



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Matheus Eduardo Wenceslau Costa

Modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos. Uma comparação entre abordagens baseadas em derivadas de ordem fracionária e inteira

Florianópolis
2021

Matheus Eduardo Wenceslau Costa

Modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos. Uma comparação entre abordagens baseadas em derivadas de ordem fracionária e inteira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.
Coorientador: Prof. Jan-Michel Colombo Farias, Dr

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Costa, Matheus Eduardo Wenceslau

Modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos. Uma comparação entre abordagens baseadas em derivadas de ordem fracionária e inteira / Matheus Eduardo Wenceslau Costa ; orientador, Eduardo Alberto Fanello, coorientador, Jan-Michel Colombo Farias, 2021.

86 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica dos sólidos computacional. 3. Modelagem constitutiva. 4. Derivadas fracionárias. 5. Viscoelasticidade-Viscoplasticidade. I. Fanello, Eduardo Alberto . II. Farias, Jan-Michel Colombo. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Matheus Eduardo Wenceslau Costa

Modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos. Uma comparação entre abordagens baseadas em derivadas de ordem fracionária e inteira

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Pablo Andrés Muñoz Rojas, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Gean Vitor Salmoria, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Paulo de Tarso R. de Mendonça, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.
Orientador

Florianópolis, 21 de junho de 2021.

Dedico este trabalho a Deus. Pois acredito que sem o sustento e cuidado dado por Ele não poderia ter chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais José e Sandra, e irmãs Michelle e Milla por todo amor e atenção. Não há forma de agradecer tudo o que fizeram por mim.

Ao Prof. Eduardo Alberto Fancello por ter aceitado me orientar, pelo tema proposto e ensino transmitido dentro e fora de sala. Agradeço também pelas conversas e essencial humanidade compartilhada.

Ao meu coorientador Jan-Michel Colombo Farias por toda dedicação durante este período, por ter me inicializado em programação orientada a objetos, pelo conhecimento transmitido em modelagem constitutiva e por toda paciência em escutar e conversar. Seu amor pela profissão mostrou que a academia precisa de pessoas como você.

Agradeço aos meus amigos de mestrado André, José Luís, Jonas, Thayller, Vinícius e demais colegas do GRANTE por toda contribuição na fase de realização de disciplinas e pelo convívio social.

Ao meu amigo e conterrâneo Thiago (Biridim) por todo suporte e amizade dividida durante este período em Florianópolis.

Um obrigado especial aos meus amigos da segunda igreja batista de Florianópolis que me acolheram desde a minha chegada em terras catarinenses, em especial ao Neto pela amizade compartilhada.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido por meio de bolsas de estudos.

RESUMO

A literatura indica a possibilidade de aplicação de modelos viscoelásticos fracionários como uma alternativa aos modelos clássicos de ordem inteira. No entanto, não é comum comparar os resultados obtidos utilizando ambas as abordagens em diversas condições de carregamento. Desta forma, neste trabalho é comparada a capacidade preditiva de modelos viscoelásticos (VE) com cinemática infinitesimal e finita, com a evolução viscoelástica dada por equações diferenciais de ordem inteira e fracionária. Além dos viscoelásticos, são também formulados e comparados modelos viscoelásticos-viscoplásticos (VE-VP) com cinemática infinitesimal. As comparações são feitas por meio da realização de procedimentos de ajustes de parâmetros, em condições de carregamento cíclico e em fluência-recuperação, para um polímero termoplástico frequentemente utilizado em próteses biomédicas. Primeiro, os ajustes são realizados de forma independente, em seguida, as duas condições de carregamento são ajustadas simultaneamente. O processo de otimização é conduzido segundo uma abordagem híbrida, utilizando um método heurístico para busca global e outro baseado em gradiente para refinamento da busca local. No contexto das condições experimentais avaliadas, os resultados indicaram que a utilização dos modelos fracionários testados não resultou em melhoria significativa, quando os ajustes são feitos de forma independente. Por outro lado, para a condição de ajuste simultâneo, os modelos fracionários mostraram uma ligeira melhoria, mas ainda não significativa, frente ao maior custo computacional desta classe de modelos. Deve-se também mencionar que a implementação dos modelos fracionários requerem a alteração da arquitetura de código, uma vez que o algoritmo constitutivo incremental não se enquadra na classe usual de algoritmos recursivos a dois instantes. Além disso, os resultados indicaram que os modelos puramente viscoelásticos não foram capazes de representar satisfatoriamente os comportamentos cíclicos e em fluência, enquanto que a incorporação de mecanismos viscoplásticos permitiu aumentar consideravelmente a capacidade preditiva.

Palavras-chave: Viscoelasticidade fracionária. Viscoplasticidade. Derivadas fracionárias. Ajuste de parâmetros.

ABSTRACT

The literature indicates the possibility of applying fractional viscoelastic models as an alternative to the classical integer order models. However, it is not common to compare the results obtained using both approaches under different loading conditions. Thus, in this work the predictive capabilities of viscoelastic models (VE) with infinitesimal and finite kinematics is compared. Besides viscoelastics, viscoelastic-viscoplastic models (VE-VP) with infinitesimal kinematics are also formulated and compared. The comparisons are made by means of parameter fitting procedures in cyclic and in creep-recovery loadings, for a thermoplastic polymer frequently used in biomedical applications. First, fittings are made independently, then both loading conditions are fitted simultaneously. The optimization procedure is conducted according to a hybrid approach, using a heuristic method for global search and another based on gradients for local search. In the context of the experimental conditions evaluated, the results indicated that the use of the fractional models tested did not result in significant improvement, when the fittings are made independently. On the other hand, for the simultaneous fitting, the fractional models showed a slight improvement, but not yet significant, in face of the higher computational cost of this class of models. It should also be mentioned that the implementation of the fractional models requires a change in the code architecture, since the incremental constitutive algorithm does not fit in the usual class of recursive algorithms. Moreover, the results indicated that purely viscoelastic models were not able to satisfactorily represent cyclical and creep behaviors, while the incorporation of viscoplastic mechanisms has considerably increased the predictive capabilities.

Keywords: Fractional viscoelasticity. Viscoplasticity. Fractional derivative. Parameter fitting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação reológica unidimensional do dispositivo viscoelástico de Maxwell clássico e fracionário.	21
Figura 2 – Corpo contínuo β e sua configuração material Ω_0 e espacial Ω	24
Figura 3 – Decomposição Polar do tensor gradiente de deformação.	26
Figura 4 – Modelo de Maxwell generalizado unidimensional.	29
Figura 5 – Representação reológica unidimensional do modelo sólido generalizado fracionário.	35
Figura 6 – Dados experimentais em fluência (FARIA, 2017).	45
Figura 7 – Dados experimentais cíclico em taxa de deformação de $0.01\%/s$ (FARIA, 2017).	46
Figura 8 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados de fluência-recuperação, com dados experimentais em 4 e 8 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (8).	54
Figura 9 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados de fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (9).	55
Figura 10 – Ajuste com modelos viscoelásticos utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e $0.1\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (11).	57
Figura 11 – Ajuste com modelos viscoelásticos com dois braços utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e $1\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (12).	58
Figura 12 – Ajustes dos modelos viscoelásticos, com um braço viscoelástico e utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (13).	60
Figura 13 – Ajuste com modelos viscoelásticos com dois braços viscoelásticos utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (13)	61
Figura 14 – Gráfico comparativo contendo valores da função objetivo para os ajustes simultâneos utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Modelos viscoelásticos.	61
Figura 15 – Ajuste dos modelos viscoelásticos com dois braços viscoelásticos utilizando simultaneamente três curvas cíclicas e três em fluência. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (14).	63
Figura 16 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados em fluência-recuperação. Modelos VE-VP com cinemática infinitesimal. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (15).	66

Figura 17 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (16).	67
Figura 18 – Ajuste com modelos VE-VP utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 %s ⁻¹ . Parâmetros materiais apresentados na Tabela (17).	68
Figura 19 – Ajuste com modelos VE-VP com dois braços, utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 %s ⁻¹ . Parâmetros materiais apresentados na Tabela (18).	70
Figura 20 – Ajuste com modelos VE-VP, utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação, com dois braços viscoelásticos. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (19).	72
Figura 21 – Gráfico comparativo contendo valores da função objetivo para os ajustes simultâneos, utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Modelos VE-VP.	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 2 – Algoritmo de integração para o modelo VE-VP clássico e fracionário	44
Tabela 4 – Descrição do processo de otimização	48
Tabela 3 – Parâmetros de configuração do PSO	48
Tabela 5 – Algoritmo para implementação do equilíbrio para o ensaio uniaxial.	51
Tabela 6 – Algoritmo para implementação dos ensaios uniaxiais.	51
Tabela 7 – Abreviatura dos nomes dos modelos utilizados ao longo do texto.	53
Tabela 8 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados em fluência-recuperação em 4 e 8 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (8).	54
Tabela 9 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados em fluência-recuperação em 4, 8 e 16 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (9).	56
Tabela 10 – Tempo de processamento relativo para solução do problema de otimização utilizando modelos viscoelásticos com dois braços.	56
Tabela 11 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 % s^{-1} . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (10).	58
Tabela 12 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 % s^{-1} . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica do ajuste apresentada na Figura (11) para dois braços viscoelásticos.	59
Tabela 13 – Parâmetros viscoelásticos utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada nas Figuras (12) e (13).	60
Tabela 14 – Parâmetros viscoelásticos utilizando simultaneamente três curvas cíclicas e três em fluência. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes com dois braços apresentada nas Figuras (15).	62
Tabela 15 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4 e 8 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (16).	65

Tabela 16 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (17).	65
Tabela 17 – Parâmetros dos modelos VE-VP utilizando dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 %s ⁻¹ . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (18).	69
Tabela 18 – Parâmetros dos modelos VE-VP utilizando dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 %s ⁻¹ . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes utilizando dois braços apresentada na Figura (19). . . .	71
Tabela 19 – Parâmetros dos modelos VE-VP, utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentados na Figura (20) para dois braços viscoelásticos.	73

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ordem de derivação.
f	Função sendo diferenciada.
t	Tempo.
Δt	Intervalo de tempo.
N	Número de pontos passados utilizados na definição fracionária de Grünwald-Letnikov.
a	Limite inferior da função sendo diferenciada.
b	Limite superior da função sendo diferenciada.
A_{j+1}	Coefficientes da definição fracionária de Grünwald-Letnikov.
Γ	Função Gamma.
m	Ordem inteira utilizada na definição fracionária de Caputo e de Riemann-Liouville.
β	Domínio do corpo contínuo.
χ	Função de mapeamento.
Ω_0	Configuração de referência.
Ω	Configuração deformada.
dX	Fibra diferencial na configuração de referência.
dx	Fibra diferencial na configuração deformada.
F	Tensor gradiente de mapeamento.
X	Vetor posição de uma partícula material.
x	Vetor posição de uma partícula espacial.
∇u	Tensor gradiente do campo de deslocamento.
I	Tensor identidade de segunda ordem.
J	Determinante do gradiente de mapeamento.
dv	Volume de uma partícula espacial.
dV	Volume de uma partícula material.
γ_v	Razão de dilatação (ou contração) de um ponto material.
F_{iso}	Parcela isocórica do tensor gradiente de mapeamento.
F_{vol}	Parcela volumétrica do tensor gradiente de mapeamento.
C	Tensor material de deformação de Cauchy-Green.
E	Tensor material de deformação de Green-Lagrange.
b	Tensor espacial de deformação de Cauchy-Green.
ε	Tensor de deformação infinitesimal (deformação de engenharia).
R	Tensor de rotação.
U	Tensor de alongamento material.
V	Tensor de alongamento espacial.
ε_{ln}	Tensor de deformação logarítmica (deformação verdadeira).
λ_a	Autovalores do tensor gradiente de mapeamento.

\mathbf{n}_a	Autovetores do tensor gradiente de mapeamento.
Ψ	Função de energia livre de Helmholtz.
\mathbf{P}	Primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.
\mathbf{S}	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão de Cauchy.
$\text{DEV}[\bullet]$	Operador desviador em relação a configuração material.
G	Parâmetro material desviador.
\bar{I}_1	Primeiro invariante.
\mathbf{C}_{iso}	Parcela isocórica de \mathbf{C} .
K	Parâmetro volumétrico.
σ_∞	Tensão de equilíbrio elástica do modelo viscoelástico unidimensional.
E_∞	Parâmetro elástico do braço puramente elástico do modelo viscoelástico.
ε	Deformação total do modelo viscoelástico unidimensional.
E_i	Parâmetro elástico de cada braço de Maxwell do modelo viscoelástico.
ε_i^e	Deformação elástica de cada braço de Maxwell do modelo viscoelástico unidimensional.
ε_i^{ve}	Deformação inelástica de cada braço de Maxwell do modelo viscoelástico unidimensional.
E_0	Soma dos parâmetros elásticos.
τ_i	Tempo de relaxação do modelo viscoelástico.
$(\)_n$	Passo de tempo atualizado.
$(\)_{n-1}$	Passo de tempo anterior.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$	Parcela desviadora do tensor de deformação infinitesimal.
\mathbf{Q}_i	Conjunto de variáveis internas em tensão de cada braço viscoelástico.
$\text{dev}[\bullet]$	Operador desviador em relação a configuração espacial.
$\text{tr}(\bullet)$	Traço de um tensor.
ε_{vol}	Parcela volumétrica do tensor de deformação.
ν_0	Poisson elástico.
G_0	Soma dos parâmetros elásticos desviadores.
ε^{ve}	Deformação viscoelástica.
ε^{vp}	Deformação viscoplástica.
Φ	Função de escoamento.
$\boldsymbol{\beta}$	Tensor de <i>Backstress</i> dos modelos VE-VP.
σ_y	Tensão de escoamento dos modelos VE-VP.
$\bar{\varepsilon}^{vp}$	Deformação viscoplástica acumulada.
σ_{y0}, K_1	Parâmetros da função de evolução da tensão de escoamento.
K_2 e θ	Parâmetros da função de evolução da tensão de escoamento.
γ	Multiplicador viscoplástico.
\mathbf{N}	Vetor de fluxo viscoplástico.

μ	Parâmetro viscoso do modelo VE-VP.
m	Parâmetro de dependência da taxa da parcela VP do modelo VE-VP.
H	Parâmetro de encruamento cinemático linear de Prager.
$(\bullet)^{trial}$	Variáveis de testes da parcela viscoplástica.
$g(\mathbf{x})$	Função objetivo.
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto.
x_i^u	Limites superiores das variáveis de projeto.
x_i^l	Limites inferiores das variáveis de projeto.
ξ_{creep}	Peso dos ensaios de fluência.
ξ_{cyclic}	Peso dos ensaios cíclicos.
F_j^{exp}	Valores experimentais dos ensaios em fluência.
F_j^{num}	Valores numéricos ajustados dos ensaios em fluência.
w_j	Peso de cada ponto dos ensaios em fluência.
\mathfrak{F}_j^{exp}	Valores experimentais dos ensaios cíclicos.
\mathfrak{F}_j^{num}	Valores numéricos ajustados dos ensaios cíclicos.
μ_j	Peso de cada ponto dos ensaios cíclicos.
$g^{creep}(\mathbf{x})$	Parcela do valor da função objetivo referente aos ensaios em fluência.
$g^{cyclic}(\mathbf{x})$	Parcela do valor da função objetivo referente aos ensaios cíclicos.
s_{size}	Número de partículas utilizadas no PSO.
φ_1	Parâmetro de influência pessoal do PSO.
φ_2	Parâmetro de influência social do PSO.
w	Parâmetro de inércia do PSO.
N_{iter}	Número de iterações do PSO.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . .	20
2.1	DERIVADAS FRACIONÁRIAS	20
2.2	CINEMÁTICA	23
2.3	HIPERELASTICIDADE COMPRESSÍVEL	26
2.4	VISCOELASTICIDADE	28
2.4.1	Modelo Viscoelástico Clássico 1D	29
2.4.2	Modelo Viscoelástico Clássico 3D - Cinemática Infinitesimal . . .	31
2.4.3	Modelo Viscoelástico Clássico 3D - Cinemática Finita	33
2.4.4	Modelo Viscoelástico Fracionário 1D	34
2.4.5	Modelo Viscoelástico Fracionário 3D - Cinemática Infinitesimal .	36
2.4.6	Modelo Viscoelástico Fracionário 3D - Cinemática Finita	37
2.5	VISCOELASTICIDADE-VISCOPLASTICIDADE	37
2.5.1	Modelo VE-VP Clássico - Cinemática Infinitesimal	38
2.5.2	Modelo VE-VP Fracionário - Cinemática Infinitesimal	43
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	45
3.1	ENSAIOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS	45
3.2	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	46
3.3	DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS IMPLEMENTADOS	48
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
4.1	TESTES COM MODELOS DE VISCOELASTICIDADE	53
4.1.1	Ajuste Individual - Ensaios de fluência-recuperação	53
4.1.2	Ajuste Individual - Ensaios cíclicos	56
4.1.3	Ajuste Simultâneo	59
4.2	TESTES COM MODELOS DE VE-VP	64
4.2.1	Ajuste Individual - Ensaios de fluência-recuperação	64
4.2.2	Ajuste Individual - Ensaios cíclicos	66
4.2.3	Ajuste simultâneo	71
5	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – DEFINIÇÃO DE DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO GRÜNWARD-LETNIKOV	82
	APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DA EXPRESSÃO DO SEGUNDO TENSOR DE TENSÃO DE PIOLA-KIRCHHOFF . .	84

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

A modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos é usualmente realizada por meio de modelos fenomenológicos. Nesta abordagem, a representação do comportamento material é obtida pela combinação de elementos que descrevem separadamente o comportamento viscoso e elástico. Esta decomposição em parcelas dissipativas e conservativas pode ser combinada de várias formas, resultando em diferentes modelos. Alguns destes são os de Maxwell e Kelvin, ou uma combinação dos mesmos, resultando em suas versões generalizadas (WARD; SWEENEY, 2012).

A utilização da viscoelasticidade linear clássica para obtenção das equações constitutivas resulta em equações diferenciais lineares, cuja ordem de derivação é inteira. É bem conhecido que a solução desta abordagem clássica envolve a solução de integrais de convolução que apresentam como propriedade a dependência de todo o histórico de deformação do material. Contudo, devido a úteis propriedades matemáticas destas integrais, o algoritmo constitutivo incremental pode ser reduzido a dependência de somente dois estados. Isto permite uma implementação eficiente do ponto de vista computacional.

Esta intrínseca associação com todo histórico de deformação e com equações diferenciais despertou a atenção para o uso de derivadas fracionárias na modelagem de viscoelasticidade. O conceito de derivadas fracionárias envolve, por sua própria definição, a dependência de todo o histórico da variável sendo diferenciada. Portanto, inicialmente, resulta ser intuitiva a utilização de derivadas de ordem não inteira no ajuste de curvas experimentais de materiais viscoelásticos.

Segundo Rogosin e Mainardi (2014), Scott Blair foi o pioneiro em utilizar derivadas fracionárias para modelagem de materiais viscoelásticos. Blair e Coppen (1943) sugeriram que a modelagem viscoelástica não deveria ser realizada pela combinação aditiva de elementos que descrevem separadamente o comportamento viscoso e elástico, mas sim por um elemento intermediário, capaz de representar uma transição contínua entre estes estados.

Infelizmente, interpretações geométricas ou conceituais das derivadas fracionárias no contexto de viscoelasticidade não é uma tarefa trivial. Bagley e Torvik (1983) buscaram compreender a relação existente entre modelos fenomenológicos fracionários e modelos baseados no comportamento molecular das cadeias poliméricas. A partir deste estudo, os autores verificaram que estas abordagens apresentam a mesma essência, concluindo que a aplicação de derivadas fracionárias em modelos fenomenológicos não é uma escolha arbitrária, mas um método igualmente válido para descrição do comportamento viscoelástico. Outro ponto de vista interessante foi explorado por Heymans e Bauwens (1994). Estes autores propuseram uma interpretação baseada no estudo do arranjo de componentes básicos (elásticos e viscosos) em um formato

fractal. Eles concluíram que as equações diferenciais de ordem não inteira surgem naturalmente na modelagem do comportamento de estruturas fractais.

Em contraste com a sua versão de ordem inteira, as derivadas fracionárias não apresentam uma única definição matemática, isto é, diversas definições podem ser encontradas na literatura. A utilização de cada uma dessas pode ser específica ou mais adequada a cada área de interesse. Formulações no sentido de Caputo, Riemann-Liouville (R.L) e Grünwald-Letnikov (G.L) são largamente utilizadas. Por exemplo, Adolfsson e Enelund (2003) utilizaram a definição de G.L para generalizar o modelo viscoelástico com cinemática finita proposto por Simo (SIMO; HUGHES, 2006). Outros trabalhos utilizaram a definição de R.L para solução do problema fracionário, como o modelo com cinemática finita apresentado em Fukunaga e Shimizu (2015). Pode-se também citar outros trabalhos que utilizaram a definição de Caputo. Di Paola, Pirrotta e Valenza (2011) empregaram a definição de Caputo no ajuste de parâmetros de dados experimentais em fluência e relaxação de dois materiais poliméricos. Zhang *et al.* (2020) apresentaram um algoritmo mais eficiente para solução de equações diferenciais fracionárias do tipo Caputo. Mais detalhes sobre estas e outras definições podem ser encontradas em livros de referência da área, como; Samko, Kilbas e Marichev (1993) e Keith B. Oldham e Spanier (2006). Além disso, Teodoro, Machado e De Oliveira (2019) apresentam uma revisão contendo diversas definições e suas principais propriedades matemáticas. Ao longo deste trabalho, a definição de G.L será empregada e propriamente discutida adiante.

Os trabalhos em viscoelasticidade fracionária seguem duas abordagens principais: os primeiros, descritos no domínio da frequência e os segundos, no domínio do tempo. A primeira abordagem é útil quando estão disponíveis dados experimentais provenientes de testes DMA e se deseja realizar avaliações sobre a dependência do módulo de perda ou do ângulo de defasagem devido à mudanças de composição ou a tratamentos térmicos (ALCOUTLABI; MARTINEZ-VEGA, 2003; HOU; CHEN, 2012; ARIKOGLU, 2014; WOLLSCHEID; LION, 2014). Ainda neste contexto, Xu *et al.* (2020) utilizaram modelos fracionários para análise de vibrações em vigas no domínio da frequência. Recentemente, Amabili, Balasubramanian e Breslavsky (2019) compararam a capacidade preditiva de modelos clássicos (ordem inteira) e fracionários com cinemática finita, no ajuste de aortas humanas, também no domínio da frequência.

A segunda abordagem, no domínio do tempo, resulta em equações diferenciais com operadores de ordem não inteira. Como consequência, os algoritmos constitutivos incrementais dependem de todo o histórico da variável sendo diferenciada, tornando o custo computacional consideravelmente elevado (MILLER; ROSS, 1993; OLDHAM, K.; SPANIER, 2002; SCHMIDT, Andre; GAUL, 2002). Alguns autores têm se dedicado ao estudo de técnicas para redução deste custo, por meio do aprimoramento de técnicas recursivas, as quais possibilitam a utilização de somente uma parcela do histórico da

variável (SCHMIDT, Andre; GAUL, 2002; ZOPF; HOQUE; KALISKE, 2015).

Embora a teoria da viscoelasticidade linear permita a transformação da resposta obtida em um domínio para o outro, ainda não é totalmente explorado na literatura como converter de modo eficiente os parâmetros ajustados no domínio da frequência para o domínio do tempo, principalmente em condições de carregamentos multiaxiais arbitrários. Na breve revisão realizada, observou-se também que não é comum a comparação quantitativa de ajustes utilizando diferentes condições de testes mecânicos, quando utilizados modelos fracionários no domínio do tempo. Além disso, na visão do autor, também não é comum a identificação de um único conjunto de parâmetros para predição de diferentes testes simultaneamente.

Embora outros trabalhos tenham realizado comparações no domínio do tempo, na visão do autor, estes trabalhos são ainda raros. Além disso, certas comparações são feitas utilizando apenas uma taxa de tensão ou deformação por procedimento de ajuste, isto é, não são realizados ajustes simultâneos em varias condições de carregamento, como em Meng, Yin e Drapaca (2019). Pode-se também citar o trabalho realizado por Xiao, Sun e Chen (2016), onde foram realizadas comparações em várias condições de carregamento no domínio do tempo, contudo, neste trabalho citado foram utilizados dados numéricos sintéticos.

