2, 6, 6, 6, 8, 8	96
2, 2, 4, 4, 4, 4, 10, 10	36
2, 2, 4, 4, 4, 6, 8, 10	1536
2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8	96
2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 10	576
2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8	1296
2, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 8	96
2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 10	96
2, 4, 4, 4, 4, 6, 8, 8	96
2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8	256
3, 3, 3, 3, 4, 4, 10, 10	36
3, 3, 3, 3, 4, 7, 7, 10	96
3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7	1
4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6	1
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 10, 10	24
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 8, 10	384
2, 2, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 8	24
2, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 10	64
2, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 8, 8	144
2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 8	4
2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 10	64
2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 10	384
2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 8, 8	384
2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8	384
2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8	144
2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6	24
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 10	16
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8	6
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 8	96
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 6	6
2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6	16
Total de combinações	55.509

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE D – Soma 55

Tabela 6 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 55

Cartas restantes com soma igual a 55	Número de possibilidades
7, 9, 9, 10, 10, 10	96
8, 8, 9, 10, 10, 10	96
8, 9, 9, 9, 10, 10	96
1, 7, 9, 9, 9, 10, 10	384
1, 8, 8, 8, 10, 10, 10	64
1, 8, 8, 9, 9, 10, 10	864
1, 8, 9, 9, 9, 9, 10	64
2, 7, 7, 9, 10, 10, 10	384
2, 7, 9, 9, 9, 9, 10	64
2, 8, 8, 8, 9, 10, 10	384
2, 8, 8, 9, 9, 9, 10	384
3, 4, 9, 9, 10, 10, 10	384
3, 6, 8, 8, 10, 10, 10	384
3, 7, 7, 9, 9, 10, 10	864
3, 8, 8, 8, 8, 10, 10	24
3, 8, 8, 8, 9, 9, 10	384
3, 8, 8, 9, 9, 9, 9	24
4, 4, 8, 9, 10, 10, 10	384
4, 4, 9, 9, 9, 10, 10	144
4, 7, 7, 7, 10, 10, 10	64
4, 7, 7, 9, 9, 9, 10	384
4, 8, 8, 8, 8, 9, 10	64
4, 8, 8, 8, 9, 9, 9	64
5, 7, 7, 9, 9, 9, 9	24
5, 8, 8, 8, 8, 9, 9	24
6, 6, 6, 7, 10, 10, 10	64
7, 7, 7, 7, 9, 9, 9	4
1, 1, 7, 9, 9, 9, 9, 10	96
1, 1, 8, 8, 8, 9, 10, 10	576
1, 1, 8, 8, 9, 9, 9, 10	576
1, 2, 8, 8, 8, 8, 10, 10	96
1, 2, 8, 8, 8, 9, 9, 10	1536
1, 2, 8, 8, 9, 9, 9, 9	96
1, 3, 8, 8, 8, 8, 9, 10	256
1, 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9	256
1, 4, 8, 8, 8, 8, 9, 9	96
1, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10	16
2, 2, 7, 7, 7, 10, 10, 10	96

Cartas restantes com soma igual a 55	Número de possibilidades
2, 2, 7, 7, 9, 9, 9, 10	576
2, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 10	96
2, 2, 8, 8, 8, 9, 9, 9	96
2, 3, 7, 7, 9, 9, 9, 9	96
2, 3, 8, 8, 8, 8, 9, 9	96
2, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 9	96
2, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 9	256
3, 3, 3, 8, 8, 10, 10, 10	96
3, 4, 7, 7, 7, 7, 10, 10	96
3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 9	256
3, 5, 5, 8, 8, 8, 9, 9	576
4, 4, 4, 4, 9, 10, 10, 10	16
4, 4, 4, 8, 8, 8, 9, 10	256
4, 4, 4, 8, 8, 9, 9, 9	96
4, 4, 5, 8, 8, 8, 9, 9	576
4, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 9	576
4, 5, 5, 8, 8, 8, 8, 9	96
4, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9	96
4, 6, 6, 6, 6, 7, 10, 10	96
5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8	16
6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 10	16
1, 1, 1, 8, 8, 8, 8, 10, 10	24
1, 1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 10	384
1, 1, 1, 8, 8, 9, 9, 9, 9	24
1, 1, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 10	384
1, 1, 2, 8, 8, 8, 9, 9, 9	384
1, 1, 3, 8, 8, 8, 8, 9, 9	144
1, 2, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 9	144
1, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 9, 9	384
2, 2, 3, 7, 7, 7, 9, 9, 9	384
2, 2, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 9	864
2, 2, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9	144
4, 4, 4, 4, 5, 8, 8, 9, 9	144
4, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 8, 9	384
5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7	24
1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8, 9, 10	16
1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 9	16
1, 1, 1, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 9	96
Total de combinações	17.980

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE E – Soma 70

Tabela 7 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 70

Cartas restantes com soma igual a 70	Número de possibilidades
3, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	16
4, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	96
4, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	16
6, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	16
7, 7, 7, 9, 10, 10, 10, 10	16
7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10	36
8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10	36
8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10	16
1, 2, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	64
1, 3, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	384
1, 3, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	64
1, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10	64
2, 2, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	144
2, 2, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	24
2, 4, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	64
2, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10	144
2, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10	64
2, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10	4
2, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10	384
2, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9	4
3, 3, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	24
3, 4, 7, 7, 9, 10, 10, 10, 10	384
3, 4, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10	384
3, 6, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10	64
3, 7, 7, 7, 7, 9, 10, 10, 10	64
3, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10	64
4, 4, 4, 9, 9, 10, 10, 10, 10	24
4, 4, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10	144
4, 4, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10	24
4, 4, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10	864
4, 4, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10	144
4, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10, 10	64
4, 6, 6, 7, 7, 10, 10, 10, 10	144
4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10	384
6, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10	24
6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10	24
6, 6, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10	24

