UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

GUSTAVO SCHREINER PERING

UM PASSEIO PELA TEORIA DE MÓDULOS: SEQUÊNCIAS EXATAS E "THE SNAKE LEMMA"

Blumenau

2021

Gustavo Schreiner Pering

UM PASSEIO PELA TEORIA DE MÓDULOS: SEQUÊNCIAS EXATAS E "THE SNAKE LEMMA"

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho

Blumenau

2021

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 16:22h do dia 23 de maio de 2021.

Schreiner Pering, Gustavo
Um Passeio pela Teoria de Módulos: Sequências Exatas e "The Snake Lemma" : / Gustavo Schreiner Pering; Orientador, Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho; - Blumenau, 16:22, 14 de Maio de 2021.
57 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Anéis. 2. Módulos. 3. Homomorfismo. 4. Isomorfismo. 5. Diagramas. 6. Sequências Exatas. 7. Snake Lemma. I. Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Título.

Gustavo Schreiner Pering

UM PASSEIO PELA TEORIA DE MÓDULOS:
SEQUÊNCIAS EXATAS E "THE SNAKE LEMMA"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 14 de Maio de 2021.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 24/05/2021 14:08:09-0300
CPF: 045.818.289-37
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Julio Faria Corrêa
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Rafael Aleixo de Carvalho
Data: 24/05/2021 10:10:54-0300
CPF: 302.494.178-98
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Felipe Vieira
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dra. Naiara Vergian de Paulo Costa
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Este trabalho é dedicado a todos os estudantes de Matemática apaixonados pela Álgebra.

AGRADECIMENTOS

Inicio agradecendo às pessoas que mais me apoiaram em minha trajetória, minha mãe Marilei e meu pai Erlédio. Tenho muita sorte de ser filho de pessoas tão maravilhosas, que sempre me guiaram e me apoiaram em minhas decisões.

Ao professor que me acompanhou desde o meu primeiro semestre, por todo o apoio, paciência, compreensão e parceria, mesmo nos momentos de improdutividade, meu orientador, Rafael Aleixo.

À todos os meus professores da UFSC Blumenau, que me ensinaram, seja nos ensinamentos matemáticos ou humanos, seja nos momentos que aprendi a defender o que acredito. Aqui fica um agradecimento especial à professora Naiara, por sempre ser o melhor exemplo de boa professora.

Aos professores Felipe Vieira e Louise Reips, pela oportunidade de fazer parte do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) da OBMEP, que foi meu primeiro contato com a carreira de docente.

Aos meus colegas de classe, que nunca negaram ajuda nos momentos difíceis, especialmente Jhoni, por ser um exemplo e modelo de estudante.

À todos os amigos e amigas que fiz nesse percurso, em especial à minha amiga Camila, por ser uma grande companheira em todo o meu processo de formação profissional e pessoal.

Aos meus gatos, Preta e Barney, que, mesmo sem saberem, me ajudaram e ensinaram muito sobre o companheirismo e a vida.

"Algebra is the offer made by the devil to the mathematician."

Michael Atiyah

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos uma demonstração para o *Snake Lemma*. Para isso, precisamos realizar um estudo da teoria de módulos, que envolve definir módulo, submódulo, homomorfismo de módulo e módulo quociente. Além disso, realizamos um estudo sobre diagramas e sequências exatas de módulos e homomorfismos de módulo.

Palavras-chave: Anéis. Módulos. Homomorfismo. Isomorfismo. Diagramas. Sequências Exatas. Snake Lemma.

ABSTRACT

In this work we present a demonstration for Snake Lemma. To do so, we need to carry out a study of the theory of modules, which involves defining module, submodule, module homomorphism and quotient module. In addition, we carried out a study on diagrams and exact sequences of modules and module homomorphisms.

Keywords: Rings. Modules. Homomorphism. Isomorphism. Diagrams. Exact Sequences. Snake Lemma.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17

2 MÓDULOS E SUBMÓDULOS 19

2.1 MÓDULOS 19

2.2 SUBMÓDULOS 21

2.3 MÓDULO QUOCIENTE 21

2.4 HOMOMORFISMO DE MÓDULOS 22

3 SEQUÊNCIAS EXATAS DE MÓDULOS . 31

3.1 DIAGRAMAS COMUTATIVOS 31

3.2 SEQUÊNCIAS EXATAS 40

3.3 THE SNAKE LEMMA 47

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 55

REFERÊNCIAS 57

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho aborda uma área da álgebra abstrata. Está relacionado à teoria de módulos, submódulos e homomorfismos de módulos. O ápice do presente trabalho tem o objetivo de demonstrar um lema muito utilizado na álgebra. Tal lema é chamado *Snake Lemma* e consiste na existência de um homomorfismo que completa uma sequência exata e é definido por meio de um diagrama de homomorfismos de módulos. Esse lema é utilizado no estudo do produto tensorial, complexo simplicial, resoluções ou functores derivados. Não iremos nos aprofundar nesses assuntos.

Veremos no Capítulo 2 do presente trabalho a definição dos conceitos de módulos e submódulos. Além disso, veremos que, assim como em teoria de anéis e grupos, podemos definir os conceitos de módulo quociente e homomorfismos de módulos e, claro, isomorfismos de módulos. Entre essas definições, vamos apresentar alguns exemplos de módulos, submódulos, módulo quociente e homomorfismos de módulos. Serão demonstrados alguns teoremas, corolários e proposições importantes para dar continuidade ao conteúdo.

O estudo de módulos e submódulos servirá como base para definir os conceitos estudados no Capítulo 3, assim como as ideias de homomorfismos de módulos.

No Capítulo 3 vamos introduzir o conceito de diagramas de grupos e algumas de suas propriedades, provaremos teoremas para enfim apresentar a definição de diagrama comutativo. Mostraremos que é possível definir esse conceito para módulos também. Essa definição será extremamente importante para entender e demonstrar o *Snake Lemma*, pois é uma das bases do enunciado. Além disso, outro conceito que é um pilar do *Snake Lemma* e será apresentada, é a definição de sequência exata. Demonstraremos alguns teoremas e propriedades que serão utilizados posteriormente.

Assumimos que o leitor já teve contato e obteve conhecimentos básicos sobre a teoria de anéis e grupos. Caso o leitor necessite estudar alguns conceitos prévios, recomendamos ler a referência [3].

2 MÓDULOS E SUBMÓDULOS

Os módulos são vistos como uma generalização do conceito de espaço vetorial. A teoria de módulos é muito utilizada em várias áreas da matemática, entre elas estão a própria álgebra e até geometria. Nesse capítulo iremos apresentar os conceitos iniciais e propriedades básicas da teoria, de forma a servir como a linguagem básica de nosso estudo.

2.1 MÓDULOS

O conceito de módulo é parte vital para entendermos e podermos demonstrar o resultado proposto nesse trabalho, a saber, o *snake lemma*. Vamos começar com a sua definição.

Definição 1. Seja A um anel. Um **módulo à esquerda** de A, ou A-módulo à esquerda, é um grupo abeliano $(M, +)$ munido de uma operação de A em M, tal que, para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M$ temos:

$$(a + b)x = ax + bx$$

e

$$a(x + y) = ax + ay.$$

De maneira semelhante podemos definir o **módulo à direita** de A, ou A-módulo à direita. Mas vamos lidar apenas com módulos à esquerda, por isso chamaremos simplesmente A-módulo ou **módulo**. Ademais, se o anel A tiver unidade definimos $1x = x$.

Vejamos alguns exemplos de módulos que já estamos habituados dos estudos de anéis e grupos.

Exemplo 1. *(1) Notamos que todo anel é um módulo sobre si mesmo.*

(2) *Todo grupo comutativo é um* $\mathbb{Z}$*-módulo. Dado* $x \in (G, +)$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*, temos*

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}.$$

(3) *Um grupo aditivo contendo apenas o* 0 *é um módulo sobre qualquer anel.*

(4) *Qualquer ideal à esquerda de um anel* A *é um* A*-módulo.*

(5) *Como dito anteriormente, o conceito de módulo generaliza a ideia de espaço vetorial, estudado na álgebra linear, pois um espaço vetorial pode ser visto como um módulo sobre um corpo* K*.*

Antes de passarmos ao próximo exemplo apresentamos a seguinte definição.

Definição 2. Dados S e M conjuntos não vazios. Denotamos por $\mathrm{Map}(S, M)$, o conjunto de todas as aplicações $S \to M$.

