UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS

Luiz Guilherme de Carvalho Lopes

Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam

FLORIANÓPOLIS
2020

Luiz Guilherme de Carvalho Lopes

Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Matemática e Computação Científica

Florianópolis, Maio de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

LUIZ GUILHERME DE CARVALHO LOPES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática e Computação Científica, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 11 de maio de 2021.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Silvia Martini de Holanda
Data: 11/05/2021 15:43:33-0300
CPF: 595.791.379-00
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Silvia Martini de Holanda, Dr.ª

Coordenadora do Curso de Matemática

Banca Examinadora

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Romulo Maia Vermersch
Data: 11/05/2021 15:37:55-0300
CPF: 102.515.047-35
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Rômulo Maia Vermersch, Dr.

Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 11/05/2021 16:38:57-0300
CPF: 337.007.338-28
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulo Mendes de Carvalho Neto
Data: 11/05/2021 15:57:26-0300
CPF: 326.211.858-35
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Agradecimentos

Inicialmente a minha família, em especial minha mãe Ligia Maria dos Santos Carvalho Lopes, meu falecido pai Luiz Lopes e meu irmão Lucas, que sempre manteram o apoio, carinho, compreensão e sempre se fizeram presentes durante toda a graduação.

A todos os amigos que fiz durante essa trajetória, todos meus colegas monitores pela diversão, risadas e bons serviços realizados.

Aos meus colegas de curso que sempre incentivaram o bom estudo, e a troca de conhecimento, em especial meu amigo Júlio Veloso Jr. na qual nossas conversas sobre matemática e lógica fizeram nossas tardes agradáveis e com boas risadas.

A todos os professores que estiveram presentes no meu amadurecimento intectual e profissional, em especial destaco a professora Alda Dayana Mattos Mortari que sempre esteve disposta a contribuir com seu conhecimento, e admirar o rigor matemático e seus encantos, e o professor Luciano Bedin que de bom grado se fez presente durante minha trejetória na graduação.

Finalmente agradeço aos professores Matheus Cheque Bortolan e Paulo Mendes de Carvalho Neto, por aceitarem compor a banca avaliadora, e ao meu orientador Rômulo Maia Vermersch que me introduziu a noção de pesquisa e graças a ele fez este trabalho possível.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma demonstração do teorema devido a Oxtoby e Ulam que garante que, genericamente com respeito à topologia uniforme, um homeomorfismo que preserva o volume sobre o cubo unitário n-dimensional é ergódico.

Palavras-chave: homeomorfismos, ergodicidade, topologia uniforme, automorfismos que preservam volume.

Abstract

In this work we present a proof of the theorem due to Oxtoby and Ulam that guarantees that, generically with respect to the uniform topology, a volume-preserving homeomorphism on the n-dimensional cube is ergodic.

Keywords: homeomorphisms, ergodicity, uniform topology, volume-preserving automorphisms.

Sumário

Introdução

Ergodicidade e Homeomorfismos

Em mecânica, um dos problemas fundamentais consiste em descrever qualitativamente a evolução de um sistema dinâmico para o qual está dada uma condição inicial. Idealmente, conhecendo-se as leis que regem o fenômeno e a condição inicial, esperamos conseguir descrever a evolução do sistema, entretanto, em muitas situações reais, não temos à nossa disposição um conjunto completo de informações sobre o sistema que nos permita fazer previsões determinísticas sobre a sua evolução de longo prazo.

A fim de superar essa dificuldade, o cientista Josiah Willard Gibbs propôs uma abordagem estatística no seguinte sentido: não busquemos responder à pergunta "dada uma condição inicial, qual é o estado do sistema no tempo t?", mas sim busquemos responder a "dada uma condição inicial, qual é a probabilidade de que o estado do sistema esteja, no tempo t, num dado conjunto de estados possíveis?"

Evidentemente, para que esse ponto de vista possa prosperar, a medida de probabilidade que quantifica a incerteza precisa ser invariante pela ação do sistema ao longo do tempo. Como em muitas situações o sistema deixa invariante uma certa medida de probabilidade, tal abordagem nos permite analisar, de um ponto de vista estatístico, questões assintóticas de interesse como por exemplo: o que ocorre com o sistema quando t tende ao infinito? Há algum comportamento recorrente? Há estabilidade das trajetórias? Se sim, em quais sentidos? Etc.

Interessado nessa nova abordagem e analisando consequências físicas de questões assintóticas, o físico Ludwig Boltzmann fez uma importante suposição ("hipótese ergódica de Boltzmann"), a saber:

Para cada condição inicial x num espaço de estados X e cada $\varphi : X \to \mathbb{R}$ "observação" integrável com respeito a P uma probabilidade, *existe a média temporal assintótica das observações dos estados do sistema* $f : X \to X$ e esta *coincide com a observação média sobre o espaço de todos os estados possíveis* X. Ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(x)) = \int_X \varphi(x)dP(x).$$

A despeito de muitas conclusões físicas corretas obtidas por Boltzmann, sua hipótese provou-se matematicamente errada. Cabe ressaltar que foram feitas tentativas para enfraquecer a hipótese de Boltzmann a fim de obter a igualdade acima em algumas situações; por exemplo, uma versão mais fraca dizia que a igualdade acima seria satisfeita sempre que a órbita $(f^i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ da condição inicial $x \in X$ fosse *densa em* X, o que também se mostrou errado.

Essa questão foi colocada em base matemática sólida pelo matemático George David Birkhoff em 1931 com o seu celebrado Teorema Ergódico. Realmente, Birkhoff mostrou que a média temporal assintótica existe para P*-quase toda condição inicial* $x \in X$ (ou seja, existe *exceto possivelmente para um conjunto com probabilidade nula*). Além disso, o Teorema Ergódico de Birkhoff também garante que a igualdade acima é verdadeira se, e somente se, o sistema $f : X \to X$ é *ergódico com respeito a* P, ou seja se, e somente se, a condição $f^{-1}(A) = A$ implicar $P(A) = 0$ ou 1.

Em particular, o Teorema de Birkhoff garante que as consequências físicas obtidas por Boltzmann e outros estão matematicamente justificadas para P-quase toda condição inicial, sempre que o sistema for ergódico com respeito a P.

Mesmo que Birkhoff tenha solucionado a questão, cabe salientar que verificar se um sistema é ou não ergódico com respeito a uma medida de probabilidade invariante nem sempre é uma questão simples, mesmo para os dias atuais.

Após o Teorema de Birkhoff iniciou-se a pesquisa sobre a possível ergodicidade de sistemas conhecidos e também a questão geral da *existência* de sistemas ergódicos sobre espaços clássicos.

Hedlund mostrou que o fluxo definido pelo sistema de geodésicas sobre certas superfícies de curvatura negativa constante é ergódico e logo depois Hopf generalizou o resultado de Hedlund. De modo independente, ambos estenderam tal resultado para o caso de curvatura negativa não necessariamente constante (veja [Oxtoby e Ulam 1941] para uma lista de referências).

O presente trabalho trata da questão da existência. Mais especificamente, neste trabalho apresentamos a resposta obtida por Oxtoby e Ulam para a pergunta:

"Existe algum *homeomorfismo ergódico* com respeito à medida de Lebesgue sobre o cubo unitário n-dimensional?"

Embora o próprio Birkhoff suspeitasse que "provavelmente, a ergodicidade é prevalente", nunca tornou matematicamente precisa sua suspeita - bem entendido, nunca formulou uma *conjectura.*

Essa tarefa coube a Oxtoby e Ulam que mostraram que *genericamente com respeito à topologia uniforme, um homeomorfismo que preserva o volume sobre o cubo unitário* n*-dimensional é ergódico* [Oxtoby e Ulam 1941], não apenas respondendo afirmativamente à pergunta acima mas também confirmando a "suspeita" de Birkhoff.

Nossa exposição será baseada em [Alpern e Prasad 2001].

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos a terminologia e os resultados básicos que serão utilizados neste trabalho.

No que segue $(X, \mathcal{X}, \mu)$ denotará um espaço de medida. Para esta e demais noções básicas sobre a teoria da medida, veja por exemplo [Rudin 1987] ou [Halmos 1974]. Para as noções básicas sobre espaços métricos e também espaços topológicos recomendamos [Dugundji 1966].

Definição 1.1. Dizemos que uma transformação mensurável $f : X \to X$ *preserva* a medida μ ou, equivalentemente, que μ é f-invariante, se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{X}$.

Definição 1.2. Um *automorfismo* sobre $(X, \mathcal{X}, \mu)$ é uma bijeção mensurável $f : X \to X$ que preserva μ cuja inversa f^{-1} também é mensurável e preserva μ, além disso dizemos que f é bimensurável se f e f^{-1} são funções mensuráveis.

Definição 1.3. Uma *medida de Borel* sobre um espaço métrico X é uma medida μ definida sobre uma σ-álgebra que contém todos os subconjuntos abertos (ou, equivalentemente, fechados) do espaço X. Além disso, uma medida de Borel é dita *probabilística* se $\mu(X) = 1$.

Definição 1.4. Um automorfismo f sobre $(X, \mathcal{X}, \mu)$, com μ medida probabilística, é dito *ergódico* se todo conjunto f-invariante tem medida 0 ou 1; ou seja, tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$ sempre que $f^{-1}(A) = A$ $(A \in \mathcal{X})$.

Definição 1.5. Uma medida de Borel μ sobre um espaço métrico X é dita *regular* se, para cada conjunto mensurável $C \subset X$, tem-se:

$$\sup\{\mu(A) : A \subset C, A \text{ compacto}\} = \mu(C) = \inf\{\mu(B) : C \subset B, B \text{ aberto}\}.$$

Definição 1.6. Se X é um espaço métrico, então uma transformação bijetiva $h : X \to X$ é dita *homeomorfismo* se f é contínua e sua inversa f^{-1} também o é.

Exemplo 1.7. Considere $X = \mathbb{R}^n$ e $\mu =$ medida de Lebesgue sobre X. Então, toda translação $T : X \to X$ é um homeomorfismo que preserva μ.

Exemplo 1.8. Considere $X = \mathbb{R}^2$ e $\mu =$ medida de Lebesgue sobre X. Então, toda rotação $R : X \to X$ é um homeomorfismo que preserva μ.

Com respeito a medidas invariantes, temos o seguinte resultado geral:

Teorema 1.9. ***(Krylov-Bogoliubov)*** *Se X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ é contínua, então existe uma medida de Borel probabilística μ sobre X que é f-invariante.*

O resultado a seguir nos dá uma caracterização bastante útil para verificar se um homeomorfismo preserva ou não uma medida de Borel regular sobre um espaço métrico.

Proposição 1.10. *Sejam X um espaço métrico, μ uma medida de Borel regular sobre X e $h : X \to X$ um homeomorfismo.*

Então, h preserva μ se, e somente se, $\int_X (\varphi \circ h) d\mu = \int_X \varphi d\mu$ para toda função real contínua e limitada $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que h preserva μ, fixe $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada qualquer e tome $C \subset X$ um conjunto mensurável arbitrário e 1_C a função característica de C. Então,

$$\int 1_C d\mu = \mu(C) = \mu(h^{-1}(C)) = \int 1_{h^{-1}(C)} d\mu = \int (1_C \circ h) d\mu$$

Daí, pela linearidade da integral segue que a igualdade $\int s d\mu = \int s \circ h d\mu$ é verdadeira sempre que $s : X \to \mathbb{R}$ é uma função simples. Agora, como φ é uma função real contínua e limitada, existe uma sequência de funções simples (s_k) tal que $|s_k| \leqslant |\varphi|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $s_k \to \varphi$ pontualmente (Teorema 1.17 de [Rudin 1987]). Consequentemente, pelo teorema da convergência dominada (Teorema 1.34 de [Rudin 1987]) temos:

$$\int \varphi d\mu = \lim \int s_k d\mu = \lim \int s_k \circ h d\mu = \int (\varphi \circ h) d\mu$$

Reciprocamente, tome um conjunto fechado $F \subset X$ arbitrário. Para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno defina $g_{F,\delta}(x) = \max\{0, 1 - d(x, F)/\delta\}$.

Então, temos $|g_{F,\delta}(x) - g_{F,\delta}(y)| \leqslant d(x, y)/\delta$ e $1_F(x) \leqslant g_{F,\delta}(x) \leqslant 1_{F^\delta}(x)$ para quaisquer $x, y \in X$, onde F^δ denota a δ-vizinhança do conjunto fechado F.

Note que $g_{F,\delta}$ é uma função real contínua e limitada que aproxima a função característica 1_F.

Novamente pelo teorema da convergência dominada, temos:

$$\begin{aligned}
\mu(F) = \int 1_F d\mu = & \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int g_{F,\delta} d\mu \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int (g_{F,\delta} \circ h) d\mu \\
&= \int (1_F \circ h) d\mu \\
&= \int 1_{h^{-1}(F)} d\mu = \mu(h^{-1}(F)).
\end{aligned}$$

Por fim, como μ é regular e h é um homeomorfismo, para cada $C \subset X$ mensurável tem-se:

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \sup\{\mu(A) : A \subset C, A \text{ compacto}\}\\ &= \sup\{\mu(h^{-1}(A)) : A \subset C, A \text{ compacto}\}\\ &= \mu(h^{-1}(C))\end{aligned}$$

Isso mostra que h preserva μ, o que conclui a demonstração.

□

Vamos agora enunciar um resultado que remonta ao início do estudo das transformações que preservam uma dada medida. Tal resultado mostra, em particular, que é possível encontrar uma infinidade dessas transformações.