Cartas restantes com soma igual a 70	Número de possibilidades
1, 1, 1, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	16
1, 1, 2, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	96
1, 1, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10	576
1, 1, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9	6
2, 2, 2, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	16
2, 2, 4, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10	576
2, 2, 4, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10	96
2, 2, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10, 10	96
2, 2, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10	576
2, 4, 4, 4, 8, 8, 10, 10, 10, 10	96
2, 4, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 10, 10	576
2, 4, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10	16
2, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10	1536
2, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10	576
2, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10	96
3, 3, 3, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10	16
3, 3, 4, 6, 7, 7, 10, 10, 10, 10	576
4, 4, 4, 4, 8, 8, 9, 9, 10, 10	216
4, 4, 4, 4, 8, 9, 9, 9, 9, 10	16
4, 4, 4, 4, 6, 8, 10, 10, 10, 10	16
4, 4, 4, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10	16
4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10	576
4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10	96
4, 4, 5, 5, 8, 8, 9, 9, 9, 9	216
4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10	96
4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10	576
4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10	16
4, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 10, 10	96
1, 1, 1, 1, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	4
2, 2, 2, 2, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10	24
2, 2, 2, 2, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10	4
2, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 10, 10, 10, 10	144
2, 2, 2, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 10, 10	384
2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10	4
2, 2, 2, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10	384
2, 2, 4, 4, 4, 6, 8, 10, 10, 10, 10	384
2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10	144
2, 2, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10	864
2, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10	384
2, 2, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10	24
2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 10, 10, 10, 10	24
2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 10, 10	24
2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10	1024
2, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10	2304
2, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10	864
3, 3, 3, 3, 4, 7, 7, 10, 10, 10, 10	24

Cartas restantes com soma igual a 70	Número de possibilidades
3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10	4
4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10	4
4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10	144
4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10	64
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 8, 10, 10, 10, 10	96
2, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10	16
2, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10	576
2, 2, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10	96
2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10	16
2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10	96
2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 10, 10, 10, 10	96
2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 10, 10	96
2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10	1536
2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10	3456
2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10	576
2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 10	576
2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 10, 10	576
2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10	96
2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10	3456
2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10	576
2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8	16
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 10, 10, 10, 10	4
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 10	384
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 10, 10	384
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10	24
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10	864
2, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10	64
2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10	864
2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 10, 10	384
2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8	24
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10, 10	96
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 10	96
Total de combinações	34.350

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE F – Soma 85

Tabela 8 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 85

Cartas restantes com soma igual a 85	Número de possibilidades
2, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	16
2, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	96
3, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	96
3, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	96
4, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	96
4, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	16
4, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10	256
7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 10	16
1, 1, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	24
1, 1, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	144
1, 2, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	384
1, 2, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	384
1, 3, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	64
1, 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10	1024
2, 2, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	144
2, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	24
2, 2, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10	384
3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 10	1024
4, 4, 4, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	64
4, 4, 4, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10	384
6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10	4
1, 1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10	96
1, 1, 1, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	96
1, 1, 2, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	96
4, 4, 4, 5, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9	16
1, 1, 1, 1, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	24
1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10	4
1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10	64
1, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9	4
Total de combinações	5.140

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE G – Soma 100

Tabela 9 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 100

Cartas restantes com soma igual a 100	Número de possibilidades
8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	4
1, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	16
2, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	16
3, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	16
4, 4, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	36
1, 1, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10	24
4, 4, 4, 4, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10	4
4, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	4
2, 2, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	6
2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	64
2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	36
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10	24
Total de combinações	250

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE H – Soma 15

Tabela 10 – Possíveis grupos de cartas com soma igual a 15

Combinações de cartas com soma igual a 15	Número de possibilidades
$5, 10$	16
$6, 9$	16
$7, 8$	16
$1, 4, 10$	64
$1, 5, 9$	64
$1, 6, 8$	64
$1, 7, 7$	24
$2, 3, 10$	64
$2, 4, 9$	64
$2, 5, 8$	64
$2, 6, 7$	64
$3, 3, 9$	24
$3, 4, 8$	64
$3, 5, 7$	64
$3, 6, 6$	24
$4, 4, 7$	24
$4, 5, 6$	64
$5, 5, 5$	4
$1, 1, 3, 10$	96
$1, 1, 4, 9$	96
$1, 1, 5, 8$	96
$1, 1, 6, 7$	96
$1, 2, 2, 10$	96
$1, 2, 3, 9$	256
$1, 2, 4, 8$	256
$1, 2, 5, 7$	256
$1, 2, 6, 6$	96
$1, 3, 3, 8$	96
$1, 3, 4, 7$	256
$1, 3, 5, 6$	256
$1, 4, 4, 6$	96
$1, 4, 5, 5$	96
$2, 2, 2, 9$	16
$2, 2, 3, 8$	96
$2, 2, 4, 7$	96
$2, 2, 5, 6$	96
$2, 3, 3, 7$	96
$2, 3, 4, 6$	256

