UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

GABRIEL HENRIQUE PARISOTO

FOR GÖDEL’S SAKE

Blumenau
2021

Gabriel Henrique Parisoto

FOR GÖDEL'S SAKE

Trabalho Conclusão do Curso em Licenciatura em Matemática do Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa
.

Blumenau
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Parisoto, Gabriel Henrique
For Gödel's sake / Gabriel Henrique Parisoto ;
orientador, Júlio Faria Corrêa, 2021.
83 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teorema da Incompletude de Godel. 3.
Filosofia da Matemática. 4. Formação de Professores. 5.
História da Matemática. I. Corrêa, Júlio Faria. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Matemática. III. Título.

Gabriel Henrique Parisoto

FOR GÖDEL’S SAKE

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 17 de maio de 2021.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 24/05/2021 14:08:50-0300
CPF: 045.818.289-37
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Júlio Faria Corrêa, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.ª Rejane Siqueira Julio, Dra.
Avaliadora
Universidade Federal de Alfenas

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho para as pessoas honestas intelectualmente e vorazes por conhecimento.

AGRADECIMENTOS

É difícil transcrever sentimentos em palavras. É difícil agradecer tantos aprendizados durante os últimos anos em poucas frases. É difícil passar por tantas etapas durante a vida sem apoio algum em tempos sombrios. Nascemos, aprendemos, erramos, ensinamos, trabalhamos e conhecemos pessoas que jogam luz sobre nossas sombras. Umas dão sinal que vão para a esquerda, outras para direita. Algumas deixam em farol alto e acaba nos cegando, outras deixam em farol baixo e acabam facilitando nosso caminho com a pouca luz que possuímos. Por isso, agradeço a todas as pessoas que jogaram luz sobre minhas sombras.

Agradeço ao meu pai que é falecido há mais de 5 anos e ainda tem o que me ensinar. Essencialmente, sou grato às pessoas que jogaram luz na vasta escuridão em que me encontrei ao perdê-lo de forma inesperada: mãe, irmãs, cunhado, tios, tias, amigos e amigas.

Agradeço a diversas mentes brilhantes que despejaram suas faíscas em minhas concepções de vida, trabalho, estudo, caráter e honestidade. Há as que estão falecidas há séculos, mas suas ideias permaneceram. Há os vivos que impactaram de forma positiva para toda minha formação intelectual até o momento.

Ao professor Dr. André Vanderlinde da Silva que, além da gentileza em compor a banca de avaliação deste trabalho, foi meu primeiro orientador durante o curso. Sou extremamente grato por todas as conversas, caronas, aprendizados e lições de vida que ascenderam concepções importantes em minha mente sobre o significado da vida e da matemática.

Agradeço a professora Dra. Rejane Siqueira Júlio por aceitar compor a banca de avaliação deste trabalho e contribuir ainda mais com o meu crescimento intelectual.

Aos professores, Dr. Felipe Vieira e Dra. Louise Reips, deixo meus singelos agradecimentos por me fornecerem oportunidades de crescimento intelectual e como docente nos últimos anos. Apesar de nunca ter tido aulas com eles, sempre foram grandes amigos, conselheiros e, substancialmente, professores.

Ao meu excelentíssimo orientador, Dr. Júlio Faria Corrêa, agradeço infinitamente pelas conversas que tivemos formalmente e informalmente. Todas elas agregaram positivamente para o meu crescimento como ser humano e minha honestidade intelectual. Sempre foi assíduo como orientador e professor, bem como um grande companheiro de boas conversas filosóficas e boas risadas. Este, contribuiu de forma ímpar para a conclusão desse trabalho em todos os sentidos.

A todos os meus amigos que tive a honra de dividir um tempo de suas vidas com a minha. Foram momentos de felicidade, frustração, loucura, desespero, trabalho, estudo, etc. Nada que uma boa cerveja para aliviar o estresse e infinitas horas na padaria para descansar e voltar a estudar/trabalhar.

O mais profundo dos agradecimentos vai para a minha família. Este, não pode ser escrito. Será demonstrado.

Por fim, agradeço a honra de ter estudado na Universidade Federal de Santa Catarina no campus Blumenau por ter conhecido tantas pessoas de diferentes culturas e costumes e, particularmente, a todos os professores que de algum modo, me ensinaram a agir de forma calma no meio do desespero.

Obrigado!

Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar.
(Esopo)

RESUMO

O Teorema da Incompletude de Gödel surge para quebrar paradigmas relacionados com a matemática. Paradigmas, estes, que serão abordados através do contexto histórico de seu surgimento no final do século XIX e no século XX que estavam relacionados intimamente com o projeto formalista de Hilbert. Esta quebra de paradigmas traz consigo não somente uma mudança nas concepções acerca da matemática, mas nas indagações e falácias sobre a mesma, utilizando o Teorema da Incompletude como argumento. Além da revolução na filosofia da matemática que Kurt Gödel trouxe, surgiram impactos na própria forma como concebemos esta ciência e, mais ainda, como a ensinamos. Com isso, este trabalho busca compreender o contexto histórico, as ideias inovadoras na demonstração desse teorema e relacioná-lo brevemente com os trabalhos de Alfred Tarski em sua concepção semântica da verdade. Também, por ser importante, desmistificaremos as falácias que o circundam para que, por fim, para que seja possível ensinar com foco naquilo que esse teorema realmente trata e o que ele implica filosoficamente no que se entende por matemática. Realizamos algumas sugestões de como esse teorema pode ser abordado em diferentes disciplinas no curso de licenciatura em matemática da UFSC de Blumenau a partir de seu projeto pedagógico de 2017.

Palavras-chave: Filosofia da Matemática. Kurt Gödel. Teorema da Incompletude. Formação de Professores

ABSTRACT

Gödel's Incompleteness Theorem arises to break paradigms related to mathematics. These paradigms, which will be addressed through the historical context of its emergence at the end of the nineteenth and at the twentieth century, were closely related to Hilbert's formalist project. This breaking of concepts brings with it not only a change in the conceptions about mathematics, but inquiries and fallacies about it, using the Incompleteness Theorem as an argument. Besides the revolution in philosophy of mathematics that Kurt Gödel brought, there was also an impact on the very way we conceive this science and, even more, how we teach it. So, this paper seeks to understand the historical context, the innovative ideas in the demonstration of this theorem, and to relate it briefly to the works of Alfred Tarski in his semantic conception of truth. Also, because it is important, we will demystify the fallacies that surround it so that, finally, so that it is possible to teach with a focus on what this theorem really deals with and what it implies philosophically in what is meant by mathematics. We made some suggestions on how this theorem can be approached in different disciplines in the mathematics degree course at UFSC in Blumenau from its 2017 pedagogical project.

Keywords: Philosophy of Mathematics. Kurt Gödel. Imcompleteness Theorem. Teacher Training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Kurt Gödel, conhecido como "Sr. Por quê", devido a tantas indagações que fazia e por ser extremamente curioso, surge com uma resposta arrebatadora para os sistemas matemáticos axiomatizados, consistentes e dotados minimamente de soma e multiplicação. O problema consiste em considerar a suficiência destes sistemas em expressar todas as sentenças que afirmam algo a respeito dele próprio. Entretanto, a resposta de Gödel, afirma que qualquer sistema consistente e capaz de expressar a aritmética básica é incompleto e, mais ainda, se um sistema capaz de expressar a aritmética básica é consistente, sua consistência não pode ser provada a partir de seus axiomas.

A partir disso, surgem espantos naturais. O que o levou a afirmar com tanta certeza que tais sistemas são insuficientes? Isto é, como ele pôde demonstrar tal afirmação? Até onde isso perturbou os matemáticos? Há alguma relação inerente com a mente humana e esse teorema? É, ele, uma prova da limitação de nossas capacidades cognitivas e matemáticas? Qual a sua importância para o ensino e aprendizagem da matemática?

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é compreender o contexto relacionado com o Teorema da Incompletude de Gödel, sua demonstração e implicações filosóficas, afim de responder tais questionamentos. O foco do trabalho, também, é a possibilidade de pensar, através desse teorema, como um meio de alavancar a forma como pensamos a formação de professores de matemática em relação a forma como concebem a matemática. Em vista disso, o presente trabalho está subdividido em quatro seções, salvo o resumo, a introdução, considerações finais e referência.

O primeiro, trata brevemente sobre o contexto do surgimento do Teorema da Incompletude através das ideias de Thomas Kuhn sobre paradigmas, ou seja, nele é enfatizado que esse teorema causa uma quebra de paradigma na matemática.

O segundo, discute substancialmente a ideia principal da demonstração do resultado de Gödel. É visto uma ideia de paradoxos, da numeração Gödeliana e, por fim, uma relação com os resultados de Alfred Tarski no que diz respeito aos conceitos de verdade e demonstrabilidade de Teorema da Incompletude.

O terceiro, o mais curto das seções, porém de suma importância para este trabalho, aborda uma entrevista fictícia de um jornalista e Kurt Gödel. Nessa entrevista, são ditas falácias sobre o trabalho de Gödel e, evidentemente, o "próprio" irá desmentir todas elas. Também, como está explicado inicialmente nesse capítulo, algumas falas de Gödel na entrevista são realmente verdades, ou seja, são citações do próprio que foram encontradas em um artigo escrito por ele.

O quarto e última seção do desenvolvimento, trata-se de uma possível abordagem desse teorema no curso de matemática da UFSC-BLUMENAU baseado nas ideias da tese de doutorado *O Teorema da Incompletude* de Gödel em *cursos* de Licenciatura em *Matemática da professora Rosemeire de Fátima Batistela e do próprio Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de matemática da UFSC-BLUMENAU.*

2 **UM CONTEXTO PARADIGMÁTICO**

Pode-se afirmar que, em razão do processo evolutivo da sociedade no qual vivemos, o pensamento filosófico em diversas áreas do conhecimento tornou-se essencial no momento em que os argumentos construídos em volta do mesmo abalaram a comunidade científica vigente e, posteriormente, todo o âmbito cultural. Reflexões estas que encadearam um avanço prolífero na forma como enxergamos o mundo. Em particular, as denominadas Ciências Exatas foram amplamente desenvolvidas a partir de respostas a problemáticas que surgiram ao longo da história e, também, deixam perguntas cuja solução ainda é imprevisível[1].

Todas essas questões envolveram, de certa forma, o que Thomas Kuhn define como "paradigmas" já na introdução de seu livro A estrutura das revoluções científicas. "Paradigmas são as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência" (1997, p. 13).

Em outras palavras, paradigmas são teorias científicas que passaram por um processo de convencimento sobre os cientistas de uma época. Isto é, uma teoria que está em prática há anos, acaba sofrendo uma crítica, uma "quebra" ou uma evolução em seus fundamentos. Com isso, é preciso uma série de argumentos teóricos e científicos para que essa teoria seja alterada[2].

Uma teoria, no caso da matemática, é a puramente lógica e abstrata, e não depende da confirmação de argumentos empíricos. Ou seja, em última análise, não há vínculos com a experiência sensorial humana e, dessa forma, as afirmações presentes nela não são escolhidas porque concordam com a observação, mas com a dedução. Logo, trata-se do conhecido *método axiomático*.[3]

---

[1] Para saciar a curiosidade do leitor, deixo como sugestão o artigo de Steve Smale (1998) intitulado **Mathematical Problems for the Next Century** onde é apresentado alguns problemas em aberto na matemática. Pode ser encontrado em https://www.cityu.edu.hk/ma/doc/people/smales/pap104.pdf. Data de acesso: 20/05/2021

[2] Da mesma forma como Rafael Bombelli investigou a fórmula geral que solucionava equações do terceiro grau, de Nicoló Fontana (Tartaglia), quebrou a concepção de que não existiam soluções envolvendo raízes de números negativos e, posteriormente, emergiu uma nova teoria sobre os conjuntos numéricos: o conjunto dos números complexos.

[3] De acordo com Ernest Nagel (2007), "o método axiomático consiste em aceitar sem prova certas proposições como axiomas ou postulados e depois derivar dos axiomas todas as proposições do sistema como teoremas. Os axiomas constituem os "fundamentos" do sistema; os teoremas são a "superestrutura" e são obtidos a partir dos axiomas com a ajuda exclusiva dos princípios da lógica". A servir de exemplo, considere os axiomas de Dedekind-Peano. Por sua vez, trata-se de uma teoria que visa explicar, de forma lógica, afirmações que se referem

Evidentemente, todas essas teorias não surgem do nada. Elas são fragmentos reconstruídos de outras teorias, estas por sua vez, deixam de explicar fenômenos que passam a ser percebidos pelas novas investigações que suscitam a necessidade de novos conceitos[4]. Por exemplo, o conceito de número, em nosso momento histórico de interesse, passa a ter uma relevância que antes era inexistente: precisamos defini-lo para investigar nossas bases.

Os paradigmas, portanto, são um conjunto de conhecimentos que garantem a realização de uma pesquisa científica por uma comunidade. O paradigma determina até onde se pode pensar, uma vez que dados e teorias, sempre que aplicados a uma pesquisa, irão confirmar a existência desse paradigma[5].

Em confluência com a história da matemática e sob a mesma perspectiva acima, alguns paradigmas tornaram-se influentes no surgimento do Teorema da Incompletude de Kurt Gödel. Havia a vetusta concepção de que a matemática era a ciência detentora das certezas onde, qualquer problema proposto, teria uma solução. O artigo de Gödel mostrou o contrário e, essencialmente, significa que jamais haverá um método regrado para demonstrar sentenças da matemática sem usufruir da intuição.

Apesar da mudança que os problemas inquietantes da matemática causaram para o pensamento matemático (como a demonstração da impossibilidade da trissecção de um ângulo por meio de régua e compasso ou demonstrações por redução ao absurdo) os paradigmas que permeavam o pensamento na época de Gödel estavam, portanto, voltados aos fundamentos da matemática[6].

---

aos números naturais. Esta, parte de cinco afirmações importantes (axiomas) que desenrolam uma série de conexões lógicas que compõe considerações sobre esse conjunto numérico. Considerações estas que podem serem denominadas de teoremas; tal como o Teorema Fundamental da Aritmética: todo número inteiro positivo maior que um podem ser decompostos de forma única num produto de números primos.

[4] Ao contrário da impressão predominante, a maioria das novas descobertas e teorias na ciência não é um mero incremento ao estoque acumulado de conhecimento científico. Para assimilá-las, o cientista comumente tem de rearranjar o equipamento intelectual e manipulativo em que confiava, descartando alguns elementos de sua crença e de suas práticas anteriores e, ao mesmo tempo, encontrando novos significados e novas relações em outros (KUHN, 2011, p. 243).

[5] (BARTELMEBS, 2012, p. 353)

[6] Os projetos de fundamentos da Matemática visavam estudar os conceitos matemáticos mais básicos (número, figura geométrica, conjunto, função, por exemplo) e buscavam entender como se formam hierarquias das estruturas e dos conceitos mais complexos, especialmente as estruturas fundamentalmente importantes que formam a linguagem da Matemática (fórmulas, teorias e seus modelos que dão um significado às fórmulas, definições, provas, algoritmos, ...). Esses conceitos também são chamados de conceitos metamatemáticos, quando se os olha da perspectiva dos aspectos filosóficos e da perspectiva da unidade da Matemática. A busca pelos

Como qualquer paradigma, sua promessa de sucesso, bem como os argumentos propensos a ele, pode convencer diversos cientistas a participarem desse novo pensamento teórico. A promessa que circulava com maior força no tempo de Gödel era de livrar a ciência das garras da metafísica. Ou seja, o mundo poderia ser representado pela linguagem e nela seriam explicados todos os fenômenos, não havendo, assim, problemas sem solução.

