



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LEONARDO AUGUSTO SEKI

**IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE CONDIÇÕES DE
CONTORNO PARA REPRESENTAÇÃO DE IMPEDÂNCIA
ACÚSTICA NA PRESENÇA DE ESCOAMENTO
POTENCIAL E CISALHANTE**

FLORIANÓPOLIS

2021

Leonardo Augusto Seki

**IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE CONDIÇÕES DE CONTORNO
PARA REPRESENTAÇÃO DE IMPEDÂNCIA ACÚSTICA NA
PRESENÇA DE ESCOAMENTO POTENCIAL E CISALHANTE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr.
Eng.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Seki, Leonardo Augusto

Implementação numérica de condições de contorno para
representação de impedância acústica na presença de
escoamento potencial e cisalhante / Leonardo Augusto Seki
; orientador, Júlio Apolinário Cordioli, 2021.

96 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. aeroacústica computacional.
3. impedância acústica. 4. liners. I. Cordioli, Júlio
Apolinário. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Leonardo Augusto Seki

**Implementação numérica de condições de contorno para
representação de impedância acústica na presença de
escoamento potencial e cisalhante**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Andrey Ricardo da Silva, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Paulo Celso Greco Júnior, Dr. Eng.
Universidade de São Paulo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça,
Dr. Eng.
Coordenador do Programa

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr. Eng.
Orientador

Florianópolis, 29 de Janeiro de 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e minha irmã, pelo apoio e oportunidades. Ao professor e orientador Júlio Cordioli e ao amigo e colega André Spillere, por todo o auxílio e conhecimentos que viabilizaram a realização desse trabalho. Aos demais amigos e colegas do LVA pelas discussões técnicas e interações sociais.

“We live in a society exquisitely dependent on science and technology, in which hardly anyone knows anything about science and technology.”

(Carl Sagan, 1990)

RESUMO

Motores aeronáuticos modernos usam um tratamento acústico chamado de *liner*, formado geralmente por uma placa perfurada cobrindo um arranjo de cavidades. Esse tratamento é tipicamente caracterizado por sua impedância acústica. No entanto, a presença de escoamento rasante na superfície do *liner* levanta diversas questões referentes à forma correta de modelar esse tratamento acústico matematicamente. A abordagem mais comum é usar a condição de contorno de Ingard-Myers, que assume uma camada limite de espessura infinitesimal. Alguns trabalhos, numéricos e experimentais, apontam problemas nessa modelagem. Condições de contorno alternativas foram propostas, sendo que algumas produzem resultados melhores que a condição de Ingard-Myers quando comparadas com modelos de alta fidelidade. Nesse trabalho, as condições de contorno disponíveis são analisadas, e uma delas é escolhida para ser implementada em um software de Elementos Finitos. É realizada a derivação da formulação fraca necessária para a implementação, que é então validada através de uma comparação com um modelo analítico para uma geometria simples. Por fim, a nova condição de contorno é usada para modelar casos reais envolvendo uma bancada de ruído de fan, e uma geometria típica de motor aeronáutico.

Palavras-chave: Aeroacústica computacional, impedância acústica, liners

ABSTRACT

Modern aircraft engines include an acoustic treatment called liner, typically composed of a perforated plate covering an array of cavities. This treatment is usually characterized by its acoustic impedance. However, the presence of slipping flow on the surface of the liner leads to issues regarding the proper way to mathematically model its acoustic impedance. The Ingard-Myers boundary condition is the most widely used approach to modelling this behavior, accounting for a boundary layer of infinitesimal thickness. The shortcomings of this boundary condition have been the subject of several published works, in both numerical and experimental applications, and alternatives have been proposed by some authors. Some of these alternative boundary conditions have been shown to give better than the Ingard-Myers boundary condition when compared to high-fidelity numerical models. In this work, alternative acoustic impedance boundary conditions will be reviewed, and one will be chosen for Finite Element Method (FEM) implementation. The derivation of the necessary weak form will be presented, and the implementation will be validated by comparison with an analytical solution for a simple case. Then this alternative boundary condition will be tested in real world applications, in models representing an experimental fan noise test rig and a typical aircraft engine intake.

Keywords: Computational aeroacoustics, acoustic impedance, liners

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura de um liner (GUESS; SCHINDLER, 1974)	28
Figura 2 – Geometria e volume de controle para a derivação do método de mode-matching (GABARD; ASTLEY, 2008)	49
Figura 3 – Pressão ao longo da parede do duto no caso de validação, para a implementação FEM sem a integral de linha	53
Figura 4 – Pressão ao longo da parede do duto no caso de validação, para a implementação FEM com a integral de linha	53
Figura 5 – Comparação entre condições de contorno, com ou sem integral de linha, para cada um dos métodos de solução	54
Figura 6 – Rig de fan EESC-USP	55
Figura 7 – Representação esquemática do rig de fan EESC-USP	56
Figura 8 – Placa de restrição de área (50%) instalada na saída do duto	57
Figura 9 – Introdução de uma splice azimutal (esquerda) e de 3 splices axiais adicionais (direita)	58
Figura 10 – Liner totalmente coberto para medir condição de parede rígida	59
Figura 11 – Sinal no tempo medido por um microfone (esquerda) e sua densidade espectral calculada usando o método de Welch (direita)	63
Figura 12 – Perda por inserção para as diferentes modificações no liner	64
Figura 13 – Espectros de pressão para um microfone, nas condições de parede rígida e liner sem modificações.	65
Figura 14 – Potência total (esquerda) e perda por inserção (direita) na BPF de cada velocidade de rotação	65
Figura 15 – Níveis de potência por modo para na BPF de maior atenuação, correspondente a 3800 RPM	66
Figura 16 – Perfil de camada limite para velocidades de rotação do fan de 2000, 3000 e 4000 RPM	67
Figura 17 – Representação esquemática do rig de fan EESC-USP, com dimensões em metros (SPILLERE; BRAGA et al., 2019). A região usada como domínio computacional é o interior do retângulo em vermelho.	69
Figura 18 – Geometria e malha usada para representar o rig de fan EESC-USP.	70
Figura 19 – Região da geometria onde a impedância é aplicada.	71

Figura 20 – Perda por inserção experimental para as diversas modificações no liner, com a predição numérica obtida do modelo sobreposta em preto	76
Figura 21 – Potência total do conteúdo modal (esquerda) e perda por inserção do liner (direita), para diferentes velocidades do rotor e modelos de impedância	77
Figura 22 – Geometria para o modelo axissimétrico do rig de fan EESC-USP	78
Figura 23 – Potência total (esquerda) e perda por inserção (direita) previstas pelo modelo axissimétrico, incluindo a implementação da condição de contorno modificada	79
Figura 24 – Efeito da espessura de camada limite (esquerda) e da integral de linha (direita) no resultado obtido usando a condição de contorno de Brambley	80
Figura 25 – Geometria do domínio computacional para simulação do escoamento médio	82
Figura 26 – Geometria do domínio computacional para simulação do campo acústico	83
Figura 27 – Malha para solução do campo acústico na região da nacele	85
Figura 28 – Campo médio de velocidade na região da nacele.	86
Figura 29 – Diretividade no campo distante para parede rígida e as duas condições de impedância (esquerda), e a perda por inserção correspondente (direita)	86
Figura 30 – Diretividade em campo distante para a bancada do AneCom, que é uma geometria diferente mas com condições de operação análogas (MUSTAFI, 2013)	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Configurações de liner testadas	59
Tabela 2 – Condições de operação para as medições variando as modificações no liner	59
Tabela 3 – Condições de operação para as medições variando a velocidade do rotor	61
Tabela 4 – Valores de impedância considerados nas predições com diferentes modificações no liner.	75

LIST OF SYMBOLS

α	Número de onda radial adimensional
δ	Espessura de camada limite
γ	Razão entre calores específicos de uma gás
ω	Frequência angular
ϕ	Potencial de velocidade acústico
ϕ_0	Potencial de velocidade do campo médio
ϕ_T	Potencial de velocidade total (campo médio + flutuação)
ρ	Flutuação acústica de densidade
ρ_0	Densidade do campo médio
ρ_T	Densidade total (campo médio + flutuação)
θ	Coordenada azimutal do sistema de coordenadas cilíndrico
\mathbf{u}_0	Velocidade do escoamento médio
\mathbf{u}_T	Velocidade total (campo médio + flutuação)
\mathbf{u}	Velocidade de partícula acústica
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor normal à uma superfície
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor tangente à uma curva
BPF	Frequência de passagem de pá
$J_m(z)$	Função de Bessel do primeiro tipo de ordem m
k_r	Número de onda radial
k_z^j	Número de onda axial
M	Número de Mach

m	Ordem azimutal
p	Flutuação acústica de pressão
p_0	Pressão do campo médio
p_T	Pressão total (campo médio + flutuação)
r	Coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndrico
W	Função-teste
w_0	Componente de \mathbf{u}_0 na direção axial
$Y_m(z)$	Função de Bessel do segundo tipo de ordem m
Z	Impedância acústica
z	Coordenada axial do sistema de coordenadas cilíndrico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	MOTIVAÇÃO	21
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivos gerais	23
1.2.2	Objetivos específicos	24
1.3	VISÃO GERAL	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1	PREDIÇÃO DE RUÍDO EM MOTORES AERONÁUTICOS	27
2.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA IMPEDÂNCIA	30
3	MODELAGEM MATEMÁTICA E IMPLEMENTAÇÃO	35
3.1	EQUACIONAMENTO	35
3.2	ELEMENTOS FINITOS E FORMA FRACA	38
3.3	IMPLEMENTAÇÃO DE NOVA CONDIÇÃO DE CONTORNO	41
3.4	VALIDAÇÃO	46
3.5	RESULTADOS	51
4	CAMPANHA EXPERIMENTAL	55
4.1	RIG DE FAN EESC-USP	55
4.2	MATRIZ DE ENSAIOS	57
4.2.1	Configurações de liner	57
4.2.2	Variação de velocidade do rotor	60
4.3	DECOMPOSIÇÃO MODAL	61
4.4	RESULTADOS	62
5	SIMULAÇÃO NUMÉRICA RIG EESC	69
5.1	MODELO TRIDIMENSIONAL	69
5.1.1	Determinação da excitação	72
5.1.2	Resultados	74
5.2	MODELO BIDIMENSIONAL AXISSIMÉTRICO	77
5.2.1	Resultados	78

6	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM CASO REAL	81
6.1	RESULTADOS	84
7	CONCLUSÕES	89
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	91
	Bibliografia	93

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Com o crescimento recente do setor de aviação civil, o problema de ruído aeronáutico tem se agravado proporcionalmente, em especial em comunidades próximas a aeroportos. A exposição contínua ao ruído a qual habitantes dessas comunidades estão sujeitos possui efeitos psicológicos e fisiológicos negativos (MORRELL; TAYLOR; LYLE, 1997; KING; DAVIS, 2003). Para combater esse risco à saúde pública, a *International Civil Aviation Organization* (ICAO), entidade da ONU responsável por, entre outras funções, padronizar internacionalmente normas e boas práticas para a aviação civil, definiu um processo de certificação de aeronaves. Novos modelos de aeronaves precisam ser avaliados experimentalmente conforme prescrito nesse processo de certificação, e o ruído gerado pela aeronave em operação em condições específicas precisa estar em conformidade com limites vigentes. Com o passar dos anos, esses limites tornam-se mais restritivos, com a finalidade de garantir que tecnologias de controle de ruído mais recentes e eficazes sejam sempre incorporadas a novos projetos de aeronaves.

O processo de certificação usa uma métrica chamada de *Effective Perceived Noise Level* (EPNL), que visa quantificar o incômodo proporcionado pelo ruído da aeronave num único valor numérico. Isso é feito ponderando bandas de frequência de acordo com o incômodo proporcionado, penalizando componentes tonais e ruídos de longa duração, entre outras técnicas descritas detalhadamente no *Environmental Technical Manual* (ICAO, 2010). Esse documento também descreve as condições em que a certificação deve ocorrer. Três condições de voo são consideradas: *take-off*, *approach* e *lateral*. As duas primeiras são representativas das condições típicas em que a aeronave respectivamente decola e pousa, e a medição de ruído é realizada em pontos no solo diretamente abaixo da trajetória da aeronave. A terceira consiste em uma decolagem com os motores em potência máxima, e o ruído é medido ao longo de duas linhas posicionadas em ambos os lados da aeronave, paralelas à pista de decolagem.

Em cada uma dessas situações, o ruído gerado pela aeronave pode ser visto como uma soma de contribuições de diversas fontes. O som gerado pela interação entre o ar e a estrutura do avião (fuselagem, superfícies de controle) é chamado de ruído de *airframe*, que será mais significativo quanto maior for a velocidade da aeronave. O motor é outra fonte,

que pode ser novamente subdividida, com componentes que se devem ao *fan*, compressor, turbina, jato expelido ou combustão. Cada uma dessas fontes possui características e mecanismos de geração distintos, por isso é conveniente considerá-los individualmente na desenvolvimento de soluções para redução de ruído (CASALINO et al., 2008).

O foco deste trabalho é o ruído produzido pelo fan, que é um rotor responsável por captar ar e empurrá-lo pela entrada de ar do motor. Como uma máquina rotativa, produz ruído de banda larga, com componentes tonais associadas à seu número de pás e velocidade de rotação (TYLER; SOFRIN, 1962). O ruído deste componente é a fonte dominante durante o pouso e a decolagem (ENVIA, 2002).

Uma solução usada amplamente em aeronaves comerciais para redução de ruído do motor é tratar acusticamente as paredes internas do duto do motor. O tratamento acústico usado é chamado de liner, e consiste tipicamente em uma placa perfurada, exposta ao escoamento, cobrindo um arranjo de pequenas cavidades (JULLIARD; RIOU; LOZACHMEUR, 1993). Essa estrutura funciona como um arranjo de vários ressonadores de Helmholtz, um para cada furo na placa, de forma que a inércia do ar restrito na região do furo e a compressibilidade do ar no interior da cavidade apresentem comportamento análogo a um sistema massa-mola. Por isso, esse arranjo é especialmente eficaz em atenuar ruído numa faixa de frequência estreita, em torno da frequência natural desse sistema, que é determinada pela geometria do liner e pode ser escolhida para atenuar as componentes tonais do fan. Esse tratamento é essencial para que aeronaves modernas adéquem-se ao processo de certificação da ICAO, uma vez que a métrica de EPNL penaliza componentes tonais.

Tratamentos acústicos desse tipo são caracterizados por sua impedância acústica (MOTSINGER; KRAFT, 1991), que pode ser medida em bancadas experimentais especializadas, como a do LVA-UFSC, ou estimados por modelos semi-empíricos que usam parâmetros geométricos do liner como entrada (KOOI; SARIN, 1981). Essa impedância é uma informação fundamental para a predição adequada do ruído produzido por um motor com liner, e modelos numéricos são frequentemente utilizados para esse fim. No entanto, a modelagem correta para representação de impedância acústica na presença de escoamento médio é fonte de discussão na literatura. Isso se deve à necessidade de representar o efeito da camada limite no campo acústico quando o escoamento pode escorregar em paredes impérvias ao escoamento. Esse problema é relevante não só em implementações numéricas, mas também em medições experimentais para educação da impedância, que também depende

dessa modelagem.

A abordagem tradicionalmente usada, que pode ser encontrada em diversos softwares comerciais, usa a chamada condição de contorno de Ingard-Myers, proposta em 1959 por Ingard (INGARD, 1959) e estendida por Myers em 1980 (MYERS, 1980). Essa condição de contorno equivale a modelar a camada limite como uma folha de vorticidade de espessura infinitesimal, e é obtida garantindo continuidade entre os deslocamentos de partícula no fluido e na parede. Porém diversos trabalhos recentes mostram que essa condição produz resultados inadequados em condições específicas, e propõe formas alternativas de realizar essa modelagem (RENOU; AURÉGAN, 2011; RIENSTRA; DARAU, 2011; BRAMBLEY, 2011), tendo como principal característica a presença de uma camada limite de espessura finita. Essas condições, até o momento, só foram implementadas numericamente em modelos considerando geometrias simples, como dutos circulares, e modelam somente o campo acústico nessa região. Seu efeito em uma geometria representativa de um motor turbofan ou no ruído irradiado para o campo distante não foram avaliados.

Esse trabalho visa implementar numericamente uma dessas novas condições de contorno, usando um software de método de elementos finitos (FEM), para que a mesma possa ser utilizada em geometrias arbitrárias. Para avaliar o efeito dessa nova modelagem, dois casos de interesse foram escolhidos. O primeiro caso é a bancada de ruído de fan da EESC-USP (MARTINEZ et al., 2017), na qual uma campanha experimental foi conduzida, e os resultados numéricos usando diferentes condições de contorno podem ser comparados com os resultados experimentais. O segundo caso de interesse é puramente numérico, tratando-se de uma geometria típica de motor de aeronave disponível na literatura (MUSTAFAI, 2013), que permite verificar o efeito da nova condições de contorno em um caso real quando comparada com a condição de contorno de Ingard-Myers.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivos gerais

- Fazer uma revisão das condições de contorno alternativas para representação de impedância propostas na literatura
- Implementar uma dessas condições de contorno em um modelo numérico baseado no Método de Elementos Finitos (FEM)

- Realizar previsões numéricas usando a condição contorno de Ingard-Myers e a condição de contorno alternativa escolhida

1.2.2 Objetivos específicos

- Analisar a derivação e equacionamento de condições de contorno disponíveis na literatura para determinar qual delas é mais apropriada para implementação em FEM
- Derivar uma formulação fraca de um equacionamento que modela o campo acústico para determinar como uma condição de contorno deve ser aplicada, usando o método de resíduos ponderados
- Combinar a equação da condição de contorno escolhida com a formulação fraca de forma que a condição de contorno seja respeitada nas paredes do domínio computacional
- Escrever o equacionamento resultante da combinação da forma fraca e condição de contorno no formato aceito pelo software de elementos finitos
- Implementar esse equacionamento no software e validá-lo por comparação com um resultado analítico num caso simples
- Testar a condição de contorno alternativa num modelo que representa uma bancada experimental, na qual o campo acústico é conhecido a partir de medições
- Comparar a atenuação prevista numericamente usando as condições de Ingard-Myers e alternativa, e verificar qual delas apresenta melhor concordância com os dados experimentais
- Testar a condição de contorno alternativa num modelo que representa uma aplicação real em motor aeronáutico, e que permite prever a irradiação de ruído para o campo distante
- Comparar os resultados obtidos nesse modelo considerando a condição de contorno de Ingard-Myers e a condição de contorno alternativa, e verificar o efeito da modelagem de impedância escolhida na previsão do campo acústico distante

1.3 VISÃO GERAL

O capítulo 2 compila diversos resultados relevantes para este trabalho encontrados na literatura. A modelagem utilizada para representar o ruído de fan é apresentada, elemento essencial nas análises seguintes. As limitações da condição de contorno de Ingard-Myers apontadas na literatura são descritas, e as condições alternativas são apresentadas e analisadas, e uma delas, proposta por Brambley, é escolhida para implementação neste trabalho.

O capítulo 3 diz respeito à modelagem matemática e implementação numérica de uma nova condição de contorno. A equação diferencial que rege o campo acústico é deduzida a partir de equações fundamentais de fluidodinâmica. O método de elementos finitos e o conceito de forma fraca são discutidos, essenciais para a implementação da condição de contorno no software comercial utilizado (*COMSOL Multiphysics*). A equação do campo acústico é então modificada para obter os termos necessários para a implementação da condição de contorno na forma fraca, e o modelo é validado via comparação com casos disponíveis na literatura e códigos numéricos previamente validados.

O capítulo 4 descreve a campanha de ensaios realizada no rig de ruído de fan da EESC-USP, que servirá como base para um dos modelos numéricos que testarão a nova condição de contorno. O aparato experimental é descrito, além dos dados coletados e da matriz de ensaios executada.

O capítulo 5 trata sobre o caso numérico que representa as condições da campanha experimental do rig de ruído de fan da EESC-USP. As etapas e hipóteses da modelagem são apresentadas, e os resultados usando as duas condições de contorno são comparadas com resultados experimentais, para verificar qual das condições melhor descreve o comportamento experimental observado.

O capítulo 6, similar ao anterior, descreve o modelo numérico usado para simular um caso representativo de um motor real de aeronave. A finalidade dessa análise é verificar o efeito do modelo de impedância no campo acústico distante, que é o fator mais importante para aeronaves no mundo real.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 PREDIÇÃO DE RUÍDO EM MOTORES AERONÁUTICOS

Simulações acústicas são uma ferramenta útil na etapa de projeto de aeronaves, que precisam ser aprovadas em um rigoroso processo de certificação de ruído antes que possam ser comercializadas (ICAO, 2010). Para possibilitar o desenvolvimento de ferramentas preditivas desse tipo, é necessário identificar e isolar as possíveis fontes de ruído presentes. Em uma primeira divisão, tem-se como fontes de ruído o *airframe* e o motor (SMITH, 1989). O ruído de *airframe* é causado pela interação entre o ar e as superfícies do avião, como fuselagem, asas e superfícies de controle de voo. O ruído do motor, por sua vez, pode ser subdividido de acordo com os vários processos necessários para o seu funcionamento: fan, compressor, turbina, câmara de combustão e jato de exaustão. Cada uma dessas fontes possui suas próprias características acústica, como diretividade e densidade espectral. Além disso, essas características podem mudar para diferentes regimes de operação da aeronave. Para obter-se uma predição do ruído produzido por uma aeronave, é necessário modelar cada uma dessas fontes.

O presente trabalho tem como foco a predição do ruído de fan, que é um componente rotativo que realiza a sucção de ar pela entrada do motor, e é a fonte de ruído dominante durante o pouso e a decolagem (ENVIA, 2002). Como é típico em máquinas rotativas o ruído produzido é de banda larga com componentes tonais em frequências específicas (SMITH, 1989). As componentes tonais estão associadas à geometria periódica do rotor, já que o movimento de cada uma de suas pás causa perturbações acústicas aproximadamente iguais e, ao longo de uma revolução completa, essas perturbações ocorrerão um número de vezes igual à quantidade de pás do rotor. As frequências nas quais esses tons discretos estão concentradas são chamadas de BPFs (*blade passing frequency*, ou frequência de passagem de pá), e dependem do velocidade de rotação do fan e do seu número de pás B . Elas podem ser calculadas usando a expressão:

$$BPF_n = nB \frac{RPM}{60} \quad (2.1)$$

Essa equação fornece a n -ésima BPF, em Hz, de um rotor com B pás com velocidade de rotação RPM em rotações por minuto. Somente valores inteiros e positivos de n são válidos. Quando $n = 1$, tem-se a primeira BPF, e todas as demais são múltiplos inteiros

dela.

Na métrica usada para certificação de aeronaves, chamada EPNL (*effective perceived noise level*), a presença de componentes tonais é penalizada (SAHAI; STUMPF, 2014). Para atenuar esses tons discretos, os motores turbofan presentes nas aeronaves comerciais modernas usam um tratamento acústico chamado de liner nas paredes internas do motor. Esse tratamento é tipicamente composto por uma placa perfurada cobrindo um arranjo de cavidades, e por uma placa rígida que cobre a outra terminação das cavidades. Essa estrutura é mostrado esquematicamente na Figura 1. O liner é instalado de forma que a placa perfurada fica exposta ao campo acústico. Configurações diferentes também existem, como os liners com *wire mesh*, que incluem uma malha metálica cobrindo a placa perfurada, ou liners com múltiplos graus de liberdade, nos quais são usados múltiplas camadas de cavidades separadas por placas perfuradas (JULLIARD; RIOU; LOZACHMEUR, 1993).

