3º

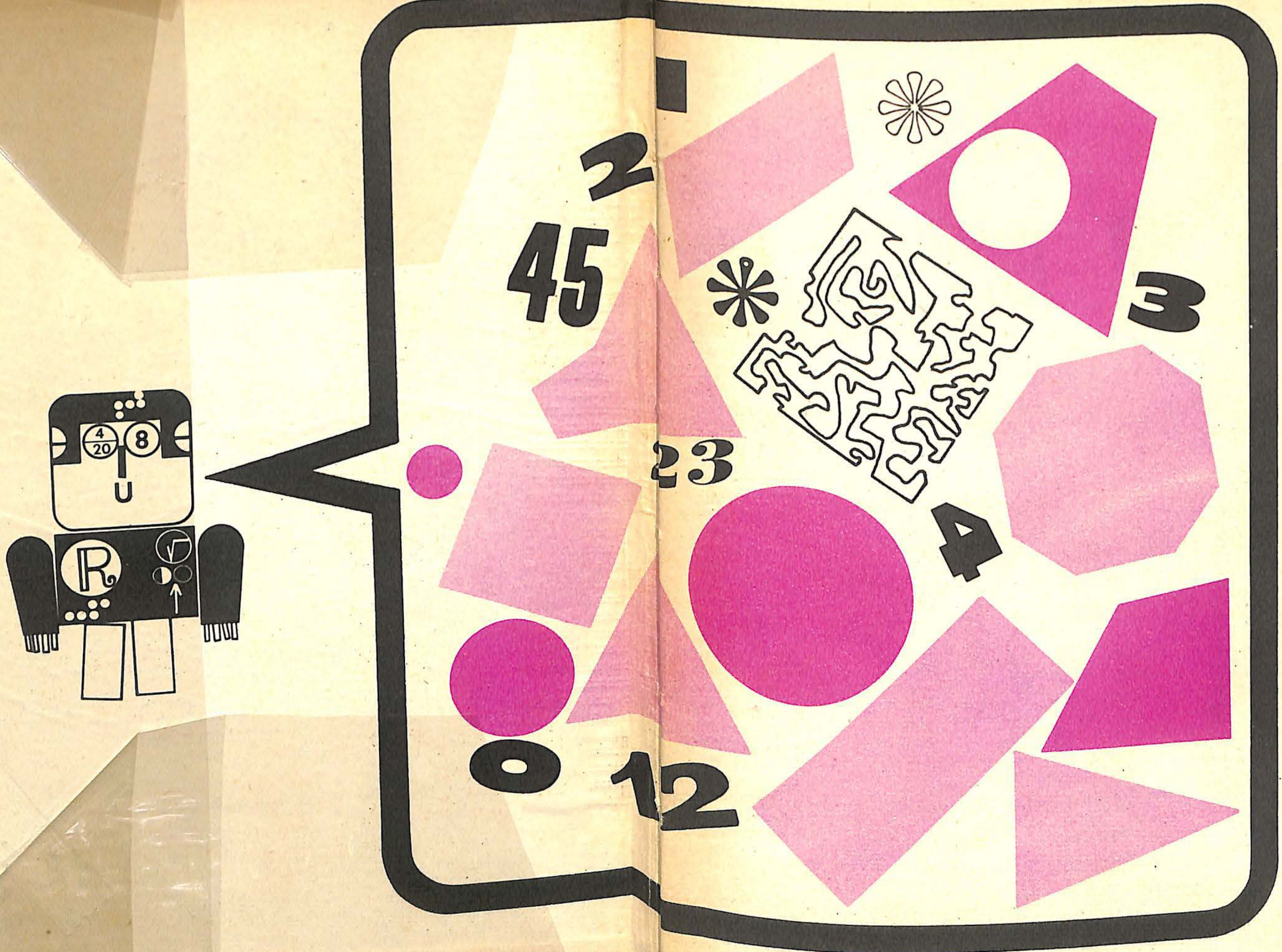
Volume

para os ginásios

MATEMÁTICA

URSO MODERNO

OSVALDO SANGIORGI



4
20
8
U
R
2
45
3
23
4
0
12

Homenagem ao

V Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática

(10/15 janeiro de 1966
C.T.A. — S. José dos Campos, SP.)

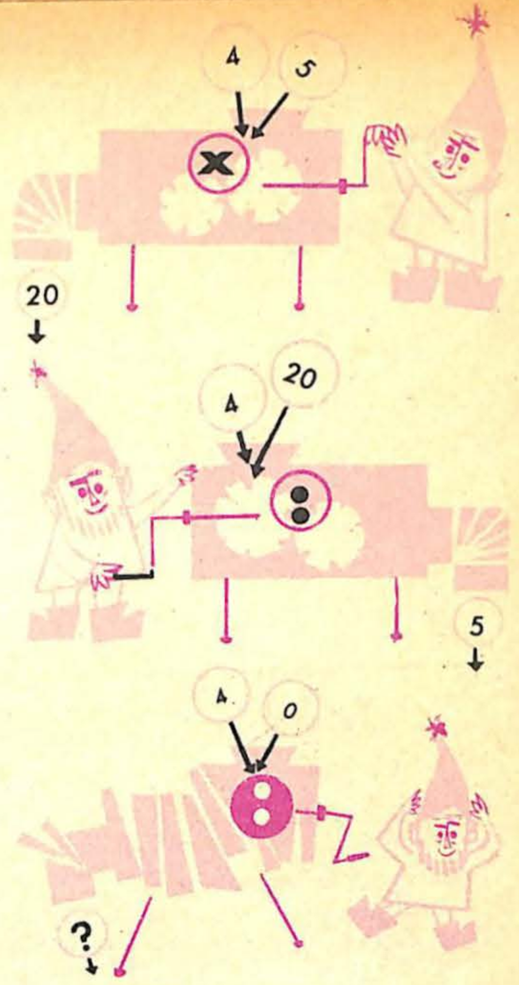
que teve a coordenação do

Grupo de Estudos do Ensino da Matemática

(GEEM) de São Paulo

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO
3

OSVALDO
SANGIORGI



3º VOLUME

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO

para os ginásios

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Capa e ilustrações:
NESTOR BATTAGLIERO

terceira edição (revista)

1967

obra composta e impressa
nas oficinas da
São Paulo Editora S.A.

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

PROGRAMA (1)

para um

CURSO MODERNO

de

MATEMÁTICA

(*Para a Terceira Série dos Cursos Ginasiais*) (2):

1. NÚMEROS REAIS — números racionais e números irracionais — operações no conjunto $\mathbb{R}$ — propriedades estruturais;

2. CÁLCULO ALGÉBRICO — cálculo literal em $\mathbb{R}$ — expressões equivalentes; reduções — técnicas de fatoração — complementação do estudo das equações, inequações e sistemas de equações simultâneas do primeiro grau;

3. POLINÔMIOS NUMA VARIÁVEL — tratamento elementar moderno — operações — propriedades estruturais;

4. INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DEDUTIVA — elementos fundamentais: ponto, reta, plano, semi-reta, segmento, semi-plano, ângulo — congruência — estudo dos polígonos em geral e dos triângulos e quadriláteros em particular;

5. ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA — disco — círculo — arcos e cordas, propriedades — medida de arcos e ângulos;

6. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E TRANSFORMAÇÕES — transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.