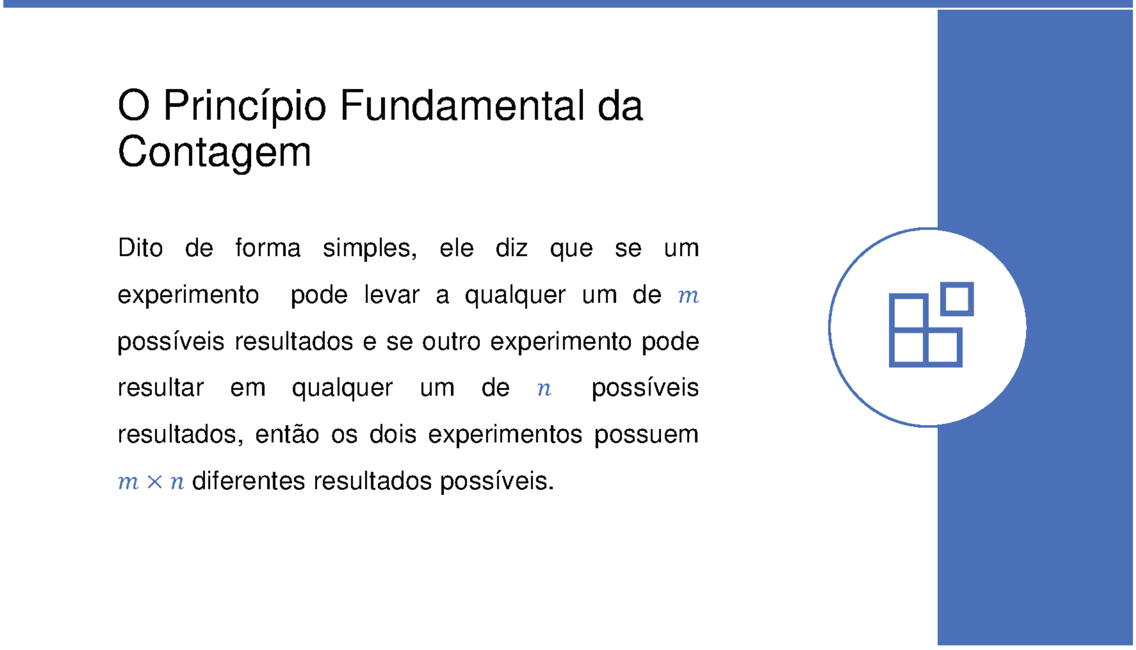
Combinações de cartas com soma igual a 15	Número de possibilidades
$2, 3, 5, 5$	96
$2, 4, 4, 5$	96
$3, 3, 3, 6$	16
$3, 3, 4, 5$	96
$3, 4, 4, 4$	16
$1, 1, 1, 2, 10$	64
$1, 1, 1, 3, 9$	64
$1, 1, 1, 4, 8$	64
$1, 1, 1, 5, 7$	64
$1, 1, 1, 6, 6$	24
$1, 1, 2, 2, 9$	144
$1, 1, 2, 3, 8$	384
$1, 1, 2, 4, 7$	384
$1, 1, 2, 5, 6$	384
$1, 1, 3, 3, 7$	144
$1, 1, 3, 4, 6$	384
$1, 1, 3, 5, 5$	144
$1, 1, 4, 4, 5$	144
$1, 2, 2, 2, 8$	64
$1, 2, 2, 3, 7$	384
$1, 2, 2, 4, 6$	384
$1, 2, 2, 5, 5$	144
$1, 2, 3, 3, 6$	384
$1, 2, 3, 4, 5$	1024
$1, 2, 4, 4, 4$	64
$1, 3, 3, 3, 5$	64
$1, 3, 3, 4, 4$	144
$2, 2, 2, 2, 7$	4
$2, 2, 2, 3, 6$	64
$2, 2, 2, 4, 5$	64
$2, 2, 3, 3, 5$	144
$2, 2, 3, 4, 4$	144
$2, 3, 3, 3, 4$	64

Combinações de cartas com soma igual a 15	Número de possibilidades
$1, 1, 1, 1, 2, 9$	16
$1, 1, 1, 1, 3, 8$	16
$1, 1, 1, 1, 4, 7$	16
$1, 1, 1, 1, 5, 6$	16
$1, 1, 1, 2, 2, 8$	96
$1, 1, 1, 2, 3, 7$	256
$1, 1, 1, 2, 4, 6$	256
$1, 1, 1, 2, 5, 5$	96
$1, 1, 1, 3, 3, 6$	96
$1, 1, 1, 3, 4, 5$	256
$1, 1, 1, 4, 4, 4$	16
$1, 1, 2, 2, 2, 7$	96
$1, 1, 2, 2, 3, 6$	576
$1, 1, 2, 2, 4, 5$	576
$1, 1, 2, 3, 3, 5$	576
$1, 1, 2, 3, 4, 4$	576
$1, 1, 3, 3, 3, 4$	96
$1, 2, 2, 2, 2, 6$	16
$1, 2, 2, 2, 3, 5$	256
$1, 2, 2, 2, 4, 4$	96
$1, 2, 2, 3, 3, 4$	576
$1, 2, 3, 3, 3, 3$	16
$2, 2, 2, 2, 3, 4$	16
$2, 2, 2, 3, 3, 3$	16