> Quanto deve a ciência ao erro? Quanto deve ao malogro? Não foram experiências malogradas que se tornaram a gênese de novas e importantes descobertas? Que nos mostra a astronomia senão uma série de equilíbrios e desequilíbrios motivadores de toda a gama de corpos que povoam o espaço? Como existiriam astros sem antes terem existido nebulosas? E que são as nebulosas senão grandes campos de choque diversos, de equilíbrios e desequilíbrios das mais variadas formas? (SANTOS. 2018, p.239)

Um “malogro” nesse sentido, significa a falta de sucesso que a ciência obteve na explicação de alguns fenômenos a partir de uma dada teoria. Isso não significa que a ciência em si é falha, mas que o método científico utilizado não foi suficiente para que a teoria chegasse num ponto alto de confiança[7]. Onde aquilo que fora almejado, foi posto em xeque por uma falta de prova ou um argumento maior. Assim, novas formas de pensar cientificamente contribuíram para o surgimento de novos métodos científicos e, consequentemente, novos paradigmas que façam com que a comunidade científica incorpore tal ponto de confiança. A comunidade ao qual Gödel inspirava diariamente discussões filosóficas e teóricas sobre diversas áreas residia em Viena, na Áustria[8].

---

fundamentos da Matemática é uma questão central da Filosofia da Matemática, visto que a abstração que constitui a Matemática apresenta desafios filosóficos especiais. Pensava-se que ao sistematizar e hierarquizar os conceitos pudesse juntar essa parte da Matemática ao restante do conhecimento humano e que dessa forma também seria possível investigar uma linguagem que representasse o infinito (BATISTELA, 2017, p. 21).

[7] É comum escutarmos sobre a genialidade nas descobertas e/ou criações de algumas pessoas no decorrer da história. O problema está, não na invenção de algo, mas em quais argumentos são utilizados para convencer a comunidade científica sobre o que foi feito. Um exemplo disso está na demonstração “impenetrável” que está no link da primeira nota de rodapé.

[8]Tratava-se de uma cidade cujos pensadores pareciam se conhecer, ao menos ligeiramente, influenciando o pensamento uns dos outros através das diversas disciplinas, de modo que matemáticos, físicos, historiadores, filósofos, romancistas, poetas, músicos, arquitetos e artistas estavam envolvidos, em certo sentido, na mesma conversa. O tema geral: a morte e

Contudo, as discussões que permeavam os grupos dos principais cientistas dessa cidade, não se limitavam totalmente às questões metodológicas de uma teoria, mas pelo problema do significado que os termos teóricos possuem, como os empiristas lógicos trataram no famoso Círculo de Viena, pois, como veremos abaixo, era de longe o grupo mais importante da cidade liderado pelo filósofo Moritz Schlic que, um pouco mais tarde, convidou Kurt Gödel para participar das reuniões semanais e aderir aos ideais do círculo.

No manifesto "A concepção científica do mundo" (wissenschaftliche Weltauffassung) escrito por Hans Han, Otto Neurath e Rudolf Carnap no ano de 1929, em prol do Círculo de Viena, é enfatizado o verdadeiro propósito dessa organização e sua opinião referente a outros ideais.[9]

Essa "reforma científica" ocorrida no século XX por filósofos e cientistas de todas as áreas, tinha como objetivo abolir conceitos como os de "metafísica" e "psicologismo", oriundos do século passado, isto é, "um simbolismo liberto das impurezas das linguagens históricas". Conceitos estes que não estavam sendo bem vistos para a época, uma vez que, nesse período, surgiu a necessidade de usufruir de um rigor jamais visto, desencadeando uma série de concatenações que desmembrassem o mundo da filosofia em algo sólido: uma teoria científica segura, analítica[10].

Evidentemente, o Círculo de Viena tornou-se o coração pulsante de todos esses ideais. O seu significado para a contemporaneidade

---

decadência moral e intelectual de tudo que viera antes, e a necessidade de construir metodologias, formas e fundamentos inteiramente novos. (GOLDSTEIN, 2008, p.58)

[9]A concepção científica do mundo não se caracteriza tanto por teses próprias, porém, muito mais, por sua atitude fundamental, seus pontos-de-vista e sua orientação de pesquisa. Tem por objetivo a ciência unificada. [...] Daí se origina a busca de um sistema de fórmulas neutro, um simbolismo liberto das impurezas das linguagens históricas, bem como a busca de um sistema total de conceitos. Aspira-se à limpeza e à clareza, recusam-se distâncias obscuras e profundezas insondáveis. Na ciência não há "profundezas"; a superfície está em toda parte: tudo o que é vivenciado forma uma rede complexa, nem sempre passível de uma visão panorâmica e frequentemente apenas apreensível por partes. Tudo é acessível ao homem; e o homem é a medida de todas as coisas. Aqui se mostra afinidade com os sofistas e não com os platônicos; com os epicuristas e não com os pitagóricos, com todos os que defendem o ser mundano e a imanência. A concepção científica do mundo desconhece enigmas insolúveis. (HAHN, NEURATH, CARNAP, 1929, p. 10)

[10]Este espírito de uma concepção científica do mundo está presente no trabalho de pesquisa de todos os ramos da ciência empírica. [...] Encontramos esforços antimetafísicos sobretudo na Inglaterra, onde a tradição dos grandes empiristas ainda se mantém viva. As investigações de Russell e Whitehead em lógica e na análise da realidade alcançaram significação internacional. Nos EUA tais esforços crescem nas mais diferentes formas. A nova Rússia busca com determinação uma concepção científica do mundo [...] (HAHN, NEURATH, CARNAP, 1929, p. 10)

translucidou quando renomados filósofos da linguagem como Ludwig Wittgenstein, e lógicos-matemáticos, como Kurt Gödel, realizaram trabalhos que regem nosso pensamento até os tempos atuais. “Foi a partir desse grupo de pensadores que o influente movimento conhecido como “positivismo lógico” em grande parte se disseminou. As prescrições reformadoras do grupo mudaram a atitude de cientistas da natureza, cientistas sociais, psicólogos e humanistas, levando-os a reformular as questões de seus respectivos campos” (GOLDSTEIN, 2008, p.62).

Apesar disso, Gödel não compactuou plenamente com os ideais positivas do Círculo, visto que ele já seguia os ideais platônicos[11] um ano antes de aderir ao grupo, em 1925. Ademais, vale enfatizar ainda que o positivismo lógico tinha um projeto da reestruturação das ciências em geral e não apenas das ciências naturais e da matemática[12].

De forma paralela, já havia grandes esforços para reestruturar os fundamentos da matemática. A Geometria e a aritmética eram alvos fixos para o ofício. A geometria já possuía seus pontapés iniciais para tantas demonstrações já feitas, basta olhar os Elementos de Euclides e uma inovação através das investigações de Gauss, Bolyai, e Lobachevsky no surgimento das geometrias não-euclidianas. Também, na efervescência da fundamentação da matemática estava em marcha o trabalho de David Hilbert que foi sua axiomatização da Geometria, teorizando um novo paradigma para a comunidade matemática. A aritmética estava sendo investigada fortemente através das teorias de conjuntos que envolviam o conceito de número desde Leibniz, ao qual, continha a ideia de “dominar” a realidade mediante um simbolismo lógico, contendo leis e regras de inferências.

Por ser de relevância em nosso contexto histórico, no campo sobre o debate da aritmética, o trabalho de conceituar “número”, de forma lógica, aconteceu devido a velhas concepções duvidosas sobre ele que, para o atual momento que respirava o positivismo lógico, não estavam de acordo com os ideais antimetafísicos.

Os mesopotâmicos e egípcios usufruíam da matemática de forma empírica. Utilizavam os números para descrever quantidades, ordem e grandezas. Os gregos também tinham essa concepção sobre a matemática, ao menos até pitagóricos, para quem os números seriam estritamente

[11]Será tratado sobre esses ideais no decorrer dessa seção.

[12]O positivismo lógico foi, acima de tudo, um movimento que falava em nome da precisão e do progresso associados às ciências. Procurou apropriar-se de metodologia que tão bem servira às ciências, destilar a essência dessa metodologia, não apenas para depurar a própria ciência de suas tendências mais misticamente vagas e metafísicas, mas também para depurar todas as áreas intelectuais (GOLDSTEIN, R. 2008, p.64).

ligados à uma cosmovisão segundo a qual tudo que existe é regido por números. Para Platão, influenciado pelos ideais pitagóricos, os números abrangem a perfeição numa "realidade ideal"[13] e, esta, é compreendida pelo ser humano através do raciocínio. Já Aristóteles, tem consigo que os números não existem num mundo das ideias, mas sim sobre aspectos de objetos e coleções de objetos reais, isto é, notas características desses objetos cuja existência *depende* da existência dos próprios objetos.[14]

Após os trabalhos relevantes de Cauchy na aritmetização da análise e na construção dos números reais a partir dos racionais e, consequentemente, dos números inteiros, tornou-se possível uma investigação lógica e aprofundada sobre a ferramenta mais preciosa dos matemáticos: o número.

Essas investigações, além de todos os pensadores citados até então, contribuíram fundamentalmente para o surgimento do Teorema da Incompletude de Kurt Gödel que emerge a partir dos trabalhos de Gottlob Frege, Bertrand Russel, Richard Dedekind, Giuseppe Peano e George Cantor onde, os cinco abordavam um método axiomático para definir seus conceitos e, consequentemente, desenrolar toda a sua teoria, inclusive uma definição própria de número[15].

O trabalho de Frege ficou conhecido através das investigações de Bertrand Russel junto com seu orientador, Alfred North Whitehead, no Principia Mathematica. Um livro de três volumes que foi publicado de 1911 a 1913, totalizando 1865 páginas que tratam desde os primórdios da lógica e teoria dos conjuntos, com demonstrações, definições e axiomas com uma linguagem exclusivamente deles até noções de comensurabilidade em matemática. Os trabalhos de Richard Dedekind e Giuseppe Peano ficaram conhecidos como os axiomas de Dedekind-

[13]As formas, os objetos matemáticos por excelência, habitam, um lugar celeste fora deste mundo imperfeito, fora do espaço e do tempo, e assim imunes à geração e à degradação. Preexistem, portanto, à atividade matemática; à qual cabe apenas "ascender" até eles e estudá-los. Ou seja, tanto os objetos quanto as verdades matemáticas têm, segundo Platão, existência independente de nós. [...] As verdades matemáticas, em particular, expressam simplesmente, para Platão, relações universais e imutáveis entre as formas matemáticas. Nós as conhecemos, ou podemos conhecer, *a priori,* isto é, independentemente dos sentidos, por meio do entendimento. E mesmo as verdades que desconhecemos no momento estarão sempre à disposição do nosso intelecto com seu valor de verdade inalterado. (SILVA, 2007, p.42)

[14](SILVA, 2007, p.43).

[15] Para não prolongar demais a escrita desse texto e falar sobre algo que já foi estudado, sugiro acessar o artigo de Fabrício Oliveira Silva (2020) intitulado **Uma investigação sobre a ideia do número,** trata dessas investigações com maior rigor e aprofundamento sobre todos os pensadores citados até o momento. Caso seja de seu interesse, está disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/11126. Data de acesso: 26/04/2021

Peano que trata de uma axiomatização para os números naturais, como escrito no decorrer desse texto.

Além do conceito de número, o mais problemático dos conceitos matemáticos era o infinito. Graças à Teoria dos Conjuntos e às conclusões de Georg Cantor sobre os conjuntos infinitos esse problema esteve em seu auge no final do século XIX. Entretanto, as dificuldades encontradas na teoria dos conjuntos, tornaram-se evidentes ao serem encontradas antinomias que estavam presentes nele. O famoso paradoxo de Russel foi um dos principais.

> Nesta tentativa de superação da crise de fundamentos da aritmética (e da teoria dos conjuntos), permaneceram, todavia, subsistindo certas dificuldades que até o presente não encontraram solução satisfatória e definitiva. Atualmente três orientações diferentes defrontam-se neste domínio. Além do “logicismo” de Russel e Whitehead, encontra-se o “formalismo” de Hilbert, que concebe a aritmética como um jogo de fórmulas com regras determinadas, e o “intuicionismo” de Brower, segundo o qual os conhecimentos aritméticos repousam em uma intuição irredutível de dualidade-unidade. (HAHN, NEURATH, CARNAP, 1929, p. 14)

O problema é que essas orientações/vertentes filosóficas da matemática enfrentavam dificuldades extremas. Ancoradas numa definição própria de matemática, cada qual, buscava responder questões referentes ao pensamento matemático. Será este um conjunto de ideias dotadas de intuição do ser humano? Será a matemática detentora da realidade ou é natural das pessoas pensarem em matemática? Afinal, o que é matemática? A depender da interpretação e reflexão sobre a realidade, cada pergunta poderia ser respondida conforme o barco de cada vertente navegava. Em todo caso, as respostas consistem em permanecer na estrutura lógica no conceito de número.

A saber, a ideia logicista iniciada por Gottlob Frege (1884) não foi bem aceita na época devido à dificuldade[16] em transcrever logicamente

[16]Apesar da compreensão que se deva ter dessas três vertentes serem importantes para o contexto do Teorema da Incompletude, as definições e dificuldades encontradas em cada uma não serão escritas nesse trabalho e podem ser entendidas perfeitamente na tese de doutorado da professora Rosemeire de Fatima Batistela, O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática, já no primeiro capítulo.

alguns axiomas; eles deveriam mostrar concretamente que todas as proposições matemáticas poderiam ser expressas na terminologia lógica e que todas as proposições matemáticas verdadeiras são as expressões verdadeiras para a lógica (MACHADO, 1991). O impasse principal da sua teoria foi ao tentar definir o conceito de número, ao qual, Frege acreditava que são objetos existentes independente da espécie humana. Isto é, tratava-se de entidades não reais e, menos ainda, produtos da nossa mente. Ele considerava três pontos principais para sua tese. A saber, **(i)** números não são propriedades de objetos externos; **(ii)** números não são subjetivos ou psicológicos e **(iii)** números são propriedades de conceitos[17].

Para exemplificar esses pontos, em (i), considere uma moto. Frege entende que "ter duas rodas" não é uma propriedade desse objeto, uma vez que existem outras referências contendo essa característica, como uma bicicleta. Da mesma forma, em (ii), se números fossem subjetivos ou psicológicos, poderíamos constituir uma moto através de outras formas de interpretação como "duas metades de uma moto" ou "três terços de uma moto". Percebe-se então, que cada pessoa poderia decidir arbitrariamente quantos números o objeto tem a partir desse pressuposto. Logo, se deve negar essa situação e concordar que um objeto possui um certo número, interligado com uma descrição envolvendo um conceito extra; de que se trata a sua terceira observação acima.

Evidentemente, sem esses conceitos não seria possível identificar o que e onde contar; eles servem como se fosse uma "ligação" entre os objetos e quantidades; ou seja, eles não são entidades subjetivas e nem psicológicas. Por exemplo, "todas as motos fazem barulho" é um enunciado totalmente objetivo e não psicológico sobre os dois conceitos: moto e barulho. É uma independência que ele reclama para o número; implicando que, o mesmo, não signifique que um numeral designe algo fora do contexto de uma proposição, mas que pretende com isto apenas excluir o seu uso como predicado ou atributo, o que alteraria algo em seu significado.[18] Para tal, é necessária uma extensão de conceitos para definir o que é um número. Conforme Shapiro (2016),

> A extensão de um conceito é a classe (coleção) de todos os objetos a que o conceito se aplica. Por exemplo, a extensão de 'cadeira' é a classe de todas

[17]Gottlob Frege em seu livro Lógica e Filosofia da Linguagem traduzido pela USP em 1978, explicita que o seu entendimento sobre o "conceito de algo" é predicativo, uma referência de um predicado gramatical; isto é, tudo aquilo que se pode declarar sobre esse "algo".

[18](FREGE, G. 1983, p. 245).

