



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E
SISTEMAS

Geovana Aparecida França dos Santos

**CONTROLE SOB RESTRIÇÕES POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE
SISTEMAS LINEARES VIA INVARIÂNCIA POLIÉDRICA E OTIMIZAÇÃO
BILINEAR**

Florianópolis
2021

Geovana Aparecida França dos Santos

**CONTROLE SOB RESTRIÇÕES POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE
SISTEMAS LINEARES VIA INVARIÂNCIA POLIÉDRICA E OTIMIZAÇÃO
BILINEAR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Geovana Aparecida França dos
Controle sob restrições por realimentação de saída de
sistemas lineares via invariância poliédrica e otimização
bilinear / Geovana Aparecida França dos Santos ;
orientador, Eugênio de Bona Castelan, 2021.
98 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Controle sob
restrições. 3. Realimentação de Saída. 4. Poliedros
invariantes e contrativos. 5. Programação bilinear. I.
Castelan, Eugênio de Bona. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Automação e Sistemas. III. Título.

Geovana Aparecida França dos Santos

**CONTROLE SOB RESTRIÇÕES POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE
SISTEMAS LINEARES VIA INVARIÂNCIA POLIÉDRICA E OTIMIZAÇÃO
BILINEAR**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Valter Junior de Souza Leite
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
Orientador

Florianópolis, 07 de julho de 2021.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Aparecido e Eliana.

Agradecimentos

À minha família por todo apoio e amor.

Aos amigos por deixarem meus dias mais leves.

A Matuzalém pelo incentivo e companheirismo.

Aos colegas de mestrado pela parceria nesta jornada, em especial a Jackson pelos conselhos e ensinamentos.

À Stephanie pelas sugestões.

Ao meu orientador Eugênio por toda dedicação, paciência, conhecimentos repassados e comprometimento para a conclusão desta etapa.

Aos membros da banca pelas recomendações para aprimorar este trabalho.

A Enio, secretário do PPGEAS, pelo pronto suporte.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*“Torna-te aquilo que és.”
(Friedrich Nietzsche)*

Resumo

Problemas de controle usualmente contém restrições físicas e de segurança nas variáveis de estado e de controle, além dos sinais externos de referência e perturbação serem, em geral, limitados em amplitude. Neste trabalho, consideram-se as propriedades de invariância positiva e Δ -invariância de conjuntos poliédricos para garantir que estas restrições sejam respeitadas e assegurar a estabilidade local do sistema em malha fechada. Tal escolha se justifica pelo fato dos conjuntos poliédricos disporem do formato mais adaptado aos limites em amplitude encontrados na prática. Além disto, a abordagem considerada permite tratar a) leis de controle por realimentação de saída, estática ou dinâmica; b) é capaz de levar em conta restrições não simétricas; e c) lidar com compensadores dinâmicos de ordem reduzidas. Ao longo dos problemas tratados nesta dissertação, considera-se a síntese conjunta de um controlador e de um conjunto poliédrico invariante associado, a qual pode ser realizada utilizando-se o *solver* de otimização não linear KNITRO para encontrar a solução dos problemas de programação bilinear propostos.

Inicialmente, a propriedade de Δ -invariância de conjuntos convexos, usada especificamente na presença de perturbações externas persistentes, é aplicada para projetar leis de controle por realimentação dinâmica de saída em tempo discreto e calcular, conjuntamente, um conjunto poliédrico Δ -invariante com um conjunto ultimamente limitado associado. Na sequência, projetos de leis de controle por realimentação de saída, estática e dinâmica, são propostos em tempo contínuo e discreto, com o objetivo de garantir a estabilidade assintótica local e o respeito das restrições para toda condição inicial pertencente a um conjunto pré-especificado. Por último, aborda-se o rastreamento do degrau de referência para sistemas monovariáveis sujeitos a restrições, por meio da lei de controle Proporcional-Integral com um termo *feed-forward*. Determinam-se limites de amplitude para o degrau de referência, de modo que o Princípio do Modelo Interno permaneça válido na região poliédrica, baseado nas propriedades de invariância positiva e Δ -invariância. Em cada um destes casos, diferentes funções objetivos são consideradas para a síntese de soluções via programação bilinear. Ademais, exemplos numéricos são apresentados a fim de mostrar a eficácia e o potencial das propostas.

Palavras-chave: Controle sob restrições. Realimentação de Saída. Invariância positiva. Δ -invariância. Contratividade. Conjuntos poliédricos. Programação bilinear.

Abstract

Control problems often contain physical and safety constraints on the state and control variables and external and disturbance signals that are generally limited in amplitude. Because the format of polyhedral sets is adaptable based on the amplitude limits found in practice, we consider the positive invariance and Δ -invariance properties of polyhedral sets to guarantee that the constraints are respected and ensure the closed-loop system's local stability. Furthermore, the considered approach can a) address control laws using output feedback, static or dynamic, b) handle non-symmetrical constraints, and c) deal with reduced-order dynamic compensators. The problems presented in this work consider the joint synthesis of a controller and an associated invariant polyhedral set. The nonlinear optimization solver KNITRO is used to solve the proposed bilinear programming problems.

Initially, the property of Δ -invariance convex set, used in the presence of persistent external perturbations, is applied to design control laws by discrete-time dynamic output feedback and to calculate a Δ -invariant polyhedral set with an ultimately bounded set associated. Next, designs for static and dynamic output feedback control laws are presented in continuous and discrete-time to guarantee local asymptotic stability and respect constraints for all initial conditions belonging to a pre-specified set. Finally, it addresses the tracking of the reference step for monovariable systems subject to constraints through the Proportional-Integral control law with a feed-forward term. Amplitude limits are determined for the reference step, based on the positive invariance and Δ -invariance properties, to maintain the Internal Model Principle valid in the polyhedral region. In each case, distinct objective functions are considered for solution synthesis via bilinear programming. Furthermore, numerical examples are presented to show the effectiveness and potential of the proposals.

Keywords: Constrained Control. Output Feedback. Positive invariance. Δ -invariance. Contractivity. Polyhedral sets. Bilinear programming.

Lista de figuras

Figura 1 – Poliedro $R[Q, \phi]$ no \mathbb{R}^2	7
Figura 2 – Poliedro $R[Q, \phi]$ incluído no poliedro $R[P, \psi]$ no \mathbb{R}^2	8
Figura 3 – Poliedro \mathcal{L} invariante e contrativo, cujas trajetórias (- -) e (- -) convergem para a origem	10
Figura 4 – Elipse \mathcal{L} invariante e contrativo, cujas trajetórias (- -) e (- -) convergem para a origem	10
Figura 5 – Localização das raízes características e estabilidade do sistema em tempo contínuo	12
Figura 6 – Localização das raízes características e estabilidade do sistema em tempo discreto	13
Figura 7 – Poliedro \mathcal{L} Δ -invariante e contrativo, cuja trajetória (-) converge para o conjunto-UB ao redor da origem	14
Figura 8 – Poliedros Δ -invariante e UB para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$	26
Figura 9 – Projeções ortogonais para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$	27
Figura 10 – Estados do sistema para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$	27
Figura 11 – Ação de controle para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$	28
Figura 12 – Projeto SOF para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$, com $r = 6$	41
Figura 13 – Ação de controle para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$, com $r = 6$	41
Figura 14 – Projeto DOF para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 0$	44
Figura 15 – Ação de controle e estado do controlador para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 0$	44
Figura 16 – Projeto DOF para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 1$	46
Figura 17 – Ação de controle e estado do controlador para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 1$	46
Figura 18 – Projeto StF para $\alpha = 0,1$, $0,2$ e $0,3$	48
Figura 19 – Ação de controle para $\alpha = 0,1$, $0,2$ e $0,3$	49
Figura 20 – Projeto de síntese e análise por LMI para $\epsilon = 0,5$	52
Figura 21 – Projeto por invariância positiva e análise por LMI para $\epsilon = 0,5$ e $r = 4$	52
Figura 22 – Ações de controle para $\epsilon = 0,5$	53
Figura 23 – Controlador PI com termo <i>feed-forward</i>	56
Figura 24 – Conjunto \mathcal{L}_{cl} via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo contínuo	66
Figura 25 – Resposta de tempo via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo contínuo	67

Figura 26 – Conjunto \mathcal{L}_{cl} via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo discreto	69
Figura 27 – Resposta de tempo via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo discreto	70

Lista de tabelas

Tabela 1 – Projetos DOF com $r = 6$ e $\bar{t} = 16$	25
Tabela 2 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{t} = 16$	25
Tabela 3 – Projetos SOF com $r = 4$	39
Tabela 4 – Projetos SOF com $r = 6$	39
Tabela 5 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{A} = 0$	43
Tabela 6 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{A} = 1$	45
Tabela 7 – Projetos de $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ com $r = 6$	48
Tabela 8 – Projetos por LMI	51
Tabela 9 – Projetos por invariância positiva com $r = 4$	51
Tabela 10 – Problemas de Otimização	63
Tabela 11 – Exemplo para $i = 1,2$ (esquerda), $i = 3,4$,(direita) e $r = 6$ em tempo contínuo	65
Tabela 12 – Exemplo para $i = 5,6$ e $r = 6$ em tempo contínuo	65
Tabela 13 – Exemplo para $i = 1,2$ (esquerda), $i = 3,4$,(direita) e $r = 6$ em tempo discreto	68
Tabela 14 – Exemplo para $i = 5,6$ e $r = 6$ em tempo discreto	68

Lista de abreviaturas e siglas

AL	Álgebra Linear
DOF	<i>Dinamic Output Feedback</i>
LIT	Linear Invariante no Tempo
LDIT	Linear Discreto Invariante no Tempo
LFE	Lema de Farkas Estendido
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LPV	Linear com Parâmetro Variante
PB	Programação Bilinear
PI	Proporcional-Integral
PL	Programação Linear
PMI	Princípio do Modelo Interno
PNL	Programação Não Linear
SOF	<i>Static Output Feedback</i>
StF	<i>State Feedback</i>
UB	<i>Ultimately Bounded</i>

Lista de símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais não negativos
\mathbb{I}_n	Matriz identidade de dimensão n
$\mathbf{1}_n$	Vetor coluna de escalares 1 com dimensão n
m_{ij}	Elementos da matriz M
M^T	Transposta da matriz M
$\ M\ _\infty$	Norma infinita da matriz M
$\sigma(M)$	Conjunto espectral da matriz M
$\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$	Conjunto diferença de \mathcal{M} por \mathcal{M}_0
$M \geq 0$	Matriz não negativa
$M \preceq 0$	Matriz definida (semi) negativa
$\text{diag}\{M_j\}$	Matriz diagonal formada pelas M_j matrizes
$\text{posto}(M)$	Posto da matriz M

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Controle sob Restrições e Invariância Positiva	2
1.2	Programação Bilinear	3
1.3	Objetivos	4
1.4	Organização	5
2	Invariância de Conjuntos Poliédricos	6
2.1	Resultados Preliminares	6
2.2	Domínios Invariantes de Sistemas Lineares	8
2.2.1	Invariância Positiva	9
2.2.2	Δ -invariância	13
2.2.3	Δ -invariância com Conjunto-UB Associado	14
2.3	Conclusão	16
3	Estabilização por Realimentação de Saída de Sistemas LITD com Perturbações Persistentes	17
3.1	Apresentação do Problema	17
3.2	Resultados Principais	20
3.3	Estratégia de Projeto por Otimização Bilinear	22
3.4	Exemplo Numérico	24
3.5	Conclusão	28
4	Estabilização por Realimentação de Saída de Sistemas LIT sob Restrições	29
4.1	Apresentação do Problema	29
4.2	Realimentação Estática de Saída	31
4.2.1	Condições Algébricas para Invariância e Inclusões	31
4.2.2	Problema de Otimização Bilinear	33
4.3	Realimentação Dinâmica de Saída	34
4.3.1	Condições Algébricas e Problema de Otimização Bilinear	37
4.4	Exemplos Numéricos	38
4.5	Conclusão	53
5	Projeto do Controlador PI para Sistemas Restritos	55
5.1	Apresentação do Problema	55
5.2	Resultados Principais	58
5.2.1	Solução Baseada em Δ -Invariância	58
5.2.2	Solução Baseada em Invariância Positiva	60
5.3	Abordagem de Projeto por Otimização Bilinear	63

5.4	Exemplos Numéricos e Simulações	64
5.5	Conclusão	71
6	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	72
6.1	Publicações	73
6.2	Trabalhos Futuros	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A Análise e Projeto LMI com Minimização da Energia de	
	Controle	80
A.1	Análise	80
A.2	Síntese com α -estabilidade	81
	APÊNDICE B Código AMPL	84
B.1	Arquivo .mod	84
B.2	Arquivo .run	87
B.3	Arquivo .dat	96

1 Introdução

Em sistemas de controle práticos é comum a presença de perturbações externas, incertezas ou variações no modelo utilizado, dentre outros fenômenos, cujos efeitos detrimenais devem ser considerados no projeto de controladores. Além disto, as restrições de segurança sobre as variáveis de estado do sistema, ou de limites físicos sobre as variáveis de controle, devem ser respeitadas ao longo do funcionamento do sistema em malha fechada (BLANCHINI; MIANI, 2015).

Devido a estas razões, muitas pesquisas foram desenvolvidas no campo de sistemas de controle sob restrições, nos quais a teoria de estabilidade de Lyapunov e os conceitos relacionados de Invariância e Contratividade foram aplicados. Especialmente, pelo fato dos conjuntos invariantes e contrativos garantirem a estabilidade ou desempenho local em malha fechada, respeitando as restrições inclusive na presença de perturbações e ruídos limitados em amplitude; veja, por exemplo, Tarbouriech *et al.* (2011) e Blanchini e Miani (2015) e referências ali contidas.

Em geral, a utilização de conjuntos invariantes de natureza elipsoidal associados a funções de Lyapunov quadráticas ou compostas, popularizou-se devido à aplicação de métodos baseados na utilização de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), que podem ser resolvidas por métodos de Programação Convexa (TARBOURIECH *et al.*, 2011). Contudo, os conjuntos poliédricos invariantes têm a forma mais adaptada aos limites em amplitude encontrados na prática, permitindo, especialmente, considerar restrições e perturbações limitadas não simétricas.

Todavia, as relações algébricas que descrevem a invariância de conjuntos polidrais são, por natureza, bilineares em termos das variáveis matriciais envolvidas na determinação de um conjunto invariante que seja desconhecido *a priori* (BLANCHINI; MIANI, 2015; BRIÃO *et al.*, 2018). Entretanto, como mostrado em Brião *et al.* (2018) e explorado nesta dissertação, essas relações algébricas de invariância podem ser utilizadas para tratar de forma eficiente numericamente, por otimizadores não lineares, leis de controle sob restrições por realimentação de saída, estática ou dinâmica e, também, lidar com compensadores dinâmicos de ordem reduzidas.

1.1 Controle sob Restrições e Invariância Positiva

A invariância positiva é uma propriedade que caracteriza alguma função de tempo gerado por um sistema dinâmico: qualquer trajetória dessa função começando em uma região do espaço sempre permanece naquela região ao longo da evolução do sistema (HENNET, J. C., 1995). Uma classe importante de conjuntos positivamente invariantes é a de conjuntos contrativos, em que as trajetórias do sistema convergem continuamente para um conjunto interno de mesma forma (homotético). Deste modo, a existência de um conjunto positivamente invariante contrativo associado ao sistema garante a estabilidade assintótica (local) das trajetórias (DOREA; HENNET, J., 1999).

Na tese de doutorado de Brião (2019), observam-se estratégias utilizadas para lidar com a estabilização de sistemas lineares discretos invariantes no tempo (LDIT) por Realimentação de Estado (StF, em inglês, *State Feedback*) e por Realimentação Estática de Saída (SOF, em inglês, *Static Output Feedback*) via conjuntos positivamente invariantes poliédricos. Para isto, duas técnicas baseadas no conceito de invariância positiva de domínios poliedrais foram propostas e, a elas, foram aplicadas duas formulações distintas de problema de otimização para o projeto das leis de controle.

Em ambos os casos, partem-se das relações algébricas que descrevem a propriedade de invariância positiva ou Δ -invariância, nas quais as matrizes de ganho aparecem de forma explícita na formulação. Estas relações algébricas contém, na sua essência, produtos bilineares entre variáveis matriciais. Assim, numa primeira proposta, as relações algébricas são reescritas sob uma forma que, particularmente, permite encontrar a matriz de ganhos que estabiliza o sistema em malha fechada a partir de um problema de otimização com restrição de posto. Neste caso, o conjunto invariante é determinado *a posteriori* e, desta forma, a técnica de projeto não permite considerar as restrições sobre os estados e controle no problema de otimização.

Por outro lado, a natureza bilinear das relações de invariância é também intrínseca ao problema de controle por realimentação estática de saída. Desta maneira, estas relações podem ser utilizadas como restrições de problemas de otimização, formulados sob a forma de problemas de programação bilinear, para tratar a estabilização local e global de sistemas lineares, como explorados em Brião (2019). Esses problemas de programação bilinear podem ser resolvidos por *solvers* não lineares, como o KNITRO via a linguagem de programação AMPL.

Em particular, o Capítulo 5 de Brião (2019) (Estabilização sob restrições de sistemas LDIT com perturbações via programação bilinear) aborda a estabilização

sob restrições, por realimentação estática de saídas de sistemas LDIT sujeitos a perturbações persistentes via programação bilinear. O cálculo de SOF, e também de StF, é tratado mediante a propriedade de Δ -invariância. Tal propriedade garante que qualquer trajetória iniciando no poliedro Δ -invariante permaneça nele e convirja, em tempo finito, para outro poliedro em torno da origem, onde a trajetória fica confinada. Vale ressaltar que, na ausência de perturbações, a Δ -invariância reduz-se à propriedade clássica de invariância positiva, que garante a convergência para a origem quando o conjunto relacionado é contrativo ao longo das trajetórias do sistema (HENNET, J. C., 1995; BLANCHINI, 1999).

A viabilidade desta abordagem de controle sob restrições para o cálculo conjunto de controladores estáticos, SOF e StF, e de um conjunto Δ -invariante foi atestada na tese referida, e seu estudo foi aprofundado no manuscrito de Brião *et al.* (2018), atualmente em revisão para publicação em periódico. Notou-se, ainda, que esta abordagem recém-descrita teria potencialidades para extensões de interesse teórico, computacional e prático, alguns deles motivadores do presente trabalho, como será descrito mais adiante. Antes disso, apresentam-se a seguir alguns elementos sobre a programação bilinear, de interesse no desenvolvimento do presente trabalho.

1.2 Programação Bilinear

Devido às bilinearidades inerentes às relações de invariância, como também às relações algébricas que descrevem as condições de inclusão entre alguns conjuntos e a admissibilidade da lei de controle, problemas de otimização bilinear são formulados no presente trabalho, similarmente aos propostos em Brião (2019) e Brião *et al.* (2018) para resolver os problemas de controle sob restrição considerados nesta dissertação.

Um programa bilinear (PB) é um tipo de problema de programação não linear (PNL) em que alguns dos termos não lineares consistem em produtos de duas variáveis. Nesta linha, a partir de uma estimativa inicial, os algoritmos locais podem tirar proveito das derivadas para chegar a uma solução ótima local, porém a dependência da estimativa inicial pode comprometer a qualidade e, até mesmo, a viabilidade da solução de teste do algoritmo local. Em contrapartida, pode-se explorar os *solvers* de propósito geral e especializados, particularmente, em procedimentos de limite inferior, que processam relaxamentos de programação linear e inteira-mista. Nesta linha, os *solvers* IPOPT¹ e Gurobi², foram aplicados

¹ <https://coin-or.github.io/lpopt/>

² <https://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/>

em instâncias representativas dos problemas tratados em Brião (2019) e Brião *et al.* (2018), sem sucesso ou resultados viáveis dentro de um tempo razoável.

Portanto, a par destas dificuldades, este trabalho também segue uma estratégia de otimização que está a meio caminho entre algoritmos locais e globais, que consiste na aplicação de um *solver* local de múltiplos inícios denominado KNITRO, onde soluções ótimas globais não são garantidas, no entanto, mínimos locais são encontrados por convergência (BYRD *et al.*, 2006). Além disto, em problema de otimização bilinear, cujas restrições são formuladas sob a forma matricial, permite ser expresso na forma elemento a elemento, que é mais adequada para a linguagem AMPL (FOURER *et al.*, 2003) utilizada pelo KNITRO.

1.3 Objetivos

No contexto de controle sob restrições delineados anteriormente, os objetivos desta dissertação são colocados a seguir.

Objetivo Geral

O objetivo geral é utilizar as propriedades de invariância positiva, contratividade e Δ -invariância de conjuntos poliédricos para garantir a estabilização ou seguimento de referência num contexto local, respeitando-se as restrições sobre estados e entradas, via leis de controle por realimentação de saída, estática e dinâmica.

Objetivos Específicos

1. Estender os resultados de realimentação estática de saídas desenvolvidos por Brião (2019) para a síntese conjunta de uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída e de um conjunto poliédrico Δ -invariante, com um conjunto associado ultimamente limitado (UB, do inglês *Ultimately Bounded*);
2. Desenvolver e apresentar de forma unificada, em tempo contínuo e discreto, uma abordagem para síntese de leis de controle por realimentação de saída, estática e dinâmica, usando a propriedade de invariância positiva de conjuntos poliédricos para a estabilização local do sistema de controle sob restrições;

3. Elaborar uma nova abordagem de projeto para uma lei de controle do tipo Proporcional-Integral (PI) acrescida de um termo *feed-forward*, via invariância positiva ou Δ -invariância de conjuntos poliédrico;
4. Utilizar a linguagem AMPL e o *solver* não linear KNITRO na programação e na solução dos problemas de otimização bilinear propostos e mostrar a viabilidade das propostas por exemplos numéricos, comparações e simulações.

1.4 Organização

Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte forma:

- O Capítulo 2 fornece os principais conceitos e informações matemáticas sobre conjuntos poliédricos invariantes e sua relação com o controle de sistemas lineares sujeitos a restrições.
- O Capítulo 3 descreve a síntese conjunta de uma lei de controle por Realimentação Dinâmica de Saída (DOF, do inglês, *Dynamic Output Feedback*) e de um conjunto poliédrico Δ -invariante, com um conjunto-UB associado, que garantem a estabilidade assintótica local das trajetórias, respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle, na presença de perturbações externas persistentes.
- O Capítulo 4 apresenta condições de síntese para controladores por realimentação de saída, estática e dinâmica, usando a propriedade de invariância positiva de conjuntos poliédricos. Além disto, tais condições garantem que restrições de estado e controle impostas sobre o sistema em tempo contínuo e discreto sejam respeitadas.
- O Capítulo 5 aborda um problema de rastreamento de referência para sistemas lineares monovariáveis sujeitos a restrições de estado e controle, através do conceito de invariância positiva, ou Δ -invariância, de conjuntos poliédricos para lidar com as restrições, garantindo que o Princípio do Modelo Interno (PMI) seja útil para rastrear um degrau de referências pertencentes a um intervalo limitado.
- O Capítulo 6 apresenta as conclusões desta dissertação e considerações para possíveis trabalhos futuros nesta área.

2 Invariância de Conjuntos Poliédricos

O problema de manter a trajetória de um sistema linear dentro de um determinado conjunto poliédrico, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto, é abordado usando a teoria da invariância de conjuntos. Para isto, são introduzidos conceitos básicos sobre convexidade e conjuntos poliédricos, e o lema de Farkas estendido, o qual permite caracterizar a inclusão de conjuntos poliédricos. Condições necessárias e suficientes sob as quais um poliedro convexo é invariante em relação a um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, na ausência ou presença de perturbações limitadas em amplitude, são então estabelecidas sob a forma de relações matriciais.

2.1 Resultados Preliminares

Os resultados apresentados a seguir são baseados em J. C. Hennet (1995), derivados de alguns resultados básicos de Álgebra Linear (AL) e Programação Linear (PL), para os quais uma breve revisão dos principais conceitos é fornecida.

Definição 1 (Conjunto Convexo) *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para qualquer $s_1, s_2 \in S$ e qualquer escalar β , com $0 \leq \beta \leq 1$, tem-se $\beta s_1 + (1 - \beta)s_2 \in S$.*

Definição 2 (Conjunto Poliédrico) *Qualquer conjunto poliédrico convexo \mathbb{R}^n pode ser caracterizado por uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e um vetor $\phi \in \mathbb{R}^r$, r e n sendo números inteiros positivos, definido por:*

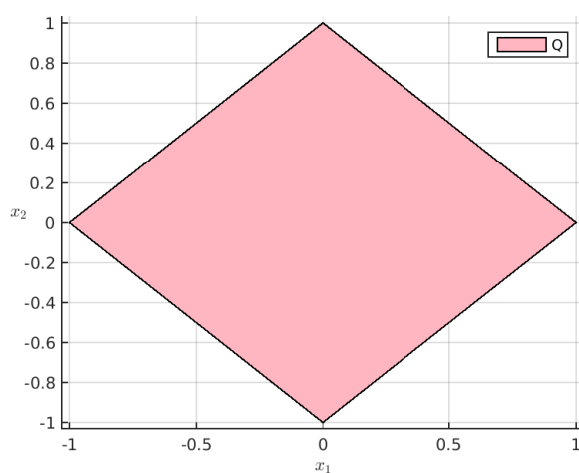
$$R[Q, \phi] = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq \phi\}. \quad (2.1)$$

Além disto,

- $R[Q, \phi]$ contém a origem de \mathbb{R}^n no seu interior, se $\phi > 0$;
- $R[Q, \phi]$ é compacto (fechado e limitado), se e somente, posto(Q) = n e $r > n$.

A visualização geométrica de um conjunto poliédrico $R[Q, \phi]$ no \mathbb{R}^2 pode ser observada na Figura 1, em que o poliedro é formado pela interseção das regiões definidas por cada uma das linhas da inequação $Qx \leq \phi$.

Figura 1 – Poliedro $R[Q, \phi]$ no \mathbb{R}^2



$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Fonte – Elaborado pela Autora

Lema 1 (*Lema de Farkas Estendido (LFE)*) O sistema de inequações lineares $Px \leq \psi$ é satisfeito para qualquer ponto do conjunto poliédrico convexo não vazio definido em (2.1) se, e somente se, existe uma matriz (dual) não negativa $V \in \mathbb{R}^{p \times r}$ tal que:

$$VQ = P, \tag{2.2a}$$

$$V\phi \leq \psi. \tag{2.2b}$$

A extensão do lema de Farkas fornece um conjunto de condições necessárias e suficientes sob as quais:

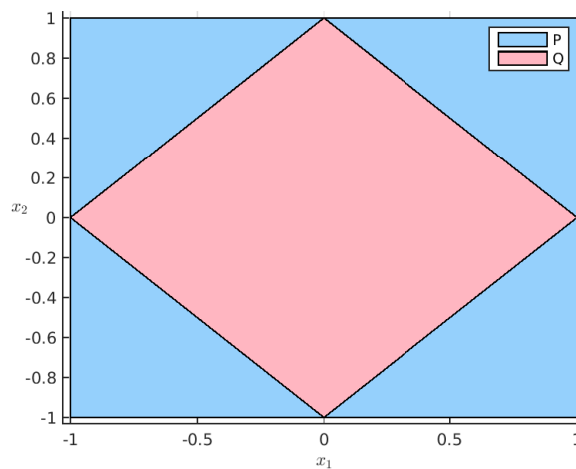
$$R[Q, \phi] \subseteq R[P, \psi],$$

ou, de forma equivalente,

$$x \in R[Q, \phi] \implies x \in R[P, \psi].$$

Geometricamente, um conjunto poliédrico $R[Q, \phi]$ incluso no poliedro $R[P, \psi]$ é ilustrado na Figura 2. Semelhante ao caso anterior, o poliedro $R[P, \psi]$ é formado pela interseção das regiões definidas por cada uma das linhas da inequação $Px \leq \psi$. A matriz Q e o vetor ϕ são os mesmos definido na Figura 1.

Figura 2 – Poliedro $R[Q, \phi]$ incluído no poliedro $R[P, \psi]$ no \mathbb{R}^2



$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Fonte – Elaborado pela Autora

A partir do Lema 1, a invariância de conjuntos poliédricos no espaço de estados de sistemas dinâmicos lineares e, também, de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) ou quase-LPV, pode ser analisada e caracterizada como um caso especial de inclusão de conjuntos poliédricos. As condições deste lema podem ser verificadas através da solução de um problema padrão de Programação Linear (HENNET, J. C., 1995).

Observação 1 *Sem perda de generalidade, qualquer poliedro convexo $R[Q, \phi]$ em (2.1) que contenha a origem no seu interior, portanto com $\phi > 0$, pode ser normalizado e representado na forma:*

$$R[Q, \phi] = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (2.3)$$

em que $Q \leftarrow \text{diag}\{\phi\}^{-1} Q$ e $\mathbf{1}_r = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^r$.

2.2 Domínios Invariantes de Sistemas Lineares

No contexto geral, considere um sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT), dado por:

$$\varphi[x(t)] = Ax(t) + Ed(t), \quad (2.4)$$

em que $t \in \mathbb{R}_+$ se o sistema é em tempo contínuo ou $t \in \mathbb{N}$ no caso em tempo discreto, com:

$$\varphi[x(t)] = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt}, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t+1), & \text{se } t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.5)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $d \in \mathbb{R}^m$ é um sinal vetorial exógeno persistente, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

2.2.1 Invariância Positiva

Primeiro consideramos o caso de um sistema autônomo (*i.e.*, $d = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{N}), como segue:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.6)$$

Definição 3 (*Conjunto Positivamente Invariante*) (HENNET, J. C., 1995; BLANCHINI; MIANI, 2015; TARBOURIECH et al., 2011) Um conjunto convexo $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto positivamente invariante do sistema (2.6), se cada trajetória começando em \mathcal{L} permanece em \mathcal{L} para todo $t \geq 0$. Além disso, \mathcal{L} é contrativo se $\forall x(t) \in \partial(\delta\mathcal{L})$, com $0 < \delta \leq 1$, tem-se que $x(t + \tau) \in \text{int}(\delta\mathcal{L})$, $\forall \tau > 0$ ¹.