Combinações de cartas com soma igual a 15	Número de possibilidades
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 7$	24
$1, 1, 1, 1, 2, 3, 6$	64
$1, 1, 1, 1, 2, 4, 5$	64
$1, 1, 1, 1, 3, 3, 5$	24
$1, 1, 1, 1, 3, 4, 4$	24
$1, 1, 1, 2, 2, 2, 6$	64
$1, 1, 1, 2, 2, 3, 5$	384
$1, 1, 1, 2, 2, 4, 4$	144
$1, 1, 1, 2, 3, 3, 4$	384
$1, 1, 1, 3, 3, 3, 3$	4
$1, 1, 2, 2, 2, 2, 5$	24
$1, 1, 2, 2, 2, 3, 4$	384
$1, 1, 2, 2, 3, 3, 3$	144
$1, 2, 2, 2, 2, 3, 3$	24
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 5$	16
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$	96
$1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$	16
$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4$	16
$1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$	96
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3$	4
Total de combinações	16.064

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE I – Slides sobre análise combinatória



Exemplo

Em uma lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem:

- Duas opções de pão (centeio ou integral) e:
- Quatro opções de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano).

De quantas maneiras diferentes um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um tipo de recheio?

Solução

Supondo a escolha do pão como o resultado do primeiro experimento e a subsequente escolha de um tipo de recheio como o resultado do segundo experimento, podemos ver, a partir do princípio básico de contagem, que há $2 \times 4 = 8$ maneiras diferentes de se montar um sanduíche.

Generalização do Princípio Fundamental da Contagem

Se r experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de n_1 resultados possíveis, e para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento, e assim por diante, então haverá um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Exemplo 01

Quantas diferentes placas de automóvel com 7 caracteres são possíveis de confeccionar se os 3 primeiros campos forem ocupados por qualquer uma das 26 letras do nosso alfabeto e os 4 campos finais forem ocupados por qualquer um dos 10 algarismos do nosso sistema de numeração?

Solução: Pela versão generalizada do princípio fundamental da contagem, a resposta é $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175760000$ placas diferentes.

Exemplo 02

No exemplo anterior, quantas placas de automóveis seriam possíveis se a repetição entre as letras e entre os algarismos fosse proibida?

Solução: Nesse caso, seriam:

$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78624000$ placas.

Exemplo 03

No Brasil, as placas no padrão Mercosul estão em processo de substituição do modelo anterior, instituído a partir de 1990, no formato ABC1234.

Com esse formato, as placas possuem 3 letras do nosso alfabeto seguidas por 4 algarismos. Em 17 de setembro de 2018, foi baixada uma resolução que estabeleceu o formato ABC1D23 para todos os veículos e uma tabela de conversão, na qual os veículos já emplacados terão o antepenúltimo caractere alterado de um algarismo para uma letra, conforme a tabela a seguir:

Exemplo 03

Segundo Dígito da Placa (Formato ABC – 1234)	Quarta Letra da Placa Mercosul (Formato ABC – 1C34)
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H
8	I
9	J

Exemplo 03

Com essa nova configuração, ou seja, no modelo do Mercosul, quantas placas diferentes podem ser confeccionadas?

Solução:

Nesse caso, poderiam ser confeccionadas

$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456976000$ placas diferentes.

Arranjos Simples

Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ com m elementos, chamamos de **arranjo simples** dos m elementos, a qualquer sequência de p elementos, onde $1 \leq p \leq m$, formada com elementos de A, todos distintos.

Reforçando: O arranjo simples é aquele onde não ocorre a repetição de nenhum elemento em cada grupo de p elementos.

Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é possível formar, a partir de um conjunto com m elementos distintos:

$$A_s = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times \big(m - (p-1)\big) = \frac{m!}{(m-p)!}$$

arranjos simples , onde $1 \leq p \leq m$.

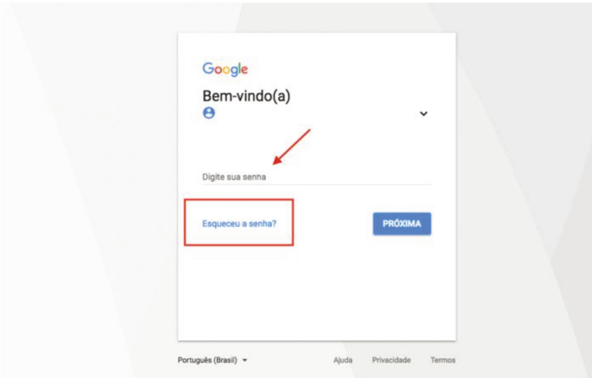
e $A_s =$ Número de arranjos simples.

Exemplo

Quantas senhas de 4 algarismos diferentes podemos formar usando os 10 algarismos do nosso sistema de numeração?

Solução: Observe que cada senha é uma sequência de 4 algarismos escolhidos entre os 10 elementos do conjunto $B = \{0,1,3,\dots,9\}$.

Então o número de senhas é: $A_s = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$



Permutações Simples

Dado um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ com m elementos, chamamos de permutação desses m elementos todo arranjo em que $p = m$, ou seja, uma permutação de m elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses mesmos.

Sendo assim, temos m possibilidades para escolher o elemento que ocupará o primeiro lugar, $m-1$ possibilidades para o elemento que ocupará o segundo lugar, ..., e uma única possibilidade para escolher o elemento que ocupará o último lugar.