(1) De acôrdo com os *Assuntos Mínimos* para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963, e *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática*, Curso Secundário — 1.º Ciclo — terceiro ano ginasial, da Secretaria de Educação de São Paulo, publicadas no *Diário Oficial* de 19/1/1965.

(2) Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais e os Ginásios Comerciais.

Do mesmo autor:

Matemática, 1 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática — 1*)

Matemática, 2 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática — 2*)

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática — 3*)

Matemática, quarta série ginasial.

Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais

Programa de Admissão, para os ginásios (em colaboração).

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

São Paulo 2, SP

índice

CAPÍTULO 1

Números reais; estrutura de corpo

CAPÍTULO 2

Cálculo algébrico; estudo dos polinômios

CAPÍTULO 3

Estudo das figuras geométricas

CAPÍTULO 4

Estudo dos polígonos e da circunferência

APÊNDICE

Transformações geométricas planas

UMA PALAVRA PARA VOCÊ, TERCEIRANISTA DE GINÁSIO...

Meu caro estudante:

Neste livro — terceiro da série do ensino moderno da Matemática no Ginásio — você entrará em contacto com uma porção de coisas novas.

Primeiro, com o *conjunto dos números reais* que, com relação às operações definidas, possui rica estrutura. Os *cálculos* com os números reais propiciarão a você excelente domínio do *Cálculo Algébrico*.

A seguir, será apresentado um tratamento elementar moderno de novos entes: os *polinômios*. Serão efetuadas operações e ressaltada mais uma importante estrutura com êsses novos entes.

Finalmente, vem o "bom-bocado" do livro: o estudo da *Geometria*. Agora, não será mais preciso que você "decore" enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam "preveni-lo".

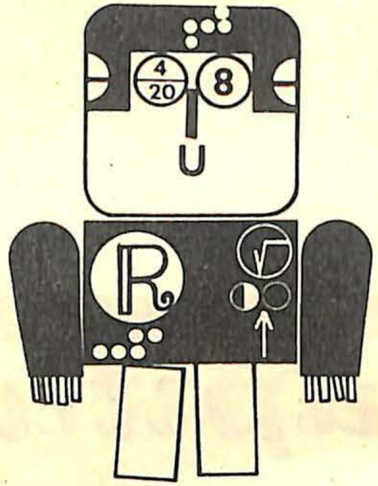
Na verdade, trata-se de uma das partes da Matemática de valor e beleza reconhecidos desde antes de Cristo, pela notável cultura grega da época. Por quê? Porque as figuras geométricas — suas velhas conhecidas desde os primeiros anos de escola — quando tratadas "racionalmente", constituem ótimo estímulo para a *dedução* de certas propriedades comuns a elas e que jamais poderiam ser aceitas se apenas as *observássemos*. E, se *deduzir* é uma das principais qualidades de "ser racional", o estudo da Geometria o fará mais racional ainda!

Seja, pois, muito feliz nesta viagem ao maravilhoso "país da Geometria", e até a quarta série!

OSVALDO SANGIORGI

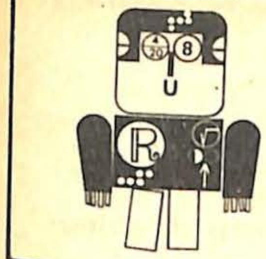
capítulo 1

NÚMEROS REAIS. ESTRUTURA DE CORPO.



1.ª Parte: - números racionais
- números irracionais
- números reais

2.ª Parte: - operações com números reais propriedades estruturais do conjunto $\mathbb{R}$



1.ª Parte: - números racionais
- números irracionais
- números reais

1. *Lembrando a representação decimal dos números racionais*

Você já sabe que *um mesmo número* pode ser representado por *diversos numerais*. De certa forma, os *numerais decimais* são os preferidos para conduzirem cálculos com alguma rapidez, principalmente quando se empregam *máquinas*.

Assim, por exemplo, entre os numerais que representam o número *meio* destacamos:

$$\frac{1}{2} \text{ (fração) e } 0{,}5 \text{ (decimal)}$$

Entre os *numerais decimais* usados para representar os números racionais, foram encontrados dois tipos(*), conhecidos pelos nomes de:

decimal exata e *decimal periódica*

Exemplos:

$$\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5} \qquad \frac{11}{8} = \mathbf{1{,}375} \qquad \frac{12}{4} = \mathbf{3{,}0} \text{ (o mesmo que 3)}$$

são números racionais representados por **decimal exata**

enquanto que:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{0{,}333....} \qquad \frac{154}{45} = \mathbf{3{,}4666....} \qquad \frac{3}{11} = \mathbf{0{,}272727....}$$

são números racionais representados por *decimal periódica*

(*) Ver *Matemática, 1* — Curso Moderno, pág. 225.

Recìprocamente: uma *decimal exata* ou *decimal periódica* representa um *número racional*. Exemplos:

0,25 representa o número racional: $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

3,856 representa o número racional: $\frac{3\,856}{1\,000} = \frac{1\,928}{500} = \frac{482}{125}$

0,444... representa o número racional: $\frac{4}{9}$ (que é a **geratriz** da dízima)

8,252525.... representa o número racional: $8\frac{25}{99}$ (... **geratriz**)

0,57333.... representa o número racional: $\frac{573-57}{900} = \frac{516}{900}$ (... **geratriz**)

Então: todo número racional $\frac{\square}{\triangle}$ (onde $\square$ e $\triangle$ podem ser substituídos por números inteiros, com *exceção* de 0 para $\triangle$) tem uma representação *decimal* exata ou *periódica*, e qualquer representação decimal exata ou periódica indica um *número racional*.

LEMBRETE AMIGO

O conjunto **Q**, dos *números racionais*, e o conjunto cujos elementos são representados por *numerais decimais* (sob forma *exata* ou *periódica*) são o MESMO.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 1

1. Usando numerais decimais, sob forma exata ou periódica, represente os seguintes números racionais, dados pela notação $\frac{\square}{\triangle}$:

1.º) $\frac{2}{5}$ 2.º) $\frac{3}{4}$ 3.º) $\frac{8}{3}$ 4.º) 7 5.º) $6\frac{11}{20}$

6.º) $\frac{5}{11}$ 7.º) $\frac{1}{100}$ 8.º) $1\frac{7}{6}$ 9.º) $\frac{18}{74}$ 10.º) 1 265

2. Usando o numeral-fração $\frac{\square}{\triangle}$, represente os seguintes números racionais, dados por numerais decimais (sob forma exata ou periódica):

1.º) 0,5 2.º) 0,777... 3.º) 1,6 4.º) 9,0323232... 5.º) 8,0 6.º) 3,111...
7.º) 6 8.º) 5,34222... 9.º) 13,42 10.º) 1,00111...

2. NOVIDADE: *Números irracionais*

Atente para uma nova questão: Existem números que podem ser representados por numerais decimais sem ser sob a forma exata ou periódica?

A resposta, por enquanto, será dada através de exemplos.

Observe, com *atenção*, o seguinte *numeral decimal*:

0,52522522252222 ....

onde aparece sempre escrito um 2 "a mais" depois de escrito o 5.

