



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Artur Adolfo Falkovski

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS  
CLMS E CNLMS APLICADOS À CONFORMAÇÃO DE FEIXE EM  
ARRANJOS DE ANTENAS**

Florianópolis-SC

2021

Artur Adolfo Falkovski

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS  
CLMS E CNLMS APLICADOS À CONFORMAÇÃO DE FEIXE EM  
ARRANJOS DE ANTENAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Trindade, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Rui Seara, Dr.

Florianópolis-SC

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Falkovski, Artur Adolfo

Modelagem estocástica dos algoritmos adaptativos CLMS e  
CNLMS aplicados à conformação de feixe em arranjo de antenas  
/ Artur Adolfo Falkovski ; orientador, Rui Seara, 2021.  
68 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Arranjos Adaptativos. 3.  
Modelagem Estocástica. 4. Algoritmo CLMS. 5. Algoritmo  
CNLMS. I. Seara, Rui. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.  
III. Título.

Artur Adolfo Falkovski

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS CLMS E  
CNLMS APLICADOS À CONFORMAÇÃO DE FEIXE EM ARRANJO DE  
ANTENAS**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn, Dr.

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Fábio Luis Perez, Dr.

FURB - Universidade de Blumenau

Eng. Guilherme Martignago Zilli, M.Sc.

Concordia University

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na área de concentração *Comunicações e Processamento de Sinais*, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Rui Seara, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais Leonardo e Cláudia, aos meus irmãos Gabriel e Amanda e à minha companheira Rafaella. Dedico ainda em memória de minha avó Maria Vitória.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de realizar o curso de mestrado e por proporcionar condições para a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus amados pais Leonardo e Cláudia, que me apoiaram incondicionalmente durante toda a realização deste trabalho. Agradeço as meus irmãos Amanda e Gabriel pela amizade em todos os momentos, e também a minha companheira para todas as horas Rafaella.

Agradeço a todos os meus professores que tive durante a minha formação que me possibilitaram chegar até aqui. Em especial, ao professor Rui Seara pela orientação, paciência, motivação e por todas as conversas e também ao professor Eduardo Vinicius Kuhn pelo incentivo e pelas contribuições para o desenvolvimento dessa dissertação. Também vão meus agradecimentos aos professores Marcos Vinicius Matsuo, Ciro André Pitz e Eduardo Luiz Ortiz Batista por todas as contribuições aos artigos publicados.

Agradeço a todos os amigos que fiz neste período, Ana, Carol, Carmen, Cristian e Cristiano, Felipe, Fu e Paulo, Jefferson e Michele, Jorge, Lucas, Luiz, Luiza, Miguel e Robson.

Agradeço a todos os colegas do Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais – LINSE, Daniel, Elton, Ênio, Jean, João, Khaled, Luana, Rafael, Rafaela, Rogério e aos demais colegas.

Agradeço à banca examinadora, composta pelos professores Eduardo Vinicius Kuhn, Fábio Luis Perez e Guilherme Martignago Zilli por aceitarem participar da banca e por todas as contribuições oferecidas a este trabalho de pesquisa.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro, à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e ao LINSE pela infraestrutura disponibilizada para a realização deste trabalho de dissertação de mestrado.

Não sei se a vida é curta ou longa demais para nós, mas sei que nada do que vivemos tem sentido, se não tocarmos o coração das pessoas.

(Autor desconhecido)

## RESUMO

Este trabalho de pesquisa aborda a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos com restrição lineares, considerando um problema de conformação de feixe em arranjos adaptativos de antenas. Especificamente, busca-se realizar a modelagem estocástica dos algoritmos CLMS (*constrained least-mean-square*) e CNLMS (*constrained normalized least-mean-square*). Tais algoritmos adaptativos operam minimizando a potência de saída do sistema enquanto mantêm ganho unitário na direção do SOI (*signal-of-interest*). O modelo proposto para cada um dos algoritmos contém expressões que descrevem o comportamento médio do vetor de coeficientes, a evolução da SINR (*signal-to-interference-plus-noise ratio*), a matriz de correlação do vetor de coeficientes, bem como expressões para prever o valor em regime permanente do vetor de coeficientes e da SINR. Essas expressões permitem compreender melhor o comportamento dos algoritmos no contexto de conformação de feixe. Resultados de simulação, no contexto de arranjos adaptativos de antenas, são apresentados visando confirmar a precisão do modelo proposto em diferentes condições de operação.

**Palavras-chave:** Algoritmo CLMS, algoritmo CNLMS, arranjos adaptativos, comunicações móveis, conformação de feixe, modelagem estocástica.

## ABSTRACT

This research work addresses the stochastic modeling of linearly constrained adaptive algorithms, considering a beamforming problem in adaptive antenna arrays. More specifically, it aims to obtain the stochastic models of the constrained least-mean-square (CLMS) and the constrained normalized least-mean-square (CNLMS) algorithms. Those adaptive algorithms operate by minimizing the output power of the system while maintaining unity gain towards the signal-of-interest (SOI). The proposed model for each of the algorithms entails expressions describing the mean behavior of the coefficient vector, the evolution of the signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR), the correlation matrix of the coefficient vector, as well as expressions for predicting the steady-state value of both coefficient vector and SINR. The derived expressions allow having a better understanding of the behavior of the algorithm in the beamforming context. Simulation results are presented in the adaptive antenna array context aiming to confirm the accuracy of the proposed model under different operating scenarios.

**Keywords:** CLMS algorithm, CNLMS algorithm, adaptive arrays, mobile communications, beamforming, stochastic modeling.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Diagrama de um arranjo adaptativo de antenas.....	19
Figura 1.2. Sinal recebido por um arranjo linear uniforme com $M$ antenas.....	21
Figura 2.1. Exemplo 1. (a) e (b) Comportamento médio das partes real e imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo ( $i = 1, 4, 5$ e $9$ ) para $\Delta\theta = 3^\circ$ . (c) Evolução da SINR. (d) SINR em regime permanente. (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto. ....	33
Figura 2.2. Exemplo 2. (a) Evolução da SINR. (b) SINR em regime permanente. (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto. ....	34
Figura 2.3. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (d) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 4$ e $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.....	35
Figura 2.4. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (d) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 8$ e $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.....	35
Figura 2.5. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (d) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 12$ e $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.....	36
Figura 2.6. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (d) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o primeiro cenário. (Linhas e marcadores em cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto. ....	37
Figura 2.7. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (d) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o segundo cenário. (Linhas e marcadores em cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto. ....	38
Figura 3.1. Exemplo 1. (a) Comportamento médio das partes real e imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo ( $i = 1, 8$ e $9$ ) para $\Delta\theta = 20^\circ$ . (b) Evolução da SINR. . (c) SINR em regime permanente usando (3.34). Simulação de MC (linhas e marcadores cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).....	49
Figura 3.2. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 4$ e $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). ....	50
Figura 3.3. Exemplo 2. SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 4$ e $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). ....	50
Figura 3.4. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 8$ e $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). ....	50
Figura 3.5. Exemplo 2 SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 8$ e $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). ....	51

Figura 3.6. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 12$ e $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). .....	51
Figura 3.7. Exemplo 2. SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para $K = 12$ e $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). .....	51
Figura 3.8. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o primeiro caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). .....	52
Figura 3.9. Exemplo 3. SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o primeiro caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). .....	53
Figura 3.10. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o segundo caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). .....	53
Figura 3.11. Exemplo 3 SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o segundo caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). .....	53
Figura 3.12. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o terceiro caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). .....	53
Figura 3.13. Exemplo 3. SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ para o terceiro caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). .....	54
Figura 3.14. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas). .....	54
Figura 3.15. Exemplo 4. SINR em regime permanente para (a) $\Delta\theta = 3^\circ$ e (b) $\Delta\theta = 20^\circ$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas). .....	55

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

5G	<i>fifth generation</i>
AOA	<i>angle-of-arrival</i>
CLMS	<i>constrained least-mean-square</i>
CDMA	<i>code-division multiple access</i>
CM	<i>constant modulus</i>
CNLS	<i>constrained normalized least-mean-square</i>
CSG	<i>constrained stochastic gradient</i>
DSP	<i>digital signal processor</i>
ICSG	<i>improved constrained stochastic gradient</i>
LCMV	<i>linear-constrained-minimum-variance</i>
MC	Monte Carlo
MIMO	<i>multiple-input-multiple-output</i>
MMSE	<i>minimum mean square error</i>
MSD	<i>mean-square deviation</i>
MVDR	<i>minimum-variance-distortionless</i>
PM	Princípio da Média
QAM	<i>quadrature amplitude modulation</i>
SINR	<i>signal-to-interference-plus-noise ratio</i>
SIR	<i>signal-to-interference ratio</i>
SOI	<i>signal-of-interest</i>
ULA	<i>uniform linear array</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$i$	índice do SOI
$\Delta t_i$	atraso entre o instante de tempo
$d$	distância entre duas antenas adjacentes
$\theta_k$	ângulo de chegada em azimute
$v_0$	velocidade de propagação da onda
$m_k(t)$	sinal transmitido pelo usuário $k$
$\lambda_c$	comprimento de onda portadora
$f_c$	frequência da onda portadora
$\Delta \psi_i$	atraso de fase
$s_i(t)$	sinal recebido pela antena $i$
$j$	unidade imaginária
$\mathbf{a}(\theta_k)$	vetor diretor do sinal correspondente a $\theta_k$
$\mathbf{d}$	vetor contendo a posição relativa de cada antena do arranjo
$M$	número de antenas do arranjo
$K$	número de terminais móveis (usuários)
$\mathbf{x}(n)$	vetor do sinal de entrada recebido pelo arranjo
$\mathbf{s}_k(n)$	a parcela do sinal recebido na entrada do arranjo correspondente ao sinal transmitido pelo $k$ -ésimo usuário
$\mathbf{z}(n)$	o ruído aditivo gaussiano branco presente na entrada do arranjo de antenas
$\rho_k$	potência de transmissão do $k$ -ésimo usuário
$\beta_k(n)$	símbolo transmitido pelo $k$ -ésimo usuário
$I$	número de percursos
$\Delta \theta$	ângulo de espalhamento dos componentes multipercurso
$\alpha_{k,i}(n)$	coeficiente aleatório que modela o desvanecimento multipercurso
$y(n)$	sinal de saída do arranjo
$\mathbf{w}(n)$	o vetor de coeficientes do filtro adaptativo
$\mathbf{R}_x$	matriz de autocorrelação do sinal de entrada
$\mathbf{R}_k$	matriz de autocorrelação da posição de cada um dos terminais móveis
$\gamma(n)$	SINR
$\sigma_z^2$	variância do ruído aditivo
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão $M \times M$
$\mathbf{R}_{\text{soi}}$	matriz de autocorrelação do SOI
$\mathbf{R}_{\text{int}}$	matriz de autocorrelação dos sinais interferentes mais o ruído
$\mathbf{C}$	matriz de restrições lineares

$\mathbf{g}$	vetor contendo a resposta para cada restrição
$L$	número de restrições
$\mathbf{a}(\theta_i)$	vetor diretor do SOI
$J(\mathbf{w})$	função custo
$\boldsymbol{\lambda}$	vetor dos multiplicadores de Lagrange
$\nabla_{\mathbf{w}^*}$	operador gradiente
$\mathbf{w}_o$	vetor de coeficientes ótimo para o critério LCMV
$\hat{J}(n)$	função custo instantânea
$\boldsymbol{\lambda}^H(n)$	vetor dos multiplicadores de Lagrange instantâneo
$\hat{\mathbf{R}}_x(n)$	estimativa da matriz de correlação do sinal de entrada
$\mu$	passo de adaptação
$\mathbf{P}$	matriz do operador de projeção no subespaço ortogonal à $\mathbf{C}$
$e_{ap}(n)$	erro instantâneo após a iteração $n$
$d(n)$	sinal de referência
$\mathbf{K}(n)$	matriz de correlação do vetor de coeficientes
$\mathbf{I}_{M^2}$	matriz identidade de dimensão $M^2 \times M^2$
$\mathbf{v}'(n)$	vetor auxiliar de erro dos coeficientes
$\mathbf{K}'(n)$	matriz de covariância do vetor de erro
$e_a(n)$	sinal de erro <i>a priori</i>
$e_p(n)$	sinal de erro <i>a posteriori</i>
$\mathbf{T}$	matriz de autovetores de $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$
$\boldsymbol{\Lambda}$	matriz diagonal contendo os autovalores de $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$
$\mathbf{Q}$	matriz de transformação
$\lambda_k$	autovalor $k$ de $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$
$\boldsymbol{\Lambda}'$	matriz diagonal que contém os autovalores não nulos de $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$
$\mathbf{R}_1$	matriz de autocorrelação normalizada do sinal de entrada
$\mathbf{H}$	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{R}_1$
$\mathbf{G}$	matriz auxiliar para solução de $\mathbf{R}_2(n)$

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – Introdução</b> .....	17
<b>1.1 Arranjos adaptativos de antenas e algoritmos adaptativos</b> .....	18
<b>1.2 Modelo dos sinais</b> .....	19
<b>1.3 Algoritmos de conformação de feixe</b> .....	22
1.3.1 Algoritmo CLMS .....	23
1.3.2 Algoritmo CNLMS .....	25
<b>1.4 Objetivos</b> .....	25
<b>1.5 Estrutura da dissertação</b> .....	26
<b>CAPÍTULO 2 – Modelagem estocástica do algoritmo CLMS</b> .....	27
<b>2.1 Introdução</b> .....	27
<b>2.2 Hipóteses simplificativas</b> .....	28
<b>2.3 Comportamento médio do vetor de coeficientes</b> .....	28
<b>2.4 Evolução da SINR</b> .....	29
<b>2.5 Matriz de correlação do vetor de coeficientes</b> .....	29
<b>2.6 Comportamento do vetor de coeficientes em regime permanente</b> .....	30
<b>2.7 Comportamento da SINR em regime permanente</b> .....	30
<b>2.8 Resultados de simulação</b> .....	31
2.8.1 Exemplo 1.....	32
2.8.2 Exemplo 2.....	33
2.8.3 Exemplo 3.....	34
2.8.4 Exemplo 4.....	36
<b>2.9 Conclusões</b> .....	38
<b>CAPÍTULO 3 – Modelagem estocástica do algoritmo CNLMS</b> .....	39
<b>3.1 Introdução</b> .....	39
<b>3.2 Hipóteses simplificativas</b> .....	39
<b>3.3 Comportamento médio do vetor de coeficientes</b> .....	40
<b>3.4 Evolução da SINR</b> .....	40
<b>3.5 Matriz de correlação do vetor de coeficientes</b> .....	41
<b>3.6 Comportamento do vetor de coeficientes em regime permanente</b> .....	41
<b>3.7 SINR em regime permanente</b> .....	42
3.7.1 Expressão simplificada para SINR em regime permanente .....	42
<b>3.8 Cálculo das matrizes do tipo autocorrelação normalizadas</b> .....	45
3.8.1 Autodecomposição de $\mathbf{PR}_x$ .....	45

3.8.2 Soluções para $R_1$ e $R_2(n)$ .....	46
<b>3.9 Resultados de simulações .....</b>	<b>48</b>
3.9.1 Exemplo 1.....	48
3.9.2 Exemplo 2.....	49
3.9.3 Exemplo 3.....	52
3.9.4 Exemplo 4.....	54
<b>3.10 Conclusões.....</b>	<b>55</b>
<b>CAPÍTULO 4 – Considerações finais.....</b>	<b>56</b>
<b>4.1 Conclusões.....</b>	<b>56</b>
<b>4.2 Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>58</b>
<b>4.3 Trabalhos publicados oriundos da dissertação .....</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICE A – Cálculo de <math>K(\infty)</math>.....</b>	<b>59</b>
<b>APÊNDICE B – Cálculo das Matrizes H e G.....</b>	<b>61</b>
<b>B.1 Determinação de <math>R_1</math> .....</b>	<b>61</b>
<b>B.2 Determinação de <math>R_2(n)</math> .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>67</b>

## INTRODUÇÃO

Sistemas de comunicação sem fio estão presentes no cotidiano da sociedade contemporânea e viabilizam a existência de um grande número de tecnologias que vêm sendo essenciais para o desenvolvimento da sociedade, dentre as quais se destacam: a televisão, a telefonia, a internet móvel, os sistemas de navegação por satélite e as redes sem fio. Devido ao constante avanço tecnológico, tais sistemas precisam acomodar também novas tecnologias que vêm sendo desenvolvidas em redes de sensores, automação industrial, residencial e rodoviária, telemedicina, dentre outras áreas [1]-[3]. Frente a gama de aplicações envolvendo comunicações sem fio, surgem importantes limitações que afetam o funcionamento desses sistemas, tais como a limitação de alocação espectral, o ambiente de propagação, a mobilidade dos usuários, a potência limitada dos dispositivos móveis e a interferência causada pela reutilização de frequências [1], [2], [4], [5]. Diante disso, arranjos adaptativos de antenas têm se tornado uma alternativa interessante para melhorar o desempenho dos sistemas de comunicação móveis.

Arranjos adaptativos de antenas realizam, através de um algoritmo adaptativo de conformação de feixe, a filtragem espacial (processo iterativo que permite ajustar o padrão de irradiação do arranjo) e, assim, auxiliam na recepção do sinal de interesse [4], [6]-[8]. Tal técnica permite atenuar os sinais interferentes enquanto maximiza o sinal desejado, proporcionando assim níveis mais elevados de razão sinal-interferência-ruído (SINR). Então, tendo em vista que o algoritmo adaptativo realiza o ajuste do diagrama de irradiação do arranjo de antenas, torna-se importante conhecer o comportamento do algoritmo adaptativo utilizado, o qual é dependente do cenário de operação e dos parâmetros do algoritmo. Nesse sentido, o desempenho do algoritmo pode ser avaliado através de simulações de Monte Carlo (MC), as quais em geral são computacionalmente custosas (já que podem demandar um grande número de realizações). De maneira alternativa, a análise de desempenho de algoritmos adaptativos pode ser realizada através de modelos estocásticos. Tais modelos são

constituídos por um conjunto de expressões matemáticas que descrevem o comportamento do algoritmo adaptativo sob análise, permitindo realizar comparações de desempenho (sem a necessidade de extensivas simulações de MC), como também estabelecer relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e importantes métricas de desempenho.

### 1.1 Arranjos adaptativos de antenas e algoritmos adaptativos

Arranjos adaptativos de antenas possuem a capacidade de ajustar seu próprio padrão de irradiação, permitindo que eles se adaptem (em tempo real) ao ambiente de operação. Através desse ajuste, é possível atenuar sinais interferentes e direcionar o feixe do arranjo ao sinal de interesse (SOI – *signal-of-interest*). Como consequência, esses arranjos reduzem a interferência co-canal, tornam a comunicação mais robusta a *jamming* intencional e permitem reduzir a potência despendida na transmissão [4], [5]. Essas vantagens permitem a criação dos sistemas *massive* MIMO (*multiple-input multiple-output*) que são muito utilizados nas gerações mais recentes de sistemas de comunicação móveis (por exemplo, 5G), em que arranjos com um número muito grande de antenas (usualmente maior do que 100 [9]) irradiam feixes extremamente diretivos [9], [10]. Dessa forma, é possível utilizar portadoras com frequências mais elevadas, o que acarreta um desvanecimento mais severo [9], [10].