Portanto, o número de maneiras de ordenar m objetos distintos é: $m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = m!$

Cada ordenação dessas é chamada de permutação simples dos m objetos distintos e é representada por P_m.

Dessa forma: $\mathrm{P_m} = \mathrm{m!}$

Exemplo 01

Quantos são os anagramas da palavra ESCOVA?

Solução: Cada anagrama de ESCOVA nada mais é que uma ordenação das letras E, S, C, O, V e A.

Assim, o número de anagramas de ESCOVA é $\mathrm{P_6} = 6! = 720$.

Exemplo 02

Quantos são os anagramas da palavra ESCOVA que começam por vogal e terminam com consoante?

Solução: A vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras e a consoante final também de 3 maneiras.

As quatro letras restantes podem ser permutadas entre a vogal e consoante de $P_4 = 4!$ maneiras.

A resposta é: $3 \times 4! \times 3 = 3 \times 24 \times 3 = 216$ anagramas.

Exemplo 03

De quantas maneiras diferentes podemos embaralhar o monte de um baralho com 40 cartas?

Solução: Cada embaralhamento do baralho nada mais é do que uma permutação das 40 cartas do mesmo.

Dessa forma, existem $40!$ maneiras diferentes de se embaralhar o monte de 40 cartas de um baralho, ou seja, um número bastante grande.

Agora uma pergunta: O que acontece com a ordenação quando, dentre os objetos, alguns são repetidos?

Vejamos como fica o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra ASA:

ASA, AAS, AAS, SAA, SAA, ASA.

É fácil perceber que, pelo fato de termos duas letras A iguais, temos somente 3 anagramas diferentes e não 6.

Tal situação nos leva a deduzir uma fórmula para o cálculo de permutações em que alguns elementos são repetidos.

Permutações com repetição

Se tivermos *m* objetos e, entre eles houver *r* objetos repetidos, então o número de permutações será:

$$P = \frac{m!}{r!}$$

Exemplo: Voltando ao número de anagramas da palavra ASA:

$$P = \frac{3!}{2!} = 3$$

Combinações Simples

Muitas vezes estamos interessados em determinar
o número de grupos diferentes de *p* objetos que
podem ser formados de um total de *n* objetos.

Por exemplo, quantos grupos diferentes de 3 itens podem ser selecionados a partir dos 5 itens A, B, C, D e E?

Para responder a essa questão, pensemos da seguinte forma:
Há 5 maneiras diferentes de selecionar o item inicial,
4 maneiras de selecionar o item seguinte e
3 maneiras de selecionar o item final.

Existem, portanto, $5 \times 4 \times 3$ maneiras de selecionar o grupo de 3 quando a ordem de seleção dos itens for relevante.

Entretanto, cada grupo de 3 é contado 6 vezes.

Por exemplo, o grupo formado pelos itens A, B e C é contado 6 vezes, pois as permutações ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA serão contadas quando a ordem de seleção for relevante.

Sendo assim, temos que o número de grupos

que podem ser formados é igual a:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

Esse mesmo resultado pode ser encontrado a partir da fórmula:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\times p!}, \text{ onde } \mathrm{p} \leq n$$

Dizemos que $\binom{n}{p}$ representa o número de combinações possíveis de *n* objetos em grupos de *p* elementos de cada vez.

Obs: O número de combinações é, na verdade, um número binomial.

Exemplo 1

Uma comissão de 3 pessoas deve se formada a partir de um grupo de 8 pessoas.

Quantas comissões diferentes são possíveis?

Solução: A ordem de seleção das pessoas não é relevante nessa situação.

Assim, há:

$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\times 3!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 3\times 2\times 1} = 8 \times 7 = 56$ comissões possíveis.

Exemplo 2

Considere um jogo de baralho comum.

Dispondo de quatro cartas de 10, quatro cartas de 9,
quatro cartas de 7 e quatro cartas de 2,
de quantas maneiras diferentes podemos selecionar:

Quatro cartas de 10, quatro cartas de 9, uma carta de 7 e uma carta de 2 de modo que a soma das cartas selecionadas seja 85?

Solução: A ordem de seleção das cartas não é relevante nesse caso.

Assim, há: $\binom{4}{4} = 1$ maneira de selecionar as quatro cartas de 10,

$\binom{4}{4} = 1$ maneira de selecionar as quatro cartas de 9,

$\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 7, e

$\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar a carta de 2.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $1 \times 1 \times 4 \times 4 = 16$ maneiras diferentes de selecionar as cartas conforme o enunciado.

APÊNDICE J – Slides sobre probabilidades

Probabilidades

Espaço Amostral:

Consideremos um experimento cujo resultado não se pode prever com certeza. Entretanto, embora o resultado do experimento não seja conhecido antecipadamente, suponhamos que o conjunto de todos os resultados possíveis seja conhecido.

Esse conjunto é conhecido como **Espaço Amostral** do experimento e é representado pela letra S.

Exemplo 1

Se o resultado de um experimento consiste em retirar uma bola de uma urna que contém apenas bolas pretas e vermelhas, então o espaço amostral é:

$S = \{P, V\}$, onde P significa que a bola é **preta** e V significa que a bola é vermelha.