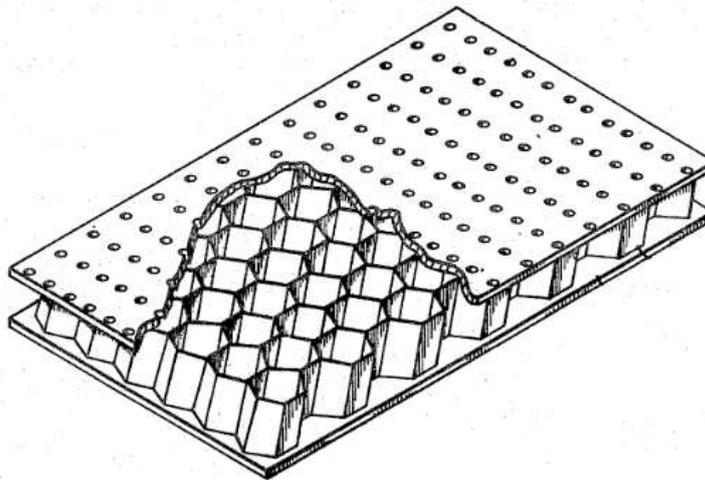


Figura 1 – Estrutura de um liner (GUESS; SCHINDLER, 1974)

Esse tratamento acústico é comparável a um arranjo de ressonadores de Helmholtz, e tem atenuação ótima em uma faixa estreita de frequências (KOOI; SARIN, 1981). Essa característica torna esse tratamento especialmente útil para atenuar componentes tonais, já que um liner pode ser projetado para ter sua frequência de atenuação ótima igual à BPF do rotor numa condição de operação especialmente crítica (SPILLERE; BRAGA et al., 2019), como a decolagem.

O parâmetro usado para caracterizar um liner é a impedância acústica, denotada por Z , que é uma função da frequência e assume valores complexos. A parte real da impedância é chamada de resistência, e a parte imaginária é chamada de reatância (MOTSINGER; KRAFT, 1991). Para obter uma previsão de como um tratamento com impedância Z

afetará o campo acústico, é necessário usar uma condição de contorno que prescreva matematicamente a interação entre a impedância Z e as variáveis que descrevem o campo acústico. Na ausência de escoamento médio, a impedância de uma superfície é definida como a razão entre a pressão acústica e a velocidade acústica normal à superfície. Estender essa definição para o caso no qual há escoamento escorregando na superfície não é trivial, e devem levar em conta efeitos acústicos da camada limite. Essa discussão será apresentada em detalhes na seção 2.2.

Voltando a atenção para a caracterização do fan como fonte acústica, pode-se usar o fato de que esse componente está instalado no interior da nacela, que é essencialmente um duto, para simplificar sua modelagem acústica. Qualquer campo acústico em regime permanente no interior de um duto pode ser representado por uma expansão modal usando uma quantidade finita de modos capazes de se propagar sem decaimento numa determinada frequência (RIENSTRA, 2015). Com essa abordagem, pode-se prescrever o campo acústico no plano do fan usando uma quantidade finita de coeficientes, que são as amplitudes atribuídas a cada forma modal acomodada na seção transversal do duto. O procedimento para obter essa base modal é apresentado no capítulo 3.

Apesar de a modelagem do ruído do rotor ter sido simplificada consideravelmente, obter as amplitudes modais não é uma tarefa trivial. Uma opção é usar dados experimentais, como será mostrado no capítulo 5, no qual usou-se medições de pressão na parede de um duto com parede rígida para determinar o conteúdo modal excitado pelo rotor. Mesmo sem conhecer as características exatas da fonte, pode-se usar um único modo como excitação e prever como esse modo se propagará. Essa abordagem é especialmente útil se combinada com a regra de Tyler-Sofrin (TYLER; SOFRIN, 1962), que fornece os modos dominantes para uma configuração rotor-estator instalada no interior de um duto circular. Para um rotor com B pás e um estator com V palhetas, tem-se a expressão:

$$m = kV + nB. \quad (2.2)$$

Se existe um k inteiro que satisfaz essa expressão para um par (m, n) , então o modo com ordem azimutal m e ordem radial n é um modo dominante. Pode-se então trabalhar em atenuar os modos dominantes, mesmo sem saber exatamente as amplitudes modais que melhor descrevem a fonte.

Usando essa representação modal para descrever uma excitação, pode-se calcular a propagação do campo acústico usando o método de elementos finitos (FEM). Esse método

calcula uma solução aproximada para uma equação diferencial parcial considerando um espaço de funções base com suporte local, que resulta num sistema linear caracterizado por uma matriz esparsa (BOYD, 2001). Aspectos mais detalhados desse método serão discutidos no capítulo 3.

O campo acústico será modelado considerando um equacionamento que permite prescrever um campo médio não afetado pelo campo acústico para levar em conta efeitos convectivos, e que assume que os campos de velocidade médio e acústico são potenciais. Em casos mais simples, como na presença de escoamento uniforme, o campo médio pode ser prescrito diretamente, mas em geral esse campo médio é calculado previamente, considerando um equacionamento de escoamento potencial compressível (MUSTAFI, 2013). Esse equacionamento será apresentado no capítulo 3, e sua aplicação em modelos numéricos nos capítulos 5 e 6.

2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA IMPEDÂNCIA

O conceito de impedância acústica é frequentemente utilizado para caracterizar tratamentos acústicos no domínio da frequência. Na ausência de escoamento a impedância de uma superfície é definida como a razão entre a pressão acústica e a velocidade de partícula normal à superfície, mas essa definição precisa ser modificada se houver escoamento médio escorregando na parede tratada, de forma que o movimento relativo entre a fluido e a parede seja levado em conta.

Para obter uma solução exata para esse problema, pode-se modelar a camada limite explicitamente, de forma que seu perfil de velocidade varie suavemente e assuma valor nulo na parede. Nesse caso, não há movimento relativo entre a parede o fluido e a definição tradicional de impedância pode ser usada (RIENSTRA, 2019). Para propagar o campo acústico no interior da camada limite, pode-se usar a equação de Pridmore-Brown (PRIDMORE-BROWN, 1958), que permite computar um campo acústico se propagando sobre um campo médio cisalhante. No entanto, essa abordagem nem sempre é viável em aplicações práticas, devido ao alto custo computacional associado a discretizar a camada limite, e à impossibilidade de obter soluções analíticas para essa equação. Ao invés de resolver explicitamente o campo acústico dentro da camada limite usando a equação de Pridmore-Brown, pode-se usar uma condição de contorno que encapsule os efeitos da propagação acústica dentro da camada limite. A obtenção de uma condição com essas

características não é trivial, e vários trabalhos propondo uma formulação para essa condição estão disponíveis.

A formulação proposta por (INGARD, 1959), que foi posteriormente modificada por (MYERS, 1980), é a condição de contorno mais amplamente utilizada para representação de impedância na presença de escoamento, e é chamada condição de contorno de Myers ou Ingard-Myers. Ela é obtida com uma hipótese razoavelmente simples e não leva em consideração nenhum efeito da camada limite, visando apenas aplicar uma correção devido ao movimento relativo entre o fluido e a parede. Ao invés de garantir continuidade da velocidade de partícula na direção normal ao contorno entre o fluido e a superfície tratada, como é feito na ausência de escoamento, a continuidade é garantida para o deslocamento de partícula. A formulação inicialmente proposta por Ingard é válida apenas para superfícies planas, e a contribuição de Myers foi generalizá-la para superfícies com curvatura. Apesar da simplicidade das hipóteses consideradas, foi provado que essa condição de contorno representa o limite correto para modelar o efeito de uma camada limite invíscida de espessura infinitesimal (EVERSMAN; BECKEMEYER, 1972). A equação na forma apresentada por Myers é:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{p}{Z} - \frac{p}{i\omega Z} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0. \quad (2.3)$$

Essa é a condição de contorno escolhida por diversos softwares comerciais para representação de impedância na presença de escoamento, com o COMSOL Multiphysics (COMSOL AB, 2019) e o ACTRAN TM (FREE FIELD TECHNOLOGIES SA, 2016). A implementação numérica dessa condição já foi discutida na literatura (EVERSMAN, 2001), e foram apresentados equacionamentos adequados para a sua implementação usando o método de elementos finitos e de diferenças finitas. A derivação da formulação para elementos finitos usa uma forma de resíduos ponderados, também chamada de forma fraca, e pode servir como base a implementação de condições de contorno alternativas.

Essa condição de contorno também é amplamente usada em técnicas experimentais de medição de impedância, que em geral também precisam de uma relação que descreve a interação da superfície tratada com o campo acústico. Esse é o caso, por exemplo, de técnicas baseadas no método de Prony (JING; PENG; SUN, 2008) ou em abordagens usando mode-matching (SPILLERE; MEDEIROS; CORDIOLI, 2018). Tem-se como exceção os métodos *in situ* (DEAN, 1974), que usam medições de pressão realizadas diretamente no tratamento acústico, e não dependem de uma relação que rege a interação entre a

impedância e o campo acústico (BODEN et al., 2017).

No entanto, diversos trabalhos recentes apontam problemas nessa condição de contorno. Em aplicações computacionais, ela gera instabilidades que precisam ser filtradas no domínio do tempo, e fornece modos hidrodinâmicos que geralmente são ignorados no domínio da frequência (BRAMBLEY, 2009). Ela também é mal-posta no domínio do tempo (TAM; AURIAULT, 1996). Quando usada para determinar impedância a partir de medições experimentais, ela fornece valores de diferentes dependendo da direção do escoamento (RENOU; AURÉGAN, 2011).

Existem diversas formulações alternativas disponíveis na literatura, cada uma obtida usando métodos diferentes, mas tendo em comum a hipótese de uma camada limite de espessura finita. A proposta de (AURÉGAN; STAROBINSKI; PAGNEUX, 2001) usa um parâmetro complexo adicional para considerar transferência de quantidade de movimento entre o fluido e a parede tratada. Esse parâmetro é calculado com base no perfil e espessura da camada limite considerada. Em casos experimentais nos quais as características da camada limite são desconhecidas, o parâmetro em questão pode ser obtido realizando medições com o escoamento médio em direções opostas, de forma que a impedância obtida para as duas direções é a mesma (RENOU; AURÉGAN, 2011). Essa condição também permite usar um segundo parâmetro que leva em conta a transferência de calor entre o fluido e a parede tratada, para casos que apresentem um gradiente de temperatura não desprezível.

A versão proposta por (RIENSTRA; DARAU, 2011) usa um processo de regularização para modificar a condição de Myers, com a finalidade de chegar numa condição de contorno com comportamento de estabilidade fisicamente correto. Isso é feito aplicando um critério de estabilidade à equação de Pridmore-Brown, resultando em uma família de condições de contorno distintas, mas assintoticamente equivalentes. Os autores também determinaram que a condição de Ingard-Myers é absolutamente instável para espessuras de camada limite menores que um valor crítico. Uma expressão para esse valor crítico foi obtida, e os autores determinaram que em aplicações industriais as espessuras de camada limite envolvidas são grandes o suficiente que essa instabilidade não esteja presente.

A condição de contorno proposta por (BRAMBLEY, 2011) também parte da equação de Pridmore-Brown, que permite modelar um campo acústico se propagando num escoamento cisalhante como o perfil de uma camada limite. Uma técnica de expansão assintótica é usada para obter uma condição de contorno que fornece um resultado aproximadamente igual ao da equação de Pridmore-Brown, usando os termos de primeira ordem da expansão

em função da espessura da camada limite. Uma condição de Myers modificada é obtida, que depende de dois parâmetros que são calculados através de uma integral ao longo da espessura da camada limite, e portanto depende do seu perfil. O autor obtém números de onda para modos em um duto circular usando a condição proposta, a condição de Myers e a equação de Pridmore-Brown, e observa que a condição modificada não apresenta as instabilidades características da condição de Myers.

Outros trabalhos mais recentes apresentaram novas modificações para a condição de Myers usando a mesma técnica de expansão assintótica, e existem versões alternativas, permitindo considerar a expansão usando termos de até segunda ordem na espessura da camada limite (KHAMIS; BRAMBLEY, 2016b), levar em conta efeitos de viscosidade (KHAMIS; BRAMBLEY, 2016a), permitir escoamento médio rotacional (MASSON et al., 2018), e aplicar a condição de contorno em problemas resolvidos no domínio do tempo (BRAMBLEY; GABARD, 2016).

Algumas dessas condições também já foram analisadas independentemente em outros trabalhos. As condições propostas por Rienstra e Brambley foram aplicadas para uma geometria simples, considerando uma superfície plana infinita tratada, na qual uma onda plana incide (GABARD, 2013). O padrão de espalhamento para essas condições é comparado com uma solução numérica exata obtida resolvendo a equação de Pridmore-Brown. O padrão de diretividade obtido usando a condição de Brambley é consideravelmente melhor que o fornecido por Myers, quando comparado com a solução exata.

A condição de Brambley também já foi implementada numericamente usando o método de diferenças finitas (GABARD, 2016). Nesse trabalho, os parâmetros considerados são representativos de uma aplicação real em motores aeronáuticos. A condição de Brambley se mostrou robusta, e a atenuação prevista usando essa condição diferiu consideravelmente da previsão usando a condição de Myers, especialmente nos casos em que o campo acústico se propaga a montante, como é o caso em motores de aeronaves.

Como deseja-se implementar uma condição de contorno para impedância usando o método de elementos finitos (FEM), é necessário que a condição de contorno escolhida seja válida para uma geometria arbitrária. A derivação inicial das três condições apresentadas anteriormente considera uma geometria simples, de um duto circular reto. A única condição disponível com uma formulação genérica é a de Brambley (BRAMBLEY; GABARD, 2016), que também foi desenvolvida para aplicação no domínio do tempo, usando operadores vetoriais e sem a necessidade de conhecer números de onda.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA E IMPLEMENTAÇÃO

3.1 EQUACIONAMENTO

A formulação usada para o cálculo do campo acústico pode ser obtida a partir de três equações fundamentais. Será necessário também linearizar as variáveis acústicas, separando-as em uma componente constante no tempo, referente ao campo médio, e outra componente que varia harmonicamente, referente ao campo acústico:

$$\rho_t = \rho_0 + \rho e^{i\omega t}, \quad (3.1a)$$

$$p_t = p_0 + p e^{i\omega t}, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u} e^{i\omega t}. \quad (3.1c)$$

As variáveis ρ , p e \mathbf{u} correspondem, respectivamente, à densidade, pressão e velocidade. O sub-índice t corresponde às variáveis totais, e 0 às variáveis do escoamento médio. As variáveis sem sub-índice são as variáveis acústicas. Essa hipótese de linearização assume que as variáveis acústicas não afetam as variáveis de campo médio, e para isso é necessário que a ordem de grandeza da magnitude das variáveis acústica seja muito menor que a das variáveis de campo médio.

A formulação final será escrita em função do potencial de velocidade. Para isso, assume-se que tanto o campo acústico quanto o campo de escoamento médio são irrotacionais, e pode-se escrever:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u} e^{i\omega t} = \nabla \phi_0 + \nabla \phi e^{i\omega t}. \quad (3.2)$$

Com essas hipóteses, parte-se da primeira equação fundamental, que garante a conservação da massa. Trabalhando inicialmente com um caso no qual não há campo acústico, tem-se:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.3)$$

Como já estabelecido ρ_0 não varia no tempo, e tem-se que:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.4)$$

Assumindo agora que o campo acústico se propaga sobre esse campo médio sem afetá-lo, conforme a hipótese de linearização já apresentada, aplica-se a mesma equação às

variáveis totais:

$$i\omega\rho e^{i\omega t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0 + \rho_0 \mathbf{u} e^{i\omega t} + \rho \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} + \rho \mathbf{u} e^{2i\omega t}) = 0. \quad (3.5)$$

Como as variáveis acústicas tem magnitude muito menor que as de campo médio, pode-se desprezar o produto $\rho \mathbf{u}$. Usando também a equação 3.4, reescrevendo $\mathbf{u} = \nabla \phi$ e dividindo a equação por $e^{i\omega t}$, obtém-se a equação para conservação da massa na forma desejada:

$$i\omega\rho + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \phi + \rho \mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.6)$$

A próxima equação fundamental garante a conservação da quantidade de movimento. Novamente, essa equação pode ser aplicada tanto ao campo médio quanto ao campo total. Para o caso do campo médio:

$$\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{u}_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0) = -\nabla p_0. \quad (3.7)$$

Considerando que as variáveis de campo médio não variam no tempo:

$$\mathbf{u}_0 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) + \rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\nabla p_0. \quad (3.8)$$

Substituindo a equação 3.4 nessa expressão, tem-se:

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = -\nabla \left(\frac{p_0}{\rho_0} \right) - p_0 \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0^2}. \quad (3.9)$$

Aplicando a mesma equação fundamental para o campo total:

$$\rho_t \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + \mathbf{u}_t \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \mathbf{u}_t \nabla \cdot (\rho_t \mathbf{u}_t) + \rho_t (\mathbf{u}_t \cdot \nabla) \mathbf{u}_t = -\nabla p_t. \quad (3.10)$$

Resolvendo as derivadas no tempo, dividindo todos os termos por ρ_0 e substituindo o termo $\nabla \cdot (\rho_t \mathbf{u}_t)$ usando a equação da conservação de massa para o escoamento total, tem-se:

$$i\omega \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right) \mathbf{u} e^{i\omega t} + \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right) (\mathbf{u}_t \cdot \nabla) \mathbf{u}_t = -\frac{\nabla p_t}{\rho_0}. \quad (3.11)$$

Como supõe-se que as perturbações acústicas na densidade é pequena se comparada à densidade do campo médio, assume-se que $1 + \rho/\rho_0 \approx 1$. Faz-se a mesma consideração para a perturbação acústica na pressão:

$$i\omega \mathbf{u} e^{i\omega t} + ((\mathbf{u}_0 + \mathbf{u} e^{i\omega t}) \cdot \nabla) (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u} e^{i\omega t}) = -\nabla \left(\frac{p_0 + p e^{i\omega t}}{\rho_0} \right) - p_0 \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0^2}. \quad (3.12)$$

Substituindo a equação 3.9, desprezando os termos que são produtos de flutuações acústicas e dividindo todos os termos por $e^{i\omega t}$:

$$i\omega \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right). \quad (3.13)$$

Se os campos \mathbf{u}_0 e \mathbf{u} são irrotacionais, é possível mostrar que:

$$\nabla(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_0. \quad (3.14)$$

Usando essa identidade e escrevendo o campo de velocidade acústica \mathbf{u} em função do potencial de velocidade ϕ , tem-se:

$$\nabla \left(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

A partir dessa equação, pode-se inferir que a grandeza na qual se está aplicando o gradiente precisa ser constante:

$$i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} = C. \quad (3.16)$$

Com a seguinte manipulação, mostra-se que o valor escolhido para essa constante corresponde a realizar uma translação em ϕ :

$$i\omega \left(\phi - \frac{C}{i\omega} \right) + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\phi - \frac{C}{i\omega} \right) + \frac{p}{\rho_0} = 0. \quad (3.17)$$

Considerando essa informação e que o valor da constante não afeta a definição inicial de $\mathbf{u} = \nabla\phi$, conclui-se que qualquer valor de C é adequado, e escolhe-se, sem perda de generalidade, $C = 0$. Por fim, obtém-se uma expressão para a pressão em função do potencial de velocidade:

$$p = -\rho_0(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi). \quad (3.18)$$

A última equação fundamental de interesse vem ao realizar-se a hipótese de gás ideal, e que as perturbações acústicas em torno do campo médio ocorrem de forma adiabática:

$$\frac{p_0 + pe^{i\omega t}}{p_0} = \left(\frac{\rho_0 + \rho e^{i\omega t}}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (3.19)$$

onde γ é a razão entre calores específicos a pressão e volume constantes para o gás em questão. Para o ar atmosférico, que pode ser considerado um gás ideal diatômico, $\gamma = 1.4$. Usando uma expansão em série de Taylor para o termo no lado direito da equação, obtém-se:

$$1 + \frac{p}{p_0} e^{i\omega t} = 1 + \gamma \frac{\rho}{\rho_0} e^{i\omega t} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 e^{2i\omega t} + \dots \quad (3.20)$$

Usando novamente que $\rho/\rho_0 \ll 1$, considera-se que os termos de ordem alta são desprezíveis e toma-se somente o de primeira ordem, resultando em:

$$p = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho. \quad (3.21)$$

O termo multiplicando ρ no lado direito da equação pode ser reescrito usando a equação geral de gás ideal, e corresponde ao quadrado da velocidade de propagação do som no gás em questão:

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma RT = c_0^2, \quad (3.22)$$

onde T é a temperatura em unidade absoluta, e R a constante específica do gás. Assim, assumindo que a velocidade do som é constante no campo médio, obtém-se uma relação entre as perturbações acústicas de pressão e densidade:

$$p = c_0^2 \rho. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações 3.18 e 3.23 na equação 3.6, encontra-se a equação em função de ϕ que descreve o comportamento do campo acústico se propagando em um campo médio com escoamento:

$$-\frac{i\omega\rho_0}{c_0^2}(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi) + \nabla \cdot \left(\rho_0 \nabla\phi - \mathbf{u}_0 \frac{\rho_0}{c_0^2}(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi) \right) = 0. \quad (3.24)$$

As demais variáveis acústicas podem ser calculadas com base no potencial de velocidade ϕ usando as expressões:

$$p = -\rho_0(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi), \quad (3.25a)$$

$$\rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2}(i\omega\phi + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\phi), \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (3.25c)$$

3.2 ELEMENTOS FINITOS E FORMA FRACA

Para resolver a equação 3.24 o Método de Elementos Finitos (FEM) será usado. Para isso, a equação precisa ser reescrita em uma formulação fraca, usando um procedimento para transformar a equação a equação diferencial em uma equação integral. Enquanto a equação diferencial precisa ser respeitada em todo os pontos do domínio, a formulação integral somente precisa ser respeitada em volumes arbitrariamente pequenos do domínio. Essa modificação enfraquece os requisitos matemáticos de existência e continuidade da solução e de suas derivadas, justificando o nome dado à essa formulação. Esse procedimento é chamado método de Galerkin.

Para obter essa formulação, a equação diferencial a ser resolvida é multiplicada por uma função-teste W , e integrada ao longo de todo o domínio computacional. Como espera-se que a equação diferencial seja nula em todos os pontos do domínio, a nova equação

integral se mantém válida para qualquer função-teste. Isso só é válido, no entanto, para a solução exata da equação diferencial, que na prática dificilmente pode ser encontrada, exceto para algumas combinações simples de geometria e condições de contorno.

Com a formulação fraca, diversas soluções podem ser encontradas escolhendo arbitrariamente as funções-teste. No Método de Elementos Finitos o domínio computacional é dividido em um número arbitrário de elementos, de forma que não há interseção entre quaisquer dois elementos e que a união de todos os elementos seja o domínio computacional. A divisão de acordo com esse critério é chamada de partição, e os elementos dessa partição devem ser de geometria específica. A escolha mais simples são tetraedros para uma geometria tridimensional, ou triângulos para uma geometria bidimensional. Os vértices desses elementos são chamados de nós.