Os arranjos adaptativos de antenas são formados fundamentalmente por duas partes, uma responsável pela recepção dos sinais e a outra por processar a informação recebida (veja a Figura 1.1). A primeira parte é composta pelas antenas do arranjo, que recebem o sinal do meio, e o *downconverter*, que realiza a demodulação dos sinais recebidos e a conversão analógica/digital. Na segunda parte, representada pelo quadrado em linhas tracejadas [caracterizando o processador digital de sinais (DSP – *digital signal processor*)], o sinal digitalizado das antenas é processado a partir de um conjunto de coeficientes complexos que modificam a magnitude e fase do sinal recebido em cada elemento. No DSP ocorre também um processo iterativo para o ajuste dos coeficientes. Por fim, o sinal de saída do arranjo adaptativo de antenas é obtido através da soma ponderada dos sinais da entrada digitalizados, a qual é denominada filtragem espacial. Nesse contexto, os algoritmos adaptativos são utilizados para realizar o ajuste iterativo dos coeficientes a fim de satisfazer uma função objetivo. Tal função pode ser obtida de diferentes formas, por exemplo, minimizando o erro quadrático médio em relação a um sinal de referência (MMSE – *minimum mean-square error*) [4], [5], ou minimizando a potência de saída do arranjo enquanto atende a um conjunto de restrições lineares (critérios MVDR – *minimum-variance-distortionless-response* e LCMV –

*linear-constrained-minimum-variance*) [4], [5], [11], ou ainda sendo calculada a partir dos sinais de entrada e saída, tal como nos algoritmos CM (*constant modulus*) [12], CSG (*constrained stochastic gradient*) [13] e ICSG (*improved constrained stochastic gradient*) [14]. Todas essas técnicas permitem reduzir a influência dos sinais interferentes e, dessa forma, melhorar a qualidade da comunicação.

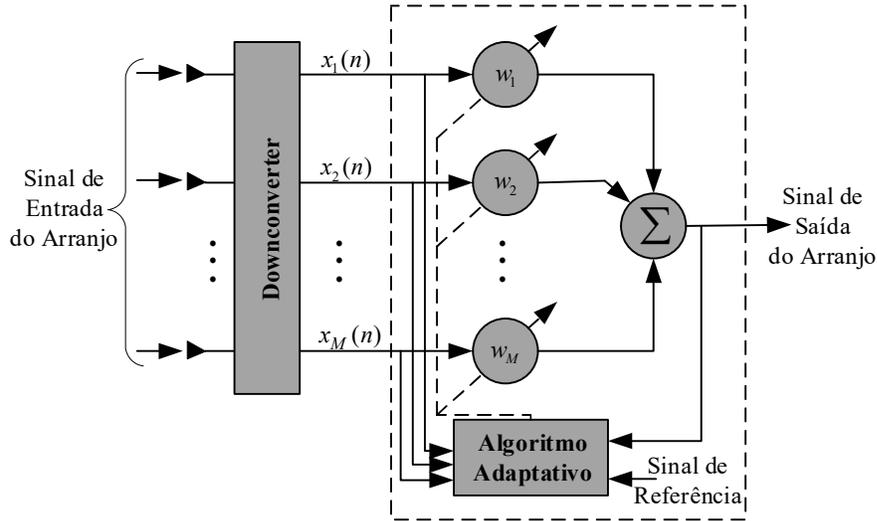


Figura 1.1. Diagrama de um arranjo adaptativo de antenas.

A partir do critério LCMV, foram derivados os algoritmos CLMS (*constrained least-mean-square*) [11] e CNLMS (*constrained normalized LMS*) [15]. Especificamente, o algoritmo CLMS foi apresentado em [11] visando garantir ganho unitário para a direção do sinal de interesse, enquanto minimiza a potência de saída do arranjo. Tal algoritmo é considerado relevante já que apresenta uma baixa complexidade computacional e necessita apenas do conhecimento prévio do AOA (*angle-of-arrival*) do SOI [4], [5], [11]. Por outro lado, em [15] e [16], é apresentado o algoritmo CNLMS, o qual introduz um procedimento de normalização ao processo de adaptação. A utilização dessa normalização proporciona, segundo [15] e [16], uma convergência mais rápida e um menor desajuste em relação ao CLMS. Alguns outros trabalhos recentes da literatura apresentam outros algoritmos através de uma formulação semelhante à dos algoritmos CLMS e CNLMS [17]–[19].

## 1.2 Modelo dos sinais

O modelo dos sinais utilizado aqui leva em consideração um arranjo linear uniforme (ULA – *uniform linear array*) com  $M$  antenas (como ilustrado na Figura 1.2) localizado na ERB (estação rádio base). Nesse contexto, o sinal transmitido pelo  $k$ -ésimo usuário  $m_k(t)$  atinge cada antena do arranjo com um atraso de tempo distinto. Então, admitindo que a

dimensão do arranjo de antenas seja muito menor do que a distância entre o usuário e o arranjo, a frente de onda do sinal transmitido pode ser considerada plana implicando que o sinal transmitido pelo  $k$ -ésimo usuário seja recebido em cada antena com um atraso proporcional à distância entre as antenas [4], [5]. A partir da Figura 1.2, verifica-se que o atraso entre o instante de tempo em que o sinal atinge a Antena  $i$  e a Antena 1 é dado por

$$\Delta t_i = \frac{(i-1)d \sin(\theta_k)}{v_0} \quad (1.1)$$

em que  $d$  é a distância entre duas antenas adjacentes,  $\theta_k$  é ângulo de chegada (AOA – *angle-of-arrival*) no plano azimutal que representa o ângulo formado pelo vetor normal ao arranjo e o vetor que representa a direção do sinal recebido, e  $v_0$  denota a velocidade de propagação da onda. Ainda, assumindo que  $m_k(t)$  seja um sinal de banda estreita, então

$$v_0 = \lambda_c f_c \quad (1.2)$$

onde  $\lambda_c$  e  $f_c$  representam, respectivamente, o comprimento de onda e a frequência da onda portadora. Portanto, considerando (1.1) e (1.2), o atraso de fase do sinal é obtido através de

$$\Delta \psi_i = 2\pi \frac{(i-1)d \sin(\theta_k)}{\lambda_c}. \quad (1.3)$$

Assim, o sinal recebido pela Antena  $i$  pode ser expresso como

$$s_i(t) = m_k(t) \exp \left[ -j 2\pi \frac{(i-1)d \sin(\theta_k)}{\lambda_c} \right] \quad (1.4)$$

com  $j$  representando a unidade imaginária [4], [5].

A partir do atraso do sinal recebido em cada antena do arranjo [conforme em (1.4)], pode-se definir um vetor diretor para um arranjo ULA contendo a resposta do arranjo para cada sinal recebido, isto é, cada elemento do vetor diretor representa o atraso sofrido pelo sinal até atingir cada antena do arranjo. Assumindo então que os elementos do arranjo sejam idênticos (ganho unitário), o vetor diretor de um arranjo ULA pode ser expresso como

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d} \sin(\theta_k) \right] \quad (1.5)$$

com

$$\mathbf{d} = [0, d, \dots, (M-1)d]^T \quad (1.6)$$

contendo a posição relativa de cada antena com respeito à Antena 1 [4], [5], [20].

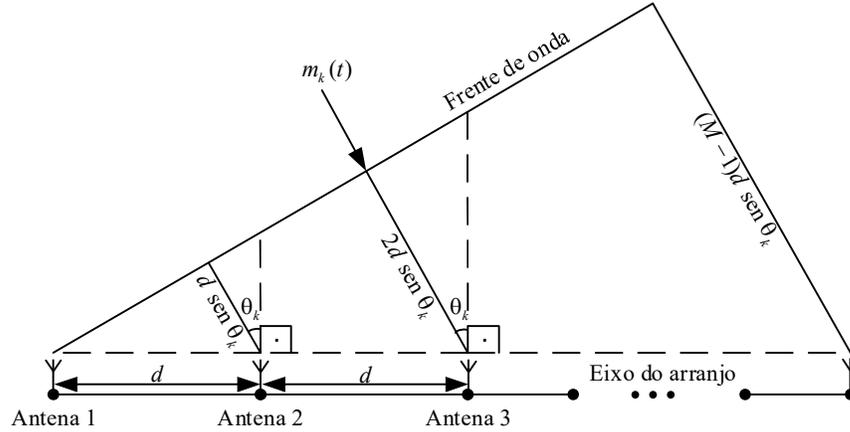


Figura 1.2. Sinal recebido por um arranjo linear uniforme com  $M$  antenas.

Considera-se aqui um cenário em que a estação com  $K$  terminais móveis (usuários) compartilham o mesmo canal. Assim, o sinal recebido pelo arranjo de antenas é dado por

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k(n) + \mathbf{z}(n) \quad (1.7)$$

onde  $\mathbf{s}_k(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é a parcela do sinal recebido na entrada do arranjo correspondente ao sinal transmitido pelo  $k$ -ésimo usuário e  $\mathbf{z}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  o ruído aditivo gaussiano branco presente na entrada do arranjo de antenas [4], [5], [20]. Adicionalmente, assumindo que os sinais transmitidos sofram desvanecimento por multipercurso, tem-se que

$$\mathbf{s}_k(n) = \sqrt{\rho_k} \beta_k(n) \sum_{i=1}^I \alpha_{k,i}(n) \mathbf{a}(\theta_{k,i}) \quad (1.8)$$

onde  $\rho_k$  e  $\beta_k(n)$  denotam a potência de transmissão e o símbolo transmitido pelo  $k$ -ésimo usuário [5], respectivamente. Ainda em (1.8),  $I$  define o número de percursos diferentes,  $\alpha_{k,i}(n)$  representa o coeficiente aleatório (com função de distribuição de probabilidade de Rayleigh na magnitude e uniforme na fase) que modela o desvanecimento multipercurso, enquanto  $\theta_{k,i}$  é o AOA (com função de distribuição de probabilidade uniforme<sup>1</sup>) em azimuth do  $i$ -ésimo percurso proveniente do  $k$ -ésimo usuário [5].

Por sua vez, o sinal de saída do arranjo é obtido como

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n) \mathbf{x}(n) \quad (1.9)$$

<sup>1</sup> A função de distribuição Laplaciana pode ser também usada para modelar adequadamente o AOA dos componentes multipercurso em alguns cenários reais [36].

com  $\mathbf{w}^H(n)$  denotando o vetor de coeficientes do filtro adaptativo. Então, para avaliar a evolução da SINR na saída do arranjo adaptativo de antenas, a potência média de  $y(n)$  é calculada através de

$$E[|y(n)|^2] = \mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_x \mathbf{w}(n) \quad (1.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{x}(n)] \\ &= \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{R}_k + \sigma_z^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.11)$$

é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada, na qual

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mathbf{a}(\theta_{k,i}) \mathbf{a}^H(\theta_{k,i}) \quad (1.12)$$

representa a matriz de autocorrelação da posição de cada um dos terminais móveis,  $\sigma_z^2$  é a variância do ruído aditivo e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$ . Portanto, sabendo que a SINR é a razão entre a potência do SOI e a potência da interferência mais ruído, escreve-se [de (1.10)] a SINR como [4]

$$\gamma(n) = \frac{\mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_{\text{soi}} \mathbf{w}(n)}{\mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_{\text{int}} \mathbf{w}(n)}. \quad (1.13)$$

Considerando ainda que o índice  $k = i$ , em (1.11), correspondente ao SOI,

$$\mathbf{R}_{\text{soi}} = \rho_j \mathbf{R}_j \quad (1.14)$$

e

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \rho_k \mathbf{R}_k + \sigma_z^2 \mathbf{I} \quad (1.15)$$

são, respectivamente, as matrizes de autocorrelação do SOI e dos sinais interferentes mais o ruído.

### 1.3 Algoritmos de conformação de feixe

Nesta seção, os algoritmos CLMS e CNLMS serão revisitados, cobrindo tanto a derivação matemática dos algoritmos quanto algumas considerações sobre sua operação. Nos capítulos posteriores, esses conceitos serão utilizados para efetuar a modelagem estocástica de ambos os algoritmos.

### 1.3.1 Algoritmo CLMS

Em [11], o algoritmo CLMS é formulado a partir do critério LCMV. Dessa forma, pré-estabelecendo um conjunto adequado de restrições, é possível maximizar de forma iterativa a SINR na saída do arranjo. Particularmente, o critério LCMV pode ser expresso como o seguinte problema de otimização:

$$\text{minimizar } \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}, \text{ sujeito a } \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (1.16)$$

onde  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times L}$  é uma matriz que concatena o vetor diretor de cada uma das restrições,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$  é um vetor contendo o ganho fixado para as restrições e  $L$  é o número de restrições. Quando existe apenas uma restrição para garantir ganho unitário na direção do SOI, o critério LCMV se reduz ao MVDR [4] e, portanto,  $\mathbf{C} = \mathbf{a}(\theta_i)$  e  $\mathbf{g} = 1$ .

Para obter a solução ótima de (1.16), é utilizado o método dos multiplicadores de Lagrange para transformar o problema LCMV, descrito por (1.16), em um problema sem restrição. A partir disso, a função custo é definida como

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{w} - \mathbf{g}) \quad (1.17)$$

em que  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. Então, tomando o gradiente de (1.17) em relação a  $\mathbf{w}^*$ , obtém-se [21]

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} J(\mathbf{w}) = \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}. \quad (1.18)$$

Em seguida, fazendo  $\nabla_{\mathbf{w}^*} J(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$  em (1.18) e resolvendo a expressão resultante para  $\mathbf{w}$ , a solução ótima (representada aqui por  $\mathbf{w}_o$ ) é dada por

$$\mathbf{w}_o = -\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}. \quad (1.19)$$

Entretanto, ainda é necessário determinar o valor dos multiplicadores de Lagrange. Por isso, tendo em vista que a restrição  $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g}$  em (1.16) deve ser atendida, pré-multiplica-se ambos os lados de (1.19) por  $\mathbf{C}^H$  e resolve-se a expressão resultante para  $\boldsymbol{\lambda}$ . Assim,

$$\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}. \quad (1.20)$$

Logo, substituindo (1.20) em (1.19), o vetor de coeficientes ótimo para o critério LCMV é dado por

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}. \quad (1.21)$$

Note que a solução ótima para o critério LCMV é obtida a partir da função custo (1.17). Entretanto, como na maioria das vezes a matriz  $\mathbf{R}_x$  não é conhecida, torna-se inviável

a utilização de (1.21). Por isso, o algoritmo CLMS é derivado utilizando o método do gradiente descendente [11], [22] para minimizar função custo instantânea

$$\hat{J}(n) = \mathbf{w}^H(n) \hat{\mathbf{R}}_x(n) \mathbf{w}(n) + \lambda^H(n) [\mathbf{C}^H \mathbf{w}(n) - \mathbf{g}] \quad (1.22)$$

onde  $\hat{\mathbf{R}}_x(n) = \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$  é uma estimativa da matriz de correlação do sinal de entrada. A partir do método do gradiente descendente, escreve-se a seguinte equação de atualização do vetor de coeficientes:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}^*} [\hat{J}(n)] \quad (1.23)$$

sendo o gradiente em (1.23) determinado de (1.22) como

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} [\hat{J}(n)] = \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n) + \mathbf{C} \lambda(n). \quad (1.24)$$

Agora, fazendo a substituição de (1.24) em (1.23), a equação de atualização do vetor de coeficientes pode ser reescrita como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu [\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n) + \mathbf{C} \lambda(n)]. \quad (1.25)$$

Então, para determinar os multiplicadores de Lagrange  $\lambda(n)$ , (1.25) é pré-multiplicada de ambos os lados por  $\mathbf{C}^H$  e é assumido que a restrição seja satisfeita *a posteriori* [ $\mathbf{C}^H \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{g}$ ]; portanto,

$$\mathbf{g} = \mathbf{C}^H \mathbf{w}(n) - \mu [\mathbf{C}^H \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n) + \mathbf{C}^H \mathbf{C} \lambda(n)]. \quad (1.26)$$

Assim, pré-multiplicando ambos os lados de (1.26) por  $(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1}$  e resolvendo a expressão resultante para  $\lambda(n)$ , chega-se a

$$\lambda(n) = \mu^{-1} [(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(n) - (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}] + (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n). \quad (1.27)$$

Finalmente, substituindo (1.27) em (1.25), a equação de atualização do vetor de coeficientes do algoritmo CLMS é obtida como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{P} [\mathbf{w}(n) - \mu \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n)] + \mathbf{f} \quad (1.28)$$

onde

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \quad (1.29)$$

é uma matriz de projeção ortogonal [23], e

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}. \quad (1.30)$$

### 1.3.2 Algoritmo CNLMS

O algoritmo CNLMS é obtido a partir do algoritmo CLMS considerando um passo de adaptação variável [15]. Nesse sentido, a equação de atualização do vetor de coeficientes do algoritmo CLMS é reescrita como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{P}[\mathbf{w}(n) - \mu(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f}. \quad (1.31)$$

O passo de adaptação variável  $\mu(n)$  é calculado de tal forma que o algoritmo minimize o erro quadrático instantâneo *a posteriori* após cada iteração  $|e_{\text{ap}}(n)|^2$ , onde

$$e_{\text{ap}}(n) = d(n) - \mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n+1) \quad (1.32)$$

com  $d(n)$  denotando o sinal de referência<sup>2</sup>. Então, substituindo (1.31) em (1.32) e assumindo que

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{P}[\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f} \quad (1.33)$$

tem-se

$$e_{\text{ap}}(n) = -\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n) + \mu(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n). \quad (1.34)$$

Agora, sendo  $|e_{\text{ap}}(n)|^2$  uma função convexa, seu valor de mínimo é obtido no ponto em que sua derivada é nula, isto é,

$$\frac{\partial [e_{\text{ap}}(n)e_{\text{ap}}^*(n)]}{\partial \mu^*(n)} = 0. \quad (1.35)$$

Então, calculando a derivada em (1.35), usando (1.34) e resolvendo a expressão resultante para  $\mu(n)$ , tem-se

$$\mu(n) = \frac{\mu}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}. \quad (1.36)$$

Finalmente, substituindo (1.36) em (1.31), a equação de atualização do vetor de coeficientes do algoritmo CNLMS é obtida como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{P} \left[ \mathbf{w}(n) - \frac{\mu\mathbf{x}(n)y^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)} \right] + \mathbf{f}. \quad (1.37)$$

## 1.4 Objetivos

Em resumo, os principais objetivos desse trabalho são:

- Realizar uma revisão bibliográfica com o objetivo de catalogar os modelos estocásticos disponíveis na literatura para os algoritmos CLMS e CNLMS.

<sup>2</sup> Note que não é utilizado sinal de referência durante o processo de adaptação; logo,  $d(n)$  é nulo.