> as cadeiras. Frege definiu os números naturais em termos de conceitos e as suas extensões: O número que pertence ao conceito *P* é a extensão do conceito equinumérico ao conceito *P*. O número dois, por exemplo, é a extensão (ou coleção) que contém todos os conceitos que são satisfeitos exatamente por dois objetos. (apud SILVA, 2020, p. 45).

Para ficar claro, a ideia de ser "equinumérico" está intimamente ligada na relação biunívoca entre dois conceitos ou classes; ou seja, dois conjuntos são equinuméricos quando possuem a mesma cardinalidade. Dessa forma, o número zero, por exemplo, pertence ao conceito "não idêntico a si mesmo[19]" e a extensão desse conceito seria o próprio conjunto vazio.

Um objeto cair ou não sob determinado conceito significa, na gama de possibilidades existentes, que esse conceito pode obter ou não um referencial. Por exemplo, o conceito de "maior número primo" não envolverá uma referência, bem como "número primo menor que 50" haverá alguns referenciais e, portanto, não haveria um único objeto caindo sobre estes conceitos.

Frege estava convencido de que sua obra estava fundamentada e completa. Em seu livro intitulado Leis básicas da Aritmética em 1893, ele enfatiza o quanto seu trabalho tem peso para a humanidade e que dificilmente (se não impossível) alguém poderá contradizê-lo[20]

---

[19] 0 é o número que convém ao conceito "diferente de si próprio". Talvez se estranhe que eu fale aqui de conceito. Objetar-se-á talvez que ele contém uma contradição e faz lembrar os velhos conhecidos ferro de madeira e círculo quadrado. Ora, julgo que eles não sejam tão maus quanto se imagina. De fato, úteis a bem dizer nunca serão; mas tampouco podem trazer algum mal, desde que não se pressuponha que algo caia sob eles; e para isso não é suficiente o simples uso dos conceitos. Que um conceito contenha uma contradição, nem sempre é tão evidente que dispense investigação; para investigá-lo é preciso antes possuí-lo e tratá-lo logicamente como outro qualquer. Tudo o que, do ponto de vista da lógica e no que concerne ao rigor da demonstração, se pode exigir de um conceito é sua delimitação precisa, que fique determinado, para cada objeto, se cai ou não sob ele. Ora, esta exigência é estritamente satisfeita por conceitos que contêm contradição. como "diferente de si próprio"; pois, sabe-se, a respeito de todo objeto, que ele não cai sob este conceito. (FREGE, G. 1983, p. 262)

[20] Isso pode ser suficiente para colocar meu ponto de vista lógico em uma luz mais clara pelo contraste. A distância da lógica psicológica me parece tão grande quanto o céu, tanto de modo que não há perspectiva de que meu livro tenha um efeito imediato sobre ele. Minhas impressões é de que a árvore que plantei tem que carregar uma carga incrível de pedra para criar espaço e luz para si. Ainda assim, não vou desistir de toda esperança de que meu livro vai, eventualmente, ajudar a derrubar a lógica psicológica. Para tornar os proponentes de mais tarde chegar a um acordo com meu livro, algum reconhecimento dos matemáticos não fará mal. E, de fato, acredito que posso esperar algum apoio deste trimestre, uma vez que os matemáticos acabaram por fazer uma causa comum contra os lógicos psicológicos. Assim que

Apesar de tamanha confiança, Bertrand Russel como citado acima, investigou essa obra de Frege e encontrou, depois de todo esse trabalho, um problema gravíssimo na Lei básica V: *as extensões de dois conceitos são idênticas se, e só se, esses conceitos se aplicam às mesmas coisas.* Silva (2007) explica[21] com detalhes esse problema no sistema lógico de Frege. Em meio a isso, surgiram outros paradoxos além do Russel, como o de Jules Richard[22] (1905), por exemplo. De acordo com Silva (2007), o paradoxo de Russel foi uma das estrelas de uma quase "estação de paradoxos" que se instalou por essa época. Eles pipocavam por todos os lados e instauraram a chamada "crise dos fundamentos".

Contudo, já em 1889, a axiomatização da aritmética por Giuseppe Peano[23] estava sendo a mais aceita pelos matemáticos da época pela clareza e facilidade na construção dos teoremas e proposições. Como o próprio Kurt Gödel afirma,

> Frege estava essencialmente interessado na análise do pensamento e usou o seu cálculo para derivar a

---

este último se dignar a se envolver com meu livro a sério, mesmo que seja apenas para refutá-lo, considerarei que venci. Para todo, a parte II é realmente um teste de minhas convicções lógicas. É improvável que tal construção poderia ser construída em uma base insegura e defeituosa. Mas, se alguém tiver convicções diferentes, deixe-o tentar construir uma construção semelhante sobre elas e ele irá descobrir, creio eu, que não funciona, ou pelo menos que não funciona tão bem. Eu só poderia reconhecer isso como uma refutação se alguém realmente mostrasse que algo melhor ou que um edifício mais duradouro pode ser erguido com base em diferentes convicções básicas, ou se alguém me provou que meus princípios básicos levam a conclusões manifestamente falsas. Mas não terá alguém com sucesso em fazê-lo. E assim pode este livro, mesmo que tardiamente, contribuir para um renascimento da lógica. (FREGE, 2013, p. 25-26, tradução própria).

[21] Definamos agora, escreveu Russel, o conceito R "extensão que não contém a si própria"; como extensões são objetos, isso parece fazer sentido. O problema começa agora: a extensão desse conceito pertence ou não a si própria? Seja a uma extensão de R, como vimos acima, $a \in a \leftrightarrow R(a) \leftrightarrow a \notin a$, um absurdo. Como todo o argumento de Russel pode ser rigorosamente formalizado na lógica de Frege, o paradoxo de Russel (pois é assim que esse argumento ficou conhecido) demonstra que essa lógica é inconsistente, isto é, ela demonstra asserções contraditórias, sendo assim tão boa quanto nada. Tirada a base, o programa logicista de Frege desmorona. (SILVA, 2007, p. 133).

[22] Em Filosofias da Matemática de Jairo José da Silva (2007), o paradoxo é interpretado dessa maneira: considere o conjunto de todos os números naturais definíveis com menos de 100 palavras. Esse conjunto é finito, logo, existe um número natural não definível com menos de 100 palavras. Mas, esse número está definido pela sentença anterior tendo menos de cem palavras, o que é um absurdo.

[23] Em virtude de fugir do escopo deste trabalho investigar todas as ideias da definição de número por matemáticos e filósofos entre o século XIX e XX, recomendo novamente ao leitor (a) acessar a dissertação do Fabrício Oliveira Silva (2020), intitulado "Uma investigação sobre a ideia de número". O mesmo, é abordado através de um embasamento histórico, filosófico e lógico sobre essa investigação. Esta, por sua vez, encontra-se acessível ao público e está presente nas referências deste trabalho.

> aritmética da lógica pura. Peano, por outro lado, estava mais interessado nas suas aplicações dentro da matemática e criou um simbolismo elegante e flexível que permite exprimir os teoremas matemáticos mais complicados de uma maneira perfeitamente precisa e muitas vezes muito concisa por meio de fórmulas. É nesta linha de pensamento de Frege e de Peano que se inscreve a obra de Russel. Frege, por causa da sua laboriosa análise das demonstrações, não passou além das propriedades mais elementares da sucessão de inteiros, enquanto que Peano conseguiu uma grande coleção de teoremas expressos no seu novo simbolismo, mas sem as demonstrações. Foi só nos *Principia Mathematica* que se fez um uso extensivo deste novo método para derivar realmente grandes partes da matemática de um número muito pequeno de conceitos lógicos e axiomas. (GÖDEL, 2009 p. 853)

Além disso, entende-se que o logicismo estava interligado com os ideais do Círculo de Viena, uma vez que o próprio Russell era um representante oficial da **Concepção Científica do Mundo**. Mas, em direções opostas, o intuicionismo de Brouwer citado por Hahn, Neurath e Carnap (1929), seguia uma ideia diferente de Frege[24].

No mesmo sentido, Hilbert se opõe a teoria logicista, não desejando reduzir a matemática à lógica e também segue contrário à tese intuicionista ao estruturar a matemática através do método axiomático. Dessa forma, ele entende que o matemático poderia trabalhar em qualquer sistema metódico como tal (desde que sua consistência fosse demonstrada) dotado de símbolos com significados podendo originar outras teorias partindo desses axiomas que, por sua vez, seriam originadas a partir de modelos da base axiomática da teoria "maior", digamos. Os axiomas de Peano-Dedekind-Dedekind referente aos números naturais, podem originar um modelo para os números pares, por exemplo. Tratando, assim, de uma subteoria dos números naturais.

Assim,

[24] A lógica, para Brouwer, não é o fundamento da matemática, segundo **prendem** os logicistas. Dá-se precisamente o oposto: as leis lógicas (aplicáveis no domínio matemático) derivam-se da matemática, ou, melhor da linguagem matemática. E como Brouwer acha que a atividade matemática independe da linguagem, isto é, da maneira pela qual expressamos as verdades dessa ciência, conclui ele, singularmente, que as leis lógicas não constituem fenômeno matemático e, sim, fenômeno etnográfico. (COSTA, NEWTON D. 1992, p. 38)

> O analista alemão edificou, então, uma nova ciência – a metamatemática, ou teoria da demonstração -, cuja finalidade básica seria demonstrar a consistência das diversas teorias matemáticas. Tais demonstrações far-se-iam, de modo geral, em três etapas sucessivas e que são:
> a) Axiomatização: axiomatizam-se as diversas teorias lógico-matemáticas
> b) Formalização: formalizam-se as axiomáticas obtidas, isto significando que em cada uma delas os conceitos primitivos, os postulados e os conectivos, relações e princípios lógicos são substituídos por símbolos e arranjos simbólicos sujeitos a regras bem definidas, análogas às de um jogo.
> c) Demonstração da consistência das axiomáticas formalizadas: para cada axiomática formalizada, mediante investigação de sua estrutura grafomecânica, procura-se provar sua consistência, evidenciando que não se poderá jamais chegar a arranjos simbólicos contraditórios, operando-se de acordo com as regras estabelecidas. (COSTA, 1992, p. 53-54)

Com isso, entende-se que a axiomatização daria o ponta pé inicial para a formulação de uma teoria. A formalização, diferente da axiomatização, teria o objetivo de aplicar meios de conduzi-la. A consistência, por fim, implicaria a não contradição dessa mesma teoria. De acordo com BATISTELA (2017, p.28),

> Dessa forma, acreditavam os formalistas que ao formalizar as teorias matemáticas livrariam a Matemática de contradições, bem como de possíveis paradoxos, pois seriam eliminados pelo processo de reescrita da mesma com demonstrações rigorosas em um sistema formal. Assim, na teoria formalizada não existiria sentença para a qual se tivesse uma prova de verdade e de falsidade, simultaneamente. Logo, pensavam, provariam que as teorias matemáticas são completas e consistentes dentro da sua própria axiomática.

Em outras palavras, o desejo de Hilbert era que a matemática fosse reduzida a um número finito de axiomas que relacionem, intrinsicamente, a consistência, completude e decidibilidade desse sistema. Isto é, o sistema não poderia haver contradição, toda fórmula matemática verdadeira tinha que derivar dos axiomas e qualquer problema existente dentro dessa teoria deveria haver ou não uma solução, respectivamente.

Em conformidade com a ideia de completude, David Hilbert e Wilhem Ackermann deixam em aberto a questão de que se todas as regras aceitas para manipular a linguagem através de conectivos lógicos e quantificadores relacionadas aos axiomas do sistema, permitem ou não a dedução de todas as fórmulas de uma teoria. A partir dessa pergunta, Kurt Gödel começa a ganhar grande prestígio na comunidade científica da época devido a sua resposta afirmativa na sua tese de doutorado em 1930.

> Um sistema lógico é completo se todas suas fórmulas válidas são deriváveis no sistema. Na realidade o trabalho de Gödel demonstrava que a lógica desenvolvida até essa época era adequada para prover argumentos para qualquer coisa que fosse verdadeira a partir de um dado conjunto de axiomas. Foi isto o que proporcionou grande prestígio inicial a Gödel. (D'ALKAINE, C.V. 2006, p. 526)

Embora esse teorema seja de suma importância para a lógica axiomática, ainda há uma questão intrínseca na matemática quanto a seus elementos. Inclusive, essa tese de doutorado de Gödel, não irá preocupar Hilbert quanto ao seu projeto formalista. É em 1932, no congresso dos matemáticos, que Gödel apresenta seus argumentos que derrubaram o programa de Hilbert e com a posterior publicação de seus dois teoremas.

Primeiro Teorema da Incompletude: Qualquer sistema consistente e capaz de expressar a aritmética básica é incompleto.

Com isso, o sistema ser consistente implica a existência de uma proposição P e ~P dentro dele onde, pelo menos uma delas, deva ser verdadeira. Dessa forma, necessariamente, haverá uma sentença dentro do sistema que assume o valor de verdade, porém, não é demonstrável dentro dele. De acordo com Newton da Costa (1992, p. 56), o presente teorema de Gödel significa, portanto, que existem proposições aritméticas tais que nem elas, nem suas negações são demonstráveis na axiomática da aritmética que se adotar. Essas proposições são chamadas indecidíveis[25] na axiomática considerada. Logo, em qualquer axiomática consistente da aritmética existem indecidíveis.

Segundo Teorema da Incompletude: Se um sistema capaz de expressar a aritmética básica é consistente, sua consistência não pode ser provada a partir de seus axiomas.

Saliente-se ainda que, além da indecidibilidade que o primeiro teorema diz acerca das proposições, não é possível, partindo do interior de um sistema axiomático, mostrar sua consistência, sua veracidade. Portanto, é necessário algo externo e maior que utilize uma linguagem mais sofisticada que verse sobre todo o sistema afim de demonstrar toda sua consistência. Ou seja, é impossível formalizar uma prova de consistência de qualquer axiomática da aritmética, tendo por base tão somente essa axiomática. (COSTA, 1992, p. 57)

Por fim, demonstra-se claramente a importância de todo o contexto do surgimento e o impacto notório desses teoremas. Não era somente Hilbert que havia o sonho de provar que a matemática não havia um *ignorabimus*, ou seja, qualquer problema da matemática haveria uma solução, bastava encontrá-la.

A comunidade científica de Viena estava a todo momento trabalhando arduamente para reestruturar o pensamento científico. O manifesto do Círculo de Viena, citado acima, nos mostra os embates filosóficos e divergências de pensamento científico da época. Tinham em mente uma reestruturação que seria capaz de encadear todos os termos filosóficos de forma ordenada e conceituada. Seria possível reduzir o significado de uma palavra através de uma estrutura puramente lógica. Eram problemas nos fundamentos da Física, Matemática, Biologia, Psicologia e Ciências Sociais. Isto é, uma comunidade inteira de cientistas de diversas áreas acreditando num paradigma contendo uma promessa tentadora: uma estruturação lógica.

---

[25] O resultado de Gödel não diz respeito sobre qual é a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada. Mas existem algumas afirmações que não podem ser demonstradas ou refutadas hoje em dia como, por exemplo, a **Hipótese do Continuum** sobre o sistema axiomático de Zermello Frankel Choice (ZFC). Esta, por sua vez, afirma que *não existe nenhum conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto dos números inteiros e menor que a do conjunto dos números reais.* Em 1940, Gödel provou que essa afirmação era consistente sobre ZFC, ou seja, a negação dessa afirmação não pode ser provada. Mas, em 1963, Paul Cohen provou que a **negação** da Hipótese do Continuum era consistente e, portanto, sua afirmação não poderia ser demonstrada. Daí, sua indecidibilidade.

Além de Gödel ter acabado com o sonho de Hilbert, ele provou um teorema que diverge dos ideais do Círculo de Viena. O próprio Gödel demonstra seu caráter platônico que contradiz os ideais deste último.