Com base nessa partição, um sistema de equações discretas pode ser obtido. Usa-se um conjunto de funções-teste, cada uma com valor unitário em somente um nó da partição e nula em todos os demais, e definidas de forma que a função-teste seja contínua no domínio. A variável sendo resolvida também é aproximada por um polinômio, chamado de função de forma.

A seguir, obtém-se a forma fraca da equação diferencial de interesse. Para uma notação mais compacta a equação 3.6 será usada, na qual basta substituir a flutuação na densidade ρ para obter-se a equação 3.24. Multiplicando essa equação por uma função-teste W , e integrando-a em todo o domínio computacional Ω :

$$\int_{\Omega} (i\omega\rho + \nabla \cdot (\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u}_0))W \, dV = 0. \quad (3.26)$$

Em seguida, faz-se a seguinte manipulação com o objetivo de obter um termo no qual o teorema da divergência pode ser aplicado:

$$\int_{\Omega} (i\omega\rho W + \nabla \cdot (W\rho_0\nabla\phi + W\rho\mathbf{u}_0) - (\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u}_0) \cdot \nabla W) \, dV = 0. \quad (3.27)$$

Separa-se então a expressão em duas integrais: uma no volume Ω e outra no contorno do domínio computacional $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} (i\omega\rho W - (\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u}_0) \cdot \nabla W) \, dV + \int_{\partial\Omega} (W\rho_0\nabla\phi + W\rho\mathbf{u}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0. \quad (3.28)$$

Essa expressão é forma fraca da equação diferencial original, e também a equação global da formulação de elementos finitos. Para que uma solução possa ser obtida, é necessário prescrever condições de contorno, o que pode ser feito impondo restrições

na integral no contorno $\partial\Omega$. Considerando que deseja-se modelar o comportamento de um liner, pode-se realizar uma simplificação nesse termo: como o tratamento acústico é impervio ao escoamento, tem-se que $\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, resultando em:

$$\int_{\Omega} (i\omega\rho W - (\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u}_0) \cdot \nabla W) dV + \int_{\partial\Omega} W\rho_0\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (3.29)$$

Assim, é possível determinar completamente a condição de contorno prescrevendo a quantidade $u_n = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$, a componente normal da velocidade de partícula na parede. No caso mais simples, tem-se $u_n = 0$, a condição de contorno natural, que corresponde à parede rígida.

Na condição de contorno de Ingard-Myers, a velocidade de partícula acústica normal à parede com impedância acústica Z é dada por:

$$u_n = \frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega}\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\left(\frac{p}{Z}\right) - \frac{p}{i\omega Z}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\mathbf{u}_0). \quad (3.30)$$

Analogamente ao que foi feito para a equação do volume, é possível manipular termos dessa equação para aplicar o teorema de Stokes e reduzir uma integral de superfície para uma integral de linha. Para esse caso usando a condição de contorno de Myers, sendo I_M o integrando da integral de área da equação 3.28:

$$\int_{\partial\Omega} I_M dS = \int_{\partial\Omega} W\rho_0\left(\frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega}\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\left(\frac{p}{Z}\right) - \frac{p}{i\omega Z}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\mathbf{u}_0)\right) dS. \quad (3.31)$$

Com o objetivo de aplicar o teorema de Stokes, deseja obter uma expressão da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla\left(\hat{\mathbf{n}} \times W\rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0\right) = \nabla \cdot \left(W\rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0\right) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\left(W\rho_0\frac{p}{Z}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0\right). \quad (3.32)$$

Considerando que $\nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u}_0) = 0$ (equação 3.4), que o campo \mathbf{u}_0 é potencial e que $\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, tem-se:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla\left(\hat{\mathbf{n}} \times W\rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0\right) = \rho_0\mathbf{u}_0 \cdot \left(W\nabla\left(\frac{p}{Z}\right) + \frac{p}{Z}\nabla W\right) - W\rho_0\frac{p}{Z}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\mathbf{u}_0). \quad (3.33)$$

Isolando no lado esquerdo os termos de interesse nessa expressão, que são os que aparecem em I_M :

$$W\rho_0\mathbf{u}_0\nabla\left(\frac{p}{Z}\right) - W\rho_0\frac{p}{Z}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\mathbf{u}_0) = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla\left(\hat{\mathbf{n}} \times W\rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0\right) - \rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0 \cdot \nabla W, \quad (3.34)$$

que quando substituído na expressão para I_M resulta em:

$$I_M = W\rho_0\frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega}\left(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla\left(\hat{\mathbf{n}} \times W\rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0\right) - \rho_0\frac{p}{Z}\mathbf{u}_0 \cdot \nabla W\right). \quad (3.35)$$

Essa expressão é integrada no contorno $\partial\Omega$ do domínio computacional, e em um dos termos o teorema de Stokes é usado para reduzir essa integral de superfície para uma integral de linha. No entanto, a superfície em questão envolve um volume e por isso é fechada, de forma que a curva Γ ao longo do qual essa nova integral de linha é realizada é um conjunto vazio:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{i\omega} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \left(\hat{\mathbf{n}} \times W \rho_0 \frac{p}{Z} \mathbf{u}_0 \right) dS = \frac{1}{i\omega} \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \left(\hat{\mathbf{n}} \times W \rho_0 \frac{p}{Z} \mathbf{u}_0 \right) d\Gamma. \quad (3.36)$$

Nesse caso, tem-se que a integral em questão é necessariamente nula, desde que o integrando da expressão satisfaça requisitos de continuidade ao longo de $\partial\Omega$. Esse critério é possivelmente desrespeitado na transição entre a parede rígida e o tratamento acústico, mas é provável que isso não seja um problema devido ao fato de uma formulação fraca de FEM estar sendo usada, que reduz consideravelmente o efeito de descontinuidades (EVERSMAN, 2001). Alternativamente, em um modelo numérico é possível fazer a impedância variar de forma contínua e rápida na transição para evitar esse problema.

Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão para o integrando I_M , que é a expressão fraca usada para especificar a condição de contorno de Ingard-Myers no equacionamento sendo desenvolvido:

$$I_M = \frac{p}{i\omega Z} \rho_0 (i\omega W - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla W). \quad (3.37)$$

Comparada à formulação inicial, essa expressão possui a vantagem de reduzir a ordem de derivadas necessárias de p , ao custo de um aumento na ordem de derivadas necessárias de W . Isso é favorável porque calcular derivadas de ordem mais alta de p , que é função da variável dependente ϕ , aumenta consideravelmente o custo computacional do problema, devido à necessidade de uma discretização mais refinada. Esse problema é especialmente relevante na condição de contorno de Brambley, que será desenvolvida na próxima seção, porque a expressão para u_n nesse caso depende de derivadas de ϕ de até terceira ordem, e um procedimento análogo será realizado para reduzir esse requisito.

3.3 IMPLEMENTAÇÃO DE NOVA CONDIÇÃO DE CONTORNO

Para a condição proposta por Brambley, supondo uma camada limite de perfil linear e espessura δ , tem-se a seguinte expressão para a componente normal ao contorno da velocidade de partícula acústica (BRAMBLEY; GABARD, 2016):

$$u_n = \frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{p}{Z} \right) + \frac{\delta}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\perp}^2 \mathbf{u} + \delta \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} + \frac{2}{3i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right), \quad (3.38)$$

onde ∇_{\perp}^2 denota o laplaciano no plano tangente ao contorno. Definindo I_B , analogamente ao que foi feito na equação 3.31, como o integrando da expressão que prescreve a condição de contorno e substituindo essa expressão para a velocidade acústica normal:

$$I_B = W\rho_0 \left(\frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{p}{Z} \right) + \frac{\delta}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\perp}^2 \mathbf{u} + \delta\rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} + \frac{2}{3i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right) \right). \quad (3.39)$$

Nota-se que essa expressão não inclui o termo de variação de variação de curvatura adicionado por Myers, mas como uma formulação fraca que inclui esse termo já foi deduzida anteriormente pode-se incluí-lo para tornar a formulação mais precisa e compacta. Para maior clareza nas derivações a seguir, o integrando I_B é subdividido em quatro termos:

$$I_B = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (3.40a)$$

$$T_1 = W\rho_0 \left(\frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{p}{z} \right) - \frac{p}{i\omega Z} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{u}_0) \right), \quad (3.40b)$$

$$T_2 = \frac{\delta}{i\omega} W\rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\perp}^2 \mathbf{u}, \quad (3.40c)$$

$$T_3 = \delta W\rho_0^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z}, \quad (3.40d)$$

$$T_4 = \frac{2\delta}{3i\omega} W\rho_0^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right). \quad (3.40e)$$

O termo T_1 , que agora inclui o termo de curvatura, é a equação para a condição de contorno de Myers, que já foi desenvolvida em uma forma mais fraca na seção anterior. A seguir, o mesmo processo será realizado para os demais termos.

Para generalizar esse procedimento, usa-se a seguinte identidade vetorial, válida para um vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ com módulo unitário e um vetor \mathbf{v} qualquer:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.41)$$

Uma expressão dessa forma, quando integrada em uma superfície $\partial\Omega$, permite aplicação do Teorema de Stokes no lado esquerdo, resultando em uma integral ao longo da linha Γ que contorna a superfície. Se o contorno for fechado, essa linha será um conjunto vazio e a integral será nula. Essa foi a hipótese considerada na obtenção da formulação para FEM da condição de Ingard-Myers, que segue o desenvolvimento de Eversman (EVERSMAN, 2001):

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) dS = \int_{\Gamma} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0. \quad (3.42)$$

É possível, no entanto, realizar a implementação sem fazer essa hipótese, que formalmente exige continuidade na transição entre as paredes rígida e tratada. Particionando o

contorno do domínio computacional em $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_t$, pode-se separar a integral no contorno em integrais em cada partição. A partição $\partial\Omega_t$ representa a região tratada, e $\partial\Omega_h$ a região de parede rígida. A integral em $\partial\Omega_h$ terá integrando zero, já que deseja-se que a condição de contorno não modifique o comportamento nessa região. Aplicando o teorema de Stokes para a região tratada, obtém-se uma integral em Γ_t , que é uma linha finita ao longo da qual é possível realizar a integração:

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \, dS = \int_{\Gamma_t} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (3.43)$$

Com essa formulação, não há necessidade de garantir que a impedância varie suavemente na interface entre as paredes rígida e tratada. O efeito dessa integral de linha já foi estudado para a condição de Ingard-Myers e não foi considerado significativo (GABARD, 2010), mas essa conclusão não se estende necessariamente para a condição modificada sendo implementada. Por simplicidade, no desenvolvimento a seguir assume-se que a integral no contorno $\partial\Omega$ será nula, mas ao final as contribuições de cada termo para a integral na linha Γ_t serão computados.

Para o termo T_3 usa-se a seguinte relação:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u}_0 \right) = \delta W \rho_0^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} + \delta \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \nabla \cdot (W \rho_0^2 \mathbf{u}_0). \quad (3.44)$$

Substituindo T_3 nessa expressão, e usando a equação 3.4 pode-se escrever:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u}_0 \right) = T_3 + \delta \rho_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (W \rho_0). \quad (3.45)$$

Para substituição na equação 3.41, a seguinte grandeza também é necessária:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u}_0 \right) \right) = \frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})). \quad (3.46)$$

Essa expressão foi simplificada consideravelmente usando o fato de que o contorno é impérvio ao escoamento médio, ou seja, $\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Substituindo essas expressões na equação 3.41 e desprezando o lado esquerdo dessa equação, que será nulo após a integração, obtém-se uma expressão alternativa para T_3 :

$$T_3 = \frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})) - \delta \rho_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (W \rho_0). \quad (3.47)$$

O procedimento para o termo T_4 é exatamente o mesmo, e chega-se na expressão:

$$T_4 = \frac{2\delta}{3i\omega} W \rho_0^2 \left(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})) - \frac{2\delta}{3i\omega} \rho_0 \left(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right) \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (W \rho_0). \quad (3.48)$$

Para o termo T_2 , antes é necessário definir o laplaciano no plano tangente. Tomando dois vetores ortogonais $\hat{\mathbf{t}}_1$ e $\hat{\mathbf{t}}_2$ contidos nesse plano, essa operação é definida da seguinte forma:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{u} = (\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \nabla) [(\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}] + (\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla) [(\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}] \quad (3.49)$$

O fato de o campo de velocidade \mathbf{u} ser potencial permite que a expressão seja reescrita como:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{u} = \nabla(\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)) + \nabla(\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)) \quad (3.50)$$

Por conveniência, define-se uma variável auxiliar D_u tal que:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{u} = \nabla[\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1) + \hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)] = \nabla D_u, \quad (3.51)$$

e com o objetivo de aplicar a identidade da equação 3.41, desenvolve-se a expressão:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u \mathbf{u}_0 \right) = \frac{\delta}{i\omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla(W D_u) + \frac{\delta}{i\omega} W D_u \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0). \quad (3.52)$$

Novamente usando a equação 3.4, o último termo será zero. Expandindo $\nabla(W D_u)$ usando as regras de diferenciação:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u \mathbf{u}_0 \right) = \frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla D_u + \frac{\delta}{i\omega} \rho_0 D_u \mathbf{u}_0 \cdot \nabla W. \quad (3.53)$$

A outra expressão necessário para aplicação da identidade é:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u \mathbf{u}_0 \right) \right) = \frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0). \quad (3.54)$$

Usando essas expressões na identidade em questão, obtém-se uma expressão alternativa para T_2 :

$$T_2 = \frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0) - \frac{\delta}{i\omega} \rho_0 D_u \mathbf{u}_0 \cdot \nabla W \quad (3.55)$$

Por fim, pode-se escrever a condição de contorno como uma contribuição somada na equação global do sistema, com a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (i\omega \rho W - (\rho_0 \nabla \phi + \rho \mathbf{u}_0) \cdot \nabla W) dV + \int_{\partial\Omega} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) dS = 0, \quad (3.56a)$$

$$T_1 = \rho_0 \frac{p}{Z} (W - \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla W), \quad (3.56b)$$

$$T_2 = \frac{\delta}{i\omega} \rho_0 D_u (W \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0) - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla W), \quad (3.56c)$$

$$T_3 = \delta \rho_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} (W \rho_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla(W \rho_0)) \quad (3.56d)$$

$$T_4 = \frac{2\delta}{3i\omega} \rho_0 \left(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Z} \right) (W \rho_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla(W \rho_0)), \quad (3.56e)$$

$$D_u = \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1) + \hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2). \quad (3.56f)$$

Essas são as equações que serão entradas no software de FEM para especificação completa da condição de contorno. Quando comparada com a condição de Ingard-Myers, essa implementação da condição de contorno de Brambley requer algumas informações adicionais. É necessário conhecer os gradientes da impedância e da densidade no campo médio, mas essas grandezas podem ser calculadas automaticamente pelo *COMSOL Multiphysics*. Outros parâmetros geométricos necessários, como os vetores normal e tangenciais, também são calculados automaticamente e ficam disponíveis para uso na formulação.

Essa implementação também depende de derivadas de até segunda ordem do potencial de velocidade acústico ϕ , que é variável dependente. Antes das manipulações realizadas nessa seção, os termos T_2 e T_4 possuíam derivadas de terceira ordem da variável dependente. Como as funções de forma usadas pelo software são polinômios de segundo grau, essas derivadas seriam difíceis de serem obtidas durante o processo de soluções, exigindo variáveis auxiliares intermediárias que aumentariam consideravelmente o custo computacional.

As manipulações algébricas feitas para chegar nesse conjunto de equações não são restritas ao sistema de coordenadas cartesiano. Essas equações podem ser usadas tanto para um modelo tridimensional como para um modelo bidimensional axi-simétrico, mudando somente a representação do operador ∇ e os diferenciais nas integrais da equação global, de acordo com o sistema de coordenadas usado.

Na derivação apresentada, assumiu-se que a impedância varia suavemente na transição entre as regiões tratada e rígida, e que:

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left(\frac{p}{i\omega Z} W \rho_0 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_0) \right) dS = 0, \quad (3.57a)$$

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_0) \right) dS = 0, \quad (3.57b)$$

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_0) \right) dS = 0, \quad (3.57c)$$

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left(\frac{2\delta}{3i\omega Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})) (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_0) \right) dS = 0. \quad (3.57d)$$

Pode-se usar a hipótese alternativa representada pela equação 3.43, que transforma essas equação em integrais sobre uma linha finita, que podem ser computadas numericamente. Essas integrais serão somadas como uma contribuição na equação global do sistema, e a

integral resultante fica:

$$\int_{\Gamma_t} (E_1 + E_2 + E_3 + E_4)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma_t, \quad \text{onde :} \quad (3.58a)$$

$$E_1 = \frac{p}{i\omega Z} W \rho_0, \quad (3.58b)$$

$$E_2 = \frac{\delta}{i\omega} W \rho_0 D_u, \quad (3.58c)$$

$$E_3 = \frac{\delta}{Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (3.58d)$$

$$E_4 = \frac{2\delta}{3i\omega Z} W \rho_0^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})). \quad (3.58e)$$

A linha Γ_t contorna a região tratada, e $\hat{\mathbf{t}}$ é o vetor tangente a essa linha no sentido anti-horário. Essa integral é incluída no equacionamento global do sistema, e é uma "condição de linha", similar a uma condição de contorno, mas aplicada à uma curva ao invés de uma superfície. Com a inclusão dessa condição, remove-se a restrição de que a impedância precisa variar suavemente na transição entre paredes rígida e tratada.

3.4 VALIDAÇÃO

Para validar a implementação da condição de contorno, será usado um caso com resultado analítico conhecido. Isso é possível para um duto circular, com parede tratada ou rígida, na presença de escoamento médio axial uniforme e densidade média constante. Nessas condições é possível obter uma solução modal, mas não é possível modelar uma transição entre parede rígida e acusticamente tratada. Para isso será necessário usar um processo de *mode-matching*, que permite prever como os modos se espalharão numa descontinuidade.

Para obter a solução modal, pode-se usar a equação 3.24 considerando $\mathbf{u}_0 = w_0 \hat{\mathbf{z}}$ em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \left(1 - \frac{w_0^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2 \frac{i\omega w_0}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi = 0. \quad (3.59)$$

Considerando-se periodicidade em θ e variação harmônica em z :

$$\phi(r, \theta, z) = \phi(r) e^{-im\theta - ik_z z}, \quad (3.60)$$

que substituído na expressão anterior resulta em:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left(\left(\frac{\omega - k_z w_0}{c_0} \right)^2 - k_z^2 \right) \phi - \frac{m^2}{r^2} \phi = 0. \quad (3.61)$$

Essa é uma equação de Bessel, e as soluções de interesse são as funções de Bessel do primeiro tipo $J_m(r)$. As funções de Bessel do segundo tipo são descartadas por conterem uma singularidade em $r = 0$ que não representa o fenômeno físico sendo modelado. Com isso, obtém-se a seguinte solução modal:

$$\phi = J_m(k_r r) e^{-im\theta - ik_z z}, \quad (3.62)$$

com k_r dado por:

$$k_r^2 = \left(\frac{\omega - k_z w_0}{c_0} \right)^2 - k_z^2. \quad (3.63)$$

Também é possível formular a equação 3.61 como um problema de auto-valor:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) \phi = -k_r^2 \phi. \quad (3.64)$$

Para usar essas soluções modais, é necessário determinar os valores possíveis do número de onda axial k_z para cada m . A ordem circunferencial m pode assumir qualquer valor inteiro, mas as formas modais obtidas com m e $-m$ são idênticas, com o sinal determinando apenas se a forma modal gira no sentido horário ou anti-horário. Portanto, pode-se considerar somente valores não-negativos de m na obtenção dos valores para k_z .

Os possíveis pares (m, k_z) irão depender da condição de contorno usada. Para parede rígida, tem-se que a velocidade de partícula normal à parede precisa ser nula. Numa geometria circular em coordenadas cilíndricas, essa é a velocidade na direção radial. Considerando um duto de raio R , a seguinte equação precisa ser satisfeita na parede:

$$u_n = u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = k_r J'_m(k_r R) e^{-im\theta - ik_z z} = 0. \quad (3.65)$$

Tem-se uma solução trivial $k_r = 0$, que resulta em uma forma modal constante se $m = 0$, e zera a forma modal para todos os outros valores de m . As demais soluções estão associadas aos zeros da derivada da função de Bessel. Se α_m^n é a n -ésima raiz maior ou igual a zero de $J'_m(a)$, tem-se:

$$k_r^{m,n} = \frac{\alpha_m^n}{R}. \quad (3.66)$$

Os valores de α_m^n podem ser calculados numericamente. Usando o valor de k_r e a equação 3.63 obtém-se dois valores de k_z , que correspondem à onda se propagando nos dois sentidos de z .

Dessa forma, todos os possíveis pares (m, k_z) que representam um modo que se forma em um duto cilíndrico com parede rígida são obtidos. Para cada um desses modos, se o

valor de k_z for puramente real o modo se propagará indefinidamente ao longo da direção axial, sem perdas de energia, e é chamado propagante. Se k_z tiver parte imaginária, o modo terá sua amplitude decaindo exponencialmente na direção de propagação, e é chamado evanescente. Usando a equação 3.63, pode-se mostrar que o critério que determina se um modo é propagante ou evanescente é a frequência, e o modo será propagante se:

$$\omega \geq \frac{\alpha_m^n}{R} \sqrt{c_o^2 - w_0^2} \quad (3.67)$$

A frequência na qual a igualdade é satisfeita é chamada frequência de corte, e é uma característica de cada modo. Para qualquer frequência existirá uma quantidade finita de modos propagantes, e suas formas modais podem ser usadas para compor o campo acústico..

Para a condição de Ingard-Myers, tem-se que a seguinte equação precisa ser respeitada na parede:

$$u_n = \frac{p}{Z} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{p}{Z} \right) + \frac{1}{i\omega} \frac{p}{Z} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0. \quad (3.68)$$

Considerando que a impedância Z não varia no espaço e substituindo as demais variáveis usando a expansão modal como feito para o caso de parede rígida, chega-se na relação:

$$i\omega Z \frac{J'_m(k_r R)}{J_m(k_r R)} k_r = \rho_0 (\omega - w_0 k_z)^2. \quad (3.69)$$

Essa equação é consideravelmente mais complexa que a obtida para o caso de parede rígida, mas ainda pode ser resolvida numericamente quando combinada com a equação 3.63. Nessa condição, todos os números de onda axial k_z terão parte imaginária, e terão sua amplitude decaindo ao longo do sentido de propagação.

Por fim, para a condição de contorno de Brambley, num duto cilíndrico e assumindo camada limite com perfil linear e espessura δ , tem-se a seguinte equação na parede:

$$i\omega \frac{\partial \phi}{\partial r} - \delta \frac{\rho_0 w_0}{Z} k_z \left(\omega - \frac{2}{3} w_0 k_z \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} = i(\omega - w_0 k_z) \frac{p}{Z} - \delta w_0 (k_z^2 + m^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.70)$$

Ainda é possível substituir a expansão modal das variáveis e resolver essa equação numericamente, mas uma alternativa mais eficiente é obter os números de onda e formas modais através de um problema de auto-valor usando a equação 3.64. Nesse caso, usa-se uma discretização ao longo do raio e especifica-se as condições de contorno no ponto correspondente à parede. A implementação usada, desenvolvida por André Spillere (SPILLERE; BONOMO et al., 2020), usa um método espectral para obter as autofunções e autovalores

associados, que correspondem respectivamente às formas modais e seus números de onda axiais.