- Desenvolver modelos estocásticos para os algoritmos CLMS e CNLMS, considerando o menor número possível de hipóteses simplificativas.
- Derivar expressões que caracterizem o comportamento médio do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes, da evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes e da SINR.
- Discutir o impacto do cenário de operação e dos parâmetros do algoritmo no seu desempenho.
- Fornecer novas ferramentas para a análise de algoritmos adaptativos de conformação de feixe.

### 1.5 Estrutura da dissertação

Este trabalho está organizado em quatro capítulos como segue. No Capítulo 1, é apresentada a fundamentação teórica necessária para abordar o problema estudado, contemplando as definições relacionadas ao cenário de operação de um arranjo adaptativo de antenas e os conceitos associados aos algoritmos CLMS e CNLMS. O Capítulo 2 apresenta o modelo proposto para o algoritmo CLMS, visando descrever o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Resultados de simulações numéricas são também apresentados para avaliar a precisão das expressões de modelo obtidas. No Capítulo 3, é proposto um modelo estocástico para o algoritmo CNLMS descrevendo o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. A precisão das expressões de modelo obtidas é avaliada através de resultados de simulação numérica. O Capítulo 4 traz as conclusões e considerações finais do trabalho, sugestões para trabalhos futuros, bem como lista os trabalhos publicados a partir dos resultados aqui obtidos.

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO CLMS

### 2.1 Introdução

Em [11], é apresentado o algoritmo CLMS operando em arranjos adaptativos de antenas e seu comportamento também é analisado. Nessa análise, é apresentada uma expressão de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes. A partir dessa expressão, é obtido um limite superior para o passo de adaptação visando garantir a estabilidade do algoritmo no sentido médio. Ainda, em [11], é apresentada uma interpretação geométrica do funcionamento do algoritmo, a qual permite elucidar o porquê do vetor de coeficientes do algoritmo satisfazer as restrições lineares durante todo processo de adaptação.

Posteriormente, a modelagem estocástica do algoritmo CLMS é abordada nos trabalhos [24]–[26]. Em tais trabalhos, além do cenário de operação mostrado em [11], o algoritmo também é modelado considerando o uso de sequências de perturbação para estimação do gradiente. Essas sequências de perturbação, apresentadas em [27], são utilizadas quando o sinal de entrada de todas as antenas do arranjo não é conhecido e os coeficientes são ajustados de maneira independente. A modelagem estocástica apresentada em [24]–[26] resulta em expressões que descrevem o comportamento na fase transitória e em regime permanente da matriz de covariância do vetor de coeficientes como também do desajuste para sinais de entrada reais ou complexos.

Na sequência cronológica, [28] apresenta um novo algoritmo para cancelamento de eco em arranjos de microfones juntamente com seu modelo estocástico. Tal algoritmo pode ser representado através do critério LCMV e, portanto, sua modelagem pode ser estendida para o algoritmo CLMS. O modelo de [28] contém expressões que descrevem o comportamento do vetor de coeficientes, da matriz de covariância do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes, da potência média da saída e do desajuste, para sinais de entrada reais.

Em [29], é apresentado um modelo estocástico para o algoritmo CLMS, considerando um problema de identificação de sistemas. Nesse modelo, usando o princípio de conservação de energia, é analisado o desvio médio quadrático (MSD – *mean-square deviation*) na fase transitória e em regime permanente, assumindo sinais de entrada reais. Através dessa análise, é obtido um limiar para o passo de adaptação do algoritmo e uma nova expressão para o desajuste que leva aos mesmos resultados das expressões apresentadas em [25], [28]. Contudo, as métricas consideradas em [29] não são tão úteis para se compreender o comportamento do algoritmo operando em arranjos de antenas, uma vez que não evidenciam aspectos fundamentais relacionados ao desempenho de sistemas de comunicação.

Diante do exposto, apesar do comportamento do algoritmo CLMS ser estudado em alguns trabalhos de pesquisa, o comportamento da SINR desse algoritmo operando em arranjos adaptativos de antenas ainda não foi avaliado. Por isso, este trabalho busca obter expressões de modelo para caracterizar o comportamento do algoritmo CLMS e, principalmente, de sua SINR.

## 2.2 Hipóteses simplificativas

Para viabilizar a derivação de expressões de modelo descrevendo o comportamento da matriz de correlação do vetor de coeficientes, a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR, o seguinte conjunto de hipóteses simplificativas é considerado:

H1) O vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  e o vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$  são assumidos estatisticamente independentes entre si [11], [25].

H2) O AOA do SOI e demais restrições são considerados previamente conhecidos e fixos durante todo o processo de adaptação; logo,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{f}$  são constantes [11], [25], [28].

Tais hipóteses são necessárias para tornar o problema matematicamente tratável (conforme discutido em [22], [30]).

## 2.3 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Tomando o valor esperado de ambos os lados de (1.28) e considerando as Hipóteses H1) e H2), uma expressão que descreve o comportamento médio do vetor de coeficiente pode ser derivada como

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E[\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Portanto, o comportamento médio do vetor de coeficientes pode ser predito a partir de (2.1) com o conhecimento da condição inicial  $\mathbf{w}(0)$  e da matriz de autocorrelação do sinal de entrada  $\mathbf{R}_x$  [dada em (1.28)]. Vale salientar que (2.1) está em concordância com o resultado apresentado em [11].

## 2.4 Evolução da SINR

Com o objetivo de obter uma expressão caracterizando a evolução da SINR, é determinado o valor esperado de ambos os lados de (1.13), são consideradas as Hipóteses H1) e H2) e é assumido que os termos do numerador e denominador são estatisticamente independentes de forma que o Princípio da Média (PM) [31] possa ser utilizado. Dessa forma, uma expressão para a evolução da SINR é obtida como

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}\mathbf{w}(n)]}{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{int}}\mathbf{w}(n)]}. \quad (2.2)$$

Em seguida, aplicando o operador traço sobre os termos do numerador e denominador de (2.2) e utilizando a propriedade cíclica do traço [32], tem-se

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (2.3)$$

onde

$$\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)] \quad (2.4)$$

representa a matriz de correlação do vetor de coeficientes. Conseqüentemente, a evolução da SINR pode ser completamente predita se  $\mathbf{K}(n)$  for conhecida.

## 2.5 Matriz de correlação do vetor de coeficientes

A fim de determinar uma recursão para o cálculo da matriz de correlação do vetor de coeficientes, determina-se o produto  $\mathbf{w}(n+1)\mathbf{w}^H(n+1)$  a partir de (1.28), toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utiliza-se as Hipóteses H1) e H2). Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{P}\mathbf{K}(n)\mathbf{P} + \mu^2\mathbf{P}\mathbf{R}'(n)\mathbf{P} - \mu\mathbf{P}[\mathbf{R}_x\mathbf{K}(n) + \mathbf{K}(n)\mathbf{R}_x]\mathbf{P} \\ & + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E[\mathbf{w}(n)]\mathbf{f}^H + \mathbf{f}E[\mathbf{w}^H(n)](\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)\mathbf{P} + \mathbf{f}\mathbf{f}^H \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{R}'(n) = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)] \quad (2.6)$$

representa o momento ponderado de quarta ordem de variáveis gaussianas complexas. Então, segundo o teorema de fatoração de variáveis gaussianas [22], (2.6) pode ser calculada através de

$$\mathbf{R}'(n) = \mathbf{R}_x \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x \text{tr}[\mathbf{K}(n) \mathbf{R}_x]. \quad (2.7)$$

Portanto, levando em consideração (2.7) e a condição inicial

$$\mathbf{K}(0) = \mathbf{w}(0) \mathbf{w}^H(0) \quad (2.8)$$

a matriz de correlação do vetor de coeficientes pode ser computada recursivamente através de (2.5).

### 2.6 Comportamento do vetor de coeficientes em regime permanente

Uma expressão para o vetor de coeficientes em regime permanente  $E[\mathbf{w}(\infty)]$  é obtida tomando o limite para  $n \rightarrow \infty$  de ambos os lados de (2.1) e assumindo convergência [22], o que resulta em

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) E[\mathbf{w}(\infty)] + \mathbf{f}. \quad (2.9)$$

Então, resolvendo (2.9) para  $E[\mathbf{w}(\infty)]$ , tem-se que

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x)]^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.10)$$

Dado que  $\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x)$  possui posto completo, é possível inferir que (2.10) também é uma solução válida para (1.16), sendo equivalente a (1.21) como discutido em [11].

### 2.7 Comportamento da SINR em regime permanente

Uma expressão caracterizando a SINR em regime permanente é derivada fazendo  $n \rightarrow \infty$  de ambos os lados de (2.3), produzindo assim

$$E[\gamma(\infty)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{K}(\infty)$  é a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente. Por sua vez, uma expressão para  $\mathbf{K}(\infty)$  pode ser determinada substituindo (2.7) em (2.5), tomando o limite para  $n \rightarrow \infty$  de ambos os lados e assumindo convergência, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\infty) = & \mathbf{P} \{ \mathbf{K}(\infty) + \mu^2 \mathbf{R}_x \mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x + \mu^2 \mathbf{R}_x \text{tr}[\mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x] \\ & - \mu [\mathbf{R}_x \mathbf{K}(\infty) + \mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x] \} \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) E[\mathbf{w}(\infty)] \mathbf{f}^H \\ & + \mathbf{f} E[\mathbf{w}^H(\infty)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{P} + \mathbf{f} \mathbf{f}^H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Então, visando explicitar  $\mathbf{K}(\infty)$  de ambos os lados de (2.12), é utilizado o operador de vetorização  $\text{vec}(\cdot)$  para empilhar as colunas de uma matriz juntamente com as seguintes propriedades [32, p. 405]:

$$\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}) \quad (2.13)$$

$$\text{vec}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I})\text{vec}(\mathbf{A}) \quad (2.14)$$

e

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{vec}(\mathbf{A}^T)^T \text{vec}(\mathbf{B}) \quad (2.15)$$

onde  $\otimes$  representa o produto de Kronecker [32]. Dessa forma, aplicando o operador vetorização de ambos os lados de (2.12), usando (2.13), (2.14) e (2.15) e resolvendo a expressão resultante para  $\text{vec}[\mathbf{K}(\infty)]$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] = & \{ \mathbf{I}_{M^2} - (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{P}) [\mathbf{I}_{M^2} - \mu(\mathbf{R}_x^T \oplus \mathbf{R}_x) + \mu^2 \mathbf{R}_x^T \otimes \mathbf{R}_x \\ & + \mu^2 \text{vec}(\mathbf{R}_x) \text{vec}(\mathbf{R}_x^T)^T ] \}^{-1} \text{vec} \{ \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)] \mathbf{f}^H \\ & + \mathbf{f} \mathbf{E}[\mathbf{w}^H(\infty)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{P} + \mathbf{f} \mathbf{f}^H \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{I}_{M^2}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M^2 \times M^2$  e  $\oplus$  representa a soma de Kronecker [32]. Como resultado,  $\mathbf{K}(\infty)$  pode ser obtida aplicando o operador reverso de vetorização  $\text{unvec}(\cdot)$  [32] de ambos os lados de (2.16), isto é,

$$\mathbf{K}(\infty) = \text{unvec} \{ \text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] \}. \quad (2.17)$$

Portanto, dado  $\mathbf{R}_x$  e  $\mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)]$ , a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente pode ser determinada; conseqüentemente, assumindo que  $\mathbf{R}_{\text{soi}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  são conhecidas, torna-se possível prever a SINR em regime permanente a partir de (2.11).

## 2.8 Resultados de simulação

Nesta seção, simulações numéricas são mostradas visando comparar os resultados preditos através do modelo proposto com aqueles obtidos através de simulações de MC (200 realizações independentes). Para tal, exemplos são apresentados considerando um arranjo composto por antenas espaçadas de meio comprimento de onda. Nesses exemplos, os símbolos dos sinais transmitidos pelos usuários são gerados a partir de uma modulação 16-QAM. Assume-se que existe apenas um SOI com AOA de  $\theta_i = 30^\circ$ , SIR de 0 dB e uma SNR de 30 dB. Além disso, os sinais que atingem o arranjo percorrem  $I = 12$  caminhos de desvanecimento multipercurso com ângulos de espalhamento (em torno do AOA médio) de

$\Delta\theta = 3^\circ$  e  $\Delta\theta = 20^\circ$ . O vetor de coeficientes do filtro adaptativo é inicializado com  $\mathbf{w}(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  e o passo de adaptação é fixado em  $\mu = 0,004$  para avaliar as expressões de modelo durante a fase transitória do algoritmo. Ainda, para avaliar a SINR em regime permanente, resultados experimentais (simulações de MC) são obtidos a partir da média das últimas 100 iterações após a convergência (conforme [22, p. 250]). Esses parâmetros serão utilizados em todos os exemplos exceto quando especificado o contrário.

### 2.8.1 Exemplo 1

Neste exemplo, considera-se um arranjo com  $M = 10$  antenas, em que  $K = 7$  usuários compartilhando o mesmo canal e há uma única restrição em (1.16) que garante ganho unitário na direção do SOI. Os sinais interferentes chegam ao arranjo com AOA de  $-60^\circ$ ,  $-50^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $70^\circ$ . A Figura 2.1 mostra os resultados obtidos para esse exemplo. Nas Figura 2.1(a) e (b) é mostrado o comportamento médio do vetor de coeficientes, exibindo um casamento muito bom entre os resultados obtidos por simulação de MC e aqueles preditos através da expressão de modelo (2.1). A partir da Figura 2.1(c), verifica-se que a expressão de modelo (2.3) consegue descrever de forma adequada a evolução da SINR. Na Figura 2.1(d), é mostrado que a expressão caracterizando a SINR em regime permanente (2.11) é capaz de prever satisfatoriamente o comportamento do algoritmo para uma faixa ampla de valores de passos de adaptação. Considerando o ângulo de espalhamento  $\Delta\theta = 3^\circ$ , nota-se que os valores obtidos para SINR sofrem uma maior influência de variações no valor do passo de adaptação em relação ao caso de  $\Delta\theta = 20^\circ$ .

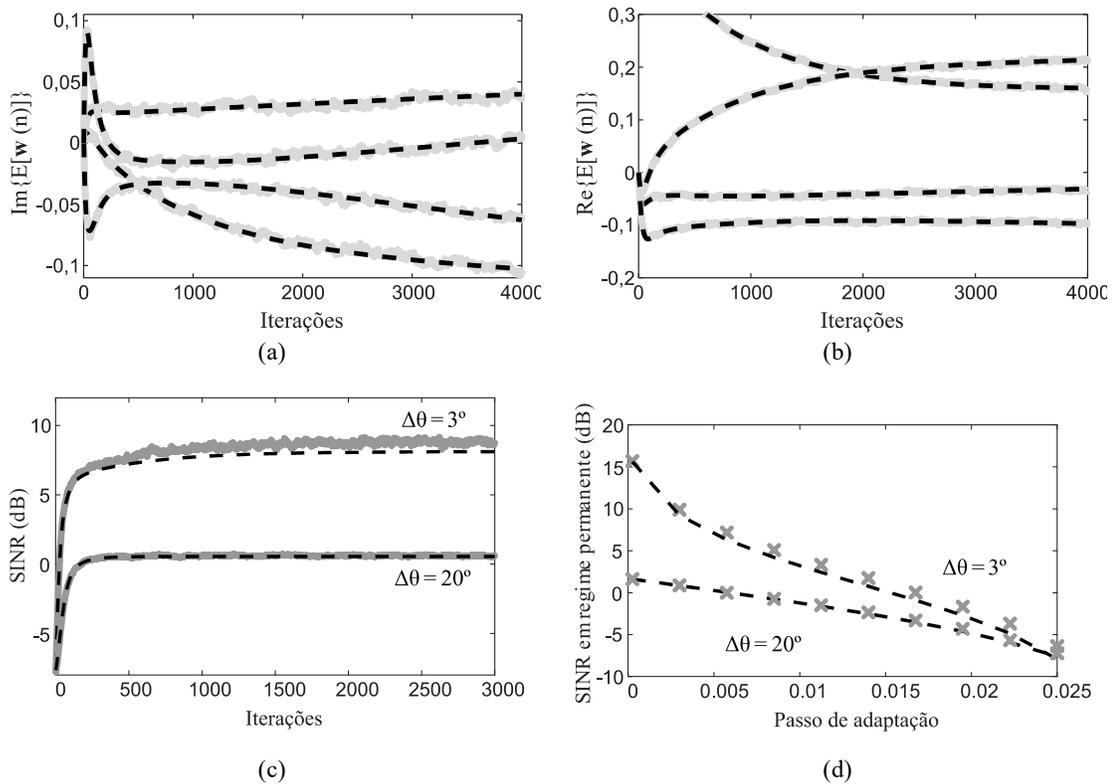


Figura 2.1. Exemplo 1. (a) e (b) Comportamento médio das partes real e imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo ( $i = 1, 4, 5$  e  $9$ ) para  $\Delta\theta = 3^\circ$ . (c) Evolução da SINR. (d) SINR em regime permanente. (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

### 2.8.2 Exemplo 2

Este exemplo considera  $L = 3$  restrições em (1.16), sendo duas delas responsáveis por atribuir ganho zero para os ângulos de  $-34^\circ$  e  $76^\circ$ , e uma outra para garantir ganho unitário na direção do SOI. O arranjo contém agora  $M = 12$  antenas e existem  $K = 10$  usuários compartilhando o mesmo canal. O AOA de cada sinal interferente é  $-70^\circ, -35^\circ, -33^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  e  $77^\circ$ . Na Figura 2.2(a), é apresentada a evolução da SINR, enquanto a Figura 2.2(b) mostra o comportamento da SINR em regime permanente. Observe-se que as expressões de modelo predizem satisfatoriamente o comportamento do algoritmo mesmo com um maior número de restrições.

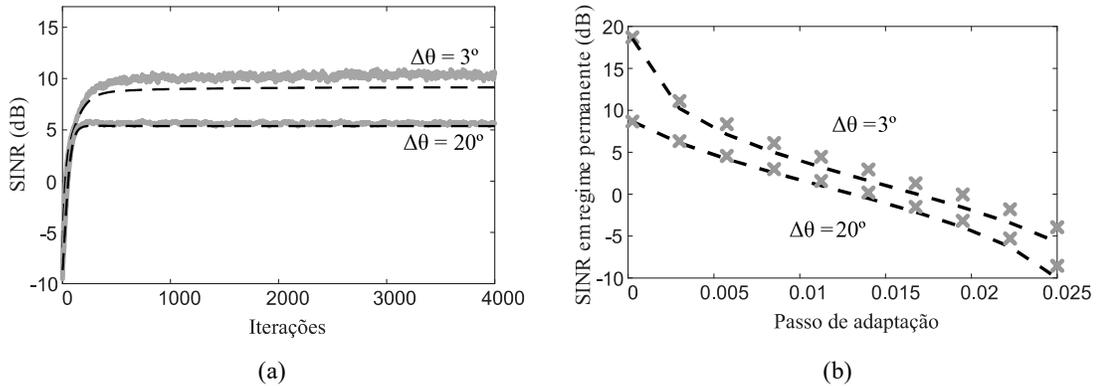


Figura 2.2. Exemplo 2. (a) Evolução da SINR. (b) SINR em regime permanente. (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

### 2.8.3 Exemplo 3

Neste exemplo, é verificada a influência do número de usuários em relação à quantidade de antenas com vista à precisão das expressões do modelo proposto que caracterizaram a evolução da SINR. Com esse objetivo, o modelo é avaliado frente a três cenários distintos.