> É verdade que meu interesse pelos fundamentos da matemática foi despertado pelo "Círculo de Viena", mas as consequências filosóficas de meus resultados, bem como os princípios heurísticos que levaram a eles, não são nem um pouco positivistas ou empiristas. Fui um realista conceitual e matemático desde cerca de 1925. Nunca sustentei a visão de que a matemática é sintaxe da linguagem. Pelo contrário, essa visão, entendida em qualquer sentido razoável, pode ser refutada por meus resultados (apud GOLDSTEIN, R.2008, p. 94)

3 **UMA IDEIA PARADOXAL**

Nesse capítulo, será abordado a ideia central da demonstração de Kurt Gödel do Teorema da Incompletude sem grandes rigores lógicos como o mesmo aborda em seu artigo, salvo algumas definições e compreensões que julguemos ser importante para o capítulo final desse trabalho como o Teorema Fundamental da Aritmética e os números de Gödel. A saber, o Teorema da Incompletude é subdividido em:

- Qualquer sistema axiomático capaz de expressar a aritmética básica é incompleto
- Se um sistema como o *Principia Mathematica* é consistente, então sua consistência não pode ser provada a partir dos seus axiomas.

Salvo essas considerações, prosseguimos.

3.1 **Um curioso paradoxo**

O Teorema da Incompletude de Gödel aborda o conceito de verdade em matemática através de um dilema, que busca analisar a consistência da mesma, e que consiste em ser uma verdade demonstrável ou não. Nesse sentido, o teorema nos alerta sobre uma probabilidade real de uma sentença ser indecidível, ou seja, não sermos capazes de confirmar sua veracidade ou falsidade.

É através de uma construção lógica a partir de regras ou axiomas de um dado sistema que podemos chegar à veracidade (ou falsidade) de uma sentença, ou seja, a demonstrabilidade de tal sentença. Uma demonstração em matemática é uma cadeia de afirmações com orações afirmativas na qual aparecem fórmulas e considerações lógicas. Um sistema suficientemente grande capaz de conter a aritmética dos números inteiros – assim como o teorema de Gödel sugere – possui sentenças indecidíveis.

Um exemplo de sentença demonstrável é o Teorema Fundamental da Aritmética - que afirma que todo número inteiro pode ser decomposto em fatores primos de forma única - que pode ser provado por meio das conexões lógicas a partir dos axiomas dos números naturais. Uma vez feito isso, ninguém duvidará da autenticidade dessa relação e considerará esta sentença, de fato, um teorema da matemática.

Daí a importância acerca dos indecidíveis. O Teorema da Incompletude é como se fosse um “bicho papão” dos sistemas formais adequados (capazes de conter os números inteiros) pois, ao criar determinado sistema, é certo que haverá questões sem respostas. Mas como é feita a demonstração de algo que diz respeito a sentenças que não são verdadeiras nem falsas?

Através de uma analogia, suponha como verdade que um dos dois sujeitos abaixo quebrou um copo da cozinha, porém, ambos inventam uma sacada paradoxal.

Paradoxo - Quem quebrou o copo?

Figura 1

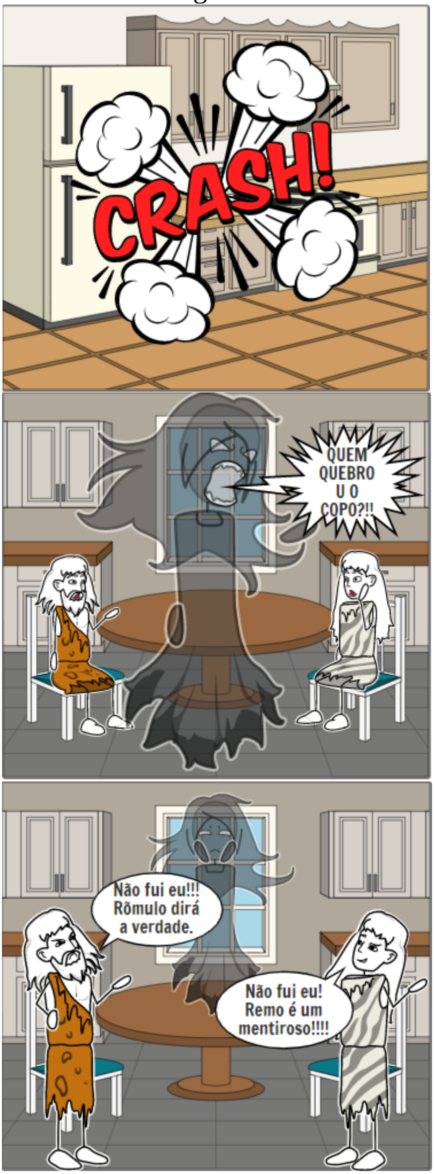


Imagem de autoria própria com usufruto das ferramentas gratuitas do site https://www.storyboardthat.com. Data de acesso: 27/04/2021

Por um ponto de vista formal, entende-se, neste caso, por "verdade" uma coisa, fato ou evento real e "mentira" como um engano, falsidade, fraude.

Nesse contexto, é sabido que qualquer um dos dois sabe a verdade. O julgamento desse simples e comum caso familiar terminaria assim que um dos dois dissesse "Eu quebrei o copo". Mas a esperteza de ambos em utilizar um paradoxo para não sofrer as consequências, tornou esse problema interessante.

Considere os dois casos abaixo que são lidos da forma "se p então q". Por exemplo, se "Remo diz a verdade" então "Rômulo não quebrou o copo", e assim, por diante.

Figura 2

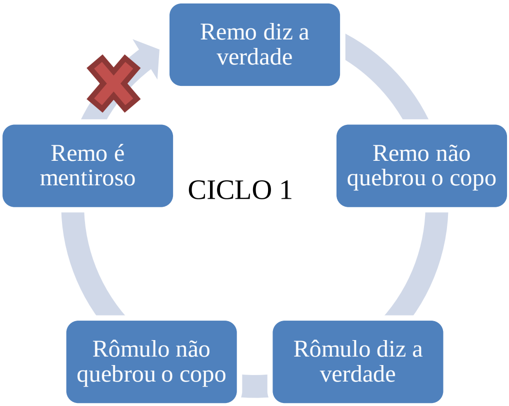
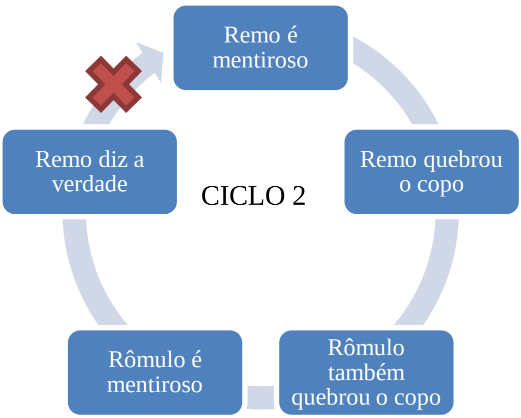


Figura 3



A opção "ninguém quebrou o copo" está descartada, pois, supomos inicialmente que um dos dois o fez. Porém, para o responsável descobrir qual foi o culpado terá de optar por um caminho mais indireto: barganha, conversar, psicologismo, investigar, etc. A descoberta será efetuada através de uma construção que se dará através do tempo. Nesse caso, a verdade é como um limite, uma sucessão de evidências através de hipóteses provisórias retiradas tanto do Remo quanto do Rômulo.

A partir disso, surge um problema natural: a demonstração formal é realmente um procedimento adequado para a obtenção da verdade? Quais os limites desse procedimento? Gödel (2009) aponta que a resposta se mostra negativa[26].

3.2 **Uma linguagem para outra linguagem**

Quando é demonstrado algo em matemática significa que foi escrita uma série de afirmações (ou fórmulas) partindo de axiomas combinando-se logicamente entre si para chegar no que chamamos de teorema. Em outras palavras, uma fórmula é uma sucessão finita de termos primitivos e uma demonstração é uma sucessão finita de fórmulas[27]. Ou seja, o teorema será a última fórmula da demonstração. Mas, ao dizer que um teorema G é demonstrável, é falado "sobre" ou "de" matemática?

Para exemplificar, considere o Teorema de Fermat e observe a sutileza que há entre os itens 1 e 2 abaixo.

1) Se n é um número inteiro maior que 2, então não existem inteiros positivos x, y e z que satisfaçam a igualdade:
$$x^n + y^n = z^n$$

2) O teorema "Se n é um número inteiro maior que 2, então não existem inteiros positivos x, y e z que satisfaçam a igualdade: $x^n + y^n = z^n$" é demonstrável.

Perceba, o primeiro item estabelece uma relação entre os números e, por este motivo, estamos falando *de* matemática; já o segundo, estabelece uma afirmação *sobre* ela. Isso significa que em (1) estamos falando de *dentro* do conjunto e em (2) *acerca* dele. Veja outro exemplo:

---

[26] Será feito uma observação extra pontuando Tarski nesse debate juntamente com o famoso paradoxo do Mentiroso em **Gödel, Tarski e o Mentiroso.**

[27] (GÖDEL, 2009, p. 6)

- Existem infinitos números primos
- A proposição “Existem infinitos números primos” é demonstrável.

Existir números primos é uma afirmação *de* matemática e, ser demonstrável que existem infinitos números primos, é uma afirmação *sobre* a matemática. Entretanto, cumpre observar que tais enunciados significativos sobre um sistema matemático não pertencem eles próprios ao referido sistema. Eles pertencem ao que Hilbert chamou de “metamatemática”, a linguagem que versa *sobre* a matemática[28].

A linguagem matemática está, em princípio, construída para falar sobre os números e podendo se referir também às operações existentes entre eles (pode decidir que 25 é um múltiplo de 5 ou que 10 é um divisor de 100). Uma ideia que é central na demonstração de Gödel é usufruir de uma linguagem que fale, ao mesmo tempo, *de* e *sobre* matemática. Com isso, será possível decidir se certa fórmula será demonstrável ou não. Mas como Gödel fez com que a matemática falasse sobre si mesma? Podemos identificar isso través de uma analogia social.

Faz pouco tempo que os caixas automáticos nos supermercados surgiram. O cliente pega seus produtos e os passa na máquina apontando os respectivos valores de cada um e, por fim, aparece o total da conta a se pagar. O engraçado é que, mesmo com uma pessoa vendada te atendendo no caixa, ela saberá de todos os produtos que você escolheu apenas olhando a nota fiscal que o computador lhe dará e, ainda, saberá do preço total e quanto cada item custou após ter sido possível ela voltar a enxergar de forma clara.

Isso significa que cada produto é catalogado dentro de um sistema de dados através do que é chamado “código de barras” que está ligado diretamente a uma sequência de números naturais. Com isso, assim que o objeto é passado no leitor, automaticamente, saberá das propriedades do produto de acordo com o que foi colocado dentro do sistema e isso pode ser sobre o peso, valor, nome, preço, etc. Por exemplo, a sequência <56481328379> pode se referir a uma determinada Erva de Chimarrão e <256481327803> de um pacote de Café.

> O que sucede no supermercado sucede na metamatemática. Cada enunciado metamatemático é representado por uma única fórmula dentro da

[28] (NAGEL, ERNEST. 2007)

> aritmética e as relações de dependência lógica entre enunciados metamátemáticos se refletem plenamente nas relações numéricas de dependência entre suas correspondentes fórmulas aritméticas. Uma vez mais, o mapeamento facilita a investigação da estrutura. A exploração de questões metamatemáticas pode ser desenvolvida mediante a investigação das propriedades aritméticas e relações de certos inteiros. (NAGEL; NEWMAN, 2007, p. 68)

3.3 **O código**

Para compreendermos melhor essa numeração, foi ajustado um pouco a tabela apresentada por Nagel e Newman (2007) afim de que os exemplos citados aqui façam sentido juntamente com a numeração de Gödel[29]. Dessa forma, os símbolos, códigos e significados ganharão uma nova relação, mas que não interfere na ideia por trás da numeração de Gödel.

[29] Deixando claro que, independentemente dessa modificação, a ideia por trás é válida desde que mantenha as propriedades lógicas de Gödel. A alteração se dá em editar o símbolo " ⊃ " com o significado de “Se..então...” para o ” → ", pois, está sendo mais utilizado nos dias atuais. Também, é acrescentado o símbolo " + " de adição e “ ^ “, como uma condição. As modificações se dão para compreendermos a numeração de Gödel de uma forma simples e intuitiva. Uma abordagem mais rigorosa e detalhada do Teorema da Incompletude pode ser encontrada no livro *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Continuo* – Acerca de proposições indecidíveis de sistemas matemáticos formais e relacionados – onde é visto a demonstração original do próprio GÖDEL.

Tabela 1

Símbolos	**Código**	**Significado**
~	1	Não e/ou Negação
∨	2	Ou
→	3	Se.... então....
∃	4	Existe um
=	5	É igual
0	6	Zero
S	7	Sucessor imediato de
(	8	Marca de pontuação
)	9	Marca de pontuação
∀	10	Para todo
+	11	Adição
∧	12	E
,	13	Marca de pontuação

Ainda, salvo algumas alterações em vista da tabela acima, Nagel e Newman (2007) definem:

- As *variáveis numéricas* como x, y, z são simbolizadas por números primos maiores ou iguais a 17.
- As *variáveis sentenciais* (p, q, r) que representam uma declaração afirmativa são simbolizadas como quadrados de primos maiores ou iguais a 17
- Os *predicados* (P, Q, R) que denotam uma relação entre os conjuntos numéricos são simbolizados como cubos de primos maiores ou iguais a 17.

Com isso, é evidente que se pode criar símbolos para cada uma das expressões de uma linguagem formal, até porque, a ideia é identificar através desses códigos uma afirmação ou até mesmo uma sentença que não possua uma demonstração.

Por exemplo, a conjectura de Goldach afirma que <u>todo número par maior que dois é a soma de dois números primos.</u> Através do que foi visto acima, poderíamos definir, de forma lógica, dois predicados; um P(x) para número "par" e outro, Q(x), para número "primo"; dessa maneira:

$$\boldsymbol{P(x)}:$$
$$\exists y(x = \mathrm{SS}0y)$$

$$\boldsymbol{Q(x)}:$$
$$\sim x = S0 \ \wedge \ \sim x = 0 \ \wedge \ \forall y \forall z(yz = x \rightarrow (y = x \wedge z = \mathrm{S}0) \vee (= \mathrm{S}0 \wedge = x)$$

Assim, o enunciado de Goldbach, ficaria:

$$\forall x(P(x) \wedge \sim(\mathrm{x} = \mathrm{SS}0) \rightarrow \forall \mathrm{y} \forall \mathrm{z}(\mathrm{Q}(\mathrm{y}) \wedge \mathrm{Q}(\mathrm{z}) \wedge \mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$

Por fim, sequenciando através da tabela anterior:

$$10\ 17\ 8\ 17^3\ 12\ 1\ 8\ 17\ 5\ 7\ 7\ 6\ 9\ 3\ 10\ 19\ 10\ 23$$
$$8\ 19^3\ 12\ 19^3\ 12\ 17\ 5\ 19\ 11\ 23\ 9\ 9$$

Mas note, é citado um exemplo particular da tabela que foi proposta apenas para fixarmos a noção que há entre a ligação de um símbolo, um número e uma expressão. Isto é, foram definidos os predicados P(x) e Q(x) apenas para fins ilustrativos; uma vez que, para fazer o processo inverso (partir da sequência para os símbolos) os predicados existentes no sistema devem estar totalmente explícitos para compreender do que a numeração se trata. Já adiantando, a sequência de números acima não indica uma verdade ou falsidade da sentença, ela apenas faz uma ligação injetora (1-1) entre símbolos e números inteiros positivos.