Com as bases modais usadas para cada região do duto definidas, é necessário agora modelar a transição entre essas regiões usando um método de mode-matching (GABARD; ASTLEY, 2008). Esse método usa um volume de controle V que envolve a região de transição, como mostrado na Figura 2, e garante a conservação de massa e quantidade de movimento nesse volume.

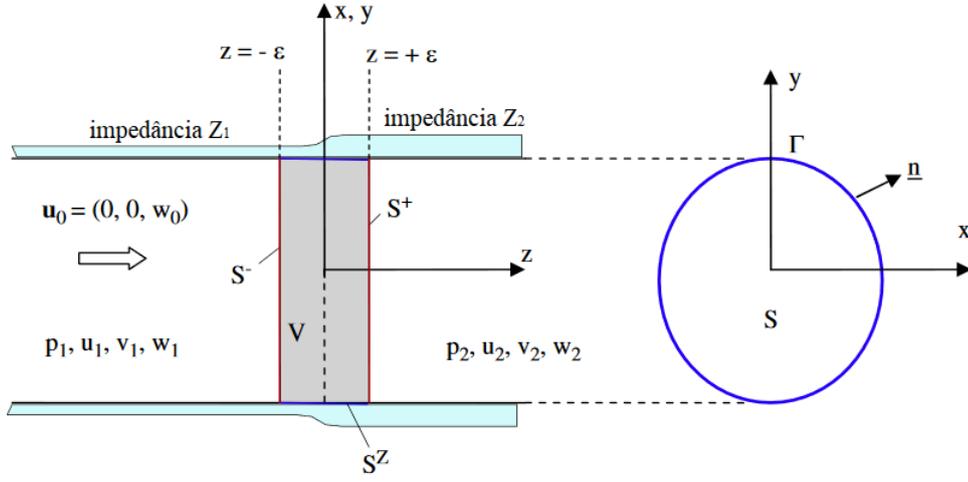


Figura 2 – Geometria e volume de controle para a derivação do método de mode-matching (GABARD; ASTLEY, 2008)

Para o caso de soluções modais, obtém-se um sistema linear com a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_1^- \\ \mathbf{M}_2^+ & -\mathbf{M}_1^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2^+ \\ \mathbf{A}_1^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^+ & -\mathbf{P}_2^- \\ \mathbf{M}_1^+ & -\mathbf{M}_2^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_2^- \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

onde \mathbf{A}_n^\pm são os vetores de amplitudes modais para os modos na região n que se propagam na direção $\pm z$. As submatrizes \mathbf{P}_n^\pm e \mathbf{M}_n^\pm vem das equação de conservação de quantidade de movimento e massa, respectivamente, e são dadas por:

$$(\mathbf{M}_n^\pm)_{\alpha,\beta} = \int_S \left(w_0 + c_0^2 \frac{k_{z,n,\beta}^\pm}{\omega - w_0 k_{z,n,\beta}^\pm} \right) W_\alpha P_{n,\beta}^\pm dS - \int_\Gamma \frac{i w_0 \rho_0 c_0^2}{\omega} W_\alpha A_n P_{n,\beta}^\pm d\Gamma \quad (3.72a)$$

$$(\mathbf{P}_n^\pm)_{\alpha,\beta} = \int_S \frac{\omega W_\alpha P_{n,\beta}^\pm}{\rho_0 (\omega - w_0 k_{z,n,\beta}^\pm)} dS. \quad (3.72b)$$

As formas modais na região n são dadas por $P_{n,\beta}^\pm$. A função-teste W_α é escolhida como $P_{2,\alpha}^+$ nas equações para \mathbf{P}_n^\pm e $P_{1,\alpha}^-$ nas equações para \mathbf{M}_n^\pm . A admitância de parede em cada seção é dada por $A_n = 1/Z_n$, com $A = 0$ no caso de parede rígida. No caso de interesse, quase todos os parâmetros nessas integrais não variam no espaço, as únicas exceções sendo as formas modais $P_{n,\beta}^\pm$ e as funções-teste W_α .

As formas modais são escolhidas como funções-teste, e calculando a integral em coordenadas cilíndricas tem-se:

$$\int_S W_\alpha P_{n,\beta}^\pm dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} J_{m_\alpha}(k_r^\alpha r) J_{m_\beta}(k_r^\beta r) e^{-i(m_\alpha+m_\beta)\theta} r dr d\theta \quad (3.73a)$$

$$\int_\Gamma W_\alpha P_{n,\beta}^\pm d\Gamma = \int_0^{2\pi} J_{m_\alpha}(k_r^\alpha R) J_{m_\beta}(k_r^\beta R) e^{-i(m_\alpha+m_\beta)\theta} d\theta \quad (3.73b)$$

Em ambas as equações, a integral em θ tornará o termo nulo se $m_\alpha + m_\beta$ for diferente de zero. Para os demais casos, usa-se a identidade $J_{-m}(r) = (-1)^m J_m(r)$. Os termos nos quais $m_\beta = -m_\alpha$ ficam:

$$\int_S W_\alpha P_{n,\beta}^\pm dS = 2\pi(-1)^m \int_0^R J_{m_\alpha}(k_r^\alpha r) J_{m_\alpha}(k_r^\beta r) r dr, \quad (3.74a)$$

$$\int_\Gamma W_\alpha P_{n,\beta}^\pm d\Gamma = 2\pi J_{m_\alpha}(k_r^\alpha R) J_{m_\alpha}(k_r^\beta R), \quad (3.74b)$$

e pode-se usar o seguinte resultado analítico para desenvolver a integral em S :

$$\int J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr = \frac{r}{k_1^2 - k_2^2} (k_2 J_m(k_1 r) J_{m-1}(k_2 r) - k_1 J_{m-1}(k_1 r) J_m(k_2 r)), \quad (3.75)$$

se k_r^α for diferente de k_r^β . Se $k_r^\beta = k_r^\alpha$, usa-se ao invés:

$$\int J_m(kr)^2 r dr = \frac{r^2}{2} (J_m(kr)^2 - J_{m-1}(kr) J_{m+1}(kr)). \quad (3.76)$$

Para casos com mais de uma transição pode-se aplicar esse equacionamento para cada uma das transições, corrigindo as amplitudes modais para levar em conta o efeito da propagação entre as interfaces. Para duas interfaces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_1^- \\ \mathbf{M}_2^+ & -\mathbf{M}_1^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2^+(z_{12}) \mathbf{A}_2^+ \\ \mathbf{E}_1^-(z_{12}) \mathbf{A}_1^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^+ & -\mathbf{P}_2^- \\ \mathbf{M}_1^+ & -\mathbf{M}_2^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1^+(z_{12}) \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{E}_2^-(z_{12}) \mathbf{A}_2^- \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_3^+ & -\mathbf{P}_2^- \\ \mathbf{M}_3^+ & -\mathbf{M}_2^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3^+(z_{23}) \mathbf{A}_3^+ \\ \mathbf{E}_2^-(z_{23}) \mathbf{A}_2^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_3^- \\ \mathbf{M}_2^+ & -\mathbf{M}_3^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2^+(z_{23}) \mathbf{A}_2^+ \\ \mathbf{E}_3^-(z_{23}) \mathbf{A}_3^- \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

A matriz diagonal \mathbf{E}_n^\pm é definida como:

$$\left(\mathbf{E}_n^\pm(z) \right)_{\alpha,\alpha} = \exp(-ik_{z,n,\alpha}^\pm z). \quad (3.79)$$

Assim, considera-se que \mathbf{A}_n^\pm são as amplitudes no plano $z = 0$, e as matrizes \mathbf{E}_n^\pm calculam o efeito da propagação entre $z = 0$ e as interfaces, que encontram-se em $z = z_{12}$ e $z = z_{23}$.

Com essas equações, é possível especificar uma excitação incidente conhecida no região 1 prescrevendo \mathbf{A}_1^+ . Considerando que em $z > z_{23}$ o duto possui terminação anecoica,

tem-se também que \mathbf{A}_3^- é um vetor nulo. Fixando esses dois vetores, pode-se resolver iterativamente os sistemas lineares acima, e obter os demais vetores de amplitudes modais. Conhecendo todas as amplitudes, as formas modais podem ser combinadas para obter-se o campo acústico em qualquer ponto no interior do duto para a excitação prescrita \mathbf{A}_1^+ . Uma implementação desse procedimento desenvolvida por André Spillere (SPILLERE; BONOMO et al., 2020) foi usada para calcular as bases modais, amplitudes modais e campos acústicos.

3.5 RESULTADOS

As equações 3.56 foram implementadas no software COMSOL Multiphysics, usando um nó de *Weak Contribution* para adicioná-las à equação global do sistema. Primeiramente fez-se essa implementação para uma geometria tridimensional, mas concluiu-se que para resolver o caso de validação seria necessário um tempo de computação muito elevado, e que não seria possível resolver os demais casos de interesse. Desenvolveu-se então a condição de contorno considerando coordenadas cilíndricas e periodicidade na direção azimutal, que foram implementadas para uma geometria axissimétrica.

A geometria usada é adimensional, e composta por um duto de raio unitário e comprimento 1,1, separado em duas regiões de parede rígida nas extremidades, cada uma comprimento 0,15, e uma região central tratada de comprimento 0,8. Em ambas as terminações adicionou-se domínios de PML, que absorvem o campo acústico nelas incidente sem causar reflexões. Usa-se uma malha estruturada composta por quadriláteros usando elementos de ordem cúbica, com tamanho máximo de 0,005, que resulta numa resolução de 40 elementos por comprimento de onda para a frequência de análise, $\omega = 31$. Essa frequência e os parâmetros da geometria foram escolhidos para replicar o trabalho (MCALPINE; WRIGHT, 2006) que foi usado por André Spillere (SPILLERE; BONOMO et al., 2020) para validar a implementação do algoritmo de mode-matching. Para o liner, considera-se uma impedância $Z = 3 + 0,5i$, e uma espessura de camada limite $\delta = 0.01$ na condição de contorno modificada.

O escoamento considerado possui somente componente axial e é considerado uniforme ao longo de todo o duto, com número de Mach 0,5 e sentido contrário ao da excitação acústica. Para excitação, usou-se o modo de ordem azimutal 24 e ordem radial 1. A forma como essa excitação é aplicada será discutida no capítulo 5. Para analisar os resultados,

toma-se os valores de potencial de velocidade e de pressão em uma linha ao longo da parede do duto, na direção axial. Escolheu-se analisar o campo acústico na parede por essa ser a região onde o efeito das diferentes condições de contorno é mais proeminente.

As condições de contorno podem ser implementadas com ou sem um termo de integral de linha, dependendo da hipótese considerada na aplicação do teorema de Stokes, e essa escolha influencia o equacionamento que deve ser usado no procedimento de mode-matching. No equacionamento de mode matching, tem-se na equação 3.72a uma integral de linha análoga a desenvolvida para a implementação em FEM. No mode matching, essa integral impõe que a solução seja suave na interface entre liner e parede rígida, que é o que ocorre num modelo FEM quando não há uma condição de linha nessa interface (GABARD, 2010). Assim, o modelo FEM que inclui a integral de linha deve ser comparado com o mode-matching que não o inclui, e vice-versa.

O resultado obtido para a implementação sem a condição de linha é mostrado na figura 3, em gráficos de magnitude da pressão ao longo da parede do duto. Ocorrerem descontinuidades nas regiões de transição (em $z = 0,15$ e $z = 0,95$) para o modelo em FEM, que não aparece com a mesma severidade na predição do mode matching. Essa descontinuidades estão concentradas em um único nó da malha, e se tornam mais salientes quando a malha é refinada. Esperava-se observar uma descontinuidade semelhante no mode matching, já que os equacionamentos resolvidos são análogos. Atribui-se essa diferença ao fato de que implementação usada para o mode matching resolve o equacionamento para a pressão, enquanto o modelo FEM resolve para o potencial de velocidade e a pressão apresentada é calculada com base no potencial. Esse cálculo envolve uma derivada do potencial, conforme a equação 3.18, e essa operação magnifica a descontinuidade presente no potencial. No entanto, essa descontinuidade não tem efeitos práticos e as curvas são praticamente coincidentes nos demais pontos. Com a condição de contorno de Brambley, não se observa uma descontinuidade tão severa, e a concordância é boa.

Na figura 4, o mesmo resultado é mostrado para a implementação FEM que inclui os termos de integral de linha. Nesse caso a condição de contorno de Myers, implementada nativamente do COMSOL Multiphysics, também foi modificada para incluir esse termo. o principal efeito dessa inclusão na condição de Myers é uma redução considerável na descontinuidade nas interfaces. Para a condição de Brambley, a concordância se mostra ligeiramente melhor, especialmente nas regiões de parede rígida.

Nota-se que a diferença entre as implementações com e sem as integrais de linha

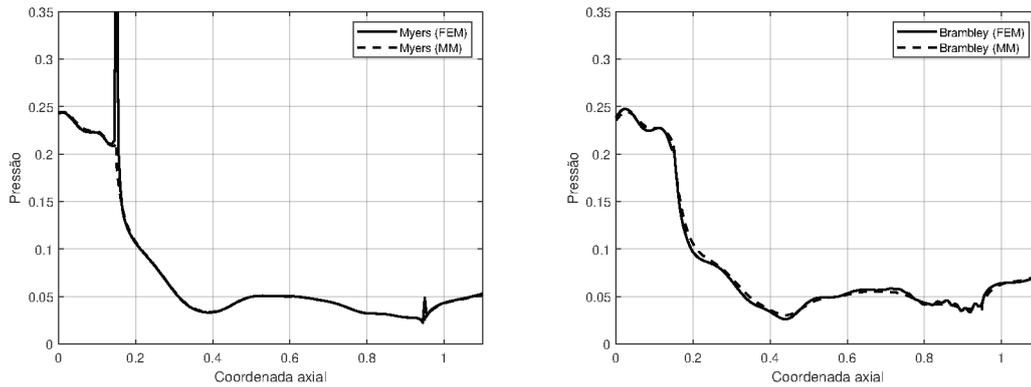


Figura 3 – Pressão ao longo da parede do duto no caso de validação, para a implementação FEM sem a integral de linha

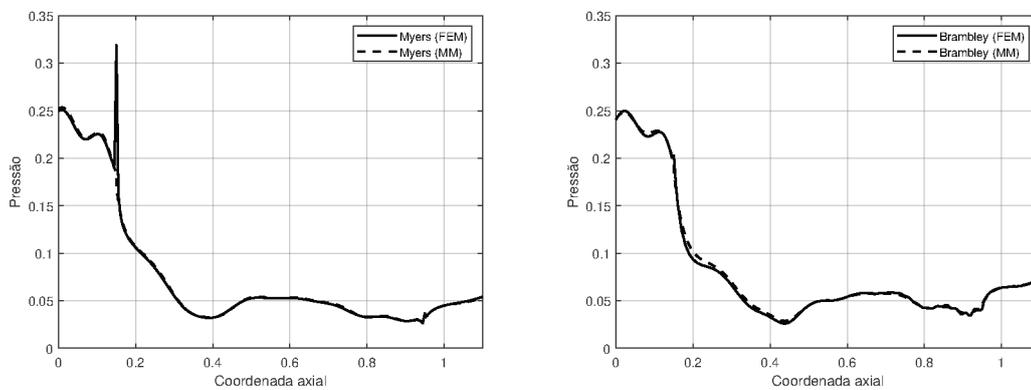


Figura 4 – Pressão ao longo da parede do duto no caso de validação, para a implementação FEM com a integral de linha

são pouco significativas. Isso pode ser visto mais claramente na figura 5, que compara os resultados obtidos com as condições de contorno de Myers e de Brambley, incluindo ou não a integral de linha, para cada um dos métodos de solução usados. Escolheu-se tomar a magnitude do potencial de velocidade, ao longo da mesma linha ao longo da parede do duto. Esse gráfico também mostra que há uma diferença razoável entre as predições usando as condições de Myers e Brambley, e que a concordância vista nas figuras 3 e 4 não se deve a um comportamento similar nas duas condições.

Os resultados obtidos para condições análogas de FEM e mode matching apresentaram concordância satisfatória nessa validação, e a inclusão ou não da integral de linha teve pouco efeito na solução final. Não é possível determinar se a inclusão ou não desse termo é a abordagem “correta” a partir desses modelos numéricos, já que usá-lo ou não é uma decisão de modelagem baseada em suposições diferentes (GABARD, 2010). Uma comparação com dados experimentais é necessária para determinar se uma delas representa melhor o

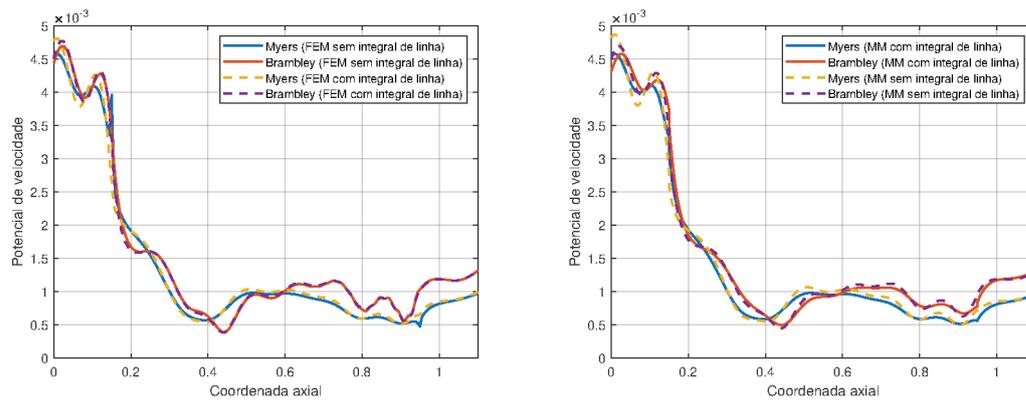


Figura 5 – Comparação entre condições de contorno, com ou sem integral de linha, para cada um dos métodos de solução

comportamento do liner, e essa análise será possível com os resultados do capítulo 5.

4 CAMPANHA EXPERIMENTAL

4.1 RIG DE FAN EESC-USP

O rig de fan EESC-USP é uma bancada experimental criada para realizar medições de ruído de fan, localizada na Escola de Engenharia de São Carlos. Essa bancada é composta por um rotor instalado no interior de um duto cilíndrico, com seções modulares permitindo a instalação de diferentes configurações de rotor e estator. A configuração atual usa um rotor de 16 pás e um estator de 14 palhetas, com geometria similar à do Advanced Noise Control Fan (ANCF), que é uma bancada experimental do NASA Glenn Research Center com finalidade semelhante, mas em escala reduzida (MARTINEZ et al., 2017).

A figura 6 mostra o rig de fan e seus principais componentes. A tomada de ar é denotada por (1), na qual um ICD (Inlet Control Device) é instalado para reduzir turbulência na entrada do duto. Os microfones responsáveis pelas medições acústicas, marcados por (2), encontram-se instalados na parede do duto, com sua superfície de captação rente à parede interna do duto. O conjunto rotor-estator encontra-se em (3), e a exaustão de ar ocorre em (4), onde um silenciador preenchido com fibra de vidro está instalado para reduzir o ruído irradiado para o ambiente. Entre a região dos microfones e do rotor o duto sofre uma contração no seu diâmetro, de 0,6 m para 0,5 m, que foi projetada com o propósito de reduzir a espessura da camada limite na região do rotor. A figura 7 mostra uma representação esquemática desse duto, seus componentes e instrumentação.



Figura 6 – Rig de fan EESC-USP

Um total de 77 microfones são instalados no duto, dispostos em 3 anéis. O primeiro

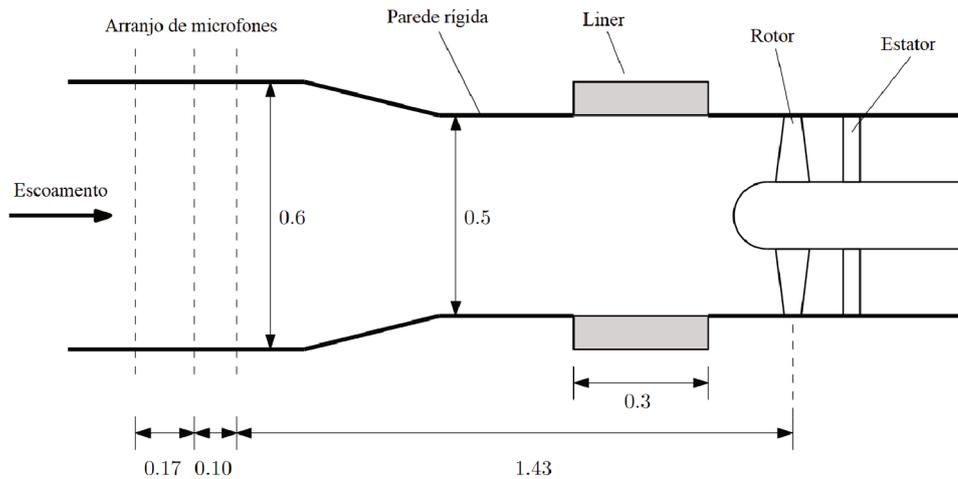


Figura 7 – Representação esquemática do rig de fan EESC-USP

anel é o que fica mais próximo do rotor e possui 33 microfones. O anel seguinte fica 0,1 m a montante do primeiro e possui 23 microfones, e o terceiro fica 0,17 m a montante do segundo, com 21 microfones. Em cada um desses anéis, os microfones encontram-se distribuídos uniformemente na direção azimutal. Essa disposição foi escolhida para aplicação de técnicas de beamforming (CALDAS et al., 2016). Dois modelos de microfones são utilizados, G.R.A.S. 40PH-S2 e Brüel & Kjaer Type 4958, ambos com diâmetro de 7 mm. Os sinais são captados na forma de série temporal usando um sistema de aquisição National Instruments PXI-1042Q.

O conjunto rotor-estator possui diâmetro de 0,5 m, e é uma geometria em escala do ANCF, que possui diâmetro de 1,2 m. O rotor é movido por um motor elétrico e é capaz de atingir velocidade máxima de 4500 RPM, medida usando um sensor de efeito Hall, produzindo um escoamento de Mach 0.14. É possível também obter velocidades de escoamento menores para uma mesma velocidade de rotação do rotor instalando placas de restrição de escoamento na saída do duto, como a mostrada na figura 8. Essas placas bloqueiam parcialmente a área do duto, e estão disponíveis placas que bloqueiam 25%, 40%, 50%, 60% e 75% da área.

Dados de pressão hidrodinâmica são medidos por um segundo sistema de aquisição National Instruments cDAQ-9184, usando tubos de Pitot. A pressão estática é medida na região de entrada de ar, a montante do rotor, entre o rotor e o estator, a jusante do estator e na região de exaustão. A pressão dinâmica é medida na tomada de ar e na região de exaustão. Essas medições são usadas para calcular parâmetros de performance do escoamento médio, como fluxo de massa e perda de carga no fan. As condições do



Figura 8 – Placa de restrição de área (50%) instalada na saída do duto

ambiente, como temperatura, umidade e pressão atmosférica, são medidas por uma sonda meteorológica e registradas manualmente. Com esses dados é possível obter a densidade do ar, e fazer correções para medições realizadas em condições diferentes.

Um liner foi projetado pela equipe do LVA-UFSC especificamente para essa bancada (SPILLERE; BRAGA et al., 2019), e uma campanha experimental foi realizada para verificar se o comportamento desejado foi obtido, e também para coletar dados para investigações adicionais. As medições a serem realizadas foram definidas em conjunto por membros das equipes do LVA-UFSC e da EESC-USP, e a campanha experimental foi realizada nos dias 11 e 12 de Julho de 2018. O rig de fan foi operado pelo estudante de mestrado da EESC-USP Bernardo Rocamora, e os ensaios foram acompanhados pelos professores Paulo Greco e Júlio Cordioli, respectivamente da USP e da UFSC, pelo aluno da UFSC Lucas Bonomo e pelo autor.