Portanto, se \mathcal{L} é compacto (limitado e fechado) e contém a origem no seu interior, a contratividade garante estabilidade assintótica local para a origem de todas as trajetórias do sistema (2.6) que começam em \mathcal{L} .

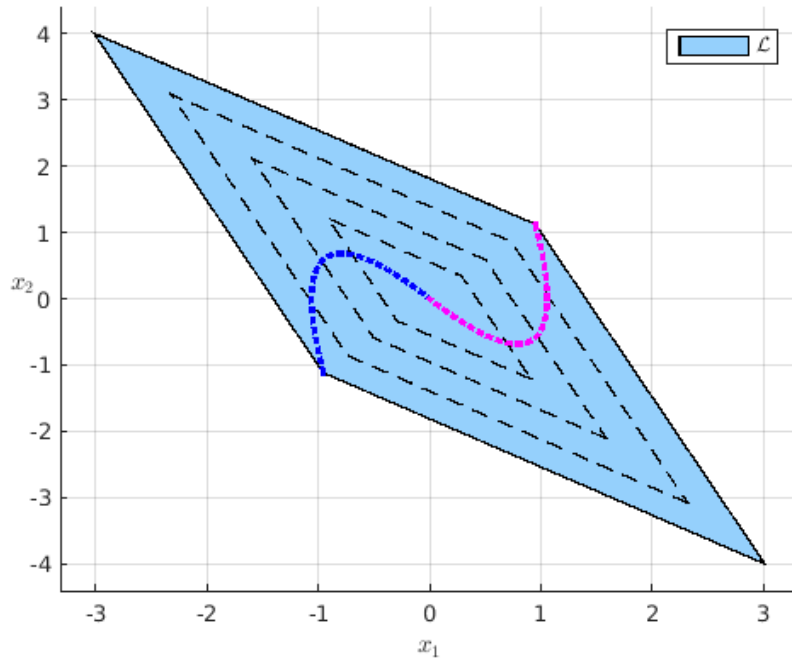
A definição acima pode ser aplicada a conjuntos convexos com diferentes formas, como elipsoidais e a composição de tais conjuntos; veja, por exemplo, a Figura 3 e 4, em que as trajetórias iniciadas no conjunto \mathcal{L} pertencem aos conjuntos homotéticos internos, representados pelos poliedros tracejados, convergindo para a origem. Nesta dissertação, considera-se conjuntos poliédricos compactos que contêm a origem em seu interior, representados como,

$$\mathcal{L} = \{x : Lx \leq \phi\}, \quad (2.7)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $r > n$, $\text{posto}(L) = n$ e $\phi \in \mathbb{R}^r$, com os elementos $\phi_j > 0$, $\forall i = 1, \dots, r$.

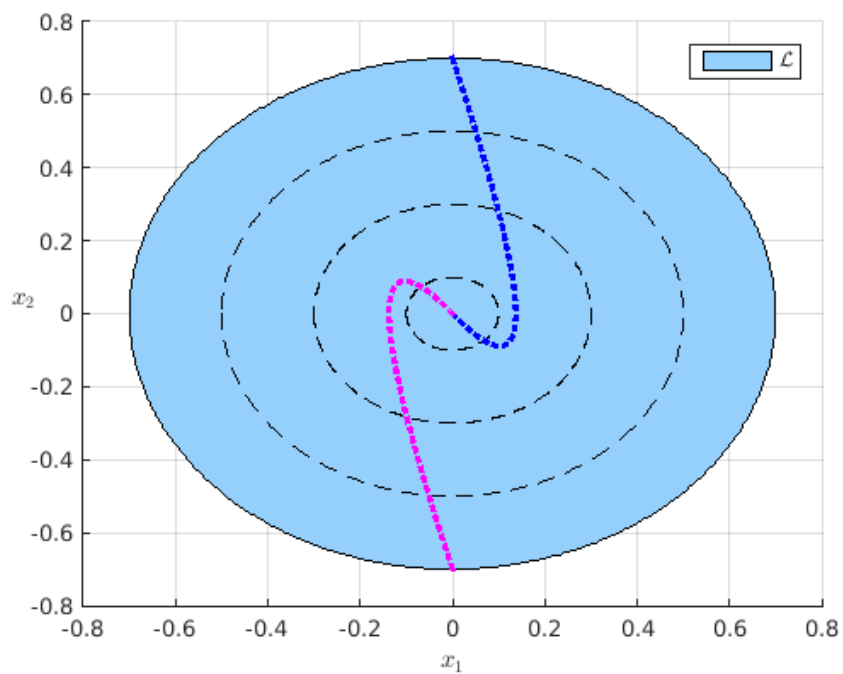
¹ O símbolo ∂ denota a fronteira do conjunto \mathcal{L} (TARBOURIECH et al., 2011).

Figura 3 – Poliedro \mathcal{L} invariante e contrativo, cujas trajetórias (---) e (- -) convergem para a origem



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 4 – Elipse \mathcal{L} invariante e contrativo, cujas trajetórias (---) e (- -) convergem para a origem



Fonte – Elaborado pela Autora

Teorema 1 (HENNET, J. C., 1995; CASTELAN; HENNET, J. C., 1993; BLANCHINI; MIANI, 2015) Um poliedro \mathcal{L} , (2.7), é um conjunto positivamente invariante do sistema (2.6), com fator de contratividade $\gamma_t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\exists H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que:

$$HL = LA, \quad (2.8a)$$

$$H\phi \leq \gamma_t \phi, \quad (2.8b)$$

em que:

- i) Caso contínuo no tempo: se $t \in \mathbb{R}_+$, então $\gamma_t \equiv -\epsilon \in (0, -\infty)$ e H é uma matriz de tipo Metzler (também dita essencialmente não negativa), ou seja,

$$h_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, \quad (2.9)$$

- ii) Caso discreto no tempo: se $t \in \mathbb{N}$, então $\gamma_t \equiv \lambda \in [0, 1)$ e H é uma matriz não negativa, ou seja,

$$h_{ij} \geq 0, \forall i \text{ e } j. \quad (2.10)$$

No caso discreto no tempo, por definição, \mathcal{L} é positivamente invariante com fator de contratividade $\lambda \in [0, 1)$, se:

$$x(t+1) \in \lambda \mathcal{L}, \forall x(t) \in \mathcal{L},$$

ou, equivalentemente,

$$Lx(t) \leq \phi \implies Lx(t+1) = LAx(t) \leq \lambda \phi. \quad (2.11)$$

Logo, aplicando o Lema 1 em (2.11), obtêm-se as relações algébricas de invariância (2.8a) e (2.8b), com a matriz não negativa H satisfazendo (2.10).

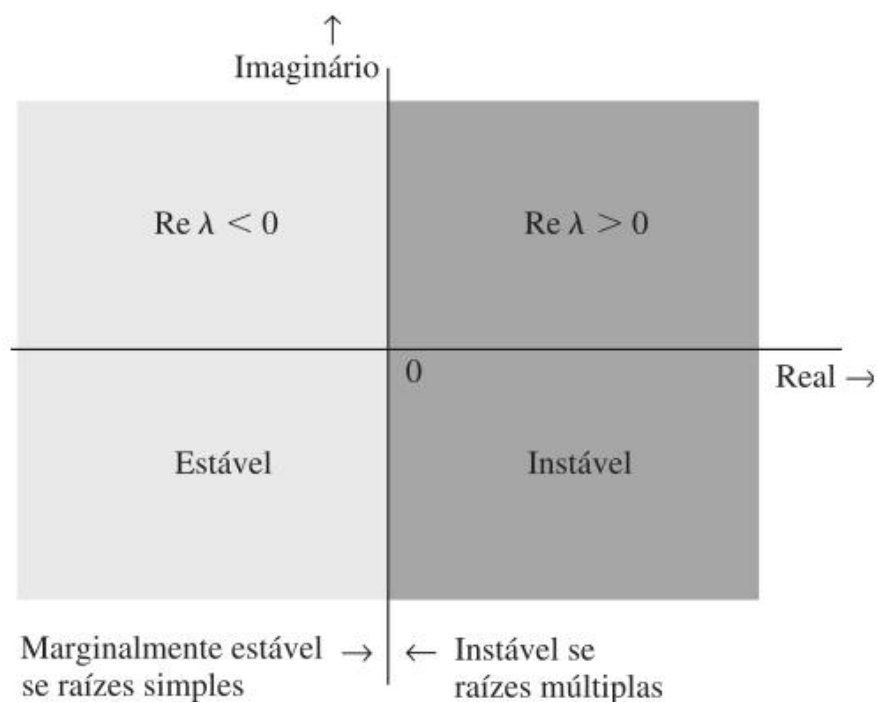
Para a demonstração no caso contínuo, aplica-se a ideia de que, estando sobre uma das faces do poliedro, o campo vetorial deve tender ao seu interior, como pode ser verificada na demonstração da Proposição 1 do artigo de Castelan e J. C. Hennes (1993), na qual se utiliza uma versão mais apropriada do Lema 1, ou pelo Teorema 4.33 do livro de Blanchini e Miani (2015).

Observação 2 A igualdade (2.8a) pode ser interpretada como uma transformação de similaridade generalizada que relaciona os conjuntos espectrais de A e H , dados por $\sigma(A) = \{\mu_j, j = 1 \dots n\}$ e $\sigma(H) = \{\xi_j, j = 1, \dots, r\}$, respectivamente. Assim, no caso em que $\text{posto}(L) = n < r$, temos $\sigma(A) \subseteq \sigma(H)$. Além disto, a condição (2.8b) implica nas seguintes propriedades da matriz H , que permitem concluir sobre a estabilidade dos autovalores de A :

- i) se $t \in \mathbb{R}_+$, a matriz H é de tipo Metzler e os elementos do conjunto $\sigma(H)$ são tais que $Re(\xi_j) \leq \bar{\xi} \leq -\epsilon$, em que $\bar{\xi}$ é obrigatoriamente um autovalor real pertencente ao conjunto espectral $\sigma(H)$ (CASTELAN; HENNET, J. C., 1993). Logo, no caso contínuo no tempo, $Re(\mu_j) \leq -\epsilon$ e, portanto, A é Hurwitz se $\epsilon > 0$;
- ii) se $t \in \mathbb{N}$, a matriz H é não negativa, e o seu conjunto espectral pertence ao círculo $|\xi_j| \leq \bar{\xi} < \lambda$, no interior do círculo unitário, em que $\bar{\xi}$ é um autovalor real e positivo igual ao raio espectral da matriz H (BERMAN; PLEMMONS, 1994a; HENNET, J. C., 1995). Portanto, no caso discreto no tempo, $|\mu_j| \leq \lambda$ e, assim, A é Schur estável se $\lambda < 1$.

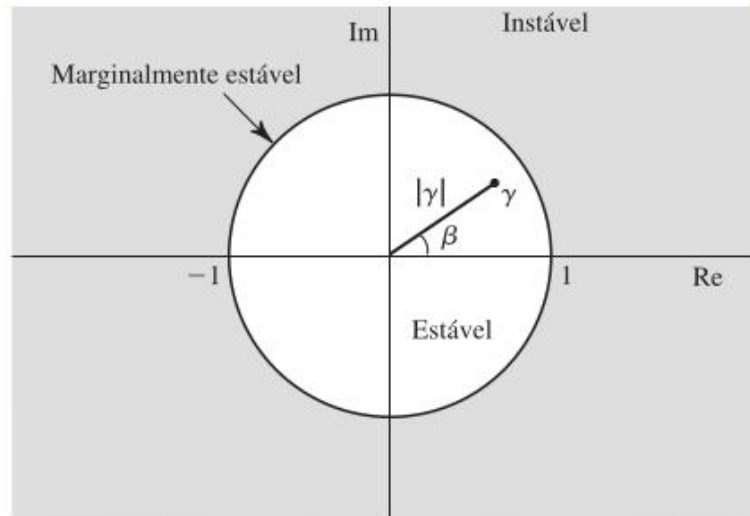
Adiante, apresentam-se os critérios de localização das raízes características e estabilidade do sistema em tempo contínuo e discreto nas Figura 5 e 6, respectivamente. Note que os autovalores da matriz A na Figura 5 são representados por λ e, na Figura 6, por γ . Nestas figuras, consideram-se os casos em que os autovalores sobre o eixo imaginário ou sobre o círculo unitário, respectivamente, estão associados a blocos de Jordan distintos e de ordem 1.

Figura 5 – Localização das raízes características e estabilidade do sistema em tempo contínuo



Fonte – Livro “Sinais e Sistemas Lineares” - Lathi (2006), pg. 196

Figura 6 – Localização das raízes características e estabilidade do sistema em tempo discreto



Fonte – Livro “Sinais e Sistemas Lineares” - Lathi (2006), pg. 284

2.2.2 Δ-invariância

Considere agora o sistema (2.4) sujeito a perturbações exógenas persistentes (limitadas em amplitude) pertencentes ao conjunto poliédrico:

$$\Delta = \{d(t) : Dd(t) \leq \mathbf{1}_d\}, \text{ com } D \in \mathbb{R}^{d \times m}. \quad (2.12)$$

Definição 4 (Conjunto Δ-invariante) Um conjunto \mathcal{L} é um conjunto Δ-invariante do sistema (2.4), se para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathcal{L}$ e para qualquer sinal exógeno persistente $d(t) \in \Delta$, a trajetória correspondente permanece limitada dentro de \mathcal{L} , $\forall t \geq 0$.

As condições algébricas necessárias e suficientes para Δ-invariância de um poliedro \mathcal{L} são as seguintes (veja Milani e Dórea (1996) e Milani *et al.* (1996)).

Teorema 2 O poliedro \mathcal{L} , (2.7), é um conjunto Δ-invariante do sistema (2.4) se, e somente se, existir uma matriz $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ que satisfaça as condições i) e ii) no Teorema 1 e $W \in \mathbb{R}^{r \times d}$ não negativa, de modo que as relações a seguir são verdadeiras:

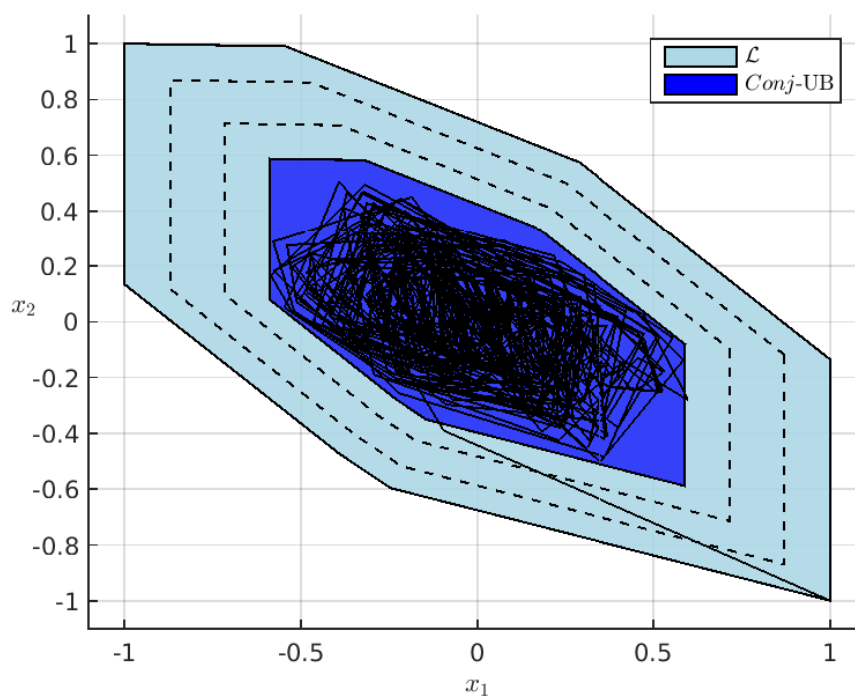
$$HL = LA, \quad (2.13a)$$

$$WD = LE, \quad (2.13b)$$

$$H\phi + W\mathbf{1}_d \leq \gamma_t\phi. \quad (2.13c)$$

Além das relações de Δ -invariância acima, também podemos considerar (2.8b) para garantir que a matriz A seja Hurwitz, no caso de sistemas em tempo contínuo, ou Schur, no caso de sistemas em tempo discreto. Nos casos em que os autovalores de A garantem a estabilidade, toda trajetória que emana do conjunto Δ -invariante \mathcal{L} converge para um conjunto ao redor da origem, para qualquer perturbação limitada em Δ , em um tempo finito $\bar{t} \geq 0$ e ali permanece para todo $t \geq \bar{t}$, como mostrado na Figura 7. Diz-se, então, que as trajetórias permanecem *ultimamente limitadas* nesse conjunto em torno da origem (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

Figura 7 – Poliedro \mathcal{L} Δ -invariante e contrativo, cuja trajetória (–) converge para o conjunto-UB ao redor da origem



Fonte – Elaborado pela Autora

2.2.3 Δ -invariância com Conjunto-UB Associado

No caso do sistema (2.4) ser discreto no tempo, ou seja,

$$x(t+1) = Ax(t) + Ed(t), \quad t \in \mathbb{N}^+, \quad (2.14)$$

pode-se caracterizar a Δ -invariância de um conjunto convexo externo \mathcal{L}_0 e a convergência em tempo finito para um conjunto associado \mathcal{L}_∞ como segue baseado em Brião (2019). Diremos, então, que o conjunto \mathcal{L}_∞ é um conjunto-UB.

Definição 5 Um conjunto poliédrico \mathcal{L}_0 é um conjunto Δ -invariante contrativo para o sistema (2.14), com o conjunto-UB $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$ se, para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$ e para qualquer $d_k \in \Delta$, a trajetória dos estados correspondente permanece em \mathcal{L}_0 , converge para \mathcal{L}_∞ , no tempo finito $\tilde{k} \geq 0$, e mantém-se em \mathcal{L}_∞ para todo $k \geq \tilde{k}$.

Considere, então, o conjunto (normalizado) \mathcal{L}_0 e o conjunto associado \mathcal{L}_∞ , definidos como:

$$\mathcal{L}_0 = \{x : Lx \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (2.15a)$$

$$\mathcal{L}_\infty = \{x : Lx \leq \rho\}, \quad (2.15b)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, para $r > n$, posto(L) = n , $\mathbf{0} < \rho = \bar{\rho} \mathbf{1}_r$ para algum escalar real $\bar{\rho} \in (0, 1]$, que garante a inclusão $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$. Observe que \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_∞ podem ter algumas restrições redundantes. Assim, consideramos que r , que é um limite superior para o número máximo de faces desses conjuntos poliédricos, define sua complexidade.

Teorema 3 O poliedro \mathcal{L}_0 , (2.15a), é um conjunto Δ -invariante do sistema (2.14), com o conjunto-UB \mathcal{L}_∞ associado dado por (2.15b) se, para $\lambda \in [0, 1)$, existe: um escalar $r > n$, um $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ suficientemente pequeno, um vetor não negativo $\rho \leq \mathbf{1}_r$, uma matriz não negativa $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, que satisfaçam as condições i) e ii) no Teorema 1 e as matrizes $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{r \times l_d}$, tais que as seguintes condições são verificadas:

$$HL = LA, \quad (2.16a)$$

$$GD = LE, \quad (2.16b)$$

$$H\mathbf{1}_r + G\mathbf{1}_{l_d} \leq \lambda \mathbf{1}_r, \quad (2.16c)$$

$$H\rho + G\mathbf{1}_{l_d} \leq (1 - \epsilon)\rho. \quad (2.16d)$$

Uma primeira parte da demonstração deste resultado pode ser obtida do Teorema 2, na sua versão em tempo discreto. Assim, neste Teorema 3, as relações (2.16a)-(2.16c) são condições necessárias e suficientes para a Δ -Invariância com contratividade do poliedro \mathcal{L}_0 . Já a relação (2.16d) em conjunto com (2.16a) e (2.16b), garante a Δ -invariância de \mathcal{L}_∞ . Já a demonstração de convergência em tempo finito das trajetórias que partem de $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$ para o conjunto-UB infinito pode ser realizada como na demonstração do Proposição 7 em Brião (2019).

2.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os resultados básicos no caso contínuo e discreto no tempo, sobre invariância positiva e Δ -invariância de conjuntos poliedrais, necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

3 Estabilização por Realimentação de Saída de Sistemas LITD com Perturbações Persistentes

O intuito neste capítulo é estender os resultados propostos no capítulo 5 da tese de Brião (2019) (Estabilização sob restrições de sistemas LDIT com perturbações via programação bilinear) e em Brião *et al.* (2020), no contexto de controle por Realimentação Estática de Saída (SOF), para o caso de leis de controle por Realimentação Dinâmica de Saída (DOF). Deste modo, para sistemas lineares sujeitos a perturbações persistentes e restrições sobre estados e controle, busca-se calcular, conjuntamente, a lei de controle DOF estabilizadora e um conjunto poliédrico Δ -invariante, com um conjunto-UB associado, para garantir o respeito as restrições existentes sobre as variáveis de estado e controle. Os resultados deste capítulo são restritos ao caso de sistemas em tempo discreto e foram reportados, inicialmente, em Santos e Castelan (2020).

Assim, na seção seguinte, coloca-se o problema de controle e apresenta-se a formulação utilizada para tratar o problema no espaço de estado aumentado do sistema em malha fechada. Em seguida, a seção é dedicada a apresentação das extensões propostas, tanto em termos da caracterização algébrica da propriedade de Δ -invariância, quanto da abordagem de projeto por programação bilinear e otimização. Por sua vez, na seção 3.4 é apresentado um exemplo numérico para mostrar algumas características da ferramenta de projeto. Finalmente, na última seção, as conclusões deste estudo são apresentadas.

3.1 Apresentação do Problema

Inicialmente, considere que o processo a ser controlado seja representado pelo seguinte sistema Linear Invariante no Tempo Discreto (LITD), sujeito a perturbações persistentes:

$$x_{k+1} = A_p x_k + B_p u_k + E_p p_k, \quad (3.1a)$$

$$y_k = C_p x_k + N_p \eta_k, \quad (3.1b)$$

em que $k \in \mathbb{N}$ representa o índice de tempo, $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ as entradas de controle, $y_k \in \mathbb{R}^p$ as saídas mensuradas, $p_k \in \mathbb{R}^s$ e $\eta_k \in \mathbb{R}^q$ são as perturbações. As matrizes do sistema têm as dimensões apropriadas e os pares (A_p, B_p) e (A_p, C_p) são controlável e observável, respectivamente.

Além disto, as entradas de estado e controle são limitadas a evoluir dentro de alguns conjuntos poliédricos e as perturbações exógenas são consideradas

persistentes (ou seja, com amplitude limitada). Assim, sem perda de generalidade, estas restrições são representados pelos seguintes conjuntos poliédricos:

$$\mathcal{X} = \{x_k : X_p x_k \leq \mathbf{1}_{l_x}\}, \text{ com } X_p \in \mathbb{R}^{l_x \times n}, \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{U} = \{u_k : U_p u_k \leq \mathbf{1}_{l_u}\}, \text{ com } U_p \in \mathbb{R}^{l_u \times m}, \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{P} = \{p_k : P_p p_k \leq \mathbf{1}_{l_p}\}, \text{ com } P_p \in \mathbb{R}^{l_p \times s}, \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{N} = \{\eta_k : R_p \eta_k \leq \mathbf{1}_{l_r}\}, \text{ com } R_p \in \mathbb{R}^{l_r \times q}. \quad (3.2d)$$

Considere uma lei de controle de tipo DOF descrita pelo sistema LITD:

$$x_{k+1}^c = (A_c + \mathbb{I}_{n_c})x_k^c + B_c y_k, \quad (3.3a)$$

$$u_k = C_c x_k^c + D_c y_k, \quad (3.3b)$$

em que $x_k^c \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estado, $u_k^c = y_k \in \mathbb{R}^p$ a entrada do controlador e $y_k^c = u_k \in \mathbb{R}^m$ é a saída que gera a ação de controle desejada. As matrizes do sistema têm as dimensões $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ e $D_c \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

O sistema em malha fechada composto pela planta (3.1) e o controlador DOF (3.3), pode ser representado como segue por um sistema aumentado a controlar:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \end{bmatrix} p_k, \\ \begin{bmatrix} y_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_p \\ 0 \end{bmatrix} \eta_k, \end{cases} \quad (3.4)$$

e realimentado por uma lei de controle SOF aumentada sob a forma:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Definindo-se os vetores:

$$x_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad u_k^a = \begin{bmatrix} u_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_a}, \quad y_k^a = \begin{bmatrix} y_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_a}, \quad d_k = \begin{bmatrix} p_k \\ \eta_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_d},$$

em que \bar{u}_k e \bar{y}_k são vetores fictícios de controle e saída, respectivamente, e $n_a = n + n_c$, $m_a = m + n_c$, $p_a = p + n_c$ e $l_d = s + q$, resulta no sistema aumentado em malha fechada:

$$x_{k+1}^a = (A + \mathbb{B}K_C)x_k^a + \mathbb{D}d_k, \quad (3.6)$$

em que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C})$ deve ser Schur estável, $\mathbb{D} = [\mathbb{E} \mid \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{N}] \in \mathbb{R}^{n_a \times l_d}$, e, por construção, tem-se:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} E_p & B_p D_c N_p \\ 0 & B_c N_p \end{bmatrix} \text{ e } \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}.$$

Nota-se que, em geral, o problema de controle por DOF pode ser reescrito sob a forma de um problema por SOF para um sistema aumentado por n_c integradores e, portanto, de ordem $n + n_c$. Vale salientar que o sistema aumentado por integradores, ao invés de n_c atrasos puros como delineado em Brião *et al.* (2020), é a alternativa prioritariamente utilizada por projetistas de sistemas de controle (FRANKLIN *et al.*, 2015).

Então, para tratar o problema de controle sob restrições, faz-se necessário descrever as restrições (3.2) para o sistema aumentado e adaptar a abordagem de projeto SOF para o caso DOF. Logo, reescreve-se (3.2a) e (3.2b) como segue:

$$\mathcal{X}_a = \{x_k^a : \mathbb{X}x_k^a \leq \mathbf{1}_{l_x}\}, \text{ com } \mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_p & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_x \times n_a}, \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{U}_a = \{u_k^a : \mathbb{U}u_k^a \leq \mathbf{1}_{l_U}\}, \text{ com } \mathbb{U} = \begin{bmatrix} \mathbb{U}_1 \\ \mathbb{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_p & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_U \times m_a}, \quad (3.7b)$$

em que $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{l_x \times n}$ e $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{l_U \times m}$, $l_x = l_x + l_{\tilde{x}}$ e $l_U = l_U + l_{\tilde{u}}$, são matrizes auxiliares que permitem, em particular, impor limites sobre as variáveis de estado do controlador. Além disto, as perturbações exógenas persistente, pertencentes aos conjuntos (3.2c) e (3.2d), são reformuladas como pertencentes ao conjunto poliédrico a seguir:

$$\Delta = \{d_k : \Pi d_k \leq \mathbf{1}_{l_\pi}\}, \text{ com } \Pi = \text{diag}\{P_p, R_p\} \in \mathbb{R}^{l_\pi \times l_d}, \quad (3.8)$$

com $l_\pi = l_p + l_r$. Também, a restrição do vetor de controle (3.2b), pode ser reescrita de modo que o seu domínio sejam os estados x_k^a e as perturbações η_k . Então, considerando (3.4), (3.5) e (3.7b), tem-se o seguinte poliedro definido a partir da limitação do controle \mathcal{U} :

$$\mathcal{U}_y^a = \left\{ \begin{bmatrix} x_k^a \\ \eta_k \end{bmatrix} : \mathbb{U}_1 \mathbb{K} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^a \\ \eta_k \end{bmatrix} \leq \mathbf{1}_{l_U} \right\}, \text{ com } \mathbb{N} = \begin{bmatrix} N_p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Pode-se, então, formular o problema de controle sob restrições por DOF como segue, estendendo-se assim o problema SOF inicialmente formulado por Brião (2019) e Brião *et al.* (2020).

Problema 1 Encontre uma matriz DOF linear estabilizadora, \mathbb{K} em (3.5), um conjunto “grande” $\mathcal{L}_0^a \subseteq (\mathcal{X}_a \cap \mathcal{U}_y^a)$ e um conjunto “pequeno” $\mathcal{L}_\infty^a \subseteq \mathcal{L}_0^a$, de modo que para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathcal{L}_0^a \setminus \mathcal{L}_\infty^a$ e para qualquer perturbação persistente $d_k \in \Delta$, a trajetória associada não sai de $\mathcal{X}^a \cap \mathcal{U}_y^a$, converge para \mathcal{L}_∞^a em tempo finito \tilde{k} , e não sai de \mathcal{L}_∞^a para todo $k \geq \tilde{k}$.

Em função do problema colocado, busca-se determinar uma solução representada pela tripla $(\mathbb{K}, \mathcal{L}_0^a, \mathcal{L}_\infty^a)$, composta por uma matriz SOF aumentada, um conjunto poliédrico Δ -invariante e um conjunto UB-associado, semelhante ao cenário ilustrado na Figura 7 do capítulo anterior.