Uma afirmação sôbre êsse numeral decimal já pode ser feita: êle *não representa* número racional, pois não está sob forma periódica (há sempre um 2 "a mais", depois de escrito o 5 e, portanto, *não há* período), nem sob forma exata (pois a representação "não tem fim"). Também:

1,01001000100001.......
0,123456789101112......
8,34334333433334.......
0,10100100010000.......

e outros numerais decimais que você poderá construir de forma análoga, acusam a *existência* de números que *não são racionais*.

Tais números, representados por numerais decimais que *não estão* sob forma *exata* nem *periódica*, são denominados IRRACIONAIS.

Logo:

os números racionais **sempre** $\left(\frac{\square}{\triangle}\right)$
os números irracionais **nunca** $\left(\neq \frac{\square}{\triangle}\right)$
podem ser representados por numerais decimais sob forma exata ou periódica

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 2

1. Observe a representação decimal do seguinte *número irracional*:

0,10100100010000......

que *não é exata nem periódica*. Você "descobre" fàcilmente a "regra" que permite escrever essa representação: basta notar que se escreve um 0 "a mais", depois de escrito o 1. Continue escrevendo...

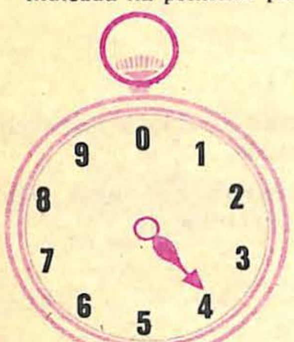
2. "Descubra" a regra segundo a qual vem sendo escrita a representação decimal dos seguintes números irracionais:

2,31311311131111.....
0,123456789101112.... (observe que a parte decimal faz parte do conjunto dos números naturais...)
5,01020304050607.....

3. Curiosidade! Você vai aprender uma maneira "mecânica" de escrever quantos números irracionais quiser, usando o numeral decimal proveniente da seguinte *construção*:

Considere o mostrador de um "relógio especial" dispondo de um só ponteiro tal que, imprimindo-lhe um movimento num dado sentido (sempre com "impulsos" diferentes), indicará, ao parar, um dos números que figura no mostrador.

Nestas condições, a parte decimal do número que se pretende escrever será obtida por intermédio dos giros do ponteiro: a 1.ª casa decimal (décimos) é indicada na primeira parada; a 2.ª casa (centésimos), na segunda; a 3.ª casa (milésimos), na terceira parada e assim por diante.



Se, por exemplo, a parte inteira fôr 2 e supondo que:

na 1.ª parada o ponteiro indique....... 4
na 2.ª parada indique................ 7
na 3.ª parada indique................ 0
na 4.ª parada indique................ 2
....

então a representação decimal que vem sendo obtida será:

2,4702.........

Como essa "operação" poderia prosseguir indefinidamente, tal representação decimal *não é exata* e, como o movimento imprimido ao ponteiro é *variado*, também *não será periódica*, isto é, não haverá (provàvelmente...) repetição de períodos sempre iguais.

Obtenha agora, de cada um de seus colegas de classe, por intermédio do "relógio especial", um *número irracional* por aproximação...

3. *Os números irracionais conhecidos na Aritmética e na Geometria; estrutura de ordem*

Em tôda a Matemática que você vem estudando tem ocorrido o emprêgo de *números irracionais*. Lembra-se da $\sqrt{2}$, cuja extração por aproximação revelava uma notação decimal *nem exata, nem periódica?*

De fato:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots\ldots$$

e por mais que você aproximasse a extração não aparecia nenhum *período* (no sentido conhecido), nem "tinha fim". O mesmo acontecia com as aproximações das extrações de:

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \ldots$$

É óbvio que, sendo:

$\sqrt{4} = 2$ (porque $2 \times 2 = 4$)
$\sqrt{9} = 3$ (porque $3 \times 3 = 9$)
ou $\sqrt[3]{8} = 2$ (porque $2 \times 2 \times 2 = 8$)

estamos diante de *números racionais*, pois estão sendo representados por numerais decimais sob forma *exata* (respectivamente: 2,0; 3,0 e 2,0).

O famoso "pi", mais conhecido pelo numeral π, empregado na medida da circunferência desde a 1.ª Série Ginasial, é um "antigo" número irracional, porque a sua representação decimal *não é exata, nem periódica*:

$$\pi = 3{,}141592\ldots\ldots$$

Hoje, com auxílio dos computadores eletrônicos, conhecem-se *mais de* 100 000 casas decimais de π, que *não se repetem* em períodos iguais, nem "tem fim"!

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Atenção!

Quando, nos cálculos, se tomam para o número irracional $\sqrt{2}$ as decimais exatas: 1,4 ou 1,41 (que são *números racionais!*), é porque se está "forçando" uma aproximação a fim de aproveitar-se o resultado da operação. Com efeito:

$\sqrt{2} \neq 1{,}4$ porque $1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96 \neq 2$
$\sqrt{2} \neq 1{,}41$ porque $1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881 \neq 2$

O mesmo ocorre com o número irracional π quando se tomam nos cálculos as aproximações decimais exatas:

3,14 ou 3,1416

que são *números racionais*.

Também são *números irracionais* os resultados das operações:

$3 \times \sqrt{2} = 3 \times 1{,}41421\ldots\ldots$
$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 1{,}7321\ldots + 1{,}7321\ldots$
$5 \times \pi\ = 5 \times 3{,}141592\ldots$

e de outras análogas, por serem numerais decimais sob forma *não-exata* ou *periódica*.

Quantos números irracionais existem?

Você já deve ter concluído que o *conjunto dos números irracionais é infinito*.

O estabelecimento da *ordem* com os números irracionais, por meio de seus numerais decimais, decorre naturalmente do conhecimento que você já tem do emprêgo das relações:

$>$ (maior), $<$ (menor), $=$ (igual) e $\neq$ (diferente)

nas representações decimais, em geral. Assim, por exemplo:

$$1{,}010010001\ldots\ldots < 2{,}010010001\ldots\ldots$$
$$1{,}7321\ldots\ldots\ldots\ldots > 1{,}41421\ldots$$

Também é fácil deduzir que as duplas desigualdades:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \qquad 2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \qquad 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \qquad 2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$$

que relacionam números racionais com números irracionais são *verdadeiras*.

LEMBRETE AMIGO

Os números irracionais, ao contrário dos números racionais, *não podem* ser escritos sob a forma: $\frac{\square}{\triangle}$

O nome *irracional* não significa que se trata de um número "que não pensa", mas tão-sòmente que *não pode* ser pôsto sob a forma de *razão*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 3

1. Dê alguns exemplos de números irracionais, mediante numerais decimais. Basta escrever representações decimais que *não* sejam exatas ou periódicas, tais como:

   4,363663666.... 28,313113111311111....
   0,020020002..... 0,12131415161718192021....

2. É racional ou irracional o número representado pelo seguinte numeral decimal:

   0,282828......?

   É racional, pois se trata de uma representação decimal *periódica*.