4.2 MATRIZ DE ENSAIOS

4.2.1 Configurações de liner

O liner projetado pela equipe do LVA-UFSC é segmentado circunferencialmente em três partes, resultando em 3 faixas estreitas nas quais não há tratamento acústico, chamadas de splices. Com a finalidade de aferir o efeito dessas discontinuidades, decidiu-se realizar uma série de medições nas quais splices adicionais foram introduzidas artificialmente na

superfície do liner. Esse efeito foi obtido cobrindo seletivamente regiões do liner com fita adesiva metálica, e três configurações adicionais para o liner foram criadas.

Na primeira configuração, adicionou-se uma splice azimutal ao liner, de forma que seu comprimento na direção axial foi dividido em duas partes iguais. A segunda configuração consistiu em adicionar três novas splices axiais, além das já existentes devido ao processo de construção, resultando em 6 splices distribuídas simetricamente. Na terceira configuração novamente cobriu-se uma região azimutal, mas dessa vez na borda do liner, de forma que o comprimento axial do liner foi reduzido pela mesma quantidade que no primeira configuração, mas dessa vez sem introduzir novas discontinuidades, resultando somente em uma redução do comprimento axial do liner. A figura 9 mostra imagens capturadas durante a campanha para duas dessas configurações, a primeira e a terceira.

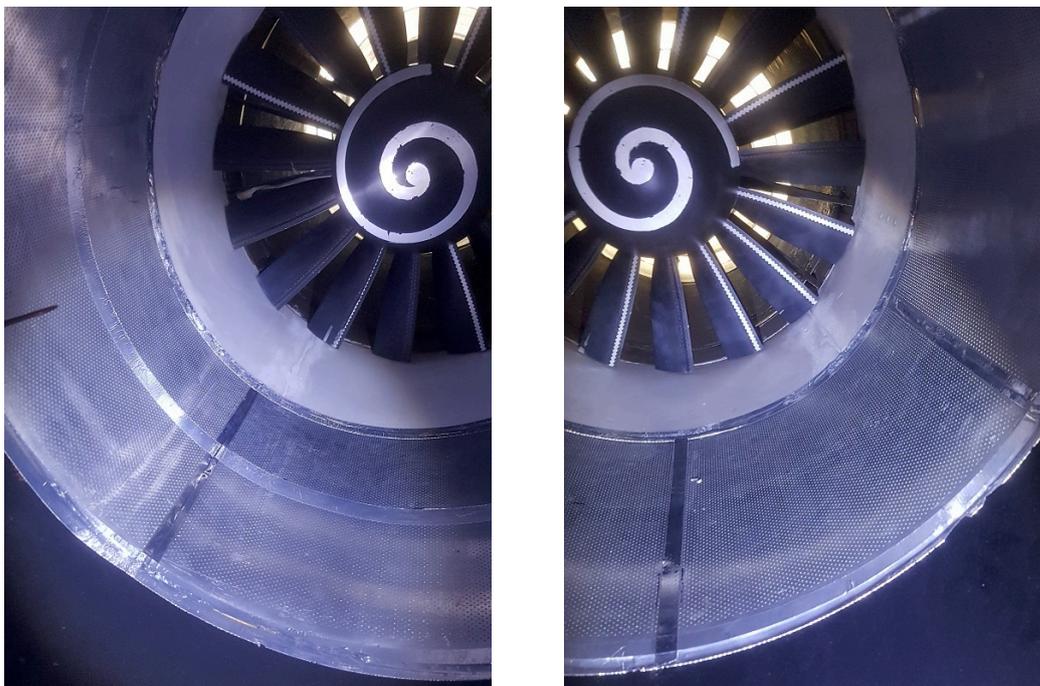


Figura 9 – Introdução de uma splice azimutal (esquerda) e de 3 splices axiais adicionais (direita)

Além dessas diversas configurações de liner é importante realizar uma medição para o caso de parede rígida, que será necessária para determinar a atenuação causada pelo tratamento acústico. Para evitar modificar o comprimento do duto e adicionar incertezas associadas à montagem do liner na seção do rotor, optou-se por cobrir totalmente o liner com fita adesiva metálica. A figura 10 mostra o liner com essa modificação.

A quinta e última configuração testada corresponde ao liner sem modificações, somente com as três splices axiais decorrentes da sua construção. Essas configurações



Figura 10 – Liner totalmente coberto para medir condição de parede rígida

são listadas na tabela 1. Cada uma dessas variações foi testada em cinco condições de operação, conforme a matriz de ensaios mostrada na tabela 2:

Configuração	Descrição
1	<i>Splice</i> azimutal adicional
2	Três <i>splices</i> axiais adicionais
3	Redução no comprimento do liner
4	Liner totalmente coberto
5	Liner sem modificação (3 <i>splices</i> axiais naturais)

Tabela 1 – Configurações de liner testadas

Condição	RPM	Bloqueio	Mach
1	4000	25%	0.078
2	3600	50%	0.057
3	4200	0%	0.088
4	3775	0%	0.079
5	2700	0%	0.057

Tabela 2 – Condições de operação para as medições variando as modificações no liner

Essas condições de operação foram escolhidas de forma que as condições 1, 2 e 3 correspondem aproximadamente à velocidade de rotação máxima para cada restrição de área. Apesar de a velocidade de operação máxima do rotor ser de 4500 RPM, problemas técnicos dificultaram a realização de medições nessa condição. Quando a velocidade de 4500 RPM era atingida, o sistema de controle do motor elétrico mantinha essa velocidade por

apenas alguns segundos antes de reduzir a velocidade inesperadamente. Por isso, optou-se por usar 4200 RPM para o caso sem bloqueio. Nos casos com bloqueio, a operação em velocidades muito altas pode causar estol nas pás do rotor e mudar consideravelmente as características do ruído gerado, tornando as componentes tonais menos proeminentes (MARTINEZ et al., 2017). As velocidades para as condições 1 e 2 foram escolhidas de forma a evitar esse regime de operação. Para as condições 4 e 5, escolheu-se a velocidade de rotação de forma que o número de Mach do escoamento médio seja aproximadamente igual ao obtido nas condições 1 e 2, respectivamente.

As 25 combinações entre variação no liner e condição de operação foram medidas ao longo de uma dia. Usou-se um tempo de aquisição de 20 segundos para as medições acústicas.

4.2.2 Variação de velocidade do rotor

Para a segunda matriz de ensaios, decidiu-se realizar medições varrendo os valores de velocidade de rotor. Com esses dados, seria possível verificar a atenuação do liner ao longo de toda a faixa de operação do rotor, e inferir experimentalmente a sua curva de impedância para vários números de Mach. Somente duas variações de liner foram usadas: sem modificações e totalmente coberto.

O maior número de medições foi dedicado ao caso sem bloqueio na saída do duto, no qual testou-se velocidades do rotor de 1400 até 4400 RPM, em incrementos de 200 RPM. Para os casos com bloqueio foram usadas as placas de 25% e 50%, e decidiu-se realizar medições em uma quantidade menor de velocidades: 2400, 3000, 3600, 3800 e 4000 RPM, sendo que a última causa estol nas pás do rotor com bloqueio de 50% e foi usada somente para a placa de 25%.

Essa varredura inclui algumas condições de operação idênticas às usadas para o ensaio paramétrico do liner, especificamente as três primeiras condições listadas na tabela 2. Uma vez que o liner e placa de bloqueio para uma dada condição estão instalados, realizar a medição para cada velocidade do rotor é uma tarefa rápida. Decidiu-se então replicar todas as condições de operação do ensaio de variação do liner. Esses dados com parâmetros nominais iguais mas medidos em dias diferentes podem ser comparados para verificar a repetibilidade do ensaio. A matriz de ensaios para as medições variando a velocidade do rotor é mostrada na tabela 3.

Condição	RPM	Bloqueio
1	4400	0%
2	4200	0%
3	4000	0%
4	3800	0%
5	3600	0%
6	3400	0%
7	3200	0%
8	3000	0%
9	2800	0%
10	2600	0%
11	2400	0%
12	2200	0%
13	2000	0%
14	1800	0%

Condição	RPM	Bloqueio
15	1600	0%
16	1400	0%
17	3775	0%
18	2700	0%
19	4000	25%
20	3800	25%
21	3600	25%
22	3000	25%
23	2400	25%
24	3800	50%
25	3600	50%
26	3000	50%
27	2400	50%

Tabela 3 – Condições de operação para as medições variando a velocidade do rotor

4.3 DECOMPOSIÇÃO MODAL

A decomposição modal é feita na frequência correspondente à primeira BPF de cada caso. Assume-se que a entrada de ar do duto é anecoica, ou seja, somente estão presentes modos que se propagam do rotor para a entrada de ar. Essa hipótese é necessária devido à disposição do arranjo de microfones na bancada, que foi escolhido para aplicação de beamforming e apresenta algumas deficiências quando usado para decomposição modal.

Com 77 microfones seria possível, no melhor caso, uma decomposição modal bidirecional em até 38 modos. Na primeira BPF do caso com a maior velocidade de rotação ensaiada, 4400 RPM, existem 14 modos. No entanto, como esses microfones encontram-se concentrados em somente 3 posições axiais, acaba-se obtendo equações linearmente dependentes na matriz de decomposição modal, cujos elementos são:

$$M_{a,b} = N_b J_{m_b}(\alpha_b r_a) \exp(-ik_b z_a - im_b \theta_a), \quad (4.1)$$

onde o índice b representa cada um dos modos propagantes no duto, com números de onda radial α_b e axial k_b , ordem azimutal m_b , e um fator de normalização N_b tal que o valor RMS de $N_b J_{m_b}(\alpha_b r) \exp(-im_b \theta)$ na seção transversal do duto seja unitário. O índice a representa cada um dos microfones no arranjo, localizado na posição $(r, \theta, z) = (r_a, \theta_a, z_a)$ em coordenadas cilíndricas. Como todos os microfones estão na parede do duto, usando variáveis adimensionais tem-se que $r_a = 1$ para todo a . Usando os dados experimentais de pressão no domínio da frequência P_a em cada microfone, as amplitude modais A_b são

obtidas resolvendo o sistema linear:

$$M_{a,b}A_b = P_a. \quad (4.2)$$

Para entender a deficiência causada pelo arranjo de microfones, supõe-se um caso hipotético no qual o campo acústico no interior de um duto de raio R é composto por uma combinação de modos com ordem azimutal $m = 0$ exclusivamente. Para decompor esse campo acústico e obter as componentes dos modos radiais, usa-se a matriz de decomposição modal, que nesse caso fica:

$$M_{a,b} = N_b J_0(\alpha_b R) \exp(-ik_b z_a). \quad (4.3)$$

Percebe-se que microfones distribuídos na direção circunferencial não adicionam contribuições nessa matriz, e que cada um dos microfones pertencentes ao mesmo anel em z_a vão produzir linhas idênticas na matriz. Assim, somente três equações linearmente independentes são obtidas. Considerando propagação em ambas as direções, esse arranjo só permite a determinação das amplitudes modais em frequências nas quais a onda plana é o único modo com ordem azimutal $m = 0$, já que são necessárias duas amplitudes por modo, uma para cada sentido de propagação. A frequência de corte do segundo modo radial no duto onde faz-se a decomposição modal ($R = 0,3\text{ m}$) é dada por:

$$f_c^{(0,2)} = 3.8317 \frac{c_0}{2\pi R} \sqrt{1 - M^2} \approx 690 \text{ Hz}, \quad (4.4)$$

que é menor que a primeira BPF nos casos em que a velocidade do rotor está acima de 2600 RPM. Essa limitação se estende a todas as ordens modais, mas o caso descrito é o mais crítico porque o modo $(m, 2)$ tem a menor frequência de corte quando $m = 0$. A partir de 3600 RPM, a primeira BPF estará numa frequência na qual os modos $(1, 2)$ e $(-1, 2)$ são propagantes. Por isso, é necessário supor que não há reflexões na entrada de ar do duto para que obtenha-se um sistema determinado em todas as frequências de análise.

4.4 RESULTADOS

Os dados das medições acústicas são gravados como uma série temporal de cada um dos 77 microfones, com tempo de medição de 20 s para a medição do primeiro dia e 30 s para o segundo dia, com frequência de amostragem de 51 200 Hz. A densidade espectral desses sinais de pressão foi estimada usando o método de Welch, com overlap de 50% e

janela Hanning amostrando segmentos de 0,64s do sinal. Para preservar a informação de fase calculou-se os espectros cruzados entre todos os microfones e um microfone de referência escolhido arbitrariamente. O método de Welch estima a energia de um sinal, e como deseja-se o espectro da pressão normalizou-se os espectros cruzados pela raiz quadrada do auto-espectro do microfone de referência, em cada frequência. Como exemplo, o sinal no tempo do microfone de referência e sua densidade espectral são mostradas na figura 11. Esse dado corresponde à medição com parede rígida e o rotor a 4400 RPM. Para melhor visualização, truncou-se o sinal no tempo, que tem duração total de 30s.

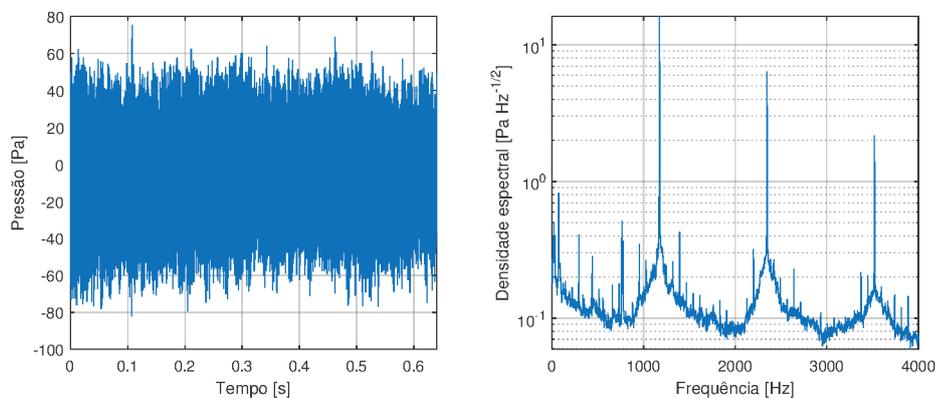


Figura 11 – Sinal no tempo medido por um microfone (esquerda) e sua densidade espectral calculada usando o método de Welch (direita)

Como os valores de pressão são conhecidos somente na parede do duto, usa-se decomposição modal para conhecer o campo acústico na região interna do duto. Esse procedimento é realizado com base na pressão para uma determinada frequência, no número de Mach do escoamento no duto (que assume-se uniforme) e nas posições dos microfones. Como discutido anteriormente, limitações decorrentes do posicionamento dos microfones tornaram necessário assumir que a terminação do duto é anecoica e que só há propagação em uma direção.

Conhecendo as amplitudes modais para cada modo propagante no interior do duto é possível estimar a potência acústica carregada por cada modo na direção axial usando a seguinte expressão, válida para um duto circular com escoamento uniforme e parede rígida (RIENSTRA, 2015):

$$P_n^\pm = \frac{\pi R^2}{\rho_0 c_0} (1 - M^2)^2 \frac{\sigma_n^\pm}{(1 - M \sigma_n^\pm)^2} |A_n^\pm|^2, \quad \text{onde :} \quad (4.5)$$

$$\sigma_n^\pm = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_r c_0}{\omega} \right)^2 (1 - M^2)}. \quad (4.6)$$

Essa expressão considera que os modos que se propagam na direção do escoamento tem índice + e os que se propagam contra tem índice –, portanto somente os últimos são considerados. Somando as potências correspondentes a todos os modos, tem-se a potência total do campo acústico no interior do duto.

Usando os casos nos quais o liner foi completamente coberto como referência, é possível calcular a perda por inserção ocasionada pelo tratamento acústico. A figura 12 mostra esse resultado para o primeiro conjunto de medições, no qual fez-se modificações cobrindo seletivamente regiões do liner, para a frequência correspondente à BPF de cada condição de operação:

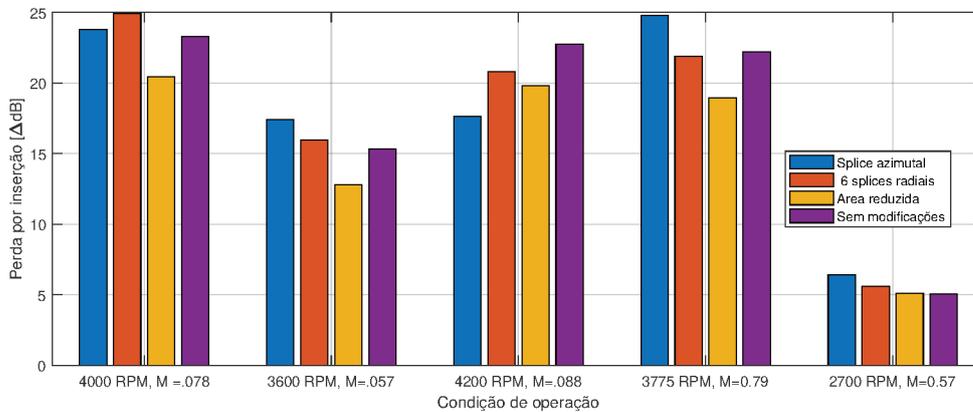


Figura 12 – Perda por inserção para as diferentes modificações no liner

Os resultados mostrados são a diferença entre o nível de potência no caso de parede rígida (liner totalmente coberto) e os casos correspondentes às demais modificações. Percebe-se que nas BPFs correspondentes às velocidades de rotação mais altas, o liner foi bastante efetivo na atenuação do ruído do rotor. Os números de Mach mostrados são o valor médio entre as medições realizadas nas mesmas condições de operação. Os casos de 4000 e 3600 RPM usam bloqueio de 25% e 50% na saída do duto, respectivamente, permitindo obter a mesma velocidade de escoamento médio com velocidades de rotação diferentes.

Observa-se que a introdução de *splices* azimuthais e radiais melhora a perda por inserção em quase todos os casos. Acredita-se que isso ocorre porque a presença dessas discontinuidades causam espalhamento das energias modais favorecendo modos que são melhor atenuados pelo liner. Para a modificação de área reduzida verificou-se, como era esperado, que a performance do liner foi pior do que no caso sem modificações, já que a única diferença entre esses casos é o comprimento da região tratada.

Para estimar rapidamente o efeito do liner em outras frequências além da BPF, pode-se comparar os espectros de pressão medidos por uma mesmo microfone para condições com e sem tratamento, como mostrado na figura 13. Esse são os espectros do primeiro microfone do arranjo, para os casos de parede rígida e liner sem modificações, com o rotor a 4000 RPM. É possível observar as componentes tonais presentes nas primeiras BPFs, e verificar que a atenuação do liner se concentra numa faixa de frequência em torno 1000 Hz, que foi a frequência para a qual ele foi projetado.

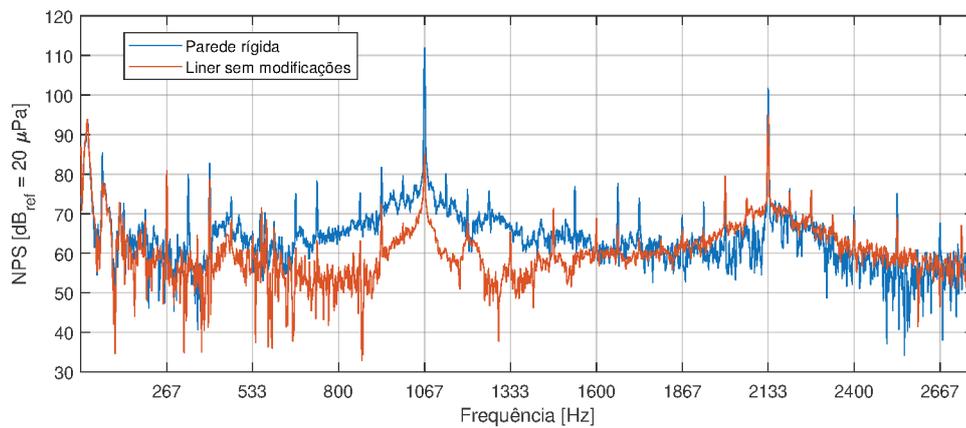


Figura 13 – Espectros de pressão para um microfone, nas condições de parede rígida e liner sem modificações.

O mesmo pós-processamento foi aplicada para os dados da segunda parte da campanha, na qual uma quantidade maior de velocidades do rotor foi testada para cada configuração de liner. Duas configurações foram usadas, referentes ao liner sem modificações e totalmente coberto (que equivale a parede rígida). A figura 14 mostra os resultados obtidos para esse caso.

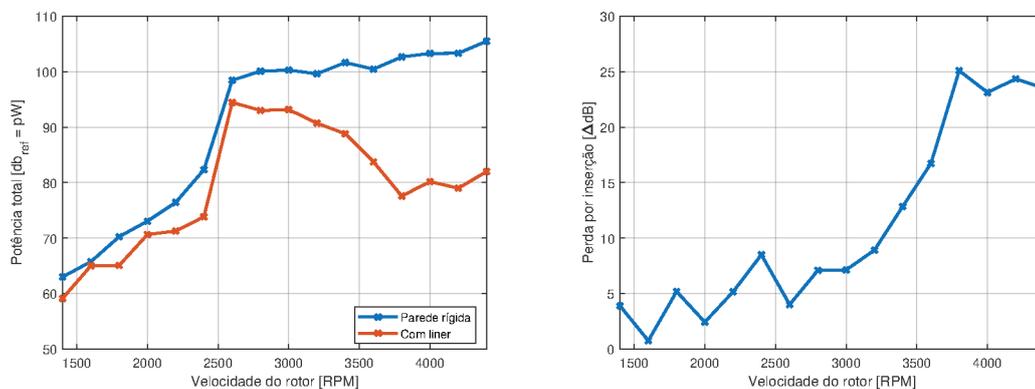


Figura 14 – Potência total (esquerda) e perda por inserção (direita) na BPF de cada velocidade de rotação

O nível de potência total do campo acústico é mostrado no gráfico da esquerda, para as medições com o liner totalmente coberto (parede rígida) e sem modificações. Essa potência é calculada na frequência correspondente à primeira BPF para cada velocidade do rotor. Na direita, mostra-se a diferença entre as duas curvas, que é a perda por inserção causada pela presença do liner. A máxima atenuação do liner ocorre em 3800 RPM, que corresponde a 1013,3 Hz. Os níveis de potência por modo são mostrados na figura 15 para essa condição, que foi a frequência para a qual o liner foi projetado (SPILLERE; BRAGA et al., 2019).