A título de curiosidade, Kurt Gödel[30] define os termos primitivos do sistema formal escolhido para efetuar sua demonstração da seguinte maneira:

Constantes: ~ (não), V (ou), [] (para todo), 0 (zero), f (o sucessor de), (,) (parêntesis).
Variáveis do Primeiro Tipo (para indivíduos, i. e., números naturais incluindo 0): $x_1, y_1, z_1, \ldots$
Variáveis do Segundo Tipo (para classes de indivíduos): $x_2, y_2, z_2, \ldots$.
Variáveis do Terceiro Tipo (classes de classes de indivíduos): $x_3, y_3, z_3, \ldots$

Essencialmente, denomina-se esse sistema como sendo P, onde, se obtém construindo através da lógica do *Principia Mathematica* (PM) de

[30] (GÖDEL, 2009, p. 10)

Russel-Whitehead, adicionando os axiomas de Dedekind-Peano. Entretanto, a adição dos axiomas de Peano-Dedekind, tal como todas as outras modificações no sistema inclusas no PM, servem apenas para simplificar a demonstração e são teoricamente dispensáveis[31], uma vez que, numa demonstração como esta, são definidas as próprias ferramentas de trabalho contendo um significado ímpar para cada função do ofício.

Mais ainda, Gödel[32] simboliza os axiomas de Dedekind-Peano através das definições acima. A saber, um deles: $x_2(0)\ .\ x_1[]\big(x_2(x_1) \supset \mathrm{x}_2(fx_1)\big) \supset x_1[]\big(x_2(x_1)\big)$. Este, por sua vez, pode ser interpretado como: *se uma classe de indivíduos contém o número 0 e é valido que para todo número e seu sucessor pertençam a essa mesma classe, então todo número está nessa classe*. A pesar de se referir a mesma coisa, na linguagem atual, pode ser exposto como: *se um conjunto N de números contém o 0 e também o sucessor de todo número de N, então todo número está em N.*

Apesar disso, a complexidade que é abordada em sua demonstração vai além disso. É em vista disso que Ernest Nagel e James Newman e outros pensadores como John Barkley Rosser dedicaram seu tempo para facilitar a compreensão desse gigante da matemática não excluindo rigores essenciais para uma demonstração informal do Teorema da Incompletude.

3.4 **Codificando o código**

A principal ideia da unicidade das sequências de números está no usufruto de um teorema da matemática. Veja, temos até então que qualquer sucessão finita de símbolos primitivos (e por isso a qualquer fórmula) corresponde 1 – 1 a uma sucessão finita de inteiros positivos. Mas como torna-la única afim de que possamos relacioná-la a somente um número inteiro positivo? Gödel explica.

> Definiremos agora uma injeção das sucessões finitas de inteiros positivos (que é de novo 1 – 1) nos números naturais, fazendo o número $2^{n_1} * 3^{n_2} * \ldots * p_k^{n_k}$ corresponder à sucessão $n_1, n_2, \ldots\ , n_k$ e em que p_k designa o número primo de ordem k, (por ordem de grandeza). Assim, não só a qualquer símbolo primitivo como também a

[31] (GÖDEL, 2009, p.10)
[32] (GÖDEL, 2009, p. 13)

> qualquer sucessão finita de símbolos primitivos está associada 1 – 1 um número natural. (GÖDEL. 2009, p. 16)

Por exemplo, poderíamos pegar a sentença $\big((\sim p) \rightarrow p\big) \rightarrow \sim p$ que tem como sucessão de inteiros $8\ 8\ 1\ 17^2\ 9\ 3\ 17^2\ 9\ 3\ 17^2$ e codifica-la para um único número: $2^8 * 3^8 * 5 * 7^{17^2} * 11^9 * 13^3 * 17^{17^2} * 19^9 * 23^3 * 29^2$.

Esse valor inteiro positivo é denotado por **Número de Gödel.** Isso significa que qualquer valor inteiro positivo é um número de Gödel? Não. Observe, a definição que Gödel utiliza, é baseada na unicidade de que todo número inteiro positivo tem ao ser fatorado por números primos; este, é conhecido como o Teorema Fundamental da Aritmética. Os números de Gödel são necessariamente pares, pois o número 2 é um fator dele e, mais ainda, é um produto de primos sucessivos começando pelo 2.

Ou seja, nem sempre é possível operar meramente com os símbolos (ou números) afim de encontrar um **número de Gödel** que diga respeito à alguma propriedade matemática, vai depender totalmente das escolhas que serão feitas para compor as potências dos fatores primos. Caso seja pego aleatoriamente os números da tabela acima, você pode chegar a conclusões precipitadas como 0 = SS0; o que não é verdade. Logo, todo número de Gödel pode ser construído e identificado (basta fatorar), mas *nem todo número de Gödel é uma afirmação matemática.*

Entretanto, essa codificação única, não se limita apenas aos símbolos, mas a fórmulas e demonstrações.

> Uma fórmula é uma sucessão finita de termos primitivos e uma demonstração é uma sucessão finita de fórmulas. A cada fórmula faremos corresponder o inteiro que corresponde à sucessão de inteiros que correspondem aos seus símbolos; e a cada demonstração, faremos corresponder o inteiro que corresponde à sucessão de inteiros que correspondem às fórmulas que a constituem. Então determinamos assim uma correspondência 1-1 entre as fórmulas (demonstrações) e um subconjunto do conjunto dos inteiros positivos. (GÖDEL. 2009, p. 78)

Com isso, Gödel engenhosamente faz com que os enunciados metamatemáticos sobre as propriedades estruturais das expressões matemáticas se espelham dentro do próprio cálculo.

> Os conceitos (proposições) metamatemáticos tornam-se conceitos (proposições) sobre números naturais ou sucessões destes e por isso são (pelo menos parcialmente) exprimíveis eles próprios no simbolismo do sistema P M. Em particular, pode-se mostrar que os conceitos *fórmula, figura de uma demonstração, fórmula demonstrável* são definíveis no sistema P M., i. e., pode-se apresentar uma fórmula F(v) de P M com uma variável livre v (do tipo de uma sucessão de números) tal que F(v), quando intuitivamente interpretada, diz o seguinte: v é uma fórmula demonstrável. Agora, podemos obter uma proposição indecidível no sistema P M, i. e., uma proposição A para a qual nem A nem não-A é demonstrável. (GÖDEL, 2009, p. 7)

Essa proposição indecidível a qual Gödel se refere é o ápice final desse texto. Este, parte do seguinte enunciado metamatemático: a sequência de fórmulas com o número Gödel x é uma prova (no P M) da fórmula com o número Gödel z. Essa relação, é escrita como a fórmula **Dem(x, z)** e, a partir daí, tendo estabelecido essa relação, uma fórmula aritmética **G** é construída representando a proposição metamatemática "**A fórmula G não é demonstrável no P M"**. É nessa fórmula aritmética **G**, autorreferencial, que entra um paradoxo similar ao do copo quebrado: o paradoxo do mentiroso.

Dessa forma, como Gödel partiu do pressuposto de que o P M é consistente, não deveria haver contradições. Se supormos que a fórmula "**G = A fórmula G não é demonstrável no P M"** é uma prova dentro do sistema, teríamos uma contradição; pois, a mesma diz que não é demonstrável e, mais ainda, teríamos uma demonstração de uma fórmula falsa.

Da mesma forma, se supormos a negação de G, isto é, **~ G = A fórmula G é demonstrável no P M"** também teríamos um absurdo. Note, se existir uma prova para **~ G**, consequentemente, existirá uma prova para **G**, pois o sistema em questão é dito ser consistente. Logo, tanto **G** quanto **~ G** seriam demonstráveis, o que é impossível e, portanto, teríamos uma proposição que afirma a sua própria indemonstrabilidade.

Então, deriva-se a conclusão metamatemática de que há fórmulas verdadeiras dentro desse sistema, mas que não são demonstráveis nele e, dessa forma, um sistema axiomático da aritmética não é completo mesmo colocando essa fórmula **G** como um axioma, pois, pelo procedimento orquestrado por Gödel, se poderia encontrar uma outra fórmula autorreferencial **G'** que voltasse para **G**. Mas, veja, ao contrário do que pareça, essa proposição não é circular, porque afirma a indemonstrabilidade de uma fórmula especificamente definida e, além disso, só posteriormente se verifica que esta fórmula é exatamente aquela que exprime a proposição (GÖDEL, 2009, p.9).

À vista disso, temos que *qualquer sistema axiomático capaz de expressar a aritmética básica é incompleto* (primeiro Teorema da Incompletude). Desta afirmação, surge que *se um sistema como P M é consistente, então sua consistência não pode ser provada a partir dos seus axiomas* (segundo Teorema da Incompletude). Como explica Batistela[33],

> Gödel descreve como construir uma fórmula aritmética A, que representa a proposição metamatemática: "A aritmética é consistente", e ele mostrou que A → G é um teorema, bem como, A não é teorema. Assim, a consistência da aritmética não pode ser estabelecida por um argumento que possa ser representado no cálculo aritmético formal.

Por fim, vale ressaltar que,

> Este imponente resultado da análise de Gödel não deve ser mal compreendido: não exclui a prova metamatemática da consistência da aritmética. Exclui sim uma prova de consistência que pode ser espelhada pelas deduções formais da aritmética. As provas metamatemáticas da consistência da aritmética [...] são de grande significação lógica, entre outras razões porque propõe novas formas de construções metamatemáticas e porque ajuda por este meio a esclarecer como a classe de regras de inferência precisa ser ampliada, se é que se pretende estabelecer a consistência da aritmética. (NAGEL, 2007, p. 84)

---

[33] (2017, p. 41)

3.5 **Gödel, Tarski e o Mentiroso**

O paradoxo do copo quebrado não surge à toa. É uma introdução metafórica sobre contradições que surgem em linguagens cotidianas como, essencialmente, a antinomia do mentiroso atribuída ao filósofo Eubulides, que viveu na Grécia por volta do século IV a.C. Tal contradição lógica foi debatida por vários filósofos e lógicos durante os séculos seguintes e ninguém sabe, ao certo, se foi ele mesmo quem disse a primeira vez a sentença: um homem que se refere a si mesmo como mentiroso, é verdadeiro ou falso?

De qualquer forma, esse paradoxo tem importância na contemporaneidade devido ao "espanto" em que filósofos obtiveram ao encontrá-lo em linguagens corriqueiras sem grandes formalidades. Em particular, Alfred Tarski[34] constrói uma forma rigorosa para excluir esse paradoxo de dentro dos sistemas formalizados, isto é, um sistema em que a estrutura de sua linguagem é especificada e os teoremas são as únicas sentenças que podem ser ditas como afirmações incontestáveis.[35]

Para obter essa antinomia sem grandes rigores lógicos ou históricos e irmos direto ao ponto, considere o paradoxo do copo quebrado. Rômulo faz uma afirmação sobre si mesmo e, ao mesmo tempo, afirma algo sobre Remo; a saber, que o próprio diz a verdade. Em seguida, Remo parte para o mesmo caminho afirmando algo sobre si mesmo, mas afirma que Rômulo é mentiroso. Veja, não há nada de errado no que Rômulo e Remo dizem, mas são as circunstâncias que provocaram ciclos entre as sentenças e, consequentemente, não havendo consistência na fala dos dois. Portanto, não há como saber quem diz a verdade, apesar de sabermos que um dos dois (hipótese) quebrou o copo.

---

[34] Torna-se relevante falar sobre Alfred Tarski nesse capítulo por causa da sua contribuição em definir o conceito de verdade a partir de sua frustração com o paradoxo do mentiroso e, também, na implicância que este conceito junto com o de demonstrabilidade, exerce sobre sistemas formalizados como os da matemática que, consequentemente, se obtém um resultado similar (como veremos) ao de GÖDEL. Portanto, essa ênfase sobre Tarski nesse capítulo não é tomada de forma arbitrária.

[35] Assim, para especificar a estrutura de uma linguagem, devemos indicar todas as palavras que decidimos usar sem definição, e que são chamados "termos não definidos (ou primitivos), e apresentar as chamadas regras de definição para introduzir termos definidos ou novos. Além disso, devemos estabelecer os critérios para distinguir, na classe de expressões, aquelas que denominaremos "sentenças". Finalmente, devemos formular as condições sob as quais uma sentença pode ser afirmada; em particular, devemos indicar todos os axiomas (ou sentenças primitivas), isso é, as sentenças que decidimos afirma sem prova. E devemos fornecer as chamas regras de inferência (ou regras de demonstração) por meio das quais podemos deduzir novas sentenças, afirmadas a partir de outras sentenças previamente afirmadas. Os axiomas, assim como as sentenças dele deduzidas por meio das regras de inferência, são chamados "teoremas" ou "sentenças demonstráveis". (TARSKI, 2006, p. 165-166)

> É um fato que estamos aqui na presença de um absurdo, que fomos levados a afirmar uma sentença falsa. Se tomarmos nosso trabalho a sério, não podemos aceitar esse fato. Devemos descobrir sua causa, isto é, devemos analisar as premissas nas quais a antinomia é baseada. Devemos, então, rejeitar pelo menos uma dessas premissas, e investigar as consequências que isso traz para todo o domínio de nossa pesquisa. Enfatizemos que as antinomias desempenharam um proeminente papel no estabelecimento dos fundamentos das ciências dedutivas modernas. E, assim como as antinomias da teoria das classes, e em particular a antinomia de Russel (da classe de todas as classes que não são membros de si mesmas), foram o ponto de partida para as tentativas bem-sucedidas de uma formalização consistente da lógica e da matemática (TARSKI, 2006, p.168)

Dentre esta e outras antinomias, surgem questões inquietantes. O que significa “verdade” afinal? Como podemos conceitua-la sem cairmos em paradoxos autorreferenciais? Como é demonstrado que algo é verdadeiro? “Demonstrar” e “verdade”, tratam-se da mesma coisa ou são diferentes? Caso forem esta última, o conjunto de sentenças demonstráveis tem a mesma quantidade do conjunto das sentenças verdadeiras? Ciente dessas indagações, continuemos.