3. Empregando numeral decimal, represente os seguintes números irracionais, escrevendo pelo menos duas casas decimais:

   $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{143}$, $\sqrt{1\,007}$

De alguns dêles já se conhecem as duas primeiras casas decimais. Dos outros extrai-se, com aproximação *centesimal*, a raiz quadrada. Logo:

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots\ldots \qquad \sqrt{6} = 2{,}44\ldots \qquad \sqrt{143} = 11{,}95\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73\ldots\ldots \qquad \sqrt{20} = 4{,}47\ldots \qquad \sqrt{1\,007} = 31{,}61\ldots$$

4. (Não se surpreenda...) Dê um exemplo de dois números irracionais cuja *soma* é um número racional. Temos:

$$\begin{array}{rl} & 0{,}10100100010000\ldots\ldots \quad \text{(n.º irracional)} \\ + & \underline{0{,}01011011101111\ldots\ldots} \quad \text{(n.º irracional)} \\ & 0{,}11111111111111\ldots\ldots \quad \text{(n.º racional)} \end{array}$$

5. O número $3 + \sqrt{2}$ é racional ou irracional?

   É *irracional*, pois:

$$\begin{array}{rl} 3 = & 3{,}00000\ldots\ldots \\ \sqrt{2} = & \underline{1{,}41421\ldots\ldots} \\ 3 + \sqrt{2} = & 4{,}41421\ldots\ldots \end{array}$$

6. $\pi = 3{,}1416$ é uma sentença verdadeira ou falsa?

   É *falsa*, pois π é um número irracional e 3,1416 é racional.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 4

1. Escreva *V* ao lado das sentenças verdadeiras e *F* ao lado das falsas (**Q** representa o conjunto dos números racionais).

   1.ª) $2{,}3333\ldots \in \mathbf{Q}$
   2.ª) $2{,}3333\ldots \notin \mathbf{Q}$
   3.ª) $2{,}313113111\ldots \notin \mathbf{Q}$
   4.ª) $2{,}313113111\ldots \in \mathbf{Q}$
   5.ª) $\sqrt{5} \in \mathbf{Q}$
   6.ª) $\sqrt{2}$ é um número irracional
   7.ª) $\sqrt{2}$ é um número racional
   8.ª) 0,32 é um número irracional
   9.ª) 0,3211111111... é um número racional
   10.ª) 10,0 é um número irracional

2. Empregando *numeral decimal*, represente os seguintes números irracionais, escrevendo pelo menos duas casas decimais:

   $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{272}$, $\sqrt{2\,000}$

3. A *fórmula* que dá o comprimento de uma circunferência de raio r é:

$$C = 2 \times \pi \times r$$

   Se r fôr um n.º inteiro, C representará um número racional ou irracional? Por quê?

4. Justifique, com exemplos, as seguintes afirmações:

   1.ª) o dôbro de um número irracional é um número irracional;
   2.ª) a têrça parte de um número irracional é um número irracional;
   3.ª) se a soma de dois números é um número racional e um dêles é irracional, então o segundo número é irracional.

5. Dê exemplo de dois números irracionais:

   1.º) cuja soma seja um número racional;
   2.º) cuja diferença seja um número racional.

6. Adicione o número irracional: 0,101001000.... ao número racional: 0,333333333....
Ao resultado adicione o número racional: 0,12121212...

O resultado obtido é um número racional ou irracional? Por quê?

7. 1.º) $(3 + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ é *V* ou *F*? 2.º) $\frac{1}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ é *V* ou *F*?

3.º) $(2 + \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$ é *V* ou *F*? 4.º) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$ é *V* ou *F*?

8. Coloque no lugar de ? o símbolo da relação de igualdade ou das relações de desigualdade, a fim de tornar *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) 1,415....? 1,414.... 2.ª) 3,1234567...? 8,1234567....

3.ª) 1,101001000...? 1,1001000... 4.ª) 0,020020002...? 0,020020002...

9. *Idem*: 1.ª) $\sqrt{5}$? $\sqrt{3}$ 2.ª) $\sqrt{2}$? $\sqrt{3}$ 3.ª) $3\sqrt{2}$? $2\sqrt{2}$

4.ª) $\sqrt{7}$? $\sqrt{7}$ 5.ª) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$? $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 6.ª) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$? $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

10. *Idem*, nas seguintes duplas-desigualdades:

1,7 ? $\sqrt{3}$? 1,8	3 ? π ? 4
1,73 ? $\sqrt{3}$? 1,74	3,1 ? π ? 3,2
1,732 ? $\sqrt{3}$? 1,733	3,14 ? π ? 3,15

4. *Números reais*

Até agora você conheceu dois importantes conjuntos de números: o conjunto dos *números racionais* e o conjunto dos *números irracionais*. A *reunião* dêsses dois conjuntos constitui o conjunto dos NÚMEROS REAIS. Logo:

$$\{\text{n.}^{\text{os}} \text{ reais}\} = \{\text{n.}^{\text{os}} \text{ racionais}\} \cup \{\text{n.}^{\text{os}} \text{ irracionais}\}$$

e você irá entender por *número real* qualquer número *racional* ou *irracional*.

Exemplos de números *reais*:

2 (por ser racional) $\sqrt{2}$ (por ser irracional)

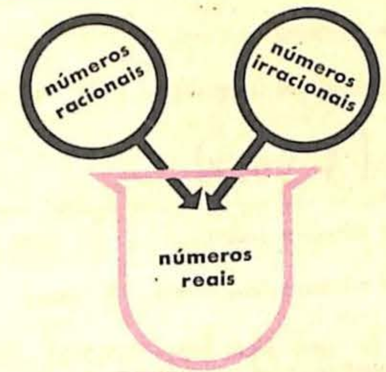
2,010010001.... (por ser irracional) 0,333333.... (por ser racional)

$\frac{1}{9}$ (por ser racional) $\sqrt[3]{4}$ (por ser irracional)

π (por ser irracional) $3\frac{1}{5}$ (por ser racional)

LEMBRETE AMIGO

Todo número que você estudou e com que trabalhou até agora é um **número real**.



OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Até aqui foram apresentados os números reais absolutos. A consideração de números racionais e de números irracionais cujos numerais (decimais ou não) se apresentarem com o sinal qualificativo $^+$ (positivo) ou $^-$ (negativo) enseja o aparecimento do conjunto dos *números reais relativos*, cujas propriedades estruturais serão estudadas posteriormente.

Assim, os números racionais relativos e os números irracionais relativos são chamados de números *reais relativos* ou, mais simplesmente, de *números reais*. O *Conjunto dos números reais* (entendendo-se, agora, números reais relativos) será indicado por: $\mathbb{R}$

Então: $^-3{,}2 \in \mathbb{R}$ $^+0{,}010010001\ldots \in \mathbb{R}$ $0 \in \mathbb{R}$ (não se escreve $^+0$ ou $^-0$)

$^+\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ $\frac{-2}{5} \in \mathbb{R}$ $^-12 \in \mathbb{R}$

$^-4\,126 \in \mathbb{R}$ $^-2{,}456666\ldots \in \mathbb{R}$ $\pi \in \mathbb{R}$

Agora podem ser simplificadas as notações que indicavam o conjunto quando incluía números relativos, dispensando-se o *r* na representação. Para o conjunto dos números inteiros relativos usaremos, de agora em diante, a notação de *Bourbaki*: Z. Assim, temos:

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros (subentende-se relativos)
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais (subentende-se relativos)
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais (subentende-se relativos)

onde $$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

NOTA: O conjunto $\mathbb{R}^*$ (lê-se: "$\mathbb{R}$ estrêla") representa o conjunto $\mathbb{R}$ privado do 0, isto é:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 5

1. Dado o conjunto: $\left\{0{,}3;\ \sqrt{2};\ -1{,}222\ldots;\ 8;\ -0{,}717717771\ldots;\ \frac{1}{5}\right\}$ cujos elementos são números reais, destaque o subconjunto de números racionais e o subconjunto de números irracionais.