No primeiro cenário, o número de usuários é menor do que o número de antenas ( $K = 4$  e  $M = 8$ ), e os sinais interferentes atingem o arranjo de antenas com AOA igual a  $-60^\circ$ ,  $-15^\circ$  e  $75^\circ$ . Os resultados obtidos são mostrados na Figura 2.3. Observa-se na Figura 2.3(a) e (b) que a expressão de modelo descrevendo a evolução da SINR prediz muito bem o comportamento do algoritmo. Na Figura 2.3(b), percebe-se que o algoritmo não atinge o valor máximo da SINR, visto que a SINR começa a decrescer após um certo número de iterações. Nos resultados para o regime permanente, mostrados na Figura 2.3(c) e (d), a precisão do modelo é muito boa para  $\Delta\theta = 20^\circ$ ; por outro lado, para  $\Delta\theta = 3^\circ$ , uma pequena divergência entre a simulação e modelo é observada. Nesse caso, observa-se uma correlação significativa entre as matrizes  $\mathbf{R}_{\text{soi}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  devido ao ângulo de espalhamento reduzido e a quantidade pequena de sinais interferentes, o que influencia na precisão da expressão de modelo.

No segundo cenário, o número de usuário é ajustado para ser igual ao número de antenas ( $K = 8$  e  $M = 8$ ), sendo o AOA de cada sinal interferente localizado em  $-83^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-38^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $7^\circ$ ,  $52^\circ$ , e  $75^\circ$ . Os resultados são exibidos na Figura 2.4, na qual se observa um casamento satisfatório entre o modelo proposto e as simulações de MC.

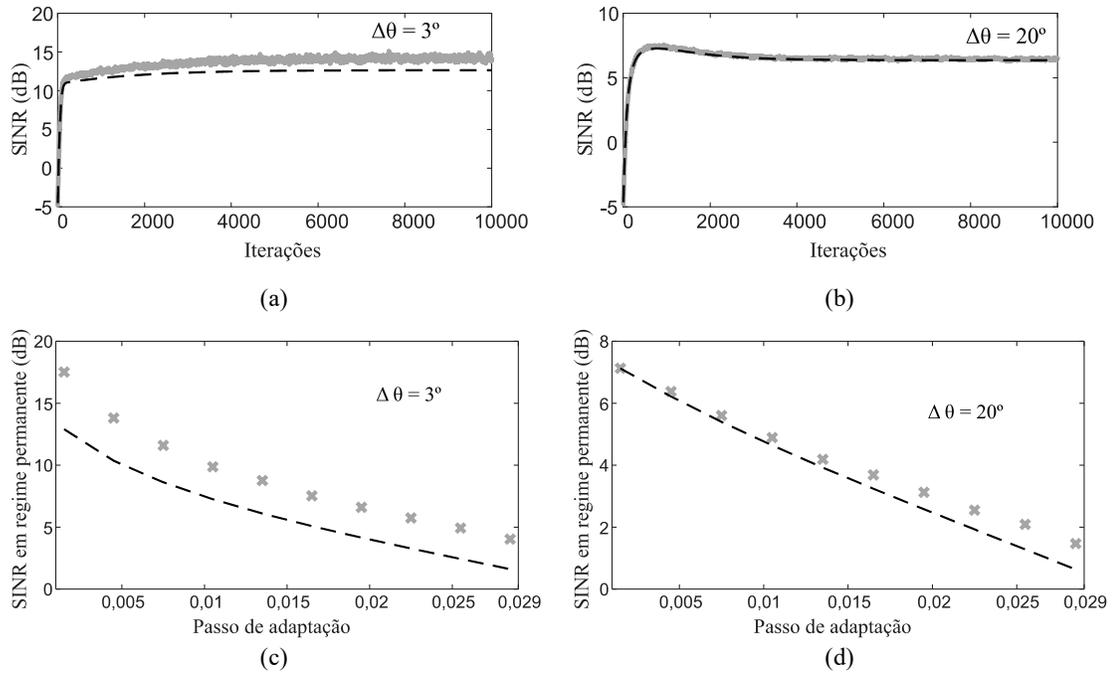


Figura 2.3. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (d)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 4$  e  $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

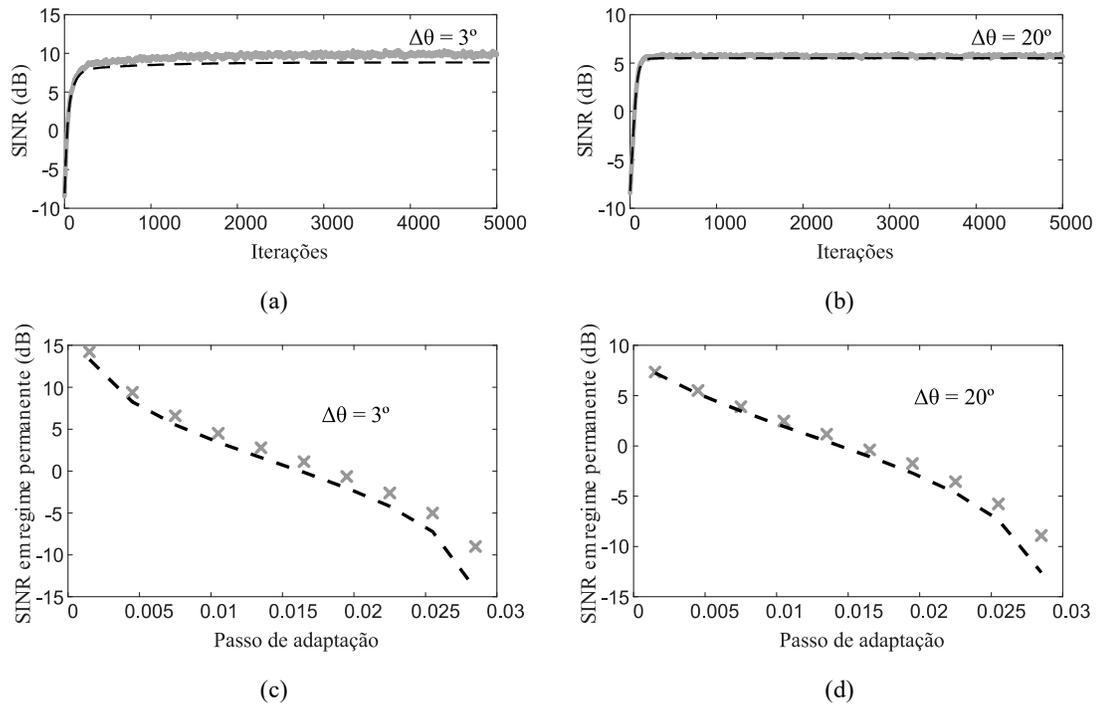


Figura 2.4. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (d)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 8$  e  $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

No último cenário, o número de usuários é maior do que o de antenas ( $K = 12$  e  $M = 8$ ), sendo o AOA de cada usuário interferente igual a  $-85^\circ$ ,  $-75^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,

$-30^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  e  $80^\circ$ . A Figura 2.5 mostra os resultados obtidos para esse cenário. Novamente, observa-se um casamento muito bom entre os resultados de simulação de MC e os obtidos com as expressões de modelo propostas.

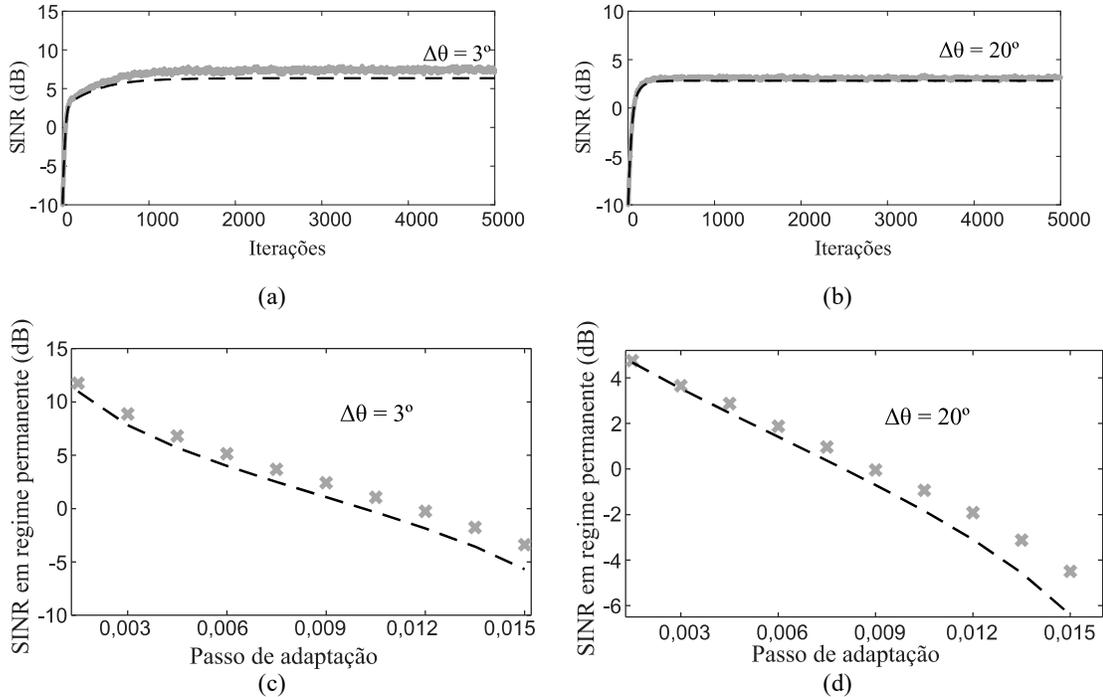


Figura 2.5. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (d)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 12$  e  $M = 8$ . (Marcadores e linhas cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

#### 2.8.4 Exemplo 4

O principal objetivo do algoritmo CLMS é atenuar os sinais interferentes oriundos de ângulos de chegada que não correspondem ao do SOI. No contexto de comunicações móveis, é comum usuários interferentes estarem localizados em outras células ou mais afastados da ERB. Dito isso, a potência recebida na ERB desses usuários é inferior em relação à de um usuário da mesma célula. A fim de analisar o comportamento do modelo proposto, sob tais condições de operação, dois cenários são simulados, um em que os usuários interferentes estão em outras células e outro onde parte deles está na mesma célula e parte não está. Nesses cenários, o arranjo contém  $M = 12$  antenas e  $K = 8$  usuários, estando os usuários interferentes localizados em  $-70^\circ$ ,  $-35^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $75^\circ$ . Para o primeiro cenário, a SIR é de 15 dB. A Figura 2.6 mostra os resultados obtidos para esse cenário, tanto para a evolução da SINR quando para SINR em regime permanente. Verifica-se nesse cenário que os resultados obtidos com as expressões de modelo apresentam um casamento muito bom com as curvas de simulação de MC.

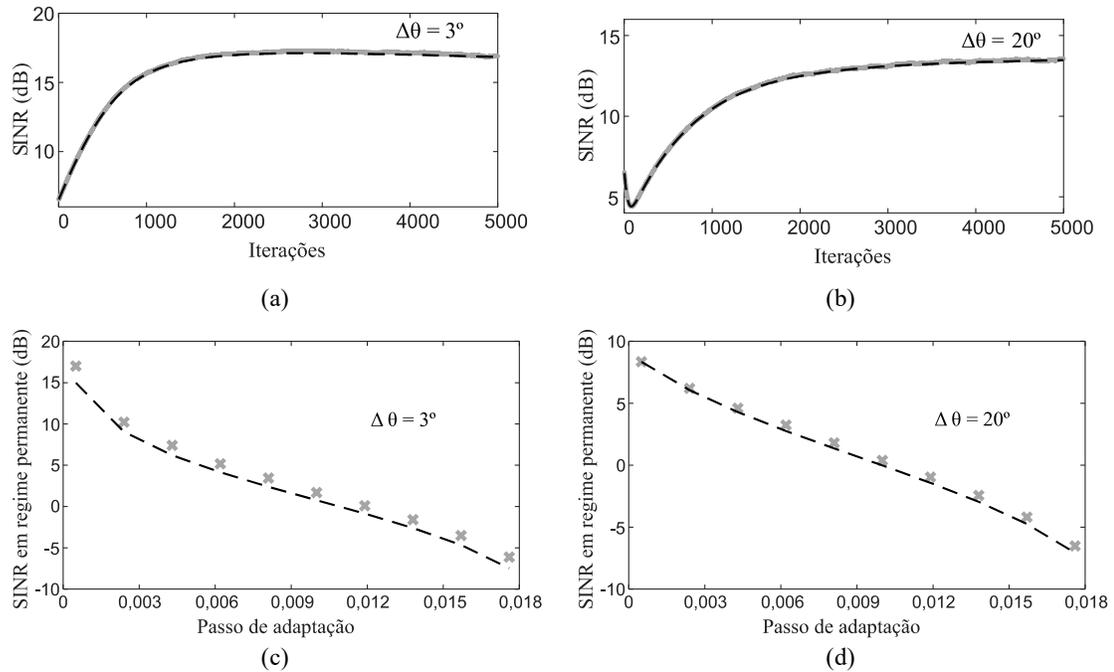


Figura 2.6. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (d)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o primeiro cenário. (Linhas e marcadores em cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

No segundo cenário, apenas os sinais com AOA de  $-35^\circ$ ,  $0^\circ$  e  $50^\circ$  são posicionados na mesma célula do SOI; nessa condição a SIR é 0 dB. Os resultados obtidos utilizando esse cenário são ilustrados na Figura 2.7. Observa-se que o modelo proposto prediz com precisão o comportamento do algoritmo; assim, é possível afirmar que essas mudanças nos valores da SIR não afetam significativamente a precisão das expressões de modelo propostas. Ainda, convém destacar que apesar de serem obtidos níveis mais elevados de SINR quando a SIR é menor, o algoritmo necessita de um número muito maior de iterações para convergir. E, novamente, é constatado que, para  $\Delta\theta = 3^\circ$ , o passo de adaptação possui maior influência sobre o valor da SINR em regime permanente em comparação ao caso de  $\Delta\theta = 20^\circ$ .

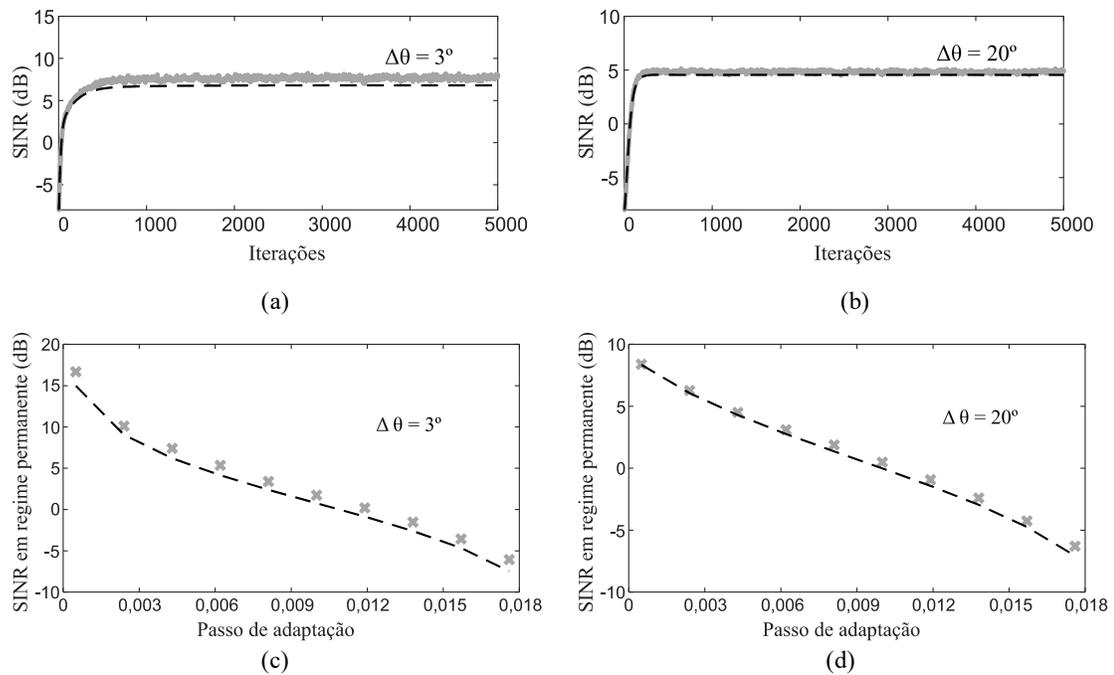


Figura 2.7. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . SINR em regime permanente para (c)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (d)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o segundo cenário. (Linhas e marcadores em cinza) Simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) Modelo proposto.

## 2.9 Conclusões

Neste capítulo, foram derivadas expressões de modelo que descrevem o comportamento do algoritmo CLMS, considerando uma aplicação de conformação de feixe em arranjo de antenas. Especificamente, expressões de modelo foram obtidas para caracterizar o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes e a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes e da SINR. Os resultados de simulação mostrados confirmam a precisão do modelo proposto para diferentes cenários de operação.

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO CNLMS

### 3.1 Introdução

A utilização do passo de adaptação normalizado no algoritmo CNLMS faz com que ele tenha convergência mais rápida e menor desajuste quanto comparado ao CLMS [15]. Devido à normalização do passo de adaptação, a modelagem estocástica do algoritmo CNLMS se torna um tanto mais complexa pelo surgimento de matrizes de autocorrelação normalizadas. Por isso, a modelagem desse algoritmo é tratada apenas em [33]. Em tal trabalho, é apresentado um modelo estocástico descrevendo o comportamento da SINR em regime permanente para sistemas CDMA. Devido às características desses sistemas, a modelagem discutida em [33] considera apenas sinais de entradas reais, o que limita sobremaneira sua aplicabilidade em arranjos adaptativos de antenas. Portanto, a partir dos resultados apresentados na literatura até então, a modelagem estocástica do algoritmo CNLMS operando com sinais de entrada complexos pode ser considerada um problema em aberto.

### 3.2 Hipóteses simplificativas

Para derivar expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de covariância do vetor de coeficientes, a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes e da SINR, as seguintes hipóteses são aqui estabelecidas:

- H1) O vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  e o vetor do sinal de entrada do arranjo  $\mathbf{x}(n)$  são assumidos estatisticamente independentes entre si [11], [24].
- H2) O AOA do SOI e das demais restrições são previamente conhecidos e não variam durante o processo de adaptação; logo,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{f}$  são constantes ao longo do tempo [11], [24], [28].

Com esse conjunto de hipóteses e a descrição do cenário apresentada na Seção 1.2, é possível obter a modelagem estocástica do algoritmo CNLMS. Note que as hipóteses anteriormente

apresentadas são necessárias para tornar o desenvolvimento matemático factível (conforme discutido em [22], [30]).