Exemplo 2. *Sejam* S *um conjunto não-vazio e* M *um* A*-módulo. Para* $f \in Map(S, M)$*,* $a \in A$ *definimos* af *como a transformação onde* $(af)(s) = af(s)$*. Então o conjunto de transformações* $Map(S, M)$ *é um* A*-módulo. Com efeito, note que* $(Map(S, M), +)$ *é um grupo abeliano, pois os elementos resultantes são elementos de* M*. Suponha* $f, g \in Map(S, M)$ *e* $a, b \in A$*. Desse modo, sendo* $s \in S$*,* $f(s) = m \in M$ *e* $g(s) = n \in M$*, temos* $(a + b)f(s) = (a + b)m = am + bm = af(s) + bf(s)$*, pois* M *é um* A*-módulo. Por outro lado* $a(f + g)(s) = a(f(s) + g(s)) = a(m + n) = am + an = af(s) + ag(s)$*, logo* $Map(S, M)$ *é um módulo.*

A partir da definição do conceito de módulos podemos demonstrar o seguinte teorema.

Proposição 1. *Sejam* A *um anel e* M *um* A*-módulo. Dados* $a, 0 \in A$ *e* $x \in M$*, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) $0x = 0$

(2) $a(-x) = -(ax)$

Demonstração:

(1) Sejam $a, 0 \in A$ e $x \in M$. Sabemos que $a + 0 = 0 + a = a$. Como $(a+b)x = ax+bx$, temos $(a+0)x = ax+0x$. Portanto $ax = ax + 0x$ e podemos concluir que $0x = 0$.

(2) Agora, temos que $a(x + y) = ax + ay$. Dessa forma considere $x, -x \in M$. Logo $ax+a(-x) = a(x+(-x)) = a0 = 0$. Portanto $a(-x) = -(ax)$.

■

2.2 SUBMÓDULOS

Da mesma forma que podemos definir subgrupos no estudo de grupos, no estudo de módulos podemos definir submódulos.

Definição 3. Seja M um A-módulo. N é dito **submódulo** de M quando é um subgrupo aditivo, tal que $AN \subset N$.

Exemplo 3. *(1) Dado um grupo abeliano G, este é um $\mathbb{Z}$-módulo. Os subgrupos de G são submódulos de G.*

(2) Um espaço vetorial V sobre um corpo K é um K-módulo. Os subespaços vetoriais de V são submódulos de V.

2.3 MÓDULO QUOCIENTE

Espera-se que o conceito de grupo quociente já seja conhecido do leitor, com isso podemos definir de maneira similar o *módulo quociente.*

Definição 4. Sejam M um módulo e N um submódulo de M. Podemos definir uma estrutura de módulo no quociente M/N. Seja $x + N$ uma classe de equivalência de N em M e seja $a \in A$. Definimos $a(x + N)$ como a classe de equivalência $ax + N$. M/N é um módulo, chamado **módulo quociente**.

Vamos verificar as propriedades de módulo de M/N. Dados M um A-módulo e N um submódulo de M. Como M é um grupo abeliano, o quociente também será [3]. Tome $a, b \in A$ e $x+N, y+N \in M/N$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}(a+b)(x+N) &= (a+b)x + N \\ &= ax + bx + N \\ &= ax + N + bx + N \\ &= a(x+N) + b(x+N).\end{aligned}$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}a(x+N+y+N) &= a(x+y+N) \\ &= a(x+y) + N \\ &= ax + ay + N \\ & ax + N + ay + N.\end{aligned}$$

Portanto M/N é um A-módulo. Observe que, como M é um grupo abeliano na soma, o quociente está bem definido, já que todo subgrupo de $(M, +)$ é um subgrupo normal.

2.4 HOMOMORFISMO DE MÓDULOS

Em grupos, definimos homomorfismos de grupos, ou seja, aplicações que preservam as estruturas de grupo. Isso é importante pois, muitas vezes queremos trabalhar com grupos extremamente complicados e abstratos, mas se aplicarmos um homomorfismo a esse grupo, o resultado pode ser mais simples de se trabalhar, e terá o mesmo comportamento de nosso grupo mais abstrato. Assim é importante definir *homomorfismos* entre módulos.

Definição 5. Sejam $(G, +)$ e $(\mathcal{G}, \times)$ dois grupos. Uma aplicação $f : G \longrightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo se

$$f(a+b) = f(a) \times f(b), \, \forall a, b \in G.$$

Esse homomorfismo será aditivo quando G e $\mathcal{G}$ forem grupos aditivos.

Definição 6. Uma aplicação $f : M \to M'$, com M e M' sendo A-módulos, é chamada **homomorfismo de módulos** se f é um homomorfismo aditivo em grupos, tal que

$$f(ax) = af(x), \forall a \in A \,\text{e}\; x \in M.$$

Se tal aplicação for bijetora chamamos **isomorfismo de módulos**. Se f é um isomorfismo de módulos, dizemos que M é isomorfo a M' e denotaremos por $M \approx M'$.

Exemplo 4. *(1) Se M é um módulo, então a aplicação identidade é um homomorfismo de módulos.*

(2) Para quaisquer A-módulos M e M', a aplicação $\zeta : M \to M'$ tal que $\zeta(x) = 0, \forall x \in M$, é um homomorfismo, chamado ***homomorfismo nulo****.*

(3) Sejam um módulo M e um submódulo N de M. Temos o homomorfismo canônico aditivo

$$\begin{aligned} f : M &\to M/N \\ m &\mapsto m + N. \end{aligned}$$

(4) Sejam os $\mathbb{Z}$-módulos, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. A aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que, dados $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $f(x, y) = x+y$ é um homomorfismo de módulos sobrejetor. Fixe $x = 0$, dado $y \in \mathbb{Z}$, assim $f(0, y) = y$, logo $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

Dois conceitos importantes nesse trabalho são as definições de *núcleo* e *imagem*, os dois são bem conhecidos dos estudantes de álgebra.

Definição 7. Seja f uma aplicação entre A-módulos M e M'. Denotamos por $\ker f$ e chamamos de **núcleo** de f o conjunto $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$.

Definição 8. Seja f uma aplicação entre A-módulos M e M'. Denotamos por $\mathrm{Im}\, f$ e chamamos de **Imagem** de f, o conjunto $\mathrm{Im}\, f = \{m' \in M' \mid f(m) = m' \text{ para algum } m \in M\}$.

Com as definições apresentadas até aqui, podemos demonstrar uma proposição que envolve núcleo e imagem de um homomorfismo de módulos.

Proposição 2. *Se $f : M \to M'$ é um homomorfismo de módulos, então seu núcleo e imagem são submódulos de M e M', respectivamente.*

Demonstração: Tome $x, y \in \ker f$ e faça $f(x-y) = f(x)-f(y) = 0$, logo $x - y \in \ker f$ e, portanto, $\ker f$ é subgrupo aditivo de M.

Tome $a, b \in \operatorname{Im} f$, logo existem $x, y \in M$ tais que $f(x) = a$ e $f(y) = b$. Faça $a - b = f(x) - f(y) = f(x - y)$, portanto $a - b \in \operatorname{Im} f$, logo $\operatorname{Im} f$ é subgrupo aditivo de M'.

Agora, para mostrar que $\ker f$ é submódulo de M, basta mostrar que $A \ker f \subset \ker f$. De fato, note que $\forall a \in A$ e $x \in \ker f$ temos

$$f(ax) = af(x) = a0 = 0,$$

portanto $ax \in \ker f$, ou seja, $\ker f$ é submódulo de M.

Agora, precisamos mostrar que $A \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f$.

Tome $a \in A$ e $y \in \operatorname{Im} f$ arbitrários, então $\exists\, x \in M$ tal que $f(x) = y$ e também $f(ax) = ay$, portanto $ay \in \operatorname{Im} f$, ou seja, $\operatorname{Im} f$ é submódulo de M'. ■

Apresentaremos agora uma proposição que irá nos ajudar em outras demonstrações no futuro, principalmente para demonstrar que uma aplicação ou homomorfismo de módulos é injetor.

Proposição 3. *Dado $f : M \to M'$ um homomorfismo de módulos,* $\ker f = \{0\}$ *se, e somente se, f é injetiva.*

Demonstração:

$(\Longleftarrow)$ Primeiramente, suponha que f é injetiva. Como f é um homomorfismo, temos que $f(0) = 0$, portanto $0 \in \ker f$, logo $\{0\} \subset \ker f$.