   Temos: subconjunto de números racionais: $\left\{0{,}3;\ -1{,}222\ldots;\ 8;\ \frac{1}{5}\right\}$

   subconjunto de números irracionais: $\{\sqrt{2};\ -0{,}717717771\ldots\}$

2. *Idem*, com o conjunto: $\left\{-\frac{2}{3};\ 0{,}99;\ 0\right\}$

   Temos: subconjunto de números racionais: $\left\{-\frac{2}{3};\ 0{,}99;\ 0\right\}$

   subconjunto de números irracionais: $\varnothing$ (vazio)

3. No conjunto de números reais: $\{6{,}12;\ -3;\ -4{,}515151\ldots;\ 1;\ -\pi\}$ destaque o subconjunto de números positivos e o subconjunto de números negativos.

   Temos: subconjunto de números positivos: $\{6{,}12;\ 1\}$

   subconjunto de números negativos: $\{-3;\ -4{,}515151\ldots;\ -\pi\}$

4. Diga quais, dos seguintes numerais, não representam números reais:

   1.º) $\frac{2}{3}$ 2.º) $\frac{0}{5}$ 3.º) $\frac{-5}{0}$ 4.º) $-1{,}888\ldots$ 5.º) $\frac{3}{0}$

   Não representam números reais os numerais: $\frac{-5}{0}$ e $\frac{3}{0}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 6

1. Dado o conjunto: $\left\{4;\ -3\sqrt{2};\ \frac{-1}{7};\ 0{,}1111\ldots;\ -6{,}212112111\ldots;\ 0\right\}$ destaque o subconjunto de números racionais e o subconjunto de números irracionais.

2. *Idem*, com o conjunto: $\{\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt[3]{5}\}$

3. *Idem*, com o conjunto: $\{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 0{,}010010001\ldots\}$

4. No conjunto de números reais: $\{2{,}8111\ldots;\ -\sqrt{11};\ 0;\ 13{,}0\}$ destaque o subconjunto de números positivos e o subconjunto de números negativos.

5. Diga quais, dos seguintes numerais, não representam números reais:

   1.º) $0{,}00001$ 2.º) $\frac{0}{0}$ 3.º) $-\sqrt{5}$ 4.º) $2\times\pi$ 5.º) $\frac{1}{0}$

6. Escreva *V* ao lado das sentenças verdadeiras e *F* ao lado das falsas:

   1.ª) $\frac{-1}{2}\in\mathbb{R}$
   2.ª) $\frac{-1}{2}\notin\mathbb{R}$
   3.ª) $0{,}7\notin\mathbb{Q}$
   4.ª) $0{,}7\in\mathbb{Q}$
   5.ª) $0\in\mathbb{R}^*$
   6.ª) $0\notin\mathbb{R}^*$
   7.ª) $\sqrt{8}\notin\mathbb{R}$
   8.ª) $-\sqrt{8}\in\mathbb{R}$
   9.ª) $-1{,}121121112\ldots\notin\mathbb{Q}$
   10.ª) $-1{,}12112112\ldots\in\mathbb{Q}$
   11.ª) $1\,966\in\mathbb{R}$
   12.ª) $1\,966\notin\mathbb{R}$

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 7

1. (Exercício-modêlo). Determine o *conjunto-reunião* e o *conjunto-intersecção* dos seguintes conjuntos:

   $A = \left\{4{,}2;\ -3{,}222\ldots;\ \sqrt{5};\ 1\frac{2}{5}\right\}$ $B = \{\sqrt{3};\ \sqrt{5};\ -3{,}212112111\ldots;\ 0\}$

   Temos: $A\cup B = \left\{4{,}2;\ -3{,}222\ldots;\ \sqrt{5};\ 1\frac{2}{5};\ \sqrt{3};\ -3{,}212112111\ldots;\ 0\right\}$

   $A\cap B = \{\sqrt{5}\}$

2. *Idem*, com os conjuntos: $A = \{\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}\}$ $B = \{\sqrt{5},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\}$

3. *Idem*, com os conjuntos: $A = \{1;\ -3;\ \sqrt{2};\ 0{,}666\ldots\}$ $B = \{-2,\ 3,\ \sqrt{5}\}$

4. Dados os conjuntos:

   $A = \left\{-0{,}555\ldots;\ \frac{1}{4};\ \sqrt{3};\ \pi\right\}$ $B = \left\{\frac{1}{4};\ \sqrt{3};\ 1{,}010010001\ldots\right\}$

   $C = \left\{-0{,}555\ldots;\ 0;\ \frac{-1}{2}\right\}$ $D = \left\{\frac{-1}{2},\ \pi\right\}$ $E = \{-0{,}555\ldots\}$

   calcule:

   1.º) $A\cup B$ 2.º) $A\cap B$ 3.º) $A\cup C$ 4.º) $A\cap C$ 5.º) $B\cup A$
   6.º) $B\cap A$ 7.º) $B\cap C$ 8.º) $B\cap D$ 9.º) $B\cup E$ 10.º) $B\cap E$

5. Usando os conjuntos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* do exercício 4, calcule:

   1.º) $(A\cup B)\cup C$ 2.º) $(A\cup B)\cap D$ 3.º) $(A\cap B)\cap(C\cap D)$

6. (Exercício-modêlo). Determine a *relação de inclusão* existente entre os seguintes conjuntos:

   $A = \{\sqrt{5};\ \pi\}$ $B = \{1{,}212112111\ldots;\ \sqrt{5};\ 8;\ \pi\}$

   Como *todos* os elementos do conjunto *A* fazem parte do conjunto *B*, segue-se que o conjunto *A está contido* no conjunto *B* e, portanto:

   $A\subset B$

7. *Idem*, com os conjuntos: $A = \left\{-3{,}414141\ldots;\ \sqrt{3};\ \frac{1}{2};\ -\sqrt{7}\right\}$ $B = \{-\sqrt{7},\ \sqrt{3}\}$

8. Escreva V ao lado das sentenças verdadeiras e F ao lado das falsas:

1.ª) $[3;\ \sqrt{2};\ 0{,}555\ldots] \supset [3;\ \sqrt{2}]$
2.ª) $[3;\ \sqrt{2};\ 0{,}555\ldots] \subset [3;\ \sqrt{2}]$
3.ª) $[3;\ \sqrt{2};\ 0{,}555\ldots] = [3;\ \sqrt{2}]$
4.ª) $[3;\ \sqrt{2};\ 0{,}555\ldots] \neq [3;\ \sqrt{2}]$

9. Diga quais das seguintes sentenças são *verdadeiras*, lembrando que

N: conjunto dos números naturais
Z: conjunto dos números inteiros (subentende-se relativos)
Q: conjunto dos números racionais (subentende-se relativos)
IR: conjunto dos números reais (subentende-se relativos):

1.ª) $N \subset \mathbb{R}$ 3.ª) $Z \supset \mathbb{Q}$ 5.ª) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2.ª) $N \supset \mathbb{R}$ 4.ª) $Z \subset \mathbb{Q}$ 6.ª) $\mathbb{Q} \supset \mathbb{R}$