3.2 Resultados Principais

A partir da formulação anterior, a proposição a seguir resume as soluções consideradas para o Problema 1, que serão definidas por um conjunto de condições iniciais Δ -invariante (\mathcal{L}_0^a) e um conjunto-UB associado (\mathcal{L}_∞^a), como segue:

$$\mathcal{L}_0^a = \{x_k^a : \mathbb{L}x_k^a \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{L}_\infty^a = \{x_k^a : \mathbb{L}x_k^a \leq \rho\}, \quad (3.10b)$$

com $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^{r \times n_a}$, $r > n_a$, $\text{posto}(\mathbb{L}) = n_a$ e $\mathbf{0} < \rho = \bar{\rho}\mathbf{1}_r$, para algum escalar real $\bar{\rho} \in (0, 1]$, o que garante $\mathcal{L}_\infty^a \subseteq \mathcal{L}_0^a$.

Proposição 1 O Problema 1 tem uma solução formada pelos poliedros Δ -invariante (3.10a), com conjunto-UB associado (3.10b), se, para $\lambda \in [0, 1)$, existe um escalar $r > n_a$ e um $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ suficientemente pequeno, matrizes \mathbb{K} , \mathbb{L} e \mathbb{V} , um vetor não negativo $\rho \leq \mathbf{1}_r$ e matrizes não negativas $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{r \times l_\pi}$, $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{l_x \times r}$, $\mathbb{Q}_1 \in \mathbb{R}^{l_u \times r}$ e $\mathbb{Q}_2 \in \mathbb{R}^{l_u \times l_r}$, tais que as seguintes condições são

verificadas:

$$\mathbb{H}\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbf{K}\mathbf{C}), \quad (3.11a)$$

$$\mathbb{G}\mathbf{\Pi} = \mathbf{L}\mathbf{D}, \quad (3.11b)$$

$$\mathbb{H}\mathbf{1}_r + \mathbb{G}\mathbf{1}_{l_\pi} \leq \lambda\mathbf{1}_r, \quad (3.11c)$$

$$\mathbb{H}\rho + \mathbb{G}\mathbf{1}_{l_\pi} \leq (1 - \epsilon)\rho, \quad (3.11d)$$

$$\mathbb{T}\mathbf{L} = \mathbf{X}, \quad (3.11e)$$

$$\mathbb{T}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_x}, \quad (3.11f)$$

$$\mathbb{Q}_1\mathbf{L} = \mathbf{U}_1\mathbf{K}\mathbf{C}, \quad (3.11g)$$

$$\mathbb{Q}_2\mathbf{R} = \mathbf{U}_1\mathbf{K}\mathbf{N}, \quad (3.11h)$$

$$\mathbb{Q}_1\mathbf{1}_r + \mathbb{Q}_2\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_u}, \quad (3.11i)$$

$$\mathbb{V}\mathbf{L} = \mathbf{I}_{n_a}. \quad (3.11j)$$

Prova: Pode ser realizada seguindo os passos delineados após o Teorema 3. Desta forma, usando a extensão do Lema de Farkas, apresentada em J. C. Hennes (1995), mostra-se que: *i*) as relações (3.11a)-(3.11d) são equivalentes a Δ -Invariância de (3.10a), com o conjunto-UB associado (3.10b), com convergência em tempo finito das trajetórias partindo de $\mathcal{L}_0^a \setminus \mathcal{L}_\infty^a$ para o conjunto \mathcal{L}_∞^a ; *ii*) as relações (3.11e)-(3.11f) e (3.11g)-(3.11i) são equivalentes à inclusão $\mathcal{L}_0^a \subseteq \mathcal{X}_a$ e à admissibilidade de \mathcal{L}_0^a em relação a \mathcal{U}_y^a , para todo $x_k^a \in \mathcal{L}_0^a$ e $\eta_k \in \mathcal{N}$, respectivamente; e *iii*) $\text{posto}(\mathbb{L}) = n_a < r$ se, e somente se, \mathbb{L} admite a pseudo-inversa (à esquerda) $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^{n_a \times r}$, como (3.11j).

□

Observação 3 A estabilidade de Schur de $(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbf{K}\mathbf{C})$ também pode ser mostrada a partir das condições algébricas na Proposição 1. Para isto, primeiro lembre-se que, por hipótese, $r > n_a$ e $\text{posto}(\mathbb{L}) = n_a$. Então, a partir da igualdade (3.11a), $\sigma(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) \subset \sigma(\mathbb{H})$, onde \mathbb{H} é necessariamente não negativa, o que garante que $\sigma(\mathbb{H})$ pertence ao interior do círculo unitário. Além disso, define-se um autovalor real positivo, denominado μ , que é igual ao seu raio espectral e satisfaz $\tilde{\mu} < (1 - \epsilon)$ (BERMAN; PLEMMONS, 1994b; HENNET, J. C., 1995). Portanto, $(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbf{K}\mathbf{C})$ é necessariamente Schur estável. Mais especificamente, para qualquer $\mu \in \sigma(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbf{K}\mathbf{C})$, isso mostra que $|\mu| \leq \tilde{\mu}$.

3.3 Estratégia de Projeto por Otimização Bilinear

Na solução proposta para o Problema 1, as equações (3.11a), (??), (3.11e), (3.11g), (3.11h) e (3.11j) possuem produtos entre variáveis matriciais, incluindo o ganho de controle \mathbb{K} , e os termos bilineares $\mathbb{H}_2\rho$ e $\mathbb{W}\rho$ nas desigualdades (3.11c) e (3.11d), respectivamente. Porém, estes produtos bilineares podem ser apropriadamente considerados como restrições de projeto e técnicas de otimização não linear adaptadas, podendo ser usadas para encontrar soluções do Problema 1, como será discutido a seguir.

Da forma similar à proposta de Brião *et al.* (2020), propõe-se realizar um compromisso entre ampliar o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{L}_0^a ao longo de algumas direções em \mathbb{R}^{n_a} (TARBOURIECH *et al.*, 2011), e reduzir o tamanho relativo do conjunto-UB \mathcal{L}_∞^a . Define-se o conjunto de direções:

$$\mathcal{V} = \{\gamma_t v_t, t = 1, \dots, \bar{t}\}, \quad (3.12)$$

em que $v_t \in \mathbb{R}^{n_a}$ são vetores dados e $\gamma_t \in \mathbb{R}^+$ são fatores de escala a serem otimizados, de modo que a inclusão $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L}_0^a$ seja satisfeita ou, equivalentemente:

$$\mathbb{L}\gamma_t v_t \leq \mathbf{1}_r, t = 1, \dots, \bar{t}. \quad (3.13)$$

Em seguida, considere uma variável escalar $\bar{\rho} \in (0,1]$ definindo um limite para o tamanho relativo do conjunto-UB $\mathcal{L}_\infty^a \subseteq \mathcal{L}_0^a$. Portanto, considerando que $r > n_a$, \mathcal{V} e $\bar{\lambda} < 1$ são escolhidos *a priori*, propõe-se o seguinte problema básico de otimização bilinear para encontrar soluções para o projeto do Problema 1:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{maximizar}} && \Phi(\gamma_t, \bar{\rho}) = \phi(\gamma_t) - \alpha \bar{\rho}, \\ & \text{sujeito a} && (3.11) - (3.13), \\ & && 0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}, \\ & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \quad \ell = 1, \dots, \bar{\ell}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

com $\Gamma = (\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2, \mathbb{T}, \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{G}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \lambda, \gamma_t, \bar{\rho})$, em que:

- i) através da escolha do fator de ponderação $\alpha \in \mathbb{R}_+$, a função objetivo proposta $\Phi(\gamma_t, \bar{\rho})$ permite ponderar a maximização do conjunto externo \mathcal{L}_0^a através dos fatores de escala associados as direções em \mathcal{V} , considerando $\phi(\gamma_t) = \sum_{t=1}^{\bar{t}} \gamma_t$, e o tamanho relativo de um conjunto interno \mathcal{L}_∞^a , representado por $\bar{\rho}$.
- ii) as restrições adicionais, representadas por $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$, podem ser imposta as variáveis de decisão para diferentes fins, incluindo os numéricos discutidos

em Brião *et al.* (2018) e Brião (2019) e, também, brevemente relatados posteriormente nesta seção.

Note que, para diferentes escolhas do parâmetro de ponderação α , o programa de otimização (3.14) pode fornecer soluções diferentes para o Problema 1, dependendo também das opções de λ , \mathcal{V} e r .

Observação 4 *Entre as possíveis opções para o conjunto \mathcal{V} , (3.12), o projetista pode escolher, por exemplo, um conjunto de direções definidas a partir dos vértices de \mathcal{X} , ou um conjunto de direções normalizadas, possivelmente igualmente espaçadas no espaço de estados, cuja escolha de \bar{t} permite cobrir uma quantidade significativa de direções para o processo de otimização.*

Observação 5 *Ademais, o problema de otimização não linear (3.14), cujas restrições são formuladas por matrizes e vetores, pode ser reescrito no formato elemento a elemento, sendo mais adequado para a linguagem AMPL empregada pelo KNITRO. Portanto, esta reformulação se encaixa bem na abordagem da otimização bilinear e para fins de projeto de controle (BRIÃO *et al.*, 2018). Por fim, considera-se $\nu \in \{1, \dots, r\}$ e $\iota \in \{1, \dots, p_a\}$ as restrições $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$ estabelecidas, para determinar os limites inferior e superior aos elementos de \mathbb{K} , \mathbb{L} e \mathbb{V} :*

$$\underline{k} \leq k_{sv} \leq \bar{k}, \quad \underline{l} \leq l_{ij} \leq \bar{l} \quad \text{e} \quad \underline{v} \leq v_{ji} \leq \bar{v},$$

em que $\underline{k}, \bar{k}, \underline{l}, \bar{l}, \underline{v}, \bar{v} \in \mathbb{R}$. A imposição destes limites é uma estratégia importante em programação matemática para tratar problemas não lineares ou não convexos, para reduzir o espaço de busca, promovendo assim uma busca mais eficiente de soluções para o problema considerado. Assim, além da escolha dos parâmetros de projeto de controle, a experiência do usuário na escolha dos limites superior e inferior mencionados também afeta a busca computacional e o tempo para obter soluções de forma eficiente.

Vale ressaltar que algumas variáveis de decisão do problema de otimização (3.14) são limitadas por definição ou por construção. Por exemplo, os elementos das matrizes $\mathbb{T}, \mathbb{Q}, \mathbb{W}$ são todos não negativos, por definição e da matriz \mathbb{H} são não negativos ou essencialmente não negativos. Da mesma forma, as variáveis escalares envolvidas $\phi(\gamma_t)$, α e \bar{p} devem ser não negativas. Além disso, as amplitudes de restrição de estado e controle fornecidas podem orientar o projetista na escolha de limites compatíveis para \mathbb{L} e, conseqüentemente, \mathbb{V} .

3.4 Exemplo Numérico

No exemplo numérico adiante, os seguintes limites inferiores e superiores foram atribuídos aos elementos de \mathbb{K} , \mathbb{L} e \mathbb{V} : $\underline{k} = \underline{l} = \underline{v} = -1000$, $\bar{k} = \bar{l} = \bar{v} = 1000$. Além disto, a partir das desigualdades que envolvem as matrizes não negativas \mathbb{H}_1 , \mathbb{H}_2 , \mathbb{W} , \mathbb{G} e \mathbb{Z} , seus elementos são superiormente limitados por $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{w} = \bar{g} = \bar{z} = 1$. Ainda, os escalares não negativos γ e λ são delimitados por $\underline{\gamma}_s = 0,000001$, $\bar{\gamma}_s = 1000$ e $\bar{\lambda} = 0,99999$. O estabelecimento destes limites é realizado, via as restrições $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$ do programa bilinear (3.14), para delimitar o espaço de busca de soluções.

Considere, então, o sistema (3.6) representado pelas seguintes matrizes adaptadas de Gupta e Falcone (2019):

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas perturbações admissíveis e restrições de estados são dadas por:

$$\mathbb{P} = \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad \text{e } \mathbb{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que os dados acima representam uma planta monovariável de 2ª-ordem, conforme (3.1) a ser controlada por um compensador dinâmico de 1ª-ordem. Além das restrições sobre os estados da planta, $|x_{1,2}| \leq 1$, a matriz \mathbb{X} também permite representar uma restrição sobre os estados do controlador sob a forma $|x_c| \leq 1$.

Diferentes projetos de controladores dinâmicos podem ser obtidos usando o *solver* KNITRO (BYRD *et al.*, 2006) para resolver (3.14). Em particular, para $\bar{t} = 16$ direções igualmente espaçadas no espaço de estado da planta, com início no ponto $[1,0]$, diferentes valores do fator de ponderação α e para $r = 2n_a = 6$ e $r = 3n_a = 9$, os resultados obtidos estão resumidos na Tabela 1 e 2, respectivamente. Nestas tabelas, na segunda e terceira colunas, mostra-se o volume de cada conjunto $\mathcal{L}_0^a \in \mathbb{R}^3$ e área da seção de cada \mathcal{L}_0^a sobre o espaço de estados da planta. Nas colunas seguintes, tem-se os resultados numéricos obtidos para os fatores $\bar{\rho}$ e λ e os parâmetros que compõem o controlador DOF.

Tabela 1 – Projetos DOF com $r = 6$ e $\bar{t} = 16$

α	Volume	Área	$\bar{\rho}$	λ	$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$
3	0,7072	2,2236	0,8386	0,9979	$\begin{bmatrix} -0,6995 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,0008 \end{bmatrix}$
6	0,6409	2,0234	0,6415	0,9943	$\begin{bmatrix} -0,7382 & 0,0000 \\ -0,0052 & -0,9995 \end{bmatrix}$
10	0,6041	1,8837	0,5791	0,9934	$\begin{bmatrix} -0,7614 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,9999 \end{bmatrix}$
20	0,4796	1,5891	0,4798	0,9899	$\begin{bmatrix} -0,7982 & 0,8848 \\ -0,0302 & -1,1325 \end{bmatrix}$

Fonte – Elaborado pela Autora

Verifica-se que, quanto menor o fator de ponderação α , maior são os valores do parâmetro $\bar{\rho}$, o volume de \mathcal{L}_0^a e a área de cada seção de \mathcal{L}_0^a , visto que prioriza-se ampliar as direções $v_t \in \mathbb{R}^{n_a}$. Especificamente, os valores do parâmetro $\bar{\rho}$ diminuem à medida que aumenta-se o valor de α , tendo em vista o peso maior dado para a minimização do tamanho relativo do conjunto-UB interno. Isto mostra que a função objetivo foi efetiva para tratar o compromisso existente entre os tamanhos relativos dos conjuntos \mathcal{L}_0^a e \mathcal{L}_∞^a . Observa-se, também, que os valores dos ganhos do controlador e do coeficiente λ variam em cada caso. Além disto, vale ressaltar que valores maiores que os agora relatados foram obtidos para $r = 9$, como mostra a Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{t} = 16$

α	Volume	Área	$\bar{\rho}$	λ	$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$
3	0,9261	2,6101	0,8448	0,9983	$\begin{bmatrix} -0,6343 & 0,2185 \\ 0,0000 & -1,0000 \end{bmatrix}$
6	1,0749	2,4281	0,7071	0,9983	$\begin{bmatrix} -0,6687 & 0,0298 \\ 0,1450 & -0,9647 \end{bmatrix}$
10	0,7070	2,2426	0,5828	0,9961	$\begin{bmatrix} -0,7071 & -0,5897 \\ -0,0629 & -0,7940 \end{bmatrix}$
20	0,6358	1,9012	0,4962	0,9924	$\begin{bmatrix} -0,7524 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,0000 \end{bmatrix}$

Fonte – Elaborado pela Autora

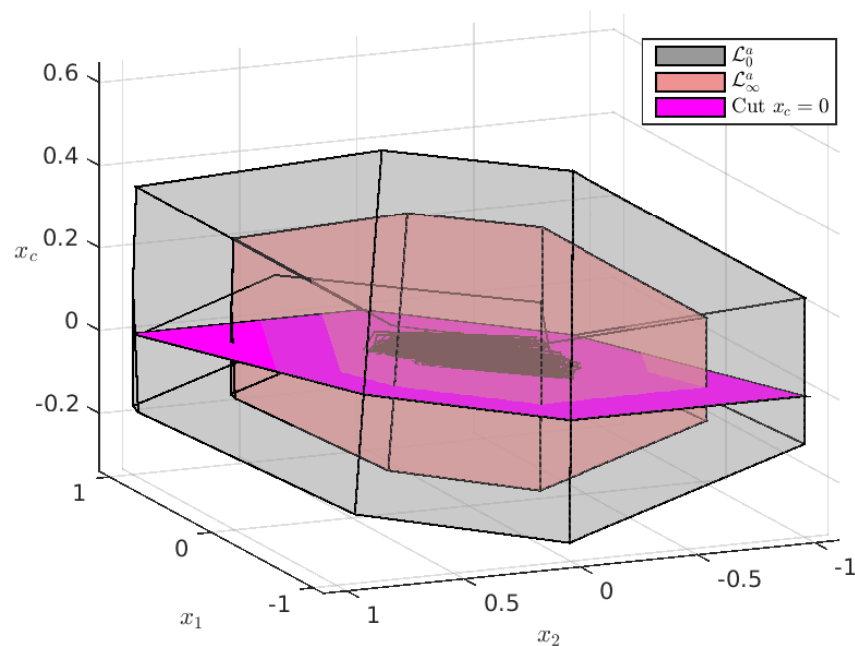
Na Figura 8, pode-se visualizar graficamente a solução obtida para $\alpha = 6$, na qual representa-se os conjuntos $\mathcal{L}_0^a, \mathcal{L}_\infty^a \in \mathbb{R}^3$, e na Figura 9 os seus cortes no espaço de estado \mathbb{R}^2 da planta. A trajetória dos estados, representada

em preto, partem de um vértice de \mathcal{L}_0^a , evoluem no seu interior e permanecem confinadas no conjunto-UB, \mathcal{L}_∞^a , conforme esperado. Os conjuntos $\mathcal{L}_0^a, \mathcal{L}_\infty^a \in \mathbb{R}^3$ são determinados pela matriz:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 0,4972 & 1,0276 & -0,0220 & 1,0000 & \dots \\ -1,4972 & -1,2330 & -0,0788 & 0,0000 & \dots \\ 0,0000 & 3,3419 & 0,7282 & 0,0000 & \dots \\ -1,0000 & -0,0005 & 1,0276 & -0,5040 & -1,0000 \\ 0,0000 & 1,0005 & -1,2330 & 1,4938 & 1,2468 \\ 0,0000 & 0,0000 & -6,8903 & 0,08900 & 0,0222 \end{bmatrix}^T.$$

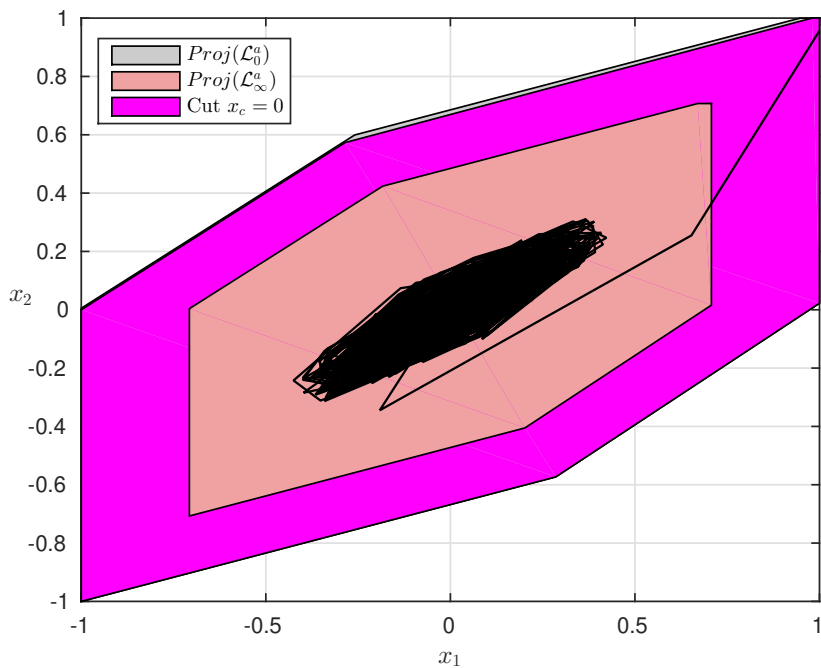
Na Figura 11, apresenta-se a ação de controle u_k associada à trajetória traçada na Figura 8, bem como a evolução do estado do controlador dinâmico, x_k^c , que variam em torno da origem. Ainda, na Figura 10, mostra-se a evolução dos estados x_1 e x_2 da planta controlada, os quais também convergem para um entorno da origem devido a aplicação das perturbações persistentes. Isto também pode ser observado nas projeções ortogonais sobre o espaço de estado da planta, conforme a Figura 9.

Figura 8 – Poliedros Δ -invariante e UB para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$



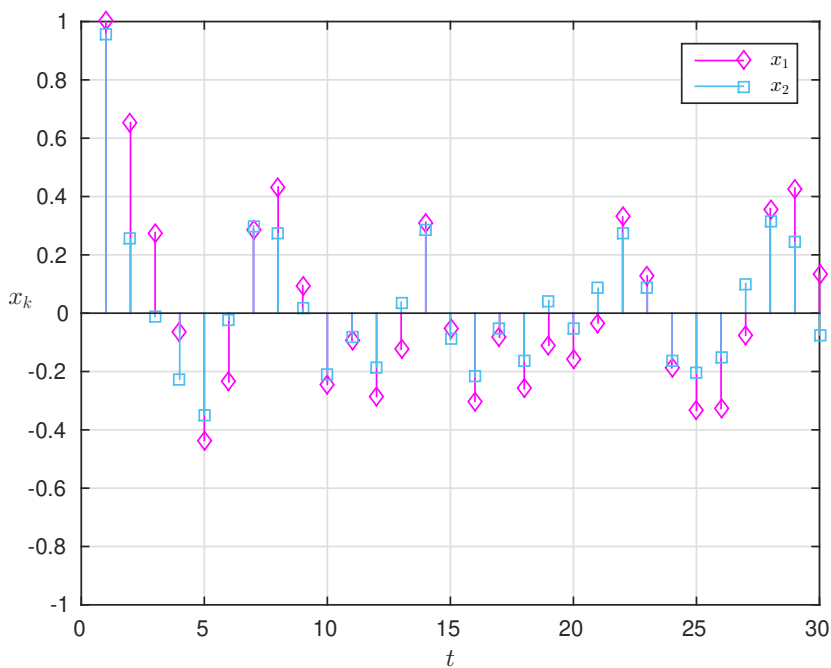
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 9 – Projeções ortogonais para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$



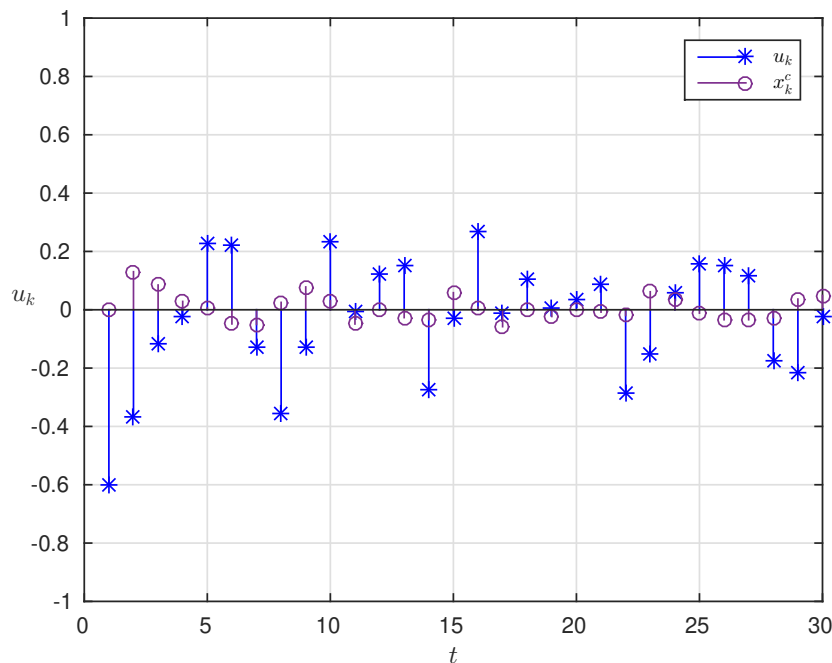
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 10 – Estados do sistema para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 11 – Ação de controle para $\alpha = 6$, $r = 9$ e $\bar{t} = 16$



Fonte – Elaborado pela Autora

3.5 Conclusão

Neste capítulo foi descrito um estudo inicial desenvolvido no decorrer do mestrado, consistindo de uma extensão do Capítulo 5 da Tese de Doutorado de Stephanie Loi Brião, defendida no PPGEAS (BRIÃO, 2019; BRIÃO *et al.*, 2020). Assim, apresentou-se uma abordagem baseada em programação bilinear para a síntese conjunta de uma lei de controle por DOF e de um conjunto poliédrico Δ -invariante, com um conjunto-UB associado, que garantem a estabilidade assintótica local das trajetórias, respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle, na presença de perturbações externas persistentes. Através da escolha do parâmetro de projeto α , a função objetivo considerada permite ponderar a maximização do conjunto Δ -invariante em determinadas direções, e um limite superior para o tamanho relativo do conjunto-UB interno. As soluções ótimas locais para o problema de otimização proposto foram obtidas de forma eficiente pelo *solver* KNITRO. Ainda, com a abordagem bilinear proposta, pode-se tratar restrições não simétricas e considerar compensadores de ordem reduzida, o que não é um recurso frequentemente encontrado em outras abordagens, como as baseadas em LMIs (TARBOURIECH *et al.*, 2011).

4 Estabilização por Realimentação de Saída de Sistemas LIT sob Restrições

Uma nova abordagem baseada em programação bilinear é apresentada de forma unificada para a síntese de leis de controle por Realimentação Estática¹ e Dinâmica² de Saída, para sistemas lineares invariantes em tempo contínuo e discreto. Mais especificamente, considera-se que o sistema está sujeito as restrições sobre os estados e as variáveis de controle, não necessariamente simétricas em relação à origem, e deseja-se sintetizar uma lei de controle e um conjunto poliédrico positivamente invariante que contenha um dado conjunto de estados iniciais admissíveis de interesse para o projeto. O problema de otimização proposto tem como restrições as condições algébricas necessárias e suficientes, que descrevem a invariância do conjunto a ser determinado. Além disto, a função objetivo em questão, inspirada em Milani *et al.* (1996) e Brião *et al.* (2018), permite ponderar a velocidade de convergência das trajetórias para a origem e o esforço de controle.

Vale ressaltar que os resultados a seguir foram publicados no Congresso Brasileiro de Automática (SANTOS *et al.*, 2020) e, nesse capítulo, alguns diferenciais são acrescentados, a fim de obter melhores resultados no caso DOF em tempo discreto. A organização deste capítulo é estruturada como segue. Na primeira seção, é apresentado o problema discutido e, na sequência, as leis de controle SOF e DOF são desenvolvidas nas seções 3.2 e 3.3, respectivamente, nas quais são expressas tanto as caracterizações algébricas da propriedade de invariância positiva, como também os problemas de otimização bilinear. Ainda, na seção 3.4, exemplos numéricos referentes à abordagem proposta são ilustrados em tempo discreto e contínuo e, também, um exemplo comparativo relacionado a um projeto via LMI. Por fim, na última seção, as conclusões dos resultados obtidos são apresentadas.

4.1 Apresentação do Problema

Considere a planta a ser controlada representada por um sistema LIT em malha aberta, dado por:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \quad (4.1a)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (4.1b)$$

¹ do inglês, *Static Output Feedback (SOF)*

² do inglês, *Dynamic Output Feedback (DOF)*

em que $t \in \mathbb{R}_+$ se o sistema é em tempo contínuo ou $t \in \mathbb{N}$ no caso de tempo discreto, com:

$$\varphi[x_p(t)] = \begin{cases} \frac{dx_p(t)}{dt}, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ x_p(t+1), & \text{se } t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $x_p(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ é o vetor de estado, $u_p(t) \in \mathbb{R}^{m_p}$ a entrada de controle e $y_p(t) \in \mathbb{R}^{p_p}$ a saída mensurada. Além disto, $A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times m_p}$ e $C_p \in \mathbb{R}^{p_p \times n_p}$ e os pares (A_p, B_p) e (A_p, C_p) são controlável e observável, respectivamente.

O sistema possui as seguintes restrições sobre as variáveis de estado e controle, as quais são limitadas a evoluir no interior de conjuntos poliédricos na forma:

$$\mathcal{X} = \{x_p(t) : X_p x_p(t) \leq \mathbf{1}_x\}, \text{ com } X_p \in \mathbb{R}^{l_x \times n_p}, \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{U} = \{u_p(t) : U_p u_p(t) \leq \mathbf{1}_u\}, \text{ com } U_p \in \mathbb{R}^{l_u \times m_p}, \quad (4.3b)$$

em que $\mathbf{1}_{l_*} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{l_*}$.

Adicionalmente, considera-se um conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse para o sistema em malha fechada, dado por:

$$\mathcal{D} = \{x_p(0) : D x_p(0) \leq \mathbf{1}_d\}, \text{ com } D \in \mathbb{R}^{l_d \times n_p}. \quad (4.4)$$

Este conjunto é de escolha do projetista e deve ser compatível com as restrições impostas sobre os estados, ou seja, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ (TARBOURIECH *et al.*, 2011).

Neste cenário, será considerado o problema de estabilização local do sistema (4.17) sujeito a restrições (4.3a), (4.3b) e (4.4), utilizando leis de controle por realimentação de saída, estática e dinâmica, definidas como segue:

- *Realimentação estática de saída (SOF):*

$$u_p(t) = K_p y_p(t), \quad K_p \in \mathbb{R}^{m_p \times p_p}, \quad (4.5)$$

- *Realimentação dinâmica de saída (DOF):*

$$\varphi[x_c(t)] = (A_c + \bar{A})x_c(t) + B_c y_p(t), \quad (4.6a)$$

$$u_p(t) = C_c x_c(t) + D_c y_p(t), \quad (4.6b)$$

em que $0 < n_c$ é a ordem do controlador dinâmico e $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estado associado, com $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p_p}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m_p \times n_c}$, $D_c \in \mathbb{R}^{m_p \times p_p}$ e,

$$\bar{A} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ 0 \text{ ou } \mathbb{I}_{n_c}, & \text{se } t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

O problema específico a cada uma das leis de controle e os resultados correspondentes serão apresentados nas duas seções seguintes.