Agora, tome $x \in \ker f$, logo $f(x) = 0$, mas sabemos que $0 = f(0)$, então $f(x) = f(0)$. Pela injetividade de f temos que $x = 0$, portanto $\ker f \subset \{0\}$.

$(\implies)$ Suponha que $\ker f = \{0\}$. Veja que, se $f(x) = f(y)$, então $f(x-y) = 0$. Logo $x-y \in \ker f$, portanto $x-y = 0 \implies x = y$, assim, concluímos que f é injetiva.

■

Agora demonstraremos um teorema muito geral da álgebra, utilizado no estudo de grupos, mas adaptado para homomorfismos de módulos, o conhecido *Teorema do Isomorfismo*. Após, vamos apresentar dois corolários desse teorema.

Teorema 1. *(Teorema do Isomorfismo) Dado $f : M \to M'$ um homomorfismo de módulos, com M e M' sendo A-módulos, temos*

$$\frac{M}{\ker f} \approx \operatorname{Im} f. \tag{2.1}$$

Demonstração: Vamos considerar a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \overline{f} : \frac{M}{\ker f} &\longrightarrow \operatorname{Im} f \\ m + \ker f &\longmapsto f(m). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vamos mostrar, primeiramente, que $\overline{f}$ está bem definida. Note que

$$m + \ker f = \tilde{m} + \ker f \implies m = \tilde{m} + k,$$

para algum $k \in \ker f$ e, portanto,

$$\begin{aligned} f(m) &= f(\tilde{m} + k) \\ &= f(\tilde{m}) + f(k) \\ &= f(\tilde{m}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Note que $\overline{f}$ é sobrejetora, pois $\operatorname{Im} \overline{f} = \operatorname{Im} f$. Para $m, n \in M$, representantes de classes laterais em $M/\ker f$, temos

$$\begin{aligned}\overline{f}(m+\ker f+n+\ker f) &= \overline{f}((m+n)+\ker f)\\ &= f(m+n)\\ &= f(m)+f(n)\\ &= \overline{f}(m+\ker f)+\overline{f}(n+\ker f).\end{aligned}$$

Agora, tome $a \in A$ e faça

$$\begin{aligned}\overline{f}(am+\ker f) &= f(am)\\ &= af(m)\\ &= a\overline{f}(m+\ker f).\end{aligned}$$

Provamos que $\overline{f}$ é um homomorfismo de módulos sobrejetor, mas se $\ker\overline{f} = \{0+\ker f\}$, teremos um homomorfismo de módulos injetor. De fato,

$$\begin{aligned}\ker\overline{f} &= \{m+\ker f \mid f(m)=0\}\\ &= \{m+\ker f \mid m \in \ker f\}\\ &= \{0+\ker f\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Logo $\ker\overline{f} = \{0+\ker f\}$.

Assim $\overline{f}$ é bijetor, logo é um isomorfismo. ■

Corolário 1. *Sejam N e N' submódulos de um A-módulo M. Então $N+N'$ também é um submódulo de M, e temos um isomorfismo*

$$\frac{N}{N\cap N'} \approx \frac{N+N'}{N'}$$

Demonstração: Como N e N' são submódulos de M, então N e N' são subgrupos de um grupo abeliano, logo

$$N+N' = N'+N.$$

Tome $s,t \in N+N'$, logo $s = n_1+n_1'$ e $t = n_2+n_2'$. Faça $s-t = (n_1+n_1')-(n_2+n_2') = (n_1-n_2)+(n_1'-n_2')$, como $(n_1-n_2) \in N$ e $(n_1'-n_2') \in N'$, então $s-t \in N+N'$, logo $N+N'$ é subgrupo aditivo de M.

Agora, tome $s \in N + N'$ e $a \in A$, temos que $s = n + n'$. Faça $as = a(n + n') = an + an'$, logo $as \in N + N'$ e concluímos que $N + N'$ é submódulo de M.

Vamos mostrar que N' é submódulo de $N+N'$. Para já sabemos que N' é submódulo de M, logo é subgrupo aditivo, mas dado $n' \in N'$, podemos escrever $n' = 0+n' \in N+N'$, portanto $N' \subset N+N'$, com isso garantimos que N' é subgrupo aditivo de $N + N'$. Já sabemos que $AN' \subset N'$, logo N' é submódulo de $N + N'$.

Desse modo podemos considerar o quociente $\frac{N+N'}{N'}$. Sendo φ o homomorfismo canônico

$$N + N' \xrightarrow{\varphi} \frac{N + N'}{N'}$$

e seja $\varphi|_N$ restrita ao submódulo $N \subset N + N'$, ou seja

$$\begin{aligned} \varphi|_N : N &\longrightarrow \frac{N + N'}{N'} \\ n &\longmapsto n + N' \end{aligned}$$

Perceba que

$$\ker \varphi|_N = \{n \in N \mid n + N' = 0 + N'\} = N \cap N'.$$

Seja $\alpha \in \frac{N+N'}{N'}$, temos $\alpha = (n+n')+N'$ para algum $n \in N$ e algum $n' \in N'$, logo

$$\begin{aligned} \alpha &= (n + n') + N' \\ &= n + N' \\ &= \varphi|_N(n) \end{aligned}$$

e portanto $\varphi|_N$ é sobrejetor.

Aplicando o Teorema 1 à $\varphi|_N$, obtemos o resultado. ■

Corolário 2. *Se $M \supset M' \supset M''$ são módulos, então*

$$(M/M'')/(M'/M'') \approx M/M' \tag{2.5}$$

Demonstração: Considere o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : \frac{M}{M''} &\longrightarrow \frac{M}{M'} \\ m + M'' &\longmapsto m + M' \end{aligned} \tag{2.6}$$

Primeiramente devemos mostrar que ψ está bem definida, de fato

$$m + M'' = \tilde{m} + M'' \implies m = \tilde{m} + n$$

para algum $n \in M''$, assim

$$\begin{aligned} m + M' &= \tilde{m} + n + M' \\ &= \tilde{m} + M' \end{aligned}$$

pois sabemos que $n \in M'' \subset M'$.

Note que ψ é sobrejetor. De fato, dado $m + M'' \in M/M''$, temos $\psi(m + M'') = m + M'$, logo $\operatorname{Im}\psi \subset M/M'$. Agora seja $m + M' \in M/M'$, portanto $m + M' = \psi(m + M'')$, logo $M/M' = \operatorname{Im}\psi$.

Ademais, $\ker\psi = \{m + M'' \,|\, m \in M'\} = M'/M''$.

Aplicando o Teorema 1 à ψ, obtemos o resultado. ■

Vamos apresentar um exemplo de uso do resultado do Corolário 2. Aqui a *ordem* de um grupo $(G, +)$ será denotada por $|G|$.

Exemplo 5. *Dados os subgrupos de $\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ e $6\mathbb{Z}$. Então $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Pelo Corolário 2,*

$$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Para finalizar o capítulo, demonstraremos uma proposição que abrange os assuntos estudados até agora e irá nos auxiliar futuramente.

Proposição 4. *Se $f : M \to M'$ é um homomorfismo de A-módulos e N' é um submódulo de M', então $f^{-1}(N')$ é um submódulo de M e temos um homomorfismo canônico e injetor*

$$\begin{aligned} \overline{f} : M/f^{-1}(N') &\longrightarrow M'/N' \\ m + f^{-1}(N') &\longmapsto f(m) + N'. \end{aligned}$$

Se f é sobrejetor, então $\overline{f}$ é um isomorfismo de módulo.

Demonstração: Vamos verificar que $\overline{f}$ está bem definida. De fato, seja $m + f^{-1}(N') = \tilde{m} + f^{-1}(N')$, logo existe $\overline{m} \in f^{-1}(N')$ tal que

$\tilde{m} = m + \overline{m}$. Agora aplique $\overline{f}$, temos $\overline{f}(m + f^{-1}(N')) = f(m) + N'$ e

$$\begin{aligned}\overline{f}(\tilde{m} + f^{-1}(N')) &= \overline{f}(m + \overline{m} + f^{-1}(N')) \\ &= f(m) + f(\overline{m}) + N' \\ &= f(m) + N'.\end{aligned}$$

Sejam $x_1, x_2 \in f^{-1}(N')$, então $f(x_1), f(x_2) \in N'$, como N' é submódulo de M', temos que $f(x_1) - f(x_2) \in N'$.