Teorema 1.11. ***(Liouville)***

Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ campo vetorial de classe C^1 definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Considere a equação diferencial autônoma $x' = F(x)$ e denote por $\phi^t : U \to U$ o fluxo de classe C^1 associado. Suponha que ϕ^t esteja definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então, o fluxo $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ preserva o volume em U se, e somente se, div $F(x) = 0$ para todo $x \in U$. Ou seja, se μ denota a medida de volume (isto é, a medida de Lebesgue), então $\mu(\phi^t(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto Lebesgue mensurável $A \subset U$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Em particular, a transformação de tempo um $\phi^1 : U \to U$ preserva o volume sempre que div F é identicamente nulo em U.

Veremos a seguir um exemplo bastante instrutivo.

Exemplo 1.12. (Deslocamento de Bernoulli)

Considere o conjunto $\{0, 1\}$ munido da métrica discreta, ou seja,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{se } x = y \\ 1, \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Agora, considere o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de todas as sequências bilaterais da forma $x = \dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\dots$ e denotemos por $x(i)$ a i-ésima coordenada de x ($i \in \mathbb{Z}$).

Observe que a métrica $\rho(x, y) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|}d(x(i), y(i))$ é compatível com a topologia produto de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ e, além disso, $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ é compacto pelo Teorema de Tychonoff (página 224 de [Dugundji 1966]).

Suponha que $x(i) = y(i)$ e $x(-i) = y(-i)$ para todo $0 \leqslant i \leqslant k$. Então,

$$
\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|} d(x(i),y(i)) \\
&= \sum_{i<-k} 2^{-|i|} d(x(i),y(i)) + \sum_{i>k} 2^{-|i|} d(x(i),y(i)) \\
&= \sum_{i>k} 2^{-i} d(x(-i),y(-i)) + \sum_{i>k} 2^{-i} d(x(i),y(i)) \\
&\leqslant 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-(k-1)} \qquad (*).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $x(i) \neq y(i)$ ou $x(-i) \neq y(-i)$ para algum $0 \leqslant i \leqslant k$, então $\rho(x,y) = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|} d(x(i),y(i)) \geqslant 2^{-k}$.

Em outras palavras, se $\rho(x,y) < 2^{-k}$, então $x(i) = y(i)$ e $x(-i) = y(-i)$ para todo $0 \leqslant i \leqslant k$ $(**)$.

Agora, considere $n = \min\{i \geqslant 0 : x(i) \neq y(i) \text{ ou } x(-i) \neq y(-i)\}$ e a métrica $\rho'(x,y) := 2^{-n}$.

Note que, se $x(i) = y(i)$ e $x(-i) = y(-i)$ para todo $0 \leqslant i \leqslant k$, então teremos $n = \min\{i \geqslant 0 : x(i) \neq y(i) \text{ ou } x(-i) \neq y(-i)\} > k$, o que nos dá $\rho'(x,y) < 2^{-k}$. Daí, por $(**)$ vemos que $\rho'(x,y) \leqslant \rho(x,y)$.

Por outro lado, se $\rho'(x,y) = 2^{-n}$ com $n > 0$, então $x(i) = y(i)$ e $x(-i) = y(-i)$ para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Logo, por $(*)$ segue que $\rho(x,y) \leqslant 2^{-(n-2)} = 4\rho'(x,y)$. Além disso, se $\rho'(x,y) = 2^{-0} = 1$, então é claro que $\rho(x,y) \leqslant 4$.

Portanto, em qualquer caso temos $\rho'(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant 4\rho'(x,y) \quad (x,y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}})$.

Isso mostra que ρ e ρ' são *uniformemente equivalentes* sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Agora, considere a *aplicação de deslocamento à esquerda* $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definida por:

$\phi(x)(i) = x(i+1)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, onde $x = (x(i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Claramente, ϕ é invertível e sua inversa ϕ^{-1} é a *aplicação de deslocamento à direita*: $\phi^{-1}(x)(i) = x(i-1) \quad (i \in \mathbb{Z})$.

Afirmação: ϕ é um homeomorfismo.

De fato, se $\rho'(x,y) = 2^{-0} = 1$, então $\rho'(\phi(x),\phi(y)) \leqslant 1 = \rho'(x,y)$. Além disso, se $\rho'(x,y) = 2^{-n}$ e $m = \min\{i \geqslant 0 : x(i+1) \neq y(i+1) \text{ ou } x(-(i+1)) \neq y(-(i+1))\}$, então $m \geqslant n-1$, donde $\rho'(\phi(x),\phi(y)) = 2^{-m} \leqslant 2^{-n+1} = 2\rho'(x,y)$.

Isso mostra que ϕ é contínua.

Similarmente, se $\rho'(x,y) = 2^{-0} = 1$, então $\rho'(\phi^{-1}(x),\phi^{-1}(y)) \leqslant 1 = \rho'(x,y)$. Além disso, se $\rho'(x,y) = 2^{-n}$ e $m = \min\{i \geqslant 0 : x(i-1) \neq y(i-1) \text{ ou } x(-(i-1)) \neq y(-(i-1))\}$, então $m \geqslant n+1$, donde $\rho'(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) = 2^{-m} \leqslant 2^{-n-1} = 2^{-1}\rho'(x,y)$.

Isso mostra que ϕ^{-1} também é contínua, donde concluímos que ϕ é um homeomorfismo.

Vamos agora mostrar que ϕ preserva uma certa medida de Borel e que, com respeito a ela, ϕ é um homeomorfismo *ergódico*.

Com efeito, dados $i \in \mathbb{Z}$ e $j \in \{0,1\}$, considere o conjunto $A_i^j := \{x : x(i) = j\}$.

Note que, se $k \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande tal que $|i| < k$, então segue de $(**)$ que $y(i) = x(i) = j$ sempre que $\rho(x,y) < 2^{-k}$. Ou seja, A_i^j é um conjunto aberto. Além disso, note que $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \setminus A_i^j = A_i^{j'}$, onde $j' \in \{0,1\} \setminus \{j\}$. Ou seja, A_i^j também é um conjunto fechado. Recorde que um conjunto que é aberto e fechado ao mesmo tempo é dito *clopen*.

Dados $m \leqslant n$ em $\mathbb{Z}$ e $(u_m, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^{n-m+1}$, dizemos que o conjunto

$A = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : (x(m), \ldots, x(n)) = (u_m, \ldots, u_n)\}$ é um *cilindro elementar de comprimento* $r = n - m + 1$.

Afirmação: O conjunto de todos os cilindros elementares forma uma base para a topologia de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Com efeito, note inicialmente que todo cilindro elementar é *clopen*. Reciprocamente, considere uma bola aberta $B_\rho(x; r)$ arbitrária e fixe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $B_\rho(x; 2^{-k}) \subset B_\rho(x; r)$.

Considere $y \in B_\rho(x; 2^{-k})$ qualquer. Por $(**)$ acima vemos que $x(i) = y(i)$ e $x(-i) = y(-i)$ para todo $0 \leqslant i \leqslant k$.

Considere o seguinte cilindro elementar

$$A = \{z \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : (z(-k-1), \ldots, z(k+1)) = (y(-k-1), \ldots, y(k+1))\}.$$

Então, $x \in A$ e também $A \subset B_\rho(x; 2^{-k}) \subset B_\rho(x; r)$; isto conclui a demonstração da afirmação.

Agora, dados $m \leqslant n$ em $\mathbb{Z}$ e $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$, dizemos que o conjunto

$A = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : (x(m), \ldots, x(n)) \in U\}$ é um *cilindro de posto* $r = n - m + 1$.

Note que todo cilindro elementar de comprimento $r = n - m + 1$ é um cilindro de posto $r = n - m + 1$ e, reciprocamente, todo cilindro de posto $r = n - m + 1$ é uma união disjunta finita de cilindros elementares de comprimento $r = n - m + 1$.

Seja $\mathcal{C}_r$ a coleção de todos os cilindros de posto $r \geqslant 1$ e considere a coleção $\mathcal{S} = \{\varnothing\} \cup \{\mathcal{C}_1\} \cup \{\mathcal{C}_2\} \cup \ldots$.

Afirmação: $\mathcal{S}$ é um semi-anel de subconjuntos de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Com efeito, sejam $C = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : (x(m), \ldots, x(n)) \in U\}$ ($U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$, $m \leqslant n$) e $D = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : (x(k), \ldots, x(l)) \in U\}$ ($V \subset \{0,1\}^{l-k+1}$, $k \leqslant l$) cilindros arbitrários. Sejam $\alpha = \min\{m, k\}$ e $\beta = \max\{n, l\}$.

Considere U' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{n-m+1}$ pertencem a U e, similarmente, considere V' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{l-k+1}$ pertencem a V.

Então, $C = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in U'\}$ e $D = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in V'\}$.

Daí, $C \cap D = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in U' \cap V'\} \in \mathcal{S}$.

Agora, suponha $C, D \in \mathcal{S}$ tais que $C \subset D$ e escreva

$C = \{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in U)\}$ com $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$ e $D = \{x : (x(k), \ldots, x(l)) \in V)\}$ com $V \subset \{0,1\}^{l-k+1}$.

Então, $m \leqslant k \leqslant l \leqslant n$ e existem cilindros elementares $C' = \{x : (x(m), \ldots, x(n)) = (u_m, \ldots u_n)\}$ com $(u_m, \ldots, u_n) \in U$ e $D' = \{x : (x(k), \ldots, x(l)) = (v_k, \ldots v_l)\}\}$ com $(v_k, \ldots, v_l) \in V$ tais que $C' \subset D'$.

Daí, $D' \setminus C'$ pode ser escrito como uma união disjunta finita de cilindros elementares:

$$D' \setminus C' = \bigsqcup_{\substack{m \leqslant i_1 \leqslant k-1 \\ l+1 \leqslant i_2 \leqslant n}} \Big\{x : x(m) = u_m, \ldots, x(i_1) \neq u_{i_1}, \ldots, x(k-1) = u_{k-1}, x(k) = v_k, \ldots, x(l) = v_l, x(l+1) = v_{l+1}, \ldots, x(i_2) \neq u_{i_2}, \ldots, x(n) = u_n\Big\}.$$

Consequentemente, se J é o conjunto finito de todos os pares de cilindros elementares da forma C', D' como acima, então $D \setminus C = \bigcup_{j \in J} \Big\{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in D'_j \setminus C'_j\Big\}$ é uma união disjunta finita de elementos de $\mathcal{S}$; isto conclui a demonstração da afirmação.

Definimos uma função de conjunto $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ da seguinte maneira: $P(\varnothing) = 0$ e

$$P(\{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in U\}) := \sum_{(u_m, \ldots, u_n) \in U \subset \{0,1\}^{n-m+1}} 2^{-(n-m+1)}.$$

Para simplificar a notação, vamos escrever

$$P(\{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in U\}) := \sum_U 2^{-(n-m+1)},$$

onde admite-se implicitamente que a soma é feita sobre todos os $(u_m, \ldots, u_n) \in U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$.

Note que

$$P(\{x : (x(m), \ldots, x(n)) = (u_m, \ldots, u_n)\}) = 2^{-(n-m+1)}$$

para todo $(u_m, \ldots, u_n) \in U$.

Afirmação: P está bem definida.

Com efeito, suponha que $\{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in U)\} = \{x : (x(k), \ldots, x(l)) \in V)\}$ com $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$ e $V \subset \{0,1\}^{l-k+1}$.

Se $n-m+1 = l-k+1$, então $U = V$ e não há nada a demonstrar. Então, podemos supor, por simetria, que $n-m+1 < l-k+1$, donde $V = U \times \{0,1\}^{(l+m)-(k+n)}$.

Daí,

$$\begin{aligned}\sum_V 2^{-(l-k+1)} &= \sum_U 2^{-(n-m+1)} \sum_{\{0,1\}^{(l+m)-(k+n)}} 2^{-[(l+m)-(k+n)]} \\ &= \sum_U 2^{-(n-m+1)},\end{aligned}$$

o que mostra que P está bem definida.

Afirmação: P é finitamente aditiva.

De fato, suponha $C = \{x : (x(m), \ldots, x(n)) \in U)\}$ com $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$ e $D = \{x : (x(k), \ldots, x(l)) \in V)\}$ com $V \subset \{0,1\}^{l-k+1}$ tais que $C \cap D = \varnothing$. Sejam $\alpha = \min\{m, k\}$, $\beta = \max\{n, l\}$.

Considere U' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{n-m+1}$ pertence a U e, similarmente, considere V' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{l-k+1}$ pertence a V.

Daí, $C = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in U'\}$, $D = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in V'\}$, $C \cup D = \{x : (x(\alpha), \ldots, x(\beta)) \in U' \cup V'\}$ e $U' \cap V' = \varnothing$ pois $C \cap D = \varnothing$.

Consequentemente, como P está bem definida, temos:

$$\begin{aligned}P(C \cup D) &= \sum_{U' \cup V'} 2^{-(\beta-\alpha+1)} \\ &= \sum_U 2^{-(n-m+1)} + \sum_V 2^{-(l-k+1)} \\ &= P(C) + P(D).\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração da afirmação.

Como toda união infinita contável de cilindros é um conjunto *clopen* e não podemos escrever um conjunto clopen não-vazio como uma união infinita contável de conjuntos clopen não-vazios, segue que P é também *contavelmente aditiva* sobre $\mathcal{S}$.