4.2 Realimentação Estática de Saída

Aplicando-se a lei de controle SOF (4.5) ao sistema (4.17), obtém-se o sistema em malha fechada:

$$\dot{\varphi}[x_p(t)] = (A_p + B_p K_p C_p) x_p(t), \quad (4.7)$$

cujas trajetórias que iniciam em (4.4) devem evoluir no interior de (4.3a) e convergir assintoticamente para a origem sob a aplicação de entradas de controle restritas a (4.3b).

Trata-se, então, de um problema de estabilização local do sistema (4.7), que pode ser tratado utilizando-se o conceito de invariância positiva de conjuntos convexos (veja, por exemplo, J. C. Henet (1995) e Blanchini e Miani (2015)).

Assim, baseado na Definição 3, é considerado um conjunto poliédrico compacto com a origem no seu interior, representado como:

$$\mathcal{L} = \{x_p(t) : Lx_p(t) \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (4.8)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{r \times n_p}$, $r > n_p$ e $\text{posto}(L) = n_p$. Mais especificamente, considera-se o problema de controle SOF sob restrições como segue.

Problema 2 *Dado um sistema (4.17) sujeito a restrições (4.3a) e (4.3b), e considerando um conjunto de condições iniciais (4.4), encontrar uma lei de controle (4.5) e determinar um conjunto poliédrico positivamente invariante, \mathcal{L} em (4.8), contrativo ao longo das trajetórias do sistema (4.7) e que satisfaça $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$, tais que as entradas de controle correspondentes sejam admissíveis, $u_p(t) \in \mathcal{U}$.*

4.2.1 Condições Algébricas para Invariância e Inclusões

Com vista à resolução do Problema 2, além da invariância positiva e contratividade do poliedro \mathcal{L} e das inclusões $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$, será também imposta a inclusão $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y$, que garante a admissibilidade da lei de controle e, além disto, evita a saturação (ver, por exemplo, Tarbouriech *et al.* (2011)), em que:

$$\mathcal{U}_y = \{x_p(t) : U_p K_p C_p x_p(t) \leq \mathbf{1}_{l_u}\}, \quad (4.9)$$

é obtido pelo mapeamento do conjunto \mathcal{U} , (4.3b), no espaço de estados pela aplicação de (4.5).

A seguir, apresentam-se de forma unificada (tempo contínuo e discreto) as condições algébricas necessárias e suficientes para a invariância positiva e contratividade de um conjunto poliédrico (veja, por exemplo, Castelan e J. C. Hennes (1993), J. C. Hennes (1995) e Blanchini e Miani (2015)). Ainda, mostram-se as condições algébricas necessárias e suficientes para a obtenção das inclusões entre os conjuntos polidrais envolvidos no Problema 2, as quais podem ser obtidas pela aplicação do Lema 1:

- Invariância positiva e contratividade de $\mathcal{L} \iff \exists H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ não negativa ($h_{ij} \geq 0, \forall i, j$) ou essencialmente não negativa ($h_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$):

$$HL = L(A_p + B_p K_p C_p), \quad (4.10a)$$

$$H\mathbf{1}_r \leq \gamma_t \mathbf{1}_r. \quad (4.10b)$$

- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X} \iff \exists T \in \mathbb{R}^{l_g \times r}$ não negativa, tal que:

$$TL = X_p, \quad (4.11a)$$

$$T\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_x}. \quad (4.11b)$$

- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y \iff \exists Q \in \mathbb{R}^{l_u \times r}$ não negativa, tal que:

$$QL = U_p K_p C_p, \quad (4.12a)$$

$$Q\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_z}. \quad (4.12b)$$

- $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L} \iff \exists W \in \mathbb{R}^{r \times l_d}$ não negativa, tal que:

$$WD = L, \quad (4.13a)$$

$$W\mathbf{1}_{l_d} \leq \mathbf{1}_r. \quad (4.13b)$$

Além disto, é importante salientar que a matriz $L \in \mathbb{R}^{r \times n_p}$, com $r > n_p$, tem posto coluna completo se, e somente se, admite uma pseudo-inversa (à esquerda) $V \in \mathbb{R}^{n_p \times r}$ de modo que:

$$VL = \mathbb{I}_{n_p}. \quad (4.14)$$

Em consequência dos resultados anteriores, a proposição a seguir resume as soluções consideradas para o Problema 2.

Proposição 2 *O Problema 2 tem solução formada por uma matriz de ganhos SOF e um poliedro \mathcal{L} que garante a admissibilidade de $u_p(t)$ via a inclusão $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y$ se, e somente se, existem escalares $r > n_p$ e γ_t , e matrizes K_p, L, U, H, T, Q e W , que verificam as condições (4.10)-(4.14).*

4.2.2 Problema de Otimização Bilinear

A utilização da Proposição 2 na síntese de soluções para o Problema 2 carrega alguns produtos entre pares de matrizes que são variáveis de decisão, incluindo a matriz SOF K_p e a matriz L que define o conjunto \mathcal{L} . Mais especificamente, os produtos bilineares envolvem as matrizes: *i)* H e L no lado esquerdo da equação (4.10a), assim como L e K no seu lado direito; *ii)* Q e L em (4.12a); *iii)* T e L em (4.13a); e *vi)* V e L em (4.14). Entretanto, estes produtos bilineares podem ser considerados como restrições de projeto do programa de otimização proposto na sequência. Assim, técnicas de otimização não linear apropriadas podem ser utilizadas para encontrar soluções para o Problema 2, como o *solver* não linear KNITRO (BRIÃO *et al.*, 2018; BRIÃO, 2019).

A seguir, com vista à formulação de um problema de otimização a partir da solução proposta anteriormente, serão considerados dois critérios relativos ao desempenho do sistema em malha fechada (4.7):

- a) *Velocidade de convergência (exponencial) da resposta dos estados*, associada ao coeficiente γ_t , conforme itens *i)* e *ii)* em (4.10b) e na Observação 2;
- b) *Esforço de controle*, associado à restrição em norma infinito:

$$\|K_p C_p\|_\infty \leq \phi, \phi \in \mathbb{R}_+. \quad (4.15)$$

Isto implica na relação seguinte, em que ϕ representa um limitante superior para as ações de controle ao longo da trajetória da trajetória do sistema:

$$\|u_p(t)\|_\infty = \|K_p C_p x(t)\|_\infty \leq \phi \|x(t)\|_\infty.$$

Deste modo, define-se o problema de otimização bilinear seguinte, considerando que $r > n$, e os limitantes escalares $\underline{\gamma}_t$, $\bar{\gamma}_t$ e $\bar{\phi}$ são escolhidos *a priori*:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{minimizar}} && \Phi(\gamma_t, \phi) = \gamma_t + \alpha\phi, \\ & \text{sujeito a} && (4.10) - (4.15), \\ & && 0 \leq \underline{\gamma}_t \leq \gamma_t \leq \bar{\gamma}_t, \\ & && 0 \leq \phi \leq \bar{\phi}, \\ & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (4.16)$$

com $\Gamma = (K_p, L, U_p, H, T, Q, W, \gamma_t, \phi)$ e $\ell = 1, \dots, \bar{\ell}$.

Pela escolha de α , a função objetivo linear $\Phi(\gamma_t, \phi)$ permite ponderar a velocidade de convergência das trajetórias, representada pelo coeficiente de contratividade γ_t , e o esforço de controle, representado por ϕ . Logo, a escolha de diferentes valores para o parâmetro α permite ao projetista testar e comparar diferentes soluções com desempenhos temporais distintos. Já as restrições adicionais, representadas por $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$, podem ser impostas às variáveis de decisão para diferentes fins, incluindo os numéricos discutidos em Brião *et al.* (2018) e Brião (2019).

É interessante relembrar que:

- i) no caso contínuo no tempo, $\gamma_t \equiv -\epsilon$, com $\epsilon \in [\underline{\epsilon}, \bar{\epsilon}]$, em que $\underline{\epsilon} > 0$ é um valor suficientemente pequeno para garantir a convergência das trajetórias para a origem e o limitante $\bar{\epsilon} < \infty$. Logo, a minimização do termo γ_t corresponde à maximização da velocidade de convergência representada pela abscissa espectral $-\epsilon$.
- ii) no caso discreto no tempo, $\gamma_t \equiv \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, em que pode-se considerar $\underline{\lambda} = 0$, e deve-se escolher $\bar{\lambda} < 1$. Neste caso, a minimização do termo γ_t corresponde à minimização do coeficiente de contratividade λ .

Conforme discutido na Observação 5 na seção anterior, os resultados adiante serão gerados via *solver* não linear KNITRO, a fim de lidar com a robustez presente no problema bilinear em (4.16) e, ainda, será aplicada a estratégia baseada na redução do espaço de busca através da imposição de limites, com o intuito de obter soluções mais eficientes.

4.3 Realimentação Dinâmica de Saída

Considere, novamente, o sistema LIT em malha aberta,

$$\vartheta[x_p(t)] = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \quad (4.17a)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (4.17b)$$

e a lei de realimentação dinâmica de saída:

$$\vartheta[x_c(t)] = (A_c + \bar{A})x_c(t) + B_c y_p(t), \quad (4.18a)$$

$$u_p(t) = C_c x_c(t) + D_c y_p(t), \quad (4.18b)$$

O sistema em malha fechada, devido à realimentação do sistema (4.17) com a lei de controle DOF (4.18), pode ser reformulado como um sistema aumentado LTI a

controlar formulado a seguir, em que considera-se variáveis fictícias de controle e saída de forma clássica dado por $\bar{u}_p(t) = \wp[x_c(t)]$ e $\bar{y}_p(t) = x_c(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \wp_a \left(\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ \bar{u}_p(t) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_p(t) \\ \bar{y}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

e reescrito de forma simplificada como um sistema de ordem $n_a = n_p + n_c$,

$$\wp_a[x_a(t)] = \mathbb{A}x_a(t) + \mathbb{B}u_a(t), \quad (4.19a)$$

$$y_a(t) = \mathbb{C}x_a(t), \quad (4.19b)$$

com $m_a = m_p + n_c$ e $p_a = p_p + n_c$, tal que, por construção,

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad x_a(0) = \begin{bmatrix} x_p(0) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad u_a(t) = \begin{bmatrix} u_p(t) \\ \bar{u}_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_a},$$

$$y_a(t) = \begin{bmatrix} y_p(t) \\ \bar{y}_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_a}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix}.$$

Ainda, a lei de controle SOF aumentada pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} u_p(t) \\ \bar{u}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p(t) \\ \bar{y}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c C_p & C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

ou, ainda,

$$u_a(t) = \mathbb{K}y_a(t) = \mathbb{K}\mathbb{C}x_a(t), \text{ com } \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Obtém-se, então, o sistema aumentado em malha fechada,

$$\begin{aligned} \wp_a \left(\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c C_p & C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} A_p + B_p D_c C_p & B_p C_c \\ B_c C_p & \bar{A} + A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\wp_a[x_a(t)] = (\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C})x_a(t). \quad (4.21)$$

Além disto, visando adaptar a abordagem de projeto apresentada na seção anterior ao projeto DOF sob restrições, considera-se o conjunto $\mathcal{X}_a \subseteq \mathbb{R}^{n_a}$ formado a partir das restrições originais sobre os estados do sistema, além de adaptar-se a restrição sobre o vetor de controle e o conjunto de condições iniciais à representação aumentada, como segue:

$$\mathcal{X}_a = \{x_a(t) : \mathbb{X}x_a(t) \leq \mathbf{1}_{l_x}\}, \text{ com } \mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_p & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{U}_a = \{u_a(t) : \mathbb{U}u_a(t) \leq \mathbf{1}_{l_U}\}, \text{ com } \mathbb{U} = \begin{bmatrix} U_p & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{D}_a = \{x_a(0) : \mathbb{D}x_a(0) \leq \mathbf{1}_{l_D}\}, \text{ com } \mathbb{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

nas quais $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{x}} \times n_c}$, $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{u}} \times n_c}$ e $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{d}} \times n_c}$ são matrizes auxiliares escolhidas pelo projetista, e $l_x = l_x + l_{\tilde{x}}$, $l_U = l_U + l_{\tilde{u}}$ e $l_D = l_D + l_{\tilde{d}}$. Em particular, \tilde{X} é utilizada para impor limites à variável de estado do controlador, \tilde{U} pode ser escolhida como uma matriz nula, e \tilde{D} pode ter valores suficientemente grandes de tal forma que as condições iniciais dos estados do controlador sejam consideradas praticamente nulas, ou seja, $x_c(0) \rightarrow 0$.

Ainda, para redefinir o problema de controle sob restrições associado ao caso DOF e obter soluções apropriadas para este problema, considera-se um conjunto poliédrico $\mathcal{L}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$, tal que:

$$\mathcal{L}_a = \{x_a(t) : \mathbb{L}x_a(t) \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (4.25)$$

em que $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^{r \times n_a}$, $r > n_a$ e $\text{posto}(\mathbb{L}) = n_a$.

Pode-se, então, definir o problema a seguir, adaptado a partir do Problema 2, que visa o cálculo de um controlador DOF em (4.18) que garanta o respeito das restrições (4.3a) e (4.3b) a partir das condições iniciais admissíveis de interesse em (4.4).

Problema 3 *Dado um sistema (4.19) sujeito as restrições (4.22) e (4.23), e considerando um conjunto de condições iniciais (4.24), encontrar uma lei de controle SOF aumentada (4.20) e determinar um conjunto positivamente invariante \mathcal{L}_a , (4.25), contrativo ao longo das trajetórias do sistema (4.21) e que satisfaça $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{X}_a$, tais que as entradas de controle correspondentes sejam admissíveis, ou seja, $u_a(t) \in \mathcal{U}_a$.*

Neste caso DOF, o conjunto que garante a admissibilidade da ação de controle, $\mathcal{U}_y^a \in \mathbb{R}^{n_a}$, é definido a partir de (4.18b), (4.20) e (4.23) como:

$$\mathcal{U}_y^a = \left\{ x_a(t) : \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \end{bmatrix} \text{UKC} x_a(t) \leq \mathbf{1}_m \right\}, \quad (4.26)$$

ou, então,

$$\mathcal{U}_y^a = \left\{ \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} U_p D_c C_p & U_p C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \leq \mathbf{1}_m \right\}.$$

4.3.1 Condições Algébricas e Problema de Otimização Bilinear

Em função da reformulação anterior, a Proposição 2 pode ser utilizada para solucionar o Problema 3 ao utilizar-se as seguintes substituições:

$$A \leftarrow \mathbb{A}, B \leftarrow \mathbb{B}, C \leftarrow \mathbb{C}, X \leftarrow \mathbb{X}, U \leftarrow \mathbb{U}, D \leftarrow \mathbb{D}, K \leftarrow \mathbb{K}, L \leftarrow \mathbb{L} \text{ e } V \leftarrow \mathbb{V}.$$

Proposição 3 *O Problema 3 tem solução formada por um controlador DOF em (4.18) e um poliedro $\mathcal{L}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ que garante a admissibilidade de $u(t)$ via a inclusão $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{U}_y^a$ se, e somente se, existem escalares $r > n_a$, γ_t , matrizes \mathbb{K}, \mathbb{L} tais que as condições (4.27)-(4.31) seguintes são verificadas:*

- *Invariância positiva e contratividade de $\mathcal{L}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ não negativa ($h_{ij} \geq 0, \forall i, j$) ou essencialmente não negativa ($h_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$):*

$$\mathbb{H}\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C}), \quad (4.27a)$$

$$\mathbb{H}\mathbf{1}_r \leq \gamma_t \mathbf{1}_r. \quad (4.27b)$$

- $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{X}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{T} \in \mathbb{R}^{l_x \times r}$ não negativa:

$$\mathbb{T}\mathbb{L} = \mathbb{X}, \quad (4.28a)$$

$$\mathbb{T}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_x}. \quad (4.28b)$$

- $\mathcal{L}_a \in \mathcal{U}_y^a \Leftrightarrow \exists \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{l_u \times r}$ não negativa:

$$\mathbb{Q}\mathbb{L} = \text{UKC}, \quad (4.29a)$$

$$\mathbb{Q}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_u}. \quad (4.29b)$$

- $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{L}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{W} \in \mathbb{R}^{r \times l_D}$ não negativa:

$$\mathbb{W}\mathbb{D} = \mathbb{L}, \quad (4.30a)$$

$$\mathbb{W}\mathbf{1}_{l_D} \leq \mathbf{1}_r. \quad (4.30b)$$

• $\text{Posto}(\mathbb{L}) = r > n_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{V} \in \mathbb{R}^{n_a \times r}$:

$$\mathbb{V}\mathbb{L} = \mathbb{I}_{n_a}. \quad (4.31)$$

De forma similar ao caso SOF, será definido agora o problema de otimização bilinear referente ao sistema aumentado (4.21). Note que além do esforço de controle, para efeito de obtenção de resultados numéricos melhor condicionados, também se leva em conta o vetor de estado do controlador através da expressão:

$$\|\mathbb{K}\mathbb{C}\|_\infty \leq \phi, \phi \in \mathbb{R}_+. \quad (4.32)$$

Logo, o problema de otimização bilinear a seguir, considerando que $r > n_a$, e os limitantes escalares $\underline{\gamma}_t, \bar{\gamma}_t$ e $\bar{\phi}$, são escolhidos *a priori*:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{minimizar}} && \Phi(\gamma_t, \phi) = \gamma_t + \alpha\phi, \\ & \text{sujeito a} && (4.27) - (4.32), \\ & && 0 \leq \underline{\gamma}_t \leq \gamma_t \leq \bar{\gamma}_t, \\ & && 0 \leq \phi \leq \bar{\phi}, \\ & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (4.33)$$

com $\Gamma = (\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{U}, \mathbb{H}, \mathbb{T}, \mathbb{Q}, \mathbb{W}, \gamma_t, \phi)$ e $\ell = 1, \dots, \bar{\ell}$.

Como anteriormente, no problema (4.33) pode-se ponderar através de α a velocidade de convergência das trajetórias, associada ao coeficiente de contratividade γ_t , e o esforço de controle associado a ϕ . Além disto, com as substituições devidas, o programa computacional que implementa o problema de otimização (4.16) pode ser adaptado e utilizado para implementar (4.33).

4.4 Exemplos Numéricos

Nos exemplos numéricos mostrados nesta seção, os seguintes limites inferiores e superiores foram atribuídos aos elementos de \mathbb{L} , \mathbb{V} e \mathbb{K} : $\underline{l} = \underline{v} = -1000$, $\bar{l} = \bar{v} = 1000$, $\underline{k} = -10$ e $\bar{k} = 10$. Além disto, a partir das desigualdades que envolvem as matrizes não negativas ou essencialmente não negativas \mathbb{H} , seus elementos são superiormente limitados por $\bar{h} = 100$. Ainda, os escalares não negativos γ_t e ϕ são delimitados por $\bar{\lambda} = 0,99999$, $\bar{\epsilon} = 100$ e $\bar{\phi} = 10$. Os resultados numéricos são obtidos usando o *solver* KNITRO (BYRD *et al.*, 2006).

Exemplo 1: Sistema em Tempo Discreto

Considere o sistema (4.17) discreto no tempo, adaptado de Gupta e Falcone (2019), representado pelas seguintes matrizes:

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cujas restrições não simétricas sobre os estados, \mathcal{X} , e o controle, \mathcal{U} , são definidas a partir das matrizes:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,25 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse, \mathcal{D} , é definido como um polígono hexagonal circunscrito em um círculo de raio 0,75, com:

$$D = \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5 & -1,5 & -1,5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

A - Projeto por Realimentação Estática de Saída

Os resultados obtidos a partir do problema de otimização (4.16) para diferentes opções do parâmetro de otimização α com espaçamento de 0,1 no intervalo $[0, 1]$, considerando $\bar{\lambda} = 0,9999$ e $r = 2n = 4$, estão resumidos na Tabela 3 e, com $r = 3n = 6$, na Tabela 4.

Tabela 3 – Projetos SOF com $r = 4$

α	λ	ϕ	K	$\sigma(A + BKC)$
0	0,9999	7,5098	[-0,6666]	{0,3333 ± 0,4714i}
1	0,9999	0,6666	[-0,6666]	{0,3333 ± 0,4714i}

Tabela 4 – Projetos SOF com $r = 6$

α	λ	ϕ	K	$\sigma(A + BKC)$
0	0,8571	7,5072	[-0,5714]	{0,4286 ± 0,4949i}
0,1	0,8571	0,5714	[-0,5714]	{0,4286 ± 0,4949i}
0,2	0,8660	0,5000	[-0,5000]	{0,5000 ± 0,5000i}
0,4	0,8660	0,5000	[-0,5000]	{0,5000 ± 0,5000i}
0,9	0,9580	0,3880	[-0,3880]	{0,6119 ± 0,4873i}
1	0,9999	0,3450	[-0,3450]	{0,6550 ± 0,4754i}

Fonte – Elaborado pela Autora

Neste exemplo, obtiveram-se resultados restritivos para $r = 4$, com valores fixos em $\lambda = 0,9999$. Contudo, para $r = 6$, os valores numéricos foram maiores, sem mudanças consideráveis em comparação aos resultados obtidos com $r = 8$. Note que, na Tabela 4 para $\alpha \in [0,3 ; 0,8]$, os resultados foram iguais aos valores obtidos para $\alpha = 0,4$.

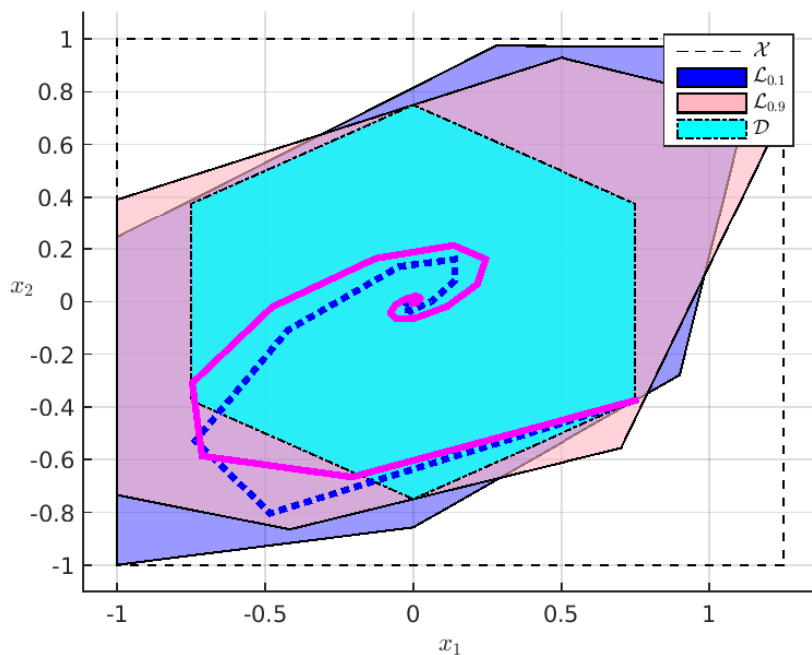
Assim, visando mostrar a eficiência da função objetivo $\Phi(\lambda, \phi)$ escolhida no problema de otimização, pode-se observar que com o aumento do fator de ponderação α : *i)* o valor do coeficiente de contratividade aumenta, o que implica no aumento de magnitude dos autovalores de $(A_p + B_p K_p C_p)$ e, conseqüente, diminuição da velocidade de convergência das trajetórias; e *ii)* tem-se valores menores dos coeficientes ϕ e, portanto, da magnitude do ganho proporcional K_p .

Na Figura 12, pode-se visualizar e comparar graficamente as soluções obtidas para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$ em termos do conjunto invariante \mathcal{L} e das trajetórias de estado partindo de um dos vértices do conjunto D . Nota-se que, em ambos os casos, as trajetórias evoluem no interior de \mathcal{L} , mas tendem de forma diferente para a origem, refletindo os coeficientes de contratividade distintos obtidos nos dois casos. As matrizes L obtidas para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$ são:

$$L_{0,1} = \begin{bmatrix} 0,7499 & -1,1666 \\ 1,0404 & -0,2290 \\ 0,0079 & 1,0235 \\ 0,1666 & -1,1666 \\ -0,6990 & 1,2262 \\ -1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \text{ e } L_{0,9} = \begin{bmatrix} 0,3682 & -1,3333 \\ 0,2577 & 0,9372 \\ -1,0000 & 0,0000 \\ -0,2336 & -1,0437 \\ -0,4795 & 1,3333 \\ 1,0632 & -0,4549 \end{bmatrix} .$$

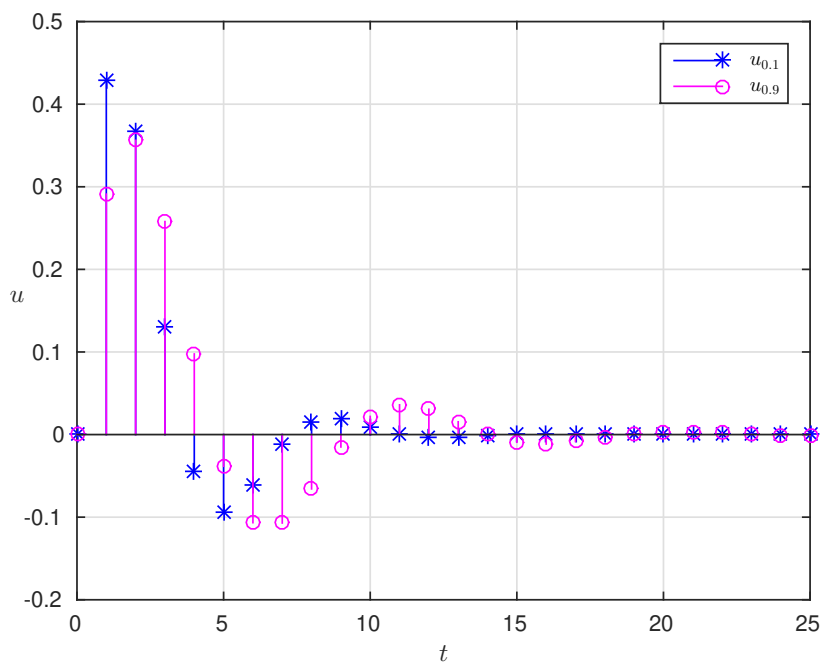
As ações de controle correspondentes às trajetórias citadas são mostradas na Figura 13, na qual se verifica que um menor coeficiente de contratividade foi obtido em detrimento de uma ação de controle com amplitude maior nas amostras iniciais. A energia correspondente aos dois sinais de controle, cujo valor é aproximado por $\|u(t)\|_{\ell_2} \approx \sum_{t=0}^{25} u(t)^2$, é: $\|u_{0,1}\|_{\ell_2} = 0,3516$ e $\|u_{0,9}\|_{\ell_2} = 0,3197$.

Figura 12 – Projeto SOF para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$, com $r = 6$



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 13 – Ação de controle para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$, com $r = 6$



Fonte – Elaborado pela Autora

B - Projeto por Realimentação Dinâmica de Saída

Os projetos de controladores dinâmicos por DOF de ordem reduzida, $n_c = 1$, são reformulados como um sistema aumentado de ordem $n_a = 3$. Para tanto, o sistema (4.21) é representado pelas seguintes matrizes aumentadas:

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \bar{A} & \end{array} \right], \quad \mathbb{B} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbb{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \end{array} \right].$$

Atribuindo-se $\tilde{X} = [1 \ -1]^T$, ou seja, $|x_c(t)| \leq 1$ e $\tilde{U} = 0$, as restrições de estado e controle nos espaços aumentados são definidas por:

$$\mathbb{X} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,8 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]^T \quad \text{e} \quad \mathbb{U} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1,25 & 0 \end{array} \right].$$

Ainda, para aproximar o conjunto de formato hexagonal, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, no espaço aumentado, considerou-se $\tilde{D} = [d \ -d]$, com $d = 10^4$, obtendo-se:

$$\mathbb{D} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1,5 & 1,5 & -1,5 & -1,5 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3d & -3d \end{array} \right]^T.$$

I - Experimento com $\bar{A} = 0$

Os resultados obtidos a partir de (4.33) considerando $\bar{A} = 0$ (atraso puro), estão resumidos na Tabela 5, seguindo os mesmos parâmetros de otimização α anteriores, e para $r = 3n_a = 9$. É interessante observar que, comparativamente ao projeto SOF anterior, a utilização do controlador DOF permitiu obter coeficientes de contratividade menores (portanto, autovalores com magnitudes também menores) quando se pondera menos o esforço de controle ($\alpha = 0; 0,1$ e $0,2$). Por outro lado, para os valores de $\alpha = 0,9$ e 1 , foram obtidos valores menores para o limitante ϕ da ação de controle, o que mostra a coerência da função objetivo considerada em relação a ponderação entre o coeficiente de contratividade e o esforço de controle.