Baseado no exposto, o presente trabalho tem por objetivo analisar em que medida uma classe de modelos fracionários viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos descritos no domínio do tempo são capazes de melhorar a capacidade preditiva de ajuste de curvas experimentais, de um material polimérico amplamente utilizado em aplicações biomédicas, o Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE), quando comparados com os modelos clássicos. Para tal fim foram utilizadas seis curvas experimentais extraídas do trabalho de Faria (2017). Destas, três são provenientes de ensaios do tipo fluência-recuperação e as outras três de ensaios cíclicos. É importante destacar que a natureza distinta destes ensaios permite enquadrar este trabalho em uma classe que contribui apresentando ajustes utilizando dados experimentais em condições de testes mecânicos combinados. Os modelos viscoelásticos são formulados com cinemática infinitesimal e finita, enquanto os viscoelásticos-viscoplásticos são formulados com cinemática infinitesimal. Para atingir este objetivo, é necessário o cumprimento dos seguintes objetivos secundários:

- Implementar o modelo viscoelástico de Maxwell Generalizado com cinemáticas infinitesimal e finita.
- Estudar a definição de Grünwald-Letnikov (G.L) para derivadas fracionárias.
- Implementar a classe de modelos de Maxwell Generalizado utilizando derivadas fracionárias com cinemáticas infinitesimal e finita.

- Estender um modelo viscoelástico-viscoplástico utilizando derivadas fracionárias.
- Implementar um protocolo de otimização para o ajuste dos parâmetros dos modelos.
- Realizar a comparação e discussão da capacidade preditiva dos modelos estudados

No que diz respeito a organização do texto, no Capítulo 2 são apresentados os principais aspectos cinemáticos e constitutivos necessários a formulação dos modelos viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos, com ordem de derivação inteira e fracionária. Os ensaios implementados e o procedimento híbrido adotado para o ajuste de parâmetros são apresentados no Capítulo 3. No Capítulo 4 são discutidos os resultados obtidos utilizando as duas classes de modelos apresentadas ao longo do Capítulo 2. Finalmente, o Capítulo 5 aborda as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo apresenta os principais aspectos teóricos necessários para a formulação dos modelos constitutivos viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos, de ordem inteira e fracionária.

Inicialmente é apresentada uma breve revisão sobre derivadas fracionárias, com ênfase na definição utilizada neste texto. Em seguida é apresentada uma série de definições clássicas da mecânica do contínuo, com o intuito de estabelecer a notação necessária para a apresentação dos modelos de viscoelasticidade em deformação infinitesimal e finita, de ordem inteira e fracionária. Finalmente é abordado um conjunto de modelos viscoelásticos-viscoplásticos em cinemática infinitesimal.

2.1 DERIVADAS FRACIONÁRIAS

O cálculo fracionário remonta aos primórdios do cálculo integro-diferencial, sendo atribuído a L'Hôpital e Leibniz as primeiras especulações acerca do tema. Em 1695 por meio de conversas por cartas, os autores se questionaram sobre o significado de uma derivada $D^n = d^n f(x)/d^n$, de uma função $f(x)$, onde n correspondia a um termo fracionário igual a $1/2$ (MILLER; ROSS, 1993).

Ao longo do seu desenvolvimento teórico, o conceito de derivada fracionária tem sido aplicado nas mais diferentes áreas de pesquisa. Como exemplo, podem ser citados os problemas envolvendo: controle de sistemas, difusão, modelagem de circuitos elétricos e modelagem constitutiva de materiais viscoelásticos (HILFER, 2000; MCBRIDE, 2008). Esta última constitui o alvo de estudo neste trabalho. O modelo viscoelástico fracionário mais simples pode ser obtido a partir da generalização do dispositivo de Maxwell. Conforme apresentado na Figura (1), a versão fracionária é obtida por meio da substituição do elemento viscoso por um elemento capaz de representar uma transição contínua entre o comportamento elástico e viscoso. Este novo elemento possui um parâmetro adicional α , denominado ordem de derivação. Este elemento recupera o comportamento elástico e viscoso, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, respectivamente (HAVEROTH, 2015).

Desde o primeiro registro, o cálculo fracionário despertou a atenção de vários matemáticos, como; Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemman e Laurent. Contudo, foi somente a partir do século XIX que a teoria atingiu maior rigor e desenvolvimento na matemática moderna. A partir deste estágio, os resultados obtidos estenderam o domínio fracionário n para α , onde agora a ordem de derivação α pode ser um número racional ou irracional, natural ou complexo. Desta forma, atualmente o termo fracionário está relacionado somente às origens do método (MILLER; ROSS, 1993).

Em decorrência da dificuldade de realizar uma interpretação física e geométrica,

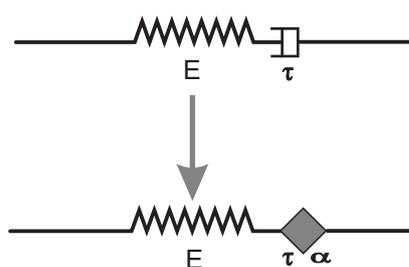


Figura 1 – Representação reológica unidimensional do dispositivo viscoelástico de Maxwell clássico e fracionário.

diversas definições para a derivada fracionária podem ser encontradas na literatura. As formulações no sentido de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov são largamente utilizadas (OLDHAM, K.; SPANIER, 2002; MILLER; ROSS, 1993; SCHMIDT, Andre; GAUL, 2002). Teodoro, Machado e De Oliveira (2019) apresentam uma revisão sobre as principais definições.

No artigo de Caputo e Mainardi (1971), um dos pioneiros em viscoelasticidade fracionária, os autores generalizaram o modelo viscoelástico de Zener introduzindo um mecanismo de memória por meio da utilização de derivadas fracionárias. Nesse trabalho, a solução da equação constitutiva é obtida a partir da definição de derivada fracionária proposta por Caputo. Os autores aplicaram o modelo proposto em ajuste de curvas experimentais da função energia de dissipação específica de metais e vidros, analisando assim o desempenho do modelo ao longo de uma faixa de frequência.

Padovan (1987) foi um dos primeiros autores a apresentar uma aplicação de um modelo constitutivo fracionário em uma discretização de Elementos Finitos (MEF). Nesse artigo foram utilizados algoritmos implícitos e explícitos em conjunto com viscoelasticidade fracionária. As equações constitutivas foram discretizadas pela definição de Grünwald-Letnikov (G.L). Um dos primeiros trabalhos direcionados a formulação de modelos tridimensionais foi o de Makris (1997). Nesse trabalho, o autor mostra que o modelo isotrópico fracionário tridimensional pode ser obtido diretamente pela extensão do modelo unidimensional. O modelo proposto pelo autor é linear e restrito à cinemática linear.

Schmidt e Gaul em (2002) e (2006) publicaram dois importantes artigos relacionadas à aplicação dinâmica em MEF. Nos dois trabalhos, os autores utilizaram a definição de G.L para solução do problema constitutivo fracionário. O segundo artigo apresenta algoritmos com estratégias de redução do custo computacional.

Em relação à viscoelasticidade fracionária não linear, pode-se citar o trabalho de Müller *et al.* (2011), onde o parâmetro de relaxação é atualizado segunda uma equação diferencial dependente da viscosidade do material. O autor apresenta aplicações em um material polimérico submetido a ensaios de tração convencionais e cíclicos, obtendo resultados numéricos em concordância com os experimentais.

Zopf, Hoque e Kaliske (2015) comparam os resultados obtidos por dois algoritmos para solução do modelo de Zener fracionário em cinemática finita. O primeiro algoritmo consiste em utilizar a abordagem clássica que considera todo histórico para solução da equação fracionária, enquanto o segundo é uma nova proposta recursiva. Finalmente, os autores realizam simulações em MEF de conformação de elastômeros e analisam a acurácia dos algoritmos.

Alotta, Barrera, Alan CF Cocks *et al.* (2017) realizaram considerações do ponto de vista termodinâmico e sobre a variação do coeficiente de Poisson com o tempo. Os autores verificaram que, para o modelo fracionário satisfazer a condição de dissipação não negativa, os parâmetros materiais devem ser não negativos e a ordem de derivação $\alpha \in [0, 1]$. Em um artigo do ano seguinte (2018), os mesmos autores implementaram o modelo apresentado em uma rotina material do programa comercial Abaqus. Para a solução da equação diferencial fracionária foi utilizada a definição de G.L, sendo também abordados aspectos de redução do custo computacional em análise dinâmica explícita e implícita. Em um segundo artigo de (2018), os autores realizaram o ajuste de parâmetros em fluência e recuperação. Em seguida utilizaram os parâmetros para análises MEF de desgaste de próteses de joelho fabricadas em polietileno de alta densidade (HDPE).

Stankiewicz (2018) propõe um modelo fracionário para modelagem de materiais biológicos. O modelo reológico é formado por dois elementos generalizados em paralelo, onde cada elemento é também ponderado por uma função peso exponencial. Os resultados apresentados pela autora mostraram que essa abordagem aumentou a capacidade preditiva, principalmente no que diz respeito a relaxação do material.

Conforme mencionado anteriormente, a literatura apresenta diversas definições de derivadas fracionárias. Dentre estas, a definição de Grünwald-Letnikov (G.L) não requer a utilização explícita de operações de integração e derivação, sendo necessária somente a avaliação da função. Por este motivo, esta definição é aplicada frequentemente em problemas numéricos, sendo definida por

$${}_a D_b^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} [\Delta t]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t - j\Delta t). \quad (1)$$

onde, $f(t)$, Δt , α e N , correspondem, respectivamente, à função sendo diferenciada, ao intervalo de tempo, a ordem de derivação e ao número de pontos passados utilizados. Enquanto que, a e b representam os limites onde a função está definida. No Apêndice (A) são apresentadas as principais etapas para obtenção desta expressão. Além disso, os coeficientes A_{j+1} são definidos por

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = A_j \frac{j - 1 - \alpha}{j}, \quad (2)$$

onde $\Gamma(\bullet)$ corresponde a função gama. Ainda que neste trabalho seja utilizada so-

mente a definição de G.L, serão apresentadas brevemente as definições de Riemann-Liouville (R.L) e de Caputo. A definição de R.L é dada pela derivada de ordem inteira de uma integral, conforme

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad m-1 \leq \alpha \leq m. \quad (3)$$

Enquanto a definição de Caputo é definida pela integral da derivada de ordem inteira da função, conforme

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m, \quad (4)$$

onde,

$$f^{(m)}(\tau) = \frac{d^m f(\tau)}{dt^m}. \quad (5)$$

Geralmente o termo m é tomado como sendo o primeiro inteiro maior que a ordem de derivação α .

A definição de Caputo cumpre um papel importante em problemas com condições iniciais não nulas, uma vez que, ao contrário das definições de R.L e G.L, as condições iniciais possuem significado físico na definição de Caputo. Outra diferença importante entre a definição de Caputo e as outras, consiste no fato que, a primeira fornece valor nulo para a derivada de uma constante. Para uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$ e com condições iniciais nulas ($f(a) = 0$), estas três definições apresentam o mesmo resultado (PODLUBNY, 1998; FUKUNAGA; SHIMIZU, 2015).

2.2 CINEMÁTICA

Antes de compreender a resposta macroscópica de um corpo em termos do campo de tensões atuante em cada ponto material, é necessário apresentar certos aspectos cinemáticos. Desta forma, nesta seção são apresentadas as entidades cinemáticas necessárias para a formulação dos modelos constitutivos estudados. Os conceitos tensoriais utilizados ao longo deste texto podem ser revisados em livros clássicos da mecânica do contínuo (HOLZAPFEL, 2002; GURTIN; FRIED; ANAND, 2010; LAI *et al.*, 2009).

Seja um corpo β representado por um meio contínuo, conforme mostrado na Figura (2). Considere a existência de uma função de mapeamento χ , que realiza o mapeamento de pontos materiais de uma configuração de referência Ω_0 para uma configuração deformada Ω . A relação cinemática entre uma fibra, $d\mathbf{X}$, na configura-

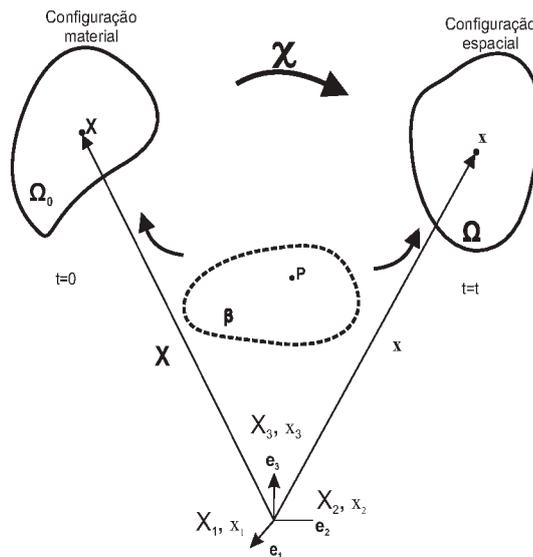


Figura 2 – Corpo contínuo β e sua configuração material Ω_0 e espacial Ω

ção material e sua nova condição, dx , na configuração espacial, é dada pelo tensor gradiente de mapeamento \mathbf{F} ,

$$dx = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{X}. \quad (6)$$

Na Equação (6), os tensores de primeira ordem \mathbf{X} e \mathbf{x} , correspondem aos vetores que descrevem a posição da partícula em relação às configurações material e espacial, respectivamente, enquanto o tensor \mathbf{F} é definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{I}. \quad (7)$$

Na Equação (7), $\nabla \mathbf{u}$ e \mathbf{I} , correspondem, respectivamente, aos tensores gradiente de deslocamento e identidade de segunda ordem. Outra entidade importante a ser definida é o determinante do gradiente de mapeamento, J ,

$$J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{dv}{dV} > 0. \quad (8)$$

O Jacobiano, J , pode ser visto como uma medida da relação entre o volume espacial, dv , e material, dV .

Qualquer deformação pode ser localmente decomposta em uma parcela isocórica e outra volumétrica. No primeiro tipo citado, as deformações ocorrem sem variação de volume, sendo o Jacobiano unitário ($J = 1$). A parcela volumétrica por sua vez consiste somente em contrações ou dilatações. Em um estado de deformação puramente volumétrico, o tensor \mathbf{F} é um tensor esférico proporcional à razão de contração (ou

dilatação), γ_v ,

$$\mathbf{F} = \gamma_v \mathbf{I}. \quad (9)$$

No regime de deformações finitas, esta decomposição é comumente realizada de forma multiplicativa,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \mathbf{F}_{iso} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \mathbf{F}_{iso}, \quad (10)$$

Na expressão (10), \mathbf{F}_{iso} e \mathbf{F}_{vol} , correspondem, respectivamente, as parcelas isocóricas e volumétricas.

Tendo em vista que existem diversas definições de tensores de deformação, a partir deste ponto são apresentados apenas os tensores que são utilizados neste trabalho. Os tensores materiais de deformação de Cauchy-Green à direita, \mathbf{C} , e de Green-Lagrange, \mathbf{E} , são definidos por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [\nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla^T \mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}]. \quad (12)$$

Deve-se destacar que o sobrescrito T corresponde a operação de transposição de um tensor. Além disso, define-se também o tensor de deformação espacial, \mathbf{b} , chamado de Cauchy-Green à esquerda,

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (13)$$

O tensor de deformação infinitesimal ε pode ser obtido a partir da parcela simétrica do $\nabla \mathbf{u}$, isto é, são desprezados os termos de ordem superior do tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} , como definido

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}). \quad (14)$$

Outra operação importante a ser definida é a decomposição polar. Esta consiste em decompor o movimento gerado pelo tensor gradiente de mapeamento em uma parcela de puro alongamento (*stretch*) e outra de pura rotação,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (15)$$

Na Equação (15), \mathbf{R} é um tensor de rotação e possui a propriedade de ortogonalidade $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, enquanto os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são tensores simétricos positivos-definidos, denominados tensores de alongamento material e espacial, respectivamente,

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{V} \mathbf{V} = \mathbf{b}. \quad (16)$$

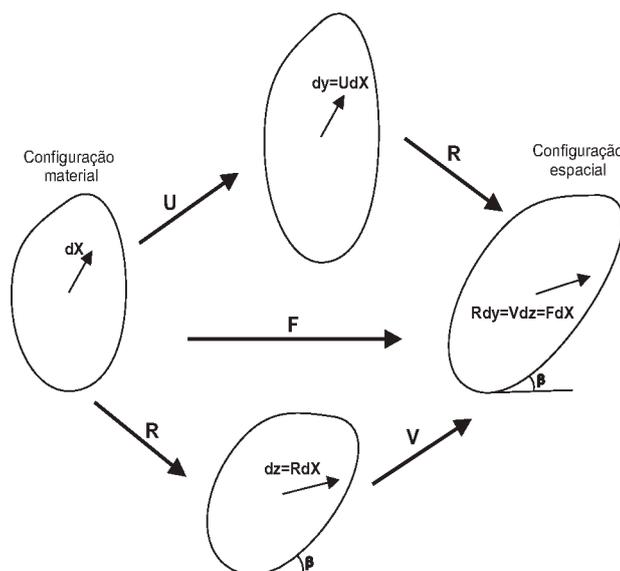


Figura 3 – Decomposição Polar do tensor gradiente de deformação.

A Figura (3) apresenta uma esquematização dessa operação de decomposição. Conforme citado anteriormente, o tensor F mapeia uma fibra dX na configuração de referência, em sua contraparte espacial dx , por meio da operação $dx = FdX$. A configuração final pode também ser obtida aplicando primeiramente uma operação de puro alongamento realizado pelo tensor U , seguido por uma rotação R . O mesmo resultado pode ser obtido pela combinação de uma pura rotação, com subsequente alongamento imposto por V .

A partir do exposto acima, é possível definir o tensor de deformação logarítmica espacial ϵ_{ln}

$$\epsilon_{ln} = \ln(V) = \sum_{a=1}^3 \ln(\lambda_a)(n_a \otimes n_a). \quad (17)$$

Na Equação (17), λ_a são os autovalores (alongamentos) de U e V . Enquanto n_a são os autovetores de V . É interessante notar que, em condições de puro alongamento, o tensor de rotação é igual ao tensor identidade. Desta forma, os autovetores dos tensores V e U coincidem ($n_a = N_a$).

2.3 HIPERELASTICIDADE COMPRESSÍVEL

A descrição cinemática apresentada na seção anterior é válida para todo corpo contínuo, independente de sua natureza material. Contudo, a relação entre a deformação aplicada e a resposta em tensão é particular a cada classe de materiais. As equações auxiliares que permitem obter esta relação são chamadas leis constitutivas materiais. Na presente seção são apresentadas as formulações necessárias para a

tratativa de materiais hiperelásticos. Estas são utilizadas na formulação dos modelos viscoelásticos e viscoelásticos-viscoplásticos.

Modelos constitutivos hiperelásticos estão associados a materiais que possuem uma função de energia livre de Helmholtz Ψ , também chamada de função energia livre de deformação, cuja derivada em relação ao tensor \mathbf{F} de mapeamento fornece o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , também denominado tensor de tensão nominal,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (18)$$

Nesta classe de modelos, o estado de tensão independe da taxa de deformação e do histórico das forças internas (HOLZAPFEL, 2002).

A função de energia livre pode ser escrita em termos de outros tensores, como \mathbf{C} e \mathbf{E} . As equações

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (19)$$

apresentam outras formas possíveis, onde \mathbf{S} é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff (P-K). Em relação ao primeiro, o segundo tensor de P-K apresenta como principal diferença a condição de simetria, sendo frequentemente utilizado em implementações computacionais.

Uma vez que, neste texto, os modelos constitutivos viscoelásticos no regime de deformação finita são obtidos em termos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff, convém definir as relações existentes entre os tensores de tensão \mathbf{P} , \mathbf{S} e $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}. \quad (20)$$

Na Expressão (20), o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ representa a tensão de Cauchy. Usualmente, a função de energia livre de Helmholtz é decomposta em parcelas dependentes de deformações isocóricas e volumétricas,

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}}) + \Psi_{\text{vol}}(\mathbf{J}). \quad (21)$$

Além disso, a decomposição cinemática multiplicativa do tensor \mathbf{C} é definida por

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{\text{iso}} = \mathbf{J}^{-2/3} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_{\text{vol}} = \mathbf{J}^{2/3} \mathbf{I} \end{cases}. \quad (22)$$

Na expressão anterior, \mathbf{C}_{iso} é a parcela isocórica de \mathbf{C} , enquanto que \mathbf{C}_{vol} corresponde à parcela volumétrica. Desta forma, o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff,

\mathbf{S} , pode ser escrito em termos de uma combinação aditiva de uma parcela esférica e outra desviadora,

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial \mathbf{C}}. \quad (23)$$

Expandindo as derivadas da equação acima e utilizando as devidas propriedades tensoriais, chega-se a

$$\mathbf{S} = \underbrace{J \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}}_{\mathbf{S}_{\text{vol}}(J)} + \underbrace{J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} \right]}_{\mathbf{S}_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}, \quad (24)$$

onde, o termo $\text{DEV}[\bullet]$ corresponde ao operador desviador em relação a descrição material, definido por

$$\text{DEV}[\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}. \quad (25)$$

As etapas de derivação da Equação (24) são apresentadas no Apêndice (B) do presente texto e podem ser obtidas em detalhes em Holzapfel (2002).

A literatura propõe várias formas de escrever a função energia de deformação, sendo frequente a utilização da função de Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden e Hencky (SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2011). No presente trabalho é utilizado o modelo Neo-Hookeano, definido por

$$\Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{I}}_1) = \frac{1}{2} G (\bar{\mathbf{I}}_1 - 3), \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}}). \quad (27)$$

Nas expressões acima, os termos G , $\bar{\mathbf{I}}_1$ e $\text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}})$, correspondem ao módulo de cisalhamento, ao primeiro invariante e ao traço do tensor \mathbf{C}_{iso} , respectivamente. A derivação completa do modelo hiperelástico Neo-Hookeano é apresentada no Apêndice (B). A sua expressão final é dada por

$$\mathbf{S} = K(\ln J) \mathbf{C}^{-1} + G(J^{-2/3}) \text{DEV}(\mathbf{I}), \quad (28)$$

Na expressão anterior, K e G correspondem aos parâmetros volumétrico e desviador do modelo material, respectivamente.

2.4 VISCOELASTICIDADE

A modelagem constitutiva clássica de materiais viscoelásticos é usualmente realizada por meio de modelos fenomenológicos, onde a representação do comportamento material é obtida pela combinação de elementos que descrevem o comporta-

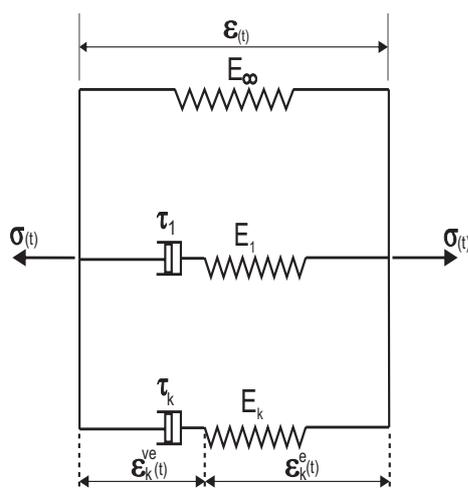


Figura 4 – Modelo de Maxwell generalizado unidimensional.

mento elástico e viscoso. Em comparação com os modelos hiperelásticos apresentados anteriormente, os modelos viscoelásticos apresentam como principal diferença a existência de mecanismos dissipativos. Desta forma, o estado de tensão atual de um ponto material é dependente da história do processo cinemático sofrido por este (em termos gerais é dependente igualmente da história térmica, mas o presente estudo está restrito a processos em temperatura constante).

Nesta seção são apresentados os modelos viscoelásticos utilizados no presente trabalho. Os modelos com derivadas de ordem inteira são denominados clássicos, enquanto os de ordem não inteira são denominados fracionários. Primeiro é formulado o modelo unidimensional (1D) clássico, em seguida é apresentado o modelo tridimensional (3D) em deformação infinitesimal, bem como em cinemática finita. Em seguida, os modelos clássicos são estendidos para o domínio fracionário.

2.4.1 Modelo Viscoelástico Clássico 1D

A modelagem de materiais viscoelásticos pode ser realizada pela combinação de elementos reológicos de Maxwell e Kelvin (BRINSON, 2008; WARD; SWEENEY, 2012; SIMO; HUGHES, 2006). A Figura (4) apresenta o modelo formado pela combinação de um elemento elástico em paralelo com braços de Maxwell, denominado de Maxwell generalizado.