Portanto, segue do teorema de extensão de Carathéodory da Teoria da Medida que P se estende a uma medida ν definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ que contém $\mathcal{S}$.

Como os cilindros elementares formam uma base para a topologia de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, temos que todo subconjunto aberto de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ pode ser escrito como uma união contável de elementos de $\mathcal{S}$, donde segue que a σ-álgebra $\mathcal{A}$ contém os subconjuntos de Borel de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Desse modo, ν é uma medida de Borel.

Além disso, como $\nu(\{x : (x(m),\ldots,x(n)) \in \{0,1\}^{n-m+1}\}) = 1$, segue que ν é uma medida de Borel *probabilística*.

Afirmação: ϕ preserva ν.

De fato, para qualquer $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$ com $m \leqslant n$ em $\mathbb{Z}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\nu(\phi^{-1}(\{x : (x(m),\ldots,x(n)) \in U\})) = &\\
&= \nu(\{x : (x(m+1),\ldots,x(n+1)) \in U\})\\
&= \nu(\{x : (x(m),x(m+1),\ldots,x(n+1)) \in \{0,1\} \times U\})\\
&= \sum_{\{0,1\}} 2^{-1} \sum_{U} 2^{-(n-m+1)}\\
&= \sum_{U} 2^{-(n-m+1)}\\
&= \nu(\{x : (x(m),\ldots,x(n)) \in U\})
\end{aligned}$$

Como os cilindros geram a σ-álgebra $\mathcal{A}$, segue que ϕ preserva ν. Isso prova a afirmação.

Afirmação: Dados quaisquer cilindros disjuntos $C = \{x : (x(m),\ldots,x(n)) \in U\}$ com $U \subset \{0,1\}^{n-m+1}$ e $D = \{x : (x(k),\ldots,x(l)) \in V\}$ com $V \subset \{0,1\}^{l-k+1}$, temos

$$\nu(C \cap \phi^{-j}(D)) = \nu(C)\nu(\phi^{-j}(D)) = \nu(C)\nu(D)$$

sempre que $j \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande.

Com efeito, sejam $\alpha = \min\{m,k\}$ e $\beta = \max\{n,l\}$. Considere U' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{n-m+1}$ pertencem a U e, similarmente, considere V' o conjunto de todas as sequências em $\{0,1\}^{\beta-\alpha+1}$ cuja restrição a $\{0,1\}^{l-k+1}$ pertencem a V.

Então, $C = \{x : (x(\alpha),\ldots,x(\beta)) \in U'\}$ e $D = \{x : (x(\alpha),\ldots,x(\beta)) \in V'\}$. Além disso, note que $U' \cap V' = \varnothing$ pois C e D são disjuntos.

Também, dado qualquer $j \in \mathbb{N}$ temos $\phi^{-j}(D) = \{x : (x(\alpha+j),\ldots,x(\beta+j)) \in V'\}$.

Agora, tome $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\alpha + j > \beta$ e note que

$C \cap \phi^{-j}(D) = \{x : (x(\alpha),\ldots,x(\beta),x(\beta+1),\ldots,x(\alpha+j),\ldots,x(\beta+j)) \in U' \times \{0,1\}^{\alpha+j-\beta} \times V'\}$. Daí, vemos que $\nu(C \cap \phi^{-j}(D))$ é:

$$= \nu(\{x : (x(\alpha),\ldots,x(\beta),x(\beta+1),\ldots,x(\alpha+j),\ldots,x(\beta+j)) \in U' \times \{0,1\}^{\alpha+j-\beta} \times V'\})$$

$$= \sum_{U'} 2^{-(\beta-\alpha+1)} \sum_{\{0,1\}^{\alpha+j-\beta}} 2^{-(\alpha+j-\beta)} \sum_{V'} 2^{-(\beta-\alpha+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_U 2^{-(n-m+1)} \sum_V 2^{-(l-k+1)} \\
&= \nu(C)\nu(D),
\end{aligned}
$$

como queríamos. Note que o mesmo é válido se C e D são, cada um, uma união finita de cilindros dois a dois disjuntos.

Afirmação: ϕ é ergódico sobre $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{A}, \nu)$.

Com efeito, suponha que $B \in \mathcal{A}$ satisfaz $\phi^{-1}(B) = B$. Existe uma união disjunta finita de cilindros denotada por C tal que $\nu(B \triangle C) < \varepsilon$, onde $B \triangle C = (B - C) \cup (C - B)$ (Teorema D da página 56 de [Halmos 1974]).

Pela última afirmação tem-se $\nu(C \cap \phi^{-j}(C)) = \nu(C)^2$ sempre que $j \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande.

Daí, fixando um tal $j \in \mathbb{N}$ temos:

$$
\begin{aligned}
|\nu(B \cap \phi^{-j}(B)) - \nu(C \cap \phi^{-j}(C))| &\leqslant \nu((B \cap \phi^{-j}(B)) \triangle (C \cap \phi^{-j}(C))) \\
&\leqslant \nu((B \triangle C) \cup (\phi^{-j}(B) \triangle \phi^{-j}(C))) \\
&\leqslant \nu(B \triangle C) + \nu(\phi^{-j}(B \triangle C)) \\
&= 2\nu(B \triangle C) < 2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|\nu(B)^2 - \nu(C)^2| &= |(\nu(B) + \nu(C))(\nu(B) - \nu(C))| \\
&\leqslant 2|\nu(B) - \nu(C))| \\
&\leqslant 2\nu(B \triangle C) < 2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Consequentemente, por (1.1) e (1.2) temos:

$$
\begin{aligned}
|\nu(B) - \nu(B)^2| &= |\nu(B \cap \phi^{-j}(B)) - \nu(B)^2| \\
&\leqslant |\nu(B \cap \phi^{-j}(B)) - \nu(C \cap \phi^{-j}(C))| + |\nu(C \cap \phi^{-j}(C)) - \nu(B)^2| \\
&= |\nu(B \cap \phi^{-j}(B)) - \nu(C \cap \phi^{-j}(C))| + |\nu(C)^2 - \nu(B)^2| < 4\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = 1$, o que prova a afirmação.

Observação 1.13. O sistema dinâmico ergódico $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{A}, \nu, \phi)$ do Exemplo 1.12 é dito *2-deslocamento de Bernoulli* e é denotado por $\mathcal{B}(1/2; 1/2)$. A medida ν é dita *medida de Bernoulli*.

O sistema $\mathcal{B}(1/2;1/2)$ é um modelo matemático para o experimento aleatório de lançamento sucessivo e independente de uma moeda "desde o passado remoto até o futuro distante".

Agora, veremos uma classe de espaços que é bastante importante em Teoria Ergódica, a saber:

Definição 1.14. (Espaço de Lebesgue) Suponha que m é a medida de Lebesgue sobre o intervalo $[0,1]$ e $\mathcal{L}$ é a σ-álgebra dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $[0,1]$.

Dizemos que um espaço de medida finita e completa $(X,\mathcal{X},\nu)$ é um *espaço de Lebesgue* se $(X,\mathcal{X},\nu)$ é *isomorfo módulo 0* ao espaço $([0,1],\mathcal{L},m)$.

Mais precisamente, $(X,\mathcal{X},\nu)$ é um espaço de Lebesgue se existem subconjuntos $X_0 \subset X$ e $L_0 \subset [0,1]$ com $\nu(X_0)=1$, $m(L_0)=1$, e uma transformação bimensurável $\psi : X_0 \to L_0$ satisfazendo:

(i) $\nu(A_0) = m(\psi(A_0))$ $(A_0 \in X_0 \cap \mathcal{X})$

(ii) $m(B_0) = \nu(\psi^{-1}(B_0))$ $(B_0 \in L_0 \cap \mathcal{L})$

O próximo resultado, devido a von Neumann, garante que a classe dos espaços de Lebesgue é bastante ampla.

Teorema 1.15. ***(von Neumann)*** *Se X é um espaço métrico separável completo e $\mathcal{A}$ é o completamento da família dos conjuntos de Borel com respeito a uma medida de Borel probabilística ν sobre X, então $(X,\mathcal{X},\nu)$ é um espaço de Lebesgue.*

Exemplo 1.16. Se I^n é o cubo unitário fechado n-dimensional, μ é a medida de Lebesgue n-dimensional e $\mathcal{L}$ é a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis, então $(I^n,\mathcal{L},\mu)$ é um espaço de Lebesgue.

Mais geralmente, se σ é um cubo fechado n-dimensional qualquer, então $(\sigma,\mathcal{L},\mu)$ é um espaço de Lebesgue.

Exemplo 1.17. No Exemplo 1.12, se considerarmos $\mathcal{B}$ o completamento da família dos subconjuntos de Borel de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ com respeito à medida de Bernoulli ν, então pelo Teorema 1.15 segue que $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}},\mathcal{B},\nu)$ é um espaço de Lebesgue.

Veremos agora que sobre espaços de Lebesgue sempre existe pelo menos um automorfismo ergódico.

Proposição 1.18. *Se $(X,\mathcal{X},\mu)$ é um espaço de Lebesgue, então existe um automorfismo ergódico $f : X \to X$.*

Demonstração. Como $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \nu)$ são espaços de Lebesgue, existe um isomorfismo módulo 0 $\psi : X \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Daí, se $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ denota o 2-deslocamento de Bernoulli sobre $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \nu)$, então afirmamos que $f_0 := \psi^{-1} \circ \phi \circ \psi : X_0 \to X_0$ é ergódico.

De fato, é imediato que f_0 é bimensurável e preserva μ sobre X_0. Agora, se $f_0^{-1}(A) = A$ com $A \subset X_0$, então $A = f_0(A)$, donde $\phi(\psi(A)) = \psi(A)$.

Ou seja, $\psi(A)$ é ϕ-invariante. Como ϕ é ergódico, segue que $\nu(\psi(A)) = 0$ ou $\nu(\psi(A)) = 1$. Mas, como ψ é um isomorfismo módulo 0, tem-se $\mu(A) = \nu(\psi(A))$, donde vemos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, o que mostra que f_0 é ergódico.

Por fim, para obter $f : X \to X$ ergódico, estenda f_0 arbitrariamente sobre o conjunto de medida nula $X \setminus X_0$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Denotamos por $\mathcal{H}(X)$ o conjunto de todos os homeomorfismos $h : X \to X$.

Como nosso caso de interesse é $X = I^n$, o cubo unitário n-dimensional, vamos denotar $\rho(x, y)$ por $|x - y|$ $(x, y \in X)$.

Considere as seguintes métricas sobre $\mathcal{H}(X)$:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
$$\overline{d}(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |f^{-1}(x) - g^{-1}(x)|$$

Claramente, $d(f, g) \leqslant \overline{d}(f, g)$ para todos $f, g \in \mathcal{H}(X)$.

Proposição 1.19. *As métricas d e $\overline{d}$ são equivalentes sobre $\mathcal{H}(X)$.*

Demonstração. Como $d \leqslant \overline{d}$ em $\mathcal{H}(X)$ é suficiente mostrar que, se $d(f_n, f) \to 0$ em $\mathcal{H}(X)$, então $\overline{d}(f_n, f) \to 0$ em $\mathcal{H}(X)$. Suponha que $d(f_n, f) \to 0$ em $\mathcal{H}(X)$ e, para obter uma contradição, suponha que $\overline{d}(f_n, f) \nrightarrow 0$ em $\mathcal{H}(X)$.

Então, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $(m_j) \subset \mathbb{N}$, $(x_j) \subset X$ tais que

$$|f_{m_j}^{-1}(x_j) - f^{-1}(x_j)| \geqslant \varepsilon \text{ para cada } j \in \mathbb{N} \quad (*).$$

Ponha $y_j = f_{m_j}^{-1}(x_j)$ $(j \in \mathbb{N})$.

Como X é compacto, podemos supor que existem $x, y \in X$ tais que $x_j \to x$ e $y_j \to y$. Daí, como $d(f_n, f) \to 0$ tem-se $f_{m_j}(y_j) \to f(y)$ (veja 7.5 na página 268 de [Dugundji 1966]). Logo, $f_{m_j}(y_j) = x_j \to x$ implica $f(y) = x$, ou seja, $y = f^{-1}(x)$.

Consequentemente, como $f^{-1}(x_j) \to f^{-1}(x) = y$ e $f_{m_j}^{-1}(x_j) = y_j \to y$, acabamos por contradizer (*) sempre que $j \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande. Isto conclui a demonstração.

□

Proposição 1.20. *Se X é um espaço métrico compacto , então a aplicação de composição $(f,g) \mapsto f \circ g$ é contínua de $C(X) \times C(X)$ em $C(X)$.*

Demonstração. De fato, note que dados $f, f_1, g, g_1 \in C(X)$ tem-se:

$$\begin{aligned} d(f \circ g, f_1 \circ g_1) &= \sup_{x \in X} |f \circ g(x) - f_1 \circ g_1(x)| \\ &\leqslant \sup_{x \in X} |f \circ g(x) - f \circ g_1(x)| + \sup_{x \in X} |f \circ g_1(x) - f_1 \circ g_1(x)| \\ &\leqslant \sup_{x \in X} |f \circ g(x) - f \circ g_1(x)| + \sup_{x \in X} |f(x) - f_1(x)| \\ &= d(f \circ g, f \circ g_1) + d(f, f_1) \qquad (**) \end{aligned}$$

Além disso, como f é uniformemente contínua tem-se $d(f \circ g, f \circ g_1) \to 0$ sempre que $d(g, g_1) \to 0$.