### 3.3 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Tomando o valor esperado de ambos os lados de (1.37) e considerando as Hipóteses H1) e H2), uma expressão descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes é derivada como

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)} \right] \quad (3.2)$$

é uma matriz de autocorrelação normalizada do sinal de entrada. Portanto, a recursão (3.1) prediz o comportamento médio do vetor de coeficientes a partir do conhecimento de uma condição inicial  $\mathbf{w}(0)$  e do conhecimento da matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$  (veja Seção 3.8).

### 3.4 Evolução da SINR

Determinando o valor esperado de ambos os lados de (1.13), considerando a Hipótese H1), assumindo que os termos do numerador e denominador são estatisticamente independentes de forma que o PM [31] possa ser utilizado, tem-se

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}\mathbf{w}(n)]}{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{int}}\mathbf{w}(n)]} \quad (3.3)$$

Agora, aplicando em (3.3) o operador traço e fazendo uso de sua propriedade cíclica, uma expressão caracterizando a evolução da SINR é obtida como

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (3.4)$$

com

$$\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)] \quad (3.5)$$

representado a matriz de correlação do vetor de coeficientes. Logo, a evolução da SINR pode ser predita se  $\mathbf{K}(n)$  for conhecida (veja Seção 3.5).

### 3.5 Matriz de correlação do vetor de coeficientes

A fim de determinar uma recursão para (3.5) é primeiramente calculado o produto  $\mathbf{w}(n+1)\mathbf{w}^H(n+1)$  a partir de (1.37), o que resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1)\mathbf{w}^H(n+1) &= \mathbf{P}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\mathbf{P} - \mu\mathbf{P}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\mathbf{P} \\ &\quad + \mathbf{P}\mathbf{w}(n)\mathbf{f}^H - \mu\mathbf{P}\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\mathbf{P} \\ &\quad + \mu^2\mathbf{P}\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)]^2}\mathbf{P} \\ &\quad - \mu\mathbf{P}\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\mathbf{w}(n)\mathbf{f}^H + \mathbf{f}\mathbf{w}^H(n)\mathbf{P} \\ &\quad - \mu\mathbf{f}\mathbf{w}^H(n)\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\mathbf{P} + \mathbf{f}\mathbf{f}^H. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão (3.6) e assumindo as Hipóteses H1) e H2), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{P}\{\mathbf{K}(n) - \mu[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{K}(n)] + \mu^2\mathbf{R}_2(n)\}\mathbf{P} + \mathbf{f}\mathbf{f}^H \\ &\quad + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1)\mathbf{E}[\mathbf{w}(n)]\mathbf{f}^H + \mathbf{f}\mathbf{E}[\mathbf{w}^H(n)](\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1)\mathbf{P} \end{aligned} \quad (3.7)$$

com

$$\mathbf{R}_2(n) = \mathbf{E}\left\{\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)]^2}\right\}. \quad (3.8)$$

Conseqüentemente, (3.7) pode ser determinada se a matriz de correlação normalizada  $\mathbf{R}_1$  [definida em (3.2)] e o momento de quarta ordem de variáveis gaussianas normalizado  $\mathbf{R}_2(n)$  forem conhecidos (veja a seção 3.8).

### 3.6 Comportamento do vetor de coeficientes em regime permanente

O comportamento do vetor de coeficientes em regime permanente  $\mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)]$  pode ser determinado fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (3.1), isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbf{w}(n+1)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f} \quad (3.9)$$

assumindo convergência [22], de forma que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbf{w}(n)] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

e resolvendo a expressão resultante para  $E[\mathbf{w}(\infty)]$ ; dessa forma,

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1)]^{-1}\mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Logo, o comportamento médio do vetor de coeficientes pode ser predito se uma solução para calcular a matriz  $\mathbf{R}_1$  for conhecida.

### 3.7 SINR em regime permanente

Uma primeira expressão para determinar a SINR em regime permanente é obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$  de ambos os lados de (3.4) e assumido convergência; assim,

$$E[\gamma(\infty)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty)\mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty)\mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{K}(\infty)$  é a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente. No Apêndice A, o cálculo de  $\mathbf{K}(\infty)$  é apresentado visando a utilização de (3.12) diretamente para prever a SINR em regime permanente. Todavia, devido à complexidade da expressão obtida para calcular  $\mathbf{K}(\infty)$ , é derivada a seguir uma expressão simplificada para o cálculo da SINR em regime permanente.

#### 3.7.1 Expressão simplificada para SINR em regime permanente

Para obter uma expressão simplificada para o cálculo da SINR em regime permanente, é definido um vetor auxiliar de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}'(n) = \mathbf{w}(n) - E[\mathbf{w}(\infty)] \quad (3.13)$$

com

$$\mathbf{K}'(n) = E[\mathbf{v}'(n)\mathbf{v}'^H(n)] \quad (3.14)$$

sendo a matriz de covariância do vetor de erro. Substituindo (3.13) em (3.14), é possível reescrever a matriz de correlação do vetor de coeficientes como

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{K}'(n) + E[\mathbf{w}(\infty)]E[\mathbf{w}^H(\infty)]. \quad (3.15)$$

Então, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (3.15) e substituindo a expressão resultante em (3.12), tem-se que a expressão para SINR em regime permanente pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E[\gamma(\infty)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}'(\infty)\mathbf{R}_{\text{soi}}] + E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{R}_{\text{soi}}E[\mathbf{w}(\infty)]}{\text{tr}[\mathbf{K}'(\infty)\mathbf{R}_{\text{int}}] + E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{R}_{\text{int}}E[\mathbf{w}(\infty)]}. \quad (3.16)$$

Para simplificar o cálculo de (3.16), é assumido que o ângulo de espalhamento azimutal em torno do AOA médio do SOI seja suficientemente pequeno de forma que

$$\lim_{\Delta\theta_i \rightarrow 0} \mathbf{R}_{\text{soi}} = \rho_i \mathbf{a}(\bar{\theta}_i) \mathbf{a}^H(\bar{\theta}_i). \quad (3.17)$$

Logo, a partir de (1.29) e (3.17), obtém-se

$$\lim_{\Delta\theta_i \rightarrow 0} \mathbf{P} \mathbf{R}_{\text{soi}} = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

Como consequência, substituindo (3.7) e (3.9) em (3.15), usando (3.10), pré- e pós-multiplicando a expressão resultante pela matriz projeção  $\mathbf{P}$ , pós-multiplicando por  $\mathbf{R}_{\text{soi}}$  e considerando (3.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{K}'(\infty) \mathbf{R}_{\text{soi}}] &= \text{tr}[\mathbf{P} \mathbf{K}'(\infty) \mathbf{P} \mathbf{R}_{\text{soi}}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e

$$\text{tr}[\mathbf{K}'(\infty) \mathbf{R}_x] = \text{tr}[\mathbf{K}'(\infty) \mathbf{R}_{\text{int}}]. \quad (3.20)$$

Dessa forma, (3.16) pode ser simplificada para

$$E[\gamma(\infty)] \cong \frac{E[\mathbf{w}^H(\infty)] \mathbf{R}_{\text{soi}} E[\mathbf{w}(\infty)]}{\text{tr}[\mathbf{K}'(\infty) \mathbf{R}_x] + E[\mathbf{w}^H(\infty)] \mathbf{R}_{\text{int}} E[\mathbf{w}(\infty)]}. \quad (3.21)$$

Agora, recorre-se ao princípio de conservação de energia [22] para determinar o seguinte termo presente no denominador de (3.21):

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{K}'(\infty) \mathbf{R}_x] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[|\mathbf{v}'^H(n) \mathbf{x}(n)|^2] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[|e_a(n)|^2] \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $e_a(n)$  é por definição o erro *a priori*. Logo, reescrevendo (1.37) em termos de  $\mathbf{v}'(n)$  como<sup>3</sup>

$$\mathbf{v}'(n+1) = \mathbf{v}'(n) - \mu \frac{\mathbf{P} \mathbf{x}(n) y^*(n)}{\mathbf{x}^H(n) \mathbf{P} \mathbf{x}(n)} \quad (3.23)$$

e pré-multiplicado ambos os lados de (3.23) por  $\mathbf{x}^H(n)$ , tem-se

$$e_p^*(n) = e_a^*(n) - \mu y^*(n) \quad (3.24)$$

com

$$e_p(n) = \mathbf{v}'^H(n+1) \mathbf{x}(n) \quad (3.25)$$

denotando o sinal de erro *a posteriori*. Em seguida, usando (3.24) em (3.23) e pré-multiplicando ambos os lados da expressão resultante por  $\mathbf{P}$  (sabendo que  $\mathbf{P}$  é uma matriz idempotente), verifica-se que

<sup>3</sup> Note que  $\mathbf{w}(n) = \mathbf{P} \mathbf{w}(n) + \mathbf{F}$ ,  $\forall n \neq 0$  [11].

$$\mathbf{P}\mathbf{v}'(n+1) + \frac{\mathbf{P}\mathbf{x}(n)e_a^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)} = \mathbf{P}\mathbf{v}'(n) + \frac{\mathbf{P}\mathbf{x}(n)e_p^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}. \quad (3.26)$$

Então, calculando a norma Euclidiana de ambos os lados de (3.26), tomando o valor esperado, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , assumindo convergência [22] de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{v}'^H(n+1)\mathbf{P}\mathbf{v}'(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{v}'^H(n)\mathbf{P}\mathbf{v}'(n)] \quad (3.27)$$

notando também que

$$e_a(n) = \mathbf{v}'^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n) \quad (3.28)$$

e

$$e_p(n) = \mathbf{v}'^H(n+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(n) \quad (3.29)$$

são validas já que  $\mathbf{v}'(n)$  e  $\mathbf{v}'(n+1)$  pertencem ao mesmo subespaço da matriz projeção  $\mathbf{P}$ , a seguinte relação é obtida:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{|e_a(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{|e_p(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\right]. \quad (3.30)$$

Agora, utilizando (3.13) para reescrever o sinal de saída do arranjo adaptativo de antenas [(1.9)] como

$$y(n) = e_a(n) + E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{x}(n) \quad (3.31)$$

e substituindo a expressão resultante em (3.24), a seguinte relação de variância é derivada a partir de (3.30):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{|e_a(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\right] = \frac{\mu}{2-\mu} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{\frac{|E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{x}(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n)}\right\}. \quad (3.32)$$

Finalmente, é utilizado o PM [31] para simplificar (3.32) como

$$E[|e_a(n)|^2] \cong \frac{\mu}{2-\mu} E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{R}_x E[\mathbf{w}(\infty)] \quad (3.33)$$

substituindo (3.33) em (3.22) e a expressão resultante em (3.21), uma expressão aproximada para predizer a SINR em regime permanente é dada por

$$E[\gamma(\infty)] = \frac{E[\mathbf{w}^H(\infty)]\mathbf{R}_{\text{soi}}E[\mathbf{w}(\infty)]}{E[\mathbf{w}^H(\infty)]\left(\frac{\mu}{2-\mu}\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_{\text{int}}\right)E[\mathbf{w}(\infty)]}. \quad (3.34)$$

Portanto, (3.34) possibilita predizer a SINR em regime permanente. Vale destacar que os parâmetros  $\mu$ ,  $\mathbf{R}_{\text{soi}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  afetam o desempenho do algoritmo.

### 3.8 Cálculo das matrizes do tipo autocorrelação normalizadas

As expressões de modelo (3.1), (3.6), (3.11) e (3.34) descrevem o comportamento do algoritmo caso  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2(n)$  sejam conhecidos. Entretanto, o cálculo analítico dessas matrizes não é uma tarefa trivial, visto que os termos do numerador e do denominador de (3.2) e (3.8) não podem ser considerados independentes. Diante disso, são apresentadas aqui expressões para determinar esses valores esperados quando o sinal de entrada é complexo e correlacionado (condição de operação descrita na Seção 1.2). Para a derivação de tais expressões, é considerada a seguir uma autodecomposição para o produto  $\mathbf{PR}_x$ .

#### 3.8.1 Autodecomposição de $\mathbf{PR}_x$

Nesta seção, é apresentado um procedimento de autodecomposição do produto  $\mathbf{PR}_x$ , o qual é baseado no procedimento discutido em [33] para o caso de dados reais. Especificamente, assumindo que as matrizes Hermitianas  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{R}_x$  são, respectivamente, semi-definida positiva [32] e definida positiva [11], o produto  $\mathbf{R}_x^{1/2}\mathbf{PR}_x^{1/2}$  resulta em uma matriz Hermitiana cuja autodecomposição pode ser expressa como

$$\mathbf{R}_x^{1/2}\mathbf{PR}_x^{1/2} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1} \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é a matriz de autovetores e  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  é uma matriz diagonal contendo os autovalores de  $\mathbf{PR}_x$  [32, p. 294]. Então, pré-multiplicando por  $\mathbf{R}_x^{-1/2}$  e pós-multiplicando por  $\mathbf{R}_x^{1/2}$  ambos os lados de (3.35), é obtida a autodecomposição

$$\mathbf{PR}_x = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \quad (3.36)$$

com  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_x^{-1/2}\mathbf{T}$  sendo a matriz de transformação. Note que  $\mathbf{Q}$  surge do produto entre  $\mathbf{R}_x^{-1/2}$  e a matriz unitária  $\mathbf{T}$ ; portanto, a decomposição

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{Q}^{-H}\mathbf{I}\mathbf{Q}^{-1} \quad (3.37)$$

também é válida.

A partir de (3.36), é possível evidenciar algumas características de  $\mathbf{PR}_x$ . Primeiramente, a matriz  $\mathbf{R}_x$  é uma matriz cheia e  $\mathbf{P}$  tem posto  $M - L$  (sendo  $L$  o número de restrições [23]); logo, o posto de  $\mathbf{PR}_x$  é  $M - L$  [32, p. 96]. Assumindo agora que os autovalores  $\lambda_k$  são positivos e distintos, pode-se ordená-los da seguinte forma:

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_{M-L} > \underbrace{\lambda_{M-L+1} = \dots = \lambda_M = 0}_{L \text{ autovalores}} \quad (3.38)$$

Logo,  $\Lambda$  pode ser expressa como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda' & \mathbf{0}_{M-L \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times M-L} & \mathbf{0}_{L \times L} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

com  $\mathbf{0}_{L \times M-L}$  caracterizando uma matriz de zeros de dimensão  $L \times M - L$  e

$$\Lambda' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M-L}) \quad (3.40)$$

uma matriz diagonal que contém os autovalores não nulos de  $\mathbf{PR}_x$ .

### 3.8.2 Soluções para $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2(n)$

Baseada na decomposição discutida na Seção 3.8.1 e nos resultados descritos no Apêndice B, uma solução para calcular (3.2) é obtida como

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}^{-H} \mathbf{H} \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.41)$$

em que  $\mathbf{H}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são determinados para sinais de entrada complexos e correlacionados por

$$[\mathbf{H}]_{(i,i)} = \begin{cases} \frac{1}{g} \left[ A_i - \omega_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M-L} B_{k,i} \ln \left( \frac{\omega_i}{\omega_k} \right) \right], & i \leq M-L \\ \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{M-L} A_k \ln(-\omega_k), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.42)$$

com

$$\omega_k = \frac{-1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, M-L \quad (3.43)$$

$$g = \prod_{k=1}^{M-L} \lambda_k \quad (3.44)$$

$$A_i = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M-L} (\omega_i - \omega_k)} \quad (3.45)$$

e

$$B_{l,i} = \frac{1}{(\omega_l - \omega_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{M-L} (\omega_l - \omega_k)}. \quad (3.46)$$

Agora, partindo dos resultados apresentados no Apêndice B e na decomposição da Seção 3.8.1, (3.8) é determinada como

$$\mathbf{R}_2(n) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-H}[\mathbf{G} \circ \mathbf{K}''(n) + \mathbf{G}\mathbf{k}''(n)\mathbf{1}^T \circ \mathbf{I}]\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.47)$$

onde  $\circ$  denota o produto de Hadamard [32],  $\mathbf{1}$  representa um vetor de 1's com dimensão  $M$  e  $\mathbf{k}''(n)$  contém os elementos da diagonal de

$$\mathbf{K}''(n) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}^{-H}. \quad (3.48)$$

Ainda em (3.47), a matriz simétrica  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{M-L \times M-L}$  tem os elementos da diagonal dados por

$$[\mathbf{L}]_{(i,i)} = \frac{\omega_i^2}{g} \left( -\frac{A_i}{2\omega_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M-L} \frac{B_{k,i}}{\omega_k - \omega_i} \left\{ \omega_k \left[ 1 + \ln\left(\frac{\omega_i}{\omega_k}\right) \right] - \omega_i \right\} \right) \quad (3.50)$$

e fora da diagonal por

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}]_{(i,j)} = & \frac{\omega_i \omega_j}{g} \left( A_i \left\{ \frac{\ln(-\omega_i)}{\omega_j - \omega_i} + \frac{2\omega_j[1 - \ln(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)^2} \right\} + B_{j,i} \left\{ \frac{2\omega_i[1 - \ln(-\omega_i)]}{\omega_j - \omega_i} - \ln(-\omega_j) \right\} \right. \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{M-L} B_{k,i} \left\{ \frac{(\omega_k - \omega_i)(\omega_k + \omega_i - 2\omega_j)\omega_j[1 - \ln(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)^2(\omega_k - \omega_j)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\omega_i + \omega_j - 2\omega_i)\omega_i[1 - \ln(-\omega_i)]}{(\omega_j - \omega_i)^2} + \frac{\omega_k[1 - \ln(-\omega_k)]}{\omega_k - \omega_j} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

A matriz  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M-L \times L}$  possui as colunas iguais e seus elementos são obtidos por

$$[\mathbf{M}]_{(i,j)} = \frac{-\omega_i}{g} \left( -A_i \ln(-\omega_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M-L} B_{k,i} \{ \omega_k [1 - \ln(-\omega_k)] - \omega_i [1 - \ln(-\omega_i)] \} \right) \quad (3.52)$$

enquanto os elementos de  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{L \times L}$  são todos iguais e determinados por

$$[\mathbf{N}]_{(i,j)} = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{M-L} A_k \omega_k [1 - \ln(-\omega_k)]. \quad (3.53)$$

Alternativamente, uma solução analítica para o cálculo  $\mathbf{R}_2(n)$  equivalente a (3.47) é obtida no Apêndice A.

Portanto, considerando as soluções obtidas para computar as matrizes  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2(n)$ , podem ser preditos para o algoritmo CNLMS o comportamento médio do vetor de coeficientes (3.1), a matriz de correlação do vetor de coeficientes (3.7), a evolução da SINR (3.4), como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes (3.11), da SINR (3.12) e da SINR aproximada (3.34).