Tabela 5 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{A} = 0$

α	λ	ϕ	$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$	$\sigma(A + B\mathbb{K}C)$
0	0,8027	9,4471	$\begin{bmatrix} -0,5704 & -0,1412 \\ -0,4281 & 0,0472 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,4989 \pm 0,4375i, \\ -0,0912 \end{array} \right\}$
0,1	0,8028	0,7018	$\begin{bmatrix} -0,5703 & -0,1316 \\ -0,4592 & -0,2417 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,4895 \pm 0,4639i, \\ -0,3612 \end{array} \right\}$
0,2	0,8121	0,6454	$\begin{bmatrix} -0,5602 & 0,0852 \\ 0,6222 & -0,0229 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,4980 \pm 0,4522i, \\ -0,1394 \end{array} \right\}$
0,4	0,8660	0,5000	$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,0000 \\ -0,0280 & -0,0444 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5000 \pm 0,5000i, \\ -0,0444 \end{array} \right\}$
0,9	0,9999	0,3333	$\begin{bmatrix} -0,3333 & 0,0000 \\ 0,0125 & -0,0361 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,6661 \pm 0,4714i, \\ -0,0361 \end{array} \right\}$
1	0,9999	0,3333	$\begin{bmatrix} -0,3333 & 0,0000 \\ 0,0078 & -0,0990 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,6667 \pm 0,4714i, \\ -0,0990 \end{array} \right\}$

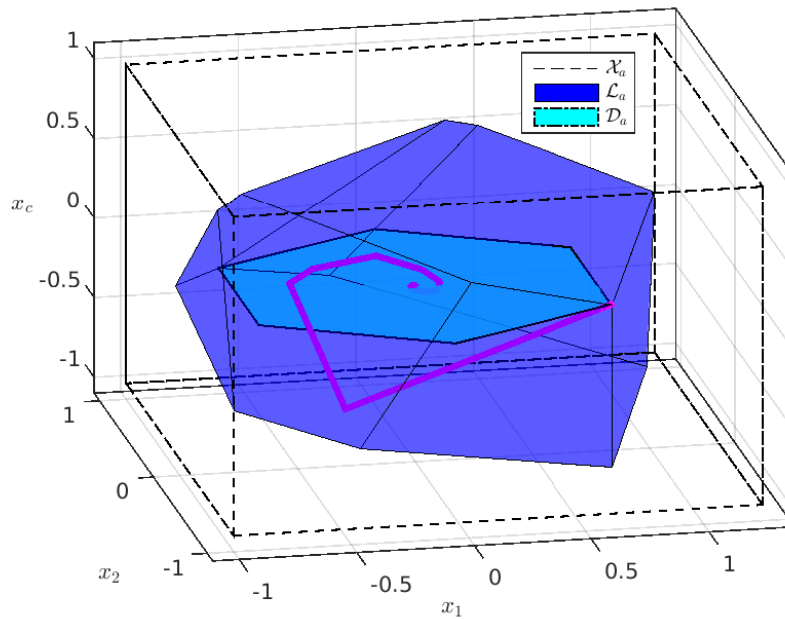
Fonte – Elaborado pela Autora

Na Figura 14 pode-se visualizar graficamente a solução obtida para $\alpha = 0,1$, cujo conjunto $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^3$ é determinado pela matriz:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} -1,0000 & 1,1245 & 0,1751 & 1,1219 & \dots \\ 0,0000 & -0,4057 & -1,2455 & -0,4223 & \dots \\ 0,0000 & 0,0083 & 0,3277 & 1,7494 & \dots \\ -0,8872 & -0,6666 & -1,0775 & 0,6666 & -0,2627 \\ 0,8907 & 1,3333 & 0,5109 & -1,3333 & 1,3332 \\ 0,8221 & -0,0089 & -2,0166 & 0,0480 & -0,4098 \end{bmatrix}^T .$$

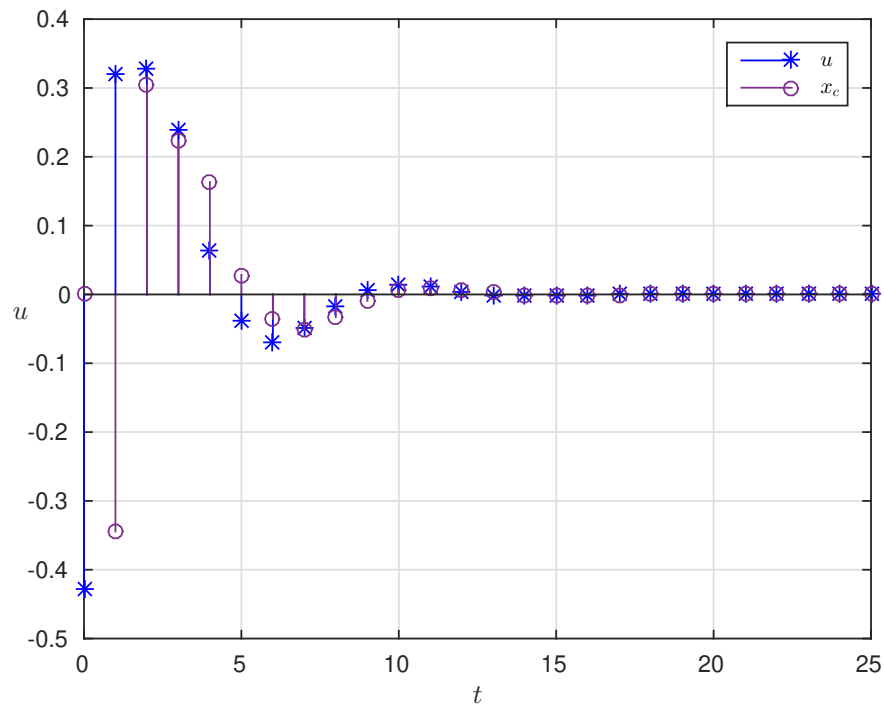
Observa-se, em particular, que a trajetória dos estados evolui agora no espaço de estados aumentado, muito embora tenha iniciado no interior do conjunto \mathcal{D} definido originariamente no espaço de estados do sistema a controlar. Na Figura 15, apresenta-se a ação de controle $u_p(t)$ associada à trajetória traçada na Figura 14, bem como a evolução do estado do controlador dinâmico, $x_c(t)$. A energia deste sinal de controle associado ao coeficiente de contratividade $\lambda_{DOF} = 0,8028$, é aproximado por $\|u_p(t)\|_{\ell_2} \approx \sum_{t=0}^{25} u_p(t)^2 = 0,7568$, a qual é maior do que o valor $\|u_{0,1}\|_{\ell_2} = 0,3516$ obtido no caso SOF, com $\lambda_{SOF} = 0,8571$.

Figura 14 – Projeto DOF para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 0$



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 15 – Ação de controle e estado do controlador para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 0$



Fonte – Elaborado pela Autora

II - Experimento com $\bar{A} = 1$

Agora, um experimento é realizado com $\bar{A} = 1$, em que novamente os mesmos parâmetros de otimização α são estipulados para $r = 9$ e os resultados estão resumidos na Tabela 6. Em vias de comparação com o caso anterior, destaca-se que para $\bar{A} = 0$ obtém-se menores coeficientes de contratividade e, conseqüentemente, menores os autovalores de magnitudes; já para $\bar{A} = 1$ foram encontrados menores esforços de controle. Portanto, cada um dos experimentos explorados podem ser considerados com base nos objetivos delineados pelo projetista.

Tabela 6 – Projetos DOF com $r = 9$ e $\bar{A} = 1$

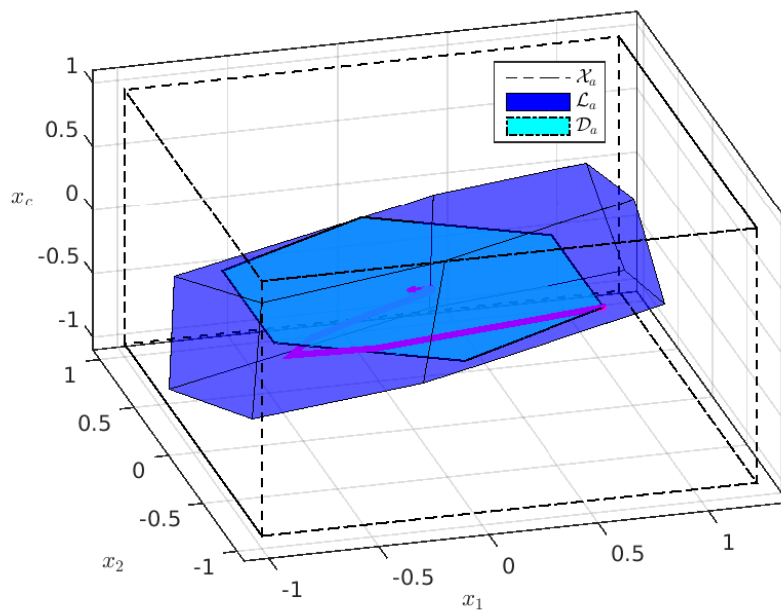
α	λ	ϕ	$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$	$\sigma(A + \mathbb{B}\mathbb{K}C)$
0	0,8027	9,4550	$\begin{bmatrix} -0,5703 & 0,1905 \\ 0,3172 & -1,2927 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,4876 \pm 0,4669i, \\ -0,4087 \end{array} \right\}$
0,1	0,8507	0,5862	$\begin{bmatrix} -0,5175 & 0,0687 \\ 0,2459 & -0,3403 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,4719 \pm 0,4690i, \\ 0,6808 \end{array} \right\}$
0,2	0,8660	0,5000	$\begin{bmatrix} -0,5000 & 0,0000 \\ -0,0153 & -0,4790 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5000 \pm 0,5000i, \\ 0,5210 \end{array} \right\}$
0,4	0,8660	0,5000	$\begin{bmatrix} -0,5000 & -0,0000 \\ -0,0012 & -0,4475 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5000 \pm 0,5000i, \\ 0,5525 \end{array} \right\}$
0,9	0,9580	0,3880	$\begin{bmatrix} -0,3881 & 0,0000 \\ -0,0090 & -0,3566 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,6119 \pm 0,4873i, \\ 0,6434 \end{array} \right\}$
1	0,9999	0,3333	$\begin{bmatrix} -0,3333 & 0,0000 \\ -0,0147 & -0,3175 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,6667 \pm 0,4714i, \\ 0,6825 \end{array} \right\}$

Fonte – Elaborado pela Autora

Na Figura 16 pode-se visualizar graficamente a solução obtida para $\alpha = 0,1$, cujo conjunto $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^3$ é determinado pela matriz:

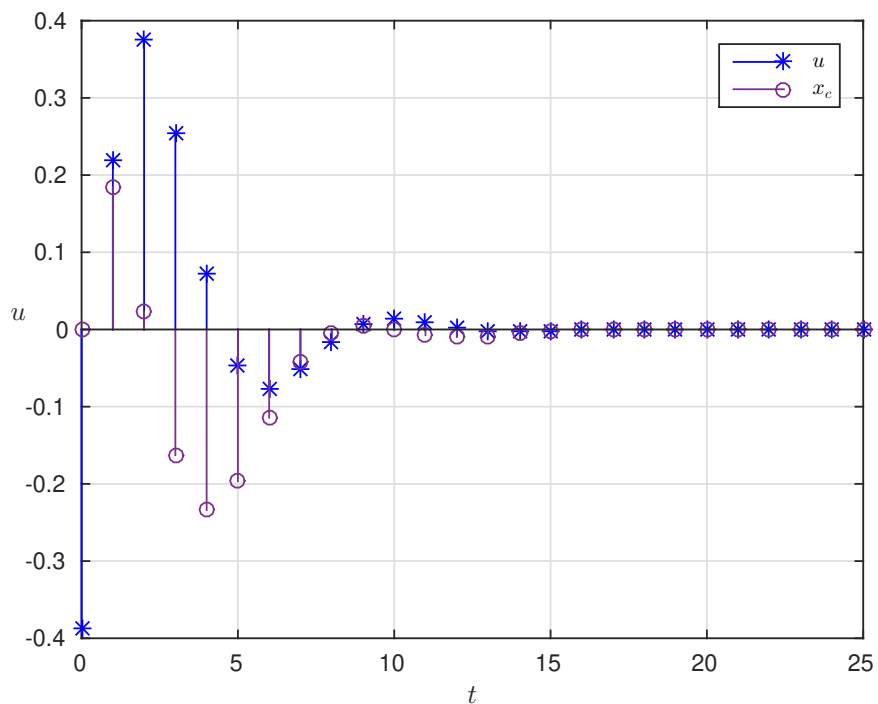
$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 0,0412 & -0,2774 & -1,0000 & 0,0933 & \dots \\ -1,1755 & -0,5282 & 0,0000 & 1,0409 & \dots \\ -0,1616 & -0,1228 & 0,0000 & 0,0782 & \dots \\ 0,3734 & -0,6190 & -0,4660 & 0,9437 & 0,6667 \\ -1,1447 & 1,3333 & 1,3330 & -0,0331 & -1,3333 \\ -2,0445 & 0,0959 & 2,2471 & 0,1915 & -0,2136 \end{bmatrix}^T .$$

Figura 16 – Projeto DOF para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 1$



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 17 – Ação de controle e estado do controlador para $\alpha = 0,1$, $r = 9$ e $\bar{A} = 1$



Fonte – Elaborado pela Autora

Semelhante ao caso anterior, na Figura 17 apresenta-se a ação de controle $u_p(t)$ associada à trajetória traçada na Figura 16, bem como a evolução do estado do controlador dinâmico, $x_c(t)$. A energia deste sinal de controle associado ao coeficiente de contratividade $\lambda_{\bar{A}=1} = 0,8507$, é aproximado por $\|u_p(t)\|_{\ell_2} \approx \sqrt{\sum_{t=0}^{25} u_p(t)^2} = 0,5366$, a qual é menor do que o valor $\|u_{0,1}\|_{\ell_2} = 0,7568$ obtido no caso DOF com $\lambda_{\bar{A}=0} = 0,8028$.

Exemplo 2: Sistema em Tempo Contínuo

Considera-se o sistema contínuo no tempo (4.17), definido pelas seguintes matrizes adaptadas de Blanchini e Miani (2015):

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para o qual $U = \begin{bmatrix} 0,125 & -0,125 \end{bmatrix}^T$ determina as restrições simétricas de controle \mathcal{U} , e as de estados, \mathcal{X} , são definidas pela matriz:

$$X = \begin{bmatrix} 0,3333 & 0 & -0,3333 & -0,3333 & 0 & 0,3333 \\ 0,25 & 0,25 & -0,0833 & -0,25 & -0,25 & 0,0833 \end{bmatrix}^T.$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse, \mathcal{D} , é definido como um polígono retangular, com:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

A - Projeto por Realimentação Estática de Estados

A lei de controle considerada neste caso é do tipo realimentação estática de estados, $u(t) = Kx(t)$, com $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Os resultados obtidos a partir de (4.16) são expostos na Tabela 7, com parâmetros de otimização espaçados de 0,1 no intervalo $[0, 0,4]$, $-\epsilon = (-100, -0,00001)$ e $r = 6$. Também pode-se observar o compromisso devido a escolha do fator α , entre a velocidade de convergência das trajetórias para a origem através do coeficiente ϵ , e da ação de controle através de ϕ . Ademais, neste exemplo em tempo contínuo, obtém-se um dos autovalores igual, ou bem próximo, à abscissa espectral $-\epsilon$.

Tabela 7 – Projetos de $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ com $r = 6$

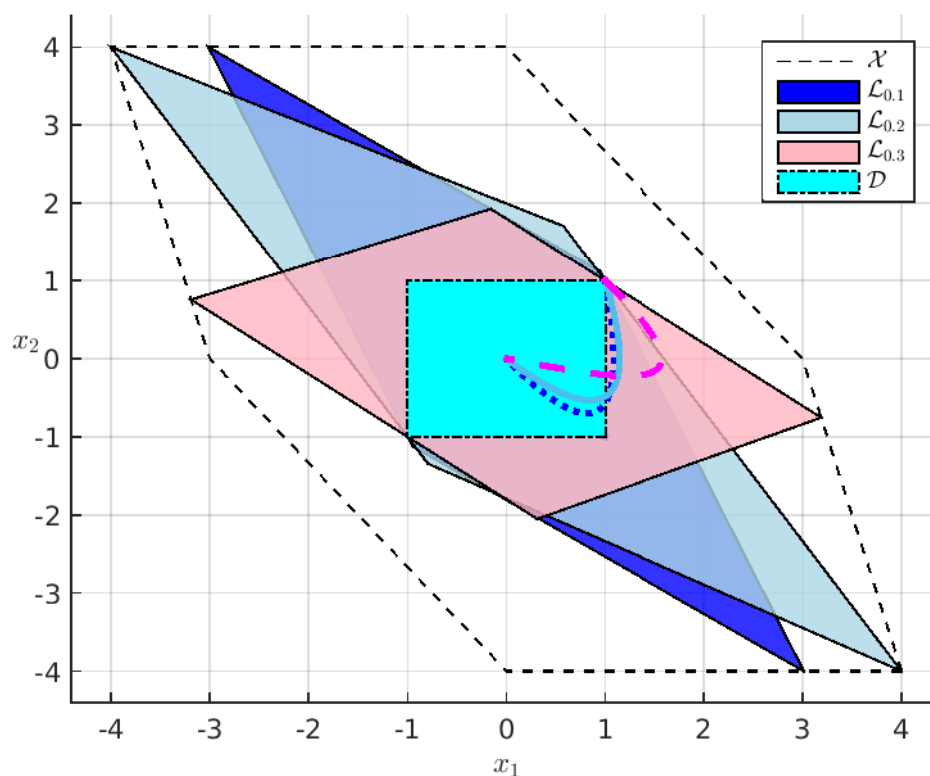
α	ϵ	ϕ	K	$\sigma(A + BKC)$
0	1,4127	9,3986	[-3,8571 -4,1429]	{-1,4127, -2,7302}
0,1	1,3273	7,1061	[-3,2958 -3,8104]	{-1,3273, -2,4831}
0,2	0,9999	4,3333	[-1,6667 -2,6667]	{-1,0000, -1,6667}
0,3	0,2368	1,2287	[-0,1900 -1,0388]	{-0,2369, -0,8019}
0,4	0,0001	0,5002	[-0,0001 -0,5002]	{-0,0001, -0,5001}

Fonte – Elaborado pela Autora

Nas Figuras 18 e 19, pode-se comparar graficamente as soluções obtidas para três valores de α , em termos do conjunto invariante \mathcal{L} e das trajetórias de estado partindo de um dos vértices do conjunto D . Nestas figuras, tem-se: $\alpha = 0,1$ com trajetórias pontilhadas (\cdots); $\alpha = 0,2$ com trajetórias contínuas ($-$); e $\alpha = 0,3$ com trajetórias tracejadas ($- -$).

Na Figura 18, observe nos três casos que as trajetórias evoluem no interior de \mathcal{L} correspondente, porém convergem para a origem de formas distintas, com base nos coeficientes de contratividade associados.

Figura 18 – Projeto StF para $\alpha = 0,1, 0,2$ e $0,3$



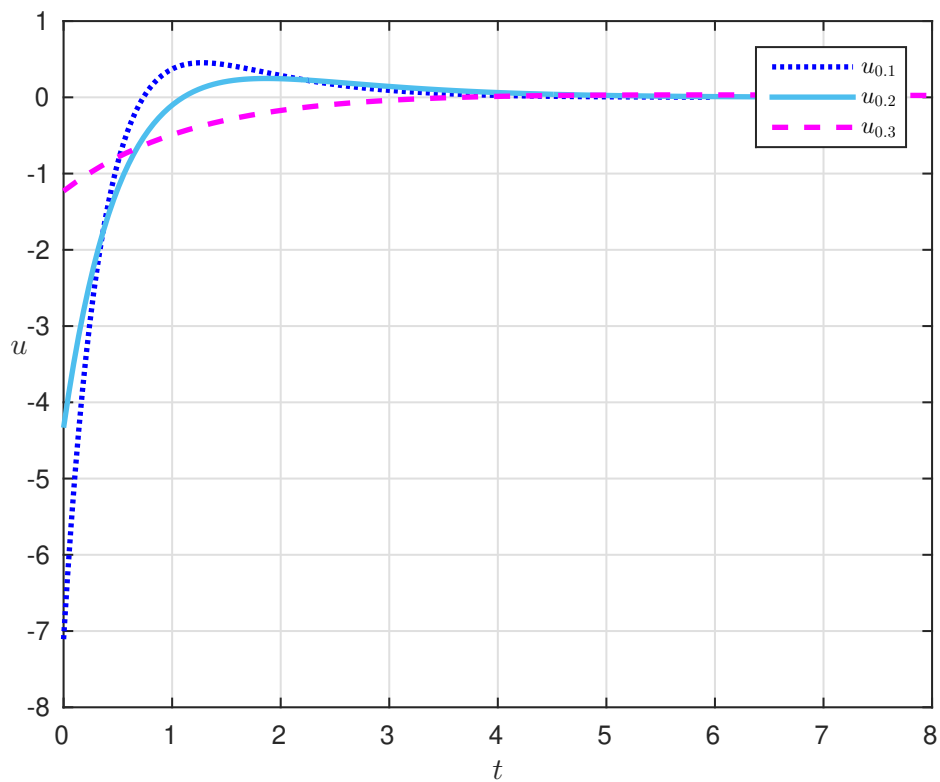
Fonte – Elaborado pela Autora

As matrizes L obtidas para $\alpha = 0,1, 0,2$ e $0,3$ são:

$$L_{0,1} = \begin{bmatrix} -0,7128 & -0,2871 \\ 0,0156 & 0,0333 \\ -0,4014 & -0,5524 \\ -0,0520 & 0,0002 \\ 0,4010 & 0,5521 \\ 0,7128 & 0,2871 \end{bmatrix}, \quad L_{0,2} = \begin{bmatrix} 0,2508 & 0,5008 \\ -0,4346 & -0,2339 \\ -0,6249 & -0,3750 \\ 0,6249 & 0,3750 \\ -0,3103 & -0,5603 \\ -0,1749 & 0,0146 \end{bmatrix} \quad e$$

$$L_{0,3} = \begin{bmatrix} -0,1181 & -0,0033 \\ 0,2055 & -0,4559 \\ 0,4450 & 0,5549 \\ -0,1944 & 0,5027 \\ -0,4450 & -0,5549 \\ -0,3210 & -0,1352 \end{bmatrix}.$$

Figura 19 – Ação de controle para $\alpha = 0,1, 0,2$ e $0,3$



Fonte – Elaborado pela Autora

A energia correspondente aos sinais de controle, cujo valor é aproximado por $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \approx \int_{t=0}^{10} u(t)^2 dt$, são: $\|u_{0,1}\|_{\mathcal{L}_2} = 223,5862$, $\|u_{0,2}\|_{\mathcal{L}_2} = 91,0360$ e $\|u_{0,3}\|_{\mathcal{L}_2} = 7,8576$.

Exemplo 3 - Comparação com Projeto via LMI

Considere o sistema a seguir adaptado de Tarbouriech *et al.* (2011):

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para o qual $U = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}^T$ determina as restrições simétricas de controle \mathcal{U} , e as de estados, \mathcal{X} , são definidas como $|x_1| \leq 6$ e $|x_2| \leq 4,5$, dado pela matriz:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2222 & -0,2222 \\ 0,1666 & -0,1666 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse, \mathcal{D} , é definido como um polígono retangular, com:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Neste caso, será realizada uma comparação com a técnica baseada em LMI para o projeto de realimentação de estados sob restrições, apresentada no Apêndice A. Este projeto via LMI, permite minimizar um limitante superior para a energia do sinal de controle, sob a forma $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \phi$, para um valor pré-especificado do fator ϵ , também garantindo o respeito de restrições via um conjunto positivamente invariante elipsoidal. Então, para efeito de comparação, considera-se no problema de otimização bilinear (4.16) que o fator ϵ também é dado e objetiva-se somente minimizar o limitante superior para $\|K\|_{\infty}$, através da minimização da função objetivo $\Phi(\phi) = \phi$.

Os resultados obtidos via a técnica de projeto LMI são expostos na Tabela 8 para diferentes valores pré-estabelecidos para ϵ . Nesta tabela, ϑ_s e ϑ_a representam, respectivamente, o limitante para $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ obtido via o problema (A.8) para síntese da realimentação de estados, e o valor corrigido via o problema de análise (A.14).

Tabela 8 – Projetos por LMI

ϵ	$\ K\ _\infty$	ϑ_s	ϑ_a	K	$\sigma(A + BKC)$
10^{-4}	3,8788	8,4370	8,4370	[2,0087 1,8701]	$\{-0,9350 \pm 0,3667i\}$
0,5	3,8965	8,4370	8,4370	[2,0083 1,8883]	$\{-0,9441 \pm 0,3420i\}$
1	4,2079	8,8526	8,5053	[2,2078 2,0001]	$\{-1,0000 \pm 0,4558i\}$

Fonte – Elaborado pela Autora

O mesmo cenário de valores pré-especificados para ϵ é considerado para realizar o projeto via invariância positiva de poliedros, utilizando-se $r = 4$. Estes resultados são resumidos na Tabela 9. Observe que os valores encontrados de ϕ corresponderam à $\|K\|_\infty = \max_{i=1} \sum_{j=1}^2 |K_{ij}|$, e que os valores ϑ_a foram encontrados via o problema de análise (A.14).

Tabela 9 – Projetos por invariância positiva com $r = 4$

ϵ	ϕ	ϑ_a	K	$\sigma(A + BKC)$
10^{-4}	1,2859	-	[1,0000 0,2859]	$\{-0,0001, -0,2858\}$
0,5	2,8927	9,7719	[1,4643 1,4285]	$\{-0,5000, -0,9285\}$
1	8,7413	8,8099	[2,5000 2,5000]	$\{-1,0000, -1,5000\}$

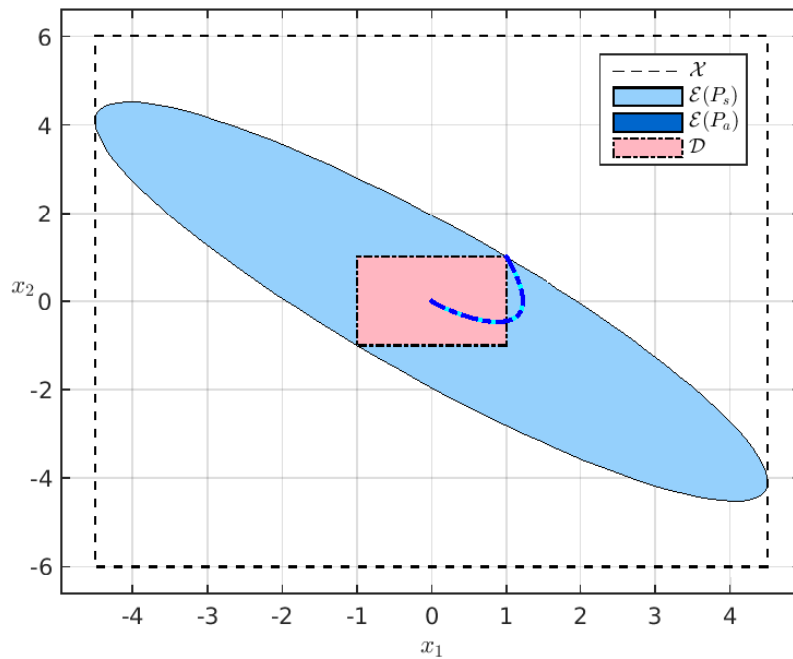
Fonte – Elaborado pela Autora

Em ambas as abordagens, as variáveis ϕ e ϑ_s limitam o esforço de controle de modo que, quanto maior o fator de contratividade ϵ , maiores são os valores limitantes ϕ e ϑ_s . Contudo, por invariância positiva, o esforço de controle do sinal $u(t)$ é associado à norma infinito e, por LMI, é representado pela norma \mathcal{L}_2 .

Deste modo, através do projeto de análise por LMI utilizando os valores de K obtidos por invariância positiva, as variáveis ϑ_a são comparáveis entre si, como também os valores obtidos por $\|K\|_\infty$ e ϕ . Em relação aos valores das variáveis ϑ_a , melhores resultados são obtidos via LMI, visto que o objetivo é minimizar a energia de controle. No entanto, ao comparar os valores de $\|K\|_\infty$ e ϕ , quanto menor o fator ϵ , melhores resultados são obtidos via invariância positiva.

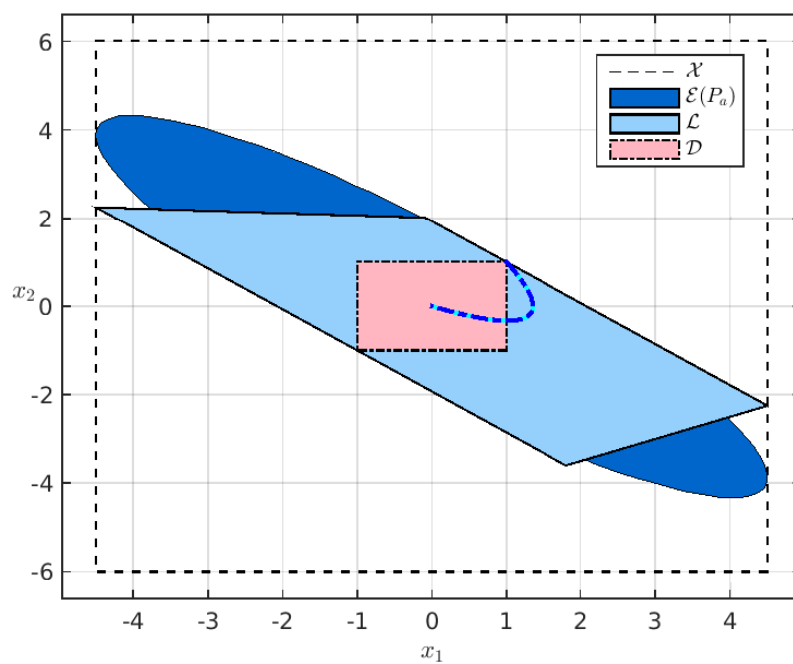
A seguir, para o fator de contratividade $\epsilon = 0,5$, são ilustradas as duas abordagens discutidas nesta seção, com as mesmas restrições de estados \mathcal{X} e condições iniciais admissíveis de interesse \mathcal{D} , em que os conjuntos $\mathcal{E}(P_s)$, $\mathcal{E}(P_a)$ e \mathcal{L} , cujas trajetórias permanecem contidas em seu interior, são representados nas Figuras 20 e 21, respectivamente. Em particular, na Figura 21, observa-se que os dois conjuntos invariantes e contrativos $\mathcal{E}(P_a)$ e \mathcal{L} contém o conjunto \mathcal{D} , o que garante o atendimento dos critérios relacionado à ação de controle para todas as condições iniciais de interesse.