10. É *verdadeira* a sentença:

$$N \subset Z \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\ ?$$

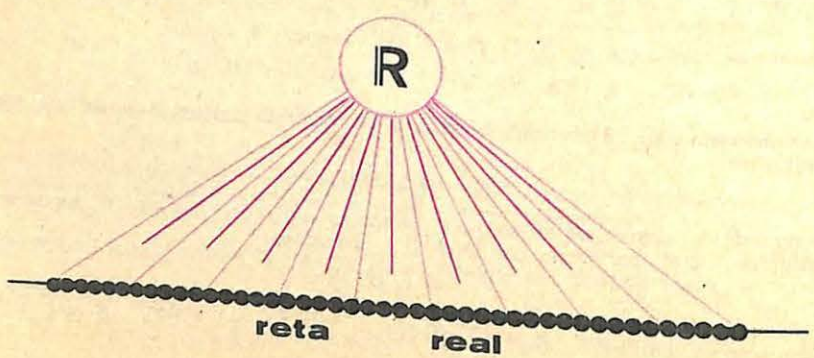
Por quê?

5. *Reta real*

O conjunto $\mathbb{R}$ é representado *geomètricamente* numa reta *numerada* sôbre a qual é fixada uma *origem* 0 e escolhida uma unidade de medida (o *cm* por exemplo). Isto porque:

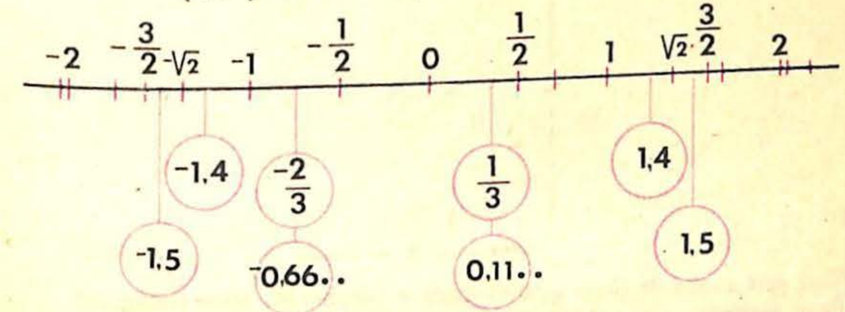
a *cada número real* corresponde *um único ponto da reta*
e
cada ponto da reta é o correspondente de *um único número real*

Em outras palavras: existe uma *correspondência biunívoca* (ou *um a um*) entre os *números reais* e os *pontos da reta*.



A *ordem* entre os números reais *reflete-se* na *ordem* entre os pontos correspondentes da reta. Assim, se um número real é menor do que um outro, então o ponto correspondente ao primeiro número está *à esquerda* do ponto correspondente ao segundo. Exemplo:

$1{,}4 < \sqrt{2}$ $\begin{cases} \text{então o ponto correspondente a } 1{,}4 \text{ está } \textit{à esquerda} \\ \text{do ponto correspondente a } \sqrt{2} \end{cases}$

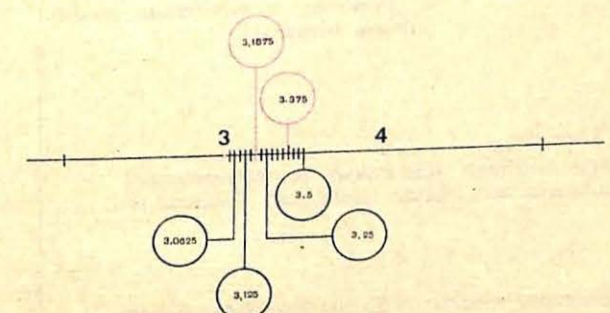


OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

O conjunto $\mathbb{R}$ é *denso*, isto é, escolhidos dois números reais *quaisquer*, *existe sempre* um número real entre êles. Se a e b estiverem representando dois números reais quaisquer, sendo $a < b$, então *existe sempre* entre êles o número real $\frac{a+b}{2}$ (que é a média aritmética entre a e b).

Assim, por exemplo, considerados os números reais: 3 e 4, existe entre êles o número real: $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$ (que é a média aritmética entre 3 e 4); depois, entre 3 e 3,5 existe o número real: $\frac{3+3{,}5}{2} = 3{,}25$ (média aritmética entre 3 e 3,5); a seguir, entre 3 e 3,25 existe o número real: $\frac{3+3{,}25}{2} = 3{,}125$ (média aritmética entre 3 e 3,25), e assim, sucessivamente, serão encontrados sempre novos números *entre* 3 e a última das médias aritméticas obtidas.

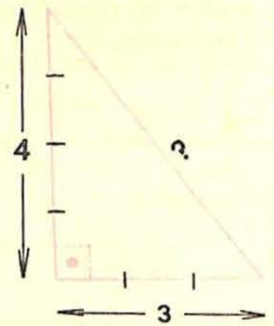
A melhor maneira de "ver" que $\mathbb{R}$ é *denso* é por meio da *reta real*:



EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 8

Você já deve ter ouvido falar no famoso *Teorema de Pitágoras*. Além de famoso êle é de muita utilidade, razão por que vai ser "explorado" agora.

Considere o *triângulo retângulo*, cujos catetos medem, por exemplo: 3cm e 4cm, isto é:



Você será capaz de dizer quanto mede a hipotenusa dêsse triângulo?

Bem, *medindo* com a régua você encontrará 5cm. Experimente.

E se você não dispusesse de régua, poderia conhecer a medida da hipotenusa? *Sim*, e é o Teorema de Pitágoras que responde: *a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.* Que quer dizer isso?

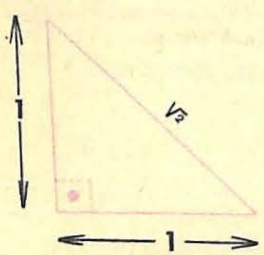
Basta quadrar as medidas dos catetos: 3^2 e 4^2 (sem escrever as unidades), somá-las: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, e o resultado obtido (25) representa o *quadrado* da medida da hipotenusa. Portanto, a hipotenusa mede: 5cm (lembre-se que 5 é a raiz quadrada de 25, isto é: $\sqrt{25} = 5$).

Agora você já pode dizer quanto mede a hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem, respectivamente: 6cm e 8cm. Acompanhe:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Como: $\sqrt{100} = 10$ temos: a hipotenusa mede 10cm.

E se os catetos do triângulo retângulo medirem 1cm cada um, qual será a medida da hipotenusa? Vale ainda o Teorema de Pitágoras:



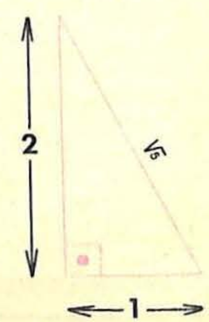
$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

e, portanto, a hipotenusa medirá: $\sqrt{2}$, que é um *número irracional*.