### 3.9 Resultados de simulações

Nesta seção, os resultados preditos através do modelo proposto são comparados com aqueles obtidos através de simulações de MC (200 realizações independentes) visando avaliar a precisão das expressões obtidas. Nesse contexto, são apresentados exemplos considerando um arranjo composto por antenas espaçadas de meio comprimento de onda. Nesses exemplos, os símbolos dos sinais transmitidos pelos usuários são gerados a partir de modulação 16-QAM. Assume-se que existe apenas um SOI com AOA de  $\theta_i = 30^\circ$ , SIR de 0 dB e uma SNR de 30 dB. Além disso, os sinais que atingem o arranjo percorrem  $I = 12$  caminhos de desvanecimento multipercurso com ângulo de espalhamento (em torno do AOA médio) de  $\Delta\theta = 3^\circ$  e  $\Delta\theta = 20^\circ$ . Nos exemplos apresentados, o vetor de coeficientes do filtro adaptativo é inicializado com  $\mathbf{w}(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  e o passo de adaptação é fixado em  $\mu = 0,2$  para avaliação das expressões de modelo durante a fase transitória do algoritmo. Ainda, para analisar a SINR em regime permanente, resultados experimentais (simulações de MC) são obtidos a partir da média das últimas 100 iterações após a convergência (conforme [22, p. 250]).

#### 3.9.1 Exemplo 1

Neste exemplo, o arranjo adaptativo de antenas da estação rádio base possui 10 antenas. O cenário considerado é formado pelo SOI e por mais seis sinais interferentes localizados em  $0^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-50^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $30^\circ$ , e  $-40^\circ$ . Os resultados obtidos são mostrados na Figura 3.1.

Na Figura 3.1(a), é mostrado o comportamento médio do vetor de coeficientes. Observa-se que a expressão de modelo (3.1) prediz com uma precisão muito boa os resultados da simulação de MC. Já a Figura 3.1(b) ilustra a evolução da SINR, constatando-se através das curvas obtidas que (3.4) apresenta uma precisão muito boa. Por fim, a Figura 3.1(c)

mostra os resultados obtidos com a expressão da SINR simplificada em regime permanente (3.34), predizendo o comportamento do algoritmo satisfatoriamente. Portanto, tais resultados indicam que o modelo proposto prediz adequadamente o comportamento do algoritmo.

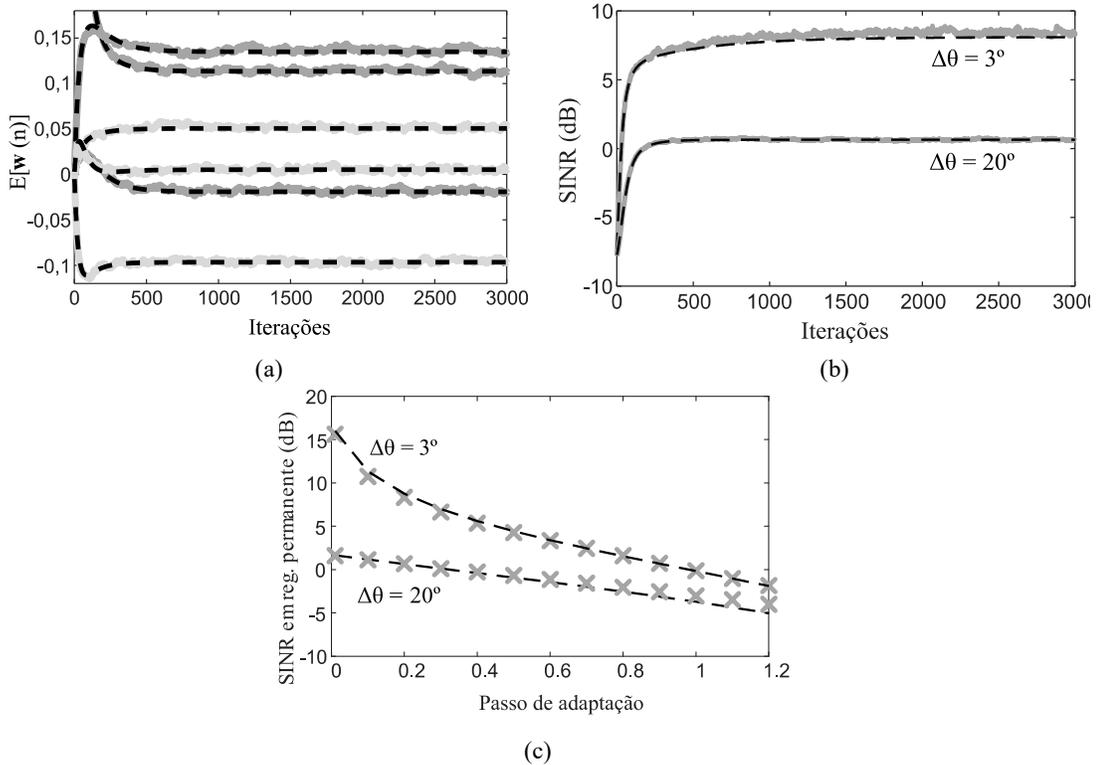


Figura 3.1. Exemplo 1. (a) Comportamento médio das partes real e imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo ( $i = 1, 8$  e  $9$ ) para  $\Delta\theta = 20^\circ$ . (b) Evolução da SINR. (c) SINR em regime permanente usando (3.34). Simulação de MC (linhas e marcadores cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

### 3.9.2 Exemplo 2

Aqui, é avaliada a influência da razão entre o número de usuários e a quantidade de antenas sobre a precisão das expressões de modelo propostas. Com esse objetivo, as expressões de modelo da SINR em regime permanente e da evolução da SINR são comparadas com as simulações de MC para o algoritmo operando em três cenários distintos.

No primeiro cenário o número de usuários é menor do que o número de antenas ( $K = 4$  e  $M = 8$ ). Além disso, os sinais interferentes atingem o arranjo da ERB com AOA de  $-60^\circ$ ,  $-15^\circ$  e  $75^\circ$ . Os resultados desse cenário são mostrados na Figura 3.2 para a fase transitória e na Figura 3.3 para o regime permanente. Na Figura 3.2, o modelo prediz muito bem o comportamento do algoritmo. Na Figura 3.3, observa-se que a expressão de modelo (3.34) é mais precisa do que (3.12) usando (A.13), exceto quando  $\Delta\theta$  é igual a  $20^\circ$  e o valor de  $\mu$  é maior que 1,2.

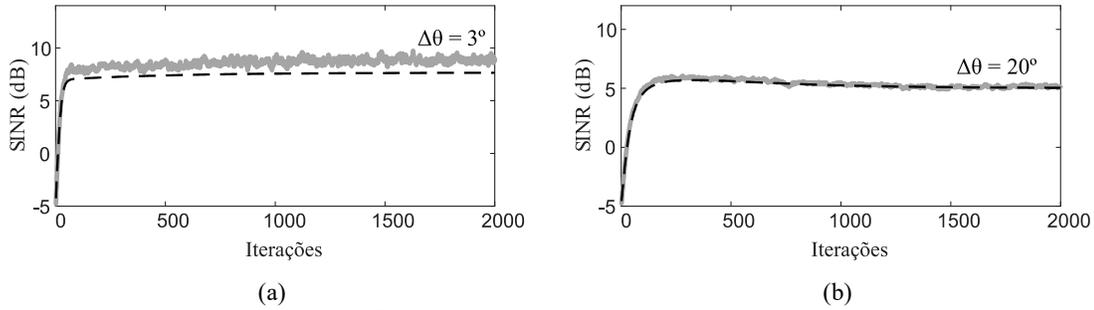


Figura 3.2. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 4$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

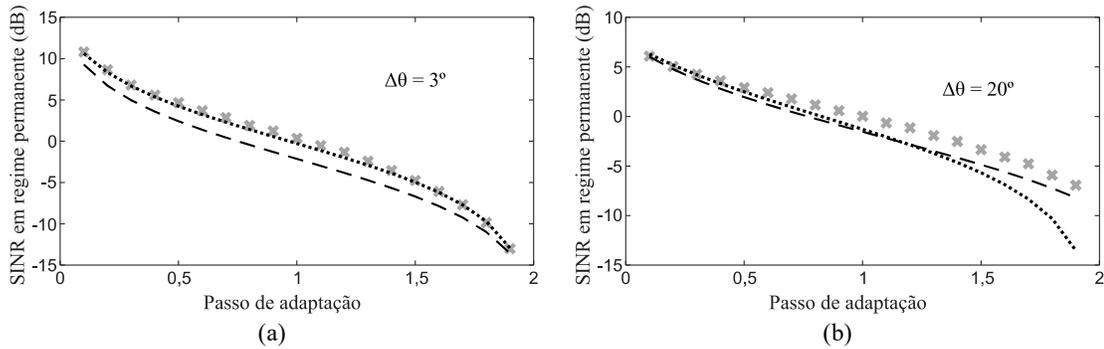


Figura 3.3. Exemplo 2. SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 4$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

No segundo cenário, o número de usuários é igual ao número de antenas ( $K = 8$  e  $M = 8$ ), sendo que o AOA dos sinais dos usuários interferentes é igual a  $60^\circ, -38^\circ, -15^\circ, 7^\circ, 52^\circ$ , e  $75^\circ$ . Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5. Para evolução da SINR o modelo proposto possui um casamento muito bom com as simulações de MC (veja Figura 3.4). Em regime permanente, nota-se que as duas expressões de modelo predizem muito bem o comportamento do algoritmo, sendo (3.34) um pouco mais precisa.

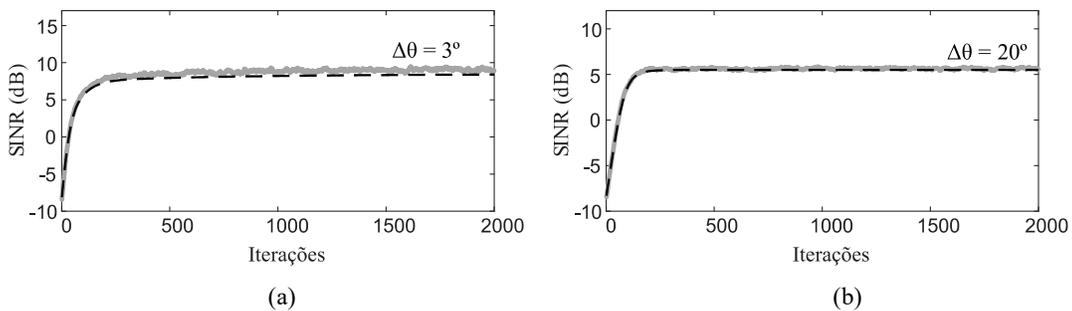


Figura 3.4. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 8$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

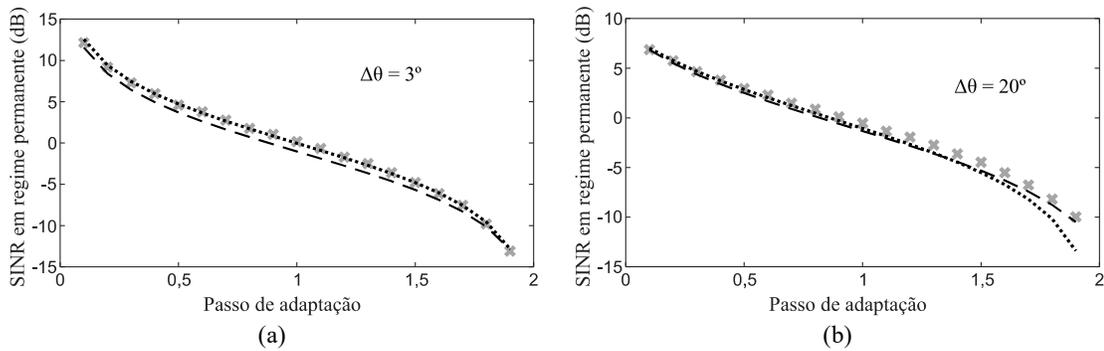


Figura 3.5. Exemplo 2 SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 8$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

Por fim, no último cenário, o número de usuários é maior do que o número de antenas ( $K = 12$  e  $M = 8$ ) e para cada um dos sinais interferentes o AOA é  $-85^\circ, -75^\circ, -60^\circ, -45^\circ, -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ$  e  $80^\circ$ . Nas Figuras 3.6 e 3.7, os resultados obtidos usando os dados desse cenário são ilustrados. Na Figura 3.6, observa-se uma precisão muito boa do modelo proposto. Além disso, na Figura 3.7, verifica-se que (3.34) é a expressão de modelo mais precisa; contudo, a precisão de ambas as expressões é satisfatória.

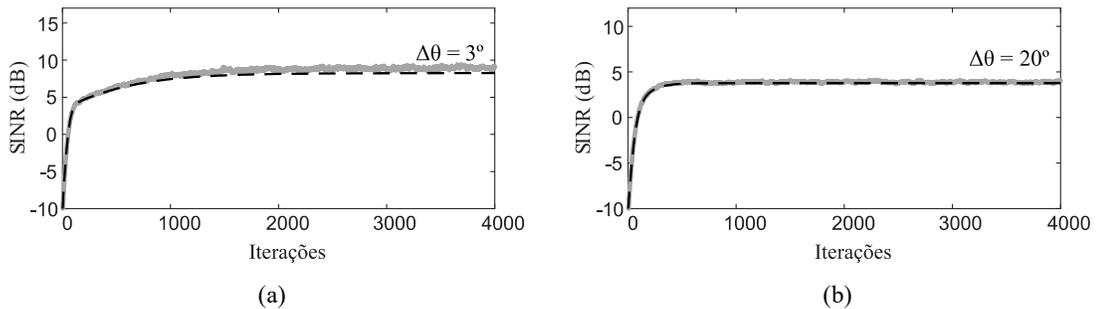


Figura 3.6. Exemplo 2. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 12$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

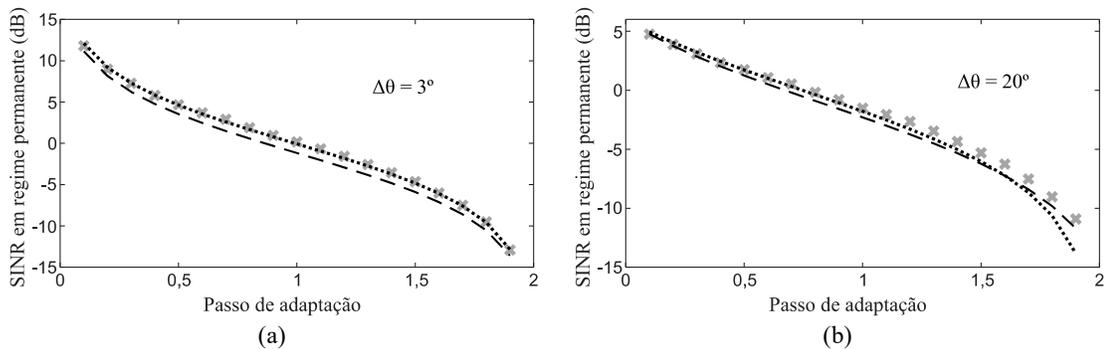


Figura 3.7. Exemplo 2. SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para  $K = 12$  e  $M = 8$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

Nas figuras apresentadas, os resultados obtidos através de (3.12) e (A.13), predizem melhor o comportamento do algoritmo apenas quando  $\Delta\theta = 20^\circ$  e quando o passo de adaptação tem um valor alto (maior que 1,5). A partir disso, constata-se que (3.34) obtêm os resultados mais precisos para SINR em regime permanente. Apesar disso, conclui-se que o modelo proposto prediz adequadamente o comportamento do algoritmo em todas as situações consideradas.

### 3.9.3 Exemplo 3

Neste exemplo, o cenário é composto por um arranjo de  $M = 12$  antenas e  $K = 8$  usuários, cujos sinais interferentes são localizados em  $-70^\circ, -35^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 50^\circ, 60^\circ$  e  $75^\circ$ . Aqui, a precisão do modelo proposto é avaliada para três casos, nos quais apenas a potência dos sinais interferentes é alterada. No primeiro caso, a SIR é 0 dB; no segundo caso, 15 dB; e no terceiro caso, apenas os sinais com AOA de  $-35^\circ, 0^\circ$  e  $50^\circ$  têm a potência igual ao do sinal de interesse de modo que a SIR é 0 dB, enquanto a potência dos demais sinais é reduzida de modo que a SIR é 15 dB.

As Figuras 3.8, 3.10 e 3.12 mostram os resultados obtidos para a fase transitória do algoritmo. Em todas essas figuras, observa-se que o modelo prediz satisfatoriamente o comportamento do algoritmo. Dessa forma, conclui-se que o valor das SIRs de alguns sinais afeta de forma pouco significativa a precisão da expressão que descreve a evolução da SINR.

Nas Figuras 3.9, 3.11 e 3.13, são mostrados os resultados obtidos para o algoritmo em regime permanente. Quando a potência dos sinais interferentes é menor, observa-se que ambas expressões de modelo não predizem de forma satisfatória o comportamento do algoritmo para  $\Delta\theta = 20^\circ$ . Nessas condições, para os resultados de (3.12) e (A.13), observa-se uma maior precisão em relação aos resultados de (3.34). Devido à aproximação (3.19) não ser válida para o  $\Delta\theta_i$  grande, quando  $\Delta\theta = 20^\circ$  e a potência dos sinais interferentes é pequena, assumir (3.20) torna os resultados de (3.34) mais imprecisos.