Figura 20 – Projeto de síntese e análise por LMI para $\epsilon = 0,5$



Fonte – Elaborado pela Autora

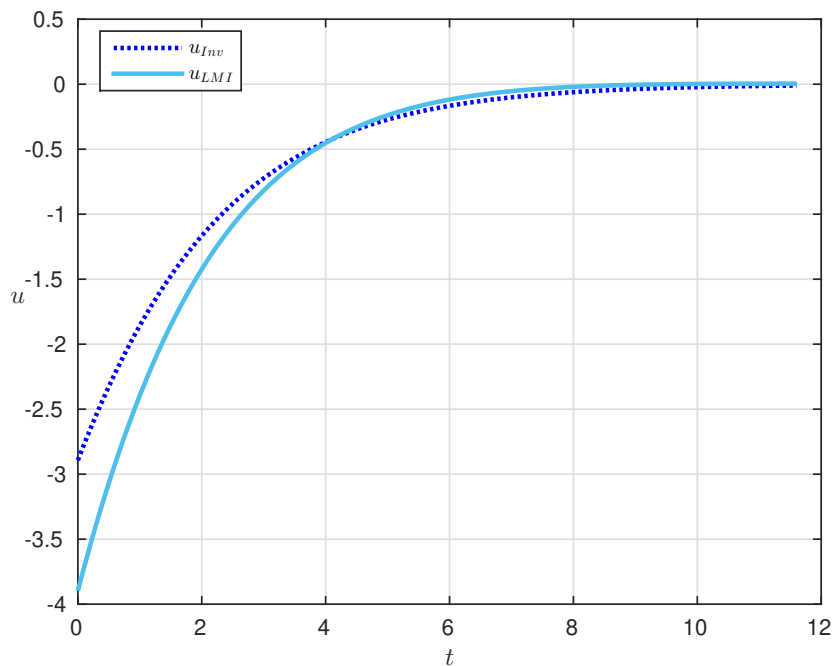
Figura 21 – Projeto por invariância positiva e análise por LMI para $\epsilon = 0,5$ e $r = 4$



Fonte – Elaborado pela Autora

Na Figura 22, apresentam-se as ações de controle $u(t)$ associadas as trajetórias nas figuras anteriores, referentes às abordagens por LMI e invariância positiva, cujos valores iniciais estão diretamente associados à medida $\|K\|_\infty$, pois $x_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Figura 22 – Ações de controle para $\epsilon = 0,5$



Fonte – Elaborado pela Autora

4.5 Conclusão

Uma abordagem baseada em programação bilinear foi proposta para a síntese de leis de controle por realimentação de saídas em tempo contínuo e discreto. O intuito foi determinar um conjunto poliédrico positivamente invariante, que garante a estabilidade assintótica local das trajetórias partindo de um dado conjunto de condições iniciais, respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle. Através da escolha do parâmetro de projeto α , a função objetivo considerada permite ponderar os critérios de desempenho da velocidade de convergência das trajetórias e do esforço de controle. A proposta possui capacidade de lidar com os três controladores clássicos fundamentais (StF, SOF e DOF) e, em especial, de tratar restrições não simétricas e de considerar compensadores de ordem reduzida, o que não é um recurso frequentemente

encontrado em outras abordagens como as baseadas em LMIs (TARBOURIECH *et al.*, 2011). Por esta razão, uma comparação entre essas duas abordagens foi realizada via exemplo numérico com restrições simétricas sobre os estados e controle. Entretanto, a partir deste exemplo e da comparação realizada, não é possível generalizar sobre as vantagens da abordagem poliédrica sobre a via LMI.

5 Projeto do Controlador PI para Sistemas Restritos

Uma nova abordagem de projeto de otimização bilinear é elaborada neste capítulo, para uma lei de controle semelhante a PI com um termo *feed-forward*, via conjuntos poliédricos por invariância positiva ou Δ -invariância, cujo projeto garante a estabilidade local e o respeito às restrições de estado e controle. Em particular, na abordagem via invariância positiva, integra-se o modelo de sinal do degrau de referência com espaço de estado em malha fechada, que já obedece ao Princípio do Modelo Interno, permitindo descrever o sistema de malha fechada como um sistema autônomo estendido.

Destaca-se que os resultados a seguir foram publicados no XXIV Congresso da Associação Chilena de Controle Automático (IEEE ICA-ACCA) (SANTOS *et al.*, 2021). Na seção adiante é apresentado o problema em questão. Na seção dos resultados principais, aplica-se à propriedade de invariância positiva para propor um conjunto personalizado de condições algébricas, que resolvem o problema de rastreamento de referência restrito considerado, sem a necessidade de realizar as mudanças de variáveis impostas em Tarbouriech *et al.* (2000) e Flores *et al.* (2008). No mesmo aspecto, um conjunto de condições numericamente menos complexo do que o primeiro é obtido, considerando que o degrau de referência pertence à classe de sinais exógenos persistentes (limitados em amplitude) e o conceito de Δ -invariância relacionado. Na seção 5.3 são elaboradas combinações de problemas de otimização, de acordo com cada objetivo previsto. Na seção seguinte, exemplos numéricos e simulações são descritas em tempo contínuo e discreto. Finalmente, as conclusões destes resultados são apontados na última seção.

5.1 Apresentação do Problema

Considere a planta a ser controlada representada por um sistema monovariável LIT em malha aberta, dado por:

$$\varphi[x_p(t)] = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \quad (5.1a)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (5.1b)$$

em que $t \in \mathbb{R}_+$ se o sistema é em tempo contínuo ou $t \in \mathbb{N}$ no caso de tempo discreto, com:

$$\varphi[x_p(t)] = \begin{cases} \frac{dx_p(t)}{dt}, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ x_p(t+1), & \text{se } t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (5.2)$$

em que $x_p(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ é o vetor de estado, $u_p(t) \in \mathbb{R}^{m_p}$ a entrada de controle e $y_p(t) \in \mathbb{R}^{p_p}$ a saída mensurada. Além disto, $A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ e $C'_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ e os pares (A_p, B_p) e (A_p, C_p) são controláveis e observáveis, respectivamente.

Os estados da planta e as entradas de controle são restritos para evoluir dentro de conjuntos poliédricos, dado por,

$$\mathcal{X}_p = \{x_p(t) : X_p x_p(t) \leq \mathbf{1}_{l_{x_p}}\}, X_p \in \mathbb{R}^{l_{x_p} \times n_p}, \quad (5.3a)$$

$$\mathcal{U}_p = \{u_p(t) : U_p u_p(t) \leq \mathbf{1}_{l_u}\}, U_p \in \mathbb{R}^{l_u}, \quad (5.3b)$$

em que $\mathbf{1}_{l_*} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{l_*}$.

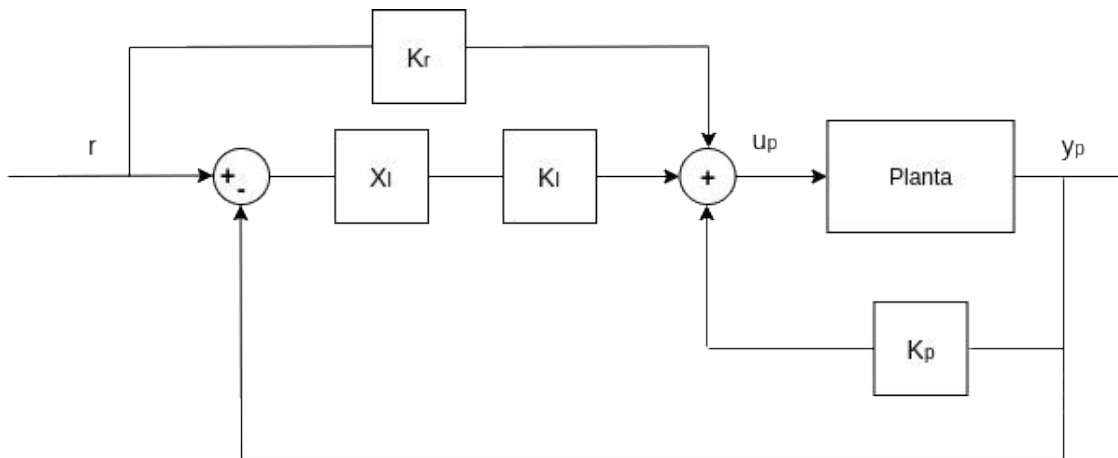
Uma lei de controle considerada é do tipo proporcional e integral (PI) com um termo de *feed-forward* associado à referência, conforme a Figura 23, tal que,

$$u_p(t) = K_p y_p(t) + K_I x_I(t) + K_r y_r(t), \quad (5.4)$$

com $(K_p, K_I, K_r) \in \mathbb{R}$, onde o sinal $y_r(t) \in \mathbb{R}$ representa um degrau de referência, $e(t) = y_r(t) - y_p(t) \in \mathbb{R}$ define o erro de referência e $x_I(t) \in \mathbb{R}$ é a integral do erro de referência,

$$x_I(t) = \begin{cases} \int_0^t e(\tau) d\tau, & \text{se } \tau \in \mathbb{R}_+, \\ \sum_0^{t-1} e(\tau), & \text{se } \tau \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Figura 23 – Controlador PI com termo *feed-forward*



Fonte – Elaborado pela Autora

Considera-se adiante que o estado do integrador também deva ser limitado,

$$\mathcal{X}_I = \{x_I(t) : X_I x_I(t) \leq \mathbf{1}_{l_{x_I}}\}, X_I \in \mathbb{R}^{l_{x_I} \times n_p}. \quad (5.6)$$

Observe que, devido às restrições de controle e estados, à propriedade de estabilidade e rastreamento que, a partir do Princípio do Modelo Interno (PMI)

(FRANKLIN *et al.*, 2015; FADALI; VISIOLI, 2013; CHEN; SHAFAI, 1999), são inerentes a qualquer lei de controle PI semelhante a (5.4), será válida apenas localmente. Assim, considera-se que o sinal de referência degrau, $y_r(t) = r_0, \forall t \geq 0$, tem sua amplitude limitada no intervalo simétrico $r_0 \in [-\bar{\rho}, \bar{\rho}]$, para algum escalar positivo real $\bar{\rho}$, ou, equivalentemente,

$$\mathcal{R} = \{r_0 : Rr_0 \leq \rho\}, R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ e } \rho = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

A partir da apresentação acima, o interesse principal está em sintetizar os ganhos de controle (K_p, K_I, K_r) em (5.4) e determinar o limite $\bar{\rho}$ em (5.7), de modo que as restrições de estado e controle sejam cumpridas e o degrau de referência $y_r(t)$ seja rastreado assintoticamente para qualquer condição inicial pertencente a uma região a ser definida posteriormente.

O sistema dinâmico escalar cuja solução é dada por (5.5), é um sistema integrador sob a forma:

$$\varphi[x_I(t)] = A_I x_I(t) + e(t), \text{ com } A_I = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ 1, & \text{se } t \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Então, a partir de (5.1), (5.4) e (5.8), considera-se o sistema em malha fechada, dado por ¹:

$$\varphi[x_{cl}(t)] = A_{cl} x_{cl}(t) + B_{cl} y_r(t), \quad (5.9)$$

em que $x_{cl} = \begin{bmatrix} x_p \\ x_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{cl}}, n_{cl} = n_p + 1, A_{cl} \in \mathbb{R}^{n_{cl} \times n_{cl}}$ e $B_{cl} \in \mathbb{R}^{n_{cl}}$, tal que,

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A_p + B_p K_p C_p & B_p K_I \\ -C_p & A_I \end{bmatrix} \text{ e } B_{cl} = \begin{bmatrix} B_p K_r \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para lidar com as restrições de estado definidos no espaço de estado em malha fechada, de (5.3a) e (5.6), pode-se determinar o seguinte conjunto aumentado,

$$\mathcal{X}_{cl} = \{x_{cl} : X_{cl} x_{cl} \leq \mathbf{1}_{l_x}\}, X_{cl} = \begin{bmatrix} X_p & 0 \\ 0 & X_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_{x_{cl}} \times n_{cl}}, l_{x_{cl}} = l_{x_p} + l_{x_I}. \quad (5.10)$$

Além disto, para garantir a satisfação da restrição de controle, a seguinte condição obtida de (5.3b) e (5.4) deve ser válida $\forall r_0 \in \mathcal{R}$,

$$\mathcal{U}_{cl} = \left\{ \begin{bmatrix} x_{cl} \\ r_0 \end{bmatrix} : U_p \begin{bmatrix} K_p C_p & K_I & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ r_0 \end{bmatrix} \leq \mathbf{1}_{l_u} \right\}. \quad (5.11)$$

¹ Daqui em diante, sempre que possível, a dependência do tempo t será omitida.

Problema 4 Dado o sistema (5.1), encontrar os ganhos de controle K_p , K_I e K_r em (5.4), determinar o limite de referência $\bar{\rho}$ em \mathcal{R} , (5.7), e um conjunto $\mathcal{L}_0 \in \mathbb{R}^{n_{cl}}$ tal que, para qualquer condição inicial $x_{cl,0} \in \mathcal{L}_0$, a trajetória correspondente do sistema de malha fechada (5.9) converge assintoticamente para qualquer degrau de referência com amplitude $r_0 \in \mathcal{R}$, respeitando as restrições de estados \mathcal{X}_{cl} , (5.10), e controle \mathcal{U}_{cl} , (5.11).

As soluções propostas para o Problema 4 baseiam-se, sobretudo, no clássico Princípio do Modelo Interno (PMI) e na propriedade de invariância positiva de conjuntos poliédricos. Observe que, a partir do cumprimento das restrições, evita-se a saturação do controle, o que nos permite aplicar o PMI ao modelo linear de malha fechada (5.9).

5.2 Resultados Principais

Nesta seção, utilizam-se as propriedades de invariância de conjuntos poliédricos para propor duas soluções distintas para o Problema 4.

5.2.1 Solução Baseada em Δ -Invariância

Inicialmente, propõem-se condições para resolver o Problema 4, considerando que o degrau de referência como um sinal exógeno persistente limitado, e aplica-se o Teorema 2 ao modelo de malha fechada não autônomo (5.9). As condições propostas possuem um grau de conservadorismo inerente ao considerar um conjunto de sinais que contém o degrau como um caso particular, mas podem produzir boas soluções para o Problema 4, como será verificado posteriormente.

Proposição 4 O Problema 4 tem uma solução formada pelas matrizes de ganho (K_p, K_I, K_r) , limites $\pm\bar{\rho}$, e um conjunto poliédrico de condições iniciais,

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_{cl} = \{x_{cl} : L_{cl}x_{cl} \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (5.12)$$

se para algum inteiro $r > n$, existe: as matrizes $L_{cl} \in \mathbb{R}^{r \times n_{cl}}$ e $V_{cl} \in \mathbb{R}^{n_{cl} \times r}$; as matrizes positivas $T_{cl} \in \mathbb{R}^{l_{x_{cl}} \times r}$, $Q_{cl} \in \mathbb{R}^{l_u \times r}$, $H_r \in \mathbb{R}^{r \times l_r}$, $Q_r \in \mathbb{R}^{l_u \times l_r}$, uma matriz $H_{cl} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e um escalar γ_t que satisfaça as condições i) e ii) no Teorema 1, de modo que as seguintes condições são verdadeiras,

$$H_{cl}L_{cl} = L_{cl}A_{cl}, \quad (5.13a)$$

$$H_r R = L_{cl}B_{cl}, \quad (5.13b)$$

$$H_{cl}\mathbf{1}_r + H_r \rho \leq \sigma_t \mathbf{1}_r, \quad (5.13c)$$

$$H_{cl}\mathbf{1}_r \leq \gamma_t \mathbf{1}_r, \quad (5.13d)$$

$$T_{cl}L_{cl} = X_{cl}, \quad (5.13e)$$

$$T_{cl}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_x}, \quad (5.13f)$$

$$Q_{cl}L_{cl} = U_p \begin{bmatrix} K_p C_p & K_I \end{bmatrix}, \quad (5.13g)$$

$$Q_r R = U_p K_r, \quad (5.13h)$$

$$Q_{cl}\mathbf{1}_r + Q_r \rho \leq \mathbf{1}_{l_u}, \quad (5.13i)$$

$$V_{cl}L_{cl} = \mathbb{I}_{n_{cl}}, \quad (5.13j)$$

em que $\sigma_t = \begin{cases} -v, & \text{com } v \in \mathbb{R}_+ \text{ se } t \in \mathbb{R}_+, \\ \omega, & \text{com } \omega \in [0, 1) \text{ se } t \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Prova: Suponha que as relações (5.13a)-(5.13j) sejam verdadeiras. Assim, a aplicação dos resultados da Seção 2.2.2 ao sistema não autônomo (5.9) permite concluir que:

1. A existência de V_{cl} em (5.13j) é equivalente a $\text{posto}(L_{cl}) = n_{cl}$ visto que, por hipótese, $r > n_{cl}$, o que significa que V_{cl} é a matriz pseudo-inversa à esquerda de L_{cl} . Como $\text{posto}(R) = 1$, isto implica que $\text{posto}(L) = n = n_{cl} + 1$, deste modo o poliedro associado \mathcal{L}_{cl} , (5.12), é compacto e contém a origem em seu interior.
2. As relações (5.13a)-(5.13c) podem ser reescritas equivalentemente sob a forma (2.13a)-(2.13c), considerando-se as substituições $H \leftarrow H_{cl}$, $L \leftarrow L_{cl}$, $A \leftarrow A_{cl}$, $W \leftarrow H_r$, $E \leftarrow B_{cl}$, $\phi \leftarrow \mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_{l_d} \leftarrow \rho$, e utilizando-se a variável σ_t . Assim, do Teorema 2, \mathcal{L}_{cl} é um conjunto Δ -invariante do sistema (5.9). Além disto, as relações (5.13a) e (5.13d) garantem que A_{cl} é Hurwitz em tempo contínuo, ou Schur em tempo discreto. Portanto, no primeiro caso, seus autovalores têm partes reais negativas menores ou iguais a $-\epsilon$ e, no segundo caso, o módulo dos seus autovalores é menor ou igual a λ .
3. As relações (5.13e)-(5.13f) garantem $\mathcal{L}_{cl} \subseteq \mathcal{X}_{cl}$. Da mesma forma, as relações (5.13g)-(5.13i) garantem $\mathcal{L}_{cl} \subseteq \mathcal{U}_{cl}$, onde \mathcal{U}_{cl} é dado por (5.11).

Dos pontos 1) a 3) acima, podemos concluir que para cada $r_0 \in \mathcal{R}$ e qualquer condição inicial $x_{cl,0} \in \mathcal{L}_{cl}$, as trajetórias de malha fechada correspondentes se comportam linearmente seguindo a dinâmica de (5.9), permanecem dentro de \mathcal{L}_{cl} ,

e respeitam as restrições de estado e controle (evitando a saturação de controle). Além disto, por construção, A_{cl} é Hurwitz em tempo contínuo, ou Schur em tempo discreto. Portanto, o PMI permanece válido dentro de \mathcal{L}_{cl} , e as trajetórias são tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r_0$.

□

5.2.2 Solução Baseada em Invariância Positiva

Para considerar explicitamente o degrau de referência no procedimento de projeto, considere o seguinte sistema autônomo:

$$\varphi \begin{bmatrix} x_{cl} \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & A_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ y_r \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} x_{cl}(0) \\ y_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{cl,0} \\ r_0 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

em que, por definição, o vetor de estado estendido $x = \begin{bmatrix} x_{cl}^T & y_r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$, com $n = n_{cl} + 1$.

Observe que o subsistema escalar $\varphi[y_r] = A_I \cdot y_r$, com $y_r(0) = r_0$, é o modelo dinâmico para o degrau de referência $y_r = r_0$, $\forall t \geq 0$, que deve estar dentro do intervalo $[-\bar{\rho} \quad \bar{\rho}]$. Conseqüentemente, o sistema autônomo (5.14), também obtido a partir de (5.9) é, por definição, Lyapunov estável, muito embora a matriz do sistema de malha fechada A_{cl} deva ser Hurwitz em tempo contínuo ou Schur em tempo discreto para garantir que o PMI seja verdadeiro.

Agora, podemos afirmar o seguinte resultado que se baseia substancialmente na propriedade de invariância positiva descrita na Seção 2.2.1.

Proposição 5 *O Problema 4 tem uma solução formada pelas matrizes de ganho (K_p, K_I, K_r) , limites $\pm\bar{\rho}$, e um conjunto poliédrico de condições iniciais \mathcal{L}_0 , se para algum inteiro $r > n$, existem as matrizes $(L_{cl}, L_{eq}) \in \mathbb{R}^{r \times n_{cl}}$, $V_{cl} \in \mathbb{R}^{n_{cl} \times r}$; um vetor $L_r \in \mathbb{R}^r$; matrizes positivas $T_{cl} \in \mathbb{R}^{l_{x_{cl}} \times r}$, $Q_{cl} \in \mathbb{R}^{l_u \times r}$, $H_r \in \mathbb{R}^{r \times l_r}$, $T_r \in \mathbb{R}^{l_x \times l_r}$, $Q_r \in \mathbb{R}^{l_u \times l_r}$, uma matriz $H_{cl} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e um escalar γ_t que satisfaça as condições i) e ii) no Teorema 1, de modo que as seguintes condições sejam*

verdadeiras,

$$H_{cl}L_{cl} = L_{cl}A_{cl}, \quad (5.15a)$$

$$H_{cl}L_r + H_rR = L_{cl}B_{cl} + L_rA_l, \quad (5.15b)$$

$$H_{cl}\mathbf{1}_r + H_r\rho \leq \sigma_t\mathbf{1}_r, \quad (5.15c)$$

$$H_{cl}\mathbf{1}_r \leq \gamma_t\mathbf{1}_r, \quad (5.15d)$$

$$T_{cl}L_{cl} = X_{cl}, \quad (5.15e)$$

$$T_{cl}L_r + T_rR = 0, \quad (5.15f)$$

$$T_{cl}\mathbf{1}_r + T_r\rho \leq \mathbf{1}_{l_{x_{cl}}}, \quad (5.15g)$$

$$Q_{cl}L_{cl} = U_p \begin{bmatrix} K_p C_p & K_I \end{bmatrix}, \quad (5.15h)$$

$$Q_{cl}L_r + Q_rR = U_p K_r, \quad (5.15i)$$

$$Q_{cl}\mathbf{1}_r + Q_r\rho \leq \mathbf{1}_{l_u}, \quad (5.15j)$$

$$L_{eq}(A_{cl} - \theta\mathbb{I}_{n_{cl}}) = -L_{cl}, \quad (5.15k)$$

$$\pm(L_{eq}B_{cl} + L_r)\bar{\rho} \leq \mathbf{1}_r, \quad (5.15l)$$

$$V_{cl}L_{cl} = \mathbb{I}_{n_{cl}}. \quad (5.15m)$$

em que $\sigma_t = \begin{cases} -v, & \text{com } v \in \mathbb{R}_+ \text{ se } t \in \mathbb{R}_+, \\ \omega, & \text{com } \omega \in [0, 1) \text{ se } t \in \mathbb{N}, \end{cases}$ e $\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ 1, & \text{se } t \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Prova: Suponha que as relações (5.15a)-(5.15l) sejam verdadeiras, e considere as seguintes definições para aplicar alguns dos resultados da Seção 2.2.1,

$$A = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & A_l \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_{cl} & L_r \\ 0 & R \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_{cl} & H_r \\ 0 & \theta\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_r \\ \rho \end{bmatrix}, \\ X = \begin{bmatrix} X_{cl} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_{cl} & T_r \\ 0 & \mathbb{I}_{l_r} \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} Q_{cl} & Q_r \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que:

1. Como na prova anterior, a existência de V_{cl} em (5.15l) é equivalente a $\text{posto}(L_{cl}) = n_{cl}$, o que significa que o poliedro associado \mathcal{L}_{cl} , (2.7), é compacto e contém a origem em seu interior.
2. As relações (5.15a)-(5.15c) podem ser reescritas equivalentemente sob a forma (2.8a)-(2.8b), considerando-se as substituições estipuladas acima. Deste modo, do Teorema 1, \mathcal{L}_{cl} é um conjunto positivamente invariante do sistema (5.14). Além disto, as relações (5.15a) e (5.15d) garantem que

A_{cl} é Hurwitz, em tempo contínuo, ou Schur, em tempo discreto. Portanto, no primeiro caso, seus autovalores têm partes reais negativas menores ou iguais a $-\epsilon$ e, no segundo caso, o módulo dos seus autovalores é menor ou igual a $\lambda < 1$.

3. As relações (5.15e)-(5.15g) garantem que $\mathcal{L}_{cl} \subseteq \mathcal{X}_{cl}$. Da mesma forma, as relações (5.15e)-(5.15g) garantem $\mathcal{L}_{cl} \subseteq \mathcal{U}_{cl}$.
4. De (5.15k), $L_{eq} = -(A_{cl} - \theta \mathbb{I}_{n_{cl}})^{-1} L_{cl}$. Assim, (5.15l) resulta, $\pm(-L_{cl}(A_{cl} - \theta \mathbb{I}_{n_{cl}})^{-1} B_{cl} + L_r) \bar{\rho} \leq \mathbf{1}_r$. Por convexidade, isto é equivalente a $\begin{bmatrix} L_{cl} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl,e}^T & r_0 \end{bmatrix}^T \leq \mathbf{1}_r, \forall r_0 \in [-\bar{\rho}, \bar{\rho}]$, onde $x_{cl,e} = -(A_{cl} - \theta \mathbb{I}_{n_{cl}})^{-1} B_{cl} r_0$ ². Isto também significa que os estados de equilíbrio correspondentes do sistema (5.14) pertencem ao conjunto positivamente invariante \mathcal{L}_{cl} .

Dos pontos 1) a 4) acima, podemos concluir que para cada $r_0 \in \mathcal{R}$ e condição inicial compatível $x_{cl,0}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} L_{cl} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl,0}^T & r_0 \end{bmatrix}^T \leq \mathbf{1}_r, \quad (5.16)$$

as trajetórias em malha fechada correspondentes se comportam linearmente, seguindo a dinâmica de (5.14), permanecem dentro de \mathcal{L}_{cl} e respeitam as restrições de estado e controle (evitando a saturação de controle). Além disto, por construção, A_{cl} é Hurwitz em tempo contínuo, ou Schur em tempo discreto, e os estados de equilíbrio correspondentes necessariamente pertencem a \mathcal{L}_{cl} . Portanto, o PMI permanece válido dentro de \mathcal{L}_{cl} e as trajetórias são tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r_0$. Isto completa a prova.

□

Observação 6 A partir de (5.16), o conjunto \mathcal{L}_0 que caracteriza as condições iniciais admissíveis para x_{cl} depende da amplitude do degrau r_0 , e pode ser escrito:

$$\mathcal{L}_0(r_0) = \{x_{cl} : L_{cl} x_{cl} \leq \xi(r_0)\}, \text{ com } \xi(r_0) = \mathbf{1}_r - L_r r_0.$$

Por definição, a origem de $\mathbb{R}^{n_{cl}}$, $x_{cl} = 0$, pertence a $\mathcal{L}_0(r_0)$, para qualquer $r_0 \in \mathcal{R}$, que permite que o sistema e o controlador sejam inicializados em repouso.

² $x_{cl,e}$ é, por definição, o ponto de equilíbrio do sistema (5.9).

5.3 Abordagem de Projeto por Otimização Bilinear

O uso das Proposições 4 e 5 para sintetizar soluções para o Problema 4, carrega alguns produtos entre pares de variáveis de decisão e matrizes, como K_p , K_I e K_r e a matriz L_{cl} ou, então, as matrizes L_{cl} e H_{cl} , entre outras.

Contudo, como em Brião *et al.* (2018), Brião (2019) e Santos *et al.* (2020), estes produtos bilineares podem ser considerados como restrições de projeto dos programas de otimização propostos a seguir. Portanto, técnicas de otimização não linear adequadas podem ser usadas para encontrar soluções para o Problema 4.

Tabela 10 – Problemas de Otimização

i	Dado	Φ_j	$\Lambda_j(\cdot)$	\mathcal{C}_j
1	$\bar{\rho}$	γ_t	$\Gamma(\cdot)$	(5.13a) – (5.13j)
2			$\Gamma(\cdot), L_{eq}$	(5.15a) – (5.15l)
3	γ_t	$\bar{\rho}$	$\Gamma(\cdot)$	(5.13a) – (5.13j)
4			$\Gamma(\cdot), L_{eq}$	(5.15a) – (5.15l)
5	α	$\bar{\rho} - \alpha\gamma_t$	$\Gamma(\cdot)$	(5.13a) – (5.13j)
6			$\Gamma(\cdot), L_{eq}$	(5.15a) – (5.15l)

Fonte – Elaborado pela Autora

Assim, definem-se os seguintes problemas de otimização bilinear:³

$$\begin{aligned}
 & \underset{\Lambda_j(\cdot)}{\text{maximizar}} && \Phi_j, \\
 & \text{sujeito a} && \mathcal{C}_j, \\
 & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \ell = 1, \dots, \bar{\ell},
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

em que a função objetivo Φ_j , as variáveis de decisão Λ_j , e as restrições \mathcal{C}_j podem tomar as seis combinações diferentes na Tabela 10, com $\Gamma(\cdot) = (K_p, K_I, K_r, L_{cl}, L_I, H_{cl}, H_I, T_{cl}, T_I, Q_{cl}, Q_I, V)$. As restrições adicionais, representadas por $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$, podem ser usadas, por exemplo, para impor limites sobre as variáveis de decisão não limitadas, reduzindo assim o espaço de busca e melhorando o desempenho numérico da otimização não linear usada, como exposto na Observação 5.