O problema da definição da verdade ganha um significado preciso e pode ser resolvido de maneira rigorosa apenas para aquelas linguagens cuja estrutura foi especificada com exatidão[36]. Tarski, dessa maneira, suscinta que as linguagens *semanticamente fechadas* que contém as leis básicas da lógica, são inconsistentes por natureza. Isto é, linguagens que contém a definição de verdade inclusas nelas próprias referindo-se a sentenças da mesma, usufruindo de leis da lógica clássica, contém facilmente um paradoxo do mentiroso. Dessa forma, Tarski faz uma amputação: rejeita-se linguagens semanticamente fechadas e mantém as leis da lógica básica em funcionamento.[37]

---

[36] (TARSKI, 2006, p.166)

[37] Tal restrição seria, é claro, inaceitável para aqueles que, por razões que não me são claras, acreditam que há apenas uma linguagem “genuína” (ou pelo menos que todas as linguagens “genuínas” são mutuamente traduzíveis). Contudo, essa restrição não afeta as necessidades ou interesses da ciência de nenhuma forma essencial. As linguagens (ou as formalizadas, ou – o que é mais frequentemente o caso – as porções da linguagem cotidiana) que são usadas no

Uma vez feito isso, esse processo cirúrgico é anestesiado através de uma definição de verdade denotada por T: “p” é verdadeira se e somente se p. Onde “p” deve ser substituído, em ambos os lados, pela sentença ao qual se constrói uma definição; mais ainda, para evitar contradições em que “p” assume a palavra “verdadeiro” como parte sintática da sentença, se deve formular duas linguagens semanticamente abertas: a linguagem-objeto e a metalinguagem. A primeira, é a linguagem “a cujo respeito se fala” e a definição de verdade se aplicará a sentenças dessa linguagem. A segunda, é a linguagem que fala *sobre* a primeira; isto é, onde definiremos o termo “verdade”. Nesse caso, “p” deve ser substituído (em ambos os lados da equivalência) por uma sentença qualquer pertencente à linguagem-objeto e, tendo que essas consequências sejam formuladas na metalinguagem, conclui-se daí que a primeira deve ser uma sentença da segunda. Essencialmente, ambas não podem coincidir em tamanho nem ser nela traduzível, se excluindo a possibilidade de sentenças autorreferenciais[38] e, consequentemente, surge o que Tarski define como hierarquia de linguagens:

> Devemos observar que esses termos, “linguagem-objeto” e “metalinguagem”, têm um sentido apenas relativo. Se, por exemplo, ficamos interessados na noção de verdade que se aplique a sentenças não de nossa linguagem-objeto original, mas de sua metalinguagem, esta última torna-se automaticamente a linguagem-objeto de nossa discussão. E, para definir a verdade para esta linguagem, temos de ir para uma nova metalinguagem – por assim dizer, para uma metalinguagem de nível superior. Desse modo, chegamos a toda uma hierarquia de linguagens. (TARSKI, 2006, p. 170)

Ou seja, tomando como exemplo uma linguagem-objeto L_0 contendo um discurso formalizado, nela não poderá haver predicados semânticos aplicáveis a uma própria sentença dessa linguagem. Em outras palavras, não poderá haver uma sentença autorreferencial que afirmará sua própria negação. Assim, se quisermos dizer algo a respeito de L_0 com

---

discurso científico não tem de ser semanticamente fechadas. Isso é óbvio no caso em que fenômenos linguísticos, e em particular as noções semânticas, não entram de modo algum na consideração de uma ciência. Pois, em tal caso, a linguagem dessa ciência não precisa ser dotada de termo semântico algum. (TARSKI, 2006, p. 169)

[38] (TARSKI, 2006, p.220)

base em predicados sentenciais, teremos que subir para uma linguagem L_1 essencialmente mais rica contendo não só o predicado T, mas toda a linguagem L_0 e, mais ainda, termos que denotam nomes para as sentenças e outras expressões, bem como as relações entre si. Todavia, para obter um predicado T para L_1 se deve subir mais um grau hierárquico L_2 sendo, esta, uma metalinguagem para L_1 e assim sucessivamente.

Dessa forma, segundo a concepção Tarskiana, o paradoxo do mentiroso e suas variantes não serão mais um problema, pois, basta atribuir na metalinguagem uma afirmação sobre uma sentença autorreferencial de uma linguagem-objeto que expresse uma propriedade semântica através de um predicado. Isto é, invés de considerarmos a sentença "esta afirmação é falsa", basta afirmar "esta afirmação é falsa em L_k" e, assim, haverá um predicado sentencial em L_{k+1} que acuse uma propriedade semântica sobre expressões de L_k, até porque, a segunda sentença não está, ela própria, definida em L_k e sim em L_{k+1}.

Apesar da construção feita por Tarski, ele enfatiza ainda que independente do que "consigamos ao construir uma definição adequada de verdade para uma linguagem científica, um fato parece certo: a definição não traz consigo um critério operativo que possa decidir quando sentenças particulares dessa linguagem são verdadeiras ou falsas (e, de fato, a definição não é projetada com esse propósito)[39]".

Isto diz respeito em como a definição de demonstrabilidade (ou demonstração) possui um papel importante em teorias formalizadas. Apenas investigações profundamente rigorosas poderão comprovar de forma clara se o que a sentença diz é, de fato, uma verdade. A definição de demonstração ao qual Tarski aborda é equivalente ao que estamos habituados a fazer[40].

> A noção de demonstração refere-se justamente a um procedimento para determinar a verdade de sentenças empregado primordialmente nas ciências dedutivas. Tal procedimento é elemento essencial do que é conhecido por método axiomático, atualmente o único método usado para desenvolver as disciplinas matemáticas. [...] O primeiro passo em direção a suplementar uma teoria matemática

[39](TARSKI, 2006, p. 221)

[40] Uma demonstração formal de uma sentença dada consiste em construir uma sequência finita de sentenças tal que (1) a primeira sentença na sequência é um axioma, (2) cada uma das sentenças seguintes ou é um axioma ou, então, é derivável diretamente de algumas sentenças que a precedem na sequência através de uma das regras de demonstração. E (3) a última sentença na sequência é aquela que deve ser demonstrada. (TARSKI, 2006, p.226)

> com a noção de demonstração formal é a formalização da linguagem da teoria, no sentido previamente discutido, quando abordamos a definição de verdade. [...] Uma teoria axiomática cuja linguagem tenha sido formaliza e para a qual tenha sido fornecida a noção de demonstração formal é chamada teoria formalizada (TARSKI, 2006, p. 222 - 226)

É em virtude desses apontamentos de Tarski que a relação entre verdade e demonstração nos remete ao Teorema da Incompletude de Gödel. Afinal de contas, tal procedimento objetiva a obtenção de sentenças verdadeiras e, consequentemente, como sabemos, nem todas essas sentenças serão demonstráveis.

> Em particular, usando a descrição de sentença fornecida pelas regras sintáticas da linguagem-objeto, é fácil arranjar todas as sentenças (das mais simples às cada vez mais complexas) em uma sequência infinita, numerando-as consecutivamente. Dessa forma, relacionamos toda sentença a um número natural de tal forma que dois números relacionados com duas sentenças diferentes sejam sempre diferentes. Em outras palavras, estabelecemos uma correspondência um para um ente sentenças e números. Esse procedimento, por seu turno, leva-nos a uma correspondência similar entre conjuntos de sentenças e conjuntos de números ou relações entre sentenças e relações entre números. Em particular, podemos considerar os números das sentenças demonstráveis e os números das sentenças verdadeiras, aos quais chamaremos, abreviadamente, números demonstráveis e números verdadeiros. Nosso problema principal fica, então, reduzido à seguinte questão: são idênticos os conjuntos dos números demonstráveis e dos números verdadeiros? (TARSKI, 2006, p.229)

Note, Tarski usufrui da numeração de Gödel para estabelecer as correspondências entre os conjuntos (ou relações) de sentenças e números de forma única[41] e, com base nisso e na sua definição de verdade ele conclui que a definição de demonstrabilidade pode ser definida dentro do sistema em questão, mas a de verdade, não.

> Confirmamos essa conjectura mostrando que se o conjunto dos números verdadeiros pudesse ser definido na linguagem da aritmética, a antinomia do mentiroso poderia ser realmente reconstruída nessa linguagem. Uma vez, entretanto, que estamos agora lidando com uma linguagem formalizada restrita, a antinomia assumiria uma forma mais complexa e sofisticada. [...] Assim, o conjunto dos números demonstráveis não coincide com o conjunto dos números verdadeiros, já que o primeiro é definível na linguagem da aritmética, enquanto o segundo não o é. Consequentemente, também, não coincidem o conjunto das sentenças demonstráveis e o das sentenças verdadeiras. Por outro lado, usando a definição de verdade, facilmente demonstramos que todos os axiomas da aritmética são verdadeiros e que todas as regras de demonstração são infalíveis. Logo, todas as sentenças demonstráveis são verdadeiras e, por conseguinte, a conversa não pode valer. Dessa forma, nossa conclusão final é: existem sentenças formuladas na linguagem da aritmética que são verdadeiras, mas não podem ser demonstradas com base nos axiomas e nas regras de demonstração aceitos na aritmética. (TARSKI, 2006, p.230-231)

Para concluir, convém enfatizar que esse resultado de Tarski complementa ainda mais o de Gödel a respeito das teorias matemáticas. Por um lado, o Teorema da Incompletude diz respeito da existência de sentenças indemonstráveis dentro de um sistema suficientemente capaz de conter o mínimo de aritmética básica, soma e multiplicação, bem como apontam que sua consistência não pode ser provada por artifícios que

[41]Devemos o método aqui usado a Gödel, que o empregou para outros propósitos em seu trabalho recentemente publicado. Esse artigo, extremamente importante e interessante, não está diretamente relacionado com o tema de nosso trabalho – ele trata de problemas estritamente metodológicos: a consistência e a completude de sistemas dedutivos; contudo, poderemos utilizar os métodos e, em parte, também os resultados das investigações de Gödel para o nosso propósito. (TARSKI, 2006, p.117)

residem dentro dessa teoria independentemente do acréscimo de axiomas. Isto é, qualquer forma de contornar o problema, haverá sentenças indecidíveis da mesma forma e, no caso de provar a consistência é preciso, portanto, uma teoria axiomatizada essencialmente mais rica para que isso ocorra. Por outro lado,

> O resultado mostra que, na verdade, em nenhum domínio da matemática a noção de demonstrabilidade é um substituto perfeito para a noção de verdade. A crença em que uma demonstração formal pode servir como instrumento adequado para estabelecer a verdade de todos os enunciados matemáticos mostrou-se desprovida de fundamento. [...] A noção de sentença verdadeira atua, assim, como um limite ideal que nunca pode ser atingido, mas do qual tentamos nos aproximar através da ampliação gradual do conjunto de sentenças demonstráveis. Não existe conflito entre as noções de verdade e de demonstração no desenvolvimento da matemática: as duas não estão em guerra e, sim, coexistem pacificamente. (TARSKI, 2006, p. 232-233)

4 FAKE NEWS: O JORNAL DA VERDADE

O presente capítulo aborda uma entrevista fictícia entre um jornalista chamado Sr. Bôk Bertha Liar e o ilustre convidado, Sr. Kurt Gödel. As perguntas do jornalista estarão intimamente ligadas sobre o Teorema da Incompletude e seus impactos filosóficos. Apesar disso, nenhuma pergunta será consistente com o real significado desse teorema, isto é, serão baseadas em falácias comumente ligadas a este célebre artigo. Também, a maioria das perguntas foram retiradas, traduzidas e modificadas do livro espanhol *Gödel ∀ (para todos)* de Guilhermo Martínez e Gustavo Ernesto Piñeiro, para que fosse possível compor esse capítulo.

Além disso, existem citações do próprio Gödel que foram retiradas do seu artigo *Alguns Teoremas básicos sobre os fundamentos da matemática e suas implicações* que está disponível na segunda edição da obra O teorema de Gödel e a Hipótese do Continuum do ano de 2009. Com isso, para simplificar a compreensão e manter a estética do texto, todas as fontes que estão em Arial são citações diretas do Gödel. Também, a referência contendo a página do livro citado estará como nota de rodapé.

Portanto, as falas que não estão em Arial, não se referem a uma citação do próprio, mas sim numa interpretação íntima do Teorema da Incompletude. Logo, o objetivo principal é desmentir falácias sobre o trabalho de Gödel e suscitar questões filosóficas que circundam a matemática.

Nárnia, sexta-feira, 01 de abril de 1980

THE FAKENEWS

A ENTREVISTA

Bôka Bert Laier: A matemática está sofrendo as maiores mudanças já vistas em tão pouco tempo desde o século XVII. O que ela cresceu nesses últimos 200 anos é um absurdo comparado a todos os anos que ela existiu. Em seu caso, é uma revolução através dos números e da lógica o que o senhor fez, caro Gödel! Os matemáticos, como bem sabemos atualmente, vivem em situações opostas no que se refere os fundamentos desta ciência. De um lado, há quem diga que foi criada e, de outro, há quem diga que foi descoberta! O que o Sr. pensa sobre isso?

Kurt Gödel: Primeiramente boa noite, Sr. Bôka Bert. Espero que você esteja bem! Meu caro, penso em muitas coisas. Mas, sendo direto, em meados de 1926 tive o prazer de ter aulas com o professor Heinrich Gomperz e foi através dele que me apaixonei durante a universidade. O platonismo ascendeu uma chama em minha alma e no meu coração que eu nunca sentia antes! Foi através disso que fez eu **descobrir** cada vez mais matemática ao meu redor. Mas o que penso, é uma dificuldade intrínseca ligada a estas perguntas. Quem argumenta ser descoberta, tem o trabalho árduo de explicar como a acessamos e, do outro lado, a dificuldade está em responder como ela se aplica tão bem em nossa realidade. Eu contemplei o Belo ao qual Platão se referia!

Bôka Bert Laier: Então o Sr. terá uma dificuldade notável para tentar explicar esse mundo das ideias, pois, uma implicação direta do seu famoso teorema está intimamente relacionada com a limitação da razão humana! Como pode, dessa forma, explicar tal contemplação se somos insuficientes racionalmente?

*Kurt Gödel**: Nein! Nein! Nein!*** Meu teorema não diz respeito em nada sobre uma possível limitação da razão humana! Sr. Laier, você está sendo presunçoso com tal afirmação. Pode haver uma limitação inerente à humanidade, mas meu teorema não está sendo aplicado em uma modelação completa do pensamento humano, se que haja tal façanha. Meu caro, os sistemas ao qual me refiro, são essencialmente dotados do mínimo de aritmética possível, isto é, devem conter substancialmente as operações de soma e multiplicação. É nesse tipo de sistema formal que meu teorema se aplica e, mais ainda, estes devem ser consistentes!

Kurt Gödel: Mas veja, a incapacidade do homem em compreender a si próprio pode aparecer para você, erradamente, como sendo a ilimitação ou a inexaustibilidade da mente humana.

Mas repare, por favor, que se fosse assim, isso de modo algum seria derrogatório para a incompletabilidade da matemática objetiva[42]. Pelo contrário, torná-la-ia apenas particularmente notória. Porque se a mente humana fosse equivalente a uma máquina finita, então a matemática objetiva seria não só incompletável no sentido de não estar contida em qualquer sistema axiomático bem definido, mas mais do que isso, existiriam problemas *absolutamente* insolúveis, em que o epíteto "absolutamente" significa que seriam indecidíveis não apenas dentro de um sistema axiomático particular, mas por qualquer demonstração matemática que a mente humana possa conceber.[43]

Bôka Bert Laier: De igual modo, Sr. Gödel. A consistência de um sistema implica, profundamente, em não haver contradições. O primeiro Teorema da Incompletude nos diz, portanto, que nenhuma verdade pode ser estabelecida de forma definitiva, já que existe pelo menos uma sentença que não é demonstrável bem como sua própria negação. Como você avalia esse raciocínio?

*Kurt Gödel***:** Avalio através da definição de Aristóteles sobre o conceito de verdade. "Dizer do que é que não é, ou do que não é que é, é falso, enquanto que dizer do que é que é, ou do que não é que não é, é verdadeiro".

Bôka Bert Laier: O senhor pode ser um pouco mais direto?

*Kurt Gödel***: For God's sake!** Ser consistente implica sim em não haver contradições, mas minha demonstração não exibe um teorema sobre a verdade propriamente dita. E sim sobre uma insuficiência que os sistemas axiomáticos, dotados de aritmética, possuem para explicitar a totalidade de enunciados verdadeiros. Sr. Bôka Bert, é como pensarmos na limitação que um sistema judiciário tem em analisar dois suspeitos que estavam no local de um crime, onde, ambos sabem quem cometeu tal delito, entretanto, os dois alegam que não foram nenhum deles. Nesse caso, a verdade está guardada na mente de cada um deles e o sistema judiciário terá que buscar outros meios para demonstrar que um deles certamente é o infrator.

Bôka Bert Laier: A verdade, nesse caso, é encontrada através de uma série de demonstrações através de vestígios do crime.

Kurt Gödel: Logicamente!

---

[42] GÖDEL se refere em matemática objetiva como a matemática *stricto sensu*, onde, se entende ser o sistema de todas as proposições matemáticas demonstráveis. (2009, p.895)

[43] (GÖDEL, 2009, p.896)

Bôka Bert Laier: O segundo Teorema da Incompletude afirma que um sistema, como o senhor diz, dotado de aritmética, é incapaz de provar sua própria consistência. Isso significa que não existe uma certeza absoluta, mesmo no domínio da matemática?