A tensão total $\sigma(t)$ do modelo unidimensional representado na Figura (4) é dada pela soma da tensão σ_∞ no elemento de constante elástica E_∞ , e pela contribuição de cada dispositivo de Maxwell σ_i , onde o índice $(\bullet)_i$ corresponde ao respectivo braço de Maxwell,

$$\sigma = E_{\infty}\varepsilon + \sum_{i=1}^k E_i \varepsilon_i^e. \quad (29)$$

Na Equação (29), os símbolos ε , E_i e ε_i^e correspondem, respectivamente, à deformação total, ao parâmetro elástico e à deformação elástica de cada braço $(\bullet)_i$. Conforme pode ser visto nesta expressão, a obtenção da tensão total depende da determinação das deformações elásticas ε_i^e de cada braço. Estas podem ser obtidas a partir da decomposição aditiva da deformação total,

$$\varepsilon = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^{ve}. \quad (30)$$

Na Equação (30), ε_i^{ve} corresponde a deformação inelástica de cada dispositivo de Maxwell. Utilizando a decomposição aditiva apresentada na expressão anterior, podemos escrever a Equação (29) também em função das deformações inelásticas,

$$\sigma = E_0\varepsilon - \sum_{i=1}^k E_i \varepsilon_i^{ve}. \quad (31)$$

Onde define-se o parâmetro E_0 ,

$$E_0 = E_{\infty} + \sum_{i=1}^k E_i. \quad (32)$$

As deformações inelásticas ε_i^{ve} podem ser obtidas pela solução da equação diferencial

$$\frac{d\varepsilon_i^{ve}}{dt} + \frac{1}{\tau_i} \varepsilon_i^{ve} = \frac{1}{\tau_i} \varepsilon, \quad (33)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon_i^{ve} = 0$$

denominada também de equação de evolução das variáveis internas; onde τ_i é o tempo de relaxação, definido a partir da relação entre o fator de proporcionalidade viscoso, μ , e elástico E ; $\tau = \mu/E$.

O modelo apresentado é conhecido como clássico unidimensional em sua forma contínua no tempo, e permite a obtenção de soluções analíticas em casos particulares de carregamento. Entretanto, quando se deseja utilizar este modelo em procedimentos numéricos, é preciso definir uma discretização temporal, e obter assim procedimentos ou formulações incrementais.

Na literatura, é comum a utilização de uma aproximação de segunda ordem para discretização da evolução das variáveis internas viscoelásticas, como apresentado em Simo e Hughes (2006). Contudo, no presente trabalho é utilizada uma abordagem de primeira ordem, de modo a compatibilizar com a ordem do algoritmo utilizado para discretização dos modelos fracionários apresentados posteriormente.

As expressões no domínio contínuo do tempo podem ser escritas em instantes discretos no intervalo de análise $t \in [0, T]$, onde a deformação total atual, ε_n , no

instante $(\)_n$, e todas as variáveis no instante anterior, $(\)_{n-1}$, são assumidas como conhecidas. Desta forma, pode-se escrever as seguintes expressões incrementais

$$[\varepsilon_i^e]_n = \varepsilon_n - [\varepsilon_i^{ve}]_n. \quad (34)$$

$$\sigma_n = E_\infty \varepsilon_n + \sum_{i=1}^k E_i [\varepsilon_i^e]_n = E_0 \varepsilon_n - \sum_{i=1}^k E_i [\varepsilon_i^{ve}]_n. \quad (35)$$

Utilizando o método de Euler implícito para discretização temporal da Equação de evolução (33), obtém-se uma expressão incremental de primeira ordem para a deformação inelástica, ε_i^{ve} ,

$$[\varepsilon_i^{ve}]_n = \left(\frac{\tau_i}{1 + \tau_i/\Delta t} \right) \left[\frac{1}{\tau_i} \varepsilon_n + \frac{1}{\Delta t} [\varepsilon_i^{ve}]_{n-1} \right]. \quad (36)$$

Onde, Δt corresponde ao intervalo de tempo adotado. Finalmente, o problema constitutivo incremental viscoelástico pode ser escrito

$$\text{dado } \Omega = \{[\varepsilon_i^{ve}]_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n\}, \quad \begin{cases} \sigma_n = E_0 \varepsilon_n - \sum_{i=1}^k E_i [\varepsilon_i^{ve}]_n \\ \text{calcule: } [\varepsilon_i^{ve}]_n \quad \text{conforme Equação (36)} \end{cases}. \quad (37)$$

2.4.2 Modelo Viscoelástico Clássico 3D - Cinemática Infinitesimal

O modelo em cinemática infinitesimal tridimensional é formulado em função de termos desviadores e volumétricos associados a cada braço de Maxwell. Esta abordagem é similar à apresentada em Adolfsson e Enelund (2003) em seu modelo fracionário em cinemática finita, e será aqui utilizada para facilitar a notação.

Admite-se que a parcela volumétrica das deformações tem resposta puramente elástica. Desta forma, a evolução de processos inelásticos, descritos mediante variáveis internas, é dada exclusivamente em função das parcelas desviadoras de tensões e deformações (ADOLFSSON; ENELUND, 2003; SIMO, 1987; KHAJEHSAEID, 2018).

A Equação de tensão para um ponto material para o modelo tridimensional é dada por

$$\sigma = \frac{\partial \Psi_\infty(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_i(\varepsilon_{dev})}{\partial \varepsilon} - \sum_{i=1}^k \mathbf{Q}_i, \quad (38)$$

Onde, ε_{dev} e \mathbf{Q}_i , correspondem, respectivamente, a parcela desviadora do tensor de deformação infinitesimal e ao tensor de variáveis internas viscoelásticas em tensão de cada dispositivo $(\bullet)_i$ de Maxwell. Deve-se destacar que o mesmo modelo poderia

ser construído utilizando variáveis internas em deformação. A equação diferencial de ordem inteira para evolução das variáveis Q_i pode ser escrita como

$$\dot{Q}_i + \frac{Q_i}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_i} \text{dev} \left[\frac{\partial \Psi_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}} \right], \quad (39)$$

onde $\text{dev}[\bullet]$ é o operador desviador, definido como

$$\text{dev}(\bullet) = (\bullet) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bullet) \mathbf{I}. \quad (40)$$

Neste modelo, as parcelas volumétricas e desviadoras da função energia de deformação, utilizadas para o regime infinitesimal, são definidas por

$$\begin{cases} \Psi_\infty(\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}) = \Psi_{\infty_{vol}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}) + \Psi_{\infty_{iso}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}) = \frac{1}{2} K_\infty [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + G_\infty [\boldsymbol{\varepsilon}_{dev} : \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}] \\ \Psi_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}) = G_i [\boldsymbol{\varepsilon}_{dev} : \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}] \end{cases} \quad (41)$$

Na Equação (41), as variáveis K e G correspondem aos parâmetros elásticos associados as parcelas volumétrica e desviadora, respectivamente. Enquanto os tensores $\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$ correspondem a decomposição volumétrica-desviadora do tensor de deformação infinitesimal, $\boldsymbol{\varepsilon}$. Sendo estes tensores definidos por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vol} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}. \quad (42)$$

Finalmente, utilizando as funções de deformação apresentadas e as devidas propriedades tensoriais, a expressão para a tensão total do modelo viscoelástico pode ser obtida, conforme

$$\boldsymbol{\sigma} = K_\infty \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2G_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} - \sum_{i=1}^k Q_i. \quad (43)$$

O parâmetro K_0 pode ser obtido a partir da relação entre a soma dos parâmetros desviadores G_0 e o coeficiente de Poisson inicial do material ν_0 , de acordo com a Equação 44. No presente trabalho, uma vez que a parcela volumétrica foi assumida como sendo puramente elástica, os parâmetros K_0 e K_∞ foram assumidos como sendo iguais.

$$K_0 = \frac{2(1 + \nu_0)G_0}{3(1 - 2\nu_0)}, \quad (44)$$

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^k G_i \quad (45)$$

Deve ser feita uma observação importante sobre a hipótese adotada em relação ao coeficiente de Poisson. Este parâmetro, em materiais viscoelásticos, é geralmente função do tempo (ou frequência), como apresentado por Tschoegl, Knauss e

Emri (2002) para modelos viscoelásticos clássicos. No entanto, para levar em conta esta variação na modelagem, a deformação na direção transversal também deve ser conhecida, ou então devem ser realizados experimentos em condições puramente hidrostáticas e desviadoras.

Alotta, Barrera, Alan CF Cocks *et al.* (2017) apresentam considerações relativas a esta questão em modelos fracionários. Os autores mostraram que, se as escalas de tempo das parcelas volumétricas e desviadoras forem diferentes, o coeficiente de Poisson será função do tempo (ou da frequência). Contudo, em um trabalho posterior, os mesmos autores assumiram a dificuldade em considerar este fenômeno de uma forma prática e utilizaram o Poisson inicial, ν_0 , no ajuste de parâmetros de amostras de UHMWPE submetidas a testes experimentais de fluência-recuperação (ALOTTA; BARRERA; PEGG, 2018). As mesmas considerações são também utilizadas no presente trabalho, uma vez que não estão disponíveis os dados experimentais necessários para levar em conta esta variação ao longo do tempo.

Conforme citado anteriormente, a formulação incremental do modelo 3D é similar àquela obtida para o modelo 1D, podendo ser obtida de forma semelhante à discutida na Seção 2.4.1. Desta forma, utilizando novamente uma discretização de primeira ordem para o tensor de variáveis internas \mathbf{Q}_i , podemos escrever o problema constitutivo viscoelástico incremental,

$$\text{dado } \Omega = \{[\mathbf{Q}_i]_{n-1}, \mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_n\}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_n = [\boldsymbol{\sigma}_\infty]_n + \sum_{i=1}^k 2G_i [\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}]_n - \sum_{i=1}^k [\mathbf{Q}_i]_n \\ \text{calcule: } [\mathbf{Q}_i]_n \text{ conforme equação (47)} \end{cases}, \quad (46)$$

$$[\mathbf{Q}_i]_n = \left(\frac{\tau_i}{1 + \tau_i/\Delta t} \right) \left[\frac{1}{\tau_i} (2G_i [\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}]_n) + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{Q}_i]_{n-1} \right], \quad (47)$$

onde,

$$[\boldsymbol{\sigma}_\infty]_n = K_\infty \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{I} + 2G_\infty [\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}]_n. \quad (48)$$

Novamente, os índices $(\bullet)_n$ e $(\bullet)_{n-1}$, correspondem, respectivamente, ao estado atual t_n , e anterior t_{n-1} .

2.4.3 Modelo Viscoelástico Clássico 3D - Cinemática Finita

Esta seção apresenta a extensão do modelo 3D apresentado anteriormente para cinemática finita. Este modelo é apenas uma variação do modelo de Simo (1987) para o caso onde cada braço de Maxwell apresenta seus próprios parâmetros volumétricos ou desviadores. As mesmas considerações feitas aqui são também realizadas por Adolfsson e Enelund (2003) em seu modelo fracionário. Logo, motivado pelas Equações (38) e (39) e pelas considerações hiperelásticas apresentadas na Seção

(2.3), as expressões para tensão total e evolução das variáveis internas podem ser definidas por

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\infty_{\text{vol}}}(\mathbf{J}) + \mathbf{S}_{\infty_{\text{iso}}}(\mathbf{C}_{\text{iso}}) + \mathbf{J}^{-2/3} \sum_{i=1}^k \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_{i_{\text{iso}}}(\mathbf{C}_{i_{\text{iso}}})}{\partial \mathbf{C}_{i_{\text{iso}}}} \right] - \sum_{i=1}^k \mathbf{Q}_i, \quad (49)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_i + \frac{\mathbf{Q}_i}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_i} \mathbf{J}^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_{i_{\text{iso}}}(\mathbf{C}_{i_{\text{iso}}})}{\partial \mathbf{C}_{i_{\text{iso}}}} \right]. \quad (50)$$

Nas relações acima também foi utilizada a decomposição aditiva da energia de deformação em uma parcela isocórica e volumétrica. Mais detalhes podem ser vistos na seção anterior que trata sobre hiperelasticidade e no Apêndice (B). O termo $\text{DEV}[\bullet]$ é o operador desviador em relação a configuração material definido na Equação (25).

Utilizando um esquema implícito de primeira ordem, a versão discretizada pode ser escrita conforme apresentado abaixo, onde os índices $(\bullet)_n$ e $(\bullet)_{n-1}$, correspondem, respectivamente, ao estado atual t_n , e anterior t_{n-1} .

$$\text{dado, } \Omega = \{[\mathbf{Q}_i]_{n-1}, \mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_n\}, \quad \begin{cases} \mathbf{S}_n = [\mathbf{S}_{\infty}]_n + [\mathbf{S}_i]_n - \sum_{i=1}^k [\mathbf{Q}_i]_n \\ \text{calcule:} \\ [\mathbf{Q}_i]_n = \left(\frac{\tau_i}{1 + \tau_i / \Delta t} \right) \left[\frac{G_i}{\tau_i} \mathbf{J}_n^{-2/3} \text{DEV} [\mathbf{I}]_n + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{Q}_i]_{n-1} \right] \end{cases}, \quad (51)$$

onde,

$$[\mathbf{S}_{\infty}]_n = K_{\infty} \ln(\mathbf{J}_n) \mathbf{C}_n^{-1} + G_{\infty} \mathbf{J}_n^{-2/3} \text{DEV} [\mathbf{I}]_n, \quad (52)$$

$$[\mathbf{S}_i]_n = \mathbf{J}_n^{-2/3} \sum_{i=1}^k G_i \text{DEV} [\mathbf{I}]_n, \quad (53)$$

2.4.4 Modelo Viscoelástico Fracionário 1D

Nesta seção é apresentado o modelo viscoelástico fracionário unidimensional baseado em variáveis internas. Conforme será mostrado, os modelos fracionários são semelhantes aos clássicos mostrados anteriormente. A única diferença consiste na evolução das variáveis internas, dada agora por uma equação diferencial de ordem não inteira.

O modelo fracionário consiste em substituir o elemento viscoso por um elemento que permite a transição contínua entre o comportamento viscoso e elástico, conforme o modelo reológico unidimensional mostrado na Figura (5). Pode-se observar, a partir desta figura, que cada braço reológico fracionário pode assumir um comportamento puramente elástico com rigidez $E = E_i/2$, quando $\alpha_i = 0$, até um comportamento viscoelástico clássico de Maxwell, com rigidez $E = E_i$ e tempo de relaxação τ_i , quando $\alpha_i = 1$.

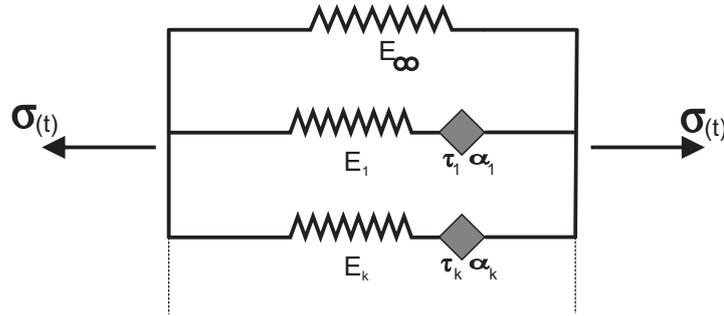


Figura 5 – Representação reológica unidimensional do modelo sólido generalizado fracionário.

Motivado pela Equação (31), podemos escrever a expressão para a tensão unidimensional do modelo viscoelástico fracionário,

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \sum_{i=1}^k E_i \varepsilon_i^{ve}. \quad (54)$$

A equação de evolução das variáveis internas é dada por uma equação diferencial de ordem não inteira, conforme

$$\frac{d^\alpha \varepsilon_i^{ve}}{dt^\alpha} + \frac{1}{\tau_i^\alpha} \varepsilon_i^{ve} = \frac{1}{\tau_i^\alpha} \varepsilon. \quad (55)$$

Conforme citado na Seção (2.1), neste trabalho é utilizada a definição de Grünwald-Letnikov (G.L) para discretização temporal da equação de evolução, devido a sua simplicidade e facilidade de implementação computacional (MILLER; ROSS, 1993; OLDHAM, K.; SPANIER, 2002; SCHMIDT, Andre; GAUL, 2002). Sendo assim, utilizando a Equação (1) para uma discretização temporal de N pontos, a derivada fracionária presente na Equação (55) pode ser escrita como

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [\varepsilon_i^{ve}]_n = [\Delta t]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} \varepsilon_i^{ve}(t_n - j\Delta t). \quad (56)$$

Além disso, utilizando a propriedade $A_1 = 1$, pode-se também escrever

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [\varepsilon_i^{ve}]_n = [\Delta t]^{-\alpha} [\varepsilon_i^{ve}]_n + [\Delta t]^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} \varepsilon_i^{ve}(t_n - j\Delta t). \quad (57)$$

Note que na expressão anterior, o somatório presente no cálculo da derivada fracionária depende apenas de valores passados da própria função a ser derivada. Substituindo

a Equação (57) na Equação (55), chega-se finalmente à expressão incremental para evolução das variáveis internas do modelo fracionário, no instante atual $(\bullet)_n$

$$[\varepsilon_i^{ve}]_n = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{1 + \tau_i^\alpha / \Delta t} \right) \left[\frac{1}{\tau_i^\alpha} \varepsilon_n - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} \varepsilon_i^{ve}(t_n - j\Delta t) \right]. \quad (58)$$

Comparando a Equação incremental fracionária (58) com a clássica (36), observa-se que a expressão fracionária recupera a clássica para $\alpha = 1$, uma vez que $A_2 = -1$ e $A_3 = A_4 = A_N = 0$. Estas propriedades em relação aos coeficientes A_j podem ser verificadas a partir da Equação recursiva (2). Finalmente, o problema fracionário incremental unidimensional pode ser posto,

$$\text{dado } \Omega = \{ [\varepsilon_i^{ve}]_{1:n-1}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n \}, \quad \begin{cases} \sigma_n = E_0 \varepsilon_n - \sum_{i=1}^k E_i [\varepsilon_i^{ve}]_n \\ \text{calcule: } [\varepsilon_i^{ve}]_n \text{ conforme a Equação (58)} \end{cases}, \quad (59)$$

onde, o termo E_0 foi definido na Equação (32). Além disso, o subscrito $(\bullet)_{1:n-1}$ indica a dependência das variáveis internas desde o passo $(\bullet)_1$ até o $(\bullet)_{n-1}$.

2.4.5 Modelo Viscoelástico Fracionário 3D - Cinemática Infinitesimal

O modelo viscoelástico fracionário 3D apresenta a mesma estrutura do clássico, tendo como única diferença a evolução das variáveis internas. Sendo assim, nesta seção são aproveitados todos os aspectos discutidos na Seção (2.4.2). A equação de evolução do modelo fracionário baseado em variáveis internas é dada por

$$\frac{d^\alpha \mathbf{Q}_i}{dt^\alpha} + \frac{\mathbf{Q}_i}{\tau_i^\alpha} = \frac{1}{\tau_i^\alpha} \text{dev} \left[\frac{\partial \Psi_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}} \right]. \quad (60)$$

O formato da expressão anterior foi proposto por Adolfsson e Enelund (2003) em seu modelo com cinemática finita. Portanto, no presente trabalho, é apresentada também a particularização para cinemática infinitesimal. Conforme pode ser visto, a estrutura é muito similar ao modelo clássico, tendo como única diferença a ordem de derivação. Além disso, a Equação de tensão total (38) permanece idêntica.

A versão incremental da Equação de evolução das variáveis internas (60) pode ser escrita como

$$[\mathbf{Q}_i]_n = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{1 + \tau_i^\alpha / \Delta t} \right) \left[\frac{1}{\tau_i^\alpha} (2G_i [\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}]_n) - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} \mathbf{Q}_i(t_n - j\Delta t) \right]. \quad (61)$$

É importante destacar que as etapas de discretização são idênticas às apresentadas na Seção (2.4.4) para o modelo unidimensional. Além disso, as considerações hiperelásticas infinitesimais apresentadas na seção (2.4.2) também foram utilizadas.

Novamente, os índices, $(\bullet)_n$ e $(\bullet)_{n-1}$ correspondem, respectivamente, ao passo de tempo atual, t_n , e anterior, t_{n-1} . Finalmente o problema constitutivo incremental fracionário pode ser posto,

$$\text{dado, } \Omega = \{[\mathbf{Q}_i]_{1:n-1}, \mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_n\}, \quad \begin{cases} \sigma_n = [\sigma_\infty]_n + \sum_{i=1}^k 2G_i [\varepsilon_{dev}]_n - \sum_{i=1}^k [\mathbf{Q}_i]_n \\ \text{calcule:} \quad [\mathbf{Q}_i]_n \quad \text{Conforme Equação (61)} \end{cases}, \quad (62)$$

Onde, o subscripto $(\bullet)_{1:n-1}$ indica novamente a dependência das variáveis internas desde o passo $(\bullet)_1$ até o $(\bullet)_{n-1}$. Além disso define-se também σ_∞ ,

$$[\sigma_\infty]_n = K_\infty \text{tr}(\varepsilon_n) \mathbf{I} + 2G_\infty [\varepsilon_{dev}]_n. \quad (63)$$

2.4.6 Modelo Viscoelástico Fracionário 3D - Cinemática Finita

O modelo fracionário com cinemática finita utilizado é o mesmo apresentado por Adolfsson e Enelund (2003). Como mostrado na seção anterior, o modelo fracionário baseado em variáveis internas pode ser obtido simplesmente alterando a equação diferencial de evolução. Esta expressão em cinemática finita é dada por

$$\frac{d^\alpha \mathbf{Q}_i}{dt^\alpha} + \frac{\mathbf{Q}_i}{\tau_i^\alpha} = \frac{1}{\tau_i^\alpha} J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_1^{\text{iso}}(\mathbf{C}^{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}^{\text{iso}}} \right]. \quad (64)$$

O problema constitutivo incremental fracionário em cinemática finita toma forma similar à apresentada na seção anterior, sendo necessário apenas utilizar as considerações hiperelásticas apresentadas na Seção (2.4.3). Utilizando novamente a definição de derivada fracionária de G.L, a versão discreta pode ser escrita como

$$\text{dado, } \Omega = \{[\mathbf{Q}_i]_{1:n-1}, \mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_n\}, \quad \begin{cases} \mathbf{S}_n = [\mathbf{S}_\infty]_n + [\mathbf{S}_i]_n - \sum_{i=1}^k [\mathbf{Q}_i]_n \\ \text{calcule:} \quad [\mathbf{Q}_i]_n \quad \text{Conforme Equação (66)} \end{cases}, \quad (65)$$

$$[\mathbf{Q}_i]_n = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{1 + \tau_i^\alpha / \Delta t} \right) \left[\frac{1}{\tau_i^\alpha} (J_n^{-2/3} G_i \text{DEV} [\mathbf{I}]_n) - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} \mathbf{Q}_i(t_n - j\Delta t) \right]. \quad (66)$$

As expressões para $[\mathbf{S}_\infty]_n$ e $[\mathbf{S}_i]_n$ foram definidas nas Equações (52) e (53).

2.5 VISCOELASTICIDADE-VISCOPLASTICIDADE

Na seção anterior foram apresentados os modelos viscoelásticos clássicos e as respectivas extensões fracionárias. A incorporação de modelos que incluam plasticidade surgiu a partir de sugestões de um trabalho anterior realizado pelo grupo

de pesquisa GRANTE (FARIA, 2017). Primeiro é apresentado o modelo com evolução viscoelástica dada por uma equação de ordem inteira, em seguida a sua versão fracionária.

No que diz respeito à extensão viscoplástica utilizada neste trabalho, pode-se citar o trabalho de Bergström, Kurtz *et al.* (2002) como referência. Os autores propuseram um modelo viscoplástico, denominado híbrido, no regime de deformação finita, que combina as principais características dos modelos de Arruda-Boyce, Bergstrom-Boyce e Hasan-Boyce. Em um outro artigo (BERGSTROM; RIMNAC; KURTZ, 2003), os autores utilizaram o modelo híbrido para ajuste de dados experimentais do UHMWPE. Além disso, também compararam a capacidade preditiva entre o novo modelo proposto e outro plástico com superfície de escoamento de von Mises (plasticidade J2). Em um trabalho de (2004), os mesmos autores apresentaram uma versão aumentada do modelo anterior, capaz de representar também a fase de descarregamento em ensaios cíclicos.

Avanzini (2008) utilizou modelos com plasticidade J2, com cinemática infinitesimal, para o ajuste de parâmetros de dados experimentais cíclicos do UHMWPE. O autor também propôs um modelo J2 modificado, capaz de representar melhor a forma das curvas cíclicas. Khan, Yeakle e Goma (2012) realizaram a modelagem constitutiva do material utilizando testes de tração, compressão, fluência e relaxação. O modelo viscoplástico apresentado pelos autores tem cinemática infinitesimal e é formulado em uma abordagem baseada em *overstress*.

Chen *et al.* (2016) apresentam um modelo viscoelástico-viscoplástico em deformação infinitesimal, modificado para melhor representação do comportamento cíclico. O artigo de Yu *et al.* (2017) propõe um modelo em cinemática infinitesimal com acoplamento termomecânico, também com ênfase na modelagem do comportamento cíclico. Recentemente, Garcia-Gonzalez, Garzon-Hernandez e Arias (2018) propuseram um modelo viscoelástico-viscoplástico em cinemática finita de ordem inteira, que também leva em conta o efeito da temperatura no comportamento do UHMWPE.