Nos dois primeiros problemas de otimização, o intervalo $[-\bar{\rho}, \bar{\rho}]$ é dado, e a taxa de convergência, representada por γ_t , é otimizada. Os próximos dois problemas consideram que γ_t é fixado de forma complementar e os limites de intervalo de \mathcal{R} são maximizados. Nos dois últimos problemas, o escalar α é um parâmetro de projeto adicional, que permite tratar um compromisso entre $\bar{\rho}$

³ Veja no Apêndice B detalhes de implementação do problema (5.17) para o caso $i = 5$ na Tabela 10 em linguagem AMPL

e γ_t . Observe que considera-se a Proposição 5 e 4, que produz os conjuntos correspondentes Λ_j e \mathcal{C}_j .

5.4 Exemplos Numéricos e Simulações

No exemplo numérico abaixo, os seguintes limites superior e inferior foram determinados nos elementos de $K_p, K_I, K_r, L_{cl}, L_r, L_{eq}$ e V_{cl} : $\underline{k}_p = \underline{k}_I = \underline{k}_r = \underline{l}_{cl} = \underline{l}_r = \underline{l}_{eq} = -100$, $\bar{k}_p = \bar{k}_I = \bar{k}_r, \bar{l}_{cl} = \bar{l}_r = \bar{l}_{eq} = 100$ e $\underline{v}_{cl} = -10,000, \bar{v}_{cl} = 10,000$. Além disto, a partir das desigualdades envolvendo as matrizes não negativas $H_{cl}, H_r, T_{cl}, T_r, Q_{cl}, Q_r$, seus elementos têm limites superiores dado por $\bar{h}_{cl} = \bar{h}_r = \bar{t}_{cl} = \bar{t}_r = \bar{q}_{cl} = \bar{q}_r = 100$. Ainda, os escalares não negativos $\bar{\rho}, \sigma_t$, e γ_t são delimitados por $\bar{\rho} = \sigma_t = \gamma_t = 0,0000001$. O estabelecimento de limites é realizado, através das restrições $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$ do programa bilinear (5.17), para delimitar o espaço de busca de soluções.

Exemplo 1: Projeto em Tempo Contínuo

Considere uma planta instável de primeira ordem (5.1), dada pelas seguintes matrizes,

$$A_p = \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

com restrições de estado e controle dados por $X_p^T = [0,3 \quad -0,3]$, $X_I^T = [0,3 \quad -0,3]$ e $U_p^T = [1 \quad -1]$.

Inicialmente, considera-se $r = 6$ referente ao número máximo de faces do poliedro \mathcal{L}_{cl} . A Tabela 11 mostra os resultados obtidos do problema de otimização (5.17), à esquerda para $i = 1, 2$, e à direita para $i = 3, 4$. Na tabela à esquerda, o parâmetro $\bar{\rho}$ é dado, e minimiza-se $-\epsilon$, isto é, maximiza-se ϵ . Neste caso, quanto menor os valores de $\bar{\rho}$, maior são os resultados de ϵ obtidos por ambas as abordagens, baseadas na invariância positiva (P-inv) e Δ -invariância (Δ -inv), respectivamente.

Em contraste, na tabela à direita são definidos diferentes valores para ϵ e maximiza-se os valores de $\bar{\rho}$. Neste caso, quanto menor ϵ , maior são os valores de $\bar{\rho}$, novamente para ambas as abordagens. Os resultados das duas tabelas mostram uma dualidade existente entre os problemas de otimização $i = 1, 2$ e $i = 3, 4$. Além disto, observa-se que os melhores desempenhos são obtidos por Δ -invariância, em ambas as tabelas, exceto na primeira linha da tabela da esquerda, para $\bar{\rho} = 0,1$.

Tabela 11 – Exemplo para $i = 1,2$ (esquerda), $i = 3,4$,(direita) e $r = 6$ em tempo contínuo

i	P-inv 1	Δ -inv 2	i	P-inv 3	Δ -inv 4
$\bar{\rho}$	ϵ		ϵ	$\bar{\rho}$	
0,1	0,9881	0,9871	10^{-4}	0,9998	1,3420
0,5	0,8000	0,9000	0,3	0,8441	1,1719
0,7	0,5142	0,6142	0,5	0,7142	0,8333
0,8	0,3781	0,5250	0,7	0,5555	0,6250
1	0,0037	0,3581	0,9	0,4545	0,5000

Fonte – Elaborado pela Autora

Na Tabela 12, mostram-se os resultados obtidos do problema de otimização (5.17), para $i = 5, 6$. Neste caso, o parâmetro de projeto α é dado, e procura-se $\bar{\rho}$ e ϵ que maximizam a função objetivo ponderada, $\bar{\rho} + \alpha\epsilon$. Observe que, para ambos os problemas de otimização, quanto maior for o valor de α , maior será o coeficiente de contratividade ϵ . Por outro lado, quanto menor α , maior são os limites $\pm\bar{\rho}$. Isto mostra que a função objetivo proposta permite um compromisso do tamanho do degrau de referência com a velocidade de convergência. Nota-se, no entanto, que a sensibilidade das soluções devido ao parâmetro de projeto α difere nas duas abordagens (invariância positiva e Δ -invariância).

Tabela 12 – Exemplo para $i = 5, 6$ e $r = 6$ em tempo contínuo

i	P-inv 5			Δ -inv 6		
	$\bar{\rho} + \alpha\epsilon$	ϵ	$\bar{\rho}$	$\bar{\rho} + \alpha\epsilon$	ϵ	$\bar{\rho}$
0	1,0441	0,0000	1,0441	1,3420	0,0000	1,3420
0,5	0,9148	0,9881	0,4208	1,3443	0,0891	1,2997
0,7	1,1125	0,9881	0,4208	1,3734	0,3405	1,1350
1	1,4089	0,9881	0,4208	1,4423	0,9788	0,4634

Fonte – Elaborado pela Autora

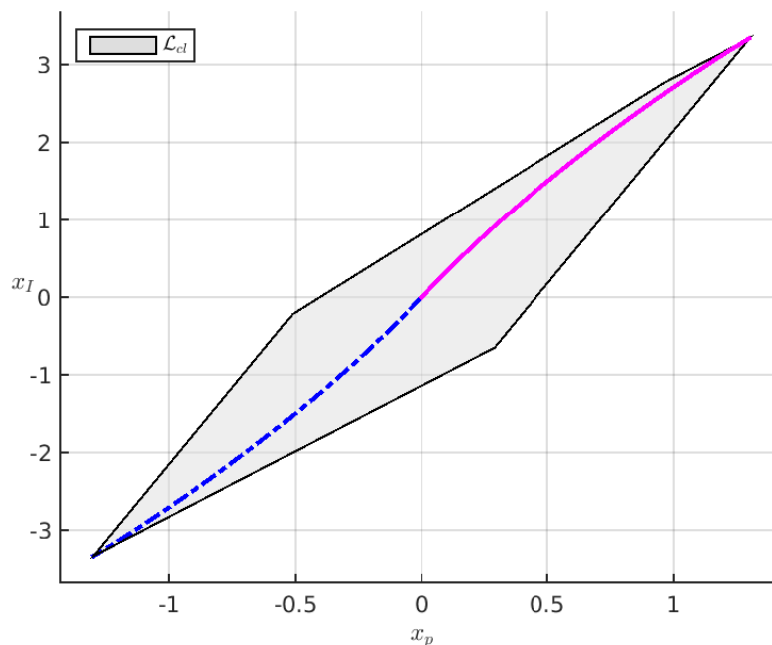
As duas figuras a seguir estão relacionadas ao projeto PI obtido usando a abordagem de Δ -invariância para $\alpha = 0,5$, que resulta em $K_p = -1,3851$, $K_I = 0,3511$, e $K_r = 0,2847$. A Figura 24 mostra o conjunto $\mathcal{L}_{cl} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$, composto

pela matriz:

$$L_{cl} = \begin{bmatrix} 0,8808 & -0,0484 \\ 2,1986 & -0,5573 \\ -2,4834 & 1,2272 \\ 1,4807 & -0,8774 \\ -2,1986 & 0,5573 \\ -1,4808 & 0,8774 \end{bmatrix}.$$

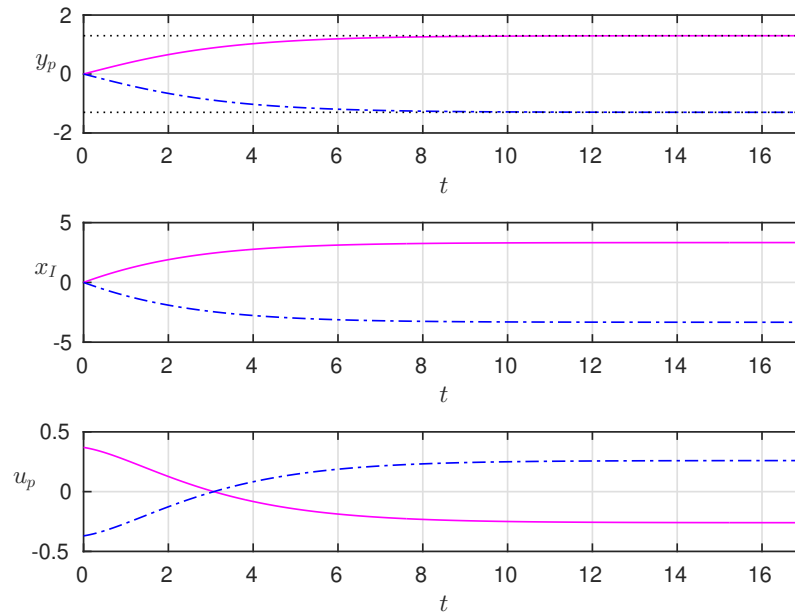
As trajetórias desenhadas referem-se ao comportamento de rastreamento do degrau de referências com $r_0 = \pm 1,2997$, que é aproximadamente igual a $\pm \bar{\rho}$, e com a planta e o controlador em repouso, $x_{cl,0} = 0$. Como esperado, as duas trajetórias evoluem no conjunto \mathcal{L}_{cl} , que pode ser observado na Figura 24. As respostas de tempo correspondentes na Figura 25, mostram que a saída $y(t) = x(t)$ rastreia o degrau de referência y_r , e o estado integrador $x_I(t)$ atinge o valor associado ao estado estacionário. Além disto, mostra que as ações de controle estão dentro dos limites permitidos.

Figura 24 – Conjunto \mathcal{L}_{cl} via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo contínuo



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 25 – Resposta de tempo via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo contínuo



Fonte – Elaborado pela Autora

Exemplo 2: Projeto em Tempo Discreto

Considere o sistema em tempo discreto adaptado de Martins *et al.* (2020) dado pelas matrizes:

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 1,0304 \end{bmatrix}, \quad B_\rho = \begin{bmatrix} 0,0345 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad C_\rho = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

sujeito as mesmas restrições dadas por $X_\rho^T = \begin{bmatrix} 0,8333 & -0,8333 \end{bmatrix}$, $X_I^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $U_\rho^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$.

De maneira similar ao exemplo anterior, na Tabela 13 mostra-se os resultados obtidos do problema de otimização (5.17) com $r = 6$, à esquerda para $i = 1, 2$, e à direita para $i = 3, 4$. Na tabela à esquerda, o parâmetro $\bar{\rho}$ é dado, e minimiza-se λ . Neste caso, quanto maior os valores de $\bar{\rho}$, maior são os resultados de λ para ambas as abordagens.

Por sua vez, na tabela à direita são definidos diferentes valores para λ e maximiza-se os valores de $\bar{\rho}$. Neste caso, quanto maior λ , maior são os valores de $\bar{\rho}$, para ambos os casos, ressaltando mais uma vez a dualidade entre os problemas de otimização $i = 1, 2$ e $i = 3, 4$. Ainda, observa-se que os melhores desempenhos são obtidos por Δ -invariância, em ambas as tabelas.

Tabela 13 – Exemplo para $i = 1,2$ (esquerda), $i = 3,4$,(direita) e $r = 6$ em tempo discreto

i	P-inv 1	Δ -inv 2	i	P-inv 3	Δ -inv 4
$\bar{\rho}$	λ		λ	$\bar{\rho}$	
0,1	0,2691	0,2539	10^{-4}	0,0000	0,0000
0,15	0,5229	0,5077	0,2	0,0916	0,0933
0,2	0,7455	0,5934	0,5	0,1435	0,1477
0,25	0,9920	0,6639	0,7	0,1960	0,2631
0,3	0,9999	0,9061	0,9	0,2226	0,2991

Fonte – Elaborado pela Autora

Na Tabela 14, mostram-se os resultados obtidos do problema de otimização (5.17), para $i = 5,6$. Neste caso, o parâmetro de projeto α é dado, e procura-se $\bar{\rho}$ e λ que maximizam a função objetivo ponderada, $\bar{\rho} - \alpha\lambda$. Para ambos os problemas de otimização, quanto maior o valor de α , menor será o coeficiente de contratividade λ e os limites $\pm\bar{\rho}$. Mais uma vez, nota-se que a função objetivo proposta permite um compromisso do tamanho do degrau de referência com a velocidade de convergência. No entanto, a sensibilidade das soluções devido ao parâmetro de projeto α difere nas duas abordagens (invariância positiva e Δ -invariância).

Tabela 14 – Exemplo para $i = 5,6$ e $r = 6$ em tempo discreto

i	P-inv 5			Δ -inv 6		
α	$\bar{\rho} - \alpha\lambda$	λ	$\bar{\rho}$	$\bar{\rho} - \alpha\lambda$	λ	$\bar{\rho}$
0	0,2611	0,9999	0,2611	0,3118	0,9999	0,3118
0,5	0,0469	0,0635	0,0787	0,0304	0,1066	0,0837
1	0,0152	0,0635	0,0787	0,0224	0,1005	0,0780

Fonte – Elaborado pela Autora

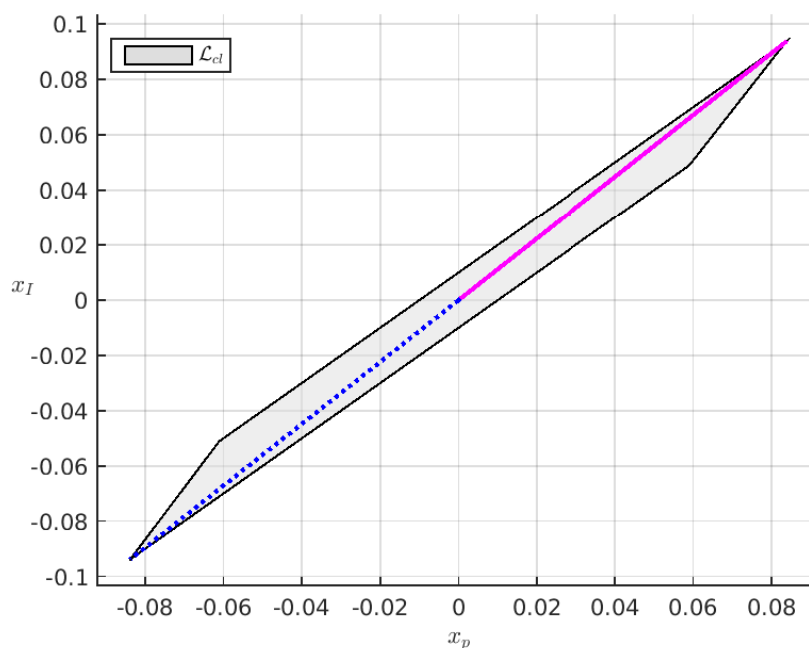
As figuras a seguir são relacionadas ao projeto PI obtido usando a abordagem de Δ -invariância para $\alpha = 0,5$, que resulta em $K_p = -6,3178$, $K_I = 2,9339$, e $K_r = 2,9339$. A Figura 26 mostra o conjunto $\mathcal{L}_{cl} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$, composto pela matriz:

$$L_{cl} = \begin{bmatrix} -29,4736 & 15,6683 \\ -62,1497 & 66,0525 \\ -100,0000 & 100,0000 \\ 31,2839 & -17,2856 \\ 100,0000 & -100,0000 \\ 26,8306 & -30,9163 \end{bmatrix}.$$

As trajetórias desenhadas referem-se ao comportamento de rastreamento do degrau de referências com $r_0 = \pm 0,0837$, que é aproximadamente igual a $\pm \bar{\rho}$, e com a planta e o controlador em repouso, $x_{cl,0} = 0$. Como esperado, as duas trajetórias evoluem no conjunto \mathcal{L}_{cl} , que pode ser observado na Figura 26. As respostas ao longo do tempo correspondentes na Figura 27, mostram que a saída $y(t) = x(t)$ rastreia o degrau de referência y_r , e o estado integrador $x_I(t)$ atinge o valor associado ao estado estacionário. Também, mostra que as ações de controle estão dentro dos limites permitidos.

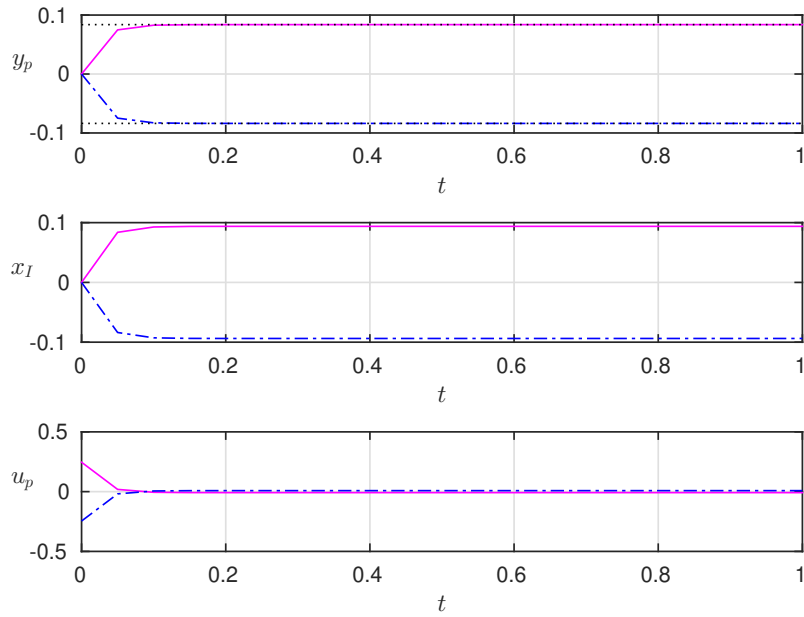
Em relação as considerações no trabalho de Martins *et al.* (2020), em que os valores de $\bar{\rho}$ são limitados no intervalo de $[-1, 1]$, os resultados obtidos neste exemplo são conservadores, visto que o máximo obtido para $\bar{\rho}$ é aproximadamente 0,3. Uma possível causa deste conservadorismo pode estar relacionado a definição do sistema integrador em tempo discreto como $x_I(t+1) = x_I(t) + e(t) \Rightarrow x_I(t) = \sum_0^{t-1} e(\tau)$, ao invés de $x_I(t+1) = x_I(t) + e(t+1) \Rightarrow x_I(t) = \sum_0^t e(\tau)$. Eventualmente, diferentes espaços de busca podem ser estabelecidos utilizando-se outros limitantes superiores e inferiores e, também, definindo valores maior para r , que define a complexidade de \mathcal{L}_{cl} (número máximo de linhas da matriz L_{cl}).

Figura 26 – Conjunto \mathcal{L}_{cl} via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo discreto



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 27 – Resposta de tempo via Δ -invariância com $\alpha = 0,5$ e $r = 6$ em tempo discreto



Fonte – Elaborado pela Autora

5.5 Conclusão

Nesta seção foi abordado o rastreamento do degrau de referência para sistemas monovariáveis sujeitos a restrições de estado e controle por meio de uma lei de controle PI com um termo *feed-forward*. Foram aplicadas as propriedades de invariância e contratividade de conjuntos poliédricos, determinando os limites de amplitude para o degrau de referência, que garantem a estabilidade em malha fechada local e o cumprimento das restrições, de modo que o Princípio do Modelo Interno permaneça válido na região poliédrica. O primeiro resultado principal foi baseado na propriedade de invariância positiva aplicada a uma representação de espaço de estado estendida, que leva em conta o modelo de referência, considerando condições mais complexas do que aquelas baseadas na propriedade de Δ -invariância. Com base nestes dois resultados complementares, um conjunto de problemas de otimização bilinear foi proposto para encontrar soluções para o problema de rastreamento restrito associado.

6 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, utilizaram-se as propriedades de invariância positiva, contratividade e Δ -invariância de conjuntos poliédricos para garantir a estabilização ou seguimento de referência num contexto local de sistemas dinâmicos lineares. Deste modo, foram respeitadas as restrições sobre estados e entradas, via leis de controle por realimentação de saída, estática (SOF) e dinâmica (DOF).

Inicialmente, como uma extensão dos resultados do Capítulo 5 de Brião (2019) (Estabilização sob restrições de sistemas LDIT com perturbações via programação bilinear), foi descrita uma abordagem para síntese de leis de controle por DOF e de um conjunto poliédrico Δ -invariante, com um conjunto-UB associado, garantindo a estabilidade assintótica local das trajetórias e respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle na presença de perturbações externas persistentes.

Assim, como em Brião (2019) e Brião *et al.* (2018), as relações algébricas que descrevem a Δ -invariância em malha fechada do poliedro a calcular, e as condições de inclusão que garantem a inclusão deste poliedro nos poliedros de restrições, são utilizadas na formulação de um problema de programação bilinear, para a síntese do controlador e dos conjuntos invariantes. Neste caso, a função objetivo considerada, proposta em Brião *et al.* (2018), permite ponderar tanto a maximização do conjunto Δ -invariante em determinadas direções, quanto um limite superior para o tamanho relativo do conjunto-UB interno. Este primeiro estudo foi desenvolvido para o caso de sistemas lineares discretos no tempo.

De maneira similar à abordagem anterior, foi proposta uma abordagem baseada em otimização bilinear para a síntese de leis de controle por realimentação de saída. O intuito foi determinar um conjunto poliédrico positivamente invariante, que garante a estabilidade assintótica local das trajetórias partindo de um dado conjunto de condições iniciais, respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle. Neste estudo, os resultados foram desenvolvidos de forma unificada para sistemas lineares em tempo contínuo e discreto no tempo. Como anteriormente, as relações de invariância e de inclusão dos poliedros são utilizadas na formulação de um problema de programação bilinear, para a síntese do controlador e dos conjuntos invariantes. Neste caso, através da escolha do parâmetro de projeto α , a função objetivo considerada permite ponderar a velocidade de convergência das trajetórias e o esforço de controle.

Por fim, um problema de rastreamento de referência foi definido para sistemas lineares monovariáveis sujeitos a restrições de estado e controle. A metodo-

logia proposta para projetar um controlador semelhante a PI aplica o conceito de invariância positiva, ou Δ -invariância, de conjuntos poliédricos para lidar com as restrições, garantindo que o Princípio do Modelo Interno seja útil para rastrear o degrau de referências pertencentes a um determinado intervalo. Ainda, um conjunto de problemas de otimização bilinear é proposto para encontrar soluções que minimizam a taxa de convergência γ_t , ou que maximizem os limites de intervalo de \mathcal{R} , representados por $\bar{\rho}$ ou, ainda, para maximizar um compromisso entre $\bar{\rho}$ e γ_t , através de um parâmetro de projeto adicional α .

Portanto, pode-se inferir algumas vantagens das abordagens propostas em relação a outras disponíveis na literatura, como as baseadas em LMI, visto que estas permitem o tratamento das bilinearidades inerentes às leis de controle por realimentação de saída e, também, lidar com restrições assimétricas, além de considerar compensadores de ordem reduzida. Para mostrar que os problemas de otimização propostos podem ser aplicados de forma eficiente, utilizou-se a linguagem AMPL e o *solver* não linear KNITRO para tratar os problemas de programação bilinear definidos. A eficácia destas propostas foram ilustradas por meio de exemplos numéricos disponíveis na literatura.

6.1 Publicações

Os seguintes artigos de Congresso foram publicados durante o mestrado:

- SANTOS, G. A. F.; ERNESTO, J. G.; CASTELAN, E. B. Controle sob Restrições de Sistemas Lineares - Projeto de Realimentação de Saídas via Programação Bilinear. XXIII Congresso Brasileiro de Automática, 2020.
- SANTOS, G. A. F.; CASTELAN, E. B.; ERNESTO, J. G. *PI-controller design for constrained linear systems using positive invariance and bilinear programming*. In: IEEE. 2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA). [S.l.:s.n.], 2021.
- ERNESTO, J. G.; CASTELAN, E. B.; SANTOS, G. A. F.; CAMPONOGARA, E. *Incremental output feedback design approach for discrete-time parameter-varying systems with amplitude and rate control constraints*. In: IEEE. 2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA). [S.l.:s.n.], 2021.

Este último artigo foi uma colaboração como co-autora no trabalho desenvolvido pelo doutorando Jackson G. Ernesto. Ainda, o artigo a seguir foi publicado e apresentado em um evento de caráter regional:

- SANTOS, G. A. F.; CASTELAN, E. B. Controle sob Restrições por Realimentação Dinâmica de Saída de Sistemas Lineares sujeitos a Perturbações Persistentes. *Ágora Matemática - Universidade Estadual do Paraná*, v. 4, 2020. ISSN 2674-8282.

6.2 Trabalhos Futuros

Finalmente, seguem sugestões para trabalhos futuros:

- Do ponto de vista da implementação dos programas bilineares e da resolução por otimização não linear, sugere-se explorar outras linguagens de programação, como a linguagem denominada JULIA¹, e comparar com as soluções obtidas via KNITRO com outros *solvers* não lineares que se adaptem à formulação bilinear. Neste sentido, a composição dos conjuntos invariantes a partir das restrições dos estados, de controle e de restrições adicionais², tem-se demonstrado mais eficiente do ponto de vista numérico e as propostas aqui apresentadas também podem ser adaptadas a esta estruturação.
- Do ponto de vista de utilização das abordagens descritas, faz-se necessário dar continuidade à verificação de sua utilidade em outros exemplos mais complexos, como de maior ordem, multivariáveis ou que demandem utilizar leis de controle descentralizadas, sem perder de vista comparações com outras abordagens existentes na literatura e a aplicação prática no controle de processos físicos.
- No caso específico do projeto de controlador PI sob restrições, os seguintes pontos podem ser salientados:
 - No caso discreto, verificar a utilização de um outro modelo para o sistema integrador, dado por $x_I(t+1) = x_I(t) + e(t+1)$ (LOPES, 2017), com o intuito de obter resultados menos conservadores do que os mostrados no Capítulo 5.

¹ <https://julialang.org/>

² Trata-se de pesquisa em desenvolvimento no trabalho de doutorado de Jackson G. Ernesto.

- A proposta pode ser adaptada para também considerar a presença de perturbações persistentes ou de tipo degrau, outros objetivos de controle e lidar com outras estruturas de controle, ou, ainda, tratar sistemas incertos e com parâmetros variáveis (DÓREA *et al.*, 2020; ERNESTO *et al.*, 2021).

REFERÊNCIAS

- BERMAN, A.; PLEMMONS, R. J. **Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences**. [S.l.]: SIAM, 1994a. v. 9.
- BERMAN, A.; PLEMMONS, R. J. **Nonnegative matrices in the mathematical sciences**. [S.l.]: SIAM, 1994b.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999. ISSN 0005-1098. DOI: 10.1016/S0005-1098(99)00113-2.
- BLANCHINI, F.; MIANI, S. **Set-theoretic methods in control**. 2nd. Boston, MA: Birkhäuser Basel, 2015.
- BOYD, Stephen; EL GHAOUI, Laurent; FERON, Eric; BALAKRISHNAN, Venkataramanan. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- BRIÃO, S. L. **Estabilização de Sistemas Lineares com Cálculo Explícito dos Ganhos de Realimentação via Conjuntos Invariantes Poliédricos**. 2019. Tese (Doutorado) – PPGEAS/UFSC.
- BRIÃO, S. L.; CASTELAN, E. B.; CAMPONOGARA, E.; ERNESTO, J. G. Output Feedback Design for Discrete-time Constrained Systems subject to Persistent Disturbances via Bilinear Programming. **Manuscrito submetido ao Journal of The Franklin Institute**, 2020.
- BRIÃO, S. L.; PEDROSA, M. V. A.; CASTELAN, E. B.; CAMPONOGARA, E.; ASSIS, L. S. Explicit Computation of Stabilizing Feedback Control Gains Using Polyhedral Lyapunov Functions. *In*: IEEE. 2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA). [S.l.: s.n.], 2018. P. 1–6.
- BYRD, R. H.; NOCEDAL, J.; WALTZ, R. A. Knitro: An Integrated Package for Nonlinear Optimization. *In*: DI PILLO, G.; ROMA, M. (Ed.). **Large-Scale Nonlinear Optimization**. Boston: Springer, 2006.