Exemplo 2

Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida onde não houve empate entre 10 cavalos numerados de 1 a 10, então:

$$S = \{Todas\ as\ 10!\ permutações\ de\ (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)\}.$$

O resultado $(2, 5, 3, 10, 4, 9, 7, 8, 1, 6)$ significa que o cavalo número 2 chegou em primeiro lugar, depois o cavalo número 5 e assim por diante.

Exemplo 3

Se o experimento consiste em jogar duas moedas e observar a face voltada para cima, então o espaço amostral é :

$$S = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}.$$

O resultado será:

(k, k) se ambas as moedas derem cara,
(k, c) se a primeira moeda der cara e a segunda der coroa,
(c, k) se a primeira der coroa e a segunda der cara, e
(c, c) se ambas derem coroa.

Exemplo 4

Se o experimento consiste em jogar dois dados e observar a face voltada para cima, então o espaço amostral é formado por 36 pares ordenados, ou seja:

$S = \{(i, j)\ tais\ que\ i, j = 1,2,3,4,5,6\}$,

onde o resultado (i, j) ocorre se:

i é o número que aparece no dado da esquerda e
j é o número que aparece no outro dado.

Exemplo 5

Se o experimento consiste em retirar uma carta de baralho de um monte que contém 40 cartas, sendo estas numeradas de 1 a 10 e dos naipes de ouros, copas, paus e espadas, então o espaço amostral é:

$S = \{todas\ as\ 40\ cartas\ identificadas\ como\ (i, naipe)\}$,

onde:

i é qualquer número de 1 a 10 e naipe é qualquer um dos naipes ouros, copas, paus, espadas.

Evento

Qualquer subconjunto E do espaço amostral é conhecido como um evento.

Ou seja, um evento é um conjunto formado pelos possíveis resultados do experimento.

No exemplo 1:

Se $\mathrm{E} = \{P\}$, então E é o evento em que a bola retirada é preta.

De modo similar, se $E = \{V\}$, então E é o evento em que a bola retirada é vermelha.

No exemplo 2:

Se $E = \{todos\ os\ resultados\ em\ S\ começando\ com\ um\ 5\}$, então E é o evento em que o cavalo de número 5 vence a corrida.

No exemplo 3:

Se $E = \{(k, k)\}$, então E é o evento em que as duas moedas lançadas deram cara.

No exemplo 4, se $E = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, então E é o evento em que a soma dos dados é igual a 5.

No exemplo 5, se $E = \{(4, ouros), (4, copas), (4, paus), (4, espadas)\}$, então E é o evento em que a carta retirada do monte é um 4.

Calculando Probabilidades

Considerando o sorteio de um número natural de 1 a 10, qual é a probabilidade desse número ser o 7?

Nesse caso, temos um experimento cujo espaço amostral é:
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Aqui, o evento “o número sorteado ser 7” é denotado por $E = \{7\}$.

Observemos que todos os elementos do espaço amostral S têm a mesma chance de serem sorteados, ou seja, S é um espaço amostral equiprovável.

Solução

Como o 7 aparece uma única vez no espaço amostral,

e este possui 10 elementos, então há

uma chance em 10 de o número 7 ser sorteado.

Assim, a probabilidade (ou chance) de o número 7

ser sorteado é dada por:

1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 10%

Definição

Seja E um evento de um espaço amostral S finito e equiprovável.

Definimos a probabilidade de o evento E ocorrer como sendo
a razão entre a quantidade de elementos do evento E
e a quantidade de elementos do espaço amostral S,ou seja:

$$P(E) = \frac{número\ de\ elementos\ de\ E}{número\ de\ elementos\ de\ S} = \frac{n(E)}{n(S)},$$

ou ainda, $P(E) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ ocorrência\ de\ E}{número\ de\ elementos\ possíveis\ de\ S}$

Considere E um evento qualquer de um espaço amostral S.

Para os conjuntos ϕ, E e S, temos que:

$\phi \subset E \subset S \Rightarrow n(\phi) \leq n(E) \leq n(S)$.

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(S) > 0$, obtemos:

$\frac{n(\phi)}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$.

Portanto, a probabilidade de um evento ocorrer é um valor entre 0 e 1, ou seja, de 0% a 100%.

Observações:

1) Consideremos o lançamento de um dado.

O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Com relação a esse experimento, consideremos o evento em que o número que aparece na face voltada para cima é 7.

Nesse caso, $E = \phi$, sendo chamado de Evento Impossível, no qual temos $P(E) = 0$.

2) Podemos também calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.

Para isso, consideremos como espaço amostral os números naturais de 1 a 10 e o evento E, da ocorrência de um número maior que 7 no sorteio de um desses números.

Então: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $E = \{8, 9, 10\}$.

Logo, $P(E) = \frac{3}{10} = 30\%$.

Seja $\bar{E}$ o conjunto formado pelos elementos de S que não pertencem a E.

Ou seja, $\bar{E} = S - E$.
Dizemos que $\bar{E}$ é o complementar de E em relação a S.

Logo, $\bar{E} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e, assim:

$P(\bar{E}) = \frac{7}{10} = 70\%$.

Resumindo:

A probabilidade de um evento E não ocorrer é:

$\boldsymbol{P(\overline{E}) = 1 - P(E).}$

Se a probabilidade de dar o número 3 no lançamento de um dado é igual a $\frac{1}{6}$, então a probabilidade de não dar o número 3 é igual a $\frac{5}{6}$.