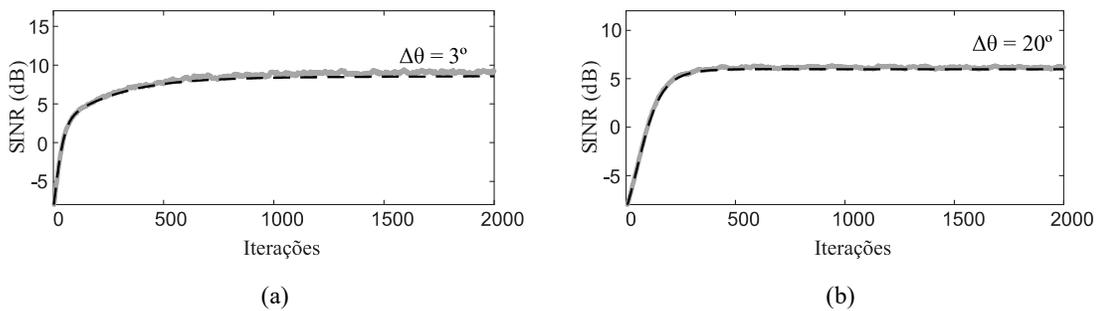


Figura 3.8. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o primeiro caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

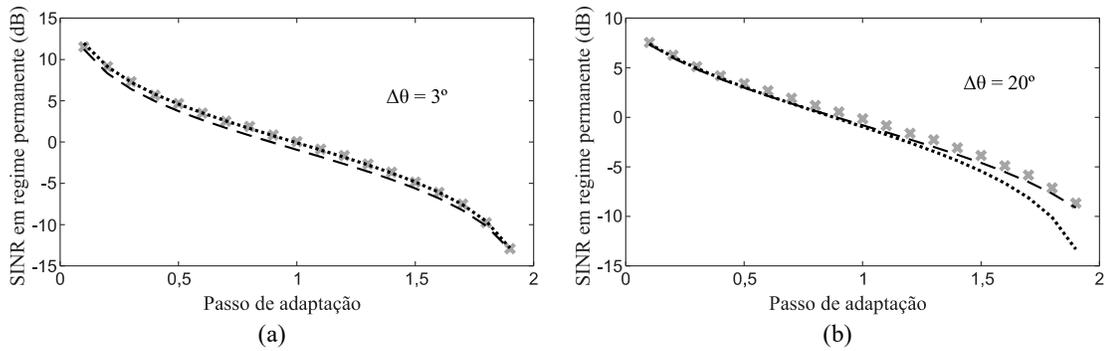


Figura 3.9. Exemplo 3. SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o primeiro caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

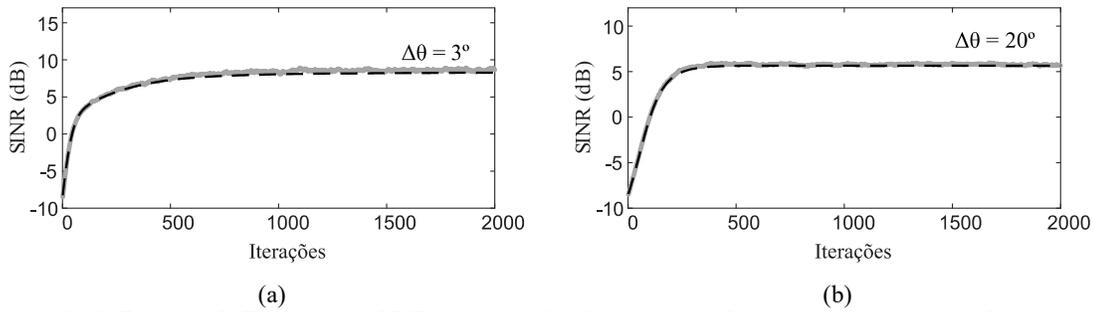


Figura 3.10. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o segundo caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

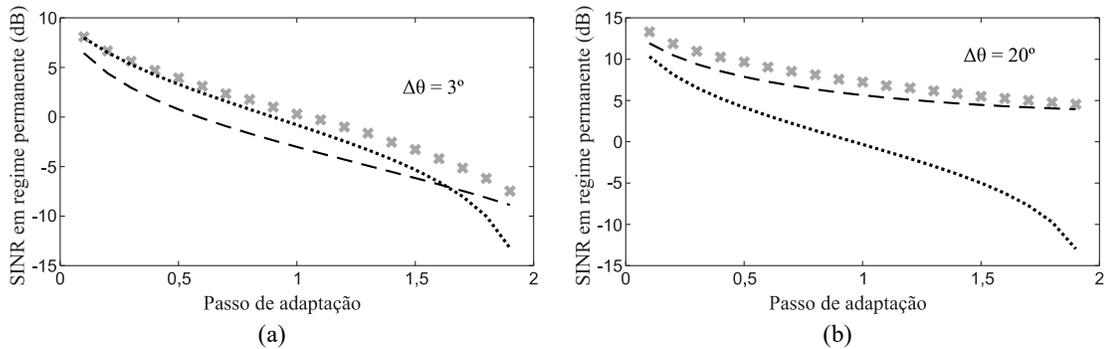


Figura 3.11. Exemplo 3 SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o segundo caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

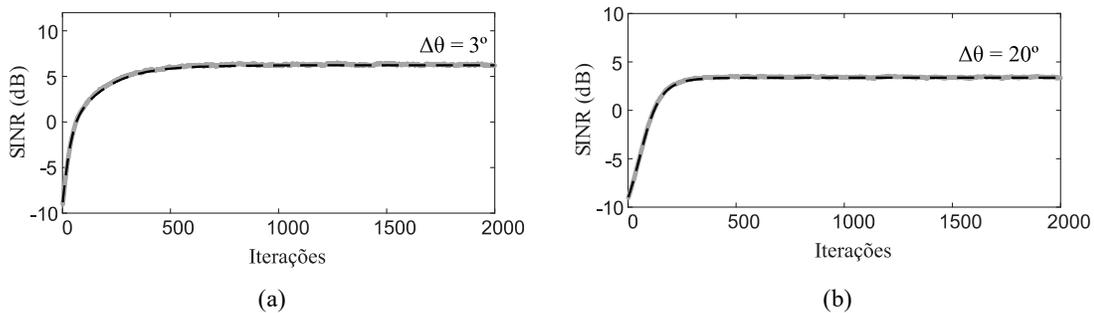


Figura 3.12. Exemplo 3. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o terceiro caso. Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

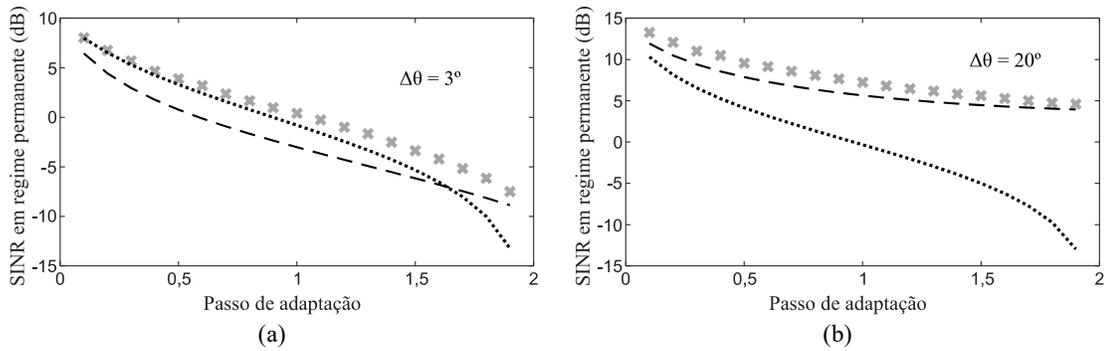


Figura 3.13. Exemplo 3. SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$  para o terceiro caso. Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

### 3.9.4 Exemplo 4

Para verificar a precisão do modelo em um cenário onde o algoritmo opera com um número maior de restrições é considerado aqui  $L = 3$  restrições em (1.16), sendo duas delas responsáveis por atribuir ganho zero para os ângulos de  $-34^\circ$  e  $76^\circ$ , e uma outra para garantir ganho unitário na direção do SOI. O arranjo contém agora  $M = 10$  antenas com  $K = 10$  usuários compartilhando o mesmo canal. O AOA de cada sinal interferente é  $-70^\circ, -35^\circ, -33^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  e  $77^\circ$ .

Na Figura 3.14, são mostrados os resultados obtidos para a fase transitória, na qual se observa que o modelo prediz adequadamente o comportamento do algoritmo. Os resultados em regime permanente são apresentados na Figura 3.15, onde nota-se que ambas as expressões de modelo predizem muito bem o comportamento do algoritmo. Observa-se ainda que os resultados obtidos através de (3.34) são mais precisos do que os obtidos através de (3.12) e (A.13) quando  $\Delta\theta = 3^\circ$ .

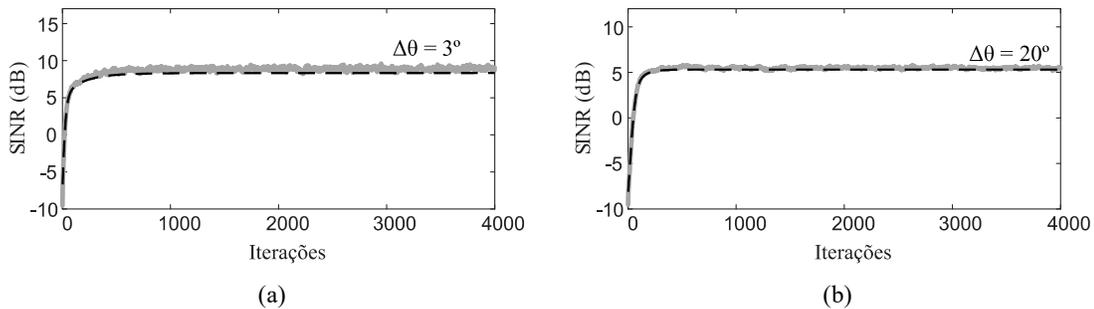


Figura 3.14. Exemplo 4. Evolução da SINR para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . Simulação de MC (linhas cinza). Modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

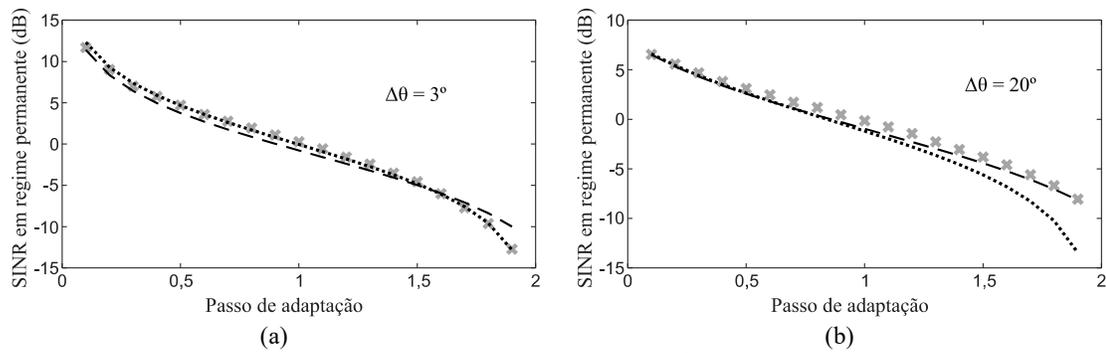


Figura 3.15. Exemplo 4. SINR em regime permanente para (a)  $\Delta\theta = 3^\circ$  e (b)  $\Delta\theta = 20^\circ$ . Simulação de MC (marcadores cinza). Modelo proposto usando (3.12) e (A.13) (linhas escuras tracejadas). Modelo proposto usando (3.34) (linhas escuras pontilhadas).

### 3.10 Conclusões

Neste capítulo, foi apresentado um modelo estocástico para o algoritmo CNLMS aplicado à conformação de feixe. Especificamente, expressões de modelo foram obtidas para caracterizar o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes, a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR. Os resultados de simulação numérica apresentados corroboraram a precisão do modelo proposto.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de pesquisa, foi proposta a modelagem estocástica dos algoritmos CLMS e CNLMS em arranjos adaptativos de antenas. Os resultados mais relevantes obtidos nesta pesquisa foram também apresentados e discutidos. Aqui, são também elencadas algumas sugestões para trabalhos futuros envolvendo a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos para conformação de feixe, como também são relacionados os artigos que foram publicados durante a realização desta dissertação de mestrado.

### 4.1 Conclusões

No Capítulo 1, foi apresentada uma breve introdução sobre arranjos adaptativos de antenas e sistemas de comunicações móveis. Na sequência, foi detalhado o funcionamento dos arranjos adaptativos de antenas e apresentado o modelo de sinais utilizado aqui. Além disso, os algoritmos CLMS e CNLMS foram revisitados, evidenciando características de seu funcionamento, como também apresentada sua derivação. Finalizando o capítulo, foram elencados os principais objetivos deste trabalho de pesquisa.

No Capítulo 2, foi derivado um modelo para o algoritmo CLMS. Tal modelo contém expressões descrevendo o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Especificamente, as expressões de modelo que foram obtidas caracterizam o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes e a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR. Ao final deste capítulo, resultados de simulação foram apresentados visando validar o modelo proposto em diferentes condições de operação. No Exemplo 1, foi representado um cenário típico de conformação de feixe, onde vários usuários compartilham o mesmo canal e existe apenas um sinal de interesse. No Exemplo 2, foi analisado como a precisão do modelo proposto é afetada frente a um número de restrições maior de que um. No Exemplo 3,

verificou-se como a relação entre número de usuários e número de antenas influencia a precisão das expressões de modelo propostas. No Exemplo 4, foram feitas variações na potência dos sinais interferentes para verificar como a precisão do modelo proposto era afetada. Esses resultados de simulação confirmaram a precisão do modelo proposto para diferentes cenários de operação.

Seguindo um procedimento similar ao apresentado no Capítulo 2, um modelo estocástico para o algoritmo CNLMS foi discutido no Capítulo 3. O modelo proposto permitiu descrever o comportamento do algoritmo na fase transitória e em regime permanente. Especificamente, o modelo proposto contém expressões que caracterizam o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes, a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR. Além disso, foram apresentadas soluções para o cálculo analítico das matrizes de correlação normalizadas. No final do capítulo, as expressões de modelo foram validadas através de simulações numéricas. No Exemplo 1, foi considerado um cenário típico de conformação de feixe, em que as expressões de modelo predizem satisfatoriamente o comportamento do algoritmo. Na sequência, foi discutida no Exemplo 2 a influência da relação entre o número de usuários e de antenas com vistas à precisão das expressões de modelo. Então, com o objetivo de avaliar o comportamento das expressões obtidas frente a um ambiente onde os usuários interferentes são posicionados com distâncias diferentes em relação à ERB, foi apresentado o Exemplo 3. Por fim, no Exemplo 4, foi apresentada uma situação em que o algoritmo opera utilizando três restrições lineares. Através desses exemplos, a precisão do modelo proposto foi confirmada.

Diante disso, acredita-se que os objetivos preestabelecidos para este trabalho de pesquisa foram alcançados com êxito. Além disso, os modelos obtidos mostraram que o conhecimento adequado da matriz de correlação do vetor de coeficientes, possibilita obter estimativas mais precisas para o comportamento da SINR. Destaca-se ainda que conhecer o comportamento da SINR dos arranjos adaptativos de antenas em comunicações móveis, permite aferir as taxas de erro de bit e/ou de pacote que são indicadores importantes para mensurar a qualidade de um canal de comunicação. Vale também frisar que a abordagem utilizada para realizar a modelagem dos algoritmos CLMS e CNLMS pode auxiliar na obtenção de modelos para outros algoritmos adaptativos de conformação de feixe discutidos na literatura.

## 4.2 Sugestões para trabalhos futuros

Sugerem-se os seguintes tópicos de pesquisa para a continuação deste trabalho:

- Estender a modelagem estocástica dos algoritmos CLMS e CNLMS para ambiente não estacionário, isto é, um ambiente onde os usuários se movem.
- Utilizar um procedimento semelhante para a modelagem de outros algoritmos de conformação de feixe da literatura.
- Obter expressões para calcular o passo de adaptação requerido, para obter um valor preestabelecido de SINR em regime permanente.

## 4.3 Trabalhos publicados oriundos da dissertação

Durante a realização deste trabalho de pesquisa, os seguintes artigos foram publicados:

- A. A. Falkovski, E. V. Kuhn, C. A. Pitz, M. V. Matsuo, R. Seara, “Modelagem estocástica do algoritmo CLMS aplicado à conformação de feixe”, *XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2020)*, Florianópolis – SC, Brasil, Nov. 2020.
- A. A. Falkovski, E. V. Kuhn, M. V. Matsuo, C. A. Pitz, E. L. O. Batista, R. Seara, “Stochastic modeling of the CNLMS algorithm applied to adaptive beamforming,” *Signal Processing*, vol. 178, 2020.

## CÁLCULO DE $\mathbf{K}(\infty)$

O comportamento em regime permanente da matriz de correlação do vetor de coeficientes  $\mathbf{K}(\infty)$  pode ser determinado fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (3.7); assim obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n) - \mu \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n) \right] + \mu^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_2(n) \right\} \mathbf{P} + \mathbf{f} \mathbf{f}^H \\ & + \mu \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1) \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] \mathbf{f}^H + \mathbf{f} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}^H(n)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1) \right\} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz de projeção ortogonal [definida em (1.29)],  $\mu$  é o valor do passo de adaptação,  $\mathbf{R}_1$  é uma matriz de correlação normalizada do sinal de entrada dada por

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n) \mathbf{P} \mathbf{x}(n)} \right] \quad (\text{A.2})$$

$\mathbf{R}_2(n)$  é um momento ponderado de quarta ordem definido como

$$\mathbf{R}_2(n) = E \left\{ \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{K}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{P} \mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (\text{A.3})$$

e  $\mathbf{f}$  é definido em (1.30). Então, assumindo convergência [22], de forma que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n) \\ &= \mathbf{K}(\infty) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

usando (3.10) e aplicando o operador vetorização em ambos os lados de (A.1) [veja (2.13) e (2.14)], tem-se

$$\begin{aligned} \text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] &= (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{P}) \text{vec} \left\{ \mathbf{K}(\infty) - \mu \left[ \mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{K}(\infty) \right] + \mu^2 \mathbf{R}_2(\infty) \right\} \\ &+ \text{vec} \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1) E[\mathbf{w}(\infty)] \mathbf{f}^H + \mathbf{f} E[\mathbf{w}^H(\infty)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1) \mathbf{P} + \mathbf{f} \mathbf{f}^H \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Agora, note que  $\mathbf{R}_2(n)$  [veja (A.3)] é função de  $\mathbf{K}(n)$  e, portanto, não é possível resolver (A.5) para  $\mathbf{K}(\infty)$  diretamente usando (3.47); por isso,  $\mathbf{R}_2(n)$  (obtida conforme o Apêndice B) é calculada através de

$$\mathbf{R}_2(n) = \text{unvec}\{\mathbf{R}'_2(n)\text{vec}[\mathbf{K}(n)]\} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\mathbf{R}'_2 = \mathbf{Q}'\{\text{diag}[\text{vec}(\mathbf{G})] + \mathbf{I}'(\mathbf{G} \otimes \mathbf{1}')\mathbf{I}'^T\}\mathbf{Q}'' \quad (\text{A.7})$$

com  $\mathbf{I}'$  denotando uma matriz de dimensão  $M^2 \times (M^2 + M)$  cujos elementos são

$$[\mathbf{I}']_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$\mathbf{I}'$  é uma matriz de dimensão  $(M+1) \times (M+1)$  cujos elementos são

$$[\mathbf{I}']_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & i = j = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

e  $\mathbf{G}$  é uma matriz de dimensão  $M \times M$  [definida em (3.49)]. Além disso, as matrizes  $\mathbf{Q}'$  e  $\mathbf{Q}''$  são obtidas, respectivamente, através de

$$\mathbf{Q}' = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}_x)^T \otimes \mathbf{Q} \quad (\text{A.10})$$

e

$$\mathbf{Q}'' = \mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}_x \quad (\text{A.11})$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz de transformação oriunda da autodecomposição do produto  $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$  [definida em (3.36)] e  $\mathbf{R}_x$  a matriz de correlação do sinal de entrada [veja (1.11)]. Note que, utilizando (A.6), os termos que são funções do sinal de entrada podem ser separados dos termos da matriz  $\mathbf{K}(n)$ .

Na sequência, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (A.6) e substituindo a expressão resultante em (A.5), tem-se

$$\begin{aligned} \text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] &= (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{P})(\mathbf{I}_{M^2} - \mu \mathbf{R}_1^T \oplus \mathbf{R}_1 + \mu^2 \mathbf{R}'_2)\text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] \\ &\quad + \text{vec}\{\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(\infty)]\mathbf{f}^H + \mathbf{f}E[\mathbf{w}^H(\infty)](\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1)\mathbf{P} + \mathbf{f}\mathbf{f}^H\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\oplus$  e  $\otimes$  representam o produto e a soma de Kronecker, respectivamente. Resolvendo (A.12) para  $\text{vec}[\mathbf{K}(\infty)]$  e aplicando o operador vetorização reverso [veja (2.17)], a expressão de modelo para caracterizar a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente é

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\infty) &= \text{unvec}([\mathbf{I}_{M^2} - (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{P})\text{vec}(\mathbf{I}_{M^2} - \mu \mathbf{R}_1^T \oplus \mathbf{R}_1 + \mu^2 \mathbf{R}'_2)]^{-1} \\ &\quad \text{vec}\{\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(\infty)]\mathbf{f}^H + \mathbf{f}E[\mathbf{w}^H(\infty)](\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1)\mathbf{P} + \mathbf{f}\mathbf{f}^H\}) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

em que  $\mathbf{I}_{M^2}$  representa uma matriz identidade de dimensão  $M^2 \times M^2$ .