2.5.1 Modelo VE-VP Clássico - Cinemática Infinitesimal

Conforme citado anteriormente, em muitas aplicações, o material pode experimentar mecanismos de deformação permanente. Desta forma, os modelos viscoelásticos apresentados na seção anterior podem não ser capazes de representar completamente o comportamento experimental.

Uma possível forma de representar este comportamento não linear é a partir da utilização de modelos viscoelásticos-viscoplásticos (VE-VP). Em breves termos, esta classe de modelos apresenta uma resposta viscoelástica caso o estado de tensão não atinja a superfície de escoamento, segundo um critério predefinido. Por outro lado, caso o estado de tensão seja tal que a superfície de escoamento seja atingida, a resposta

do modelo é dada pela combinação das respostas viscoelásticas e viscoplásticas. A tratativa aqui apresentada para a parcela VP é mostrada em detalhes em Souza Neto, Peric e Owen (2011). Enquanto a parcela VE é a mesma apresentada na seção anterior, conforme Simo e Hughes (2006).

A decomposição aditiva das deformações viscoelásticas e viscoplásticas é utilizada

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{ve} + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, \quad (67)$$

onde, $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde ao tensor de deformação infinitesimal total, enquanto os sobrescritos $(\bullet)^{ve}$ e $(\bullet)^{vp}$ representam, respectivamente, as parcelas viscoelásticas e viscoplásticas da deformação.

A expressão para a tensão total pode ser formulada em termos da parcela viscoelástica ou da viscoplástica. Neste trabalho, escolheu-se escrever em função da parcela viscoelástica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi_{\infty}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ve})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{ve}} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{ve})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{ve}} - \sum_{i=1}^k \mathbf{Q}_i. \quad (68)$$

Conforme pode ser observado, o problema viscoelástico é idêntico ao apresentado na Seção (2.4.2). Sendo assim, uma vez conhecida a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^{ve}$, o mesmo algoritmo incremental viscoelástico já apresentado pode ser utilizado para obter o valor da tensão total. Adotando o critério de von Mises, a função de escoamento Φ pode ser escrita como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = q(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}_{dev}, \boldsymbol{\beta})) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}), \quad (69)$$

Sendo a variável q definida por

$$q = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{dev} - \boldsymbol{\beta}) : (\boldsymbol{\sigma}_{dev} - \boldsymbol{\beta})}. \quad (70)$$

Os tensores $\boldsymbol{\sigma}_{dev}$ e $\boldsymbol{\beta}$ correspondem, respectivamente, a parcela desviadora de $\boldsymbol{\sigma}$ e ao tensor de *Backstress*, a ser definido adiante. Observa-se que a função de escoamento Φ depende somente de valores desviadores, uma vez que o valor de $\boldsymbol{\eta}$ é obtido a partir da subtração de tensores desviadores. A variável σ_y representa a tensão de escoamento, dependente da deformação viscoplástica acumulada $\bar{\varepsilon}^{vp}$. Neste trabalho, foi utilizada uma função do tipo exponencial para descrever σ_y ,

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_{y0} + K_1 \bar{\varepsilon}^{vp} + K_2 (1 - e^{-\theta \bar{\varepsilon}^{vp}}), \quad (71)$$

Onde, σ_{y0} , K_1 , K_2 e θ são parâmetros do modelo. A lei de evolução do fluxo plástico $\dot{\epsilon}^{vp}$ é dada por

$$\frac{d\epsilon^{vp}}{dt} = \dot{\gamma}\mathbf{N} = \dot{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}, \quad (72)$$

A evolução do multiplicador viscoplástico γ é obtida pela lei de Peric, conforme

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{q}{\sigma_y} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] & \text{se } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) < 0 \end{cases}. \quad (73)$$

Onde, o tensor \mathbf{N} representa a direção de fluxo. Os dois novos termos, μ e m correspondem aos parâmetros viscoso e de dependência da taxa, respectivamente.

Uma vez definida a função de escoamento e a evolução do fluxo viscoplástico, resta somente definir as leis de evolução dos encruamentos isotrópico e cinemático. A evolução do encruamento isotrópico pode ser escrita como

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\gamma}, \quad (74)$$

enquanto a evolução para o tensor de *Backstress*, que leva em conta o encruamento cinemático linear de Prager, com parâmetro H , é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3}H\dot{\gamma}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (75)$$

A partir deste ponto é apresentado brevemente o algoritmo incremental para o problema constitutivo viscoplástico com superfície de escoamento de von Mises. É utilizado um algoritmo preditor-corretor. Neste tipo de abordagem se assume um estado teste onde o incremento de deformação ocorre sem deformação viscoplástica, isto é, todo o processo de deformação é considerado viscoelástico, conforme

$$\begin{cases} \Delta\gamma^{trial} = 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_n^{ve-trial} = \boldsymbol{\epsilon}_{n-1}^{ve} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{ve-trial} = \boldsymbol{\epsilon}_{n-1}^{ve} + \Delta\boldsymbol{\epsilon} \\ \bar{\epsilon}_n^{vp-trial} = \bar{\epsilon}_{n-1}^{vp} \\ \boldsymbol{\beta}_n^{trial} = \boldsymbol{\beta}_{n-1} \end{cases}. \quad (76)$$

Para determinar se este estado preditor satisfaz de fato a condição de ausência de fluxo, o teste da função de escoamento

$$\Phi_n^{trial} = q_n^{trial} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^{vp-trial}) \leq 0. \quad (77)$$

deve ser executado. Caso não seja satisfeita esta condição, conclui-se que este incremento de deformação contém também uma parcela viscoplástica. Neste caso, deve

ser identificado o tensor ε^{vp} que representa a deformação viscoplástica no incremento. Para tal fim, definem-se as seguintes grandezas tentativas (*trial*) $(\bullet)^{trial}$

$$q_n^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_n^{trial} : \boldsymbol{\eta}_n^{trial}}. \quad (78)$$

$$\boldsymbol{\eta}_n^{trial} = [\boldsymbol{\sigma}_{dev}^{trial}]_n - \boldsymbol{\beta}_n^{trial} \quad (79)$$

$$[\mathbf{Q}_i^{trial}]_n = \left(\frac{\tau_i}{1 + \tau_i/\Delta t} \right) \left\{ \frac{1}{\tau_i} [2G_i [\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{ve-trial}]_n] + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{Q}_i]_{n-1} \right\}. \quad (80)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_{dev}^{trial}]_n = 2G_0 [\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{ve-trial}]_n - \sum_{i=1}^k [\mathbf{Q}_i^{trial}]_n. \quad (81)$$

Nas expressões acima, $\Delta\gamma^{trial}$, $\varepsilon_n^{ve-trial}$, $\bar{\varepsilon}_n^{vp-trial}$, $\boldsymbol{\beta}_n^{trial}$ e $\Delta\varepsilon^{ve-trial}$, correspondem aos valores testes do multiplicador viscoplástico, da deformação viscoelástica, da deformação viscoplástica acumulada, do tensor de *Backstress* e do incremento de deformação viscoelástica, respectivamente. Enquanto ε_{n-1}^{ve} , $\bar{\varepsilon}_{n-1}^{vp}$ e $\boldsymbol{\beta}_{n-1}$ representam os valores no passo anterior. Já o incremento total de deformação é representado pelo termo $\Delta\varepsilon$. O cálculo da função de escoamento teste atual Φ_n^{trial} requer o cálculo da tensão de escoamento $\sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^{vp-trial})$ e da variável q_n^{trial} . A primeira variável pode ser obtida a partir da Equação (71), cujo valor da variável interna de teste $\bar{\varepsilon}_n^{vp-trial}$, definida na Equação (76), deve ser utilizado. Enquanto o valor de q_n^{trial} é calculado pela Expressão (78). As expressões para $\boldsymbol{\eta}_n^{trial}$ e $[\boldsymbol{\sigma}_{dev}^{trial}]_n$ são definidas na Equações (79) e (81), enquanto $\boldsymbol{\beta}_n^{trial}$ foi definido na Equação (76). Além disso, a definição de $[\mathbf{Q}_i^{trial}]_n$ é dada na Equação (80), enquanto G_0 pode ser obtida a partir da Equação (45). Finalmente, a tensão total do ponto material pode ser obtida por

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{trial} = K_\infty \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{I} + [\boldsymbol{\sigma}_{dev}^{trial}]_n \quad (82)$$

A partir deste ponto são definidas as principais equações para a realização da etapa de correção necessária caso o teste (Eq. 77) não seja satisfeito. As versões discretas das equações de evolução das variáveis internas (72), (74) e (75) são dadas por

$$\Delta\varepsilon_n^{vp} = \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_n^{trial}}{\|\boldsymbol{\eta}_n^{trial}\|}, \quad (83)$$

$$\bar{\varepsilon}_n^{vp} = \bar{\varepsilon}_{n-1}^{vp} + \Delta\gamma, \quad (84)$$

$$\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\beta}_{n-1} + \frac{2}{3} H \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_n^{trial}}{\|\boldsymbol{\eta}_n^{trial}\|}, \quad (85)$$

Nas expressões acima foi utilizado o método de Euler implícito para discretização temporal. Além disso, foi utilizada a propriedade provada em Souza Neto, Peric e Owen (2011), que define a colinearidade entre a direção de fluxo teste $\boldsymbol{\eta}_n^{trial}$ e a corrigida $\boldsymbol{\eta}_n$, conforme

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_n^{trial}}{\|\boldsymbol{\eta}_n^{trial}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_n}{\|\boldsymbol{\eta}_n\|}. \quad (86)$$

Uma vez determinado o valor do incremento viscoplástico $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}$, a deformação viscoelástica corrigida pode ser obtida a partir de

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{ve} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{ve} + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}) = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{ve-trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}. \quad (87)$$

Utilizando a Equação (87), a parcela desviadora da tensão pode ser escrita em função do estado teste e do incremento de deformação viscoplástica, de acordo com

$$[\boldsymbol{\sigma}_{dev}]_n = [\boldsymbol{\sigma}_{dev}^{trial}]_n + 2a\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}, \quad (88)$$

onde foi definida a variável a ,

$$a = \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{G_i}{1 + \tau_i/\Delta t} \right) - G_0 \right]. \quad (89)$$

Da mesma forma, as variáveis $\boldsymbol{\eta}_n$, q_n e $[\mathbf{Q}_i]_n$ atuais podem ser escritas em função do estado teste e do incremento viscoplástico, de modo semelhante ao apresentado por Souza Neto, Peric e Owen (2011) em seu modelo elasto-viscoplástico, de acordo com

$$\boldsymbol{\eta}_n = [\boldsymbol{\sigma}_{dev}]_n - \boldsymbol{\beta}_n = \left[1 + (3a - H) \frac{\Delta\gamma}{q_n^{trial}} \right] \boldsymbol{\eta}_n^{trial}, \quad (90)$$

$$q_n = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_n : \boldsymbol{\eta}_n} = q_n^{trial} + (3a - H) \Delta\gamma, \quad (91)$$

$$[\mathbf{Q}_i]_n = [\mathbf{Q}_i^{trial}]_n - \left(\frac{1}{1 + \tau_i/\Delta t} \right) 2G_i \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}. \quad (92)$$

A expressão incremental para a evolução do fluxo viscoplástico $\Delta\gamma$ é dada por

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\mu} \left[\left(\frac{q_n}{\sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp})} \right)^{1/m} - 1 \right], \quad (93)$$

onde Δt é o intervalo de tempo utilizado.

Além disso, uma vez que o problema viscoplástico é não linear em $\Delta\gamma$, convém escrever a expressão anterior em um formato adequado para utilização de métodos de solução de equações não lineares, como o método de Newton-Raphson. Sendo assim,

substituindo a Expressão (91) em (93), pode-se escrever a Equação escalar função de $\Delta\gamma$,

$$[q_n^{trial} + (3a - H) \Delta\gamma] \left(\frac{\Delta t}{\Delta\gamma\mu + \Delta t} \right)^m - \sigma_y (\bar{\epsilon}_n^{vp}) = 0. \quad (94)$$

A solução desta equação permite encontrar o valor de $\Delta\gamma$. A Tabela (2) apresenta um resumo do algoritmo de integração para os modelos VE-VP clássico e fracionário com cinemática infinitesimal. Conforme será mostrado na próxima seção, o modelo VE-VP fracionário pode ser obtido a partir da substituição da equação de evolução viscoelástica.

2.5.2 Modelo VE-VP Fracionário - Cinemática Infinitesimal

O modelo viscoelástico-viscoplástico fracionário toma forma idêntica a formulação VE-VP clássica, tendo como única diferença a equação de evolução viscoelástica, apresentada na Seção (2.4.5). Sendo assim, toda a teoria apresentada na seção anterior é válida para o fracionário, sendo necessário apenas a substituição das Equações para $[\mathbf{Q}_i^{trial}]_n$ e $[\mathbf{Q}_i]_n$, conforme

$$[\mathbf{Q}_i^{trial}]_n = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{1 + \tau_i^\alpha/\Delta t} \right) \left\{ \frac{1}{\tau_i^\alpha} [2G_i [\boldsymbol{\epsilon}_{dev}^{ve-trial}]_n] - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} \mathbf{Q}_i(t_n - j\Delta t) \right\}, \quad (95)$$

$$[\mathbf{Q}_i]_n = [\mathbf{Q}_i^{trial}]_n - \left(\frac{1}{1 + \tau_i^\alpha/\Delta t} \right) 2G_i \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{vp}, \quad (96)$$

Além disso, a constante a também deve ser redefinida, de acordo com

$$a = \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{G_i}{1 + \tau_i^\alpha/\Delta t} \right) - G_0 \right]. \quad (97)$$

A Tabela (2) apresenta um resumo do algoritmo de integração para os modelos VE-VP clássico e fracionário com cinemática infinitesimal.

Tabela 2 – Algoritmo de integração para o modelo VE-VP clássico e fracionário

Algoritmo preditor-corretor VE-VP clássico e fracionário	
1 - Cálculo do estado preditor viscoelástico:	
1.1 Dado o incremento de deformação total $\Delta \epsilon$ e o conjunto $\Omega = \{ \epsilon_n^{ve}, Q_{n-1}, \bar{\epsilon}_n^{vp}, \beta_{n-1} \}$ de variáveis internas no instante anterior t_{n-1} . Calcule as variáveis testes no tempo atual t_n : $\epsilon_n^{ve-trial}$, $\bar{\epsilon}_n^{vp-trial}$ e β_n^{trial}	
1.2 Calcule:	
	$[\sigma_{dev}^{trial}]_n \text{ a partir de (81)}$ $\eta_n^{trial} \text{ a partir de (79)}$ $d_n^{trial} \text{ a partir de (78)}$ $\sigma_{vol} = K_{\infty} \text{tr}[\epsilon_n] \mathbf{I}$
1.3 Verifique a condição dada pela Eq. (77)	
Se $\Phi_n^{trial} \leq 0 \rightarrow$ Passo viscoelástico aceito. Atualize as variáveis:	
	$\epsilon_n^{ve} = \epsilon_n^{ve-trial}$ $[Q_i]_n = [Q_i^{trial}]_n$ $\bar{\epsilon}_n^{vp} = \bar{\epsilon}_n^{vp-trial}$ $\beta_n = \beta_n^{trial}$ $\sigma_n = \sigma_{vol} + [\sigma_{dev}^{trial}]_n$
Senão \rightarrow vá para o passo 2.	
2 Corretor viscoplástico.	
2.1 Resolva a Equação (94) pra $\Delta \gamma$ utilizando o método de Newton ou outro solver não linear.	
2.2 Atualize as variáveis:	
	$\Delta \epsilon_n^{vp} \text{ a partir da Eq. (83)}$ $\beta_n \text{ a partir da Eq. (85)}$ $\bar{\epsilon}_n^{vp} \text{ a partir da Eq. (84)}$ $\epsilon_n^{ve} \text{ a partir da Eq. (87)}$ $[\sigma_{dev}]_n \text{ a partir da Eq. (88)}$ $\sigma_n = \sigma_{vol} + [\sigma_{dev}]_n$
Para i de 1 até k, Atualize $[Q_i]_n$ a partir da Eq. (92) para o modelo clássico e Eq. (96) para o fracionário onde, k, corresponde ao número de braços viscoelásticos.	
Fim.	

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo são apresentados os dados experimentais utilizados, o procedimento de ajuste de parâmetros, bem como o protocolo de otimização utilizado. O algoritmo de ajuste de parâmetros foi implementado em Matlab, devido ao seu forte apelo numérico-científico, facilidade de programação e ao grande número de bibliotecas disponíveis. Por exemplo, os algoritmos de otimização para busca global, *Particle Swarm Optimization* e busca local, *Interior Point*, podem ser facilmente utilizados por meio do *toolbox* de otimização presente no software, e a utilização de um parâmetro interno de controle permite a paralelização do procedimento de otimização, diminuindo consideravelmente o tempo de solução.

3.1 ENSAIOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS

Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho são ajustados dados experimentais do UHMWPE. Para tal fim foram extraídas seis curvas experimentais do trabalho de Faria (2017). Destas, três são provenientes de ensaios do tipo fluência-recuperação em compressão, sob controle de carga, e as outras três de ensaios cíclicos, também em compressão, com controle de deslocamento. Os ensaios de fluência-recuperação foram conduzidos em tensões de 4, 8 e 16 MPa, enquanto os ensaios cíclicos foram realizados a taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1% s^{-1} . Os valores máximos de deformação logarítmica para as respectivas taxas foram de aproximadamente 7.78, 5.1 e 5 %. A Figura (6) apresenta os resultados em fluência-recuperação obtidos por Faria (2017), enquanto a figura (7) apresenta os resultados para a condição cíclica em taxa de deformação de 0.01%/s. Outros detalhes dos testes e os demais resultados experimentais podem ser consultados no trabalho do autor apenas citado.

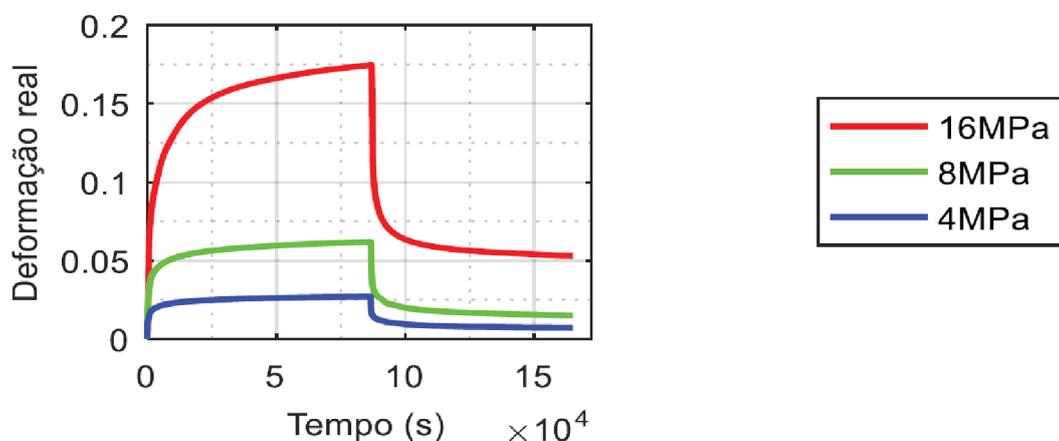


Figura 6 – Dados experimentais em fluência (FARIA, 2017).

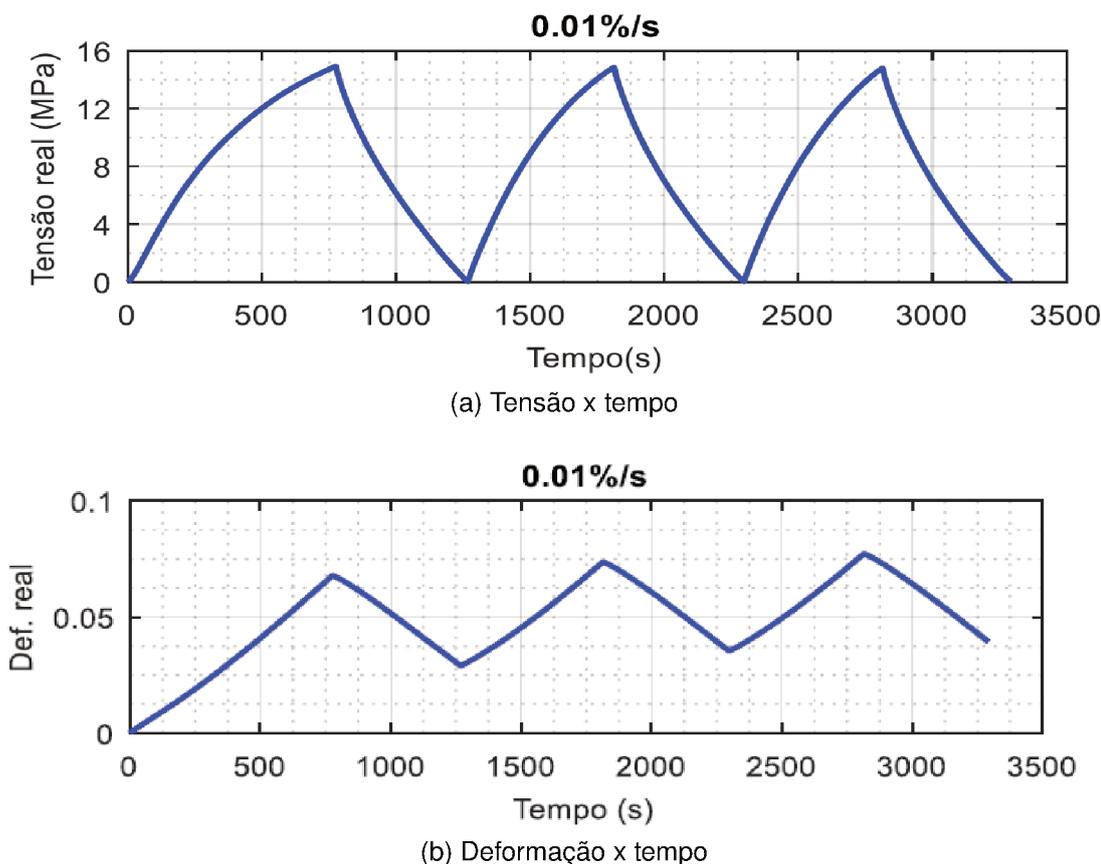


Figura 7 – Dados experimentais cíclico em taxa de deformação de 0.01%/s (FARIA, 2017).

3.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização apresentado neste trabalho consiste em encontrar o conjunto de parâmetros materiais que minimizam o erro entre os dados experimentais e numéricos, conforme definido,

$$\begin{cases} \min & g(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in R^n & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (98)$$

Esta abordagem é denominada problema inverso (VAZ JR; CARDOSO; STAHLSCHEMIDT, 2013; VAZ JR; LUERSEN *et al.*, 2016). Nesta equação, a função objetivo e o vetor de variáveis de projeto são representados, respectivamente, por $g(\mathbf{x})$ e \mathbf{x} . Enquanto x_i^u e x_i^l são restrições laterais, representando os limites superiores e inferiores, respectivamente.

O ajuste de parâmetros foi conduzido seguindo duas abordagens. Na primeira, os dados cíclicos e em fluência-recuperação foram ajustados de forma independente, enquanto que na segunda, denominada de ajuste simultâneo, os dois tipos de ensaios foram ajustados em conjunto. O procedimento de ajuste simultâneo é interessante,

pois, permite verificar a capacidade do modelo material representar o comportamento experimental em condições diversas.

É importante destacar a variedade de funções objetivo apresentadas na literatura para solução deste tipo de problema. Pode-se citar por exemplo, a soma dos erros quadráticos (SSE), média dos erros quadráticos (MSE), soma dos erros absolutos (SAE) e outras (BERGSTRÖM; RIMNAC; KURTZ, 2003; DUSUNCELI; COLAK; FILIZ, 2010; VAZ JR; CARDOSO; STAHLSCHEMIDT, 2013). Neste trabalho foi utilizado o erro quadrático médio ponderado, conforme,

$$g(\mathbf{x}) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{j=1}^N w_j \left(\frac{F_j^{exp} - F_j^{num}(\mathbf{x})}{F_j^{exp}} \right)^2}{\sum_{j=1}^N w_j} \right]}_{g^{creep}(\mathbf{x})} \xi_{creep} + \underbrace{\left[\frac{\sum_{j=1}^M \mu_j \left(\frac{\mathfrak{F}_j^{exp} - \mathfrak{F}_j^{num}(\mathbf{x})}{\mathfrak{F}_j^{exp}} \right)^2}{\sum_{j=1}^M \mu_j} \right]}_{g^{cyclic}(\mathbf{x})} \xi_{cyclic}. \quad (99)$$

Esta expressão foi utilizada para os ajustes simultâneos. Os símbolos, ξ_{creep} e ξ_{cyclic} representam, respetivamente, os pesos utilizados para os conjuntos de dados em fluência e em carregamento cíclico. Por exemplo, para os ajustes simultâneos, utilizando os modelos puramente viscoelásticos, os valores utilizados foram; $\xi_{creep} = 0.25$ e $\xi_{cyclic} = 0.75$, enquanto que, para os modelos VE-VP, a combinação utilizada foi; $\xi_{creep} = \xi_{cyclic} = 0.5$. Além disso, F_j^{exp} , F_j^{num} , N e w_j , correspondem, respectivamente, aos valores experimentais e numéricos, ao número de valores experimentais utilizados e aos pesos atribuídos a cada ponto experimental, para o ensaio em fluência-recuperação. Enquanto que, \mathfrak{F}_j^{exp} , \mathfrak{F}_j^{num} , M e μ_j , correspondem as mesmas entidades apenas descritas, mas agora referentes aos ensaios em carregamento cíclico. Deve-se destacar que os valores de F_j^{exp} e F_j^{num} são referentes a dados de deformação, enquanto \mathfrak{F}_j^{exp} e \mathfrak{F}_j^{num} são de tensão.