Portanto, por $(**)$ acima vemos que $d(f \circ g, f_1 \circ g_1) \to 0$ sempre que $d(f, f_1) \to 0$ e $d(g, g_1) \to 0$, o que prova o resultado. □

Proposição 1.21. *Se X é um espaço métrico compacto, então $(\mathcal{H}(X), \overline{d})$ é completo.*

Demonstração. Seja $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}(X), \overline{d})$. Então, (h_n) e (h_n^{-1}) são de Cauchy em $(C(X), d)$. Como $(C(X), d)$ é completo (Teorema 2.6 da página 296 de [Dugundji 1966]), existem $h, g \in C(X)$ tais que $d(h_n, h) \to 0$ e $d(h_n^{-1}, g) \to 0$.

Portanto, como $h_n \circ h_n^{-1} = id = h_n^{-1} \circ h_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.20 obtemos $h \circ g = id = g \circ h$. Consequentemente, $g = h^{-1}$, o que mostra que $h \in \mathcal{H}(X)$ e $\overline{d}(h_n, h) \to 0$. □

Exemplo 1.22. Seja $X = [0,1]$ e considere a sequência $(h_n) \subset \mathcal{H}([0,1])$ definida por

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x = 0 \\ 2x/n, \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1/n, \text{se } x = 1/2 \\ 2\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{n}, \text{se } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Então, $d(h_n, h) \to 0$, onde

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right), \text{se } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Note que h não é injetiva, donde $h \notin \mathcal{H}([0,1])$. Portanto, (h_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}([0,1])$ que não converge em $(\mathcal{H}([0,1]), d)$.

Isso mostra que, em geral, $(\mathcal{H}(X), d)$ não é completo.

Observação 1.23. O exemplo anterior também nos mostra que, embora d e $\overline{d}$ sejam equivalentes sobre $\mathcal{H}(X)$, em geral não são *uniformemente* equivalentes.

Com efeito, se tivéssemos $d(f,g) \leqslant \overline{d}(f,g) \leqslant cd(f,g)$ para alguma constante $c \geqslant 1$ $(f, g \in \mathcal{H}([0,1]))$, então a condição $d(h_n, h) \to 0$ implica que (h_n) seria de Cauchy em $\overline{d}$.

Daí, pela Proposição 1.21 existiria $g \in \mathcal{H}([0,1])$ para o qual $\overline{d}(h_n, g) \to 0$.

Logo, teríamos também $d(h_n, g) \to 0$. Como $d(h_n, h) \to 0$, teríamos $h = g$, o que contradiz o fato de h não ser injetiva.

Se X é um espaço métrico compacto e μ é uma medida de Borel regular sobre X, então denotamos por $\mathcal{H}(X, \mu)$ o conjunto de todos os homeomorfismos $h : X \to X$ que preservam μ.

Proposição 1.24. *Se X é um espaço métrico compacto e μ é uma medida de Borel regular sobre X, então $\mathcal{H}(X, \mu)$ é um subespaço fechado de $(\mathcal{H}(X), \overline{d})$.*

Demonstração. Sejam $(h_n) \subset \mathcal{H}(X, \mu)$ e $h \in \mathcal{H}(X)$ tais que $\overline{d}(h_n, h) \to 0$. Fixe $\varphi : X \to \mathbb{R}$ função real contínua e limitada arbitrária. Pela Proposição 1.10, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\int_X (\varphi \circ h_n) d\mu = \int_X \varphi d\mu$. Daí, fazendo $n \to \infty$ obtemos pelo teorema da convergência dominada $\int_X (\varphi \circ h) d\mu = \int_X \varphi d\mu$.

Portanto, novamente pela Proposição 1.10 temos $h \in \mathcal{H}(X, \mu)$, como desejado.

$\square$

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida. Denotamos por $\mathcal{G}(X)$ o conjunto de todas as transformações bimensuráveis $f : X \to X$ e por $\mathcal{G}(X, \mu)$ o conjunto de todas as transformações bimensuráveis que preservam μ (i.e., automorfismos sobre $(X, \mathcal{X}, \mu)$).

Como usual, vamos identificar as transformações bimensuráveis que diferem em, no máximo, um conjunto de medida nula.

A partir desse momento vamos considerar $X = I^n$, o cubo unitário n-dimensional, e $|.|$ denotará a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Note que, neste caso, $\mathcal{G}(X)$ coincide com o conjunto de todas as transformações bimensuráveis $f : X \to X$ para as quais $\inf\{\delta > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geqslant \delta\}) = 0\} < \infty$.

Agora, dadas $f, g \in \mathcal{G}(X)$ considere:

$$d_u(f,g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) = 0\}$$
$$d_w(f,g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) < \delta\}$$

Claramente, $d_w(f,g) \leqslant d_u(f,g)$.

Proposição 1.25. *d_u e d_w são métricas sobre $\mathcal{G}(X)$.*

Demonstração. Vamos mostrar a validade da desigualdade triangular para ambas e também que $f = g$ sempre que $d_u(f,g) = 0$ ou $d_w(f,g) = 0$. As demais propriedades de uma métrica são fáceis de ser verificadas.

Primeiro para d_u:

De fato, suponha que existam $f, g, h \in \mathcal{G}(X)$ tais que $d_u(f,g) > d_u(f,h) + d_u(h,g)$.

Daí, existem $\delta, \gamma > 0$ tais que $d_u(f,g) > \delta + \gamma$ e

$$\mu(\{x : |f(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) = 0 = \mu(\{x : |h(x) - g(x)| \geqslant \gamma\}).$$

Como

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta + \gamma\} \subset \{x : |f(x) - h(x)| \geqslant \delta\} \cup \{x : |h(x) - g(x)| \geqslant \gamma\},$$

obtemos $d_u(f,g) \leqslant \delta + \gamma < d_u(f,g)$, uma contradição.

Agora, suponha que $d_u(f,g) = 0$.

Por definição, existe $\delta_n \to 0$ tal que $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta_n\}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome uma subsequência (δ_{n_k}) de (δ_n) satisfazendo $0 < \delta_{n_k} < \varepsilon/2^{n_k}$. Daí, como $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset \bigcup_{k \geqslant 1} \{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2^{n_k}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) &\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2^{n_k}\}) \\
&\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta_{n_k}\}) = 0.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, ou seja, $f = g$.

Agora para d_w:

De fato, suponha que existam $f, g, h \in \mathcal{G}(X)$ tais que $d_w(f,g) > d_w(f,h) + d_w(h,g)$.

Daí, existem $\delta, \gamma > 0$ tais que $d_w(f,g) > \delta + \gamma$ com $\mu(\{x : |f(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) < \delta$ e $\mu(\{x : |h(x) - g(x)| \geqslant \gamma\}) < \gamma$.

Novamente, como

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta + \gamma\} \subset \{x : |f(x) - h(x)| \geqslant \delta\} \cup \{x : |h(x) - g(x)| \geqslant \gamma\},$$

obtemos $d_w(f,g) \leqslant \delta + \gamma < d_w(f,g)$, uma contradição.

Por fim, suponha que $d_w(f,g) = 0$.

Por definição, existe $\delta_n \to 0$ tal que $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta_n\}) < \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome uma subsequência (δ_{n_k}) de (δ_n) satisfazendo $0 < \delta_{n_k} < \varepsilon/2^{n_k}$. Daí, como $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset \bigcup_{k\geqslant 1}\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2^{n_k}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2^{n_k}\}) \\
&\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta_{n_k}\}) \\
&\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \delta_{n_k} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, ou seja, $f = g$.

□

Definição 1.26. A *topologia uniforme* sobre $\mathcal{G}(X)$ é a topologia gerada pela métrica d_u.

Definição 1.27. A *topologia fraca* sobre $\mathcal{G}(X)$ é a topologia gerada pela métrica d_w.

Observação 1.28. Halmos introduziu a topologia fraca sobre $\mathcal{G}(X, \mu)$ e estudou muitas de suas propriedades; veja [Halmos 1956]. Em particular, Halmos exibiu uma métrica *completa* que dá a topologia fraca sobre $\mathcal{G}(X, \mu)$. A definição que utilizamos aqui e sua equivalência com a definição dada por Halmos foram apresentadas por Alpern em [Alpern 1978].

Além disso, Halmos utilizou a terminologia "topologia uniforme sobre $\mathcal{G}(X, \mu)$" em um sentido diferente, a saber, para a topologia gerada pela métrica

$$d'(f, g) = \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}).$$

Para maiores detalhes, veja [Halmos 1956]. Observamos que, em nosso contexto, nossa escolha de terminologia é justificada pelo próximo resultado.

Proposição 1.29. *Se μ é a medida de Lebesgue, então $d_u(f, g) = \sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)|$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{H}(I^n)$. Em outras palavras, a restrição de d_u a $\mathcal{H}(I^n)$ dá a topologia da convergência uniforme.*

Demonstração. Suponha que $\sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ e fixe algum $\varepsilon' > 0$ tal que $\sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon' < \varepsilon$. Então, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon'$ para todo $x \in I^n$. Em particular, obtemos $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon'\}) = 0$. Logo, por definição, tem-se $d_u(f, g) \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$. Ou seja, mostramos que $d_u(f, g) < \varepsilon$ sempre que $\sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Portanto, $d_u(f, g) \leqslant \sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)|$.

Agora, para obter uma contradição, suponha que existam $f, g \in \mathcal{H}(I^n)$ tais que $d_u(f, g) < \sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)|$. Fixe algum $d_u(f, g) < \varepsilon < \sup_{x\in I^n} |f(x) - g(x)|$.

Por definição, existe algum $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) = 0$.

Ou seja, $|f(x) - g(x)| < \delta$ para μ-q.t.p. $x \in I^n$. Daí, como $f, g \in \mathcal{H}(I^n)$ e μ é positiva sobre os abertos não-vazios, segue que $|f(x) - g(x)| < \delta$ para todo $x \in I^n$. Consequentemente, obtemos $\sup_{x \in I^n} |f(x) - g(x)| \leqslant \delta < \varepsilon < \sup_{x \in I^n} |f(x) - g(x)|$, uma contradição.

Portanto, $d_u(f, g) = \sup_{x \in I^n} |f(x) - g(x)|$ sempre que $f, g \in \mathcal{H}(I^n)$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 1.30. Note que, dados $f, g \in \mathcal{G}(I^n)$, tem-se que

$$\inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) = 0\} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I^n} |f(x) - g(x)|$$

é o dito *supremo essencial* dos valores $|f(x) - g(x)|$ $(x \in I^n)$.

Agora, suponhamos que $f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$.

Então, como f e g preservam μ temos:

$$\begin{aligned} d_u(f, g) &= \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) = 0\} \\ &= \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f \circ g^{-1}(x) - id(x)| \geqslant \delta) = 0\} \\ &= d_u(f \circ g^{-1}, id). \end{aligned}$$

Vamos utilizar o símbolo $\|f \circ g^{-1}\|$ para denotar $d_u(f \circ g^{-1}, id)$.

Ou ainda, como $\mathcal{G}(X)$ é um grupo munido da operação de composição, escreveremos simplesmente $\|fg^{-1}\| = d_u(fg^{-1}, id)$.

Mais geralmente, se $f \in \mathcal{G}(I^n)$, então denotaremos $d_u(f, id)$ por $\|f\|$, ou seja, $\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in I^n} |f(x) - x|$.

Por fim, tendo em vista a Proposição 1.29, também escreveremos $\|f - g\|$ para denotar $\|fg^{-1}\|$ sempre que $f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$.

Recorde que, se (X, ρ) é um espaço métrico, então um conjunto que é interseção enumerável de abertos é dito G_δ e, além disso, um conjunto que contém uma interseção enumerável de abertos densos é dito *residual*.

Recorde também que, se (X, ρ) é um espaço métrico e (P) é uma propriedade, então dizemos que (P) *é genérica em* X se o subconjunto de X para o qual (P) é válida é residual. Em outras palavras, genericidade é a noção de *prevalência topológica*.

A próxima noção é crucial para o uso que faremos do Teorema de Baire no último capítulo deste trabalho.

Definição 1.31. Um espaço métrico (X, ρ) é dito *topologicamente completo* se existe uma métrica ρ' equivalente a ρ tal que (X, ρ') é completo.

Teorema 1.32. ***(Baire)*** *Se* (X, ρ) *é topologicamente completo, então toda interseção enumerável de abertos densos é um conjunto denso. Ou seja, todo conjunto residual em um espaço métrico topologicamente completo é denso.*

Observação 1.33. Pela Observação 1.28 segue que $(\mathcal{G}(X, \mu), d_w)$ é um espaço métrico topologicamente completo.

Observação 1.34. Como todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é também completo, segue pela Proposição 1.24 que o Teorema 1.32 é aplicável em $(\mathcal{H}(I^n, \mu), \overline{d})$.

Terminamos este capítulo enunciando um resultado que será fundamental neste trabalho.

Teorema 1.35. ***(Halmos)*** *O conjunto de todos os automorfismos ergódicos é um residual em* $(\mathcal{G}(X, \mu), d_w)$*. Em particular, o conjunto dos automorfismos ergódicos é denso em* $(\mathcal{G}(X, \mu), d_w)$

2 Lemas de Conectividade

Neste capítulo apresentaremos os resultados que nos permitem realizar argumentos de perturbação de homeomorfismos. Em Sistemas Dinâmicos tais resultados pertencem a uma família de resultados conhecidos como "resultados de conectividade".