## CÁLCULO DAS MATRIZES H E G

Neste apêndice, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados complexos, é apresentado um procedimento para calcular os valores esperados de  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2(n)$  [definidos em (3.2) e (3.8)] oriundos da derivação do modelo do algoritmo CNLMS. O procedimento discutido neste apêndice utiliza como referência a metodologia apresentada em [14] e [34].

### B.1 Determinação de $\mathbf{R}_1$

Para determinar (3.2), é utilizada a definição de valor esperado [35] para reescrever  $\mathbf{R}_1$  como

$$\mathbf{R}_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{xx}^H}{\mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.1})$$

onde  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  denota a função densidade de probabilidade do sinal de entrada [35]. Visando obter uma solução para as integrais em (B.1), uma função auxiliar é definida como

$$\mathbf{F}_1(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{xx}^H}{\mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x}} e^{-\omega \mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.2})$$

de modo que  $\mathbf{F}_1(\omega)$  corresponde a (B.1) quando  $\omega = 0$ , isto é,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1(\omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_1(0)$ . Assim, diferenciando (B.2) em relação a  $\omega$ , o termo do denominador  $\mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x}$  é eliminado, resultando em

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(\omega)}{\partial \omega} = - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \mathbf{xx}^H e^{-\omega \mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.3})$$

A partir desse ponto, o desenvolvimento requer o conhecimento de  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ . Sabendo que o sinal de entrada é gaussiano e complexo, a função de distribuição de probabilidade é escrita como [35]

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R}_{\mathbf{x}})} e^{-\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}}. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.4) em (B.3), tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-\mathbf{A}_1(\omega)}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}]} \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\mathbf{L}^{-1}(\omega) = [\mathbf{I} + \omega \mathbf{P} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}] \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\mathbf{A}_1(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}(\omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \mathbf{x} \mathbf{x}^H e^{-\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (\text{B.7})$$

Para facilitar a obtenção de  $\mathbf{F}_1(\omega)$ , (B.6) é reescrita utilizando a decomposição de  $\mathbf{P} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}$  apresentada na Seção 3.8.1. Assim, (B.6) resulta em

$$\mathbf{L}^{-1}(\omega) = \mathbf{Q}[\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda}] \mathbf{Q}^H \quad (\text{B.8})$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz de transformação e  $\mathbf{\Lambda}$  é o matriz diagonal com os autovalores do produto  $\mathbf{P} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}$  [conforme em (3.36)]. Note que os elementos de  $\mathbf{A}_1(\omega)$  [veja (B.7)] são por definição a correlação cruzada entre  $x_i$  e  $x_j$  quando elas são variáveis aleatórias gaussianas, com matriz de covariância  $\mathbf{L}(\omega)$  [14], [35]. Dessa forma, fazendo  $\mathbf{A}_1(\omega) = \mathbf{L}(\omega)$  em (B.5), considerado (B.8) e integrando ambos os lados da expressão resultante com respeito a  $\omega$  obtém-se

$$\mathbf{F}_1(\omega) = \mathbf{Q}^{-H} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{B.9})$$

onde  $\mathbf{H}(\omega)$  é uma matriz diagonal cujos elementos são

$$[\mathbf{H}(\omega)]_{(i,i)} = \begin{cases} \int \frac{1}{(1 + \omega \lambda_i) \prod_{k=1}^{M-L} (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_1, & i \leq M - L \\ \int \frac{1}{\prod_{k=1}^{M-L} (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Note que  $C_1 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1(\omega) = 0$ ; assim, (B.10) pode ser reescrita usando (3.43) na seguinte forma:

$$[\mathbf{H}(\omega)]_{(i,i)} = \begin{cases} \int \frac{\omega^{-\omega_i}}{g(\omega - \omega_i) \prod_{k=1}^{M-L} (\omega - \omega_k)} d\omega, & i \leq M - L \\ \int \frac{1}{g \prod_{k=1}^{M-L} (\omega - \omega_k)} d\omega, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

com  $\omega_i$  dado por (3.43) e  $g$  por (3.44).

Finalmente, assumindo que os autovalores não nulos de  $\mathbf{P}\mathbf{R}_x$  são distintos, realizando a expansão em frações parciais de (B.11) e integrando a expressão resultante para  $\omega = 0$ , segue (3.42). A matriz  $\mathbf{R}_1$  pode agora ser determinada analiticamente através de (3.41).

### B.2 Determinação de $\mathbf{R}_2(n)$

A fim de obter (3.8) para sinais de entrada gaussianos complexos, uma função auxiliar  $\mathbf{F}_2(\omega, n)$  é definida como

$$\mathbf{F}_2(\omega, n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H \mathbf{K}(n) \mathbf{x}\mathbf{x}^H}{(\mathbf{x}^H \mathbf{P}\mathbf{x})^2} e^{-\omega \mathbf{x}^H \mathbf{P}\mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.12})$$

Observe que (B.12) é o valor esperado requerido quando  $\omega = 0$ , isto é,  $\mathbf{R}_2(n) = \mathbf{F}_2(\omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_2(0)$ . Assim, diferenciando (B.12) duas vezes com respeito a  $\omega$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \mathbf{K}(n) \mathbf{x}\mathbf{x}^H e^{-\omega \mathbf{x}^H \mathbf{P}\mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.13})$$

Em seguida, substituindo a função de densidade de probabilidade (B.4) em (B.13),

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} = \frac{\mathbf{A}_2(\omega, n)}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{R}_x]} \quad (\text{B.14})$$

com  $\mathbf{L}(\omega)$  dada por (B.6) e

$$\mathbf{A}_2(\omega, n) = \frac{1}{\pi^N \det[\mathbf{L}(\omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \mathbf{K}(n) \mathbf{x}\mathbf{x}^H e^{-\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (\text{B.15})$$

Agora, observando que (B.15) é por definição o valor esperado de um momento de quarta ordem de variáveis gaussianas ponderado por  $\mathbf{K}(n)$  [22], (B.14) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} = \frac{\mathbf{L}(\omega) \mathbf{K}(n) \mathbf{L}(\omega) + \mathbf{L}(\omega) \text{tr}[\mathbf{L}(\omega) \mathbf{K}(n)]}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{R}_x]} \quad (\text{B.16})$$

A partir desse ponto, são mostrados dois procedimentos distintos para calcular  $\mathbf{R}_2(n)$ . Os resultados obtidos são idênticos; porém, enquanto o primeiro procedimento resulta em uma expressão mais simples, o segundo resulta uma expressão mais complexa em que o termo  $\mathbf{K}(n)$  é evidenciado possibilitando o cálculo de  $\mathbf{K}(\infty)$ .

O primeiro procedimento é baseado nos resultados de [34]. Dessa forma, fazendo uso de (B.8) para reescrever (B.16), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} = \frac{\mathbf{Q}^{-H} \{ (\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{K}'(n) (\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda})^{-1} + (\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda})^{-1} \text{tr}[(\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{K}'(n)] \} \mathbf{Q}^{-1}}{\det(\mathbf{I} + \omega \mathbf{\Lambda})} \quad (\text{B.17})$$

onde

$$\mathbf{K}''(n) = \mathbf{Q}^{-H} \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}^{-1}. \quad (\text{B.18})$$

Em seguida, ambos os lados de (B.17) são integrados duas vezes com respeito a  $\omega$ . Para efetuar essa integração cada elemento  $[\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n) / \partial \omega^2]_{(i,j)}$  é calculado e integrado individualmente. Assim, é possível obter a seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_2(\omega, n) = \mathbf{Q}^{-H} [\mathbf{G}(\omega) \circ \mathbf{K}''(n) + \mathbf{G}(\omega) \mathbf{k}''(n) \mathbf{1}^T \circ \mathbf{I}] \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{B.19})$$

onde a matriz  $\mathbf{G}(\omega)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\omega) & \mathbf{M}(\omega) \\ \mathbf{M}^T(\omega) & \mathbf{N}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

sendo  $\mathbf{L}(\omega)$  uma matriz de dimensão  $M - L \times M - L$  cujos elementos são dados por

$$[\mathbf{L}(\omega)]_{i,j} = \iint \frac{\omega_i \omega_j}{g(\omega - \omega_i)(\omega - \omega_j) \prod_{k=1}^{M-L} (\omega - \omega_k)} d\omega + C_2 \quad (\text{B.21})$$

$\mathbf{M}(\omega)$  uma matriz de dimensão  $M - L \times L$  com os elementos obtidos de

$$[\mathbf{M}(\omega)]_{i,j} = - \iint \frac{\omega_i}{g(\omega - \omega_i) \prod_{k=1}^{M-L} (\omega - \omega_k)} d\omega + C_2, \quad j = 1, \dots, L \quad (\text{B.22})$$

e  $\mathbf{N}(\omega)$  uma matriz de dimensão  $L \times L$  com todos os elementos iguais, determinados por

$$[\mathbf{N}(\omega)]_{i,j} = \iint \frac{1}{g \prod_{k=1}^{M-L} (\omega - \omega_k)} d\omega + C_2 \quad (\text{B.23})$$

com  $C_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_2(\omega, n) = 0$ . Finalmente, assumindo autovalores distintos, realizando as expansões em frações parciais de (B.21), (B.22) e (B.23), e resolvendo para  $\omega = 0$ , obtém-se (3.50), (3.51), (3.52) e (3.53); consequentemente,  $\mathbf{R}_2(n)$  segue de (3.47).

Daqui em diante, é apresentado o segundo procedimento para calcular  $\mathbf{R}_2(n)$ . Para isso, é aplicado o operador vetorização  $\text{vec}(\cdot)$  para empilhar as colunas da matriz [32, p. 405], em ambos os lados de (B.16), obtendo-se

$$\text{vec} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} \right] = \frac{\overbrace{\text{vec}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)\mathbf{L}(\omega)]}^{\mathbf{A}} + \overbrace{\text{vec}\{\mathbf{L}(\omega)\text{tr}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)]\}}^{\mathbf{B}}}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega)\mathbf{R}_x]}. \quad (\text{B.24})$$

Primeiramente, o termo **A** em (B.24) é reescrito como

$$\text{vec}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)\mathbf{L}(\omega)] = [\mathbf{L}^T(\omega) \otimes \mathbf{L}(\omega)] \text{vec}[\mathbf{K}(n)]. \quad (\text{B.25})$$

Então, substituindo (B.8) em (B.25) e utilizando as propriedades do operador vetorização [veja (2.13) e (2.14)], de modo que na expressão resultante os termos  $(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}$  sejam agrupados, assim

$$\text{vec}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)\mathbf{L}(\omega)] = \mathbf{Q}'[(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1} \otimes (\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}] \mathbf{Q}'' \text{vec}[\mathbf{K}(n)]. \quad (\text{B.26})$$

Agora, para o termo **B** em (B.24), é utilizada a propriedade (2.15); portanto,

$$\text{vec}[\mathbf{L}(\omega)] \text{tr}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)] = \text{vec}[\mathbf{L}(\omega)] \text{vec}[\mathbf{L}^T(\omega)]^T \text{vec}[\mathbf{K}(n)]. \quad (\text{B.27})$$

Em seguida, fazendo uso das propriedades (2.13) e (2.14), (B.27) é reescrita como

$$\text{vec}[\mathbf{L}(\omega)] \text{tr}[\mathbf{L}(\omega)\mathbf{K}(n)] = \mathbf{Q}' \text{vec}[(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}] \text{vec}[(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}]^T \mathbf{Q}'' \text{vec}[\mathbf{K}(n)]. \quad (\text{B.28})$$

Substituindo (B.26) e (B.28) em (B.24), tem-se

$$\begin{aligned} \text{vec} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega, n)}{\partial \omega^2} \right] &= \frac{\mathbf{Q}'(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1} \otimes (\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{Q}''}{\det(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})} \text{vec}[\mathbf{K}(n)] \\ &+ \frac{\mathbf{Q}' \text{vec}[(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}] \text{vec}[(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})^{-1}]^T \mathbf{Q}''}{\det(\mathbf{I} + \omega\mathbf{\Lambda})} \text{vec}[\mathbf{K}(n)]. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Então, integrando (B.29) duas vezes em relação a  $\omega$  e fazendo  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$  é obtida por

$$\text{vec}[\mathbf{R}_2(n)] = \mathbf{Q}'(\text{diag}\{\text{vec}[\mathbf{G}(\omega)]\}) + \mathbf{I}'[\mathbf{G}(\omega) \otimes \mathbf{I}'] \mathbf{I}'^T \mathbf{Q}'' \text{vec}[\mathbf{K}(n)] \quad (\text{B.30})$$

onde  $\mathbf{G}(\omega)$  é calculada conforme (B.20). Finalmente, para obter  $\mathbf{R}_2(n)$  é necessário apenas utilizar o operador reverso de vetorização [dado em (2.17)]. Dessa forma, a matriz  $\mathbf{R}_2(n)$  pode ser também obtida através de (A.6).

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. New York, NY: Cambridge University Press, 2005.
- [2] A. F. Molisch, *Wireless Communications*, 2nd ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011.
- [3] K. V. Arya, R. S. Bhadoria, and N. S. Chaudhari, *Emerging Wireless Communication and Network Technologies: Principle, Paradigm and Performance*. New York, NY: Springer, 2018.
- [4] C. A. Balanis and P. I. Ioannides, *Introduction to Smart Antennas*. San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [5] L. C. Godara, *Smart Antennas*. Boca Raton, FL: CRC press, 2004.
- [6] A. B. Gershman, N. D. Sidiropoulos, S. Shahbazpanahi, M. Bengtsson, and B. Ottersten, “Convex optimization-based beamforming,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 27, no. 3, pp. 62–75, 2010.
- [7] E. Björnson, M. Bengtsson, and B. Ottersten, “Optimal multiuser transmit beamforming: A difficult problem with a simple solution structure [lecture notes],” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 31, no. 4, pp. 142–148, 2014.
- [8] S. Imani, S. A. Ghorashi, and M. Bolhasani, “SINR maximization in colocated MIMO radars using transmit covariance matrix,” *Signal Processing*, vol. 119, pp. 128–135, 2016.
- [9] A. L. Swindlehurst, E. Ayanoglu, P. Heydari, and F. Capolino, “Millimeter-wave massive MIMO: The next wireless revolution?,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, no. 9, pp. 56–62, 2014.
- [10] T. L. Marzetta and H. Q. Ngo, *Fundamentals of Massive MIMO*. New York, NY: Cambridge University Press, 2016.
- [11] O. L. Frost, “An algorithm for linearly constrained adaptive array processing,” *Proc. IEEE*, vol. 60, no. 8, pp. 926–935, 1972.
- [12] R. Gooch and J. Lundell, “The CM array: An adaptive beamformer for constant modulus signals,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 1986, vol. 11, pp. 2523–2526.
- [13] D. R. Morgan, “Downlink adaptive array algorithms for cellular mobile communications,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 3, pp. 476–488, 2003.
- [14] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the constrained stochastic gradient algorithm: model, performance, and improved version,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304–1315, 2009.
- [15] J. A. Apolinário, S. Werner, P. S. R. Diniz, and T. I. Laakso, “Constrained normalized adaptive filters for CDMA mobile communications,” in *Proceedings of the 9th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 1998, pp. 1–4.
- [16] S. Werner, J. A. Apolinario, and T. I. Laakso, “Multiple-antenna CDMA mobile reception using constrained normalized adaptive algorithms,” in *Proceedings of the SBT/IEEE International Telecommunications Symposium (ITS)*, 1998, pp. 354–358.
- [17] J. F. de Andrade, M. L. R. de Campos, and J. A. Apolinário, “An L1-constrained normalized lms algorithm and its application to thinned adaptive antenna arrays,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2013, pp. 3806–3810.
- [18] W. Shi, Y. Li, L. Zhao, and X. Liu, “Controllable Sparse Antenna Array for Adaptive Beamforming,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 6412–6423, 2019.

- [19] G. M. Zilli, C. A. Pitz, E. L. O. Batista, R. Seara, and W. Zhu, "An Adaptive Approach for the Joint Antenna Selection and Beamforming Optimization," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 99017–99030, 2019.
- [20] R. A. Monzingo, R. Haupt, and T. W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*. 2nd. ed. Raleigh, NC: Scitech publishing, 2011.
- [21] D. H. Brandwood, "A complex gradient operator and its application in adaptive array theory," *IEE Proc. F - Commun. Radar Signal Process.*, vol. 130, no. 1, pp. 11–16, 1983.
- [22] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [23] M. L. R. de Campos, S. Werner, and J. A. Apolinário, "Constrained adaptive filters," in *Adaptive Antenna Arrays*, New York, NY: Springer, 2004, pp. 46–64.
- [24] L. Godara and A. Cantoni, "Analysis of the performance of adaptive beam forming using perturbation sequences," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 31, no. 2, pp. 268–279, 1983.
- [25] L. Godara and A. Cantoni, "Analysis of constrained LMS algorithm with application to adaptive beamforming using perturbation sequences," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 368–379, 1986.
- [26] L. C. Godara, "Analysis of transient and steady-state weight covariance in an adaptive postbeamformer interference canceler," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 85, no. 1, pp. 194–201, 1989.
- [27] A. Cantoni, "Application of orthogonal perturbation sequences to adaptive beamforming," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 28, no. 2, pp. 191–202, 1980.
- [28] M. H. Maruo, J. C. M. Bermudez, and L. S. Resende, "Statistical analysis of a jointly optimized beamformer-assisted acoustic echo canceler," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 1, pp. 252–265, 2013.
- [29] R. Arablouei, K. Doğançay, and S. Werner, "On the mean-square performance of the constrained LMS algorithm," *Signal Processing*, vol. 117, pp. 192–197, 2015.
- [30] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education India, 2014.
- [31] C. Samson and V. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177–1191, 1983.
- [32] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*. 2nd ed. Woodstock, OX: Princeton university press, 2009.
- [33] R. L. G. Cavalcante and I. Yamada, "Steady-state analysis of constrained normalized adaptive filters for MAI reduction by energy conservation arguments," *Signal Processing*, vol. 88, no. 2, pp. 326–338, 2008.
- [34] E. V. Kuhn, F. D. C. De Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the stochastic modeling of the IAF-PNLMS algorithm for complex and real correlated Gaussian input data," *Signal Processing*, vol. 99, pp. 103–115, 2014.
- [35] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Eaglewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- [36] Q. H. Spencer, B. D. Jeffs, M. A. Jensen, and A. L. Swindlehurst, "Modeling the statistical time and angle of arrival characteristics of an indoor multipath channel," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 18, no. 3, pp. 347–360, 2000.