Para os ajustes individuais, isto é, utilizando somente os dados em fluência ou em carregamento cíclico, foi utilizada somente uma das parcelas da Equação (99). Por exemplo, para o ajuste puramente em fluência, foi tomada a parcela $g^{creep}(\mathbf{x})$, com $\xi_{creep} = 1$ e $\xi_{cyclic} = 0$. Enquanto que, para o ajuste puramente cíclico, foi utilizada a parcela $g^{cyclic}(\mathbf{x})$, com $\xi_{cyclic} = 1$ e $\xi_{creep} = 0$.

Neste trabalho foi utilizado um procedimento híbrido para o ajuste de parâmetros. Primeiro foi empregado o método de otimização por enxame de partículas (PSO) para uma busca global, seguido por um método baseado em gradientes para refino local da busca, cujo gradiente foi calculado via diferenças finitas. Os parâmetros de configuração do PSO foram determinados utilizando dados gerados sinteticamente. Este conjunto de dados sintéticos foi utilizado para análise da influência dos seguintes parâmetros do PSO: número de partículas s_{size} , influência pessoal φ_1 , influência social φ_2 , inércia w , e máximo número de iterações N_{iter} . A metodologia utilizada para realização deste estudo de influência é apresentada em detalhes em Vaz Jr, Luersen

Tabela 4 – Descrição do processo de otimização

Processo de Otimização

1 - Busca Global - PSO:

1.1 Dados de entrada PSO:

Parâmetros de configuração do PSO: s_{size} , φ_1 , φ_2 , w e N_{iter}

Restrições laterais PSO: x_i^l e x_i^u

1.2 Busca PSO:

Execute o PSO cinco vezes. A melhor das cinco rodadas é fornecida ao método baseado em gradiente.

2 - Busca local:

2.1 Dados de entrada do método baseado em gradiente:

Tentativa inicial, x_0 : Melhor x das cinco rodadas do PSO.

Restrições laterais: x_i^l e x_i^u : De acordo com o vetor x_0 proveniente do PSO.

2.2 Cálculos do método baseado em gradiente:

Execute o método baseado em gradiente e atualize o valor da função objetivo, $g(x)$, e vetor, x .

Fim. A função objetivo $g(x)$ e vetor x obtidos no passo 2 são fornecidos como saída.

et al. (2016). Os melhores parâmetros de configuração encontrados a partir destas simulações são apresentados na Tabela (3).

Tabela 3 – Parâmetros de configuração do PSO

N. de partículas (s_{size})	Influência pessoal (φ_1)	Influência social (φ_2)	Inércia (w)	Iterações (N_{iter})
150	1.3	1.3	0.5	150

Além disso, devido ao caráter aleatório do PSO, foram utilizados cinco repetições para cada ajuste de parâmetros. Ao final, a melhor das cinco rodadas foi fornecida ao método baseado em gradiente, para refino da busca local. A Tabela (4) apresenta um resumo do processo de otimização descrito.

3.3 DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS IMPLEMENTADOS

O procedimento de ajuste de parâmetros foi implementado considerando um único ponto material. Dadas as condições de ensaio e característica do material, as componentes $F_{22} = F_{33}$ do tensor gradiente de mapeamento são tomadas como iguais.

Desta forma, as duas equações do resíduo em sua forma matricial podem ser postas como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{11} - f_1 \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Nesta expressão, f_1 corresponde a intensidade da força de superfície aplicada ao longo da direção e_1 , enquanto P_{11} e P_{22} são componentes do primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchoff. Além disso, observa-se que esta expressão é não linear em \mathbf{F} .

No caso de equilíbrio para o ensaio de fluência-recuperação, o histórico da tensão é totalmente conhecido e a Equação (100) é resolvida para obter as componentes F_{11} e F_{22} . Já no ensaio cíclico, o histórico da componente F_{11} é conhecido, com isso uma simplificação adicional pode ser feita para este ensaio, resultando em uma única equação para o resíduo, conforme,

$$R = P_{22} = 0 \quad (101)$$

A solução do equilíbrio mecânico, descrito pela Equação (100) não linear em \mathbf{F} pode ser obtida por meio de um procedimento incremental-iterativo. O termo incremental está relacionado ao fato que a aplicação da carga (ou deslocamento) é feito de forma incremental, enquanto o termo iterativo se refere a necessidade de utilização de um método iterativo de soluções de equações não lineares em cada incremento de carga. No presente trabalho foi utilizado o de Newton-Raphson (N-R).

Seja o passo atual de carga caracterizado por $(\cdot)_n$, o método de N-R pode ser utilizado para obtenção da configuração deformada que satisfaça o equilíbrio mecânico neste passo. O sistema de equações lineares a ser solucionado em cada iteração $(\cdot)^k$ do método de N-R, pode ser obtido a partir da expansão em série de Taylor ao redor do último passo incremental convergido, conforme

$$\mathbf{R}_n^k(\mathbf{F}_n^k) = \mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1}) + \frac{\partial \mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1})}{\partial \mathbf{F}_n^{k-1}} \Delta \mathbf{F}_n^k, \quad (102)$$

onde foram desconsiderados os termos de ordem superior (CARNIEL, 2013). O incremento do tensor gradiente de deformação que anula o resíduo linearizado na iteração $(\cdot)^k$ pode ser obtido a partir de

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1})}{\partial \mathbf{F}_n^{k-1}} \Delta \mathbf{F}_n^k = -\mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1}). \quad (103)$$

Uma vez obtido o incremento $\Delta \mathbf{F}_n^k$ na iteração $(\cdot)^k$ do método de N-R, o tensor gradiente de deformação deve ser atualizado, de acordo com

$$\mathbf{F}_n^k = \mathbf{F}_n^{k-1} + \Delta \mathbf{F}_n^k. \quad (104)$$

Este processo iterativo continua até que o vetor resíduo seja suficientemente pequeno. No presente trabalho foi utilizado a norma Euclidiana do resíduo como critério de parada, conforme

$$\|\mathbf{R}_n^k\| < e_{tol}. \quad (105)$$

O termo e_{tol} corresponde ao valor de tolerância utilizada, sendo adotado o valor de $e_{tol} = 10^{-6}$. Além disso, a matriz tangente $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}}$ foi calculada pelo método das diferenças finitas.

Um cuidado adicional deve ser tomado durante a implementação, uma vez que o problema foi simplificado ao utilizar a consideração que $F_{22} = F_{33}$, é necessário atualizar o valor da componente F_{33} a cada atualização obtida pela Equação (104), de acordo com

$$(F_{33})_n^k = (F_{22})_n^k. \quad (106)$$

Esta consideração é importante, uma vez que o sistema linear é solucionado apenas para as componentes F_{11} e F_{22} .

A Tabela (6) apresenta um breve resumo do fluxo utilizado para implementar os ensaios. Basicamente, esta rotina recebe o conjunto de parâmetros materiais, \mathbf{x} , gerado em cada etapa do processo de otimização, e soluciona o equilíbrio mecânico para o histórico de carregamento ou deformação informado pelo usuário. Um resumo do algoritmo implementado para solução do equilíbrio mecânico uniaxial é apresentado na Tabela (5). Ao final de todos os incrementos de carga, n_{steps} , os vetores de tensão e deformação são fornecidos para a rotina que calcula o valor da função objetivo, $g(\mathbf{x})$.

Tabela 5 – Algoritmo para implementação do equilíbrio para o ensaio uniaxial.

Algoritmo para equilíbrio dos ensaios uniaxiais

Início rotina para obter equilíbrio mecânico para o passo de carga atual, n .

Faça: $[\mathbf{F}]_{:,n} = [\mathbf{F}]_{:,n-1}$

$N_{iter} = 100$

Para k de 1 até N_{iter} :

- Calcule: $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{R}_n^{k-1}}{\partial \mathbf{F}_n^{k-1}}$ via diferenças finitas.

Importante: Lembre-se de fazer $F_{33} = F_{22}$ ao perturbar a direção dois.

- Calcule: $\mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1})$.
- Obtenha o incremento a partir da solução do sistema linear: $\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{F}_n^k = -\mathbf{R}_n^{k-1}(\mathbf{F}_n^{k-1})$
- Atualize $\mathbf{F}_n^k = \mathbf{F}_n^{k-1} + \Delta \mathbf{F}_n^k$.
- Faça $(F_{33})_n^k = (F_{22})_n^k$.
- Calcule $\mathbf{R}_n^k(\mathbf{F}_n^k)$.

Se $\|\mathbf{R}_n^k\| < e_{tol}$

Retorne com os valores convergidos $[\mathbf{F}]_{:,n}$, $[\mathbf{P}]_{:,n}$, $[\boldsymbol{\varepsilon}_{ln}]_{:,n}$, $[\mathbf{Y}]_{:,n}$.

Onde, $[\mathbf{Y}]_{:,n}$, corresponde ao vetor contendo todas as variáveis internas calculadas no passo atual.

Senão

Continue

Fim Para.

Retorne um indicador de falha de convergência.

Tabela 6 – Algoritmo para implementação dos ensaios uniaxiais.

Algoritmo para o Ensaio

Início rotina de ensaio.

- Entrada principal: Vetor contendo os parâmetros materiais \boldsymbol{x} gerado em cada etapa de otimização.

- Inicializa-se os vetores para todos incrementos de carga, para o ponto material:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{0}]_{9 \times n_{steps}}, [\mathbf{P}] = [\mathbf{0}]_{9 \times n_{steps}}, [\boldsymbol{\varepsilon}_{ln}] = [\mathbf{0}]_{6 \times n_{steps}}, [\mathbf{Y}] = [\mathbf{0}]_{n_{var} \times n_{steps}}$$

Onde, n_{var} , e, $\mathbf{0}$, correspondem ao número de componentes do vetor de variáveis internas, \mathbf{Y} , e ao vetor nulo, com tamanho adequado a cada variável.

- Carregue o vetor de força externa, ou histórico de deformação a ser equilibrado.

Para n de 2 até n_{steps} :

- Chame a rotina apresentada na Tabela (5), para obter o equilíbrio do ensaio uniaxial e atualize os valores para o passo n atual:

$$[\mathbf{F}]_{:,n}, [\mathbf{P}]_{:,n}, [\boldsymbol{\varepsilon}_{ln}]_{:,n}, [\mathbf{Y}]_{:,n}$$

Fim Para.

Fim. Os valores obtidos para todos os n_{steps} são fornecidos como entrada a rotina que calcula o valor da função objetivo, $g(\boldsymbol{x})$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como mencionado anteriormente, este trabalho busca comparar os resultados do ajuste de parâmetros utilizando modelos clássicos e fracionários. Para completar este objetivo, curvas experimentais do UHMWPE (*ultra high molecular weight polyethylene*) foram ajustadas em carregamento cíclico e em fluência-recuperação. Os dados experimentais aqui utilizados foram extraídos do trabalho realizado por Faria (2017), também do grupo de pesquisa GRANTE, conforme apresentado na Seção 3.1.

No trabalho realizado por Faria (2017), amostras de UHMWPE foram testadas utilizando dois tipos de ensaios mecânicos: ensaios de fluência-recuperação e ensaios cíclicos. Sabe-se que é virtualmente impossível realizar uma caracterização completa do material por meio de um único tipo de ensaio. Desta forma, foram testadas duas estratégias de ajuste de parâmetros. Primeiramente, os dados experimentais são ajustados de forma independente, gerando dois conjuntos de parâmetros materiais, um referente aos ensaios de fluência e outro referente aos ensaios cíclicos. Primeiro, são ajustadas duas curvas em fluência-recuperação, em intensidade de 4 e 8 MPa, em seguida são ajustadas três curvas, em intensidade de 4, 8 e 16 MPa. Os ajustes em condições de carregamento puramente cíclico seguem um procedimento similar, primeiro são apresentados os resultados de ajustes utilizando dados em taxas de 0.01 e 0.1 %s⁻¹, posteriormente são apresentados em taxas de 0.01, 0.1 e 1 %s⁻¹.

Uma vez apresentados os ajustes independentes, são mostrados os resultados simultâneos. O ajuste simultâneo é interessante, pois, permite obter um conjunto de parâmetros capaz de simular o comportamento do material em várias condições de carregamento. Como já foi referido anteriormente, é investigado se os modelos fracionários melhoram a capacidade preditiva. Todos os resultados são apresentados em tensão de engenharia (nominal) e em deformação verdadeira (logarítmica).

No que diz respeito a organização dos modelos, primeiro são apresentados os resultados referentes aos modelos viscoelásticos em cinemática infinitesimal e finita, em seguida são mostrados os resultados relacionados aos viscoelásticos-viscoplásticos em cinemática infinitesimal. Devido ao grande número de modelos testados, torna-se conveniente adotar um sistema de classificação para que rapidamente seja possível identificar cada modelo em questão. Para isso, as principais características de cada um foram reunidas em abreviações que consistem de três partes: natureza da parcela viscoelástica, cinemática e número de dispositivos de Maxwell (braços viscoelásticos) presentes na parcela viscoelástica. A Tabela (7) reúne todos os modelos com suas abreviações.

Tabela 7 – Abreviatura dos nomes dos modelos utilizados ao longo do texto.

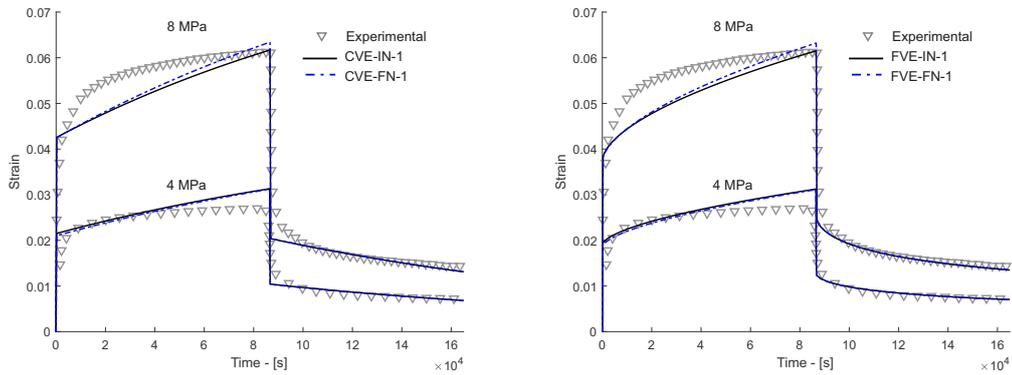
Modelos	Cinemática	Braços	Abreviações
Viscoelástico Clássico (CVE)	Infinitesimal (IN)	1	CVE-IN-1
		2	CVE-IN-2
	Finita (FN)	1	CVE-FN-1
		2	CVE-FN-2
Viscoelástico Fracionário (FVE)	Infinitesimal (IN)	1	FVE-IN-1
		2	FVE-IN-2
	Finita (FN)	1	FVE-FN-1
		2	FVE-FN-2
Viscoelástico-Viscoplástico Clássico (CVE-VP)	Infinitesimal (IN)	1	CVE-VP-IN-1
		2	CVE-VP-IN-2
Viscoelástico-Viscoplástico Fracionário (FVE-VP)	Infinitesimal (IN)	1	FVE-VP-IN-1
		2	FVE-VP-IN-2

4.1 TESTES COM MODELOS DE VISCOELASTICIDADE

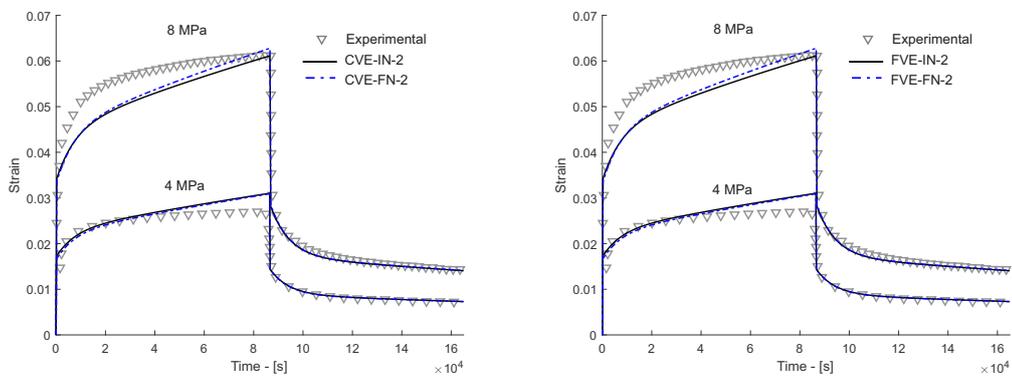
4.1.1 Ajuste Individual - Ensaios de fluência-recuperação

As figuras (8a) e (8b) apresentam os ajustes utilizando apenas os dados em fluência-recuperação para os modelos viscoelásticos clássicos e fracionários, usando apenas um braço viscoelástico, com cinemática infinitesimal e finita. Observa-se que a derivada de ordem não inteira permitiu que os modelos fracionários apresentassem curvas mais suaves em comparação com os clássicos, inclusive na fase de recuperação. A tabela (8) mostra os valores da função objetivo e os parâmetros materiais encontrados. Pode-se observar que utilizando apenas um braço, os modelos fracionários resultam em menores valores de função objetivo. No entanto, mesmo que a fase de recuperação tenha sido bem representada, a fase de fluência ainda apresenta regiões distantes dos dados experimentais. Conforme será apresentado adiante, este fato está relacionado a presença de efeitos não lineares, não levados em conta nestes modelos viscoelásticos implementados.

As Figuras (8c) e (8d) mostram os resultados utilizando dois braços viscoelásticos, verifica-se que a adição de um segundo braço resultou em melhores ajustes. Contudo, embora os modelos fracionários tenham apresentado melhores resultados usando apenas um dispositivo de Maxwell, esta melhoria não ocorreu usando dois, quando comparados aos clássicos. Conforme pode ser observado nas Figuras (8c) e (8d), as duas classes apresentaram resultados muito semelhantes. Curiosamente, as ordens de derivação dos modelos fracionários convergiram para 1, ou seja, para a mesma ordem dos clássicos. Além disso, a partir da Tabela (8), verifica-se que os modelos em cinemática finita apresentaram resultados ligeiramente melhores em relação aos com cinemática infinitesimal.



(a) Modelos clássicos viscoelásticos com um braço. (b) Modelos fracionários viscoelásticos com um braço.

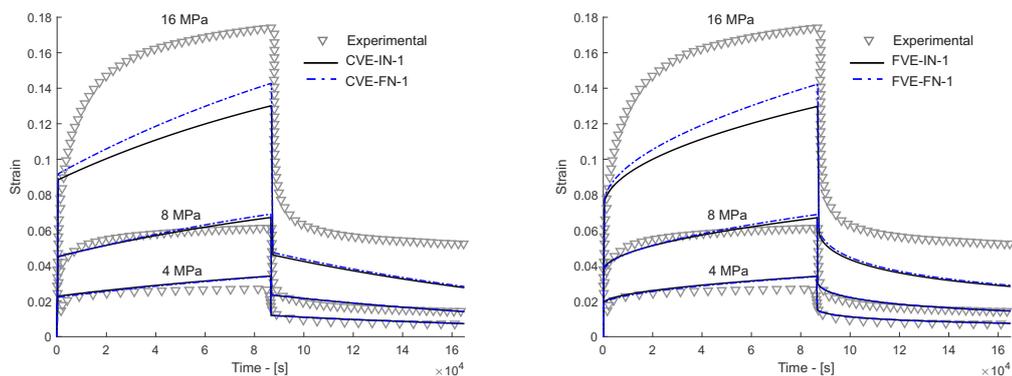


(c) Modelos clássicos viscoelásticos com dois braços. (d) Modelos fracionários viscoelásticos com dois braços.

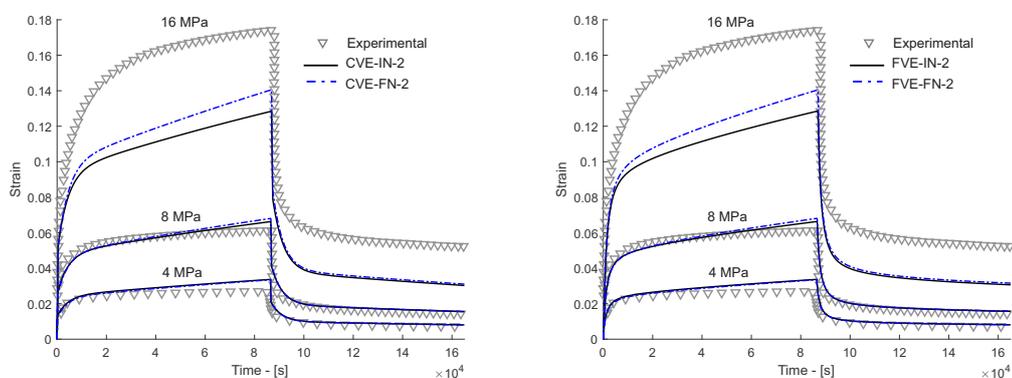
Figura 8 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados de fluência-recuperação, com dados experimentais em 4 e 8 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (8).

Tabela 8 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados em fluência-recuperação em 4 e 8 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (8).

Modelos	$g(x)[10^{-3}]$	ν_0	G_∞	G_1	$\tau_1[10^3]$	α_1	G_2	$\tau_2[10^3]$	α_2
CVE-FN-2	6.01	0.46	21.8870	38.5271	129.3022	-	23.3873	5.3884	-
FVE-FN-2	6.03	0.46	21.8833	38.5309	129.3217	0.9999	23.3886	5.3879	0.9999
CVE-IN-2	7.32	0.46	21.5880	36.2874	131.0120	-	21.5136	5.5621	-
FVE-IN-2	7.32	0.46	21.5871	36.2883	131.0170	0.9999	21.5138	5.5620	0.9999
FVE-FN-1	7.77	0.46	13.67×10^{-4}	74.6198	196.1220	0.5965	-	-	-
FVE-IN-1	8.98	0.46	10.92×10^{-4}	71.3553	206.5266	0.5899	-	-	-
CVE-FN-1	10.66	0.46	29.5482	36.4075	76.0108	-	-	-	-
CVE-IN-1	11.88	0.46	28.9535	34.1263	76.3759	-	-	-	-



(a) Modelos clássicos viscoelásticos com um braço. (b) Modelos fracionários viscoelásticos com um braço.



(c) Modelos clássicos viscoelásticos com dois braços. (d) Modelos fracionários viscoelásticos com dois braços.

Figura 9 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados de fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (9).

O ajuste dos dados em fluência-recuperação utilizando três curvas, em intensidades de 4, 8 e 16 MPa, seguem uma tendência similar à observada no ajuste utilizando apenas duas curvas, em intensidades de 4 e 8 MPa. Isto é, a utilização dos modelos fracionários resultou em ligeira melhoria, em relação aos clássicos, conforme pode ser visto na Figura (9) e Tabela (9). Conforme pode ser observado nestas figuras, nenhum dos modelos foi capaz de representar satisfatoriamente a curva em 16 MPa. Contudo, uma observação interessante pode ser obtida a partir destes resultados. Enquanto que, nos ajustes utilizando duas curvas, os modelos em cinemática finita tiveram resultados similares aos obtidos com cinemática infinitesimal, no presente caso, onde foi adicionada a curva em 16 MPa, os modelos com cinemática finita apresentaram uma melhoria significativa no ajuste próximo a 16 MPa. Esta observação pode indicar que os efeitos de não linearidade geométrica se manifestam de forma mais acentuada a partir de 8 MPa, para o UHMWPE em fluência.

Tabela 9 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados em fluência-recuperação em 4, 8 e 16 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (9).