Outro exemplo:

Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 americanos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele:

a) Ser árabe: $P(árabe) = \frac{3}{71}$

b) Não ser árabe: $P(\overline{árabe}) = 1 - \frac{3}{71} = \frac{68}{71}$

c) Ser argentino: $P(argentino) = 0$

Probabilidade Condicional

Frequentemente estamos interessados em calcular probabilidades quando temos alguma informação parcial a respeito do resultado de um experimento.

Neste caso, as probabilidades desejadas são denominadas de condicionais.

Vejamos uma situação problema que exemplifica bem essa situação.

Suponhamos que sejam lançados dois dados.
O espaço amostral desse experimento possui 36 resultados.

Suponhamos também que cada um desses 36 resultados possíveis seja igualmente provável e que portanto cada um tenha probabilidade $\frac{1}{36}$.

Agora suponhamos que o primeiro dado seja um 4.

Então, dada essa informação, qual a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja 7?

Para calcular essa probabilidade, pensemos da seguinte maneira:

Sabendo que saiu um 4 no lançamento do $1º$ dado,

existirão no máximo 6 resultados possíveis para o nosso experimento,

isto é, $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$, ou seja,

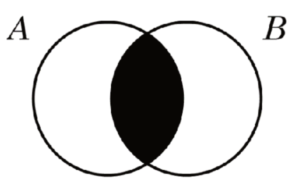
esse é o nosso "novo espaço amostral“ que ficou bem mais reduzido.

Com isso, a probabilidade desejada é $\frac{1}{6}$,
isto é, $P(4,3) = \frac{1}{6}$.

Se A e B representarem, respectivamente, o evento em que a soma dos dados é 7 e o evento em que o primeiro dado é um 4,

então a probabilidade que acabamos de obter é chamada de probabilidade condicional de que A ocorra dado que B ocorreu.

Esta probabilidade é representada por $P(A|B)$.



Dessa maneira, se o evento B ocorrer, então,
para que o evento A ocorra, é necessário
que a ocorrência real seja um ponto tanto em A quanto em B,
isto é, ela deve estar em $A \cap B$.

Como sabemos que o evento B ocorreu, tem-se que B se torna o nosso novo, ou reduzido, espaço amostral.

E assim temos que: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Outro exemplo:

Suponhamos um experimento no qual uma moeda é jogada 2 vezes.

O espaço amostral aqui é:

$S = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$.

Qual a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas?

Seja A o evento em que ambas as jogadas dá cara,

isto é, $A = \{(cara, cara)\}$,

e B o evento em que dá cara na primeira jogada,

isto é, $B = \{(cara, cara), (cara, coroa)\}$.

Observemos que esse é o nosso “novo espaço amostral“ agora.
Ele tem dois resultados possíveis e um deles é o desejado.

Assim, tem-se que a probabilidade desejada é $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

Observemos que esse valor está de acordo com a definição, pois:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$.

E assim, a probabilidade de que dê cara em ambas as jogadas é de $\frac{1}{2}$.

Mais um exemplo:

Suponhamos um experimento no qual uma carta é retirada, ao acaso, de um baralho que contém apenas as cartas de 1 a 10. (Total: 40 cartas).

Sabendo-se que esta carta é do naipe de espadas, qual a probabilidade de que ela seja a carta com o número 5?

Observação: Antes de sabermos que a carta retirada é do naipe de espadas, o espaço amostral desse experimento é,

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} (1, copas) & \dots & (10, copas) \\ (1, espadas) & \dots & (10, espadas) \\ (1, ouros) & \dots & (10, ouros) \\ (1, paus) & \dots & (10, paus) \end{array} \right\}$$

com 40 resultados possíveis e equiprováveis.

Agora, sabendo que a carta retirada é do naipe de espadas, seja A o evento em que a carta tem o número 5 e é do naipe de espadas.

Seja B o evento em que a carta é do naipe de espadas, isto é,

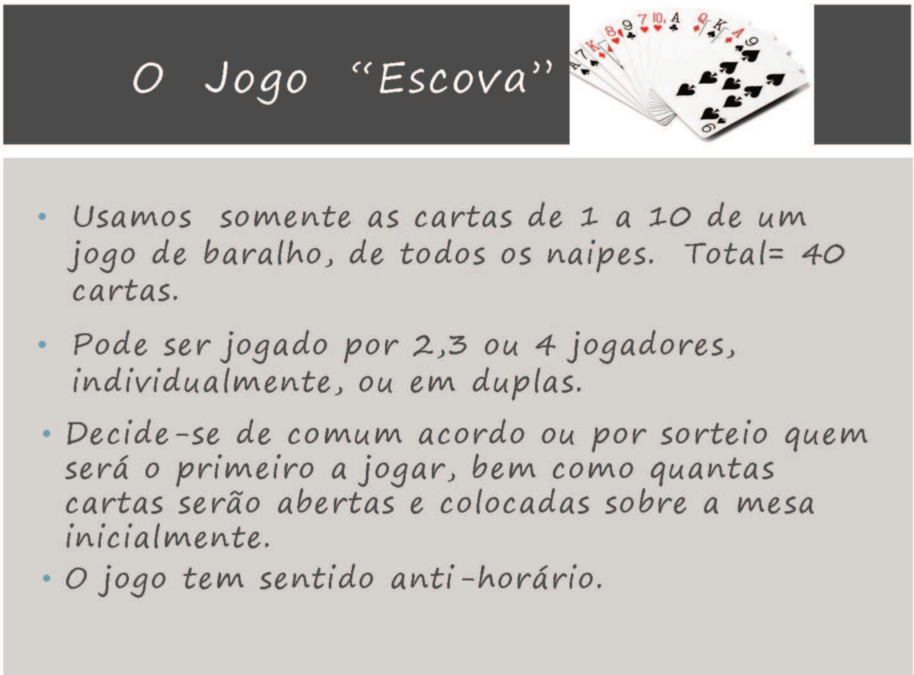
$B = \{(1, espadas), (2, espadas), \dots, (10, espadas)\}$.