Agora, dados $x_1, x_2 \in f^{-1}(N')$, faça $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$, portanto $f(x_1 - x_2) \in N'$, assim temos que $x_1 - x_2 \in f^{-1}(N')$, portanto $f^{-1}(N')$ é subgrupo aditivo.

Tome $x \in f^{-1}(N')$ e $a \in A$, logo $f(x) \in N'$ implica que $af(x) \in N'$, pois N' é submódulo, portanto $f(ax) \in N'$, desse modo $ax \in f^{-1}(N')$. Com isso, podemos concluir que $Af^{-1}(N') \subset f^{-1}(N')$ e que $f^{-1}(N')$ é submódulo de M.

Vamos mostrar que $\overline{f}$ é um homomorfismo de módulos. Sejam $m_1 \in M$ e $m_2 \in M$ representantes de classes laterais em $M/f^{-1}(N')$, então

$$\begin{aligned}\overline{f}(m_1 + m_2 + f^{-1}(N')) &= f(m_1 + m_2) + N' \\ &= f(m_1) + f(m_2) + N' \\ &= f(m_1) + N' + f(m_2) + N' \\ &= \overline{f}(m_1 + f^{-1}(N')) + \overline{f}(m_2 + f^{-1}(N')),\end{aligned}$$

portanto $\overline{f}$ é homomorfismo aditivo de grupos.

Agora basta que $\overline{f}(am + f^{-1}(N')) = a\overline{f}(mf^{-1}(N'))$, para $a \in A$ e $m + f^{-1}(N') \in M/f^{-1}(N')$. De fato, tome $a \in A$ e $m + f^{-1}(N') \in M/f^{-1}(N')$, temos que

$$\begin{aligned}\overline{f}(am + f^{-1}(N') &= f(am) + N' \\ &= af(m) + N' \\ &= a\overline{f}(m + f^{-1}(N')),\end{aligned}$$

portanto $\overline{f}$ é um homomorfismo de módulos.

Tome $m + f^{-1}(N') \in \ker \overline{f}$, logo

$$\overline{f}(m + f^{-1}(N')) = f(m) + N' = N',$$

assim $f(m) \in N'$ e $m \in f^{-1}(N')$, portanto $m + f^{-1}(N') = 0 + f^{-1}(N')$ e concluímos que $\ker \overline{f} = \{0 + f^{-1}(N')\}$ e $\overline{f}$ é injetor.

Suponha que f é sobrejetor, logo $\operatorname{Im} f = M'$. Já sabemos que $\operatorname{Im} \overline{f} \subset M'/N'$. Agora, tome $m' + N' \in M'/N'$, como $m' = f(m)$ para algum $m \in M$, podemos escrever $m' + N' = f(m) + N' = \overline{f}(m + f^{-1}(N'))$. Concluímos que $\overline{f}$ é sobrejetor. ■

3 SEQUÊNCIAS EXATAS DE MÓDULOS

A álgebra comutativa é uma ferramenta essencial no estudo de outros ramos da matemática, tais como: topologia algébrica, combinatória algébrica, álgebra homológica, etc. Entre os inúmeros conceitos estudados em álgebra comutativa, um deles se destaca, o conceito de sequências exatas. Esse capítulo se concentra no estudo de sequências exatas.

Para entendermos melhor o conceito de sequências exatas, precisamos primeiro entender o conceito de diagramas comutativos e algumas de suas propriedades.

3.1 DIAGRAMAS COMUTATIVOS

Diagrama é uma forma de representar uma "grade" de aplicações ou, em nosso caso, homomorfismos de módulos.

Vamos demonstrar alguns teoremas generalizados envolvendo diagramas, conjuntos e aplicações e, posteriormente, veremos que esses teoremas podem ser adaptados para o estudo de módulos.

Teorema 2. *Dado o diagrama a seguir*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

com A, B e C conjuntos não-vazios e, f e g aplicações, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Existe uma aplicação $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$.

(2) $f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y), \forall x, y \in A$.

Demonstração: *(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*: Suponha que existe uma aplicação $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$. Agora suponha que, dados $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$. Nesse caso obtemos o resultado:

$$\begin{aligned} g(x) &= h(f(x)) \\ &= h(f(y)) \\ &= g(y). \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: Considere o seguinte subconjunto de $\operatorname{Im} f \times C$:

$$G = \{(y, z) \in \operatorname{Im} f \times C \mid \exists x \in A, y = f(x), z = g(x)\}.$$

Podemos notar que $G \neq \emptyset$, pois para qualquer $x \in A$ temos que $(f(x), g(x)) \in G$. Para qualquer $y \in \operatorname{Im} f$ encontramos um $z \in C$ único, tal que $(y, z) \in G$. Podemos verificar a existência do elemento z, dado $y = f(x)$ então basta tomar $z = g(x)$. Para provar a unicidade de z, suponha $(y, z) \in G$ e $(y, z') \in G$, temos que

$$\exists\, x, x' \in A \text{ tais que } \begin{cases} y = f(x) = f(x') \\ z = g(x) \\ z = g(x') \end{cases}$$

assim, como $z = g(x)$ e $z = g(x')$, temos $g(x) = g(x')$, logo $z = z'$. Dessa forma podemos definir uma aplicação $t : \operatorname{Im} f \to C$ da seguinte forma:

$$\forall x \in A \text{ temos } t(f(x)) = g(x)$$

Logo, defina $h : B \to C$ como a aplicação induzida

$$h(y) = \begin{cases} t(y) & \text{se } y \in \operatorname{Im} f \\ c \in C \text{ qualquer,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desse modo, para todo $x \in A$ temos $(h \circ f)(x) = t(f(x)) = g(x)$, portanto $h \circ f = g$. ∎

Ao encontrarmos a aplicação h no teorema acima, estamos realizando um processo que chamamos *completar o diagrama* e podemos representar da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos demonstrar um corolário do Teorema 2.

Corolário 3. *Sejam A, B conjuntos não vazios e $f : A \to B$ uma aplicação qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é injetiva.

(2) existe uma aplicação $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.

(3) f é cancelável a esquerda, ou seja, para todo conjunto C não vazio e quaisquer aplicações $h, k : C \to A$, $f \circ h = f \circ k \implies h = k$.

Demonstração: *(1)*$\iff$*(2)*: segue do Teorema 2, fazendo $C = A$ e $g = id_A$.

(2) $\implies$ *(3)*: Supondo que $f \circ h = f \circ k$, como $g \circ f = id_A$ temos

$$h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ k = k.$$

(3) $\implies$ *(1)*: Suponha, por absurdo, que f não é injetiva. Então existem $x, y \in A$ com $x \neq y$ tais que $f(x) = f(y)$. Defina $k, h : C \to A$ constantes dadas por $h(c) = x$ e $k(c) = y$, $\forall c \in C$. Agora temos que $(f \circ h)(c) = (f \circ k)(c) \implies h(c) = k(c)$, o que é um absurdo, pois $h(c) \neq k(c)$, portanto f é injetiva. ■

Vimos o teorema para diagramas do tipo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

mas também podemos considerar o seguinte:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Teorema 3. *Sejam A, B, C conjuntos não-vazios e $f : B \to A$, $g : C \to A$ aplicações, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Existe uma aplicação $h : C \to B$ tal que $f \circ h = g$.

(2) $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$

Demonstração: *(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*: Suponha que existe uma aplicação $h : C \to B$ tal que $f \circ h = g$, então, para todo $x \in C$ temos $g(x) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$, portanto $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: Suponha, agora, que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, desse modo, para todo $x \in C$ existe $y \in B$ tal que $g(x) = f(y)$. Considere então y_x qualquer elemento de B que corresponde à igualdade $g(x) = f(y_x)$. Assim, definimos $h : C \to B$ como $h(x) = y_x$. Portanto, temos que $\forall x \in C$, $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$, portanto $f \circ h = g$. ■

Corolário 4. *Sejam A, B conjuntos não vazios e $f : B \to A$ uma aplicação qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é sobrejetora.

(2) existe uma aplicação $g : A \to B$ tal que $f \circ g = id_A$.

(3) f é cancelável a direita, ou seja, para todo conjunto C não vazio e quaisquer aplicações $h, k : A \to C$,

$$h \circ f = k \circ f \implies h = k.$$

Demonstração: *(1)*$\Longleftrightarrow$*(2)*: Segue diretamente do Teorema 3, fazendo $g = id_B$ e $C = B$.