E se os catetos medirem: 1cm e 2cm, respectivamente? A medida da hipotenusa será obtida ainda pelo Teorema de Pitágoras:

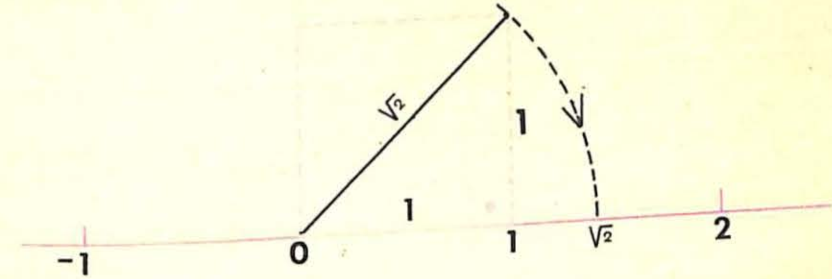
$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

e, portanto, a hipotenusa medirá: $\sqrt{5}$, que é também *número irracional*.



Com a *correspondência* estudada entre o conjunto **R** e os pontos da reta, a cada número irracional corresponde um ponto da reta. Como você determinaria, por exemplo, o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$?

Guarde bem a seguinte construção geométrica: com o centro do compasso na origem 0 e a abertura na extremidade da hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 1 (ou seja, 1cm), determina-se o ponto de intersecção do arco de circunferência traçado com a reta. O ponto encontrado é o *ponto correspondente* a $\sqrt{2}$.



TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 9

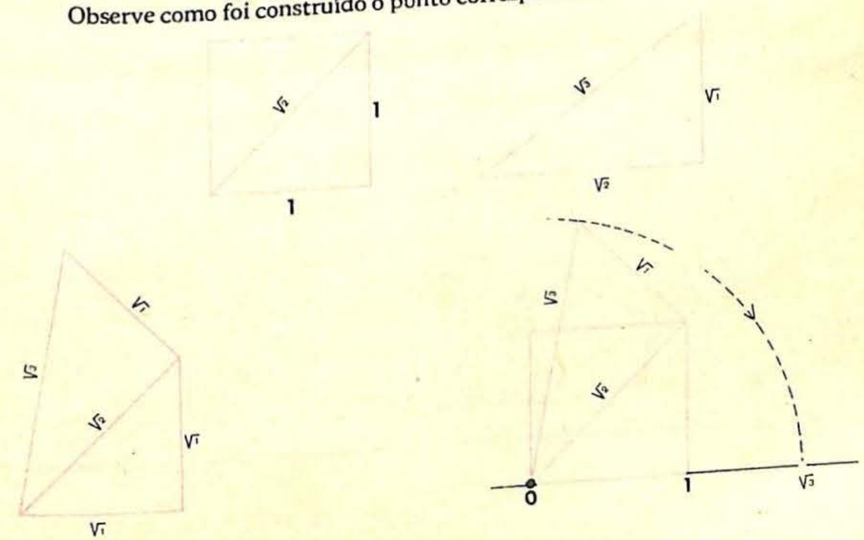
1. Represente na *reta real* (sendo de 2cm a unidade escolhida, a partir de uma origem 0 fixada) os *pontos correspondentes* aos seguintes números *reais*:

   1.º) $-0{,}333\ldots$ 3.º) $-\sqrt{2}$

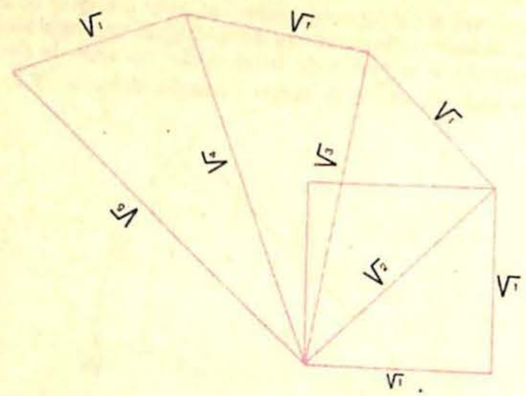
   2.º) $\frac{22}{10}$ 4.º) 1,4

2. Sabendo que no triângulo retângulo, cujos catetos medem (tomando como unidade o cm), respectivamente: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{1}$ (o mesmo que 1), a hipotenusa mede $\sqrt{3}$ (lembre-se do Teorema de Pitágoras), construa o ponto correspondente ao número irracional $-\sqrt{3}$

   Observe como foi construído o ponto correspondente a $\sqrt{3}$



3. Observando a construção da $\sqrt{5}$, determine na reta real o ponto correspondente ao número irracional $-\sqrt{5}$.



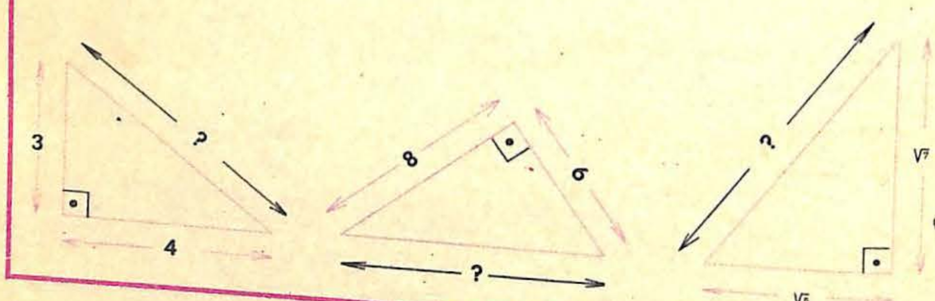
4. Se a, b e c são números reais e A, B e C os respectivos pontos correspondentes na reta real, e se $a < c < b$, qual das duas sentenças é *verdadeira*:

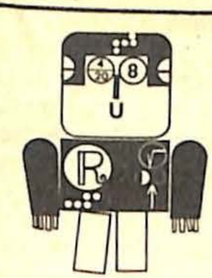
1.ª) o ponto B está à esquerda do ponto A

2.ª) o ponto B está à direita do ponto A?

Ainda Pitágoras . . .

Quanto mede (em cm) a hipotenusa dos seguintes triângulos retângulos?





2.ª Parte: - operações com números reais propriedades estruturais do conjunto R

6. *Operações no conjunto* $\mathbb{R}$

Operações fundamentais. No conjunto $\mathbb{R}$ são *sempre possíveis* as operações:

adição, subtração, multiplicação, divisão (com o divisor $\neq 0$)

Portanto, $\mathbb{R}$ é *fechado* para essas operações, cujas técnicas de cálculo para os números racionais você já conhece. Algumas técnicas para operar com os números irracionais serão conhecidas por meio de exemplos.

7. Novidade: *Corpo dos números reais*

As propriedades estruturais das quatro operações conhecidas em $\mathbb{R}$ permitem "reduzi-las" a *duas* fundamentais:

adição e *multiplicação*

De fato, *quaisquer* que sejam os números reais(*) a e b, *existe* sempre

$$\begin{cases} \text{uma } \textit{única} \text{ SOMA: } a + b \\ \text{um } \textit{único} \text{ PRODUTO: } a \cdot b \end{cases}$$

com as seguintes *propriedades:*

ADIÇÃO

(A) Associativa: para *quaisquer* números reais a, b e c:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(*) Subentendem-se sempre números reais *relativos*.