- CASTELAN, E. B.; HENNET, J. C. On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic control**, IEEE, v. 38, n. 11, p. 1680–1685, 1993.
- CASTELAN, E. B.; QUEINNEC, I.; TARBOURIECH, S.; SILVA JR, J. M. G. da. LMI approach for L2-control of linear systems with saturating actuators. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 37, n. 13, p. 267–272, 2004.
- CHEN, Chi-Tsong; SHAFAI, Bahram. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Oxford university press New York, 1999. v. 3.
- DOREA, Carlos Eduardo Trabuco; HENNET, JC. (A, B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. **Journal of optimization theory and applications**, Springer, v. 103, n. 3, p. 521–542, 1999.
- DÓREA, C. E. T.; CASTELAN, E. B.; ERNESTO, J. G. Robust positive invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy t-s models: a bilinear optimization design strategy. **In: 21st IFAC World Congress, Berlin, 2020**.
- ERNESTO, J. G.; CASTELAN, E. B.; SANTOS, G. A. F.; CAMPONOGARA, E. Incremental output feedback design approach for discrete-time parameter-varying systems with amplitude and rate control constraints. *In: IEEE. 2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*. [S.l.: s.n.], 2021.
- FADALI, M Sami; VISIOLI, Antonio. **Digital control engineering: analysis and design**. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- FLORES, J. V.; ECKHARD, D.; SILVA, J. M. G. On the tracking problem for linear systems subject to control saturation. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 14168–14173, 2008.
- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. AMPL. A modeling language for mathematical programming. Thomson, 2003.
- FRANKLIN, Gene F; POWELL, J David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Feedback control of dynamic systems**. [S.l.]: Pearson London, 2015.

- GUPTA, A.; FALCONE, P. Full-Complexity Characterization of Control-Invariant Domains for Systems With Uncertain Parameter Dependence. **IEEE Control Systems Letters**, v. 3, n. 1, p. 19–24, jan. 2019. ISSN 2475-1456. DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2849714.
- HENNET, J. C. Discrete time constrained linear systems. **Control and Dynamic Systems**, ACADEMIC PRESS LIMITED, v. 71, p. 157–214, 1995.
- KHALIL, Hassan K; GRIZZLE, Jessy W. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3.
- LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Sinais e sistemas lineares-2**. [S.l.]: Bookman, 2006.
- LOPES, A. N. D. **Seguimento de Referência em Controle de Sistemas não Lineares sob Restrições via Modelagem Takagi-Sugeno**. [S.l.: s.n.], 2017.
- MARTINS, J. K. E. C.; ARAÚJO, F. M. U.; DÓREA, C. E. T. Um Método Baseado em Otimização para Sintonia de Controladores PI para Sistemas Sujeitos a Restrições. **XXIII Congresso Brasileiro de Automática**, 2020.
- MILANI, B. E. A.; CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S. Linear Regulator Design for Bounded Uncertain Discrete-Time Systems with Additive Disturbances. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 29, n. 1, p. 3192–3197, 1996. ISSN 1474-6670. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)58167-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58167-7).
- MILANI, B. E. A.; DÓREA, C. E. T. On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances. **Automatica**, v. 32, n. 5, p. 785–789, 1996. ISSN 0005-1098. DOI: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(96\)00002-7](https://doi.org/10.1016/0005-1098(96)00002-7).
- SANTOS, G. A. F.; CASTELAN, E. B. Controle sob Restrições por Realimentação Dinâmica de Saída de Sistemas Lineares sujeitos à Perturbações Persistentes. **Ágora Matemática - Universidade Estadual do Paraná**, v. 4, 2020. ISSN 2674-8282.

SANTOS, G. A. F.; CASTELAN, E. B.; ERNESTO, J. G. PI-controller design for constrained linear systems using positive invariance and bilinear programming. *In: IEEE. 2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*. [S.l.: s.n.], 2021.

SANTOS, G. A. F.; ERNESTO, J. G.; CASTELAN, E. B. Controle sob Restrições de Sistemas Lineares - Projeto de Realimentação de Saídas via Programação Bilinear. **XXIII Congresso Brasileiro de Automática**, 2020.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; SILVA, J. M. G.; QUEINNEC, I. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. [S.l.]: Springer Science, 2011.

TARBOURIECH, S.; PITTET, C.; BURGAT, C. Output tracking problem for systems with input saturations via nonlinear integrating actions. **International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal**, Wiley Online Library, v. 10, n. 6, p. 489–512, 2000.

APÊNDICE A – Análise e Projeto LMI com Minimização da Energia de Controle

A fim de comparar a proposta de projeto desenvolvida no Capítulo 4 com um método baseado em LMIs, desenvolve-se a seguir um conjunto de LMIs que garantem a minimização da energia de controle na presença de restrições nas variáveis de estado e controle, e considerando-se o conjunto de condições iniciais; veja, por exemplo, Boyd *et al.* (1994) e Castelan *et al.* (2004).

A.1 Análise

Seja $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz de realimentação de estados dada. Considere, uma função quadrática de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t), \text{ com } 0 \prec P' = P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (\text{A.1})$$

e o conjunto de nível associado, definido pelo domínio elipsoidal,

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}(P) \triangleq \{x(t) : x(t)'Px(t) \leq 1\}. \quad (\text{A.2})$$

Considere, também, que $V(x(t))$ verifica a função custo dada por:

$$J(t) = \dot{V}(x(t)) + \frac{1}{\vartheta} u(t)'T u(t) < 0,$$

com o escalar $\vartheta > 0$.

Como $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$,

$$\int_0^t \dot{V}(x(t))dt + \frac{1}{\vartheta} \int_0^t u(t)'T u(t)dt < 0,$$

de modo que, para $t \rightarrow \infty$,

$$V(x(t)) - V(x(0)) + \frac{1}{\vartheta} \|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} < 0 \Leftrightarrow \|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \vartheta V(x(0)). \quad (\text{A.3})$$

Logo, o escalar $\vartheta > 0$ representa um limite superior para a energia do sinal de controle, em função da distância relativa da condição inicial $x(0)$ em relação à origem, medida a partir de função de Lyapunov quadrática (A.1). Em particular, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P)$, tem-se $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \vartheta$.

Ademais, a relação (A.3) é equivalente à,

$$(A + BK)'P + P(A + BK) + \frac{1}{\vartheta} K'K \prec 0,$$

a qual pode ser reescrita sob a forma de uma LMI em relação às variáveis $P = P' > 0$ e ϑ , como segue,

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) & K' \\ K & -\vartheta I_m \end{bmatrix} \prec 0. \quad (\text{A.4})$$

Ainda, com vistas à comparação com a abordagem via invariância positiva do Capítulo 3, considera-se as inclusões seguintes e suas representações sob a forma de LMIs:

- $\mathcal{E}(P) \in \mathcal{X}$, com $\mathcal{X} = \{x(t) : g_i^T x(t) \leq 1, \forall i = 1, \dots, l_g\}$:

$$x'(g_i g_i' - P)x \leq 0 \iff \begin{bmatrix} -P & g_i \\ g_i' & -1 \end{bmatrix} \preceq 0, \forall i; \quad (\text{A.5})$$

- $\mathcal{E}(P) \in \mathcal{U}_y$, com $\mathcal{U}_y = \{x(t) : z_j^T K x(t) \leq 1, \forall j = 1, \dots, l_z\}$:

$$x'(K' z_j z_j' K - P)x \leq 0, \forall i \iff \begin{bmatrix} -P & K' z_j \\ z_j' K & -1 \end{bmatrix} \preceq 0, \forall j; \quad (\text{A.6})$$

- $\mathcal{D} \in \mathcal{E}(P)$, com $\mathcal{D} = \text{span}\{v_r; v_r, r = 1, \dots, n_v\}$:

$$v_r' P v_r \leq 1 \iff \begin{bmatrix} -1 & v_r' P \\ P v_r & -P \end{bmatrix} \preceq 0, \forall r. \quad (\text{A.7})$$

Assim, dada qualquer matriz K de realimentação de estados que estabiliza (assintoticamente) o sistema em malha-fechada e um conjunto de condições iniciais \mathcal{D} , pode-se verificar a existência do limitante superior ϑ para a energia do sinal de controle sob restrições, de tal forma que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}(P) \subseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{U}_y)$, através do problema seguinte de Programação Convexa com restrições LMI:

$$\begin{aligned} & \underset{P, \vartheta}{\text{minimizar}} \quad \vartheta, \\ & \text{sujeito a} \quad (\text{A.4}), (\text{A.5}), (\text{A.6}) \text{ e } (\text{A.7}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Síntese com α -estabilidade

Com o objetivo de calcular uma realimentação de estados K que garanta a minimização do limitante superior de energia de controle sob restrições, conforme colocado anteriormente e, adicionalmente, admita uma margem de estabilidade representada pelo ϵ , pode-se proceder como segue.

De forma clássica (BOYD *et al.*, 1994), define-se a matriz definida-positiva $Q = Q' = P^{-1}$ e considera-se a substituição de variáveis $KQ = Y$. Então pré e pós-multiplicando a matriz $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_m \end{bmatrix}$ por (A.4), chega-se à LMI na variáveis $0 < Q \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\vartheta > 0$:

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & Y' \\ Y & -\vartheta \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (\text{A.9})$$

Adicionalmente, para garantir uma taxa de decaimento exponencial $\epsilon > 0$, considera-se a LMI seguinte, equivalente a $(A + BK)'P + P(A + BK) + 2\epsilon P < 0$:

$$QA' + AQ + Y'B' + BY + 2\epsilon Q \prec 0. \quad (\text{A.10})$$

Para que as condições $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{U}_y$ sejam garantidas, define-se \mathcal{D} da seguinte forma:

$$\mathcal{D} = \{x(t) : Dx(t) \leq 1\},$$

cujo conjunto de vértices de \mathcal{D} é dado como:

$$\mathcal{D} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Para a primeira parte da inclusão $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}(P)$, tem-se:

$$v_r' Q^{-1} v_r \leq 1, \quad \forall v_r, r = 1, \dots, n.$$

onde, novamente, aplica-se o complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} -1 & v_r' \\ v_r & -Q \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \forall r. \quad (\text{A.11})$$

Já a segunda parte da inclusão $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{X}$, com:

$$\mathcal{X} = \{x_i, Gx(t) \leq 1\} = \{x(t) : g_i^T x(t) \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, l_g\},$$

com $g_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Logo,

$$x'(g_i g_i' - Q^{-1})x \leq 0, \quad \forall i \iff \begin{bmatrix} -Q^{-1} & g_i' \\ g_i & -1 \end{bmatrix} \preceq 0,$$

pré e pós multiplicando pela matriz $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$ tem-se,

$$\begin{bmatrix} -Q & Qg_i' \\ g_i Q & -1 \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (\text{A.12})$$

Por fim, para a inclusão $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{U}_y$, em que:

$$\mathcal{U}_y = \{x, ZKx(t) \leq 1\} = \{x(t) : z_j^T Kx(t) \leq 1, \forall j = 1, \dots, l_z\},$$

semelhante ao desenvolvimento anterior,

$$\begin{bmatrix} -Q & Y'z_j \\ z_j Y & -1 \end{bmatrix} \preceq 0, \forall j, \text{ com } Y = KQ. \quad (\text{A.13})$$

Assim, formula-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{minimizar}} \quad \vartheta, \\ & \text{sujeito a} \quad (\text{A.9}), (\text{A.10}), (\text{A.11}), (\text{A.12}) \text{ e } (\text{A.13}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B – Código AMPL

Na sequência, apresenta-se o código desenvolvido para o quinto problema de otimização bilinear (5.17) em tempo contínuo, utilizando a linguagem de programação AMPL e o *solver* KNITRO.

B.1 Arquivo .mod

```

1 param n;
2 param m;
3 param p;
4 param q;
5 param r;
6 param lx;
7 param lu;
8 param lp;
9 param lr;
10 param ncl;
11
12 #-----
13 set N = 1..n;
14 set M = 1..m;
15 set P = 1..p;
16 set R = 1..r;
17 set Q = 1..q;
18 set Lx = 1..lx;
19 set Lu = 1..lu;
20 set Lp = 1..lp;
21 set Lr = 1..lr;
22 set Ncl = 1..ncl;
23
24 #-----
25 param A {i in N, j in N};
26 param B {i in N, j in M};
27 param C {i in M, j in N};
28 param Xp {i in Lx, j in N};
29 param Xcl {i in Lx, j in Ncl};
30 param U {i in Lu, j in M};
31 param I {i in R, j in R}; #identidade
32 param Rr {i in Lr, j in M};
33 param a;
34 param uniR{i in R};
35 param uniLu{i in Lu};

```

```

36 param uniLx{i in Lx};
37
38 #-----
39 var eps >= 0.0000001, <=3.3333;
40 var rho >= 0.0000001, <=3.3333;
41 var gamma >= 0.0000001, <=3.3333;
42 var h {i in R} >=0, <=1;
43
44 var LLcl {i in R, j in Ncl} >= -100, <= 100;
45 var Hcl {i in R, j in R} >=0, <=100;          # tipo Mezler
46 var Hr {i in R, j in Lr}>=0, <=100;
47 var Tcl {i in Lx, j in R} >= 0, <= 100;
48 var Qcl {i in Lu, j in R}>=0, <=100;
49 var Qr {i in Lu, j in Lr}>=0, <=100;
50 var V {i in Ncl, j in R}>=-10000, <=10000;
51 var Kp {i in M, j in M} >=-100, <=100;
52 var Ki {i in M, j in M} >=-100, <=100;
53 var Kr {i in M, j in M} >=-100, <=100;
54 var Kk {i in M, j in Ncl};                  # Kk= [KpC Ki]
55 var Acl {i in Ncl, j in Ncl};
56 var Bcl {i in Ncl, j in M};
57 var HI {i in R, j in R};                   # HI = h*I
58
59 #-----
60 # Funcao objetivo
61 maximize obj: rho + a*eps ;
62
63 #-----
64 # Realimentacao de saida
65
66 # Matriz Acl
67 subject to Acl1 {i in N, j in N}:
68 A[i,j]+ sum{k in M, l in M} B[i,k]*Kp[k,l]*C[l,j] = Acl[i,j];
69
70 subject to Acl2 {i in N, j in M}:
71 sum{k in M}B[i,k]*Ki[k,j] = Acl[i,j+n];
72
73 subject to Acl3 {i in M, j in N}:
74 -C[i,j] = Acl[i+n,j];
75
76 subject to Acl4 {i in M, j in M}:
77 0 = Acl[i+n, j+n];
78
79 # Matriz Bcl
80 subject to Bcl1 {i in N, j in M}:

```

```

81 sum{k in M} B[i,k]*Kr[k,j] = Bcl[i,j];
82
83 subject to Bcl2 {i in M, j in M}:
84 1 = Bcl[i+n,j];
85
86 # Kk= [KpC Ki]
87 subject to Kk1 {i in M, j in N}:
88 sum{k in M} Kp[i,k]*C[k,j] = Kk[i,j];
89
90 subject to Kk2 {i in M, j in M}:
91 Ki[i,j] = Kk[i,j+n];
92
93 #-----
94 # Matriz diagonal
95 subject to hdiag {i in R, j in R}:
96 h[i]*I[i,j] = HI[i,j];
97
98 #-----
99 # Delta invariancia com Hcl tipo Metzler
100
101 subject to hcl_cst{i in R, j in Ncl}:
102  sum{k in R} Hcl[i,k]*LLcl[k,j] - sum{k in R} HI[i,k]*LLcl[k,j]
103  =
104  sum{k in Ncl} LLcl[i,k]*Acl[k,j];
105
106 subject to h12_cst{i in R, j in M}:
107  sum{k in Lr} Hr[i,k]*Rr[k,j] = sum{k in Ncl} LLcl[i,k]*Bcl[k,j];
108
109 subject to h_rho_cst{i in R, j in M}:
110  sum{k in R} Hcl[i,k]*uniR[k] - sum{k in R} HI[i,k]*uniR[k]
111  + sum{l in Lr} Hr[i,l]*rho <= -gamma*uniR[i];
112
113 subject to hxi_eps_cst{i in R}:
114  sum{k in R} Hcl[i,k]*uniR[k] - sum{k in R} HI[i,k]*uniR[k]
115  <= -eps*uniR[i];
116
117 #-----
118 # Inclusao nas restricoes de estados
119
120 subject to txi_cst{i in Lx, j in Ncl}:
121  sum{k in R} Tcl[i,k]*LLcl[k,j] = Xcl[i,j];
122
123 subject to Inf_normT_cst{i in Lx}:
124  sum{j in R} Tcl[i,j]*uniR[j] <= uniLx[i];
125

```

```

126 #-----
127 # Inclusao nas restricoes de controle
128
129 subject to qxi_cst1{i in Lu, j in Nc1}:
130   sum{k in R} Qc1[i,k]*LLc1[k,j] = sum{k in M} U[i,k]*Kk[k,j];
131
132 subject to q0_cst{i in Lu, j in M}:
133   sum{k in Lr} Qr[i,k]*Rr[k,j] = sum{k in M} U[i,k]*Kr[k,j];
134
135 subject to Inf_normQ_cst{i in Lu, j in N}:
136   sum{k in R} Qc1[i,k]*uniR[k] + sum{l in Lr} Qr[i,l]*rho
137   <= uniLu[i];
138
139 #-----
140 # Matriz inversa
141
142 subject to ltil_cst{i in Nc1, j in Nc1}:
143   sum{k in R} V[i,k]*LLc1[k,j] = I[i,j];

```

B.2 Arquivo .run

Para executar o arquivo .mod utiliza-se o arquivo .run, em que diferentes valores de α foram definidos manualmente, como visto a seguir.

```

1 # Escolha do Solver KNITRO e suas configuracoes
2 option solver knitro;
3 option knitro_options "ms_enable=1 ms_maxsolves=1000 outlev=1
   par_numthreads=20 alg = 5 maxit=1000 infeasol=1.0e-10" ;
4
5 #-----
6 # Carregamento dos arquivos da otimizacao
7 model ex.mod; # arquivo .mod
8 data ex1.dat; # arquivo .dat
9
10 param maxiteration := 1;
11 param time;
12 set niterations = 1..maxiteration;
13 param objec {iteration in niterations};
14 param best_obj; let best_obj := 999999; #Initial Best Objective
15 param best_LLc1 {i in R, j in Nc1};
16 param best_Kp {i in M, j in M};
17 param best_Ki {i in M, j in M};
18 param best_Kr {i in M, j in M};
19 param best_Hc1 {i in R, j in R};

```

```
20 param best_Hr {i in R, j in Lr};
21 param best_Tcl {i in Lx, j in R};
22 param best_Qcl {i in Lu, j in R};
23 param best_Qr {i in Lu, j in Lr};
24 param best_V {i in Ncl, j in R};
25 param best_h {i in R};
26 param best_rhoo {i in Lr};
27 param best_eps;
28 param best_gamma;
29 param best_Rho;
30 param best_rho;
31 param best_a;
32 param best_r;
33 param best_iteration;
34 param best_Acl {i in Ncl, j in Ncl};
35 param best_Bcl {i in Ncl, j in M};
36
37 #-----
38 # Selecao de opcoes do Solver
39
40 for {k in 2..2} {
41   if k == 2 then {
42     option knitro_options "ms_enable=1 ms_maxsolves=200 outlev=1
43       par_numthreads=10 alg = 2 maxit=1000 infeasstol=1.0e-10" ;
44   }
45 #-----
46 #Escolha manual do valor de alpha
47
48 for {rhos in 1..12 }{
49
50   if rhos == 1 then {
51     let a:= 0;
52   }
53   if rhos == 2 then {
54     let a:= 0.001;
55   }
56   if rhos == 3 then {
57     let a:= 0.1;
58   }
59   if rhos == 4 then {
60     let a:= 0.2;
61   }
62   if rhos == 5 then {
63     let a:= 0.3;
```



```
64 }
65 if rhos == 6 then {
66   let a:= 0.4;
67 }
68 if rhos == 7 then {
69   let a:= 0.5;
70 }
71 if rhos == 8 then {
72   let a:= 0.6;
73 }
74 if rhos == 9 then {
75   let a:= 0.7;
76 }
77 if rhos == 10 then {
78   let a:= 0.8;
79 }
80 if rhos == 11 then {
81   let a:= 0.9;
82 }
83 if rhos == 12 then {
84   let a:= 1;
85 }
86
87 #-----
88 #Solving
89 for {iteration in niterations } {
90 solve;
91 let objec [iteration] := obj;
92 printf("\n \n ***** \n\n
   \");
93 display iteration;
94 display objec;
95 printf("\n \n ***** \n\n
   \");
96
97 #-----
98 #Salvando a melhor solucao
99
100 if best_obj > objec[iteration] then {
101   let best_obj := objec[iteration];
102   let best_r := r;
103   let best_eps := eps;
104   let best_rho := rho;
105   let best_a := a;
106   let best_gamma := gamma;
```

```

107 let {i in R} best_h[i] := h[i];
108 let {i in R, j in Ncl} best_LLcl[i,j] := LLcl[i,j];
109 let {i in M, j in M} best_Kp[i,j] := Kp[i,j];
110 let {i in M, j in M} best_Ki[i,j] := Ki[i,j];
111 let {i in M, j in M} best_Kr[i,j] := Kr[i,j];
112 let {i in Ncl, j in R} best_V[i,j] := V[i,j];
113 let {i in R, j in Lr} best_Hr[i,j] := Hr[i,j];
114 let {i in R, j in R} best_Hcl[i,j] := Hcl[i,j];
115 let {i in Lx, j in R} best_Tcl[i,j] := Tcl[i,j];
116 let {i in Lu, j in R} best_Qcl[i,j] := Qcl[i,j];
117 let {i in Lu, j in Lr} best_Qr[i,j] := Qr[i,j];
118 let {i in Ncl, j in Ncl} best_Acl[i,j] := Acl[i,j];
119 let {i in Ncl, j in M} best_Bcl[i,j] := Bcl[i,j];
120 let best_iteration := iteration;
121 let time := _solve_time;
122   } #If saving best solutions
123 #-----
124   } #For solving iterations
125
126 #-----
127 # Display dos resultados
128
129 printf("\n \n ***** \n\n
    \")>solutions.out;
130 printf("Best Solution \n")>solutions.out;
131
132 printf ("\n Solver Setup =")>solutions.out ;
133 printf " %2.0f", k>solutions.out ;
134 printf (" \n \n")>solutions.out;
135 display time>solutions.out;
136 display best_iteration>solutions.out;
137
138 display best_r>solutions.out;
139 display best_obj>solutions.out;
140 display best_eps>solutions.out;
141 display best_rho>solutions.out;
142 display best_gamma>solutions.out;
143 display best_a>solutions.out;
144
145 #
146
147 printf "\n\nKp = [\n">solutions.out;
148 for{i in M} {
149   for{j in M} {
150     printf " %14.12f", best_Kp[i,j]>solutions.out;

```

```
151 }
152 printf ";\n">solutions.out;
153 }
154 printf "];\n\n">solutions.out;
155
156 #
157
158 printf "\n\nKi = [\n">solutions.out;
159 for{i in M} {
160     for{j in M} {
161         printf " %14.12f", best_Ki[i,j]>solutions.out;
162     }
163     printf ";\n">solutions.out;
164 }
165 printf "];\n\n">solutions.out;
166
167 #
168
169 printf "\n\nKr = [\n">solutions.out;
170 for{i in M} {
171     for{j in M} {
172         printf " %14.12f", best_Kr[i,j]>solutions.out;
173     }
174     printf ";\n">solutions.out;
175 }
176 printf "];\n\n">solutions.out;
177
178 #
179
180 printf "\n\nLLcl = [\n">solutions.out;
181 for{i in R} {
182     for{j in Ncl} {
183         printf " %14.12f", best_LLcl[i,j]>solutions.out;
184     }
185     printf ";\n">solutions.out;
186 }
187 printf "];\n\n">solutions.out;
188
189 #
190
191 printf "\n\nXcl = [\n">solutions.out;
192 for{i in Lx} {
193     for{j in Ncl} {
194         printf " %14.12f", Xcl[i,j]>solutions.out;
195     }
196 }
```

```
196   printf ";\n">solutions.out;
197 }
198 printf "];\n\n">solutions.out;
199
200 #
201
202 printf "\n\nh = [\n">solutions.out;
203 for{i in R} {
204     printf " %14.12f",best_h[i]>solutions.out;
205 }
206 printf "];\n\n">solutions.out;
207
208 #
209
210 printf "\n\nHcl = [\n">solutions.out;
211 for{i in R} {
212     for{j in R} {
213         printf " %14.12f",best_Hcl[i,j]>solutions.out;
214     }
215     printf ";\n">solutions.out;
216 }
217 printf "];\n\n">solutions.out;
218
219 #
220
221 printf "\n\nAcl = [\n">solutions.out;
222 for{i in Ncl} {
223     for{j in Ncl} {
224         printf " %14.12f", Acl[i,j]>solutions.out;
225     }
226     printf ";\n">solutions.out;
227 }
228 printf "];\n\n">solutions.out;
229
230 #
231
232 printf "\n\nBcl = [\n">solutions.out;
233 for{i in Ncl} {
234     for{j in M} {
235         printf " %14.12f",Bcl[i,j]>solutions.out;
236     }
237     printf ";\n">solutions.out;
238 }
239 printf "];\n\n">solutions.out;
240
```

```
241 #
242
243 printf "\n\nA = [\n">solutions.out;
244 for{i in N} {
245     for{j in N} {
246         printf " %14.12f",A[i,j]>solutions.out;
247     }
248     printf ";\n">solutions.out;
249 }
250 printf "];\n\n">solutions.out;
251
252 #
253
254 printf "\n\nB = [\n">solutions.out;
255 for{i in N} {
256     for{j in M} {
257         printf " %14.12f",B[i,j]>solutions.out;
258     }
259     printf ";\n">solutions.out;
260 }
261 printf "];\n\n">solutions.out;
262
263 #
264
265 printf "\n\nC = [\n">solutions.out;
266 for{i in M} {
267     for{j in N} {
268         printf " %14.12f",C[i,j]>solutions.out;
269     }
270     printf ";\n">solutions.out;
271 }
272 printf "];\n\n">solutions.out;
273
274 #
275
276 printf "\n\nV = [\n">solutions.out;
277 for{i in Nc1} {
278     for{j in R} {
279         printf " %14.12f",best_V[i,j]>solutions.out;
280     }
281     printf ";\n">solutions.out;
282 }
283 printf "];\n\n">solutions.out;
284
285 #
```

```
286
287 printf "\n\nHr = [\n">solutions.out;
288 for{i in R} {
289   for{j in Lr} {
290     printf " %14.12f",best_Hr[i,j]>solutions.out;
291   }
292   printf ";\n">solutions.out;
293 }
294 printf "];\n\n">solutions.out;
295
296 #
297
298 printf "\n\nTcl = [\n">solutions.out;
299 for{i in Lx} {
300   for{j in R} {
301     printf " %14.12f",best_Tcl[i,j]>solutions.out;
302   }
303   printf ";\n">solutions.out;
304 }
305 printf "];\n\n">solutions.out;
306
307 #
308
309 printf "\n\nQcl = [\n">solutions.out;
310 for{i in Lu} {
311   for{j in R} {
312     printf " %14.12f",best_Qcl[i,j]>solutions.out;
313   }
314   printf ";\n">solutions.out;
315 }
316 printf "];\n\n">solutions.out;
317
318 #
319
320 printf "\n\nQr = [\n">solutions.out;
321 for{i in Lu} {
322   for{j in Lr} {
323     printf " %14.12f",best_Qr[i,j]>solutions.out;
324   }
325   printf ";\n">solutions.out;
326 }
327 printf "];\n\n">solutions.out;
328
329 #
330
```

```
331 printf "\n\nRr = [\n">solutions.out;
332 for{i in Lr} {
333   for{j in M} {
334     printf " %14.12f",Rr[i,j]>solutions.out;
335   }
336   printf ";\n">solutions.out;
337 }
338 printf "];\n\n">solutions.out;
339
340 #
341
342 printf "\n\nKk = [\n">solutions.out;
343 for{i in M} {
344   for{j in Nc1} {
345     printf " %14.12f",Kk[i,j]>solutions.out;
346   }
347   printf ";\n">solutions.out;
348 }
349 printf "];\n\n">solutions.out;
350
351 #
352
353 printf "\n\nU = [\n">solutions.out;
354 for{i in Lu} {
355   for{j in M} {
356     printf " %14.12f",U[i,j]>solutions.out;
357   }
358   printf ";\n">solutions.out;
359 }
360 printf "];\n\n">solutions.out;
361
362 #
363
364 display objec>solutions.out;
365
366 printf("\n \n ***** \n\n
    \")>solutions.out;
367
368 let best_obj := 99999; #Reseting obj
369 } #For rhos selection
370 } #For solver options
```

B.3 Arquivo .dat

Os dados utilizados abaixo são baseados no Exemplo 1 do Capítulo 5.

```
1 param n := 1; # linhas de A
2 param m := 1; # colunas de B
3 param p := 1; # linhas de C
4 param r := 6; # linhas de L
5 param lu := 2; # linhas de U
6 param lr := 2; # linhas de R
7 param lx := 4; # linhas de X
8 param ncl := 2; # n+p
9
10 param a; #alpha
11
12 #Matrizes do sistema
13 param A :=
14 1 1 0.2;
15
16 param B :=
17 1 1 1;
18
19 param C :=
20 1 1 1;
21
22 # Restricoes de estado e controle
23 param Xcl :=
24 1 1 0.3
25 1 2 0
26 2 1 -0.3
27 2 2 0
28 3 1 0
29 3 2 0.3
30 4 1 0
31 4 2 -0.3;
32
33 param U :=
34 1 1 1
35 2 1 -1;
36 # Vetores de ordem 1*
37 param uniR:=
38 1 1
39 2 1
40 3 1
41 4 1
42 5 1
```



```
43 6 1
44 7 1
45 8 1
46 9 1
47 10 1
48 11 1
49 12 1;
50
51 param uniLx:=
52 1 1
53 2 1
54 3 1
55 4 1;
56
57 param uniLu :=
58 1 1
59 2 1;
60
61 param Rr :=
62
63 1 1 1
64 2 1 -1;
65
66 # Matriz identidade
67 for{i in R} {
68   for{j in R} {
69     if( i==j ) then let I[i,j] := 1;
70     else let I[i,j] := 0;
71   }
72 }
```