(2) $\Longrightarrow$ *(3)*: Suponha que $h \circ f = k \circ f$, então, como $f \circ g = id_A$, se compormos g à direita obtemos $h \circ f \circ g = k \circ f \circ g \implies h = k$.

(3) $\Longrightarrow$ *(1)*: Se A for um conjunto unitário, f é claramente sobrejetora. Vamos provar para o caso de A ter pelo menos dois elementos.

Suponha, então, que $a, b \in A$ elementos distintos e defina $h : A \to A$ como:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \operatorname{Im} f \\ a & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $k : A \to A$ como:

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \operatorname{Im} f \\ b & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, para todo $y \in B$, temos $h(f(y)) = f(y) = k(f(y))$, logo $h \circ f = k \circ f$ e, pela hipótese, $h = k$. Suponha, por absurdo, que $\operatorname{Im} f \neq A$, mas como $\operatorname{Im} f \subset A$, existe $x \in A$ com $x \notin \operatorname{Im} f$. Logo $h(x) = a$ e $k(x) = b$, mas como $h = k$ temos que $a = b$. Portanto $\operatorname{Im} f = A$, assim f é sobrejetora. ■

A seguinte definição irá nos ajudar no momento de escrever sobre homomorfismos de módulo sobrejetivos ou injetivos.

Definição 9.

(1) Chamamos de **epimorfismo** um homomorfismo de módulo sobrejetivo.

(2) Chamamos de **monomorfismo** um homomorfismo de módulo injetivo.

Os Teoremas 2 e 3 e seus respectivos corolários referem-se à quaisquer aplicações, inclusive aquelas que não são homomorfismos, portanto serão válidos para homomorfismos de módulos, e podemos adaptar tais teoremas para que se ajustem às nossas necessidades. É isso que faremos a seguir.

Teorema 4. *Considere o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

de módulos e homomorfismos de módulo, no qual f é um epimorfismo. Então as seguintes afirmações são equivalentes

(1) existe um único homomorfismo de módulo $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$.

(2) $\ker f \subset \ker g$.

Além disso, h será um monomorfismo se, e somente se, $\ker f = \ker g$.

Demonstração: *(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*: Suponha que existe um único homomorfismo de módulo $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$. Pelo Teorema 2, para todo $x \in A$, se $f(x) = 0$, então $g(x) = (h \circ f)(x) = h(0) = 0$, pois h é um homomorfismo. Logo $\ker f \subset \ker g$.

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: Suponha que $\ker f \subset \ker g$. Tome $x, y \in A$ arbitrários, como f e g são homomorfismos, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) = 0 \\ &\Longrightarrow x - y \in \ker f \subset \ker g \\ &\Longrightarrow g(x) - g(y) = g(x-y) = 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = g(y). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2 podemos definir uma aplicação $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$. Como f é sobrejetor, pelo Corolário 4, temos que f é cancelável a direita e h será única.

Vamos provar, então, que h é um homomorfismo de módulo. Para todo $x \in A$ temos $h(f(x)) = g(x)$, tomando $x, y \in A$, como f e g são homomorfismos e f é sobrejetor, considere $f(x), f(y) \in B$ e teremos

$$\begin{aligned} h(f(x) + f(y)) &= h(f(x+y)) \\ &= g(x+y) \\ &= g(x) + g(y) \\ &= h(f(x)) + h(f(y)), \end{aligned}$$

logo h é um homomorfismo aditivo de grupos. Agora tome $\alpha \in \mathcal{R}$ um elemento do anel sobre o qual A, B e C são módulos e faça

$$\begin{aligned} h(\alpha f(x)) &= h(f(\alpha x)) \\ &= g(\alpha x) \\ &= \alpha g(x) \\ &= \alpha h(f(x)), \end{aligned}$$

portanto h é homomorfismo de módulo.

Vamos mostrar agora que h será um monomorfismo se, e somente se, $\ker f = \ker g$.

($\Longrightarrow$) Suponha que h é injetiva, assim, para qualquer $x \in A$, temos

$$g(x) = 0 \implies h(f(x)) = 0 \implies f(x) = 0,$$

portanto $\ker g \subset \ker f$ e concluímos que $\ker g = \ker f$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\ker g = \ker f$ e tome $y \in \ker h$. Como f é sobrejetor, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$, assim

$$h(y) = 0 \implies h(f(x)) = 0 \implies g(x) = 0$$

logo $x \in \ker g$, mas $\ker g = \ker f$, portanto $y = f(x) = 0$. Concluímos que $\ker h = \{0\}$ e h é injetiva.

■

Teorema 5. *Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

de módulos e homomorfismos de módulos onde f é um monomorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) existe um único homomorfismo $h : C \to B$ tal que $f \circ h = g$.

(2) $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.

Além disso, h é epimorfismo se, e somente se, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

Demonstração: *(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*: Suponha que existe um único homomorfismo $h : C \to B$ tal que $f \circ h = g$. Assim, $\forall x \in C$, temos $g(x) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$. Portanto $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: Supondo que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, pelo Teorema 3, existe uma aplicação $h : C \to B$ tal que $f \circ h = g$. Como, por hipótese, f é injetiva, pelo Corolário 3, temos que f é cancelável à esquerda e h é única.

Como para todo $x \in C$, temos $f(h(x)) = g(x)$, e como f e g são homomorfismos, dados $c, d \in C$ e um real α qualquer, temos

$$\begin{aligned} f(h(\alpha c + d)) &= g(\alpha c + d) \\ &= g(\alpha c) + g(d) \\ &= \alpha g(c) + g(d) \\ &= \alpha f(h(c)) + f(h(d)) \\ &= f(\alpha h(c)) + f(h(d)) \\ &= f(\alpha h(c) + h(d)) \end{aligned}$$

Como f é injetiva, temos que $h(c+d) = h(c)+h(d)$ e $h(\alpha c) = \alpha h(c)$, assim h é um homomorfismo de módulo.

Vamos mostrar que h é epimorfismo se, e somente se, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. Suponha que h é sobrejetora, então para todo $b \in B$ existe $c \in C$ tal que $b = h(c)$, desse modo

$$f(b) = f(h(c)) = g(c),$$

portanto $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Por outro lado, suponha $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, então para todo $b \in B$ existe $c \in C$, tal que $f(b) = g(c)$, mas $g(c) = f(h(c))$, logo, como f é injetiva, $b = h(c)$, portanto h é sobrejetora. ■

Com todos os conceitos estudados até aqui, podemos definir *diagrama comutativo*. Essa definição é essencial para completarmos o objetivo do trabalho.

Definição 10. Um diagrama de conjuntos e aplicações

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

é dito **comutativo** se $h \circ f = g$. De maneira similar, um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

é dito **comutativo** se $\beta \circ f = g \circ \alpha$.

Em outras palavras, se um diagrama é comutativo, fixando os conjuntos de saída e chegada, não importa o caminho percorrido, as composições serão iguais.

Exemplo 6. *(1) Um diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

é comutativo se, e somente se, $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ *e* $g' \circ \beta = \gamma \circ g$.

(2) O diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

onde f *é a aplicação* $f(x) = 2x$, g *é a aplicação* $g(x) = 2x^2$ *e* h *é a aplicação* $h(x) = \dfrac{x^2}{2}$, *é comutativo.*

(3) Os diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & A \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "id_A"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ B \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "id_B"'] & \end{tikzcd}$$

serão comutativos se f for a inversa de g.

3.2 SEQUÊNCIAS EXATAS

A definição de *sequência exata* é mais um conceito indispensável para completarmos nosso objetivo. Uma sequência exata é uma sequência de homomorfismos, onde a composição de dois homomorfismos consecutivos é o homomorfismo nulo. Vejamos, agora, com mais detalhes, a definição de *sequências exatas.*

Definição 11. Uma sequência de homomorfismos de módulo é um diagrama da forma:

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

Tal sequência é chamada **exata** se, para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{Im} f_{i-1} = \ker f_i$.

O seguinte teorema nos dará algumas propriedades envolvendo sequências exatas, essas propriedades serão utilizadas no futuro.

Proposição 5. *Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de módulos, então f é:*

(1) um monomorfismo se, e somente se, $0 \to M \xrightarrow{f} N$ é exata;

(2) um epimorfismo se, e somente se, $M \xrightarrow{f} N \to 0$ é exata;

(3) um isomorfismo se, e somente se, $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ é exata.