Modelos	$g(x)[10^{-3}]$	ν_0	G_∞	G_1	$\tau_1[10^3]$	α_1	G_2	τ_2	α_2
FVE-FN-2	120.84	0.46	0.04956	54.5273	286.3733	0.8191	165193.43	0.04265	0.7665
CVE-FN-2	122.16	0.46	21.1680	35.2601	118.0384	-	57.6106	2084.4803	-
FVE-FN-1	131.13	0.46	0.00150	76.0148	141.7099	0.52520	-	-	-
FVE-IN-2	142.42	0.46	3.1171	49.0783	266.5478	0.8275	16777.2531	0.9149	0.7797
CVE-IN-2	143.42	0.46	20.7433	32.9577	120.1596	-	51.6474	2220.7376	-
FVE-IN-1	151.93	0.46	0.001483	72.0441	151.1792	0.5184	-	-	-
CVE-FN-1	140.71	0.46	28.2272	34.3586	66.6862	-	-	-	-
CVE-IN-1	161.26	0.46	27.5071	31.8903	67.2795	-	-	-	-

É também interessante analisar o tempo de processamento gasto na solução do problema de otimização. Para exemplificar, a Tabela (10) traz uma análise do tempo de processamento relativo ao modelo CVE-IN-2, utilizando um intervalo de tempo de 80 segundos. Uma análise mais detalhada poderia ser feita considerando vários intervalos de tempo dentro de um intervalo de interesse (FARIAS, 2018). Os resultados referem-se ao processo de otimização completo, ou seja, são realizadas cinco rodadas de PSO, seguido do método baseado em gradiente, conforme apresentado na Tabela (4). Os dados foram normalizados em relação ao tempo gasto pelo modelo clássico com dois braços (CVE-IN-2). Como pode ser visto, os modelos fracionários apresentam custo computacional superior aos clássicos. Isto está relacionado ao fato que, a discretização temporal utilizada para os fracionários considera todo o histórico da variável sendo diferenciada. É importante mencionar que a literatura apresenta técnicas para reduzir este custo, como os trabalhos de Andre Schmidt e Gaul (2002) e Zopf, Hoque e Kaliske (2015). Neste trabalho não foram utilizadas estas técnicas, porque o objetivo principal consiste em analisar a possível melhoria ao utilizar modelos fracionários e compará-los com os clássicos.

Tabela 10 – Tempo de processamento relativo para solução do problema de otimização utilizando modelos viscoelásticos com dois braços.

Modelos	
CVE-IN-2	1
FVE-IN-2	2.86 vezes CVE-IN-2
CVE-FN-2	3.04 vezes CVE-IN-2
FVE-FN-2	4.57 vezes CVE-IN-2

4.1.2 Ajuste Individual - Ensaios cíclicos

Os resultados para os ajustes utilizando apenas os dados cíclicos, em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 $\%_s^{-1}$, são mostrados na Figura (10) e Tabela (11). Assim

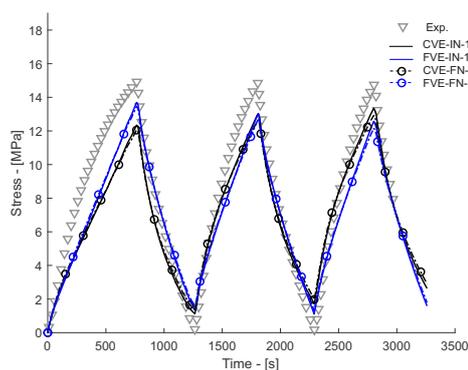
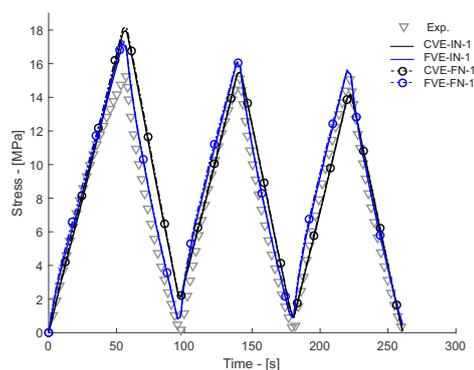
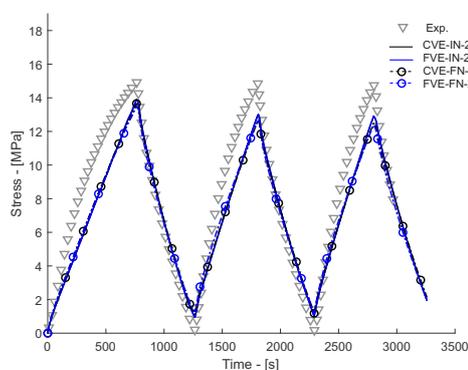
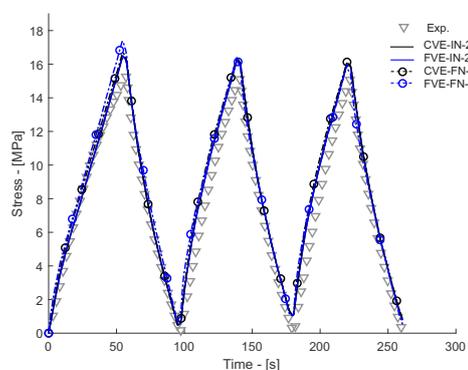
(a) Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$ - Um braço.(b) Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$ - Um braço.(c) Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$ - Dois braços.(d) Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$ - Dois braços.

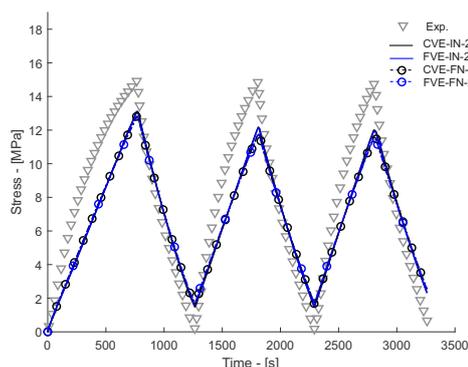
Figura 10 – Ajuste com modelos viscoelásticos utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 $\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (11).

como nos dados em fluência, os modelos fracionários mostraram melhores resultados quando apenas um braço de Maxwell é utilizado. Contudo, como pode ser visto, os modelos fracionários apresentaram resultados similares aos clássicos, quando dois braços são utilizados. Observa-se também que a fase de carregamento não foi satisfatoriamente representada. Este fato pode estar relacionado à existência de outros fenômenos, não levados em conta nestes modelos, tal como *ratchetting* (CHEN *et al.*, 2016; YU *et al.*, 2017).

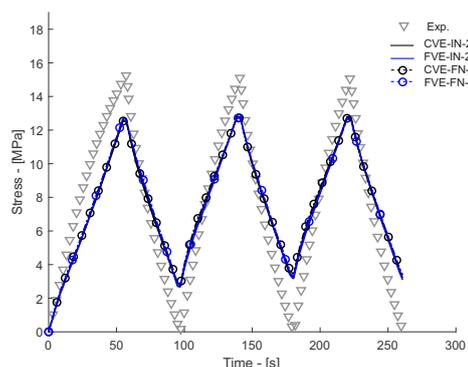
Assim como apresentado nos dados em fluência, primeiro foram mostrados os resultados utilizando apenas duas curvas cíclicas. Neste parágrafo são apresentados os resultados utilizando três curvas cíclicas, em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 $\%s^{-1}$, conforme mostrado na Figura (11) e Tabela (12). Verifica-se que os modelos viscoelásticos não representaram satisfatoriamente o comportamento cíclico para todas as taxas de deformação.

Tabela 11 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 $\%s^{-1}$. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (10).

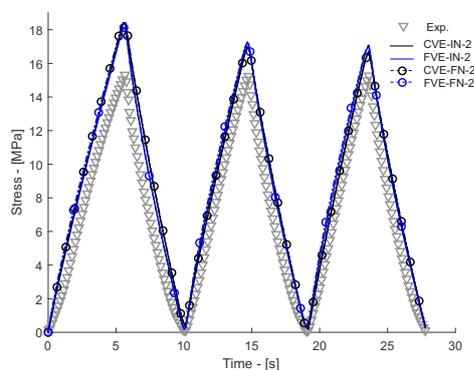
Modelos	$g(x)[10^{-2}]$	ν_0	G_∞	G_1	τ_1	α_1	G_2	τ_2	α_2
CVE-IN-2	2.72	0.46	37.9029	142.3752	11.4667	-	53.7949	426.929	-
FVE-IN-2	2.72	0.46	37.9027	142.3763	11.4666	0.9999	53.7950	426.9311	0.9999
FVE-IN-1	3.54	0.46	8.8826	720.9502	0.1740	0.3097	-	-	-
CVE-FN-2	3.61	0.46	40.1096	168.1673	10.4335	-	57.1077	427.4346	-
FVE-FN-2	3.61	0.46	40.1099	168.1642	10.4346	0.9999	57.1101	427.4283	0.9999
FVE-FN-1	4.59	0.46	8.1071	1284.8937	0.01813	0.2932	-	-	-
CVE-IN-1	6.64	0.46	42.7923	115.9241	96.2668	-	-	-	-
CVE-FN-1	8.11	0.46	45.5583	124.2040	93.2435	-	-	-	-



(a) Taxa de deformação de 0.01 $\%s^{-1}$ - Dois braços.



(b) Taxa de deformação de 0.1 $\%s^{-1}$ - Dois braços.



(c) Taxa de deformação de 1 $\%s^{-1}$ - Dois braços.

Figura 11 – Ajuste com modelos viscoelásticos com dois braços utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 $\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (12).

Tabela 12 – Parâmetros viscoelásticos utilizando somente dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 % s^{-1} . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica do ajuste apresentada na Figura (11) para dois braços viscoelásticos.

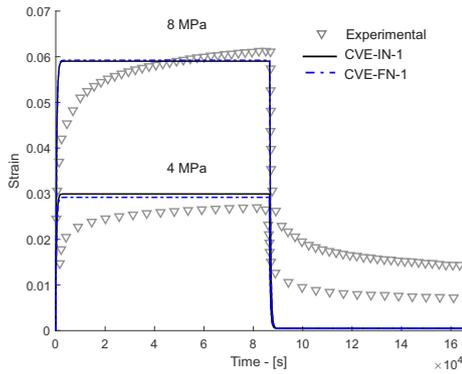
Modelos	$g(\boldsymbol{x})[10^{-3}]$	ν_0	G_∞	G_1	τ_1	α_1	G_2	τ_2	α_2
FVE-IN-2	145.04	0.46	35.8038	97.2122	3.9102	0.74143	44.4196	539.2273	0.9999
CVE-IN-2	147.33	0.46	36.4150	70.8042	6.6250	-	48.7578	498.1607	-
FVE-IN-1	159.85	0.46	0.002745	471.6311	0.036079	0.20428	-	-	-
FVE-FN-2	164.32	0.46	37.8199	114.9927	3.01931	0.7064	45.8914	538.7265	0.9999
CVE-FN-2	167.06	0.46	38.5514	51.1273	495.4344	-	76.6693	6.247012	-
FVE-FN-1	179.59	0.46	0.006306	684.4178	0.00308	0.1925	-	-	-
CVE-IN-1	288.24	0.46	53.4655	93.1968	16.4903	-	-	-	-
CVE-FN-1	306.84	0.46	56.5228	99.1215	15.6978	-	-	-	-

4.1.3 Ajuste Simultâneo

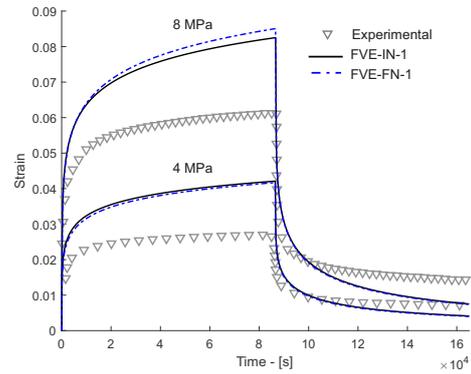
Uma vez apresentados os resultados de ajustes utilizando de forma independente os dados cíclicos e em fluência, a partir deste parágrafo são apresentados os resultados de ajustes simultâneos utilizando os modelos viscoelásticos clássicos e fracionários.

A Tabela (13) e as Figuras (12) e (13) mostram os resultados dos ajustes simultâneos utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação para os modelos viscoelásticos com um e dois braços. A partir da tabela (13), pode-se observar que os modelos fracionários apresentaram melhores resultados de função objetivo, com um e dois braços viscoelásticos. A diferença entre os modelos clássicos e fracionários utilizando apenas um dispositivo de Maxwell foi consideravelmente grande. Enquanto que com dois, esta diferença é menor. Além disso, a ordem de derivação dos modelos fracionários não convergiu para 1, como nos ajustes individuais com dois braços.

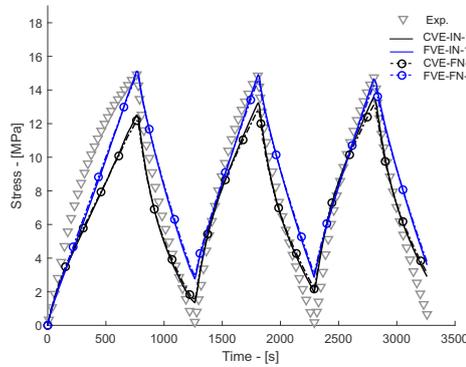
No que diz respeito a capacidade de representação dos dados experimentais, pôde-se constatar que os ajustes simultâneos com um braço não foram capazes de representar o comportamento experimental. Este comportamento é melhorado com a utilização de dois braços viscoelásticos, conforme apresentado na Figura (13), mas ainda com significativa diferença em relação aos dados experimentais. Em geral, pode dizer-se que os modelos fracionários melhoraram ligeiramente os ajustes simultâneos. Além disso, verifica-se que esta classe de modelos permitiu uma transição mais suave entre as fases de carregamento e descarregamento nos testes de fluência, conforme pode ser visto ao comparar as Figuras (13a) e (13b). Para ajudar a comparação, a Figura (14) apresenta os valores da função objetivo em gráfico de barras.



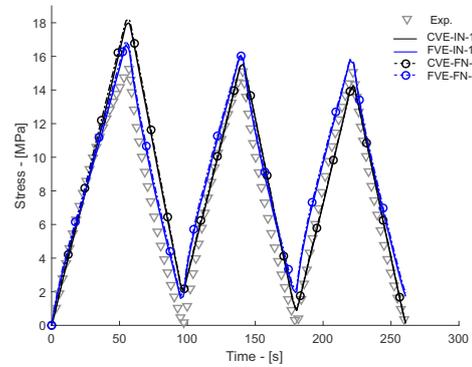
(a) Dados em Fluência - Modelos clássicos



(b) Dados em Fluência - Modelos fracionários



(c) Dados cíclicos - Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$



(d) Dados cíclicos - Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$

Figura 12 – Ajustes dos modelos viscoelásticos, com um braço viscoelástico e utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (13).

Tabela 13 – Parâmetros viscoelásticos utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada nas Figuras (12) e (13).

Modelos	$g(x)[10^{-2}]$		ν_0	G_∞	G_1	$\tau_1[10^3]$	α_1	G_2	τ_2	α_2	
	Total	Cíclico									Fluência
FVE-IN-2	5.66	4.13	1.52	0.46	10.00	34.7765	251.7401	1	147.4471	46.8032	0.7312
FVE-FN-2	6.40	4.94	1.46	0.46	3.6895	43.3337	303.8491	0.9999	167.6226	39.5119	0.7108
CVE-IN-2	6.62	5.38	1.24	0.46	17.2565	30.4868	170.7551	-	113.5487	85.6239	-
CVE-FN-2	7.57	6.45	1.12	0.46	17.4256	33.2461	168.0647	-	122.1393	82.5703	-
FVE-IN-1	12.01	5.46	6.54	0.46	17.7980	35820.6522	1.6539×10^{-12}	0.2456	-	-	-
FVE-FN-1	13.05	6.38	6.66	0.46	18.3599	37229.2685	1.6881×10^{-12}	0.2446	-	-	-
CVE-IN-1	28.24	5.024	23.22	0.46	44.1903	115.2043	93.4580×10^{-3}	-	-	-	-
CVE-FN-1	29.35	6.11	23.24	0.46	46.6825	123.7070	91.0634×10^{-3}	-	-	-	-

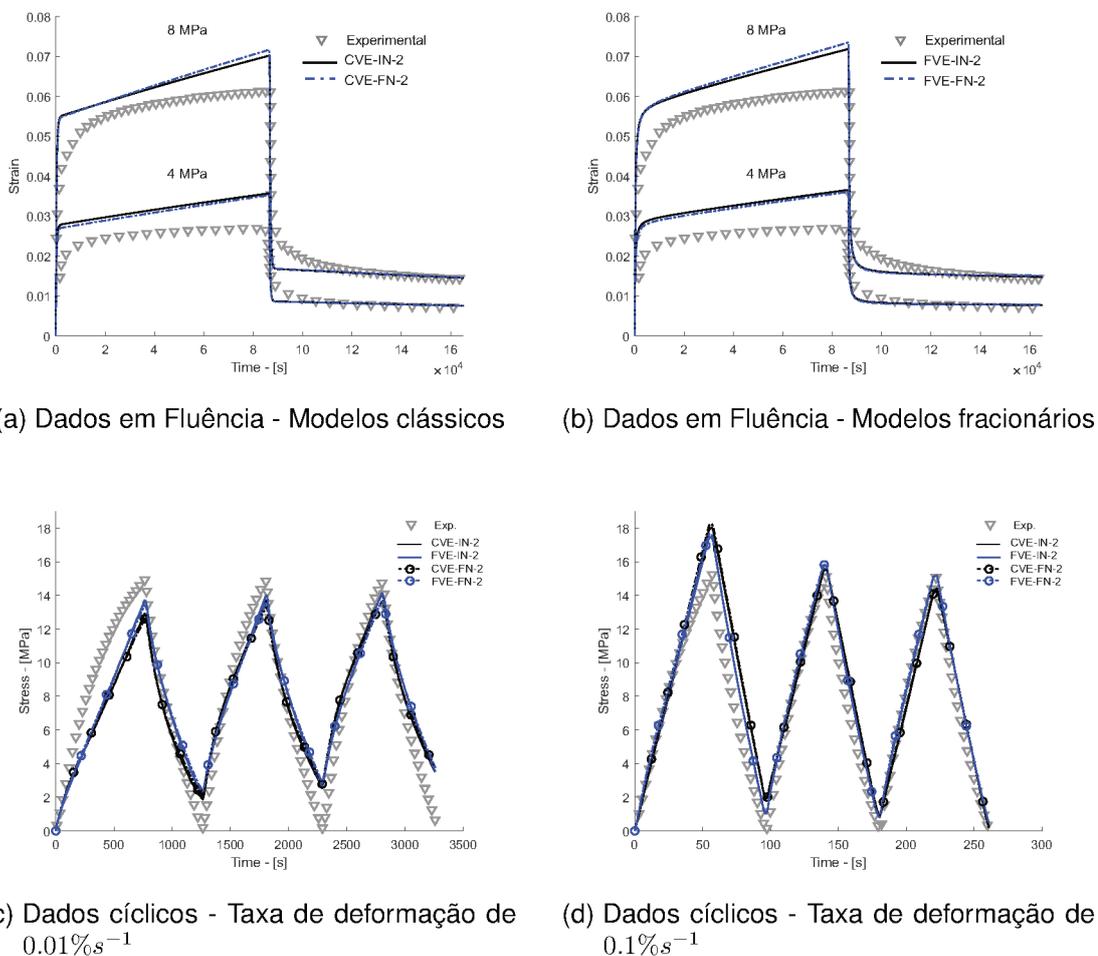


Figura 13 – Ajuste com modelos viscoelásticos com dois braços viscoelásticos utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (13)

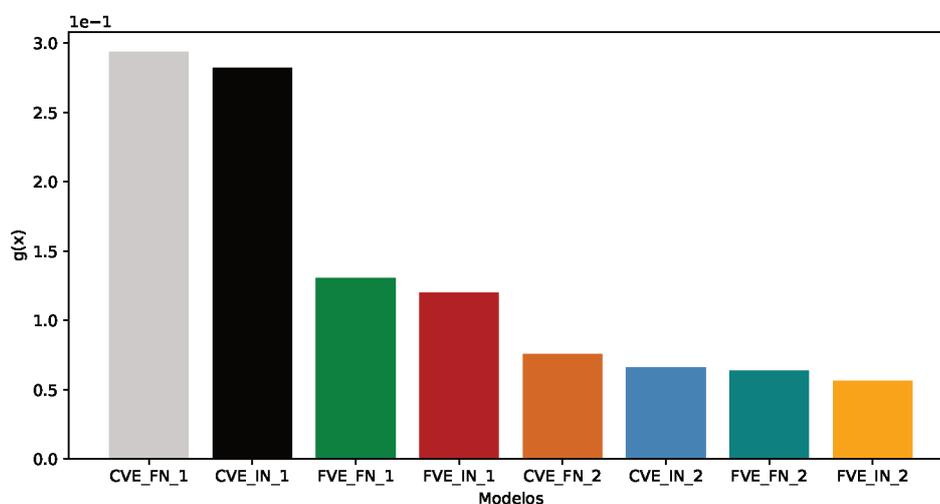
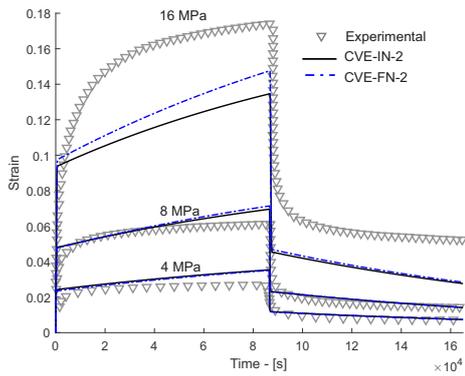


Figura 14 – Gráfico comparativo contendo valores da função objetivo para os ajustes simultâneos utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Modelos viscoelásticos.

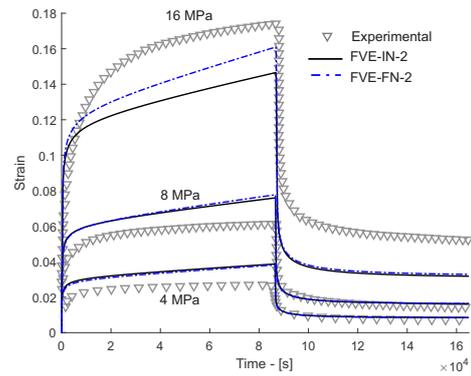
A Figura (15) e a Tabela (14) apresentam os resultados de ajustes simultâneos utilizando três curvas cíclicas e três em fluência-recuperação. Observa-se novamente que os modelos em cinemática finita representaram melhor o comportamento em fluência a 16 MPa. Além disso, observa-se também que os modelos fracionários distribuíram melhor o erro entre as três curvas em fluência. Contudo, novamente, os dados cíclicos não foram satisfatoriamente ajustados. Com base na dificuldade de ajuste apresentada pelos modelos viscoelásticos, levantou-se a hipótese de que talvez o fenômeno de plasticidade também poderia ser importante para a descrição do comportamento deste material nessas condições de carregamento. Desta forma, na próxima seção, são apresentados os resultados do estudo da extensão viscoplástica para os modelos viscoelásticos já citados.

Tabela 14 – Parâmetros viscoelásticos utilizando simultaneamente três curvas cíclicas e três em fluência. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes com dois braços apresentada nas Figuras (15).

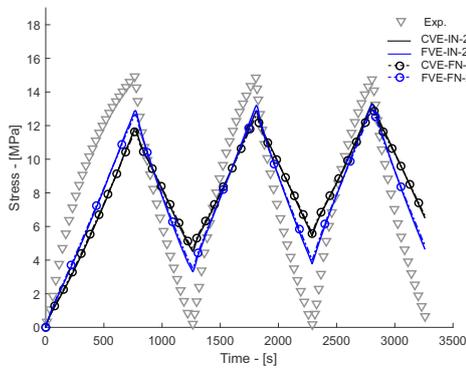
Modelos	$g(x)[10^{-3}]$			ν_0	G_∞	G_1	$\tau_1[10^3]$	α_1	G_2	τ_2	α_2
	Total	Cíclico	Fluência								
FVE-IN-2	186.96	137.87	49.09	0.46	0.0921	38.5231	352.5171	0.9999	194.4842	2.9688	0.3892
FVE-FN-2	196.37	152.92	43.44	0.46	0.1261	40.8748	331.7293	0.9999	223.9067	1.9127	0.3786
FVE-IN-1	228.85	137.84	91.013	0.46	3.8720	3590.3627	1.3247×10^{-12}	0.15225	-	-	-
FVE-FN-1	245.88	153.7	92.18	0.46	4.2934	4044.2788	1.0573×10^{-12}	0.1535	-	-	-
CVE-IN-2	254.0	213.02	40.982	0.46	26.4053	28.5091	71.9088	-	92.1122	15.9716	-
CVE-FN-2	262.49	226.86	35.633	0.46	27.1600	98.0119	15.2064	-	30.8901	71412.7594	-
CVE-IN-1	602.43	218.98	383.45	0.46	50.26	95.5678	17.6843×10^{-3}	-	-	-	-
CVE-FN-1	615.34	233.48	381.86	0.46	52.8476	101.7775	16.9229×10^{-3}	-	-	-	-



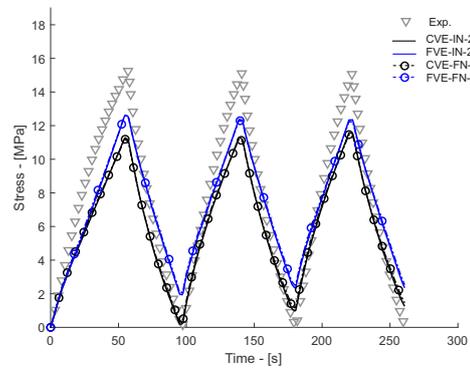
(a) Dados em Fluência - Modelos clássicos



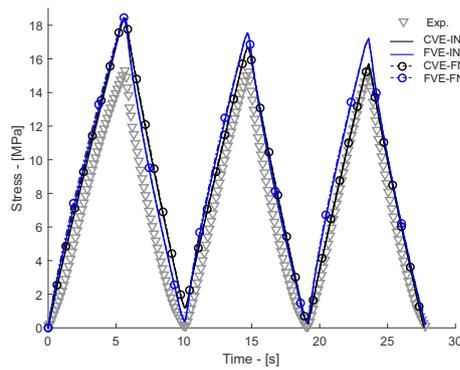
(b) Dados em Fluência - Modelos fracionários



(c) Dados cíclicos - Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$



(d) Dados cíclicos - Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$



(e) Dados cíclicos - Taxa de deformação de $1\%s^{-1}$

Figura 15 – Ajuste dos modelos viscoelásticos com dois braços viscoelásticos utilizando simultaneamente três curvas cíclicas e três em fluência. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (14).