Lema 2.1. *Seja L um segmento em $\mathbb{R}^n$ com extremidades $p, q \in \mathbb{R}^n$.*

Para qualquer bola aberta $U := U\left(\dfrac{p+q}{2}; \dfrac{|p-q|}{2} + \delta\right)$ ($\delta > 0$) centrada no ponto médio $(p+q)/2$ de L com raio $\dfrac{|p-q|}{2} + \delta$ existe um homeomorfismo que preserva volume $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que:

(a) $h(p) = q$;

(b) $h \equiv id$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$.

Demonstração. Fixada U arbitrária, considere uma bola aberta qualquer da seguinte forma $U' := U'\left(\dfrac{p+q}{2}; \dfrac{|p-q|}{2} + \delta'\right)$ contida em U (ou seja, $0 < \delta' < \delta$) e tome alguma função $\alpha : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\alpha \equiv 1$ em $\overline{U'}$;

(ii) $\alpha \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$;

(iii) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ em $\mathbb{R}^n$.

Agora, considere a seguinte equação diferencial autônoma $x' = \alpha(x)(q - p)$.

Note que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) := \alpha(x)(q-p)$ define um campo vetorial de classe C^∞ para o qual $\text{div}F(x) = \nabla\alpha(x) \cdot (q-p)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, onde $\cdot$ denota o produto escalar canônico em $\mathbb{R}^n$.

Denote por $\phi^t(x)$ o fluxo de classe C^∞ associado à equação $x' = F(x)$.

Note que, como F é uniformemente limitado, o fluxo ϕ^t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $p + t(q-p) \in L$ para todo $t \in [0,1]$, pela unicidade obtemos $\phi^t(p) = p + t(q-p)$ $(t \in [0,1])$ e $\phi^1(p) = q$.

Considere $g(x) := \phi^1(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ a transformação de tempo um associada ao fluxo ϕ^t.

Então, g é um difeomorfismo de classe C^∞ (consequentemente, um homeomorfismo) tal que $g^{-1}(x) = \phi^{-1}(x)$ é a transformação de tempo menos um e $g(p) = \phi^1(p) = q$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Além disso, como $\mathrm{div}F(x) = 0$ para todo $x \in U' \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{U})$, pelo Teorema 1.11 segue que g preserva o volume em $U' \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{U})$. Por outro lado, como $\alpha \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$, segue que todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ é um ponto estacionário da equação $x' = F(x)$, de modo que $g(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.

O homeomorfismo h procurado será obtido a partir de um processo de limite sobre a construção que acabamos de fazer.

Com efeito, utilizando a mesma notação acima, fixe uma sequência arbitrária de bolas abertas $(U'_k) \subset U$ tal que $\overline{U'_k} \subset U'_{k+1} \subset U$ para todo $k \geqslant 1$ e $\overline{U'_k} \nearrow U$ quando $k \to \infty$.

Do mesmo modo que acima considere, para cada $k \geqslant 1$, a equação diferencial $x' = \alpha_k(x)(q-p)$, onde $\alpha_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ tal que

(i) $\alpha_k \equiv 1$ em $\overline{U'_k}$;

(ii) $\alpha_k \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$;

(iii) $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1$ em $\mathbb{R}^n$.

Denote por $\phi_k^t(x)$ o fluxo de classe C^∞ associado a $x' = \alpha_k(x)(q-p)$.

Defina, para cada $k \geqslant 1$, $g_k(x) := \phi_k^1(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Então, como $\overline{U'_k} \subset U'_{k+1} \subset U$ para todo $k \geqslant 1$, pela unicidade e construção acima obtemos que (g_k) é uma sequência de homeomorfismos tal que

- $g_{k+1}\big|_{\overline{U'_k}} \equiv g_k$;
- $g_{k+1}^{-1}\big|_{\overline{U'_k}} \equiv g_k^{-1}$;
- $g_k(p) = q$;
- $g_k \equiv id$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$;
- g_k preserva volume em U'_k.

Afirmação: (g_k) é de Cauchy em $(\mathcal{H}(\overline{U}), \overline{d}))$, onde

$$\overline{d}(f,g) := \max_{x \in \overline{U}} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in \overline{U}} |f^{-1}(x) - g^{-1}(x)| \quad (f, g \in \mathcal{H}(\overline{U})).$$

De fato, primeiro observe que, como $g_k \equiv id$ em ∂U (fronteira de U), $g_{k+1}\big|_{\overline{U'_k}} = g_k$ e $g_{k+1}^{-1}\big|_{\overline{U'_k}} = g_k^{-1}$ para cada $k \geqslant 1$, se $m > k$ então:

$$\begin{aligned}\overline{d}(g_m, g_k) &= \max_{x \in \overline{U}} |g_m(x) - g_k(x)| + \max_{x \in \overline{U}} |g_m^{-1}(x) - g_k^{-1}(x)| \\ &= \max_{x \in U \setminus \overline{U'_k}} |g_m(x) - g_k(x)| + \max_{x \in U \setminus \overline{U'_k}} |g_m^{-1}(x) - g_k^{-1}(x)|\end{aligned}$$

Agora, para obter uma contradição, suponha que $\max_{x\in U\setminus \overline{U'_k}} |g_m(x) - g_k(x)| \nrightarrow 0$ quando $k \to \infty$.

Então, existem $\varepsilon > 0$, sequências $m_j > k_j$ em $\mathbb{N}$ e pontos $x_j \in U \setminus \overline{U'_{k_j}}$ tais que

$$\varepsilon \leqslant |g_{m_j}(x_j) - g_{k_j}(x_j)| \text{ para cada } j \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Pela compacidade de $\overline{U}$, podemos supor que existe $x \in \overline{U}$ tal que $x_j \to x$ quando $j \to \infty$.

Daí, como $\overline{U'_{k_j}} \nearrow U$, segue que $x \in \partial U$; com efeito, se fosse $x \in U$ então existiria $r > 0$ tal que $U(x;r) \subset U$. Portanto, teríamos $x_j \in U(x;r) \subset \overline{U'_{k_j}}$ sempre que $j \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, o que contradiz a escolha de $x_j \in U \setminus \overline{U'_{k_j}}$ ($j \in \mathbb{N}$).

Logo, $x \in \partial U$.

Por outro lado, como $|\alpha_k(x)(q-p)| \leqslant |q-p|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \geqslant 1$, segue que a sequência de derivadas (g'_k) é uniformemente limitada em $\mathbb{R}^n$; então, existe alguma constante $M > 0$ tal que $|g'_k(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \geqslant 1$

Daí, pela desigualdade do valor médio, temos $|g_k(y) - g_k(z)| \leqslant M|y-z|$ para todos $y, z \in \mathbb{R}^n$ e $k \geqslant 1$.

Consequentemente, como $x \in \partial U$ e $g_k \equiv id$ em ∂U para todo $k \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant |g_{m_j}(x_j) - g_{k_j}(x_j)| \\ &\leqslant |g_{m_j}(x_j) - g_{m_j}(x)| + |g_{m_j}(x) - g_{k_j}(x)| + |g_{k_j}(x_j) - g_{k_j}(x)| \\ &\leqslant 2M|x_j - x|.\end{aligned}$$

Como $x_j \to x$, obtemos uma contradição com $(*)$ sempre que $j \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande.

Portanto, $\max_{x\in\overline{U}} |g_m(x) - g_k(x)| \to 0$ quando $m, k \to \infty$.

Além disso, como $g_k^{-1}(x) = \phi_k^{-1}(x)$ e $|\alpha_k(x)(q-p)| \leqslant |q-p|$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \geqslant 1$, pelo mesmo raciocício concluimos que $\max_{x\in\overline{U}} |g_m^{-1}(x) - g_k^{-1}(x)| \to 0$ quando $m, k \to \infty$.

Isto mostra que (g_k) é de Cauchy em $(\mathcal{H}(\overline{U}), \overline{d})$.

Como $(\mathcal{H}(\overline{U}), \overline{d})$ é completo (Proposição 1.21), segue que existe $h \in \mathcal{H}(\overline{U})$ tal que $\overline{d}(g_k, h) \to 0$ quando $k \to \infty$. Note que $h\big|_{\overline{U'_k}} = g_k$ e $h^{-1}\big|_{\overline{U'_k}} = g_k^{-1}$ para todo $k \geqslant 1$.

Também, como $g_k \equiv id$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$ para todo $k \geqslant 1$, se estendermos h pondo $h \equiv id$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$, então segue que $\max_{x\in\mathbb{R}^n} |g_k(x) - h(x)| + \max_{x\in\mathbb{R}^n} |g_k^{-1}(x) - h^{-1}(x)| \to 0$ quando $k \geqslant 1$.

Por fim, mostremos que h preserva volume em $\mathbb{R}^n$. Claramente, como $h \equiv id$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$, é suficiente mostrar que h preserva volume em U.

Para tal, usaremos a Proposição 1.10; fixe $\varphi : U \to \mathbb{R}$ função contínua e limitada arbitrária. Se μ denota o volume (ou seja, a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$), então como $h|_{\overline{U'_k}} = g_k$ e g_k preserva μ em U'_k para cada $k \geqslant 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_U (\varphi \circ h) d\mu &= \int_{U \setminus \overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu + \int_{\overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu \\
&= \int_{U \setminus \overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu + \int_{\overline{U'_k}} (\varphi \circ g_k) d\mu \\
&= \int_{U \setminus \overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu + \int_{U'_k} (\varphi \circ g_k) d\mu \\
&= \int_{U \setminus \overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu + \int_{U'_k} \varphi d\mu \\
&= \int_{U \setminus \overline{U'_k}} (\varphi \circ h) d\mu + \int_{\overline{U'_k}} \varphi d\mu \qquad (**)
\end{aligned}$$

Mas, note que como φ e $\varphi \circ h$ são funções reais contínuas e limitadas e $\overline{U'_k} \nearrow U$, fazendo $k \to \infty$ em $(**)$ obtemos

$$\int_U (\varphi \circ h) d\mu = \int_U \varphi d\mu.$$

Como $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é arbitrária, pela Proposição 1.10 segue que h preserva μ em U como desejado.

Isto conclui a demonstração. $\square$

Recorde que um *caminho* em $\mathbb{R}^n$ com extremidades $p, q \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Por um abuso de linguagem é comum identificar o caminho γ com a sua imagem $\gamma([0,1])$.

Lema 2.2. *Seja $U \subset I^n$ uma vizinhança aberta de um caminho γ com extremidades p, q. Então, existe um homeomorfismo que preserva volume $h : I^n \to I^n$ com $h(p) = q$ que envia uma vizinhança de p sobre uma vizinhança de q e que coincide com a identidade fora de U.*

Demonstração. Tome $\delta > 0$ pequeno e escolha pontos $p = p_0, p_1, \ldots, p_k = q$ em γ suficientemente próximos tais que $U\left(\dfrac{p_i + p_{i+1}}{2}; \dfrac{|p_{i+1} - p_i|}{2} + \delta\right) \subset U$ para cada $i = 0, \ldots, k-1$.

Pelo Lema 2.1, para cada $i = 0, \ldots, k-1$ existe um homeomorfismo que preserva volume $h_i : I^n \to I^n$ tal que $h_i(p_i) = p_{i+1}$, h_i envia uma vizinhança de p_i sobre uma vizinhança de p_{i+1} e $h_i \equiv id$ fora de $U\left(\dfrac{p_i + p_{i+1}}{2}; \dfrac{|p_{i+1} - p_i|}{2} + \delta\right)$.

Então, $h := h_{k-1} \circ h_{k-2} \circ \cdots \circ h_1 \circ h_0$ define um homeomorfismo que preserva volume sobre I^n com $h(p) = q$ tal que h envia uma vizinhança de p sobre uma vizinhança de q e coincide com a identidade fora de U, como desejado.

□

Lema 2.3. *Sejam* $\{p_i\}_{i=1}^N$ *e* $\{q_i\}_{i=1}^N$ *dois conjuntos de pontos distintos no interior de* I^n *com* $|p_i - q_i| < \varepsilon$ *para todo* $i = 1, \ldots, N$. *Então, existe um homeomorfismo que preserva volume* h *com* $\|h\| < \varepsilon$ *e que coincide com a identidade na fronteira de* I^n *tal que, para cada* $i = 1, \ldots, N$, *envia uma vizinhança de* p_i *sobre uma vizinhança de* q_i *e* $h(p_i) = q_i$. *Além disso,* h *pode ser escolhido de modo a coincidir com a identidade em um conjunto finito disjunto de* $\{p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N\}$ *fixado a priori.*

Demonstração. Fixe F um conjunto finito arbitrário disjunto de $\{p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N\}$. Para cada $i = 1, \ldots, N$ escolha um caminho $\gamma_i : [0, 1] \to \text{int } I^n$ satisfazendo $\gamma_i(0) = p_i$, $\gamma_i(1) = q_i$ e $|\gamma_i(t) - \gamma_i(t')| < \varepsilon|t - t'|$ $(t, t' \in [0, 1])$.

Observe que, como F é finito e os caminhos linha reta $R_i(t) := p_i + t(q_i - p_i)$ podem se intersectar em, no máximo, um número finito de pontos, por continuidade podemos supor que os caminhos γ_i intersectam-se em, no máximo, um número finito de pontos e, além disso, se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então $\gamma_i([0, 1])^\delta \cap F = \varnothing$ para cada $i = 1, \ldots, N$.

Suponhamos inicialmente que os caminhos γ_i são dois a dois disjuntos.

Tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que:

- $\gamma_i([0, 1])^\delta \cap F = \varnothing$ para cada $i = 1, \ldots, N$.
- $\gamma_i([0, 1])^\delta \subset \text{int } I^n$ para cada $i = 1, \ldots, N$.
- $\gamma_i([0, 1])^\delta \cap \gamma_j([0, 1])^\delta = \varnothing$ sempre que $i \neq j$.
- $\text{diam}\gamma_i([0, 1])^\delta < \varepsilon$ para cada $i = 1, \ldots, N$.

Pelo Lema 2.2, para cada $i = 1, \ldots, N$ existe um homeomorfismo que preserva volume $h_i : I^n \to I^n$ tal que $\{x : h_i(x) \neq x\} \subset \gamma_i([0, 1])^\delta$, $h_i(p_i) = q_i$ e h_i envia uma vizinhança de p_i sobre uma vizinhança de q_i.

Então, $h := h_N \circ h_{N-1} \circ \cdots \circ h_1$ tem as propriedades desejadas.

Agora, no caso geral os caminhos γ_i não são necessariamente disjuntos.

Seja $G \neq \varnothing$ o conjunto finito de todas as interseções dos caminhos γ_i e considere $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ os valores de t para os quais existe $i = 1, \ldots, N$ tal que $\gamma_i(t) \in G$.

Para cada $j = 0, \ldots, k$ escolha $s_j \in [0, 1]$ tal que $0 = s_0 \leqslant t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < t_3 < \cdots < s_{k-1} < t_k < s_k = 1$. Defina $p_{ij} := \gamma_i(s_j)$ e $q_{ij} := \gamma_i(s_{j+1})$ $(i = 1, \ldots, N$ e $j = 0, \ldots, k)$.

Então, para cada $j = 0, \ldots, k$ fixado os conjuntos $\{p_{ij}\}_{i=1}^{N}$ e $\{q_{ij}\}_{i=1}^{N}$ satisfazem $|p_{ij} - q_{ij}| < \varepsilon|s_{j+1} - s_j|$. Além disso, reduzindo $\delta > 0$ se necessário, podemos supor que as δ-vizinhanças das restrições $\gamma_i\big|_{[s_j, s_{j+1}]}$ são conjuntos dois a dois disjuntos.

Consequentemente, pela parte já provada obtemos, para cada $j = 0, \ldots, k$, um homeomorfismo que preserva volume $h_j : I^n \to I^n$ com $h_j(p_{ij}) = q_{ij}$ para cada $i = 1, \ldots, N$ e $\|h_j\| < \varepsilon(s_{j+1} - s_j)$.

Portanto, a composta $h := h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_0$ tem as propriedades desejadas.

Isto conclui a demonstração. $\square$

3 Permutações diádicas sobre o cubo

Neste capítulo apresentaremos uma importante ideia devida a Peter Lax, a saber: os homeomorfismos que preservam volume sobre o cubo I^n são *localmente rígidos* em um sentido combinatório específico.

Mais precisamente, veremos que qualquer homeomorfismo que preserva volume sobre o cubo I^n pode ser *uniformemente aproximado* por permutações diádicas definidas sobre decomposições suficientemente finas de I^n; este é o resultado de Lax que torna precisa a ideia acima. Veremos ainda que tal aproximação pode ser feita a partir de permutações diádicas *cíclicas* [Alpern e Prasad 2001].

Definição 3.1. Dados $n \geq 2$ e $m \in \mathbb{N}$ definimos a *decomposição diádica de ordem m de I^n* como a coleção dos $N = 2^{nm}$ subcubos congruentes da forma $\left[\frac{i_1}{2^m}, \frac{i_1+1}{2^m}\right] \times ... \times \left[\frac{i_m}{2^m}, \frac{i_m+1}{2^m}\right]$ com $i_1, ..., i_n \in \{0, ..., 2^m - 1\}$.

Definição 3.2. Uma *permutação diádica de ordem $m \in \mathbb{N}$* é uma transformação $P : I^n \to I^n$ que age sobre alguma decomposição diádica de ordem m de I^n, digamos $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, da seguinte maneira: $P(\sigma_i) = \sigma_{j(i)}$.

Dessa forma, é comum identificarmos P com a bijeção $j : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, N\}$.

Além disso se dada uma enumeração dos subcubos tal que os cubos σ_i e σ_{i+1} tem uma face em comum para cada $1 \leqslant i < N$ e também σ_N e σ_1 tem uma face em comum, P será dita uma *permutação diádica cíclica* se $P(\sigma_N) = \sigma_1$ e $P(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ para cada $1 \leqslant i < N$.

Recorde que uma *relação* entre os conjuntos X e Y é um subconjunto $R \subset X \times Y$. Denotaremos $(x, y) \in R$ por xRy.

Para cada $A \subset X$ considere $A^R := \{y \in Y : xRy \text{ para algum } x \in A\}$.

Além disso, um *R-casamento* f de X em Y é uma função injetiva $f : X \to Y$ tal que $xRf(x)$ para cada $x \in X$.

O próximo resultado, devido a Peter Hall, fornece uma condição suficiente - dita *condição de Hall* - para que se consiga obter um R-casamento entre conjuntos finitos.

Lema 3.3. ***(Hall)*** *Sejam X e Y conjuntos finitos e $R \subset X \times Y$ uma relação entre eles. Se $|A^R| \geqslant |A|$ para todo $A \subset X$, então existe um R-casamento $f : X \to Y$. Além disso, se $|X| = |Y|$, então f é bijetiva.*

Agora, veremos como Peter Lax utilizou o Lema de Hall para mostrar que os homeomorfismos que preservam volume sobre o cubo unitário podem ser uniformemente aproximados por permutações diádicas definidas sobre decomposições suficientemente finas.

Lema 3.4. *Dados $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$, se $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então existe uma permutação diádica P de ordem m tal que $\|h - P\| < \varepsilon$.*

Demonstração. Considere $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, $N = 2^{mn}$, uma decomposição diádica de I^n de ordem m, onde $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande a ser determinado.

Note que é suficiente encontrar uma permutação diádica P sobre I^n satisfazendo:

$$P(\sigma_i) \cap h(\sigma_i) \neq \varnothing \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, N.$$

Com efeito, nesse caso teremos:

$$|P(x) - h(x)| \leqslant \max_i \operatorname{diam}(\sigma_i) + \max_i \operatorname{diam}(h(\sigma_i)) < \varepsilon$$

para todo $x \in I^n$, sempre que $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande.

A fim de obter uma tal P, defina uma relação $R \subset \{\sigma_i\}_{i=1}^N \times \{\sigma_i\}_{i=1}^N$ da seguinte maneira:

$$\sigma_i R \sigma_j \iff \sigma_j \cap h(\sigma_i) \neq \varnothing.$$

Observe que, como h preserva volume, qualquer conjunto A formado por k cubos tem imagem $h(A)$ que possui o volume de k cubos e, portanto, $h(A)$ intersecta pelo menos k cubos.

Em outras palavras, a condição de Hall é satisfeita: $|A^R| \geqslant |A|$ para todo $A \subset \{\sigma_i\}_{i=1}^N$.

Portanto, pelo Lema 3.3 existe um R-casamento bijetivo $P : \{\sigma_i\}_{i=1}^N \to \{\sigma_i\}_{i=1}^N$ que satisfaz $P(\sigma_i) \cap h(\sigma_i) \neq \varnothing$ para cada $i = 1, \ldots, N$, como desejado.

□

Seja $\tau : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ uma permutação tal que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ para todo $k \neq i, j$ ($i \neq j$ fixos em $\{1, \ldots, N\}$). Neste caso, τ é dita *transposição do par* (i, j) e é denotada por $\tau_{i,j}$. Uma permutação τ é dita *transposição* se $\tau = \tau_{i,j}$ para algum par (i, j).

Agora vamos mostrar que a permutação P dada no resultado anterior pode ser tomada cíclica.

Note que, para isto, é suficiente mostrar que, dada uma permutação $P : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$, existe uma permutação cíclica $Q : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ "uniformemente próxima" de P no seguinte sentido: $|P(i) - Q(i)| \leqslant L$ para todo $i = 1, \ldots, N$, onde $L \in \mathbb{N}$ *independe* de N.

Com efeito, neste caso temos:

$$\begin{aligned}
|Q(x) - h(x)| &\leqslant |Q(x) - P(x)| + |P(x) - h(x)| \\
&\leqslant L \max_i \operatorname{diam}(\sigma_i) + \max_i \operatorname{diam}(\sigma_i) + \max_i \operatorname{diam}(h(\sigma_i)) \\
&= (L+1) \max_i \operatorname{diam}(\sigma_i) + \max \operatorname{diam}(h(\sigma_i)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $x \in I^n$, sempre que $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, uma vez que $L \in \mathbb{N}$ independe de N.

Abaixo mostramos que podemos considerar $L = 2$.

Lema 3.5. *Se $P : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ é uma permutação, então existe uma permutação cíclica $Q : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ tal que $|P(i) - Q(i)| \leqslant 2$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $N = 2m$ é um número par.

Definamos permutações $r_1, \ldots, r_m$ recursivamente da seguite maneira:

$$r_1 = \begin{cases} id, \text{se } 1 \text{ e } 2 \text{ pertencem a um mesmo ciclo de } P; \\ \tau_{1,2}, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que 1 e 2 pertencem a um mesmo ciclo de $r_1 \circ P$.

Para cada $1 < j \leqslant m$ defina:

$$r_j = \begin{cases} id, \text{se } 2j-1 \text{ e } 2j \text{ pertencem a um mesmo ciclo de } r_{j-1} \circ r_{j-2} \circ \cdots \circ r_1 \circ P; \\ \tau_{2j-1,2j}, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $2j - 1$ e $2j$ pertencem a um mesmo ciclo de $r_j \circ \cdots \circ r_1 \circ P$.

Escreva $R := r_m \circ \cdots \circ r_1$ e note que cada par da forma $(2k-1, 2k)$ pertence a um mesmo ciclo de $R \circ P$.

Além disso, como R é uma composição de transposições disjuntas de inteiros consecutivos, segue que $|R(j) - j| \leqslant 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Analogamente, definimos recursivamente permutações $s_1, \ldots, s_{m-1}$ para conectar os pares da forma $(2k, 2k+1)$ da seguinte maneira:

$$s_1 = \begin{cases} id, \text{se } 2 \text{ e } 3 \text{ pertencem a um mesmo ciclo de } R \circ P; \\ \tau_{2,3}, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que 2 e 3 pertencem a um mesmo ciclo de $s_1 \circ R \circ P$.

Para cada $1 < j \leqslant m - 1$ defina:

$$s_j = \begin{cases} id, \text{se } 2j \text{ e } 2j+1 \text{ pertencem a um mesmo ciclo de } s_{j-1} \circ \cdots \circ s_1 \circ R \circ P; \\ \tau_{2j,2j+1}, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $2j$ e $2j+1$ pertencem a um mesmo ciclo de $s_j \circ s_{j-1} \circ \cdots \circ s_1 \circ R \circ P$.

Escreva $S := s_{m-1} \circ \cdots \circ s_1$ e note que cada par da forma $(2k, 2k+1)$ pertence a um mesmo ciclo de $S \circ R \circ P$.

Também pela mesma razão como acima, $|S(j) - j| \leqslant 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Escreva $Q = S \circ R \circ P$.

Por construção, Q tem apenas um ciclo, ou seja, Q é uma permutação *cíclica* e, além disso, pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} |Q(j) - P(j)| &= |S \circ R \circ P(j) - P(j)| \\ &= |S \circ R(j') - j'| \\ &\leqslant |S(R(j')) - R(j')| + |R(j') - j'| \leqslant 2 \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

Isso prova o resultado no caso em que $N = 2m$ é um número par.

Se $N = 2m+1$ é um número ímpar, então usamos o mesmo procedimento durante os primeiros $2m$ passos e acrescentamos ao final uma permutação de tipo s como acima, digamos s_m, para obter uma permutação com um único ciclo.

$\square$

Portanto, pelos Lema 3.4 e Lema 3.5 obtemos o seguinte resultado fundamental:

Teorema 3.6. *Dados $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$, se $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então existe uma permutação diádica cíclica P de ordem m tal que $\|h - P\| < \varepsilon$.*

4 O Teorema de Oxtoby-Ulam

Neste último capítulo apresentaremos uma demonstração do Teorema de Oxtoby-Ulam. Seguindo [Alpern e Prasad 2001], faremos uso de uma versão do clássico Teorema de Lusin da teoria da medida.

Uma diferença importante em relação ao resultado clássico é que, em nosso contexto, há uma exigência adicional, a saber: a transformação bimensurável deverá ser aproximada por um homeomorfismo *que preserva volume*.

A fim de demonstrarmos essa versão do Teorema de Lusin vamos precisar de três lemas auxiliares que apresentamos agora.

Lema 4.1. *Dados* $g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ *e* $\delta, \gamma > 0$ *existe uma permutação diádica* $P \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ *tal que* $\mu(\{x : |g(x) - P(x)| \geqslant \delta\}) < \gamma$.

Ou seja, o conjunto das permutações diádicas é denso em $\mathcal{G}(I^n, \mu)$ *na topologia fraca.*

Demonstração. Fixe uma decomposição diádica $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ de I^n tal que diam $\sigma_i < \delta$ para cada $i = 1, \ldots, N$. Como g preserva volume, temos:

$$1 = \mu(I^n) = \mu(g^{-1}(I^n)) = \mu(g^{-1}(\cup_{i=1}^N \sigma_i)) = \mu(\cup_{i=1}^N g^{-1}(\sigma_i))$$

Daí, como μ é regular, para cada $i = 1, \ldots, N$ existe um conjunto compacto $C_i \subset g^{-1}(\sigma_i)$ tal que $\mu(\cup_{i=1}^N C_i) > 1 - \gamma/2$.