Aqui $0 \to M$ denota a inclusão canônica e $N \to 0$ denota o homomorfismo nulo.

Demonstração:

(1) Para facilitar a demonstração, vamos chamar a inclusão $0 \to M$ de h. Suponha que a sequência $0 \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N$ é exata, logo $\operatorname{Im} h = \ker f$, mas $\operatorname{Im} h = \{0\}$, portanto $\ker f = \{0\}$, ou seja, f é um monomorfismo. Por outro lado, suponha que f é injetor, assim $\ker f = \{0\}$, note que $\operatorname{Im} h = \{0\}$, desse modo $\operatorname{Im} h = \ker f$, ou seja, a sequência $0 \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N$ é exata.

(2) Para facilitar a demonstração, vamos chamar o homomorfismo nulo de z. Suponha que a sequência $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{z} 0$ é exata, nesse caso $\operatorname{Im} f = \ker z$, mas $\ker z = N$, portanto $\operatorname{Im} f = N$, ou seja, f é um epimorfismo. Agora, suponha f sobrejetor, logo $\operatorname{Im} f = N$ e, como z é o homomorfismo nulo, $\ker z = N$, portanto $\operatorname{Im} f = \ker z$, ou seja, a sequência $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{z} 0$ é exata.

(3) Segue dos itens *(1)* e *(2)*.

■

Exemplo 7.

(1) *Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de módulos, então a sequência*

$$0 \to \ker f \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\ker f \to 0,$$

onde α é a inclusão e β é o homomorfismo canônico, é uma sequência exata. Com efeito, pela Proposição 5 item (1), como α é injetor, a sequência é exata em $\ker f$, além disso, como β é sobrejetor, a sequência é exata em $A/\ker f$.

Tome $x \in \operatorname{Im} \alpha$, então $x = \alpha(x)$, com $x \in \ker f$, aplicando $\beta(\alpha(x)) = \beta(x) = x + \ker f$, mas $x \in \ker f$, logo $x + \ker f = 0 + \ker f$, portanto $x \in \ker \beta$ e $\operatorname{Im} \alpha \subset \ker \beta$.

Agora, seja $y \in \ker \beta$, logo $\beta(y) = 0 + \ker f$, portando $y + \ker f = 0 + \ker f$, assim $y \in \ker f$, mas $\alpha(y) = y$ e $y \in \operatorname{Im} \alpha$, concluímos que $\ker \beta \subset \operatorname{Im} \alpha$ e a sequência é exata.

(2) *Da mesma forma, se $f : A \to B$ é um homomorfismo de mó-*

dulos, então a sequência

$$0 \to \operatorname{Im} f \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B/\operatorname{Im} f \to 0,$$

onde α é a inclusão e β é o homomorfismo canônico, é uma sequência exata. Com efeito, pela Proposição 5 item (1), como α é injetor, a sequência é exata em $\operatorname{Im} f$, além disso, como β é sobrejetor, a sequência é exata em $A/\operatorname{Im} f$.

Tome $x \in \operatorname{Im}\alpha$, então $x = \alpha(x)$, com $x \in \operatorname{Im} f$, aplicando $\beta(\alpha(x)) = \beta(x) = x + \operatorname{Im} f$, mas $x \in \operatorname{Im} f$, logo $x + \operatorname{Im} f = 0 + \operatorname{Im} f$, portanto $x \in \ker\beta$ e $\operatorname{Im}\alpha \subset \ker\beta$.

Agora, seja $y \in \ker\beta$, logo $\beta(y) = 0+\operatorname{Im} f$, portando $y+\operatorname{Im} f = 0+\operatorname{Im} f$, assim $y \in \operatorname{Im} f$, mas $\alpha(y) = y$ e $y \in \operatorname{Im}\alpha$, concluímos que $\ker\beta \subset \operatorname{Im}\alpha$ e a sequência é exata. ■

Definição 12. Uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M'' \longrightarrow 0$$

é chamada **sequência exata curta**.

Agora vamos apresentar algumas técnicas, chamadas de completar diagramas, por meio dos próximos teoremas.

Teorema 6. *Dado o diagrama de módulos e homomorfismos de módulos*

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "u"] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

onde a fileira $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ é exata e $g \circ u = 0$, existe um único homomorfismo $h : A \to X$ que completa o diagrama de forma a torná-lo comutativo.

Demonstração: Como temos uma sequência exata, $\ker g = \operatorname{Im} f$ e, além disso, como $g \circ u = 0$ temos $\operatorname{Im} u \subset \ker g$. Pela Proposição 5 item *(1)*, f é um monomorfismo. Segue do Teorema 5, como $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} f$, existe um único $h : A \to X$ tal que $f \circ h = u$. Assim o diagrama é comutativo. ■

Teorema 7. *Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de módulo. Se $t : \ker f \to M$ é a inclusão canônica, então*

(1) $f \circ t = 0$

(2) se P é um módulo e $g : P \to M$ é um homomorfismo de módulos tal que $f \circ g = 0$, então existe um único homomorfismo de módulo $u : P \to \ker f$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "g"] & \\ \ker f \arrow[r, "t"] & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Demonstração:

(1) Como t é a inclusão canônica, $\forall x \in \ker f$, temos $t(x) = x \in \ker f$, portanto $\forall x \in \ker f$, temos $(f \circ t)(x) = f(t(x)) = 0$.

(2) Como t é a inclusão canônica, então t é um monomorfismo, logo o diagrama pode ser escrito

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "g"] & \\ 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, "t"] & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

e a sequência $0 \to \ker f \xrightarrow{t} M \xrightarrow{f} N$ será exata, pela Proposição 5 item *(1)*. Agora, basta aplicar o Teorema 6 e obtemos o resultado.

■

Os Teoremas 8 e 9 e o Corolário 5 que seguem, são resultados muito importantes na álgebra comutativa. Assim como os homomorfismos podem auxiliar no entendimento do comportamento de algum objeto algébrico, esses resultados podem simplificar objetos mais abstratos. Mesmo que não sejam utilizados diretamente na demonstração do lema título desse trabalho, com essas demonstrações também adquirimos maturidade algébrica para nos prepararmos para o nosso objetivo.

Teorema 8. (The four lemma) *Seja o diagrama de módulos e homomorfismos de módulos*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

comutativo e suas linhas são sequências exatas. Temos:

(1) Se α e γ são epimorfismos e σ é um monomorfismo, então β é um epimorfismo.

(2) Se α é um epimorfismo e β e σ são monomorfismos, então γ é um monomorfismo.

Demonstração:

(1) Seja $b' \in B'$ arbitrário, temos que γ é sobrejetor, logo existe $c \in C$ tal que $g'(b') = \gamma(c)$. Como o diagrama é comutativo, $\sigma \circ h = h' \circ \gamma$, portanto

$$\sigma(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(g'(b')).$$

Mas $h' \circ g' = 0$, pois a sequência é exata e, como σ é injetiva, $h(c) \in \ker \sigma = \{0\}$, consequentemente $h(c) = 0$, assim $c \in \ker h = \operatorname{Im} g$, logo $c = g(b)$ para algum $b \in B$. Agora, pela comutatividade do diagrama, temos que

$$\begin{aligned} g'(b') &= \gamma(c) \\ &= \gamma(g(b)) \\ &= g'(\beta(b)), \end{aligned}$$

desse modo, como g' é homomorfismo,

$$g'(b') = g'(\beta(b)) \implies g'(b' - \beta(b)) = 0.$$

Portanto $b' - \beta(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$ e assim $b' - \beta(b) = f'(a')$ para algum $a' \in A'$. Da sobrejetividade de α temos que existe $a \in A$ tal que $a' = \alpha(a)$, por conseguinte, pela comutatividade do diagrama,

$$b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)).$$

Ainda temos que

$$b' = \beta(b) + \beta(f(a)) = \beta(b + f(a)) \in \operatorname{Im} \beta.$$

Sendo assim $\operatorname{Im} \beta = B'$ e concluímos que β é sobrejetor.