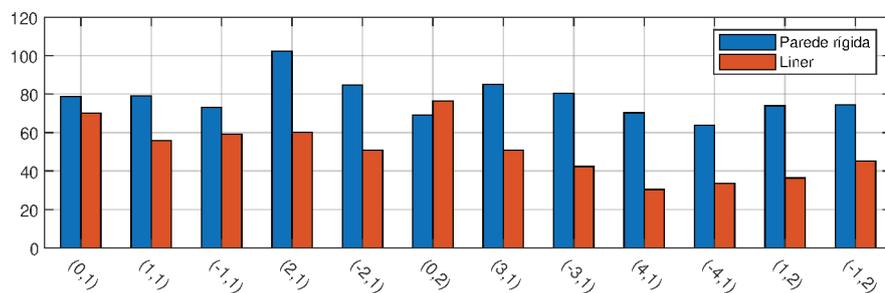


Figura 15 – Níveis de potência por modo para na BPF de maior atenuação, correspondente a 3800 RPM

Usando a regra de Tyler-Sofrin (equação 2.2) é possível prever que a configuração encontrada na bancada, com rotor de 16 pás e estator de 14 palhetas, resultará em um modo dominante com ordem radian $m = 2$. O resultado experimental mostrado acima confirma essa predição, na qual o modo (2, 1) tem nível de potência consideravelmente maior que os demais. Isso ocorreu em todas as medições de parede rígida nas quais esse modo é propagante na BPF, o que ocorre para velocidades do rotor a partir de 2200 RPM. Nas medições com parede tratada esse não é o caso, porque o liner é eficaz em atenuar esse modo.

Nas semanas subsequentes à realização do ensaio, o perfil da camada limite na região do rotor por medido por pelo estudante de mestrado Bernardo Rocamora (ROCAMORA JUNIOR, 2019), e o resultado obtido é mostrado na figura 16. Essa medição foi feita para três velocidades de rotação do rotor: 2000, 3000 e 4000 RPM. A partir desses dados, é possível estimar a espessura aproximada da camada limite, que é um parâmetro necessário para a condição de contorno de Brambley. Nas medições de 2000 e 3000 RPM, a espessura da camada limite é de aproximadamente 20 mm. Em 4000 RPM a medição foi realizada com menos pontos e não mostra uma tendência tão clara quanto nas outras duas condições, mas a espessura da camada limite parece ser consideravelmente menor.

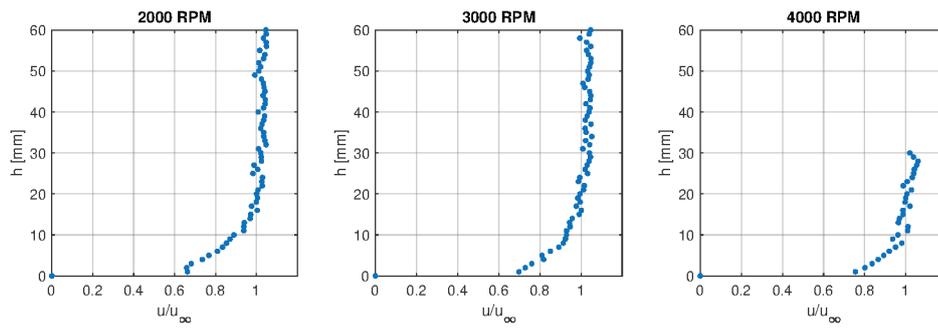


Figura 16 – Perfil de camada limite para velocidades de rotação do fan de 2000, 3000 e 4000 RPM

5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA RIG EESC

5.1 MODELO TRIDIMENSIONAL

Um modelo com geometria tridimensional representando o rig de fan EESC-USP foi criado usando o software ACTRAN TM, com o objetivo de simular os casos ensaiados experimentalmente e comparar as previsões numéricas com os resultados experimentais. Optou-se por usar uma geometria tridimensional para que as análises envolvendo diferentes tipos de splices no liner pudessem ser simuladas. A implementação da condição de contorno alternativa foi feita usando outro software e não está incluída nesse modelo.

Esse modelo é resolvido em duas etapas, com a primeira resolvendo o escoamento médio e a segunda calculando a propagação do campo acústico sobre esse campo médio, considerando efeitos convectivos. Essa análise será feita no domínio da frequência, especificamente na primeira BPF dos casos experimentais descritos no capítulo 4.

Para criar a geometria, considerou-se somente a região do duto que começa no plano do rotor e termina após o arranjo de microfones. Essa região inclui a transição no diâmetro do duto, que é 0,5 m na região próxima ao rotor, e 0,6 m onde o arranjo de microfones está instalado. A figura 17 mostra uma representação esquemática da região da bancada, com a região usada como domínio computacional delimitada pelo retângulo vermelho.

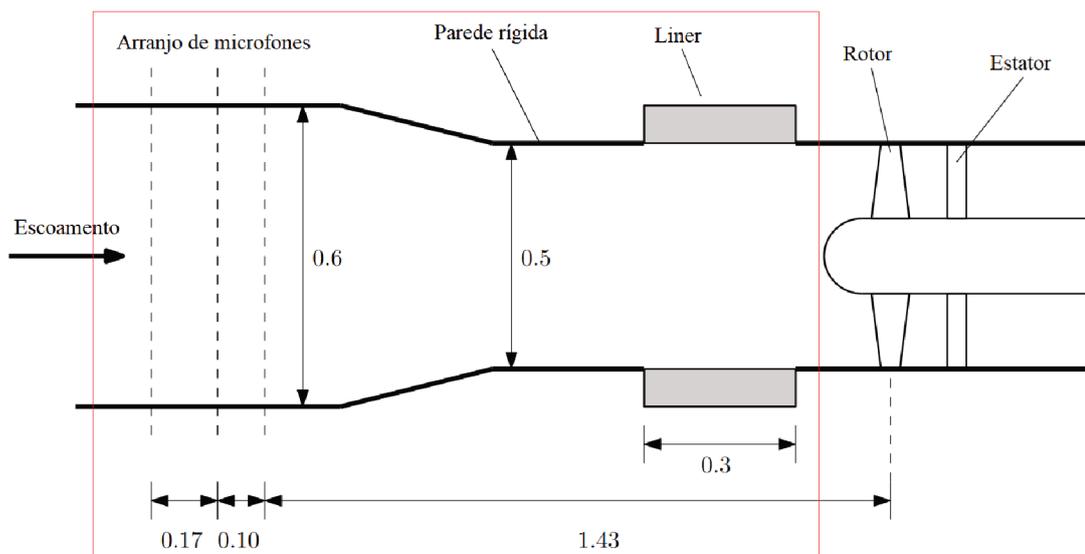


Figura 17 – Representação esquemática do rig de fan EESC-USP, com dimensões em metros (SPILLERE; BRAGA et al., 2019). A região usada como domínio computacional é o interior do retângulo em vermelho.

O escoamento médio é modelado como potencial, compressível e invíscido, que resulta

em dois graus de liberdade por nó: densidade e potencial de velocidade. Como condição de contorno, prescreve-se a velocidade normal na superfície que representa o plano do rotor, que é um dado que foi medido na campanha experimental. Na outra extremidade do duto impõe-se potencial de velocidade nulo, que é equivalente a prescrever que a velocidade do escoamento será normal a esse contorno, mas sem restringir o valor dessa velocidade, que será determinada no processo de solução. O resultado desse modelo é um arquivo que contém o campo de velocidades e densidades para cada ponto da malha, que será usado como entrada no modelo acústico.

O campo acústico usa o equacionamento já descrito no capítulo 3, mas sem a implementação da condição de contorno alternativa, que foi realizada em outro software. A geometria usada para esse modelo é mostrada na figura 18, com a malha exterior visível. A malha não é estruturada e usa elementos tetraédricos lineares com tamanho máximo de 0,01 m. Esse comprimento resulta em uma resolução de aproximadamente 28 elementos por comprimento de onda na primeira BPF para a velocidade máxima do rotor.

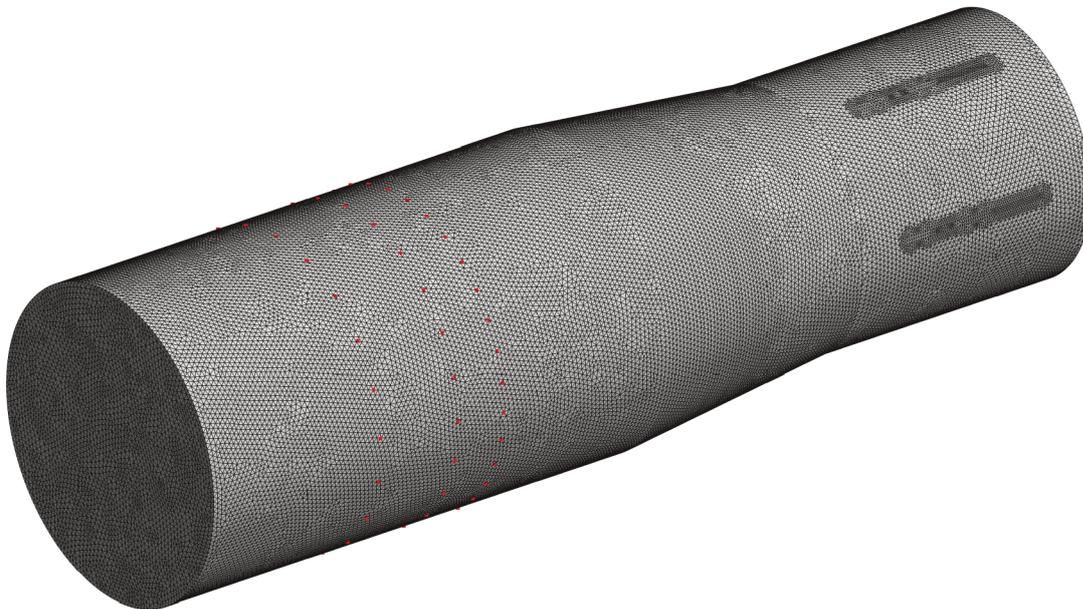


Figura 18 – Geometria e malha usada para representar o rig de fan EESC-USP.

Na área do liner, foram definidas várias superfícies independentes que podem ser combinadas para formar as diversas configurações que foram testadas na campanha experimental. A malha foi refinada nas regiões correspondentes às splices axiais, que possuem largura menor que o tamanho máximo de elemento usado no restante da malha. A região do liner é mostrada na figura 19.

Em ambas as terminações definiu-se acoplamentos modais de duto (*duct mode*

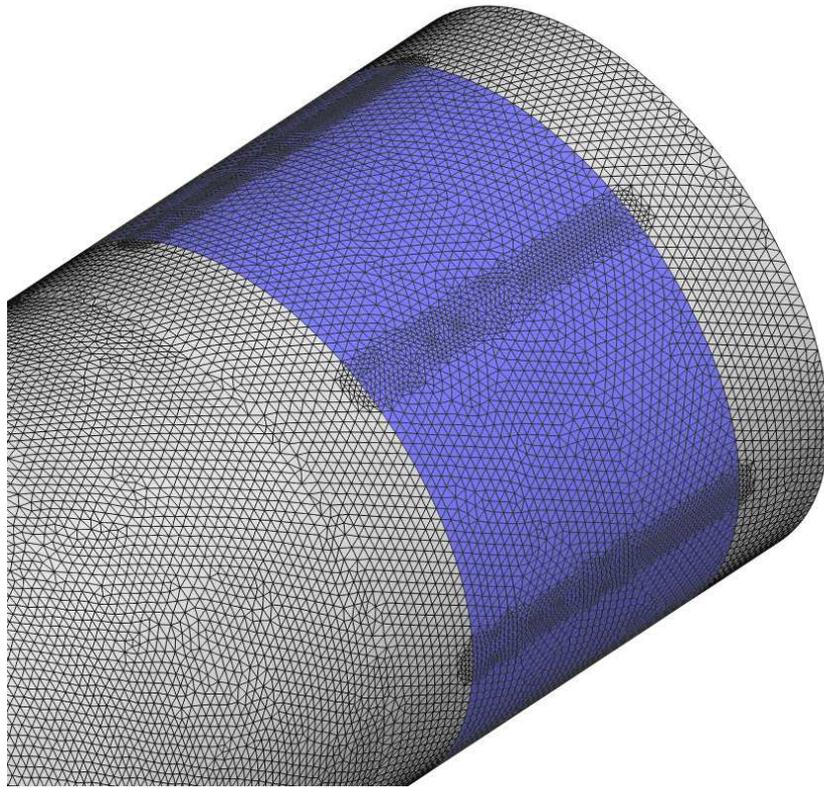


Figura 19 – Região da geometria onde a impedância é aplicada.

coupling), que é um recurso do ACTRAN TM que permite especificar o conteúdo modal no plano de terminação de um duto, através de um acoplamento do modelo numérico com uma solução modal analítica na interface em questão. No plano do rotor, os modos que se propagam para dentro do duto precisa ser especificada, já que funciona como a excitação acústica nesse modelo. Os modos que se propagam no sentido contrário não são previamente conhecidos e são deixados livres, e serão compostos por reflexões que ocorrerem na região do tratamento acústico e na região em que o raio é variável.

As amplitudes modais que caracterizaram a excitação serão obtidas posteriormente, usando os dados experimentais. Para resolver o modelo sem esses dados, aproveita-se da linearidade do equacionamento. Prescreve-se cada um dos modos propagantes no plano rotor individualmente com amplitude unitária, e obtém-se o campo acústico produzido por cada modo. Essa abordagem aumenta o custo computacional, já que o modelo precisa ser resolvido um número de vezes igual à quantidade de modos propagantes. No entanto, as soluções obtidas dessa forma podem ser combinadas linearmente para obter o campo acústico produzido por uma excitação qualquer, e também serão úteis para caracterizar a excitação no plano do rotor com base nos dados experimentais.

Na terminação próxima ao arranjo de microfones, usou-se um acoplamento modal de

duto para especificar que todos os modos que se propagam em direção ao rotor possuem amplitude zero, o que equivale a uma condição de não reflexão. Os modos que se propagam no sentido oposto não são conhecidos e serão parte da solução do modelo, dependendo na excitação aplicada e dos efeitos do liner e da geometria.

Um conjunto de pontos é definido na parede do duto em posições correspondentes aos microfones instalados no rig de fan. Armazenar o campo acústico completo produziria arquivos de resultados muito grandes, especialmente com o processo de solução modo a modo adotado, e optou-se por armazenar os dados de pressão acústica somente nesse arranjo de microfones virtuais. Além dessas pressões, os dados associados aos acoplamentos modais de duto foram salvos, incluindo as amplitudes dos modos que chegam na terminação anecoica próxima aos microfones e as amplitudes dos modos refletidos de volta para o plano do rotor.

5.1.1 Determinação da excitação

Para fazer predições que podem ser comparadas com os resultados experimentais é necessário conhecer a excitação produzida pelo rotor, na forma de amplitudes modais para cada um dos modos propagantes na seção transversal do rotor. Em um duto de seção transversal constante e parede rígida, as formas modais e a magnitude de suas amplitudes se mantêm constantes ao longo de sua propagação axial, e a fase dessas amplitudes varia harmonicamente com número de onda conhecido. Considerando um rotor instalado em um duto nessas condições, a excitação pode ser obtida diretamente via decomposição modal, bastando usar a posição axial do rotor como origem do sistema de coordenadas.

No rig de fan da EESC-USP, o conteúdo modal é conhecido na região de raio 0,3 m, onde o arranjo de microfones está instalado. O rotor encontra-se em outra parte do duto, com raio 0,25 m, e essas duas partes são conectadas por uma região na qual o raio do duto é variável. Não há uma forma trivial de relacionar os conteúdos modais nas duas regiões de raio constante, que estão sujeitas a velocidades de escoamento diferentes e suportam bases modais com parâmetros diferentes. Como o raio é maior na região dos microfones, essa seção sempre acomodará um número de modos maior ou igual ao número de modos acomodados na região do rotor.

Deseja-se conhecer o conteúdo modal na região do rotor, especificamente os modos que se propagam em direção à transição, passam pelo duto de raio variável e chegam

na região dos microfones, onde novamente podem ser descritos como modos. Para isso, é necessário saber como a propagação no duto de raio variável vai afetar cada um dos modos na região do rotor. Essa informação foi obtida usando o próprio modelo numérico já descrito.

Considerando condição de parede rígida na área do liner, prescreve-se no modelo uma excitação no plano do rotor composta por um único modo com amplitude unitária. Com o resultado obtido, é possível fazer uma decomposição modal usando os dados dos microfones virtuais, de forma idêntica ao que é feito para os dados experimentais, e obter as amplitudes modais no plano do primeiro anel de microfones. Essas amplitudes representam como a transição afeta o modo específico que está sendo excitado. Repetindo o procedimento para todos os modos, pode-se escrever uma equação matricial da forma:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^r \\ b_2^r \\ \vdots \\ b_n^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^R \\ b_2^R \\ \vdots \\ b_N^R \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Os vetores \mathbf{b}^r e \mathbf{b}^R contêm as amplitudes modais para os modos na região do rotor (raio r) e na região dos microfones (raio R), respectivamente. Quando somente o k -ésimo modo é excitado na região do rotor com amplitude unitária, tem-se somente um elemento não nulo em \mathbf{b}^r , $b_k^r = 1$, e a equação fica:

$$\begin{bmatrix} T_{1k} \\ T_{2k} \\ \vdots \\ T_{Nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{R,k} \\ b_2^{R,k} \\ \vdots \\ b_N^{R,k} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Assim, define-se a k -ésima coluna da matriz \mathbf{T} como o vetor de amplitudes modais $\mathbf{b}^{R,k}$ obtido no plano do primeiro anel de microfones, quando se excita somente o modo k no plano do rotor.

Como o equacionamento do sistema sendo considerado é linear, a equação obtida é válida e permite obter o conteúdo modal \mathbf{b}^R na região dos microfones quando uma excitação caracterizada pela base modal \mathbf{b}^r é aplicada na região do rotor. No entanto, deseja-se a informação no sentido contrário, no qual é conhecido e deseja-se \mathbf{b}^r , o que resulta em um sistema linear. Esse sistema é composto por n variáveis e N equações, onde n e N são a quantidade de modos propagantes nas regiões do rotor e dos microfones,

respectivamente. Como o raio na região dos microfones é maior, a base modal dessa região sempre conterá uma quantidade de modos igual ou maior que a base modal na região do rotor. Logo, esse sistema será determinado ou sobre-determinado, e pode ser usado em conjunto com as medições experimentais na condição de parede rígida para obtenção do conteúdo modal no plano do rotor.

Assumindo que a presença do liner não afeta o mecanismo de geração de ruído do rotor, a caracterização da fonte obtida usando a medição de parede rígida pode ser aplicada aos casos com parede tratada, e os resultados de atenuação do liner obtidos no modelo numérico podem ser comparados diretamente os resultados experimentais. Essas amplitudes modais também serão usadas no modelo desenvolvido usando o software COMSOL Multiphysics, no qual a condição de contorno alternativa foi implementada.

5.1.2 Resultados

Para replicar os casos ensaiados experimentalmente com a maior fidelidade possível, escreveu-se uma rotina para a configuração dos modelos. Um modelo-base foi criado na ACTRAN VI e modificado num editor de texto, trocando os parâmetros variáveis do modelo por identificadores que serão substituídos programaticamente. A rotina consulta a matriz de ensaios para obter dados de temperatura ambiente e umidade do ar, a partir dos quais a densidade e velocidade do som são calculados. O mesmo é feito para as medições de pressão dinâmica, que permitem calcular a velocidade média do escoamento no plano do rotor e no plano dos microfones, e para a velocidade do rotor, que determina frequência da análise. A matriz de ensaios também contém um campo que identifica as modificações que foram realizadas no liner, que é usado para aplicar a condição de contorno de impedância nas regiões corretas. O valor de impedância do liner é calculado com base na frequência, através de interpolação dos dados em uma tabela de impedâncias, que pode ser obtida de modelos semi-empíricos ou experimentalmente.

A rotina cria uma cópia do modelo-base para cada condição experimental, substitui os parâmetros de acordo com a matriz de ensaios e roda o modelo. Como mencionado anteriormente, o campo acústico é calculado separadamente para cada um dos modos de excitação, considerando amplitude unitária. Com esse resultado, pode-se realizar o procedimento de caracterização da fonte. A matriz de transferência entre bases modais é computada com base no resultado do modelo numérico com excitações unitárias, e o

conteúdo modal na região dos microfones é obtido via decomposição modal usando os espectros de pressão experimentais. Com essas informações, o sistema linear que fornece as amplitudes modais no plano do rotor é resolvido.

Com as amplitudes modais no plano do rotor conhecidas, é possível combinar linearmente as soluções com excitação unitária, ponderando cada uma delas pela amplitude do modo sendo excitado. Essa composição é feita para as pressões nos pontos correspondentes aos microfones, para permitir que o mesmo pós-processamento dos dados experimentais possa ser aplicado. Esse procedimento de composição só produz resultados interessante nos casos com liner, já que os casos experimentais de parede rígida foram usados para determinar a excitação e necessariamente terão boa concordância.

A geometria tridimensional permitiu simular as diferentes modificações realizadas no liner. Para essa simulação, usou-se valores de impedância obtidos do método semi-empírico de Kooi-Sarin (KOOI; SARIN, 1981), que estima a impedância com base nos parâmetros geométricos do liner. A implementação desse método desenvolvida por André Spillere foi utilizada para obter os valores de impedância, que são mostrados na tabela 4. As perdas por inserção experimental e prevista numericamente são comparadas na figura 20. Em geral, o modelo superestimou a perda por inserção do liner, especialmente nas duas primeiras condições, que usam a placa de restrição para reduzir a velocidade do escoamento. Nas três condições sem bloqueio (4200, 3775 e 2700 RPM) a predição numérica é razoável, mas não capturou o efeito das modificações.

RPM	BPF [Hz]	Impedância [-]
4000	1066.7	0.4640-0.6827i
3600	960	0.3856-0.8872i
4200	1120	0.5146-0.5930i
3775	1006.7	0.4171-0.7940i
2700	720	0.2675-1.5281i

Tabela 4 – Valores de impedância considerados nas predições com diferentes modificações no liner.

Uma possível explicação para a discrepância entre o resultado experimental e a predição numérica nos casos com bloqueio do escoamento é que a presença das placas de restrição de área na saída do duto tenha modificado as variáveis do campo médio de uma forma que não foi levada em conta. Nos casos sem bloqueio a predição numérica erra por no máximo 4 dB, capturando bem o efeito do liner, mas não o das modificações.

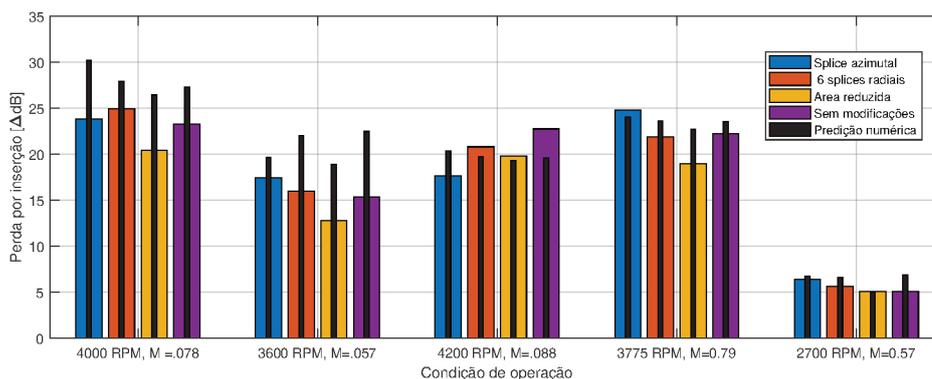


Figura 20 – Perda por inserção experimental para as diversas modificações no liner, com a predição numérica obtida do modelo sobreposta em preto

O valor da impedância é uma possível fonte de incertezas nesse modelo, e a simulação dos casos experimentais com variação paramétrica da velocidade do rotor foi realizada considerando impedâncias obtidas de diferentes formas. Além da impedância obtida de um modelo semi-empírico, foram usadas impedâncias medidas experimentalmente. Essas medições foram realizadas na bancada de medição de impedância do LVA, usando uma amostra plana de liner construída com os mesmos parâmetros geométricos que o liner ensaiado na bancada de fan da EESC-USP.