4.2 TESTES COM MODELOS DE VE-VP

Nesta seção são apresentados os resultados de ajustes utilizando os modelos viscoelásticos-viscoplásticos clássicos e fracionários, com cinemática infinitesimal. De forma análoga à seção anterior, primeiro são apresentados os ajustes independentes, seguido pelos ajustes simultâneos.

4.2.1 Ajuste Individual - Ensaios de fluência-recuperação

A Figura (16) e a Tabela (15) mostram a representação gráfica e os parâmetros obtidos utilizando duas curvas em fluência-recuperação, com 1 e 2 braços viscoelásticos. Conforme pode ser visto, os modelos VE-VP se adequaram satisfatoriamente aos dados experimentais, seja utilizando um, ou dois braços viscoelásticos. A partir da Tabela (15), observa-se que os modelos fracionários apresentaram menores valores de função objetivo para um e dois braços. Contudo, esta pequena diferença é contraposta pelo considerável aumento no custo computacional para esta classe de modelos.

Comparando as Figuras (16) e (8), é possível constatar que a incorporação da parcela viscoplástica melhorou consideravelmente a predição das curvas de fluência, especialmente para a tensão de 8MPa, para o material em análise. Ainda que não tenham sido implementados modelos VE-VP com cinemática finita, verificou-se que os resultados obtidos com os modelos VE-VP em cinemática infinitesimal representaram satisfatoriamente as curvas em fluência para 4 e 8 MPa. Através desta observação, conjectura-se se a cinemática finita para esta classe de modelos não seguiria a mesma tendência da apresentada na Figura (8) para os modelos viscoelásticos. Isto é, um comportamento com poucas diferenças ao comparar o efeito das cinemáticas. Desta forma, considerando os modelos VE-VP, atribuiu-se o aumento da capacidade preditiva à incorporação dos efeitos viscoplásticos na modelagem, ao menos para as tensões testadas de 4 e 8 MPa.

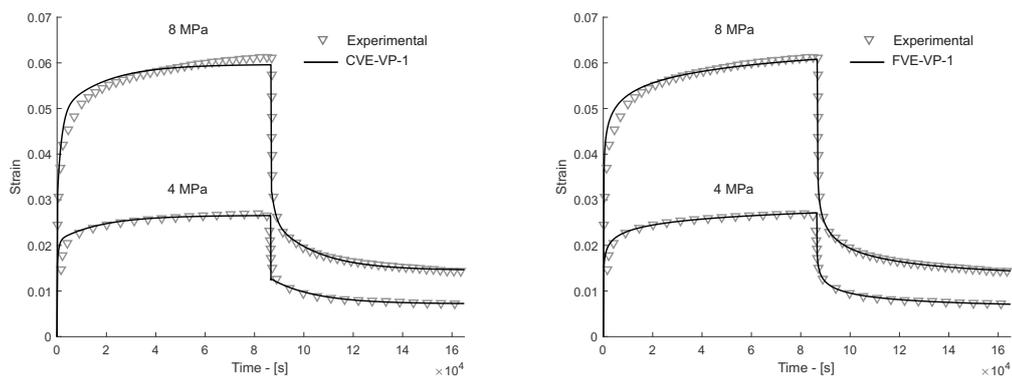
A Figura (17) e a Tabela (16) apresentam os resultados de ajustes utilizando os dados em fluência-recuperação, incorporando os dados experimentais em 16 MPa. Conforme pode ser visto, os modelos VE-VP continuam sendo capazes de representar os dados em 4 e 8 MPa. Contudo, a curva numérica em 16 MPa resultou distante da sua curva experimental correspondente. De forma análoga aos resultados apresentados na Figura (9) para os modelos viscoelásticos em cinemática finita, levanta-se a hipótese de que uma extensão dos modelos VE-VP para cinemática finita também teria o potencial de melhorar a predição da curva em fluência para 16MPa. Desta forma, esta investigação é sugerida para trabalhos futuros.

Tabela 15 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4 e 8 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (16).

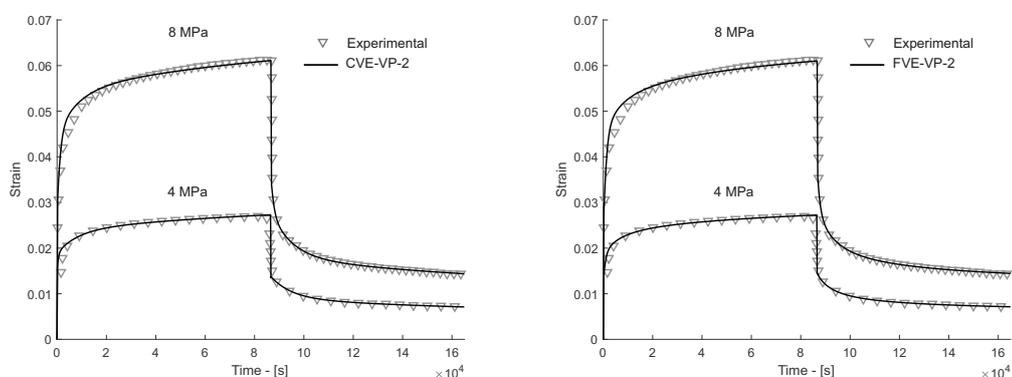
		FVE-VP-2	CVE-VP-2	FVE-VP-1	CVE-VP-1
VP	$g(\mathbf{x})$	1.094E-4	1.142E-4	1.3568E-4	5.282E-4
	K_1 [MPa]	3.2297	0.00171	0.00062	0.00116
	K_2 [MPa]	23.1544	2.9708	32.3470	3.0754
	θ	1.0319	391.6957	1.0067	205.3462
	H [MPa]	283.6873	282.0245	272.4842	227.0905
	σ_0 [MPa]	2.3822	0.00013	2.3302	0.1118
	μ [MPa.s]	60.5427	2197.2325	9E-8	1339.8119
	m	1448.7817	40.6198	2.0911	79.1403
	VE	ν_0	0.46	0.46	0.46
G_∞ [MPa]		45.6959	53.7122	41.1813	67.7465
G_1 [MPa]		27.2844	16.9050	3634.4002	27.6952
τ_1 [10 ⁻³][s]		130.4728	74.8707	1.05E-7	12.6013
α_1		0.62534	-	0.2471	-
G_2 [MPa]		33.3168	27.3271	-	-
τ_2 [s]		4263.9404	6055.1197	-	-
α_2		0.83230	-	-	-

Tabela 16 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (17).

		FVE-VP-2	CVE-VP-2	FVE-VP-1	CVE-VP-1
VP	$g(\mathbf{x})$	1.84E-2	1.892E-2	1.908E-2	2.11E-2
	K_1 [MPa]	0.00817	0.003208	0.04314	0.01048
	K_2 [MPa]	16.6263	16.5466	17.1147	17.7730
	θ	69.0348	73.0076	52.1974	39.9268
	H [MPa]	0.0194	7.6277E-3	0.05360	0.0131
	σ_0 [MPa]	8.861E-5	3.4711E-5	1.9216E-4	5.733E-5
	μ [MPa.s]	0.1489	0.05851	0.04917	0.01218
	m	0.6263	0.24567	0.04265	0.01032
	VE	ν_0	0.46	0.46	0.46
G_∞ [MPa]		27.1846	43.4575	43.2862	59.5843
G_1 [MPa]		837.9062	32.5204	570.9954	27.1412
τ_1 [10 ⁻³][s]		47.088	3346.2551	1.02735	9.7858E3
α_1		0.8650	-	0.3291	-
G_2 [MPa]		41.3632	17.7101	-	-
τ_2 [s]		18.605E3	79.222E3	-	-
α_2		0.4815	-	-	-



(a) Modelo clássico VE-VP com um braço. (b) Modelo fracionário VE-VP com um braço.

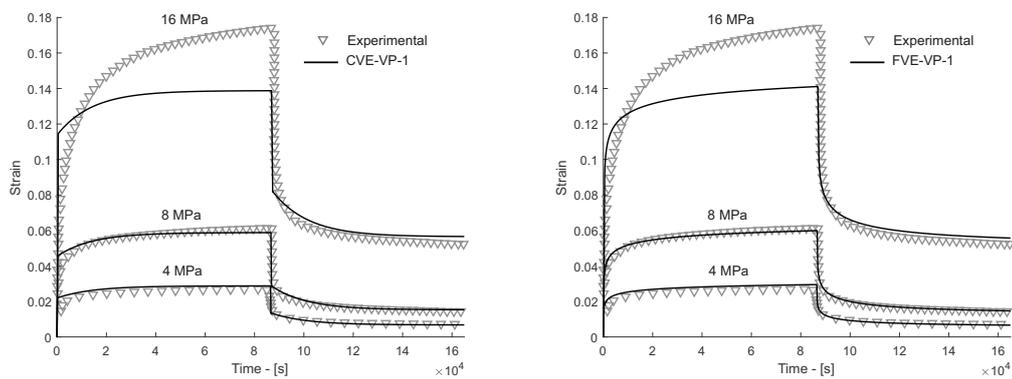


(c) Modelo clássico VE-VP com dois braços. (d) Modelo fracionário VE-VP com dois braços.

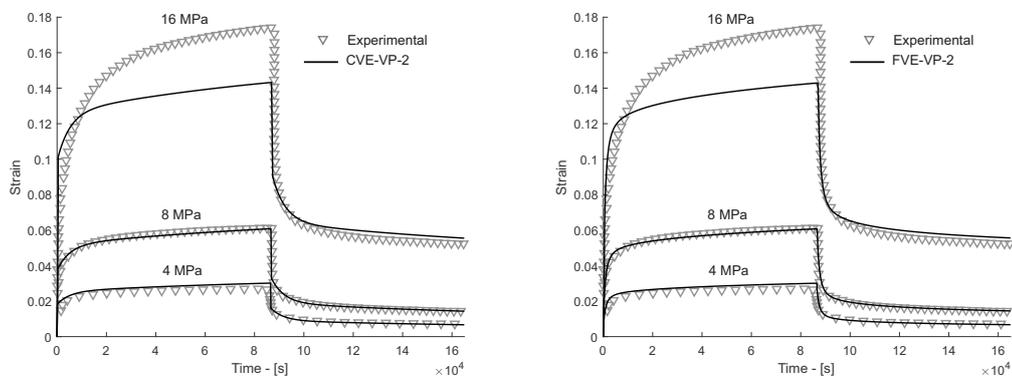
Figura 16 – Ajuste de parâmetros utilizando apenas dados em fluência-recuperação. Modelos VE-VP com cinemática infinitesimal. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (15).

4.2.2 Ajuste Individual - Ensaios cíclicos

Em relação ao ajuste dos dados em condição de carregamento cíclico, a Figura (18) e a Tabela (17) apresentam os resultados utilizando curvas em taxas de deformação de 0.01 e $0.1 \text{ \%} s^{-1}$. Enquanto a Figura (19) e Tabela (18) mostram os resultados utilizando também a curva em taxa de $1 \text{ \%} s^{-1}$. Conforme pode ser visto, os modelos VE-VP com cinemática infinitesimal representaram satisfatoriamente todas as curvas cíclicas, inclusive na fase de carregamento, o que não foi possível utilizando os modelos puramente viscoelásticos.

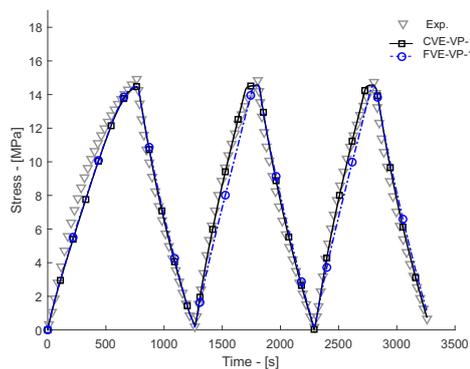


(a) Modelo VE-VP clássico com um braço. (b) Modelo VE-VP fracionário com um braço.

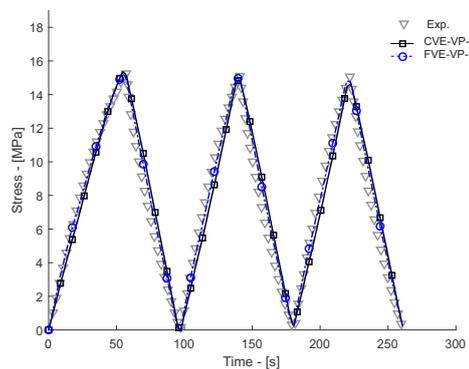


(c) Modelo VE-VP clássico com dois braços. (d) Modelo VE-VP fracionário com dois braços.

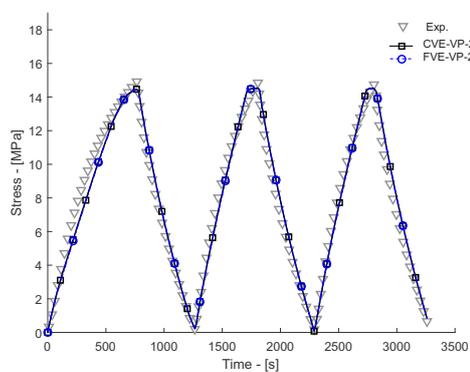
Figura 17 – Ajuste de parâmetros com modelos VE-VP utilizando apenas dados em fluência-recuperação, com dados experimentais em 4, 8 e 16 MPa. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (16).



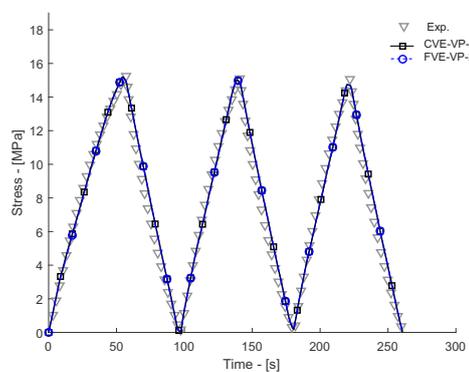
(a) Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$ - Um braço.



(b) Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$ - Um braço.



(c) Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$ - Dois braços.

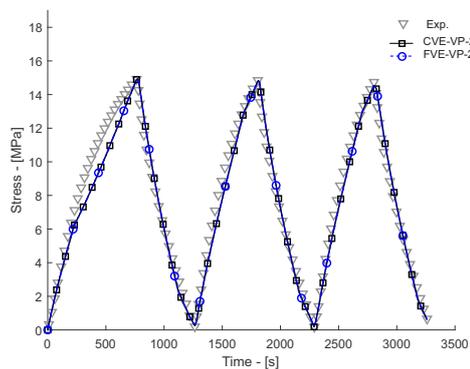


(d) Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$ - Dois braços.

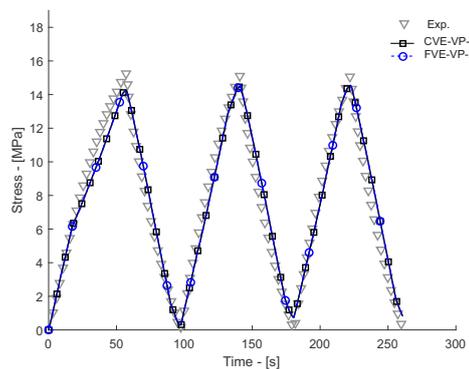
Figura 18 – Ajuste com modelos VE-VP utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 $\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (17).

Tabela 17 – Parâmetros dos modelos VE-VP utilizando dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01 e 0.1 $\%s^{-1}$. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentada na Figura (18).

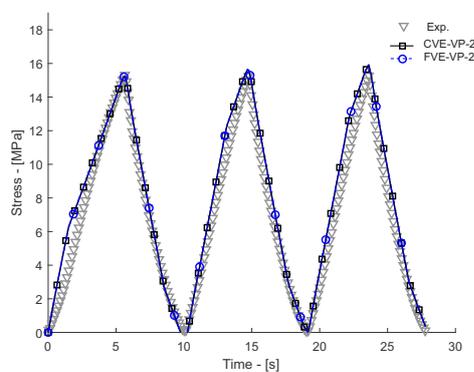
		FVE-VP-2	CVE-VP-2	FVE-VP-1	CVE-VP-1
VP	$g(\mathbf{x})$	9.5262E-4	9.486E-4	11.969E-4	14.761E-4
	K_1 [MPa]	0.0822	0.07455	0.3103	0.4200
	K_2 [MPa]	11.9844	12.5883	8.4948	13.2238
	θ	348.7263	352.7356	333.772	297.2393
	H [MPa]	0.0436	0.0406	0.1941	0.6163
	σ_0 [MPa]	2.3820	1.7781	5.8920	1.1491
	μ [MPa.s]	0.0085	0.0084	53.4555	2.9665
	m	19211.9497	19529.1548	3.5706	65.6426
VE	ν_0	0.46	0.46	0.46	0.46
	G_∞ [MPa]	73.4713	73.5857	40.9551	77.7144
	G_1 [MPa]	49.8162	49.8162	171.1995	87.8473
	τ_1 [s]	9.4520	9.3442	71.7452	139.9333
	α_1	0.9948	-	0.4636	-
	G_2 [MPa]	72.3848	72.5280	-	-
	τ_2 [s]	186.9755	186.0093	-	-
	α_2	0.9967	-	-	-



(a) Taxa de deformação de $0.01\%s^{-1}$ - Dois braços.



(b) Taxa de deformação de $0.1\%s^{-1}$ - Dois braços.



(c) Taxa de deformação de $1\%s^{-1}$ - Dois braços.

Figura 19 – Ajuste com modelos VE-VP com dois braços, utilizando apenas dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e $1\%s^{-1}$. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (18).

Tabela 18 – Parâmetros dos modelos VE-VP utilizando dados cíclicos em taxas de deformação de 0.01, 0.1 e 1 % s^{-1} . Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes utilizando dois braços apresentada na Figura (19).

		FVE-VP-2	CVE-VP-2	FVE-VP-1	CVE-VP-1
VP	$g(x)$	1.0163E-2	1.0163E-2	1.1433E-2	1.296E-2
	K_1 [MPa]	5.4722	5.4827	0.94210	1.0732
	K_2 [MPa]	4.5094	4.4379	0.8911	216.2324
	θ	0.061	0.06	0.09352	0.0385
	H [MPa]	550.8616	550.8591	554.5018	506.9852
	σ_0 [MPa]	6.2261	6.2261	6.2237	5.6601
	μ [MPa.s]	4.72E-7	4.718E-7	8.8178E-5	5.1519E-5
	m	8.3321	8.19	2.2465	0.001077
VE	ν_0	0.46	0.46	0.46	0.46
	G_∞ [MPa]	43.3915	43.4044	46.1595	59.5762
	G_1 [MPa]	53.7215	53.7051	126.0895	119.401
	τ_1 [s]	1104.9773	1104.6454	242.693	201.3416
	α_1	0.9997	-	0.76948	-
	G_2 [MPa]	71.9621	71.9659	-	-
	τ_2 [s]	109.7758	109.7724	-	-
	α_2	0.99997	-	-	-

4.2.3 Ajuste simultâneo

Finalmente, a Figura (20) e Tabela (19) apresentam os resultados de ajustes simultâneos para os modelos VE-VP clássicos e fracionários utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Observa-se a partir da figura que os modelos VE-VP foram capazes de ajustar satisfatoriamente os dados cíclicos e em fluência simultaneamente. Comparando as Figuras (20) e (13), verifica-se que a incorporação da parcela viscoplástica resultou em considerável melhoria na capacidade de ajuste dos modelos. Para auxiliar a comparação, a Figura (21) apresenta os valores da função objetivo em gráficos de barras.

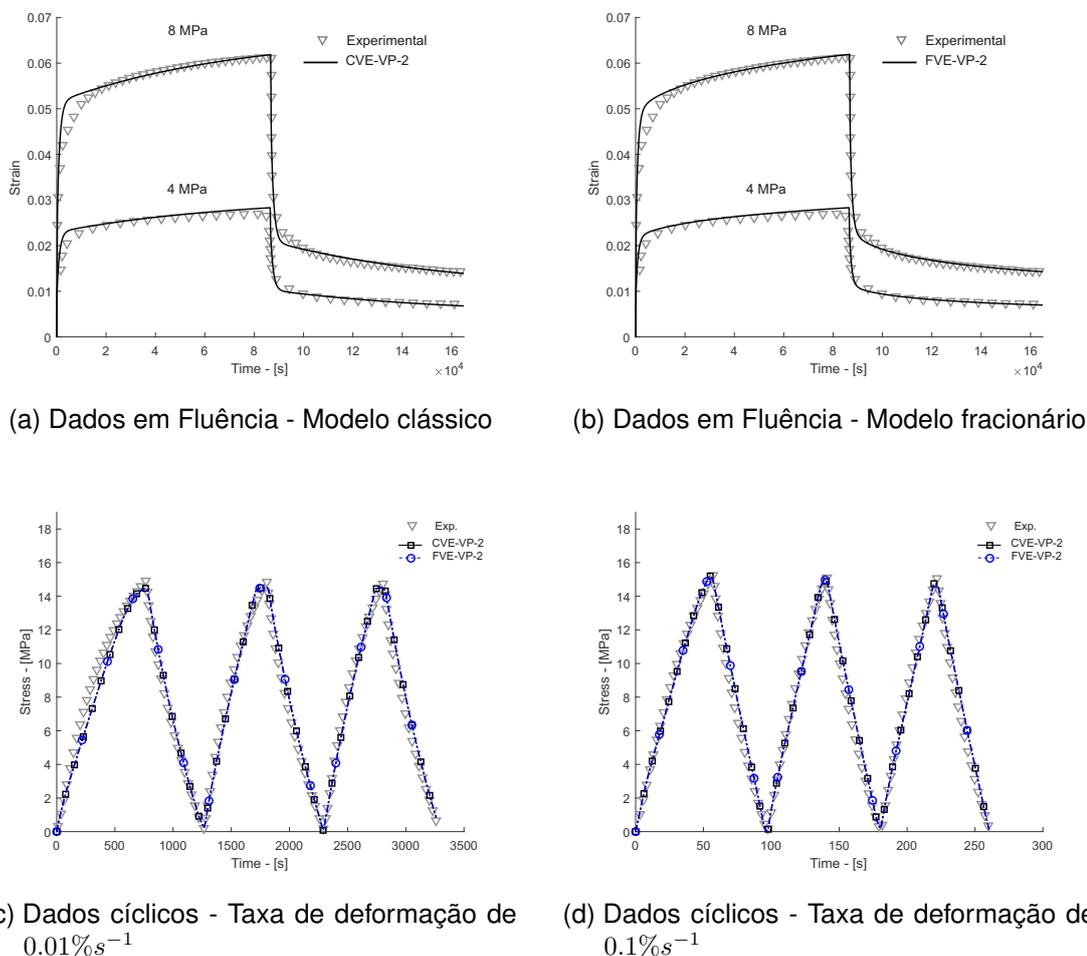


Figura 20 – Ajuste com modelos VE-VP, utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação, com dois braços viscoelásticos. Parâmetros materiais apresentados na Tabela (19).