(2) Tome $c \in \ker \gamma$ arbitrário. Como h' é homomorfismo e o diagrama é comutativo, temos

$$\begin{aligned} \sigma(h(c)) &= h'(\gamma(c)) \\ &= h'(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $h(c) \in \ker \sigma = \{0\}$. Como $h(c) = 0$, $c \in \ker h = \operatorname{Im} g$, portanto, para algum $b \in B$, $c = g(b)$. Pela comutatividade do diagrama, e já que $c \in \ker \gamma$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(c) \\ &= \gamma(g(b)) \\ &= g'(\beta(b)), \end{aligned}$$

assim $\beta(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$, desse modo $\beta(b) = f'(a')$ para algum $a' \in A'$. Temos que $a' = \alpha(a)$ para algum $a \in A$, pois α é um epimorfismo, consequentemente

$$\beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)).$$

Da injetividade de β podemos concluir que $b = f(a)$ e, como a sequência é exata, $g \circ f = 0$ chegamos que

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e provamos que γ é injetiva.

$\blacksquare$

Teorema 9. (The five lemma) *Suponha que o seguinte diagrama de módulos e homomorfismos de módulo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & E \arrow[d, "\alpha_5"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

é comutativo e suas fileiras são sequências exatas. Então, se α_1, α_2, α_4 e α_5 são isomorfismos, α_3 também será um isomorfismo.

Demonstração: Aplicando o Teorema 8 item *(1)* aos três quadrados da direita, temos que α_3 é um epimorfismo. Agora, aplicando o Teorema 8 item *(2)* aos três quadrados da esquerda, temos que α_3 é um monomorfismo. Com isso, concluímos que α_3 é um isomorfismo. $\blacksquare$

Corolário 5. *Suponha que o seguinte diagrama de módulos e homomorfismos de módulo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo e suas linhas são sequências exatas. Então, se α e γ são isomorfismos, β também é um isomorfismo.

Demonstração: Considere o diagrama do Teorema 9 e faça

$$A = A' = 0 \text{ e } E = E' = 0.$$

Considere, também no diagrama do Teorema 9, que α_1 e α_5 são a identidade id_0.

Agora, considerando o Teorema 9, temos que β é um isomorfismo.

$\blacksquare$

Exemplo 8. *Sejam* $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ *e* $A \xrightarrow{g'} \tilde{B} \xrightarrow{h'} C$ *duas sequências exatas, com* g *e* g' *injetores e,* h *e* h' *sobrejetores. Se o homomorfismo* $f : B \to \tilde{B}$ *torna o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "f"] & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & C \\ & \tilde{B} \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

comutativo, então f *é um isomorfismo.*

Com efeito, escreva o diagrama da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_A"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g'"] & \tilde{B} \arrow[r, "h'"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Pelo Corolário 5, como id_A *e* id_C *são isomorfismos e o digrama é comutativo, concluímos que* f *é um isomorfismo.*

Todas essas demonstrações nos dão técnicas para entender e demonstrar o teorema da próxima seção.

3.3 THE SNAKE LEMMA

No estudo da álgebra, muitas vezes, o matemático quer ou precisa construir sequências exatas longas, para isso ele poderá utilizar o *Snake Lemma*, que é uma ótima ferramenta para esse fim. Provaremos esse lema baseando-nos no estudo de módulos e homomorfismos de módulos, mas é importante salientar que esse lema é válido para qualquer categoria abeliana.

O *Snake Lemma* é baseado em um diagrama comutativo, com linhas exatas, da forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d''} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' & & \end{array}$$

chamado **diagrama *snake***.

Com as definições de módulo quociente e homomorfismo de módulos, podemos definir o conceito de *co-núcleo*, pois vamos utilizá-la com certa frequência.

Definição 13. Seja $f : M \to M'$ um homomorfismo de módulos. O **co-núcleo** de f é o módulo quociente $M'/\operatorname{Im} f = M'/f(M)$. Indicaremos como $\operatorname{coker} f$.

A definição de co-núcleo é muito importante para entender e demonstrar o lema título desse trabalho.

Como o *Snake Lemma* envolve uma sequência exata do tipo

$$\ker d' \to \ker d \to \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d'',$$

precisamos verificar se realmente podemos definir homomorfismos de módulo entre núcleos e co-núcleos, é o que faremos a seguir.

Considere o seguinte diagrama comutativo de módulos e homomorfismos de módulo

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ N' & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

Então temos um homomorfismo induzido por f

$$\begin{aligned} \overline{f} = f|_{\ker d'} : \ker d' &\to \ker d \\ x' &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

De fato, suponha $x' \in \ker d'$, logo $d'(x') = 0$. Pela comutatividade do diagrama temos que $d \circ f = h \circ d'$, portanto

$$d(f(x')) = h(d'(x')) = 0.$$

Logo $f(x') \in \ker d$.

Agora, considerando o diagrama comutativo de módulos e homomorfismos de módulo

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d} \\ N' & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

temos um homomorfismo, induzido por h

$$\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$$

Com efeito, seja $y' \in N'$ um representante de uma classe lateral de $\operatorname{coker} d' = N'/d'(M')$. O elemento $h(y') + d(M)$ não depende da escolha de y'. De fato, se $y'' = y' + d'(x')$, temos

$$\begin{aligned} h(y'') &= h(y' + d'(x')) \\ &= h(y') + h(d'(x')) \\ &= h(y') + d(f(x')). \end{aligned}$$

Logo temos a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{h} : N'/d'(M') &\to N/d(M) \\ n' + d'(M') &\mapsto h(n') + d(M), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{h} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d. \tag{3.2}$$

Com essas verificações, temos condições de enunciar e demonstrar o *Snake Lemma*, é isso que faremos agora.

Teorema 10. (The Snake Lemma) *Dado um diagrama* snake

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle d'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d''} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' & & \end{array}$$

a aplicação

$$\begin{aligned} \delta : \ker d'' &\to \operatorname{coker} d' \\ \delta(m'') &\mapsto (f'^{-1} \circ d \circ g^{-1})(m'') + \operatorname{Im} d' \end{aligned}$$

está bem definida e temos a sequência exata

$$\ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\tilde{g}} \operatorname{coker} d'', \qquad (3.3)$$

onde $\overline{f}$, $\overline{g}$, $\tilde{f}$ *e* $\tilde{g}$ *são definidos como 3.1 e 3.2.*

Demonstração: Note, primeiramente, que f' é injetor e g é sobrejetor, pela Proposição 5 itens *(1)* e *(2)*. Considere o seguinte diagrama de módulos e homomorfismos de módulo, baseado no diagrama *snake*,

$$\begin{tikzcd}
 & \ker d' \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & \ker d \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d] & \ker d'' \arrow[d] & \\
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\tilde{f}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\tilde{g}"] & \operatorname{coker} d'' &
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações das setas para baixo, sem um nome, são as inclusões e projeções canônicas. Vamos mostrar que tal diagrama tem suas linhas, superior e inferior, exatas.

Para a linha superior, vamos definir $\overline{f}$. Dado $m' \in \ker d'$, então $d'(m') = 0$, note que

$$\begin{aligned} d(f(m')) &= f'(d'(m')) \\ &= f'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pela comutatividade do quadrado, portanto $f(m') \in \ker d$, logo $\overline{f} = f|_{\ker d'}$.

De maneira semelhante podemos definir $\overline{g}$. Tome $m \in \ker d$, logo $d(m) = 0$, então, pela comutatividade do quadrado,

$$\begin{aligned} d''(g(m)) &= g'(d(m)) \\ &= g'(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $\overline{g} = g|_{\ker d}$.

Pela exatidão da sequência temos que $\operatorname{Im} f = \ker g$, tome $m' \in \ker d'$, logo $g(f(m')) = 0$, assim $\overline{g}(\overline{f}(m')) = 0$ e portanto $\operatorname{Im} \overline{f} \subset \ker \overline{g}$.

Seja $m \in \ker \overline{g}$, logo $m \in \ker d$ e $m \in \ker g = \operatorname{Im} f$, assim, $d(m) = 0$ e $m = f(m')$ para algum $m' \in M'$. Agora, pela comutatividade do diagrama,

$$f'(d'(m')) = d(f(m')) = d(m) = 0.$$

Como f' é injetiva, $d'(m') = 0$, logo $m' \in \ker d'$ e $m = \overline{f}(m')$. Concluímos que $\ker \overline{g} = \operatorname{Im} \overline{f}$.