Essa medição pode ser feita com a fonte acústica a montante ou a jusante do liner. Na bancada de ruído de fan, a fonte fica a jusante do liner, mas os dados experimentais para as duas direções foram usados na simulação. Essa medição de impedância foi feita por Lucas Bonomo, e as impedâncias obtidas via modelo semi-empírico foram calculadas por André Spillere, usando o modelo de Kooi-Sarin (KOOI; SARIN, 1981).

Para verificar qual dos modelos de impedância se aproxima mais do comportamento experimental, comparou-se a potência total do campo acústico nas condições com liner para os casos numéricos e experimental. Esse resultado é mostrado na figura 21, juntamente com a perda por inserção prevista usando cada um dos modelos de impedância.

O resultado usando a impedância medida experimentalmente com a fonte a jusante do liner produziu um campo acústico com potência mais próxima do medido experimentalmente. Os resultados usando as impedâncias experimentais não estão disponíveis nas BPFs dos casos com velocidade de rotação menor que 2000 RPM, devido a uma limitação da bancada de medição de impedância não foi possível obter essas impedâncias experimentais. As predições numéricas apresentam boa concordância com os resultados experimentais e capturam bem a tendência da curva de perda por inserção, exceto nas condições acima de

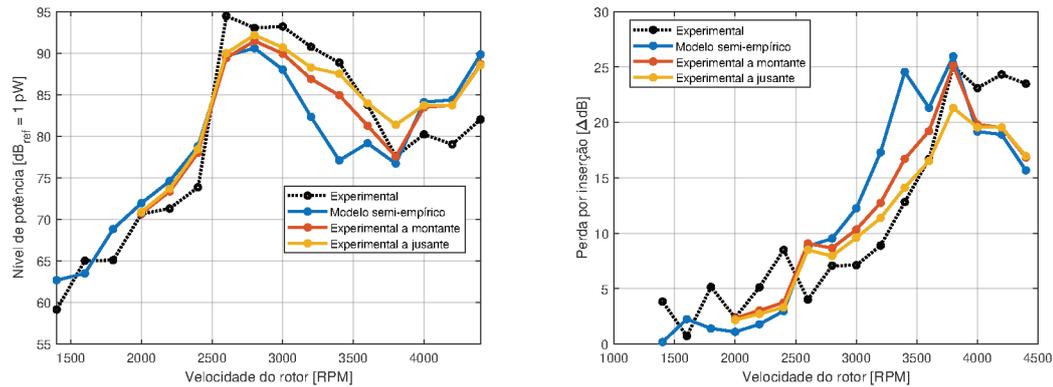


Figura 21 – Potência total do conteúdo modal (esquerda) e perda por inserção do liner (direita), para diferentes velocidades do rotor e modelos de impedância

4000 RPM, onde todos os modelos de impedância subestimam o resultado.

5.2 MODELO BIDIMENSIONAL AXISSIMÉTRICO

Um segundo modelo, também representando o rig de fan EESC-USP, foi criado usando o software COMSOL Multiphysics. Esse software de elementos finitos permite que o equacionamento resolvido seja modificado pelo usuário, o que viabilizou a implementação da condição de contorno modificada para impedância. O principal objetivo desse modelo é realizar predições de atenuação do liner usando essa condição de contorno alternativa. Comparando essas predições com dados experimentais e com predições usando a condição de Ingard-Myers, será possível analisar se essa condição de contorno modificada melhora a concordância do modelo numérico com os dados experimentais.

O equacionamento e as condições de contorno aplicadas são iguais às usadas no modelo tridimensional com algumas exceções. O COMSOL Multiphysics não possui uma interface de acoplamento modal como a do ACTRAN, e a excitação e a condição de não reflexão precisam ser modeladas de outra forma. A condição de não reflexão é obtida adicionando uma região de PML (*Perfectly Matched Layers*) ao domínio computacional nas regiões onde deseja-se esse comportamento. Isso é feito nas duas terminações do duto. A figura 22 mostra a geometria usada.

Para a aplicar a excitação, os modos propagantes são computados numericamente em um etapa preliminar. Como o modelo é axissimétrico a ordem azimutal m é um parâmetro de entrada, e só é necessário calcular as formas modais na direção radial. Para identificar a ordem radial de cada um dos modos computados numericamente, compara-se

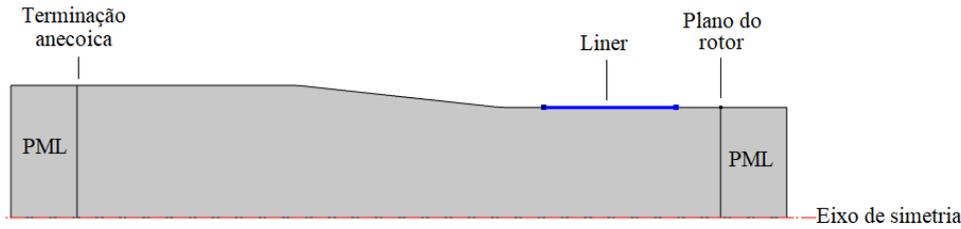


Figura 22 – Geometria para o modelo axissimétrico do rig de fan EESC-USP

os autovalores numéricos com os números de onda de cada modo, que podem ser obtidos conforme descrito no capítulo 3. Cada forma modal obtida numericamente pode então ser associado à um modo (m, n) , e usada para prescrever uma condição de contorno de no plano do rotor. A condição usada impõe um fluxo de massa normal ao contorno, que equivale a prescrever a velocidade normal do campo acústico nessa região.

A abordagem de calcular os campos acústicos para cada modo com excitação unitária e combiná-los no pós-processamento é usada, como feito no modelo tridimensional, mas nesse caso não usou-se as posições dos microfones na bancada, já que numa geometria axissimétrica o arranjo experimental corresponderia a somente 3 microfones. Ao invés disso, computou-se a potência acústica axial na terminação anecoica do duto. Esse dado não permite conhecer o conteúdo modal na região dos microfones, mas considerou-se que a redução na potência acústica causada pelo liner é um bom parâmetro de análise para esse caso, e é possível calcular essa potência para qualquer excitação usando uma combinação linear dos resultados obtidos.

A malha para esse caso usa o mesmo tamanho de elementos máximo, de 0,01 m, mas com elementos de ordem cúbica, por que a condição de contorno modificada requer derivadas segundas da variável sendo resolvida, e elementos de ordem mais alta permite o cálculo dessas derivadas com mais precisão. Os elementos que compõem a maior parte da malha são triangulares e ela não é estruturada, exceto na região das PMLs, onde use-se uma malha estruturada formada por quadriláteros. O comprimento dessas regiões de PML e o número de camadas de elementos foram aumentados gradativamente até que a variação desses parâmetros não causassem alterações na solução do modelo.

5.2.1 Resultados

O procedimento de solução foi semelhante ao realizado para o modelo tridimensional, resolvendo o campo acústico para cada um dos modos propagantes individualmente e

de acordo com os parâmetros da matriz de ensaios, com o auxílio de uma rotina para configurar o modelo, executá-lo e extrair os resultados relevantes. Nesse caso, registrou-se somente a potência total transmitida para a região do duto no qual o arranjo de microfones está instalado. Como a potência prescrita para a fonte é conhecida, esses resultados podem ser compostos linearmente para obter o campo acústico resultante. As potências corretas para os modos de excitação podem ser obtidas a partir das amplitudes desses modos, que já foram calculadas a partir dos dados numéricos com auxílio de uma simulação do caso de parede rígida, como descrito na seção anterior.

Após encontrar os fatores que devem ser multiplicados pela potência de excitação no modelo para que obtenha-se a potência correta, esses mesmos fatores são usados para ponderar as potências transmitidas e compor linearmente o resultado desejado. O procedimento é semelhante ao utilizado para ponderar as bases modais no modelo tridimensional. A figura 23 mostra o resultado obtido, e também a perda por inserção calculada com base na simulação de parede rígida. Nesses resultados, a condição de contorno modificada usa uma espessura de camada limite δ igual a 8% do raio do duto, estimada a partir das medições experimentais do perfil da camada limite.

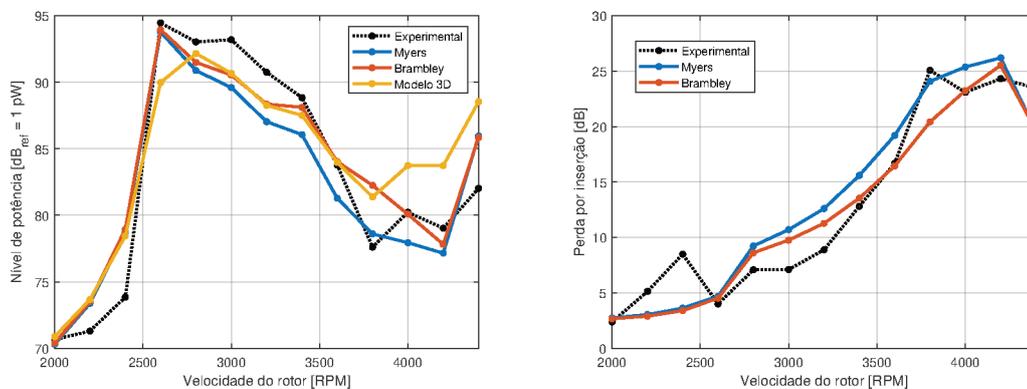


Figura 23 – Potência total (esquerda) e perda por inserção (direita) previstas pelo modelo axissimétrico, incluindo a implementação da condição de contorno modificada

A potência total obtida nos modelos axissimétrico e tridimensional foi consideravelmente diferente. A principal diferença entre esses modelos é a presença de splices no modelo tridimensional que não podem ser replicadas no caso axissimétrico, podendo ser essa a causa dessa discrepância. As duas condições de contorno produziram resultados consideravelmente diferentes, com a condição de contorno de Myers prevendo uma atenuação maior que a condição de contorno de Brambley.

O valor de 8% considerado para espessura da camada limite é bastante alto. A

derivação da condição de contorno de Brambley assume que essa espessura adimensional é pequena, e é possível que esse valor elevado de espessura viole essa hipótese. Para verificar o efeito dessa variável na predição, simulou-se novamente o problema considerando uma espessura de 5%. Além dessa variável, também deseja-se analisar o efeito de incluir ou não a integral na linha que contorna a região tratada. Os resultados dessas duas análises são mostrados na figura 24

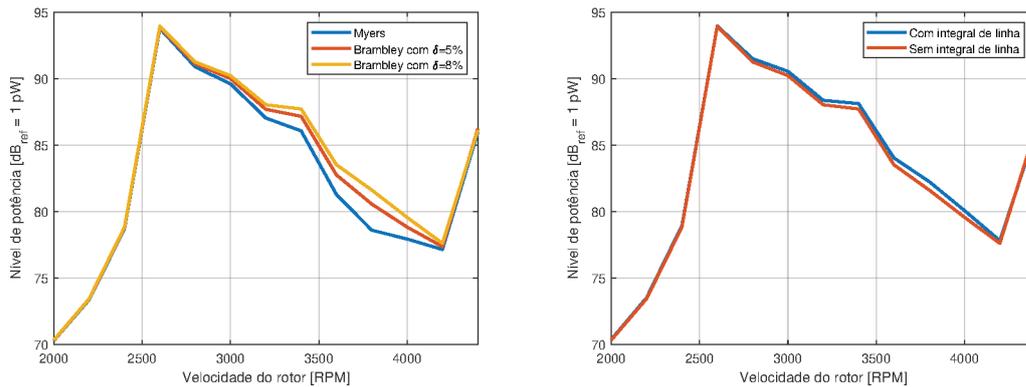


Figura 24 – Efeito da espessura de camada limite (esquerda) e da integral de linha (direita) no resultado obtido usando a condição de contorno de Brambley

A espessura da camada limite afetou os resultados somente para os casos com velocidade de rotação entre 2800 a 4000 RPM. Nas predições incluindo ou não a integral de linha o efeito observado é mínimo, mas se concentra na mesma faixa de frequências afetada pela espessura da camada limite.

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM CASO REAL

Numa aplicação real, o liner está sujeito a condições de operação diferentes das utilizadas na campanha experimental na bancada da EESC-USP. Com o fan operando em velocidades de rotação mais altas e instalado num duto de raio maior, a quantidade de modos propagantes aumenta consideravelmente. Modos de ordem azimutal mais altas passam a ser propagantes, e esses modos tendem a ser mais afetados pelo liner por possuírem uma forma modal que concentra a amplitude na região próxima da parede.

Para testar o efeito da condição de contorno modificada numa aplicação mais próxima da realizada, desenvolveu-se um modelo numérico para predição do ruído irradiado pela entrada de um motor aeronáutico. O objetivo é prever como o tratamento acústico afeta o ruído irradiado para o campo distante na BPF. Esse problema é resolvido em duas partes, e a primeira é obter o campo fluidodinâmico médio no interior do motor e nos seus arredores. Considera-se o caso da aeronave em voo, no qual prescreve-se um número de Mach para o escoamento no interior do duto e outro para o ambiente externo. Com esse resultado, a segunda parte é resolver o campo acústico, levando em conta a convecção causada pelo campo médio. Esse procedimento, que será descrito detalhadamente a seguir, é baseado na metodologia usada na indústria para simulações desse tipo com o software ACTRAN TM (SUGIMOTO et al., 2013; MUSTAFI, 2013), e foi descrita por um representante da *Free Field Technologies* em um workshop lecionado no LVA-UFSC. Com algumas adaptações, é possível reproduzir essa modelagem no COMSOL Multiphysics e verificar o efeito da condição de contorno modificada em um caso mais próxima de uma aplicação real.

Uma geometria típica de um motor de aeronave foi usada para criar um modelo que replica as condições de operação encontradas numa aplicação real. Uma geometria axissimétrica típica de motor de aeronave foi obtida da literatura (MUSTAFI, 2013), especificada como duas curvas que representam o contorno da nacele e do spinner. Com base nessas duas curvas construiu-se o restante do domínio computacional, formado pelo ar contido no interior da nacele e uma região exterior arbitrária, que foi definida de acordo com os requisitos do modelo.

A nacele considerada possui raio de 1,2m no plano do rotor. O spinner é um componente do motor que cobre a região central do fan, para produzir um contorno suave e reduzir o arrasto aerodinâmico. A inclusão desse componente no modelo resulta numa seção anular, com raio interno de 0,36 m no plano do fan. Essa seção transversal anular

acomodará um conjunto de modos distinto do considerado nos demais casos, onde o plano de excitação era circular, mas é possível obter resultados analíticos também para caso.

Para calcular o campo de escoamento médio, deseja-se prescrever velocidades conhecidas para o plano do fan e para o ambiente externo, de forma a considerar efeitos da aeronave em condição de voo. O domínio computacional mais adequado para aplicar essas condições possui contorno externo retangular, como mostrado na figura 25. Na região azul aplica-se a velocidade do escoamento produzido pelo fan, e na região verde a velocidade do meio externo, que corresponde à velocidade de deslocamento da aeronave. Na região laranja considera-se potencial de velocidade igual a zero, e a linha tracejada vermelha é o eixo de simetria axial. Os demais contornos são impérvios ao escoamento. A equacionamento usado considera o escoamento potencial, invíscido e compressível.

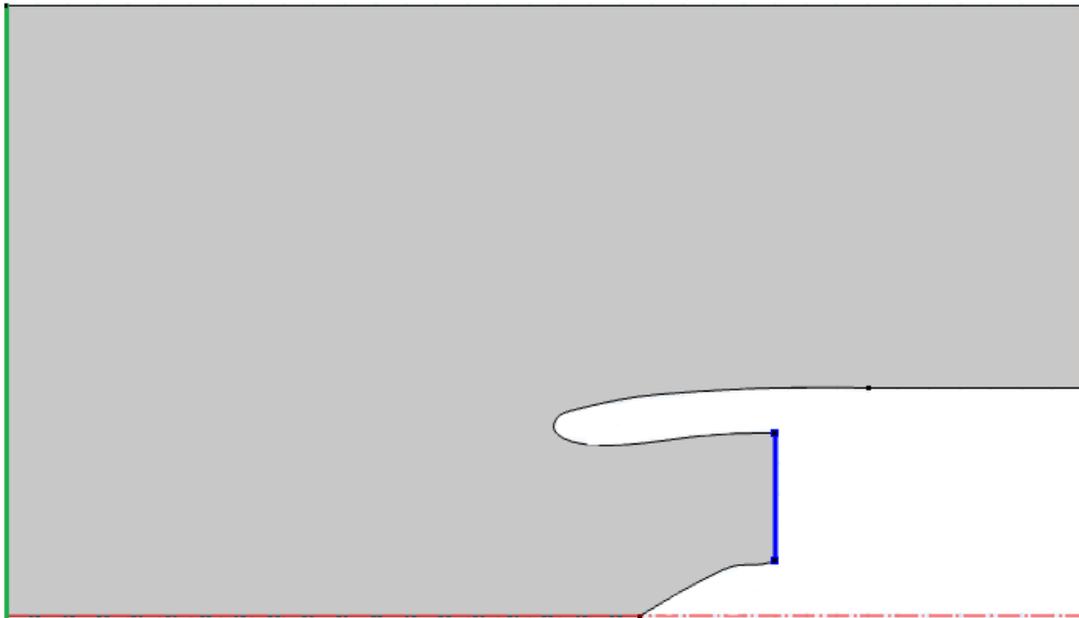


Figura 25 – Geometria do domínio computacional para simulação do escoamento médio

Na simulação do campo acústico, deseja-se obter valores de pressão no campo distante, e uma condição de não reflexão será necessária para simular o efeito de propagação em campo livre. Essa condição é implementada novamente usando uma PML, que precisará ser esférica para absorver o campo acústico em todas as direções. Esses requisitos diferentes para o domínio computacional de cada uma das etapas da simulação exigiram que geometrias diferentes fossem usadas em cada etapa. A geometria usada para computar o campo acústico é mostrada na figura 26. As regiões de PML são indicadas em azul, e o contorno que representa a região tratada em verde. A linha fina tracejada em vermelho é o eixo de simetria axial. Esse domínio computacional precisa estar contido no domínio usado para o

cálculo do escoamento, caso contrário haverá regiões do domínio acústico nas quais dados do escoamento médio não estão disponíveis e as equações não podem ser resolvidas.

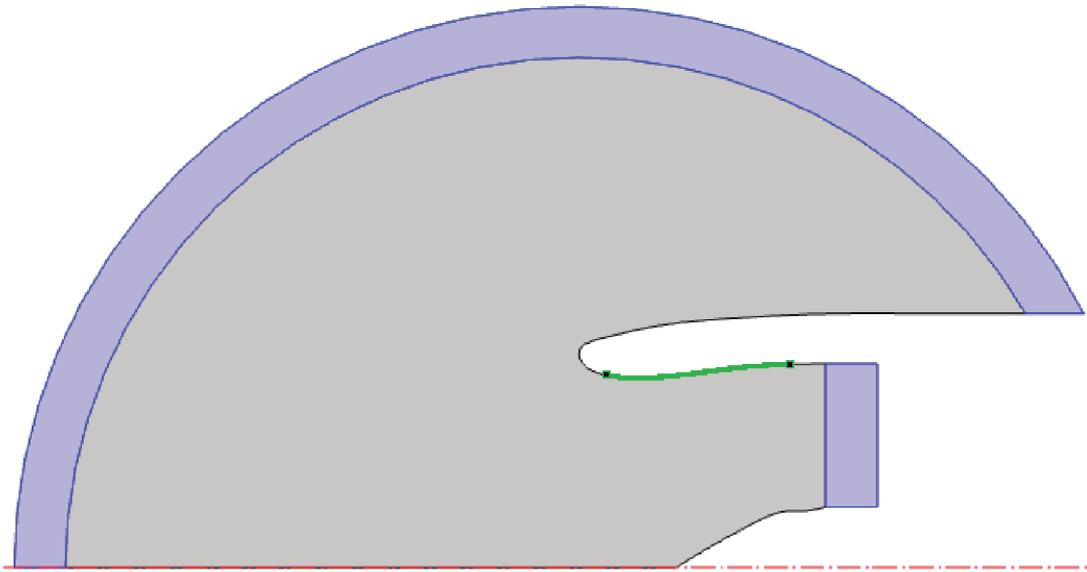


Figura 26 – Geometria do domínio computacional para simulação do campo acústico

A condição de *sideline* foi escolhida para essa simulação, que corresponde à decolagem da aeronave e é a situação na qual o fan opera em maior velocidade. Nessa condição, tem-se número de Mach igual a 0,55 para o escoamento no plano do fan, e igual a 0,25 para o escoamento externo à nacele. Considera-se que o fan possui 24 pás e opera em 3250 RPM, resultando em uma primeira BPF de 1300 Hz (MUSTAFAI, 2013). Esses parâmetros resultam numa velocidade de ponta de pá supersônica, garantindo a presença de um modo dominante com ordem azimutal igual ao número de pás. Para a condição de contorno de Brambley, considerou-se uma camada limite com espessura de 1% do raio do duto (GABARD, 2016).

Seguindo a abordagem de Mustafi, a fonte é modelada usando uma soma dos modos propagantes, todos com a mesma energia, exceto para o modo dominante. A energia desse modo é algumas ordens de grandeza maior, mas o trabalho não especifica um valor exato. Com base nos gráficos, inferiu-se que o nível de pressão desse modo está aproximadamente 40 dB acima dos demais, correspondente a uma amplitude de pressão 100 vezes maior, e usou-se esse valor. O valor considerado para a impedância também não foi publicado, e escolheu-se impedância usada por Acosta (ACOSTA, 2015) em um trabalho análogo, que foi de $Z = 2,7 - 2,57i$, em forma adimensional.

Como mencionado anteriormente, tem-se uma seção transversal anular no plano do

fan, devido à presença do spinner, e a base modal acomodada nessa seção é diferente da que foi usada nos outros modelos. Num duto circular, considerou-se apenas a equação de Bessel do primeiro tipo $J_m(r)$ na obtenção de uma solução, já que a função de Bessel do segundo tipo $Y_m(r)$, apesar de também ser solução da equação diferencial, possui uma singularidade em $r = 0$. Isso não é um problema no caso de um duto anular porque o campo acústico é calculado entre os raios interno e externo, e deve-se supor que a solução é uma combinação linear de J_m e Y_m . Os possíveis números de onda são obtidos aplicando uma condição de contorno nas duas paredes do duto. Supondo uma solução da forma:

$$\phi(r, \theta, z) = (AJ_m(\alpha r) + BY_m(\alpha r))e^{-ikz - im\theta}, \quad (6.1)$$

e considerando condição de parede rígida nos raios interno R_i e externo R_o , chega-se no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} J'_m(\alpha R_o) & Y'_m(\alpha R_o) \\ J'_m(\alpha R_i) & Y'_m(\alpha R_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Para que existam soluções não triviais, é necessário que o determinante da matriz seja nulo. Esse requisito fornece a equação necessária para calcular os números de onda e obter a base modal que será usada para prescrever a excitação no plano do fan.