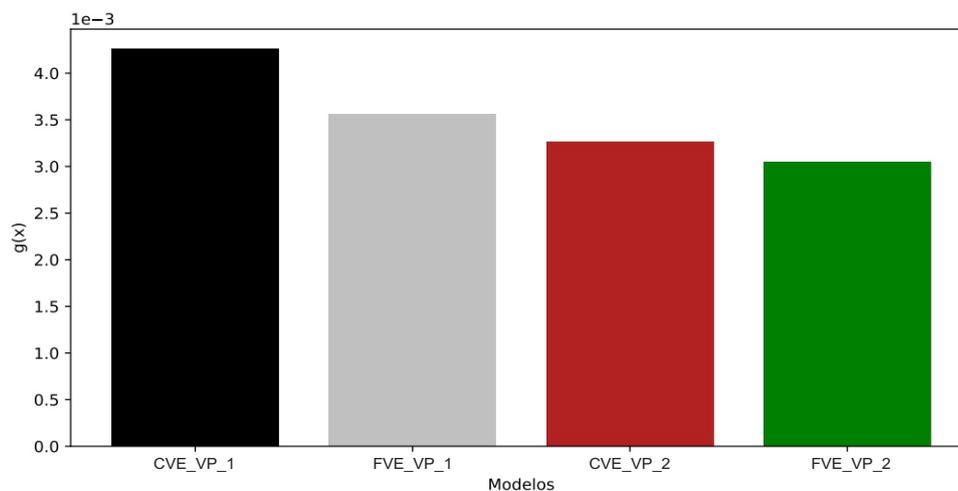


Figura 21 – Gráfico comparativo contendo valores da função objetivo para os ajustes simultâneos, utilizando duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Modelos VE-VP.

Tabela 19 – Parâmetros dos modelos VE-VP, utilizando simultaneamente duas curvas cíclicas e duas em fluência-recuperação. Resultados ordenados de acordo com os valores da função objetivo. Representação gráfica dos ajustes apresentados na Figura (20) para dois braços viscoelásticos.

		FVE-VP-2	CVE-VP-2	FVE-VP-1	CVE-VP-1
	$g(x)$ Total	3.0454E-3	3.2594E-3	3.5581E-3	4.259-3
	$g(x)$ Cíclico	2.419E-3	2.2481E-3	1.645E-3	2.052E-3
	$g(x)$ Fluência	6.264E-4	1.0113E-3	1.912E-3	2.207E-3
VP	K_1 [MPa]	1.3559E-5	3.8469E-5	0.0152	1.1724E-4
	K_2 [MPa]	3.0620	3.08167	17.6178	3.0399
	θ	407.1015	387.5539	53.3267	192.7104
	H [MPa]	321.9766	319.2293	0.0088	213.2790
	σ_0 [MPa]	2.82E-5	2.0582E-5	1.7643E-4	0.13072
	μ [MPa.s]	239.9301E3	111.6326E3	4580.7761	53.5017E3
	m	0.1117	0.1346	1.3466	0.46977
		ν_0	0.46	0.46	0.46
VE	G_∞ [MPa]	41.7098	50.4301	26.7608	72.5307
	G_1 [MPa]	34.7872	20.7287	4823.4378	90.6701
	τ_1 [s]	66.5188E3	50.8681E3	8.174E-9	3199.9760
	α_1	0.6578	-	0.1680	-
	G_2 [MPa]	244.4651	241.9285	-	-
	τ_2 [s]	200.2320	234.4389	-	-
	α_2	0.9999	-	-	-

5 CONCLUSÃO

Como apresentado, o principal objetivo deste trabalho foi a comparação entre modelos clássicos e fracionários de Maxwell Generalizado, seguindo abordagens viscoelásticas e viscoelásticas-viscoplásticas. Os modelos viscoelásticos foram formulados com cinemática infinitesimal e finita, enquanto os viscoelásticos-viscoplásticos apenas em cinemática infinitesimal. A comparação foi realizada por meio de um procedimento de ajuste de parâmetros, utilizando dados experimentais do UHMWPE sob carga cíclica e de fluência-recuperação. Deve-se destacar que as comparações foram feitas para uma classe específica de modelo reológico (Maxwell Generalizado) e apenas para o conjunto de dados experimentais utilizado. Sendo assim, as conclusões apresentadas são específicas para estas condições.

Primeiramente, foram realizados ajustes individuais, onde os dois tipos de carregamento foram ajustados separadamente. Contudo, tendo em vista que a maior parte da literatura não apresenta dados comparativos entre modelos fracionários e clássicos, utilizando simultaneamente diversas condições de carregamento, foram também conduzidos e apresentados ajustes combinando os ensaios cíclicos e em fluência-recuperação.

Em relação aos ajustes individuais, os modelos fracionários mostraram melhor desempenho quando apenas um braço viscoelástico foi utilizado, seja nos modelos viscoelásticos ou viscoelásticos-viscoplásticos. No entanto, ao utilizar 2 braços de Maxwell, os modelos clássicos e fracionários apresentaram o mesmo comportamento.

No que diz respeito aos ajustes simultâneos viscoelásticos, os modelos fracionários apresentaram melhor capacidade preditiva com um e dois braços. Apesar disso, os dados numéricos mostraram-se ainda distantes dos experimentais em uma ampla faixa dos ensaios cíclicos e em fluência-recuperação.

Outra observação interessante, obtida a partir dos modelos viscoelásticos, está relacionada aos tipos de cinemáticas implementadas. Verificou-se que não ocorreram diferenças significativas entre os resultados obtidos pelos modelos viscoelásticos com cinemática infinitesimal e finita, para os ensaios de fluência até 8 MPa, e para todas as taxas de deformação utilizadas nos ensaios cíclicos. Por outro lado, os modelos em cinemática finita permitiram obter melhores ajustes próximo a região da curva em fluência a 16 MPa. Isto sugere que os fenômenos de não linearidade geométrica não se manifestam de forma acentuada ao menos até 8 MPa para o teste de fluência, e para todas as taxas utilizadas nos ensaios cíclicos.

Em relação aos modelos viscoelásticos-viscoplásticos com cinemática infinitesimal, os resultados mostraram que os modelos clássicos e fracionários foram capazes de representar satisfatoriamente os comportamentos experimentais cíclicos em todas as taxas, e o comportamento em fluência até a curva em 8 MPa, seja em condição de

ajuste individual ou simultâneo. Isto indica que a utilização de uma parcela viscoplástica tem forte impacto na modelagem constitutiva deste material. A curva experimental em fluência a 16 MPa não foi bem representada pelos modelos VE-VP com cinemática infinitesimal. Este fato pode estar relacionado à utilização de cinemática linear neste regime.

Deve-se destacar também que, embora os modelos fracionários tenham apresentado resultados ligeiramente superiores, principalmente nos ajustes simultâneos, o custo computacional desta classe de modelos foi consideravelmente superior aos clássicos. Além disso, a arquitetura de implementação computacional precisou ser reformulada para levar em conta todo o histórico das variáveis internas (ou uma parcela, caso sejam utilizadas técnicas de redução do custo computacional). Esta última observação pode ser um inconveniente, caso o código tenha sido previamente construído para trabalhar com algoritmos recursivos a dois instantes.

Finalmente, são apresentadas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Implementar modelos clássicos e fracionários VE-VP com cinemática finita, e verificar se o ajuste próximo a curva em fluência a 16 MPa é melhor representado com a utilização de cinemática não linear.
- Implementar outros arranjos de modelos reológicos diferentes dos modelos de Maxwell generalizado estudados neste trabalho.
- Estudo e implementação de técnicas de redução do custo computacional dos modelos fracionários.
- Estudo de modelos fracionários onde a ordem de derivação é atualizada segundo uma função previamente definida.
- Estudar a transformação dos parâmetros fracionários obtidos no domínio da frequência para o domínio do tempo.

REFERÊNCIAS

- ADOLFSSON, Klas; ENELUND, Mikael. Fractional derivative viscoelasticity at large deformations. **Nonlinear dynamics**, Springer, v. 33, n. 3, p. 301–321, 2003.
- ALCOUTLABI, Mataz; MARTINEZ-VEGA, J.J. Modeling of the viscoelastic behavior of amorphous polymers by the differential and integration fractional method: the relaxation spectrum. en. **Polymer**, v. 44, n. 23, p. 7199–7208, nov. 2003. ISSN 00323861. Acesso em: 1 jul. 2019.
- ALOTTA, Gioacchino; BARRERA, Olga; COCKS, Alan *et al.* The finite element implementation of 3D fractional viscoelastic constitutive models. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 146, p. 28–41, 2018.
- ALOTTA, Gioacchino; BARRERA, Olga; COCKS, Alan CF *et al.* On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model. **Meccanica**, Springer, v. 52, n. 9, p. 2127–2142, 2017.
- ALOTTA, Gioacchino; BARRERA, Olga; PEGG, Elise C. Viscoelastic material models for more accurate polyethylene wear estimation. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 53, n. 5, p. 302–312, 2018.
- AMABILI, Marco; BALASUBRAMANIAN, Prabakaran; BRESLAVSKY, Ivan. Anisotropic fractional viscoelastic constitutive models for human descending thoracic aortas. **Journal of the mechanical behavior of biomedical materials**, Elsevier, v. 99, p. 186–197, 2019.
- ARIKOGLU, Aytac. A new fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms. en. **Rheologica Acta**, v. 53, n. 3, p. 219–233, mar. 2014. ISSN 0035-4511, 1435-1528. Acesso em: 1 jul. 2019.
- AVANZINI, Andrea. Mechanical characterization and finite element modelling of cyclic stress–strain behaviour of ultra high molecular weight polyethylene. **Materials & Design**, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 330–343, 2008.
- BAGLEY, Ronald L; TORVIK, PJ. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, SOR, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.
- BERGSTRÖM, JS; KURTZ, SM *et al.* Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. **Biomaterials**, Elsevier, v. 23, n. 11, p. 2329–2343, 2002.
- BERGSTRÖM, JS; RIMNAC, CM; KURTZ, SM. An augmented hybrid constitutive model for simulation of unloading and cyclic loading behavior of conventional and highly crosslinked UHMWPE. **Biomaterials**, Elsevier, v. 25, n. 11, p. 2171–2178, 2004.

BERGSTRÖM, JS; RIMNAC, CM; KURTZ, SM. Prediction of multiaxial mechanical behavior for conventional and highly crosslinked UHMWPE using a hybrid constitutive model. **Biomaterials**, Elsevier, v. 24, n. 8, p. 1365–1380, 2003.

BLAIR, GW Scott; COPPEN, FMV. The estimation of firmness in soft materials. **The American Journal of Psychology**, JSTOR, p. 234–246, 1943.

BRINSON, Hal F. Polymer engineering science and viscoelasticity. **An Introduction**, Springer, 2008.

CAPUTO, Michele; MAINARDI, Francesco. A new dissipation model based on memory mechanism. **Pure and applied Geophysics**, Springer, v. 91, n. 1, p. 134–147, 1971.

CARNIEL, Thiago André. Modelo viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado aplicado em análises transientes não lineares de treliças tridimensionais. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2013.

CHEN, Kaijuan *et al.* Time-dependent uniaxial ratchetting of ultrahigh molecular weight polyethylene polymer: viscoelastic–viscoplastic constitutive model. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 83, n. 10, 2016.

DI PAOLA, Mi; PIRROTTA, A; VALENZA, AJMoM. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results. **Mechanics of materials**, Elsevier, v. 43, n. 12, p. 799–806, 2011.

DUSUNCELI, Necmi; COLAK, Ozgen U; FILIZ, Coskun. Determination of material parameters of a viscoplastic model by genetic algorithm. **Materials & Design**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 1250–1255, 2010.

FARIA, Lucas Brant Pimenta de. Análise de modelos de viscoelasticidade aplicados a termoplásticos: estudo de caso: UHMWPE. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2017.

FARIAS, Jan-Michel Colombo. Resistência ao fluxo inelástico na modelagem de polímeros amorfos: uma abordagem termodinâmica variacional, 2018.

FUKUNAGA, Masataka; SHIMIZU, Nobuyuki. Fractional derivative constitutive models for finite deformation of viscoelastic materials. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 10, n. 6, p. 061002, 2015.

GARCIA-GONZALEZ, D; GARZON-HERNANDEZ, S; ARIAS, A. A new constitutive model for polymeric matrices: application to biomedical materials. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 139, p. 117–129, 2018.

GURTIN, Morton E; FRIED, Eliot; ANAND, Lallit. **The mechanics and thermodynamics of continua**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

HAVEROTH, Thais Clara da Costa. On the use of fractional derivatives for modeling nonlinear viscoelasticity. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2015.

HEYMANS, Nicole; BAUWENS, J. -C. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior. en. **Rheologica Acta**, v. 33, n. 3, p. 210–219, 1994. ISSN 0035-4511, 1435-1528. Acesso em: 1 jul. 2019.

HILFER, Rudolf. **Applications of fractional calculus in physics**. [S.l.]: World scientific, 2000.

HOLZAPFEL, Gerhard A. Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science. **Meccanica**, Springer, v. 37, n. 4, p. 489–490, 2002.

HOU, Tingting; CHEN, Hongshan. Isothermal physical aging of PEEK and PPS investigated by fractional Maxwell model. en. **Polymer**, v. 53, n. 12, p. 2509–2518, mai. 2012. ISSN 00323861. Acesso em: 1 jul. 2019.

KHAJEHSAEID, Hesam. Application of fractional time derivatives in modeling the finite deformation viscoelastic behavior of carbon-black filled NR and SBR. **Polymer Testing**, Elsevier, v. 68, p. 110–115, 2018.

KHAN, Fazeel; YEAKLE, Colin; GOMAA, Said. Characterization of the mechanical properties of a new grade of ultra high molecular weight polyethylene and modeling with the viscoplasticity based on overstress. **Journal of the mechanical behavior of biomedical materials**, Elsevier, v. 6, p. 174–180, 2012.

LAI, W Michael *et al.* **Introduction to continuum mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2009.

MAKRIS, Nicos. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. **Journal of Rheology**, SOR, v. 41, n. 5, p. 1007–1020, 1997.

MCBRIDE, Adam. **Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering**. [S.l.]: JSTOR, 2008.

MENG, Ruifan; YIN, Deshun; DRAPACA, Corina S. A variable order fractional constitutive model of the viscoelastic behavior of polymers. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 113, p. 171–177, 2019.

MILLER, Kenneth S; ROSS, Bertram. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley-Interscience, 1993.

MÜLLER, Sebastian *et al.* A nonlinear fractional viscoelastic material model for polymers. **Computational Materials Science**, Elsevier, v. 50, n. 10, p. 2938–2949, 2011.

OLDHAM, Keith; SPANIER, Jerome. **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. [S.l.]: Elsevier, 2002. v. 111.

OLDHAM, Keith B.; SPANIER, Jerome. **The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2006. ISBN 978-0-486-45001-8.

PADOVAN, J. Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. **Computational Mechanics**, Springer, v. 2, n. 4, p. 271–287, 1987.

PODLUBNY, Igor. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. [S.l.]: Elsevier, 1998. v. 198.

ROGOSIN, Sergei; MAINARDI, Francesco. George william scott blair—the pioneer of fractional calculus in rheology. **arXiv preprint arXiv:1404.3295**, 2014.

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. **Fractional integrals and derivatives: theory and applications**. Switzerland ; Philadelphia, Pa., USA: Gordon e Breach Science Publishers, 1993. ISBN 978-2-88124-864-1.

SCHMIDT, Andre; GAUL, Lothar. Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method. *In: PROCEEDINGS of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*. [S.l.: s.n.], 2002. P. 297–306.

SCHMIDT, André; GAUL, Lothar. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 29, n. 1-4, p. 37–55, 2002.

SCHMIDT, André; GAUL, Lothar. On the numerical evaluation of fractional derivatives in multi-degree-of-freedom systems. **Signal Processing**, Elsevier, v. 86, n. 10, p. 2592–2601, 2006.

SIMO, Juan C; HUGHES, Thomas JR. **Computational inelasticity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 7.

SIMO, Juan Carlos. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 60, n. 2, p. 153–173, 1987.

SOUZA NETO, Eduardo A de; PERIC, Djordje; OWEN, David RJ. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

STANKIEWICZ. Parallel Scott-Blair fractional model of viscoelastic biological materials. **ECONTECHMOD. AN INTERNATIONAL QUARTERLY JOURNAL**, p. 107–115, 2018.

TEODORO, G Sales; MACHADO, JA Tenreiro; DE OLIVEIRA, E Capelas. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 388, p. 195–208, 2019.

TSCHOEGL, Nicholas W; KNAUSS, Wolfgang G; EMRI, Igor. Poisson's ratio in linear viscoelasticity—a critical review. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, Springer, v. 6, n. 1, p. 3–51, 2002.

VAZ JR, M; CARDOSO, EL; STAHLSCHMIDT, J. Particle swarm optimization and identification of inelastic material parameters. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, 2013.

VAZ JR, Miguel; LUERSEN, Marco A *et al.* Identification of inelastic parameters based on deep drawing forming operations using a global–local hybrid Particle Swarm approach. **Comptes Rendus Mécanique**, Elsevier, v. 344, n. 4-5, p. 319–334, 2016.

WARD, Ian M; SWEENEY, John. **Mechanical properties of solid polymers**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

WOLLSCHIED, D; LION, A. The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: a comparison with the Maxwell-element approach. **Computational Mechanics**, Springer, v. 53, n. 5, p. 1015–1031, 2014.

XIAO, Rui; SUN, Hongguang; CHEN, Wen. An equivalence between generalized Maxwell model and fractional Zener model. en. **Mechanics of Materials**, v. 100, p. 148–153, set. 2016. ISSN 01676636. Acesso em: 30 jul. 2019.

XU, Jun *et al.* Vibration analysis of complex fractional viscoelastic beam structures by the wave method. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 167, p. 105204, 2020.

YU, Chao *et al.* A thermo-mechanically coupled nonlinear viscoelastic–viscoplastic cyclic constitutive model for polymeric materials. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 105, p. 1–15, 2017.

ZHANG, Will *et al.* An efficient and accurate method for modeling nonlinear fractional viscoelastic biomaterials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 362, p. 112834, 2020.

ZOPF, C; HOQUE, SE; KALISKE, M. Comparison of approaches to model viscoelasticity based on fractional time derivatives. **Computational Materials Science**, Elsevier, v. 98, p. 287–296, 2015.

APÊNDICE A – DEFINIÇÃO DE DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO GRÜNWARD-LETNIKOV

Neste apêndice é apresentada a obtenção da definição de derivada fracionária no sentido de Grünwald-Letnikov (G.L). Conforme citado durante o texto, esta definição não requer a utilização explícita de operações de integração e derivação, sendo necessária somente a avaliação da função, permitindo assim uma implementação numérica relativamente simples.

A definição de derivada fracionária segundo G.L é dada pelo limite de uma soma e pode ser obtida pela generalização da derivada de ordem inteira. A apresentação desta definição segue a abordagem apresentada por Keith Oldham e Spanier (2002) e Haveroth (2015).

Inicia-se com a definição da derivada de primeira ordem de uma função $f(t)$ diferenciável em termos da diferença regressiva no intervalo $[a, b]$

$${}_a D_b^1 := \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(t) - f(t - \Delta t)]}{\Delta t} \right\}. \quad (107)$$

Na expressão anterior, Δt corresponde ao intervalo de tempo. Similarmente, define-se a derivada de segunda e terceira ordem

$${}_a D_b^2 := \frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{f'(t) - f'(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\}, \quad (108)$$

$${}_a D_b^2 := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} - \frac{f(t - \Delta t) - f(t - 2\Delta t)}{\Delta t} \right\}, \quad (109)$$

$${}_a D_b^2 := \frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ [\Delta t]^{-2} [f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)] \right\}, \quad (110)$$

$${}_a D_b^3 := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ [\Delta t]^{-3} [f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)] \right\}. \quad (111)$$

Observa-se que cada derivada de ordem n , sendo n um inteiro, envolve uma avaliação da função a mais que a respectiva ordem de derivação. Além disso os coeficientes alternam-se em sinal e seguem uma progressão binomial. Desta forma, pode-se escrever a generalização da derivada de ordem n , pertencente ao conjunto dos números naturais \mathbb{N} , conforme

$${}_a D_b^n = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ [\Delta t]^{-n} \sum_{j=0}^n [-1]^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right\}, \quad (112)$$

onde os coeficientes binomiais são obtidos por

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!} & 0 \leq j \leq n \\ 0, & 0 \leq n \leq j \end{cases}. \quad (113)$$

Se $\Delta t = \frac{[t-a]}{N}$, com $N=1,2,3,\dots$, a Equação (112) pode ser reescrita como

$${}_aD_b^n = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [\Delta t]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-1]^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right\}. \quad (114)$$

A mudança de limite superior realizada na Equação (114) se torna útil quando a expressão é também utilizada para definir uma integral fracionária. Além disso, define-se a propriedade apresentado por Keith Oldham e Spanier (2002)

$$[-1]^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}, \quad (115)$$

Esta propriedade apresenta a relação entre a função fatorial e a função Gamma, Γ . A introdução da função Gamma Γ permite estender o domínio da função fatorial. A partir deste ponto a ordem de derivação não está mais restrita aos números inteiros. Deste modo, pode-se reescrever a Equação (114) para uma ordem $\alpha > 0$ qualquer, resultando na definição de G.L

$${}_aD_b^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[\Delta t]^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f(t - j\Delta t) \right\}. \quad (116)$$

A utilização da propriedade (117),

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} = A_j \frac{j-1-\alpha}{j}, \quad (117)$$

permite reescrever a definição de G.L em um formato mais adequado a aplicações numéricas, onde não é necessário o cômputo explícito da função fatorial em todos os instantes. Obtém-se, portanto, a expressão final,

$${}_aD_b^\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} [\Delta t]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t - j\Delta t). \quad (118)$$

APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DA EXPRESSÃO DO SEGUNDO TENSOR DE TENSÃO DE PIOLA-KIRCHHOFF

Este anexo apresenta as etapas de derivação do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff para uma função energia de deformação $\Psi(\mathbf{C})$ genérica.

Dada a expressão geral de \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial \mathbf{C}}, \quad (119)$$

e aplicando a regra da cadeia,

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} : \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}}. \quad (120)$$

A derivada de $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}}$ pode ser obtida por,

$$\frac{\partial(\det \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} = J^2 \mathbf{C}^{-1}, \quad (121)$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{C}} = 2J \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1}, \quad (122)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1}, \quad (123)$$

enquanto a derivada de $\frac{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}$ é apresentada abaixo,

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (124)$$

Utilizando a propriedade $\frac{\partial(\phi \mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} = \phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}} + \mathbf{A} \otimes \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{B}}$,

$$\frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{C} \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbb{I} + \mathbf{C} \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (125)$$

onde a derivada de $\frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}}$ é

$$\frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1}. \quad (126)$$

Logo, a Equação (125) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbb{I} + \mathbf{C} \otimes \left(-\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \right) = J^{-2/3} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right), \quad (127)$$

e substituindo (123) e (127) em (120),

$$\mathbf{S} = J \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \left[\frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} : \mathbb{I} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \right]. \quad (128)$$

Utilizando a propriedade $\mathbf{A} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} : \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} : \mathbf{B})$ e $\mathbf{A} : \mathbb{I} = \mathbf{A}$,

$$\mathbf{S} = J \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \left[\frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} : \mathbf{C} \right) \mathbf{C}^{-1} \right], \quad (129)$$

onde chega-se finalmente a expressão desejada

$$\mathbf{S} = \underbrace{J \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}}_{\mathbf{S}_{\text{vol}}(J)} + \underbrace{J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} \right]}_{\mathbf{S}_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}. \quad (130)$$

Nesta expressão, o operador desviador material DEV é dado por

$$\text{DEV} [\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}. \quad (131)$$

Utilizando o modelo Neo-Hookeano

$$\Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{I}}_1) = \frac{1}{2} G (\bar{\mathbf{I}}_1 - 3), \quad (132)$$

$$\Psi_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} K (\ln J)^2, \quad (133)$$

pode-se obter a expressão final para o modelo hiperelástico. A derivada da parcela isocórica pode ser obtida por

$$\frac{\partial \Psi_{\text{iso}}[\bar{\mathbf{I}}_1(\mathbf{C}_{\text{iso}})]}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} = \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_1}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}}, \quad (134)$$

$$\frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1} = \frac{1}{2} G, \quad (135)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_1}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} = \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} = \mathbf{I}. \quad (136)$$

Finalmente, a expressão para a derivação da parcela isocórica pode ser escrita

$$\text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}^{\circ}(\mathbf{C}_{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}_{\text{iso}}} \right] = \text{DEV} [G\mathbf{I}]. \quad (137)$$

A derivação da parcela volumétrica pode ser obtida de forma semelhante

$$\frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = \frac{1}{J} K (\ln J). \quad (138)$$

Substituindo as equações (137) e (138) em (130), obtém-se finalmente a expressão final para o segundo tensor de Piola, utilizando a energia de deformação Neo-Hookeana

$$\mathbf{S} = K (\ln J) \mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3} G \text{DEV} (\mathbf{I}). \quad (139)$$