Seja $d = \min\{|x - y| : x \in C_i, y \in C_j, i \neq j\} > 0$ e considere $\{\tau_j\}_{j=1}^M$ alguma decomposição diádica de I^n que refina $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ com diam $\tau_j < d$ e $\mu(\tau_j) < \frac{1}{N} - \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \mu(C_i)$ para cada $j = 1, \ldots, M$.

Então, cada τ_j intersecta no máximo um conjunto C_i. Agora, considere S_i como sendo a união de todos os cubos τ_j que intersectam C_i. Defina P como uma permutação sobre $\{\tau_j\}_{j=1}^M$ da seguinte maneira: impomos $P(\tau_j) \subset \sigma_i$ sempre que $\tau_j \subset \sigma_i$ e, para os demais cubos τ_j, definimos de modo arbitrário.

Note que, como $S_{i_1} \cap C_{i_2} = \varnothing$ sempre que $i_1 \neq i_2$, tem-se:

$$\bigcup_{i=1}^N (C_i \cap S_i) = \left(\bigcup_{i=1}^N C_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^N S_i\right)$$

Seja S esse conjunto e observe que, como $1 - \gamma/2 < \mu(\cup_{i=1}^N C_i) \leqslant \mu(\cup_{i=1}^N S_i) \leqslant 1$, segue que $\mu(S) > 1 - \gamma/2 - \gamma/2 = 1 - \gamma$.

Por outro lado como $S = \bigcup_{i=1}^{N}(C_i \cap S_i)$, se $x \in S$, então $x \in C_i \cap S_i$ para algum $i = 1, \dots N$. Daí, como $C_i \subset g^{-1}(\sigma_i)$, obtemos $g(x) \in \sigma_i$. Também, pela definição de P temos $P(x) \in \sigma_i$. Consequentemente, $|g(x) - P(x)| < \delta$ para cada $x \in S$, o que finaliza a demonstração.

□

Lema 4.2. *Seja $F \subset \{1, \dots, N\}$ não-vazio e considere $\hat{Q} : F \to \{1, \dots, N\}$ injetiva. Então, existe uma permutação $Q : \{1, \dots, N\} :\to \{1, \dots, N\}$ que estende $\hat{Q}$ e satisfaz $|j - Q(j)| \leqslant \#F$ sempre que $j \notin F$, onde $\#F$ denota a cardinalidade do conjunto F.*

Demonstração. Defina Q como sendo $\hat{Q}$ sobre F e como sendo $\widetilde{Q}$ sobre o complementar $\widetilde{F}$ de F, onde $\widetilde{Q}$ é a única bijeção que preserva a ordem de $\widetilde{F}$ sobre o complementar $\widetilde{QF}$ de QF.

Em outras palavras, se $j \in \widetilde{F}$ e $\widetilde{Q}j = j'$, então

$$q = \#\{k : k \in \widetilde{F}, k \leqslant j\} = \#\{l : l \in \widetilde{\hat{Q}F}, l \leqslant j'\}.$$

Daí, temos $j - \#F \leqslant q \leqslant j$ e, como $\widetilde{Q}$ é uma bijeção que preserva ordem e $\hat{Q}$ é injetiva, segue que $j' - \#\hat{Q}F \leqslant q \leqslant j'$. Logo, como $\#F = \#\hat{Q}F$ (pois $\hat{Q}$ é injetiva), temos $j - \#F \leqslant q \leqslant j'$ e $j' - \#F \leqslant q \leqslant j$, o que implica $|j - j'| \leqslant \#F$.

Isto conclui a demonstração. □

Observação 4.3. O Lema 4.2 nos diz que podemos estender $\hat{Q}$ a uma permutação que é "controlada" sobre o complementar $\widetilde{F}$ de F. Além disso, observe que a relevância da conclusão do Lema 4.2 é evidenciada no casos em que N é muito maior que $\#F$.

Agora, recorde que se μ denota a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ (ou seja, o volume n-dimensional) e $h : U \to U$ é um homeomorfismo sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(h(A)) > 0$ sempre que $\mu(A) > 0$ ($A \subset U$ mensurável), então

$$\mu(h(A)) = \int_A |Jh(x)| d\mu(x),$$

onde $|Jh(x)|$ denota o *Jacobiano generalizado* de h no ponto x relativamente a μ.

Para esta noção mais geral de Jacobiano, veja a seção 9.7 de [Viana e Oliveira 2016].

Este fato será útil no próximo lema.

Lema 4.4. *Sejam $\varepsilon, \gamma > 0$ e P uma permutação diádica sobre I^n com $\|P\| < \varepsilon$.*

Então, existe $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ que coincide com a identidade sobre a fronteira de I^n com $\|h\| < \varepsilon$ e que satisfaz $\mu(\{x : h(x) \neq P(x)\}) < \gamma$.

Demonstração. Fixe $0 < \|P\| < \varepsilon' < \varepsilon$ e suponha que P é uma permutação sobre uma decomposição diádica $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ tal que diam $\sigma_i < \theta$ para cada $i = 1, \dots, N$, onde $\theta > 0$ é um parâmetro pequeno a ser determinado.

Pelo Lema 2.3, existe $f \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ que coincide com a identidade sobre a fronteira de I^n com $\|f\| < \varepsilon'$ e que envia uma vizinhança de cada centro de $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ sobre uma vizinhança da imagem por P do correspondente centro.

Daí, existe $0 < \alpha < 1$ tal que, se σ_i^α é um pequeno cubo concêntrico a σ_i com $\mu(\sigma_i^\alpha)/\mu(\sigma_i) = \alpha$ para todo $i = 1, \dots, N$, então $\mu(\{x : f(x) \neq P(x)\}) \leqslant 1 - \alpha$.

O problema é que tal $0 < \alpha < 1$ pode ser muito pequeno, de modo que é possível que não se tenha $1 - \alpha < \gamma$.

Vamos mostrar que, dado $\beta > \max\{\alpha, 1 - \gamma\}$ podemos encontrar cubos σ_i^β concêntricos a σ_i com $\mu(\sigma_i^\beta)/\mu(\sigma_i) = \beta$ e um outro homeomorfismo $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ que coincide com P sobre cada σ_i^β $(i = 1, \dots, N)$.

Com efeito, fixe $\beta > \max\{\alpha, 1 - \gamma\}$ e considere $r : [0, 1] \to [0, 1]$ a função linear por partes determinada por $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ e $r(\alpha) = \beta$.

Em outras palavras,

$$r(t) = \begin{cases} (\beta/\alpha)t, \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}(t - \alpha) + \beta, \text{se } \alpha \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Agora, para cada $i = 1, \dots, N$ considere $\widetilde{h}_i : \sigma_i \to \sigma_i$ o homeomorfismo que aplica linear e radialmente a fronteira de σ_i^t sobre a fronteira do cubo concêntrico $\sigma_i^{r(t)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Defina $\widetilde{h}(x) := \widetilde{h}_i(x)$ $(x \in \sigma_i, i = 1, \dots, N)$.

Então, $\widetilde{h}$ deixa invariante cada cubo σ_i, o que implica $\|\widetilde{h}\| \leqslant \operatorname{diam} \sigma_i < \theta$.

Agora, considere $h := \widetilde{h} \circ f \circ \widetilde{h}^{-1}$. Vamos mostrar que h satisfaz as condições desejadas.

De fato, segue imediatamente das definições de f e $\widetilde{h}$ que h coincide com P em cada cubo σ_i^β e, portanto, $\mu(\{x : h(x) \neq P(x)\}) \leqslant 1 - \beta < \gamma$.

Além disso, como h coincide com P sobre cada cubo σ_i^β e P obviamente preserva volume, a fim de verificarmos que h também preserva volume é suficiente mostrar que $\mu(h(A)) = \mu(A)$ para cada conjunto mensurável $A \subset I^n \setminus \bigcup_{i=1}^N \sigma_i^\beta$.

Para tal, observe que como $\widetilde{h}$ aplica linearmente a fronteira de σ_i^t sobre a fronteira de $\sigma_i^{r(t)}$, segue que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ com $|J\widetilde{h}(x)| \equiv c_1$ para μ-q.t.p. $x \in \operatorname{int}(\sigma_i^\alpha)$ e $|J\widetilde{h}(y)| \equiv c_2$ para μ-q.t.p. $y \in \operatorname{int}(\sigma_i) \setminus \sigma_i^\alpha$.

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
c_1\alpha\mu(\sigma_i) &= c_1\mu(\sigma_i^\alpha)\\
&= \int_{\sigma_i^\alpha} |J\widetilde{h}(x)|d\mu(x)\\
&= \mu(\widetilde{h}(\sigma_i^\alpha))\\
&= \mu(\sigma_i^\beta)\\
&= \beta\mu(\sigma_i),
\end{aligned}
$$

o que implica $c_1 = (\beta/\alpha)$.

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
c_2(1-\alpha)\mu(\sigma_i) &= c_2\mu(\sigma_i \setminus \sigma_i^\alpha)\\
&= \int_{\sigma_i\setminus\sigma_i^\alpha} |J\widetilde{h}(x)|d\mu(x)\\
&= \mu(\widetilde{h}(\sigma_i \setminus \sigma_i^\alpha))\\
&= \mu(\widetilde{h}(\sigma_i) \setminus \widetilde{h}(\sigma_i^\alpha))\\
&= \mu(\sigma_i \setminus \sigma_i^\beta)\\
&= (1-\beta)\mu(\sigma_i),
\end{aligned}
$$

o que implica $c_2 = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$.

Portanto, se $A \subset I^n \setminus \bigcup_{i=1}^N \sigma_i^\beta$ é mensurável, então como f preserva o volume, temos:

$$
\begin{aligned}
\mu(h(A)) &= \mu(\widetilde{h} \circ f \circ \widetilde{h}^{-1}(A))\\
&= \mu(\widetilde{h}(f \circ \widetilde{h}^{-1}(A)))\\
&= \frac{1-\beta}{1-\alpha}\mu(f \circ \widetilde{h}^{-1}(A))\\
&= \frac{1-\beta}{1-\alpha}\mu(\widetilde{h}^{-1}(A))\\
&= \frac{1-\beta}{1-\alpha}\frac{1-\alpha}{1-\beta}\mu(A)\\
&= \mu(A).
\end{aligned}
$$

Por fim, note que

$$
\begin{aligned}
\|h\| &= \|\widetilde{h} \circ f \circ \widetilde{h}^{-1}\|\\
&\leqslant \|\widetilde{h}\| + \|f\| + \|\widetilde{h}^{-1}\|\\
&= \|f\| + 2\|\widetilde{h}\|\\
&< \varepsilon' + 2\theta\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

sempre que $\theta > 0$ é suficientemente pequeno.

Isto conclui a demonstração. $\square$

Teorema 4.5. ***(Teorema de Lusin com preservação de volume)***

Sejam $n \geqslant 2$ e $g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ com $\|g\| < \varepsilon$. Dados $\delta > 0$ e $\gamma > 0$, existe $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ com $\|h\| < \varepsilon$ que coincide com a identidade na fronteira de I^n e satisfaz:

$$\mu(\{x \in I^n : |g(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) < \gamma.$$

Demonstração. Fixe $0 < \alpha < \min\{\frac{\varepsilon - \|g\|}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ e considere uma decomposição diádica arbitrária $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ com $\operatorname{diam}(\tau_i) < \frac{\alpha}{2}$. Podemos supor que a enumeração dos índices de $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ é tal que cubos com índices consecutivos possuam uma face em comum.

Agora, fixe $0 < \beta < \min\{\frac{1}{l}, \gamma\}$. Pelo Lema 4.1 existe uma permutação diádica R tal que $\mu(\{x \in I^n : |g(x) - R(x)| \geqslant \alpha\}) < \beta$.

Podemos ver R como uma permutação diádica sobre uma decomposição diádica $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N}$ que refina $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$, onde $N = kl$ com $k \in \mathbb{N}$.

Enumere os cubos σ_j tal que $\sigma_j \subset \tau_i$ se e somente se $(i-1)k < j \leqslant ik$.

Portanto, dados $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|j_1 - j_2| \leqslant k$, tem-se que σ_{j_1} e σ_{j_2} estão contidos em cubos adjacentes de $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ ou estão contidos em um mesmo mesmo cubo.

Afirmação: Se $|j_1 - j_2| \leqslant k$, então $\operatorname{diam}(\sigma_{j_1} \cup \sigma_{j_2}) < \alpha$.

De fato, sejam $x \in \sigma_{j_1}$ e $y \in \sigma_{j_2}$ quaisquer com $|j_1 - j_2| \leqslant k$.

Então, existem $i_1, i_2 \in \{1, \cdots, l\}$ com $|i_1 - i_2| \leqslant 1$ tais que $x \in \tau_{i_1}$ e $y \in \tau_{i_2}$.

Portanto, tomando $z \in \tau_{i_1} \cap \tau_{i_2}$ tem-se

$$|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y| \leqslant \operatorname{diam}(\tau_{i_1}) + \operatorname{diam}(\tau_{i_2}) < \alpha,$$

o que prova a afirmação.

Agora, vamos aproximar fracamente a permutação diádica R por uma aproximação diádica P tal que $\|P\| < \varepsilon$.

Defina $B = \{x \in I^n : |R(x) - x| \geqslant \|g\| + \alpha\}$.