Para a linha inferior, vamos definir $\tilde{f}$. Já vimos esse processo ao definirmos $\tilde{h}$ em 3.2. Tome $n' \in N'$ um representante de uma classe lateral em $\operatorname{coker} d' = N'/\operatorname{Im} d'$, desse modo

$$\tilde{f}(n' + \operatorname{Im} d') = f'(n') + \operatorname{Im} d.$$

Para garantir que $\tilde{f}$ está bem definida, tome $m' \in M'$, então, pela comutatividade do diagrama, $f'(d'(m')) = d(f(m'))$, portanto $f'(d'(M')) \subset \operatorname{Im} d$. Definimos $\tilde{g}$ da mesma forma

$$\tilde{g}(n + \operatorname{Im} d) = g'(n) + \operatorname{Im} d''.$$

Vamos mostrar que a linha inferior é exata. Tome $n+\operatorname{Im} d \in \operatorname{Im} \tilde{f}$, logo $n + \operatorname{Im} d = f'(n') + \operatorname{Im} d$ para algum $n' \in N'$, portanto $\tilde{g}(n+\operatorname{Im} d) = g'(f'(n'))+\operatorname{Im} d'' = 0+\operatorname{Im} d''$, pois a sequência é exata, portanto $n + \operatorname{Im} d \in \ker \tilde{g}$, desse modo $\operatorname{Im} \tilde{f} \subset \ker \tilde{g}$. Agora, tome $n + \operatorname{Im} d \in \ker \tilde{g}$, assim $\tilde{g}(n + \operatorname{Im} d) = g'(n) + \operatorname{Im} d'' = 0 + \operatorname{Im} d''$, então $g'(n) \in \operatorname{Im} d''$, logo $d''(m'') = g'(n)$ para algum $m'' \in M''$. Como g é sobrejetor, temos $g(m) = m''$ para algum $m \in M$.

Faça $g'(n - d(m)) = g'(n) - g'(d(m))$, pela comutatividade do diagrama temos

$$\begin{aligned} g'(n) - g'(d(m)) &= d''(m'') - d''(g(m)) \\ &= d''(m'') - d''(m'') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$n - d(m) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'.$$

Logo temos $n' \in N'$ tal que

$$\begin{aligned} f'(n') = n - d(m) \implies \tilde{f}(n' + \operatorname{Im} d') &= n - d(m) + \operatorname{Im} d \\ &= n + \operatorname{Im} d \end{aligned}$$

e finalmente $\operatorname{Im} \tilde{f} = \ker \tilde{g}$.

Agora vamos definir a aplicação $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$. Ela pode ser definida com $m'' \in \ker d''$, como g é sobrejetor, existe $m \in M$ tal que $g(m) = m''$. Seja $n = d(m) \in N$, faça $g'(n) = g'(d(m)) = d''(g(m)) = d''(m'') = 0$, logo $n \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$, portanto existe $n' \in N'$ tal que $f'(n') = d(m)$. Desse modo podemos definir $\delta(m'') = n' + \operatorname{Im} d'$. Note que n' é único, pois f' é injetiva.

Vamos mostrar que δ está bem definida. Tome, $a_1 \in M$ como uma imagem inversa, por g, de m'' e seja $a_2 = d(a_1)$. Note que tal elemento a_2 tem uma única imagem inversa, por f', $b_2 \in N'$, pois f' é injetiva. Note que $m - a_1 \in \ker g$, pois

$$\begin{aligned} g(m - a_1) &= g(m) - g(a_1) \\ &= m'' - m'' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim $m - a_1 \in \operatorname{Im} f$, portanto existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m - a_1$. Daí, temos

$$\begin{aligned} f'(n' - b_2) &= d(m) - a_2 \\ &= d(m - a_1) \\ &= d(f(m')) \\ &= f'(d'(m')) \end{aligned}$$

como f' é injetiva $n' - b_2 = d'(m')$, logo $n' + \operatorname{Im} d' = b_2 + \operatorname{Im} d'$, ou seja, definem a mesma classe lateral em $\operatorname{coker} d' = N'/\operatorname{Im} d'$. Mostramos que aplicação δ está bem definida, ou seja, é independente das escolhas dos elementos nas imagens inversas de f e g.

Agora vamos provar que a Sequência 3.3 é exata em $\ker d''$.

($\operatorname{Im} \overline{g} \subset \ker \delta$): Se $m'' \in \operatorname{Im} \overline{g}$, então $m'' = g(m)$, com $m \in \ker d$. Vemos que

$$\begin{aligned} n &= d(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

como f' é injetiva podemos considerar $n = f'(0)$, portanto $\delta(m'') = 0 + \operatorname{Im} d'$. Concluímos que $\operatorname{Im} \overline{g} \subset \ker \delta$.

($\ker \delta \subset \operatorname{Im} \overline{g}$): Tome $m'' \in \ker \delta$ e lembre que existe $m \in M$, com $g(m) = m''$ e denotamos $n = d(m)$. Temos

$$\delta(m'') = n' + \operatorname{Im} d' = 0 + \operatorname{Im} d',$$

onde $f'(n') = n$. Logo $n' \in \operatorname{Im} d'$, ou seja, existe $m' \in M'$ tal que $n' = d'(m')$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(m) &= n \\ &= f'(d'(m')) \\ &= d(f(m')) \end{aligned}$$

desse modo $m - f(m') \in \ker d$, pois

$$\begin{aligned} d(m) = d(f(m')) &\implies d(m) - d(f(m')) = 0 \\ &\implies d(m - f(m')) = 0. \end{aligned}$$

Agora, como $g \circ f = 0$,

$$\begin{aligned} \overline{g}(m - f(m')) &= g(m) - g(f(m')) \\ &= g(m) \\ &= m''. \end{aligned}$$

Assim, $m'' \in \operatorname{Im} \overline{g}$. Podemos concluir, então, que $\operatorname{Im} \overline{g} = \ker \delta$.

O próximo passo será provar que a sequência é exata em $\operatorname{coker} d'$.

($\operatorname{Im}\delta \subset \ker \tilde{f}$): Tomando $n' + \operatorname{Im} d' \in \operatorname{Im}\delta$, como, por construção, $n' + \operatorname{Im} d' = \delta(m'')$, onde $g(m) = m''$ e $d(m) = f'(n')$, com $m \in M$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(n' + \operatorname{Im} d') &= f' + \operatorname{Im} d \\ &= d(m) + \operatorname{Im} d \\ &= 0 + \operatorname{Im} d. \end{aligned}$$

Portanto $n' + \operatorname{Im} d' \in \ker \tilde{f}$.

($\ker \tilde{f} \subset \operatorname{Im}\delta$): Seja $n' + \operatorname{Im} d' \in \ker \tilde{f}$. Então $n = f'(n') \in \operatorname{Im} d$ e existe um $m \in M$ tal que $d(m) = f'(n')$. Seja $m'' = g(m)$, assim

$$\begin{aligned} d''(m'') &= d''(g(m)) \\ &= g'(d(m)) \\ &= g'(f'(n')) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, basta tomar $n' + \operatorname{Im} d' = \delta(m'')$. Desse modo $n' + \operatorname{Im} d' \in \operatorname{Im}\delta$.

Por fim, podemos representar a aplicação δ no diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd}
 & \ker d' \arrow[r] \arrow[d] & \ker d \arrow[r] \arrow[d] & \ker d'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r] & \operatorname{coker} d \arrow[r] & \operatorname{coker} d'' &
\end{tikzcd}$$

daí vem o nome do lema.

■

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordamos os conceitos de módulos e submódulos, vimos como esses conceitos podem ser desenvolvidos de forma muito semelhante à teoria de anéis e grupos, definições para módulo quociente e homomorfismos de módulo. Além disso definimos diagramas comutativos, que, como foi dito, é extremamente importante para o nosso objetivo. Todos esses conceitos formam uma base sólida para o estudo proposto do *Snake Lemma*.

Futuros trabalhos, que poderiam aprofundar o estudo nessa área, podem incluir o estudo de soma e produto direto, bem como o estudo de produto tensorial. Outro rumo a se tomar pode envolver a demonstração do *Axioma de Sequências Exatas Longas*. Uma outra sugestão seria um estudo aprofundado sobre categorias abelianas.

REFERÊNCIAS

[1] ATIYAH, M. *Introduction to commutative algebra.* Westview Press, Boulder, CO, 1994.

[2] BLYTH, T. S. *Module theory: an approach to linear algebra.* 2ª ed. Oxford University Press, USA, 1977.

[3] GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra.* Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[4] LANG, S. *Algebra.* 3ª ed. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer-Verlag, New York, 2002.