Kurt Gödel: De forma alguma, excelentíssimo Bôka Bert. Como eu disse agora há pouco, ambos os teoremas, nesse caso, se referem à uma insuficiência dos sistemas axiomáticos. Não fiz absolutamente nada contra o que já foi feito de matemática até os dias atuais. Não invalidei nenhum teorema, corolário ou aplicações imediatas na realidade. Tudo o que foi feito até o momento, uma vez demonstrado a partir de um sistema axiomatizado, é certamente verdadeiro. Dois mais Dois sempre será quatro, bem como o Teorema de Pitágoras sempre será aplicável num triângulo retângulo.

Bôka Bert Laier: É o Teorema da Incompletude que impede de haver teorias completas e consistentes?

Kurt Gödel: Que falácia, Sr. Laier. Hoje é o dia da mentira mesmo! Ora, a palavra "completa" ao qual você se refere, suponho eu, é devido ao termo de completude. Esta última, expressa uma propriedade do sistema. Isto é, significa que se uma fórmula encontrada semanticamente através de outras fórmulas, é aplicável dentro desse sistema, então existe uma dedução lógica e rigorosa através dos axiomas que chegará nessa fórmula e, portanto, será um teorema do sistema. A consistência, como disse anteriormente, implica em não haver contradições dentro do sistema. Dessa forma, meu teorema não implica diretamente em teorias "completas" e consistentes. Veja, o cálculo de predicados e o cálculo proposicional são ambas teorias consistentes e completas.

Kurt Gödel: Ora, mais ainda, o teorema diz que para qualquer sistema bem definido de axiomas e regras, em particular a proposição que afirma a sua consistência, é indemonstrável a partir dos axiomas e das regras, desde que estes axiomas e regras sejam consistentes e suficientes para derivar um certo fragmento da aritmética finitista dos inteiros como os axiomas de Peano-Dedekind, por exemplo. É isso que torna a incompletabilidade da matemática particularmente evidente. Porque torna impossível que alguém formule um certo sistema bem definido de axiomas e regras e que faça consistentemente acerca dele a seguinte afirmação: tenho (com uma certeza matemática) a percepção de que todos estes axiomas e regras são corretos e além disso acredito que contém toda a matemática.[44]

[44] (GÖDEL, 2009, p. 894)

Bôka Bert Laier: Obrigado pela entrevista, Sr. Gödel. O pessoal estava eufórico aqui com tantos questionamentos e dúvidas referente ao seu trabalho. Haviam pessoas que confundiam seu teorema da completude com o da incompletude e que um contradiz o outro, mas não se trata nada disso, certo?

Kurt Gödel: Perfeitamente, Sr. Laier. O teorema da completude trata-se de uma afirmação sobre a lógica da primeira ordem e, posso afirmar com toda certeza, o Teorema da Incompletude trata-se de um teorema metamatemático acerca dos sistemas formais capazes de conter a aritmética e, por isso, excedem sistemas de primeira ordem. Até porque, o argumento principal da minha demonstração, o paradoxo, só é possível pela consistência da numeração única que criei. Ou seja, novamente, são sistemas particulares contendo fragmentos matemáticos ao qual o teorema se aplica.

Bôka Bert Laier: Agradeço a paciência Sr. Gödel! A entrevista está encerrada.

5 APRENDENDO COM GÖDEL

No presente capítulo, serão abordadas sugestões para o curso de licenciatura em Matemática da UFSC-BNU tendo em vista a formação inicial do estudante. Essas sugestões, serão baseadas através da tese de doutorado da professora Rosemeire de Fatima Batistela (2017) intitulada *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em matemática* em conjunto com o próprio Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática da UFSC-BNU (2016), bem como os objetivos de cada disciplina que foram escolhidas para um possível tratamento desse teorema com base nos conteúdos que são estudados nessas matérias. Dessa forma, para deixar o texto limpo, subentende-se que todas as citações abaixo referem-se aos trabalhos citados acima. Caso haja alguma citação exterior, está totalmente referenciado.

5.1 A justificativa

Desde as épocas mais remotas da história humana as pessoas que construíram a matemática não tinham, inicialmente, o objetivo de compreender o mundo. Era puramente uma questão organizacional dentre as sociedades em prol do desenvolvimento humano da época. Não sabemos como e onde começou a surgir esse pensamento, mas entende-se que diferentes grupos e culturas convergiam para esse modo de pensar. O pensar, nesse aspecto, refere-se ao próprio ato de reflexão, meditação, observação, análise e relação entre todos os sentidos do Homem enquanto espécie.

Com efeito, as diferentes formas de se pensar matematicamente se deu através da relevância social que este campo do conhecimento obteve no passar dos anos. A compreensão sobre o mundo e a vida foram temas centrais desta ciência enquanto desenvolvimento humano. Esse trabalho pode ser visto através de todas as tecnologias que usufruímos hoje, presentes desde os meios de locomoção até as melhores formas de interpretação social por meio de uma rede de informações socialmente relevantes. Dados, gráficos, tabelas, computadores, formas de organização, fazem parte do conhecimento matemático e permitem uma análise crítica da sociedade dentre tantas outras coisas.

A matemática está enraizada em nossa história moldando nossa forma de enxergar o mundo até os tempos atuais. Esta ciência, portanto, é imprescindível para a formação humana não só em vista à sua história, mas o que ela significa para o pensamento humano. Conforme aponta Batistela:

> À época do aparecimento do TIG (Teorema da Incompletude de Gödel) reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*, isto é, de que não haveria problema bem colocado que com o devido empenho dos matemáticos não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com o indecidível em seu TIG confere a esta ciência uma visão de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal.

Desse modo, pode-se afirmar que o teorema de Gödel está exclusivamente ligado a forma como concebemos a matemática hoje. Sua demonstração não somente quebrou o paradigma do pensamento de Hilbert, mas nos convenceu de que a intuição é uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer Matemática.

> Dada a importância desse teorema, principalmente no que se refere à sua relevância cultural para a Matemática, entendemos que a apresentação do resultado do fenômeno Gödeliano é uma informação imprescindível que deve estar presente entre os conteúdos elencados para serem trabalhados em cursos de licenciatura em Matemática. Apoiamos que este tratamento seja realizado de forma intelectualmente honesta de modo que oportunize ao graduando em Matemática conhece-lo, vivenciando o resultado desde o primeiro ano do curso. [...] para que estes professores em forma/ação tomem contato com o TIG, o qual diz das possibilidades de ser da própria Matemática e da distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática. As principais ideias que permeiam o resultado podem aparecer em diferentes oportunidades no decorrer do curso.

Com isso, os futuros professores de matemática não devem concebê-la como exata e incontestável, mas uma ciência que foi construída através de uma abstração contendo um rigor lógico que, por mais forte que seja, haverá problemas em que se pode cogitar sua indecidibilidade e possivelmente demonstrá-la. Cogitar, nesse sentido, refere-se a uma questão de pura intuição e pensamento; pois, através dos trabalhos de Alonzo Church (1936) e Alan Turing (1937) compreende-se que não há nenhum algoritmo para decidir relações de verdade ou falsidade onde as operações de soma e multiplicação ocorram, mas isso não significa, segundo Gödel (1964), que isso estabeleça limites aos poderes da razão humana, mas uma implicação direta no formalismo puro da matemática. Dessa forma, ao depararmos com uma conjectura matemática, não será possível aplicar um algoritmo de decidibilidade para verificar sua veracidade ou falsidade; entretanto, ainda é possível demonstrar que tal conjectura seja indecidível.

Como esse teorema reflete na desconstrução da matemática ser exata e incontestável e na compreensão do pensamento humano, mostra-se claro a relevância que há em trabalhá-lo no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC, uma vez que, entra em confluência com as ideias escritas em seu PPC[45]:

> Assim, a formação dos futuros professores de matemática deve passar por um conhecimento dos problemas internos da Matemática, mas não pode se restringir a eles. Conhecer e dominar a abstração, o rigor lógico e as aplicações devem ser os passos iniciais para a compreensão da importância desta ciência, entretanto, uma formação que vise uma análise crítica da sociedade precisa ir além: desconstruir os mitos em torno das dificuldades de aprendizado desta ciência; descontruir a visão do matemático como alguém excêntrico; desenvolver uma compreensão da Matemática enquanto criação humana por meio do estudo de sua história; e compreender o papel ideológico da Matemática na atual sociedade da informação.

Também, em consonância com o próprio contexto do surgimento do Teorema da Incompletude, a participação da história na Educação Matemática teria um papel ímpar em problematizar a forma como ela foi desenvolvida até o século XX e a quebra de conceitos/paradigmas relacionado a mesma, durante a onda do positivismo lógico em Viena. Visto que, nesse mesmo documento (PPC), é enfatizado a importância da

[45] Este trabalho pode ser encontrado em https://mtmblu.paginas.ufsc.br/files/2014/05/ppc-20171.pdf. Data de acesso: 06/05/2021

história dessa ciência no processo de ensino e aprendizagem do discente de matemática.

> A participação da história na Educação Matemática procura problematizar como a matemática foi desenvolvida em diferentes períodos e contextos históricos, além de propor formas de inserção de atividades didáticas de conteúdos matemáticos baseadas em um diálogo com a história de maneira a desconstruir a ideia de uma matemática pronta e acabada que é apenas descoberta por poucos gênios e mostrar, então, que a matemática como qualquer outra prática sociocultural, se desenvolve por meio de avanços e retrocessos, disputas e condicionamentos de outras práticas socioculturais. Essa tendência da Educação Matemática tem um importante papel na formação crítica do futuro professor de matemática possibilitando uma desmistificação da matemática.

Ainda, as competências relacionadas ao domínio dos conteúdos matemáticos, seus significados e interdisciplinaridade para que o egresso seja capaz de relacioná-los invocam, implicitamente, o fenômeno Gödeliano como um assunto ímpar a ser tratado durante o curso. Algumas dessas competências concretizam ainda mais esse argumento. A saber,

> Compreender como ocorre o inter-relacionamento da matemática com outros saberes modelando fenômenos e percebendo suas aplicações, inclusive como recursos que colaboram para o desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência; compreender os aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento da Matemática; compreender os aspectos lógico-formais relacionados ao desenvolvimento da Matemática com sua coerência interna e os limites de suas verdades.

Assimilar o inter-relacionamento com outros saberes, os aspectos históricos e lógico-formais do desenvolvimento da matemática, “podem ser abordados através de ocasiões oportunas em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas", conforme enfatiza Batistela. Também, nesse mesmo parágrafo, ela considera:

> Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

Portanto, da mesma forma como é colocado que um dos objetivos do curso é "desenvolver conhecimentos matemáticos que propiciem ao futuro professor uma sólida formação matemática que sirva para a ampliação de sua cultura matemática geral e que, ao mesmo tempo, auxilie em suas práticas de ensino", é imprescindível que fenômenos históricos como o Gödel seja trabalhado, estudado e problematizado durante o curso. Uma vez que, não se trata apenas *de* matemática, mas também de pensar *sobre* ela. Conceitos como "metamatemática", nesse aspecto, poderiam ser abordados em disciplinas que visam os fundamentos desta ciência e, consequentemente, propiciariam ao discente uma melhor compreensão dos conhecimentos matemáticos e uma maior ampliação cultural e científica, como consta no objetivo citado[46].

5.2 **As disciplinas**

Abaixo, será exposto três disciplinas encontradas na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC-BNU incluídas no PPC contendo algumas observações gerais sobre a ementa e

[46]Isso não significa que nossa sugestão implique diretamente em alguma alteração no PPC, gerando todo um processo burocrático que envolve o núcleo docente estruturante, o colegiado do curso e a Pró-Reitoria de Graduação, mas a inserção de uma abordagem que potencialize as discussões que já são pretendidas nas disciplinas e, de forma geral, no curso.

alguns conteúdos a serem trabalhados no decorrer da disciplina. Estas, por sua vez, foram escolhidas de tal maneira que haja a possibilidade de trabalhar os conceitos, reflexões e aplicações do Teorema da Incompletude de Gödel com base nas observações que a Batistela (2017) fez em seu trabalho nas disciplinas de um curso de Matemática de outra instituição similares as deste curso.

Com base nisso, far-se-á uma apresentação contendo alguns conteúdos e objetivos que constam na ementa dessas disciplinas que serão sugeridas, para que as sugestões sobre a inclusão do Teorema da Incompletude de Gödel, como um conhecimento essencial para a formação do estudante egresso do nosso curso de Licenciatura em Matemática, ganhem destaque através dos argumentos que se basearam pela ementa e importância do fenômeno Gödeliano.

As disciplinas elencadas fazem parte de dois Núcleos de estudo para uma formação geral; a saber, o Núcleo de Matemática e o de Educação Matemática. O primeiro, contém disciplinas da Educação Básica e do Ensino Superior para que o estudante desenvolva uma profundidade no estudo da matemática.

> A organização das disciplinas do Núcleo de Matemática está planejada de forma a contemplar tópicos de Matemática Elementar e de Matemática Superior. Os conteúdos de Matemática Elementar permitem ao licenciando: identificar e desenvolver com maior profundidade os saberes matemáticos que ensinará no Ensino Básico, articular estes saberes entre si e ter bases matemáticas para assimilar os conteúdos de Matemática Superior.

Nesse contexto, as disciplinas sugeridas para a inserção do TIG serão Elementos de Aritmética e Álgebra e Fundamentos da Matemática. Uma por dar enfoque nos conjuntos numéricos, tendo como objetivos claros fazer com que o estudante compreenda as operações e propriedades elementares da matemática, ampliar sua noção de conjuntos numéricos e propiciar ferramentas que permitam o estudante modelar problemas matemáticos. A outra, por suscitar reflexões no cerne da matemática:

> Em particular, a disciplina de Fundamentos de Matemática tem o objetivo de introduzir as bases da Matemática: Lógica Matemática e a Teoria dos Conjuntos, apresentando ao estudante, já na primeira fase, o pensamento matemático. Essa

> disciplina será o elo entre todos os conhecimentos que serão desenvolvidos no Núcleo de Matemática

Já no Núcleo de Educação Matemática, como consta no PPC, as disciplinas foram organizadas de forma a dar condições para que o licenciando desenvolva competências necessárias ao Ensino de Matemática. A disciplina como sugestão, nesse caso, seria a de História e Filosofia da Matemática, pois, ela tem como objetivo a desconstrução de saberes equivocados que estão relacionados a Matemática:

> Com a disciplina História e Filosofia da Matemática o licenciando poderá desconstruir a visão hegemônica da Matemática como disciplina que se desenvolveu desconectada de outros campos de atividade humana, ao mesmo tempo em que poderá problematizar as diferentes concepções filosóficas desta disciplina.

Convém enfatizar, as disciplinas escolhidas, como se pode notar, operam nos fundamentos da matemática tanto na construção (como base) quanto no sentido figurado da palavra “fundamento”. Isto é, princípios, razões, causas, justificativas, evidências, argumentos, etc. Todas estas moldam a forma de compreensão sobre o que é a Matemática e, o Teorema de Gödel, com toda sua relevância, possui um papel insubstituível nessa reflexão.

5.3 **As sugestões**

A forma como o Teorema da Incompletude apresenta uma característica ímpar no que diz respeito ao cerne da matemática, isso implica diretamente na relevância que o mesmo possui na formação dos professores desta ciência. Em acordo com Batistela, “o TIG confirma a existência de uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer matemática, e nossa visão é que por isso ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo como se compreende Matemática e por conseguinte, à que ensinamos”. Ciente dessa significância, prosseguimos.

Na disciplina de *Elementos de Aritmética e Álgebra*, como visto acima, estabelece a importância que há para o estudante compreender os conceitos que envolvam os conjuntos numéricos e suas propriedades, visando sua formação enquanto docente de matemática. Tendo isso em mente, o conteúdo encontrado no programa de ensino desta disciplina, detém de assuntos associados à aritmética clássica.