Afirmação: B é uma união de cubos diádicos σ_j.

Com efeito, seja $x \in B$ arbitrário e considere $j \in \{1, \cdots, N\}$ tal que $x \in \sigma_j$. Fixe $y \in \sigma_j$ qualquer e observe que, como R é uma permutação dos cubos $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N}$, tem-se $|y - R(y)| = |x - R(x)| \geqslant |g| + \alpha$, o que mostra que $\sigma_j \subset B$. Ou seja, se um ponto de um cubo σ_j pertence a B, então todos os pontos do cubo σ_j pertencem a B. Portanto, B é uma união de cubos diádicos σ_j.

Agora, escreva $S = \{x \in I^n : |g(x) - R(x)| \geqslant \alpha\}$.

Afirmação: $B \subset S$.

Com efeito, tome $x \in B$ qualquer. Então,

$|g(x) - R(x)| \geqslant |R(x) - x| - |g(x) - x| \geqslant \|g\| + \alpha - \|g\| = \alpha$.

Ou seja, $x \in S$, o que prova a afirmação.

Daí, como $\mu(B) < \beta < \frac{1}{l}$ e $N = k.l$, segue que o número de cubos da decomposição $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N}$ cuja união é B é menor do que k.

Agora, defina $\overline{Q} : R(B) \to I^n$ como sendo a restrição de R^{-1} a $R(B)$. Observe que $\overline{Q} \circ R$ é a identidade sobre B. Como $\overline{Q}$ é uma permutação de cubos σ_j, podemos ver $\overline{Q}$ como uma transformação dos índices dos cubos. Dessa forma, escreva:

$\overline{Q} : F \to \{1, \cdots, N\}$, onde $F = \{j : R^{-1}(\sigma_j) \subset B\}$.

Como $\overline{Q}$ é injetiva, pelo Lema 4.2 existe uma permutação Q que estende $\overline{Q}$ tal que $|j - Q(j)| \leq \#(F) \leqslant k$ sempre que $j \notin F$.

Defina $P = Q \circ R$.

Afirmação: $\|P\| < \varepsilon$.

Primeiro, note que P é a identidade sobre os cubos de B. Além disso, se $y \notin B$ e $R(y) \in \sigma_{j_1}$ então $QR(y) \in \sigma_{j_2}$ para algum $j_2 \in \{1, \cdots, N\}$ tal que $|j_1 - j_2| \leqslant k$.

Como, $\text{diam}(\sigma_{j_1} \cup \sigma_{j_2}) < \alpha$, segue que $|R(y) - Q \circ R(y)| < \alpha$.

Portanto, $|y - R(y)| < \|g\| + \alpha$ e $|R(y) - P(y)| < \alpha$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |y - P(y)| &= |y - Q \circ R(y)| \\ &\leqslant |y - R(y)| + |R(y) - Q \circ R(y)| \\ &< (\|g\| + \alpha) + \alpha \\ &< \|g\| + 2\Big(\frac{\varepsilon - \|g\|}{2}\Big) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação.

Defina $A = \{x \in I^n : |g(x) - P(x)| \geqslant \delta\}$.

Afirmação: $\mu(A) < \gamma$.

Defina $U = \{x \in I^n : |g(x) - R(x)| < \alpha\}$. Note que, se $x \in U$, então

$$|g(x) - P(x)| \leqslant |g(x) - R(x)| + |R(x) - P(x)| < \alpha + \alpha < \delta,$$

o que mostra que $A \subset U^c$. Como $\mu(U^c) < \beta < \gamma$, temos $\mu(A) < \gamma$, o que prova a afirmação.

Como $\gamma - \mu(A) > 0$, pelo Lema 4.4 existe $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ com $\|h\| < \varepsilon$ coincidindo com a identidade na fronteira de I^n tal que:

$\mu(\{x \in I^n : P(x) \neq h(x)\}) < \gamma - \mu(A)$.

Por fim, mostremos que $\mu(\{x \in I^n : |g(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) < \gamma$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : |g(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) \leqslant& \\
&\leqslant \mu(\{x : |g(x) - P(x)| \geqslant \delta\}) + \mu(\{x : |P(x) - h(x)| \geqslant \delta\}) \\
&\leqslant \mu(\{x : |g(x) - P(x)| \geqslant \delta\}) + \mu(\{x \in I^n : P(x) \neq h(x)\}) \\
&< \mu(A) + \gamma - \mu(A) = \gamma.
\end{aligned}$$

O teorema está demonstrado.

□

O próximo resultado nos dá uma condição necessária para que se possa aproximar todo homeomorfismo $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$, na topologia uniforme, por automorfismos $g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ que, a princípio, podem ser descontínuos.

Teorema 4.6. *Seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ um conjunto do tipo G_δ na topologia fraca.*

Se $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{V}}^{uniforme}$, então $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é um conjunto G_δ denso em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme.

Demonstração. Primeiro provaremos que o resultado é verdadeiro no caso particular em que todos os abertos que compõem $\mathcal{V}$ são iguais; em outras palavras, suponha que $\mathcal{V}$ é um aberto na topologia fraca. Como a topologia uniforme é mais fina que a topologia fraca, $\mathcal{V}$ é aberto em $\mathcal{G}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme e, portanto, $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é aberto em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme.

Afirmação: $\mathcal{V}$ é denso em $\mathcal{G}(I^n, \mu)$ na topologia fraca.

Com efeito, por hipótese, temos: $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{V}}^{\text{uniforme}} \subset \overline{\mathcal{V}}^{\text{fraco}} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$. Além disso, o Teorema 4.5 nos diz que $\overline{\mathcal{H}(I^n, \mu)}^{\text{fraco}} = \mathcal{G}(I^n, \mu)$.

Portanto, segue que $\overline{\mathcal{V}}^{\text{fraco}} = \mathcal{G}(I^n, \mu)$, como queríamos.

Para mostrar que $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é denso na topologia uniforme em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$, vamos mostrar que $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu) \cap B_u(f, \varepsilon) \neq \emptyset$ para toda bola uniforme $B_u(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{G}(I^n, \mu) : d_u(f, g) < \varepsilon\}$ centrada em $f \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$.

Tome $f \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários.

Afirmação: O conjunto $\mathcal{V}f^{-1} = \{cf^{-1} : c \in \mathcal{V}\}$ é aberto na topologia fraca.

Seja $x \in \mathcal{V}f^{-1}$ e tome $g \in \mathcal{V}$ tal que $x = gf^{-1}$. Como $\mathcal{V}$ é aberto na topologia fraca, existe $r > 0$ tal que $B_w(g, r) \subset \mathcal{V}$. Provaremos que $B_w(x, r) \subset \mathcal{V}f^{-1}$. Com efeito tome $y \in B_w(x,r)$ arbitrário. Então, $d_w(y, gf^{-1}) < r$ e, como f preserva μ, segue que $d_w(yf, g) < r$. Isso mostra que $yf \in B_w(g,r) \subset \mathcal{V}$, o que implica $y \in \mathcal{V}f^{-1}$. Logo, $B_w(x,r) \subset \mathcal{V}f^{-1}$, o que prova a afirmação.

Agora, recorde a métrica uniforme sobre $\mathcal{G}(I^n, \mu)$:

$$\begin{aligned} d_u(g,f) &= \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x \in I^n : |g(x) - f(x)| \geqslant \delta\}) = 0\} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I^n} |gf^{-1}(x) - x| = \|gf^{-1}\| \end{aligned}$$

Recorde que, restrita à $\mathcal{H}(I^n, \mu)$, d_u coincide com a métrica do supremo. (Proposição 1.29).

Como $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{V}}^{\text{uniforme}}$, existe $g_0 \in \mathcal{V} \cap B_u(f, \varepsilon)$. Daí, temos $\|g_0 f^{-1}\| < \varepsilon$ com $g_0 f^{-1} \in \mathcal{V}f^{-1}$. Como $\mathcal{V}f^{-1}$ é um conjunto aberto na topologia fraca, pelo Teorema 4.5 existe $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ com $\|h\| < \varepsilon$ que coincide com a identidade na fronteira de I^n tal que $h \in \mathcal{V}f^{-1}$.

Consequentemente $h \circ f \in \mathcal{V}$ e, além disso:

$\sup_{x \in I^n} |h \circ f(x) - f(x)| = \sup_{x \in I^n} |h(x) - x| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in I^n} |h(x) - x| = \|h\| < \varepsilon.$

Daí, $h \circ f \in B_u(f, \varepsilon)$ e, portanto, $h \circ f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu) \cap B_u(f, \varepsilon)$. Isso mostra que $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é denso em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme.

Agora consideramos o caso G_δ geral.

Suponha $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$, onde $\mathcal{V}_i$ é aberto na topologia fraca ($i \in \mathbb{N}$).

Como $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{V}}^{\text{uniforme}} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{V}_i}^{\text{uniforme}}$, vemos que $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{V}_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Pela primeira parte concluímos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é um aberto denso na topologia uniforme de $\mathcal{H}(I^n, \mu)$.

Daí, vemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{V}_i \cap \mathcal{H}(I^n, \mu))$ é uma interseção contável de conjuntos abertos e densos na topologia uniforme de $\mathcal{H}(I^n, \mu)$. Logo, como $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ é topologicamente completo, segue do Teorema de Baire que $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é um G_δ denso na topologia uniforme de $\mathcal{H}(I^n, \mu)$.

□

O próximo resultado fornece uma ligação entre permutações cíclicas e ergodicidade.

Teorema 4.7. *Seja P uma permutação diádica cíclica sobre uma decomposição $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ de I^n. Existe $f \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ ergódico tal que $\|P - f\| \leqslant diam(\sigma_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, onde $\|.\|$ denota a métrica uniforme e $diam(\sigma_i)$ denota o diâmetro de σ_i.*

Demonstração. Por hipótese, temos $P(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ para $1 \leqslant i < N$ e $P(\sigma_N) = \sigma_1$. Considere $g \in \mathcal{G}(\sigma_1, \mu)$ automorfismo ergódico sobre σ_1 (Proposição 1.18). Estenda g como sendo a identidade fora de σ_1, denote-o ainda por g, e defina $f = g \circ P$.

Afirmação: $f \in \mathcal{E}$.

Suponha falso; então, existe um conjunto $S \subset I^n$ com $0 < \mu(S) < 1$ tal que $f(S) = S$. Defina, para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, $S_i = S \cap \sigma_i$. É claro que $0 < \mu(S_i) < 1$ e, pelas definições de f e de S_i temos $f^N(S_i) = S_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$. Mas, note que $g(S_1) = f^N(S_1) = S_1$, ou seja, S_1 é um conjunto g-invariante com medida entre 0 e 1, o que contradiz a ergodicidade de g. Isso prova a afirmação.

Por fim, note que $|P(x) - g \circ P(x)| > 0$ se e somente se $x \in \sigma_N$, pois $g(x) = x$ para todo $x \in \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \cdots \cup \sigma_N$. Além disso, como $P(\sigma_N) = \sigma_1$, vemos que $P(x) \in \sigma_1$ e $g \circ P(x) \in \sigma_1$ sempre que $x \in \sigma_N$. Logo, segue que $\mu(\{x : |P(x) - g \circ P(x)| \geqslant \operatorname{diam}(\sigma_1)\}) = 0$, o que implica $\|P - f\| \leqslant \operatorname{diam}(\sigma_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$. □

Agora estamos em condições de demonstrar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.8. ***(Oxtoby-Ulam)***

Os homeomorfismos ergódicos que preservam volume sobre I^n formam um conjunto residual em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme.

Em outras paralvras, a ergodicidade é genérica em $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ na topologia uniforme.

Demonstração. Denote por $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto dos automorfismos ergódicos que preservam o volume sobre I^n. Pelo Teorema 1.35, $\mathcal{E}$ é um conjunto G_δ na topologia fraca. Portanto, pelo Teorema 4.6 é suficiente mostrar que $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{\text{uniforme}}$.

Para tal, fixe $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários.

Pelo Teorema 3.6 existe uma permutação diádica cíclica P sobre uma decomposição diádica $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ tal que $\|h - P\| < \varepsilon$. Aumentando a ordem de $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, se necessário, podemos supor que $\max \operatorname{diam}(\sigma_i) < \varepsilon$.

Daí, pelo Teorema 4.7 existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $\|P - f\| \leqslant \max \operatorname{diam}(\sigma_i) < \varepsilon$.

Portanto, $\|h - f\| < 2\varepsilon$, o que conclui a demonstração.

□

Referências

ALPERN, S. Approximation to and by measure preserving homeomorphisms. *J.London.Math.Soc. (2)*, n. 18, p. 305–315, 1978. Citado na página 29.

ALPERN, S.; PRASAD, V. *Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms.* [S.l.]: Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2001. v. 139. Citado 3 vezes nas páginas 14, 39 e 43.

DUGUNDJI, J. *Topology.* [S.l.]: Allyn and Bacon, Inc, 1966. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 25 e 26.

HALMOS, P. *Lectures on Ergodic Theory.* [S.l.]: Chelsea Publishing Company, 1956. Citado na página 29.

HALMOS, P. *Measure Theory.* [S.l.]: Springer-Verlag, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.

OXTOBY, J. C.; ULAM, S. M. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. of Math. (2)*, v. 42, n. 4, p. 874–920, 1941. Citado na página 14.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* [S.l.]: Mc-Graw Hill International Editions, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Foundations on Ergodic Theory.* [S.l.]: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2016. v. 151. Citado na página 44.