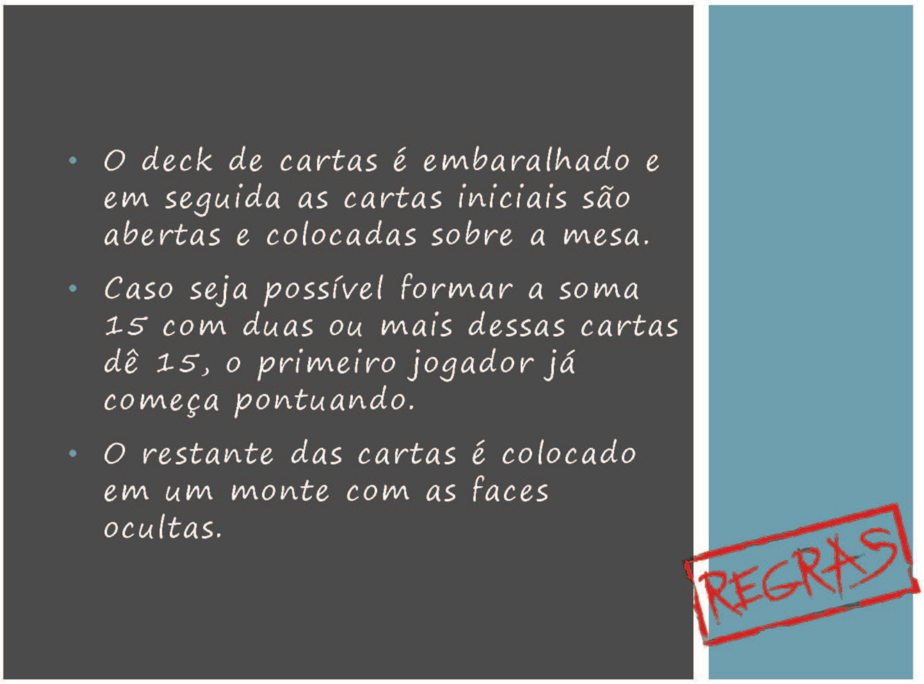
Observemos que B é o nosso "novo espaço amostral", agora reduzido com 10 resultados possíveis e equiprováveis.

Logo a probabilidade procurada é $\frac{1}{10}$,
valor que está de acordo com a definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/_{40}}{10/_{40}} = \frac{1}{10}.$$

APÊNDICE K – Apresentação do Jogo Escova





- O primeiro a jogar deve pegar uma carta do monte e, em seguida, verificar se consegue formar a soma 15 com as cartas disponíveis, incluindo as cartas na mesa. Em caso afirmativo, este jogador pega essas cartas, mostra aos demais e em seguida coloca essas cartas em monte à sua frente com as faces viradas para baixo.
- Se não for possível formar a soma 15 com as cartas disponíveis, o jogador deixa aberta na mesa a carta retirada do monte, e o jogo continua com o próximo jogador.

REGRAS

- Quando um jogador conseguir pegar todas as cartas que estão na mesa de uma única vez, formando a soma 15, então ele faz uma \`escova'. Nesse caso, deve colocar na sua frente as cartas, sendo uma delas com a face voltada para cima para indicar que fez uma escova. Quando isso acontece com o primeiro jogador, dizemos que ele ganhou uma escova de mão.
- Seguindo essa dinâmica, o jogo continua até que não seja mais possível formar uma soma 15 com as cartas que restaram.

REGRAS

Critérios de pontuação

- O jogador soma 1 ponto cada vez que realizar uma escova, ou seja, utilizar todas as cartas disponíveis somando 15.
- Ao final do jogo, soma 1 ponto o jogador que tiver o maior número de cartas em seu monte.
- Ao final do jogo, soma 1 ponto o jogador que tiver o maior número de cartas de ouros em seu monte.
- O jogador que tiver o 7 de ouros em seu monte soma 1 ponto.

Critérios de pontuação

- O jogador soma 1 ponto para cada conjunto de quatro cartas de um mesmo número que tiver em seu monte (por exemplo, se ele conseguir juntar o 2 de ouros, 2 de espadas, 2 de paus e 2 de copas).

Vence o jogador ou a dupla que obtiver o maior número de pontos, podendo eventualmente ocorrer empates.

APÊNDICE L – Ficha para registro dos resultados de cada jogo

Jogador/dupla vencedor(a)	Jogador/Dupla 01					Jogador/Dupla 02				
	Número de escovas	Tem o 7♦ ?	Tem a maior qde de cartas?	Tem mais ♦ cartas de ouro?	Tem todas as cartas de um mesmo número?	Número de escovas	Tem o 7♦ ?	Tem a maior qde de cartas?	Tem mais ♦ cartas de ouro?	Tem todas as cartas de um mesmo número?