> 1.Números naturais: axiomas de Peano-Dedekind, operações em N; propriedades das operações em N; operações em outras bases. 2. Números inteiros: construção de Z a partir de N; operações em Z; propriedades das operações em Z; relação de ordem em Z. 3. Algoritmo da divisão em Z e Teorema Fundamental da Aritmética: algoritmo da divisão; múltiplos e divisores; critérios de divisibilidade; números primos; Teorema Fundamental da Aritmética; MDC e MMC; números relativamente primos; equações diofantinas; congruências. 4. Números racionais e 5. Números reais

Segundo Batistela, em sua análise referente a disciplina Teoria dos Números que, por sua vez, assemelha-se aos conteúdos da disciplina em questão, sugere:

> Observamos um ponto de tangência entre os conteúdos dessa disciplina com a prova da incompletude, qual seja, o teorema fundamental da aritmética que é utilizada no processo de numeração de Gödel. Assim, sugerimos que ao se trabalhar com este teorema se apresente o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel que é garantida por este resultado.

Nessa perspectiva, será possível, ao mesmo tempo, mencionar a existência desse fenômeno mesmo que não esteja presente na sua ementa, expondo um aspecto do TIG: o de que há na aritmética fórmulas verdadeiras e que não é possível prova-las formalmente, conforme enfatiza a autora. Também, os axiomas de Peano-Dedekind como consta na ementa, servirão como um exemplo particular deste feito; uma vez que se trata de um sistema matemático formal dotado de símbolos juntamente com regras para o seu emprego e, consequentemente, possibilitará suscitar problemas da teoria dos números que estão em aberto há muitos anos como sendo uma possibilidade de ser um problema indecidível. Entretanto, se deve argumentar que “ser uma possibilidade” é diferente de “demonstrar ser indecidível”.

É possível, portanto, trabalhar das mais variadas formas com o teorema de Gödel nessa disciplina, visando não somente algumas formalidades e aspectos rigorosos quanto a sua demonstração, mas implicações sobre o seu significado na matemática.

Em paralelo, a disciplina de *Fundamentos da Matemática* também é oferecida no primeiro semestre do curso. Como observado anteriormente, a palavra “Fundamento” possui diversas interpretações e sinônimos a depender do contexto da sua escrita ou fala. Em nosso aspecto, trata-se de conhecer, operar e refletir no cerne da Matemática. Em outras palavras, uma investigação *de* e *sobre* sua construção que apresentará ao estudante como pensar matematicamente.

Assim, o programa da disciplina elenca seus objetivos em conhecer as noções básicas do cálculo proposicional; fazer demonstrações simples; conhecer as noções básicas de teoria dos conjuntos e entender o processo de indução matemática. Dessa forma, os conteúdos a serem trabalhados se resumem a:

> 1. Lógica Matemática: conectivos: negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicionais e bicondicionais; quantificadores: universal, existencial; regras de inferência: modus ponens, modus tollens, disjunção aditiva, silogismo disjuntivo, silogismo hipotético; estratégias de demonstração. 2. Noções de teoria dos conjuntos. 3. Demonstração por indução.

Evidentemente, por se tratar de uma disciplina introdutória para o curso de matemática, não convém estudar afundo termos complexos como completude, consistência e seus antônimos durante essa disciplina, mas é possível trabalhar com suas definições sem grandes dificuldades; uma vez que todos os conteúdos a serem vistos nessa disciplina envolvem a noção de conjunto desde o começo, da mesma maneira, é trabalhada a lógica de primeira ordem com os estudantes em lógica matemática.

Em vista disso, não somente o TIG poderia ser dialogado com os estudantes, mas o *Teorema da Completude de Gödel* também poderia ser uma ferramenta para trabalhar o conceito de fórmula, demonstração e verdade em prol do pensamento matemático. Pois, em acordo com D’Alkaine (2006), “o teorema da completude de Gödel estabelece que todos os teoremas que derivam dos axiomas podem ser provados, no entanto, se algumas afirmações fossem verdadeiras sobre os objetos matemáticos estudados e caso não derivassem dos axiomas, não poderiam ser provadas."

Assim sendo, após uma breve explicação dos termos necessários para uma mera interpretação do Teorema da Incompletude, os estudantes seriam capazes, supondo a mediação do docente, de compreender o que ambos os teoremas (completude e incompletude) significam e que um não é a refutação do outro. Ou seja, o primeiro, nesse caso, refere-se substancialmente a lógica de primeira ordem e não diz respeito a nada quanto a afirmações relacionadas aos números naturais axiomatizados por Peano; dado que o princípio da indução finita diz respeito às propriedades dos números em si e, portanto, constitui uma lógica de segunda ordem. Já o segundo, expõe uma característica sobre os sistemas formais dotados de aritmética e que, mais ainda, independentemente da quantidade de axiomas acrescentados nesses sistemas, sempre haverá sentenças indecidíveis.

Com essa linha de raciocínio, no que tange à disciplina *História e Filosofia da Matemática*, tem-se como finalidade prevista:

> Compreender o desenvolvimento da Matemática em diferentes contextos e períodos históricos; desconstruir a visão linear do desenvolvimento da Matemática ao longo da História; compreender o contexto de desenvolvimento dos principais conceitos da matemática escolar; problematizar as conexões da Matemática com outros campos de atividade humana; problematizar as diferentes perspectivas filosóficas da matemática e suas implicações na educação matemática; compreender o desenvolvimento da educação matemática no Brasil; desenvolver atividades de ensino de Matemática por meio do diálogo com a História e a Filosofia.

Por sua vez, os conteúdos elencados em sua ementa explicitam o trabalho com a matemática até o século XIX, a saber: Estudo da História e Filosofia da Matemática e da Educação Matemática. História da Matemática na Mesopotâmia e antigo Egito, na Antiguidade Clássica, na Idade Média, no período da Revolução Científica e até o século XIX, com enfoque especial para os conteúdos da Educação Básica.

Olhando para a história da matemática contendo o século XX, Batistela entende ser possível trabalhar o TIG abrangendo perspectivas de seu desenvolvimento na atualidade. Isto é, por ser um progresso interno à

Matemática e, evidentemente, um importante episódio do século XX que foi responsável pelo amadurecimento da compreensão sobre as características das teorias matemáticas que contenham a aritmética de Peano em sua formalização. Culminando, assim, numa abrangência e ligações históricas entre episódios que desenvolveram a forma de como se pensar em Matemática e quebrando paradigmas ou, uma frustração de expectativa; como enfatiza Batistela:

> 1)A crise dos incomensuráveis, historiada modernamente ressalte-se, que se enreda por apresentar a superação, na própria Matemática, de uma frustração de expectativa. A "crise" teria aberto caminhos para a construção dos números irracionais; 2) a dúvida e as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides, o que desencadeou no surgimento das geometrias não-euclidianas, e que não invalida a geometria euclidiana; 3) a questão da decifração do infinito pelos matemáticos, cuja culminância se dá na teoria de números transfinitos de Cantor, que trata da parte matematizável do infinito. Porém, ele se vê diante de um paradoxo que envolvia a ideia de conjunto de todos os conjuntos. Não se pode negar que essa questão está longe de ser uma crise para a Matemática, sendo matriz propulsionadora do desenvolvimento da Matemática desde tempos remotos.

Assim, no que tange ao estudo da Filosofia da Matemática, subentende-se que trabalhar as linhas de pensamento como Logicismo, Construtivismo e Formalismo sejam necessárias para a composição deste conteúdo e, portanto, inevitavelmente o Teorema da Incompletude surgiria nessas discussões quanto ao pensamento Formalista. Dessa forma, Batistela enfatiza novamente a relevância que há em trabalhar com Kurt Gödel como um sujeito ímpar na história. Uma vez que, o TIG,

> [...] abre horizonte para uma Matemática que se deu conta dessa característica da incompletude de grande parte de suas teorias, evidenciando que de forma alguma invalidou a Matemática já construída ou impossibilitou que ela continuasse sendo feita. Além disso, mostra a Matemática como uma produção humana de homens de tempos diferentes,

> com necessidades e anseios de compreensão conectados às questões de sua época e de seu lugar; reconhecendo um fazer matemático característico e direcionado ao alcance de soluções abstratas que sejam universais e neutras.

Por fim, convém enfatizar que este capítulo apresenta sugestões e não implicam diretamente numa mudança sobre a ementa, conteúdo e objetivos das disciplinas elencadas acima. Logo, é mais um incentivo para complementar o ensino dos estudantes e, consequentemente, de futuros professores e, em concordância com Batistela:

> Nossa expectativa é, sobretudo, dar ao futuro professor a possibilidade de discutir questões de filosofia da Matemática referentes a ela própria. Por sua vez, a Matemática é produzida por homens e mulheres e o anseio pelo conhecimento do seu alcance conjuntamente com a vontade de compreendê-la está na origem de grandes avanços tecnológicos e de outras ciências.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do desenvolvimento de todos os capítulos deste trabalho, foi possível dialogar e aprender nas áreas da Filosofia, História e Matemática. Todos os termos técnicos que a filosofia nos propõe para compreender os mais profundos e diversos pensamentos foram essenciais para uma reflexão rigorosa sobre as implicações do Teorema da Incompletude. O entendimento histórico, não só da vida de Gödel, mas de todo o âmbito científico e cultural da época, teve um papel ímpar em responder espantos iniciais sobre o Teorema da Incompletude, aos quais, foram destacados na introdução deste trabalho. O envolvimento com a matemática, evidentemente, é indispensável em todo o desenvolvimento do estudo aplicado em cima do Teorema da Incompletude.

Compreender que determinados sistemas axiomatizados possuem uma insuficiência em explicar toda a Matemática, impactou intimamente em meu modo de pensar sobre essa ciência. Como o próprio Kurt Gödel diz, ele não falseou nenhum resultado já afirmado por ela, mas afirmou que existem sentenças indecidíveis e, mais ainda, é incapaz de provar sua própria consistência. É preciso algo essencialmente mais rico para tal argumento.

A dificuldade inicial baseava-se numa interpretação completa do teorema afim de que investigasse algumas conclusões precipitadas acerca dele. Para contornar as pedras no meio do caminho, foi necessário estudar o significado de consistência, completude, incompletude, lógica de primeira ordem, de segunda ordem, sistemas formais, conceito de verdade e de demonstração, isto é, uma gama de conteúdos essenciais foram necessários não só para a devida compreensão do TIG, mas em qual impacto esse resultado tem na matemática e na formação de professores de matemática e, consequentemente, na visão sobre a matemática que os estudantes de ensino básico obterão ao saberem que existem tais dificuldades na matemática.

Conclui-se deste trabalho que uma reflexão filosófica acerca da matemática é tão importante quanto o teorema de Gödel. Isto é, a matemática não é somente regida por fórmulas, demonstrações, teoremas, propriedades, mas substancialmente por reflexões filosóficas sobre os seus fundamentos e, inerentemente, não se escapa da intuição para resolver problemas matemáticos, isto é, não há algoritmos que resolvam passo a passo qualquer conjectura acerca dos números.

Além disso, é de suma importância enfatizar a técnica Gödeliana para mapear sentenças matemáticas usufruindo do Teorema Fundamental da Aritmética para afirmar a unicidade desse mapeamento. Gödel elaborou uma ponte dimensional entre a matemática e metamatemática de forma inédita e totalmente inovadora entre números e sentenças matemáticas que, inclusive, esse procedimento foi usado, como citado no decorrer do trabalho, por Alfred Tarski em sua concepção semântica da verdade.

Contudo, apesar de seu trabalho ter causado tanto impacto na matemática, ainda há pessoas que não compreendem do que o mesmo se trata. Assim, através das falácias que foram trabalhadas, esse trabalho finaliza um dos objetivos principais que era desmistificar o Teorema da Incompletude de Gödel.

Por fim, a compreensão completa do teorema com todos os termos essenciais para compô-lo e a forma como foram tratadas as falácias acerca do mesmo bem como as diferenças ligadas entre os termos “demonstração” e “verdade” compõe ainda mais a essência da seção cinco deste trabalho e, consequentemente, o objetivo principal foi alcançado. Isto é, sugerir meios alternativos para que, num curso de licenciatura em matemática, seja possível dialogar entre os estudantes sobre o Teorema da Incompletude e seus resultados. Assim, fornecerá meios para futuros professores desmistificar mitos e falácias sobre a matemática com seus estudantes.

7 REFERÊNCIAS

BARTELMEBS, Roberta Chiesa. **RESENHANDO AS ESTRUTURAS DAS REVOLUÇÕES CIENTÍFICAS DE THOMAS KUHN**. Ens. Pesqui. Educ. Ciênc. (Belo Horizonte). Belo Horizonte, v. 14, n. 3, p. 351-358, Dez. 2012 Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983211720120003003351&lng=en&nrm=iso. Data de acesso: 06/05/2021

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/148797. Data de acesso: 06/05/2021

COSTA, Newton. C. **A. Introdução aos fundamentos da matemática**. Hucitec, Ed da universidade de São Paulo, 1992.

D'ALKAINE, C.V. **Os trabalhos de Gödel e as denominadas ciências exatas: em homenagem ao centenário do nascimento de Kurt Gödel**. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2006, vol.28, n.4, pp.525-530. ISSN 1806-9126.

FREGE, G. **Os fundamentos da aritmética: Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número**. Trad. por. Luís Henrique dos Santos. Coleção: Os Pensadores. Abril Cultural: São Paulo, 1983.

___________. **Basic Laws of Arithmetic.** Ebert, Philip A. & Rossberg, Marcus (eds.) (2013). Oxford University Press UK.

GÖDEL, K. **A lógica matemática de Russel**. In: LOURENÇO, M. (org.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 2009, pp. 851-886.

___________. **Acerca de proposições formalmente Indecidíveis de sistemas Matemáticos Formais**. In: LOURENÇO, M. (org.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 2009, pp. 49-116.

__________. **Acerca de proposições formalmente indecidíveis dos principia Mathematica e sistemas relacionados**. In: LOURENÇO, M. (org.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 2009, pp. 3-48

__________. **Alguns Teoremas básicos sobre os fundamentos da matemática e suas implicações**. In: LOURENÇO, M. (org.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 2009, pp. 887-914.

GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel**. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

HAN, Hans; NEURATH, Otto; CARNAP, Rudolf. **A CONCEPÇAO CiENTiFiCA DO MUNDO - O CIRCULO DE ViENA. Dedicado a Moritz Schlick**. Viena, 1929. Disponível em: http://aws.wlib.com.br/anpof/periodicos/cadernos-de-historia-e-filosofia-da-ciencia/a-concepcao-cientifica-do-mundo-o-circulo-de-viena. Data de acesso: 06/05/2021

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. 5. ed. São Paulo: Editora Perspectiva S.A, 1997.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James. **A prova de Gödel**. São Paulo: Perspectiva, 2007. Tradução de: Gita K. Guinsburg.

SANTOS, Mário Ferreira dos. **Filosofia e Cosmovisão**. - 1. ed. - São Paulo: É Realizações, 2018. 336 p.

SILVA, F. O. **Uma investigação sobre a ideia de número**. 2020. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2020.https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/11126. Data de acesso: 06/05/2021

SILVA, Jairo José da. **Filosofia da Matemática**. São Paulo: Unesp, 2007.

TARSKI, Alfred. **A concepção semântica da verdade e os fundamentos da semântica**. In: C. Mortari e L.H. Dutra orgs. Alfred Tarski: A Concepção Semântica da Verdade. Textos clássicos. SP: Ed. UNESP, 2007, p. 157-202

_______________. **Verdade e Demonstração**. In: C. Mortari e L.H. Dutra orgs. Alfred Tarski: A Concepção Semântica da Verdade. Textos clássicos. SP: Ed. UNESP, 2007, p. 203-228.