Na malha do domínio acústico usou-se um tamanho máximo de elemento de 0,01 m, que corresponde a uma resolução de 26 elementos por comprimento de onda na BPF sendo estudada, e elementos de terceira ordem são usados para melhorar a precisão de derivadas numéricas das quais a condição de contorno modificada depende. O mesmo tamanho de elemento é usado para a malha do campo de escoamento médio, mas com elementos quadráticos. Como a quantidade de elementos nessas malhas dificulta sua visualização completa, a figura 27 mostra a malha acústica somente na região da nacele. A malha fluidodinâmica usa o mesmo algoritmo de geração e tamanho mínimo de elemento, e é semelhante. No total, a malha para solução do escoamento médio possui aproximadamente 800.000 elementos, e a acústica cerca de 300.000 elementos.

6.1 RESULTADOS

A figura 28 mostra o campo de velocidade na região próxima da nacele, obtido na etapa de simulação do campo fluidodinâmico médio. Fora dessa região, a velocidade de escoamento praticamente não varia. Os valores de velocidade, pressão e densidade

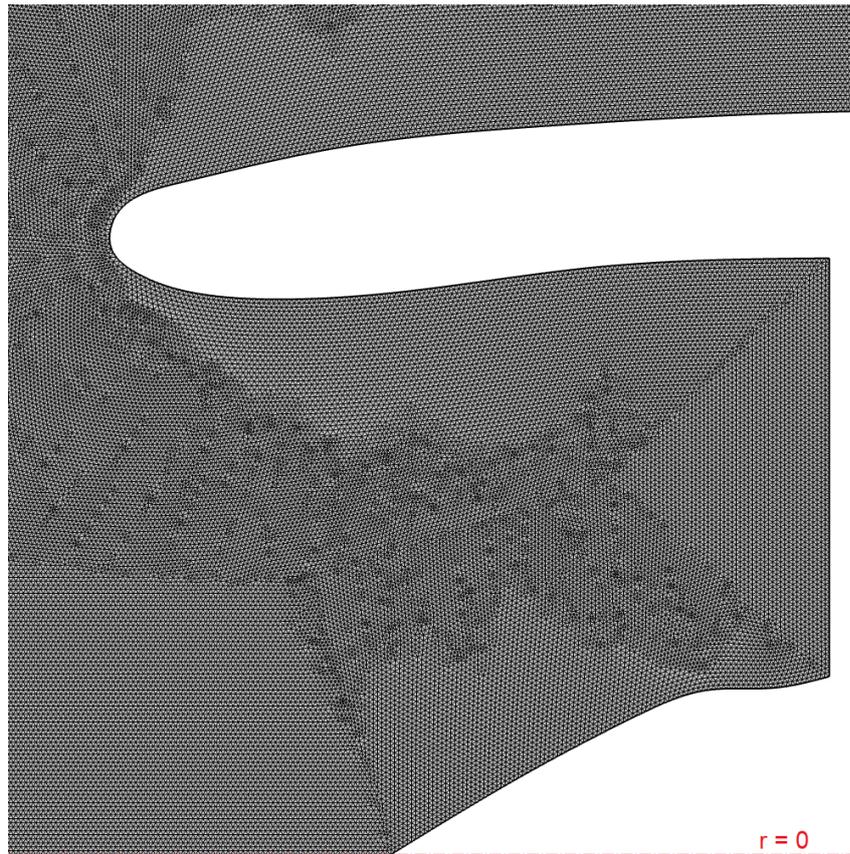


Figura 27 – Malha para solução do campo acústico na região da nacele

obtidos dessa solução são atribuídos ao nós da malha acústica usando um procedimento de interpolação.

A simulação acústica segue o mesmo procedimento usada para o modelo do rig de fan EESC-USP: excitar cada modo separadamente e combiná-los em pós-processamento. Nesse caso, o raio do duto e a velocidade de rotação do fan são consideravelmente maiores, resultando num total de 291 modos propagantes. Nesse modelo axissimétrico os modos com ordem azimutal m negativa fornecerão o mesmo resultado que modo correspondente com m positivo e portanto não precisam ser resolvidos, reduzindo esse total para 149. Esse procedimento foi automatizado usando uma rotina para configuração dos parâmetros, solução e extração dos resultados de interesse, que nesse caso são as pressões no campo distante.

As pressões obtidas em cada caso foram normalizadas pela potência do modo de excitação, e podem então ser combinadas conforme a modelagem de fonte já descrito, tratando somente o modo dominante (24,1) de forma diferente, que é ponderado por um fator muito maior. Adicionalmente, assume-se que essas pressões são não-correlacionadas, já que nenhuma informação de fase entre os modos está disponível. O campo acústico

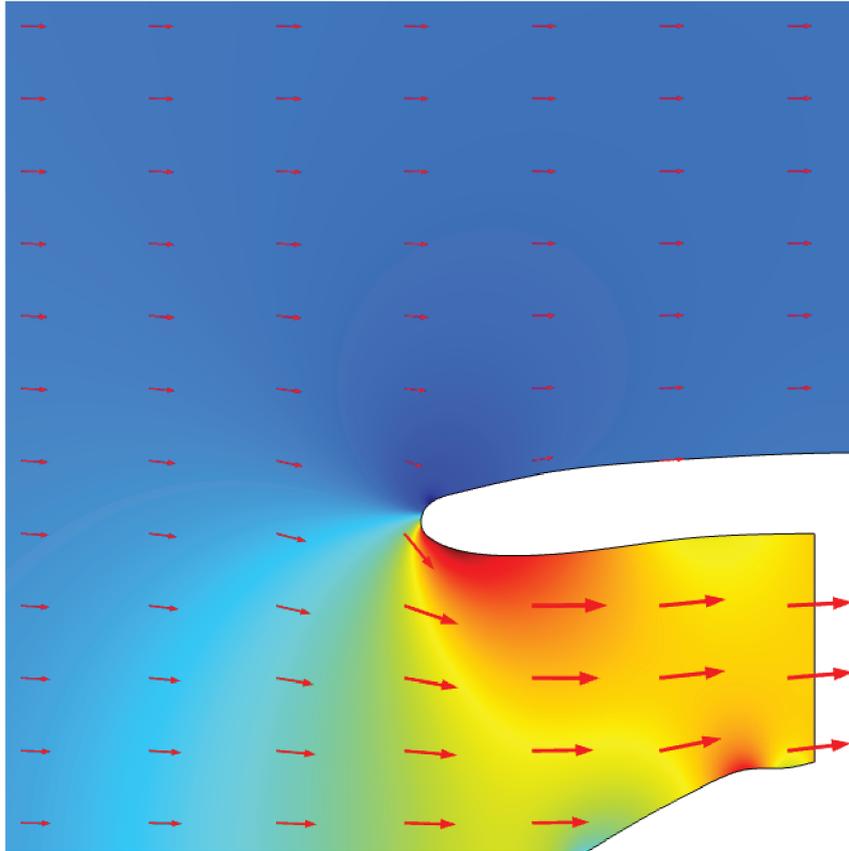


Figura 28 – Campo médio de velocidade na região da nacele.

resultante é mostrado na figura 29, considerando parede rígida e as duas condições de contorno de impedância. A perda por transmissão calculada a partir desses dados também é mostrada.

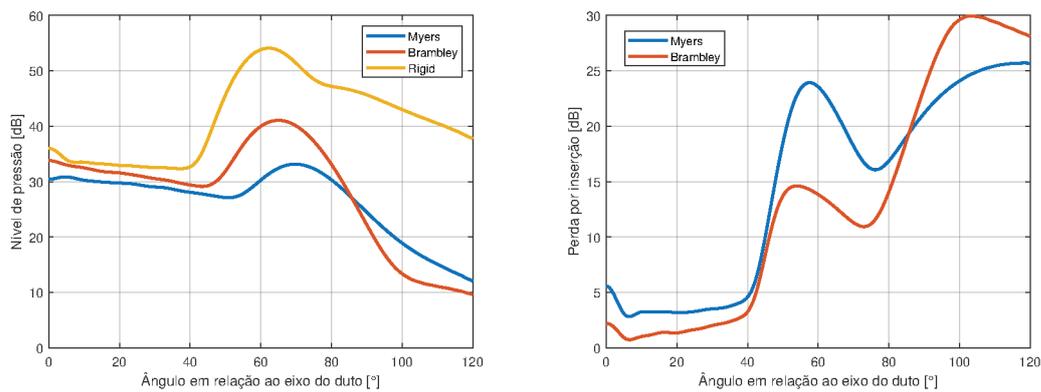


Figura 29 – Diretividade no campo distante para parede rígida e as duas condições de impedância (esquerda), e a perda por inserção correspondente (direita)

Observa-se uma diferença razoável entre as predições com diferentes condições de contorno, com a condição modificada produzindo uma atenuação menor na região entre 50° e 80° , e ligeiramente maior acima de 80° . Os parâmetros escolhidos para essa simulação são

análogos aos que Mustafi usou para validar um modelo numérico, comparando-o com dados experimentais coletados na bancada de ruído de fan do AneCom (ACHUNCHE et al., 2009). O resultado obtido por Mustafi (MUSTAFI, 2013) para essa validação é mostrado na figura 30. As fontes A e B são excitações prescritas usando energias modais diferentes. A fonte A usa uma representação fiel do conteúdo modal medido experimentalmente, enquanto a fonte B é a abordagem simplificada que foi usada neste trabalho, considerando energia igual para todos os modos exceto o dominante.

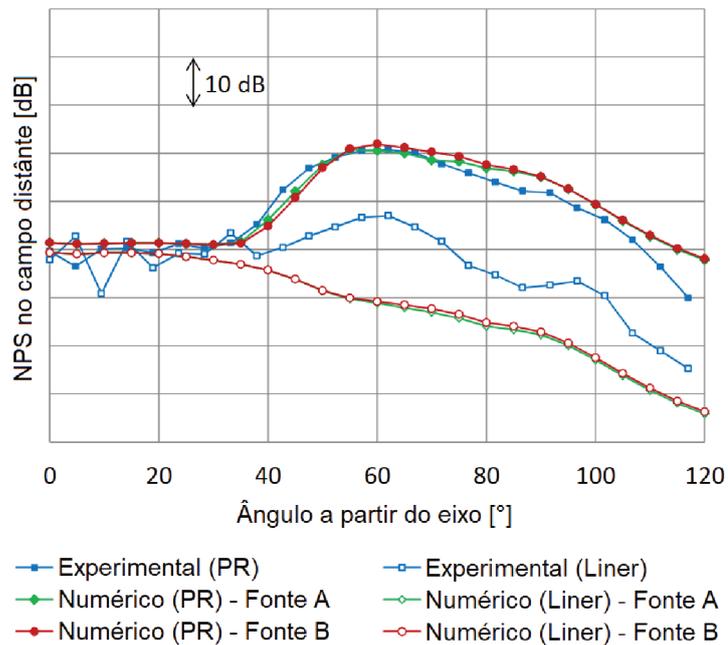


Figura 30 – Diretividade em campo distante para a bancada do AneCom, que é uma geometria diferente mas com condições de operação análogas (MUSTAFI, 2013)

Apesar das geometrias diferentes, é possível observar um comportamento semelhante para as curvas nos dois casos, especialmente para parede rígida, onde a curva é controlada quase totalmente pelo modo dominante. Na região próxima de 60°, a medição com liner apresenta um comportamento que não foi bem capturado no modelo de Mustafi (que usa a implementação de Myers do ACTRAN), mas a condição de contorno modificada parece capturar essa tendência.

7 CONCLUSÕES

O problema de como representar a impedância acústica na presença de um escoamento rasante foi o principal foco deste trabalho. Uma revisão da literatura científica mostrou que a abordagem tradicional usada em softwares comerciais e na indústria, chamada condição de Ingard-Myers, apresenta problemas. Esses problemas são decorrentes de essa condição ter sido formulada sem preocupação com o efeito da camada limite, e ser equivalente a considerar uma camada limite de espessura infinitesimal. Vários autores propuseram formas alternativas de realizar essa representação.

Dentre as condições de contorno que foram encontradas na literatura, concluiu-se que a mais apropriada para implementação no método de elementos finitos é a proposta por Brambley, por ser a única que apresenta uma descrição matemática direta do fenômeno sendo modelado. Outras condições encontradas são baseadas na inclusão de parâmetros arbitrários ou na satisfação de critérios de estabilidade. A condição escolhida, por sua vez, é uma modificação da condição de Ingard-Myers, derivada usando uma expansão assintótica da equação de Pridmore-Brown, e resulta numa descrição física dos efeitos da impedância e da camada limite, formulada em termos de equações diferenciais parciais adequadas para implementação em FEM.

Uma formulação fraca da equação na qual se deseja aplicar a condição de contorno foi desenvolvida seguindo o formalismo matemático de elementos finitos. Esse procedimento consiste em multiplicar a equação diferencial por uma função-teste arbitrária e integrar a expressão resultante no volume que representa o domínio computacional. Através de manipulações algébricas, essa integral no volume pode ser separada em duas integrais, uma no domínio computacional e outra apenas no seu contorno. A integral no contorno permite que o equacionamento seja modificado somente nessa região do domínio computacional, o que é ideal para aplicação de uma condição de contorno.

Para implementar a condição de contorno, substituiu-se a equação da condição de contorno na integral de área obtida da forma fraca da equação diferencial. A expressão resultante novamente pode ser manipulada algebricamente, dessa vez separando a integral no contorno em duas integrais, uma no contorno e outra ao longo da curva que envolve esse contorno. A integral de linha pode ser tratada de duas formas.

A abordagem implementada para a condição de impedância nos softwares utilizados assume que a impedância varia continuamente na transição entre as regiões tratada e

de parede rígida, de forma que não há descontinuidades na expressão sendo integrada, o que torna a integral de linha igual a zero. A opção alternativa é computar esse integral numericamente, sem assumir o comportamento da impedância na transição. Observou-se que mesmo quando o requisito de continuidade da impedância na transição é violado, a diferença entre essas duas abordagens é pequena.

Esse equacionamento então é implementado no software COMSOL Multiphysics. Usando uma modelagem física disponível nativamente no software para a propagação do campo acústico sobre um campo médio potencial, a integral de volume já está prescrita e não precisa ser modificada. Especificando manualmente a integral de área (e opcionalmente, a integral de linha) obtida usando a condição de contorno, tem-se uma implementação que modela o equacionamento matemático desenvolvido. No processo, considerou-se uma geometria axissimétrica, usando um sistema de coordenadas cilíndrico e periodicidade na direção azimutal.

Para validar a implementação, usou-se um caso simples para o qual há uma solução analítica conhecida. Os resultados obtidos pelos dois métodos apresentaram boa concordância. O fato de esse caso simples considerar um escoamento uniforme faz com que alguns termos da condição de contorno, que envolvem derivadas da velocidade de campo médio, sejam nulos. Para uma validação mais completa uma caso com complexidade maior é necessário, com escoamento potencial que varia no espaço, por exemplo.

A condição de contorno modificada foi testada em dois modelos. O primeiro simula uma bancada experimental de ruído de fan. Nas condições de operação dessa bancada, observou-se uma diferença pequena entre as predições usando a condição de contorno original ou modificada. O segundo caso usa uma geometria típica de motor de aeronave, e envolve dimensões e frequências maiores que o caso da bancada. Usando um modelo simplificado de fonte para representar o ruído produzido pelo fan nessa geometria, observou-se que a escolha da condição de contorno possui um efeito considerável no ruído irradiado para o campo distante. Não há dados experimentais disponíveis para validar esse resultados, mas o resultado obtido segue a tendência observada num resultado experimental em condições análogas numa geometria diferente.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Escolheu-se um caso simples para validar a implementação da condição de contorno, devido aos resultados analíticos disponíveis e à facilidade em replicá-lo numericamente. No entanto essa simplicidade faz com que algumas partes da condição de contorno sejam reduzidas a zero, com sua implementação não podendo ser validadas. O escoamento médio uniforme é o principal exemplo, zerando todas as derivadas dessa quantidade presentes no equacionamento. Sugere-se encontrar um caso de validação mais complexo que permita verificar o efeito desses termos.

A condição de contorno modificada que testou-se neste trabalho difere consideravelmente da condição tradicional quando o campo acústico contém modos de alta ordem. Sugere-se testá-la com dados experimentais com essas características, onde seria possível verificar se a diferença observada entre as condições de contorno descrevem o comportamento experimental de forma melhor ou pior.

Para melhorar os resultados do modelo da bancada de ruído de fan, sugere-se realizar uma simulação acústica numérica da entrada de ar do duto, para verificar como essa terminação afeta os modos que nela incidem. Este trabalho assumiu que a terminação é anecoica, e acredita-se que essa hipótese não seja verdadeira.

BIBLIOGRAFIA

- ACHUNCHE, I. et al. Prediction of Foward Fan Noise Propagation and Radiation from Intakes. In: 15TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference). 2009. p. 3239.
- ACOSTA, O. E. **Análise numérica do campo acústico associado a entrada de motores turbofan para diferentes configurações de tratamento acústico**. 2015.
- AURÉGAN, Y.; STAROBINSKI, R.; PAGNEUX, V. Influence of grazing flow and dissipation effects on the acoustic boundary conditions at a lined wall. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 109, n. 1, p. 59–64, 2001.
- BODEN, H. et al. Comparison of the effect of flow direction on liner impedance using different measurement methods. In: 23RD AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017. p. 3184.
- BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier spectral methods**. Courier Corporation, 2001.
- BRAMBLEY, E. J. Well-posed boundary condition for acoustic liners in straight ducts with flow. **AIAA journal**, v. 49, n. 6, p. 1272–1282, 2011.
- BRAMBLEY, E. J. Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 322, n. 4-5, p. 1026–1037, 2009.
- BRAMBLEY, E. J.; GABARD, G. Time-domain implementation of an impedance boundary condition with boundary layer correction. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 321, p. 755–775, 2016.
- CALDAS, L. et al. In-duct rotating beamforming and mode detection of fan noise sources. In: 22ND AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2016. p. 3034.
- CASALINO, D. et al. Aircraft noise reduction technologies: a bibliographic review. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 1–17, 2008.
- COMSOL AB. **Acoustics Module User’s Guide**. English. Versão 5.5, 2019.
- DEAN, P. An in situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 34, n. 1, 97–in6, 1974.
- ENVIA, E. Fan noise reduction: an overview. **International Journal of Aeroacoustics**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 1, n. 1, p. 43–64, 2002.

EVERSMAN, W. The boundary condition at an impedance wall in a non-uniform duct with potential mean flow. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 246, n. 1, p. 63–69, 2001.

EVERSMAN, W.; BECKEMEYER, R. J. Transmission of sound in ducts with thin shear layers—convergence to the uniform flow case. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 52, 1B, p. 216–220, 1972.

FREE FIELD TECHNOLOGIES SA. **Actran 17.0 User's Guide - Volume 1**. English. Versão 17.0, 2016.

GABARD, G.; ASTLEY, R. A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 315, n. 4-5, p. 1103–1124, 2008.

GABARD, G. Mode-matching techniques for sound propagation in lined ducts with flow. In: 16TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2010. p. 3940.

GABARD, G. A comparison of impedance boundary conditions for flow acoustics. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 332, n. 4, p. 714–724, 2013.

GABARD, G. Boundary layer effects on liners for aircraft engines. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 381, p. 30–47, 2016.

GUESS, A.; SCHINDLER, G. **Acoustic liner**. Jul. 1974. US Patent 3,821,999.

INGARD, U. Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption, and transmission. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 31, n. 7, p. 1035–1036, 1959.

INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANIZATION. **Environmental Technical Manual - Volume 1**: Procedures for the Noise Certification of Aircraft. 999 Robert-Bourassa Boulevard, Montréal, Québec H3C 5H7, Canada, 2010. p. 287.

JING, X.; PENG, S.; SUN, X. A straightforward method for wall impedance reduction in a flow duct. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 124, n. 1, p. 227–234, 2008.

JULLIARD, J.; RIOU, G.; LOZACHMEUR, C. Recent developments in turbomachinery noise control and reduction systems. In: 15TH Aeroacoustics Conference. 1993. p. 4375.

- KHAMIS, D.; BRAMBLEY, E. J. Analytic model and concise impedance boundary condition for viscous acoustics in ducted shear flow. In: 22ND AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2016. p. 2976.
- KHAMIS, D.; BRAMBLEY, E. J. Acoustic boundary conditions at an impedance lining in inviscid shear flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 796, p. 386–416, 2016.
- KING, R. P.; DAVIS, J. R. Community noise: health effects and management. **International journal of hygiene and environmental health**, Elsevier, v. 206, n. 2, p. 123–131, 2003.
- KOOI, J.; SARIN, S. An experimental study of the acoustic impedance of Helmholtz resonator arrays under a turbulent boundary layer. In: 7TH Aeroacoustics Conference. 1981. p. 1998.
- MARTINEZ, B. et al. Baseline Acoustic Levels of the EESC-USP Fan Rig. In: 23RD AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017. p. 3384.
- MASSON, V. et al. The impedance boundary condition for acoustics in swirling ducted flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 849, p. 645–675, 2018.
- MCALPINE, A.; WRIGHT, M. Acoustic scattering by a spliced turbofan inlet duct liner at supersonic fan speeds. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 292, n. 3-5, p. 911–934, 2006.
- MORRELL, S.; TAYLOR, R.; LYLE, D. A review of health effects of aircraft noise. **Australian and New Zealand journal of public health**, Wiley Online Library, v. 21, n. 2, p. 221–236, 1997.
- MOTSINGER, R.; KRAFT, R. Design and performance of duct acoustic treatment, 1991.
- MUSTAFI, P. **Improved turbofan intake liner design and optimization**. 2013. Tese (Doutorado) – University of Southampton.
- MYERS, M. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 71, n. 3, p. 429–434, 1980.
- PRIDMORE-BROWN, D. C. Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 4, n. 4, p. 393–406, 1958.

RENOU, Y.; AURÉGAN, Y. Failure of the Ingard–Myers boundary condition for a lined duct: An experimental investigation. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 130, n. 1, p. 52–60, 2011.

RIENSTRA, S. W. Fundamentals of duct acoustics. **Von Karman Institute Lecture Notes**, Citeseer, 2015.

RIENSTRA, S. W. Solutions and Properties of the Pridmore-Brown equation. In: 25TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019. p. 2594.

RIENSTRA, S. W.; DARAU, M. Boundary-layer thickness effects of the hydrodynamic instability along an impedance wall. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 671, p. 559–573, 2011.

ROCAMORA JUNIOR, B. M. **Experimental analysis of fan noise and performance at the EESC-USP Fan Rig Workbench**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.

SAHAI, A. K.; STUMPF, E. Incorporating and minimizing aircraft noise annoyance during conceptual aircraft design. In: 20TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2014. p. 2078.

SMITH, M. J. **Aircraft Noise**. Cambridge University Press, 1989.

SPILLERE, A. M. N.; BONOMO, L. A. et al. Experimentally testing impedance boundary conditions for acoustic liners with flow: Beyond upstream and downstream. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 489, p. 115676, 2020.

SPILLERE, A. M.; MEDEIROS, A. A.; CORDIOLI, J. A. An improved impedance education technique based on impedance models and the mode matching method. **Applied Acoustics**, Elsevier, v. 129, p. 322–334, 2018.

SPILLERE, A.; BRAGA, D. S. et al. Inlet liner design for a fan noise test rig. In: 25TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019. p. 2724.

SUGIMOTO, R. et al. Prediction of in-duct and near-field noise for a fan rig intake. In: 19TH AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2013. p. 2022.

TAM, C. K.; AURIAULT, L. Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. **AIAA journal**, v. 34, n. 5, p. 917–923, 1996.

TYLER, J. M.; SOFRIN, T. G. **Axial flow compressor noise studies**. 1962.