(N) ELEMENTO NEUTRO: existe o número real 0, tal que:

$$a + 0 = a \text{ para } qualquer \text{ número real } a$$

(I) ELEMENTO INVERSO (aditivo): para *qualquer* número real a, existe um único número real $(-a)$, denominado *oposto* de a, tal que:

$$a + (-a) = 0$$

(C) COMUTATIVA: para *quaisquer* números reais a e b:

$$a + b = b + a$$

NOTA: Estas propriedades (ANIC) dão ao conjunto $\mathbb{R}$, com relação à operação *adição*, uma **estrutura de Grupo Comutativo.**

MULTIPLICAÇÃO

(A) ASSOCIATIVA: para *quaisquer* números reais a, b e c:

$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$$

(N) ELEMENTO NEUTRO: existe o número real 1, tal que:

$$a \,.\, 1 = a \text{ para } qualquer \text{ número real } a$$

(I) ELEMENTO INVERSO (multiplicativo): para *qualquer* número real a, se $a \neq 0$, existe um único número real $\frac{1}{a}$, denominado *inverso* de a, tal que:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

(C) COMUTATIVA: para *quaisquer* números reais a e b:

$$a \,.\, b = b \,.\, a$$

NOTA: Estas propriedades (ANIC) dão ao conjunto $\mathbb{R}^*$ (que é o conjunto $\mathbb{R}$ privado do 0), com relação à operação *multiplicação*, uma **estrutura de Grupo Comutativo.**

Relacionando a *multiplicação* com a *adição*, em $\mathbb{R}$, vale ainda a seguinte propriedade:

(D) DISTRIBUTIVA: para *quaisquer* números reais a, b e c:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$

Estas nove propriedades (ANIC para a adição; ANIC para a multiplicação e D da multiplicação em relação à adição) dão ao conjunto $\mathbb{R}$, com relação às operações *adição* e *multiplicação*, uma **estrutura de "corpo"**, que é das mais importantes em Matemática.

É fácil, agora, concluir que no *corpo* dos números reais $\mathbb{R}$:

1.º) a *subtração* de a e b é entendida como a *adição* de a com o *oposto* de b (que sempre existe!), ou seja:

$$a - b = a + (-b)$$

2.º) a *divisão* de a por $b \neq 0$ é entendida como a *multiplicação* de a pelo *inverso* de b (que, por ser $\neq 0$, sempre existe!), isto é:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Além disso, no *corpo dos números reais* vale a *propriedade de anulamento do produto*, isto é:

$$\text{se } \ a \,.\, b = 0 \ \text{ então } \ a = 0 \ \text{ ou } \ b = 0$$

A *ordem* em $\mathbb{R}$ é definida da seguinte maneira:

a é *maior* do que b se, e sòmente se, existir um número real positivo c, tal que: $a = b + c$.

Logo: $a > b \iff a = b + c \quad (c > 0)$

Se $\quad a > b$, diz-se então que $b < a$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 10

Efetue as seguintes operações no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$):

Adicionar

1.ª) 3,2 (n.º rac.) com $^{-}4$ (n.º rac.).
Temos: $3{,}2 + {}^{-}4 = {}^{-}0{,}8$ (n.º rac.)

2.ª) 0,010010001.... (n.º irrac.) com 2,212212221.... (n.º irrac.).
Temos: $0{,}010010001\ldots + 2{,}212212221\ldots = 2{,}222222222\ldots$ (n.º rac.).

3.ª) $\sqrt{2}$ (n.º irrac.) com 5 (n.º rac.).
Temos: $\sqrt{2} + 5$ (n.º irrac.)

NOTA: O resultado (*soma*) é o número real (irrac.) indicado por: $\sqrt{2} + 5$.

4.ª) $\frac{-2}{3}$ (n.º rac.) com $\sqrt[3]{5}$ (n.º irrac.).

Temos: $\frac{-2}{3} + \sqrt[3]{5}$ (n.º irrac.)

OBSERVAÇÃO: A *subtração* entre dois números é entendida como a *adição* do primeiro número com o *oposto* do segundo.

Assim, por exemplo, a subtração entre $\sqrt[3]{5}$ e $\frac{-2}{3}$ é conduzida da seguinte maneira:

$$\sqrt[3]{5} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \sqrt[3]{5} + \left(\frac{+2}{3}\right) = \sqrt[3]{5} + \frac{2}{3} \quad \text{(n.º irrac.)}$$

Multiplicar

1.ª) 0,555.... (n.º rac.) por $\frac{-9}{5}$ (n.º rac.).

Temos: $0{,}555\ldots \times \frac{-9}{5} = \frac{5}{9} \times \frac{-9}{5} = -1$ (n.º rac.)

2.ª) $\sqrt{5}$ (n.º irrac.) por 100 (n.º rac.).
Temos: $\sqrt{5} \times 100 = 100 \cdot \sqrt{5}$ (n.º irrac.)

OBSERVAÇÃO: Se fôsse para *dividir* $\sqrt{5}$ por 100, bastaria *multiplicar* $\sqrt{5}$ pelo *inverso* de 100, isto é:

$$\sqrt{5} : 100 = \sqrt{5} \times \frac{1}{100} = \frac{\sqrt{5}}{100} \quad \text{(n.º irrac.)}$$

3.ª) $\sqrt{2}$ (n.º irrac.) por $\sqrt{3}$ (n.º irrac.).
Temos: $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ (n.º irrac.)

NOTA: O resultado (*produto*) é o n.º real (irrac.): $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$; com o conhecimento de novas técnicas êsse resultado pode ser reduzido a um numeral mais simples.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 11

Efetue em $\mathbb{R}$ as seguintes operações:

Adicionar

1.ª) 0,333.... com $\frac{-1}{9}$

2.ª) 2,22222.... com 0,010010001....

3.ª) $\sqrt{3}$ com $\sqrt{2}$

4.ª) $-\sqrt{3}$ com $\sqrt{2}$

5.ª) $-\sqrt{3}$ com $-\sqrt{2}$

Subtrair

6.ª) $\frac{1}{9}$ de 0,333....

7.ª) $-\sqrt{2}$ de $\sqrt{3}$

8.ª) 0,010010001... de 2,222222222...

Multiplicar

9.ª) $\frac{2}{9}$ por $\frac{-2}{9}$

10.ª) 0,111... por $^{-}0{,}111\ldots$ (... empregue as geratrizes...)

11.ª) 2,3444... por $\sqrt{2}$

12.ª) $\sqrt[3]{5}$ por $\frac{-1}{2}$

Dividir

13.ª) 2,12345678910111.... por 1

14.ª) $\sqrt{5}$ por $-\sqrt{5}$

15.ª) $\sqrt{2}$ por 0,001

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO NO CONJUNTO $\mathbb{R}$

8. *Ampliações da idéia de potenciação; prática com expoente negativo*

No conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais (lembre-se de que estão subentendidos os números relativos) foi definida a potência tendo por *base* um número *racional relativo* e por *expoente* um número *inteiro negativo*. Assim, por exemplo:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$$

De um modo geral: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ (sendo $a \neq 0$ e n natural)

O *expoente negativo* enseja novas técnicas para o desenvolvimento do cálculo. De fato:

$$\text{se } 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad \text{então } 2 \times 3^{-1} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo: $\frac{2}{3} = 2 \times 3^{-1}$ e, portanto: $\boxed{\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}}$ $(b \neq 0)$

Também: se $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$ então $5 \times 3^{-2} = 5 \times \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{5}{3^2}$

Logo: $\dfrac{5}{3^2} = 5 \times 3^{-2}$ e, portanto: $\boxed{\dfrac{a}{b^n} = a \cdot b^{-n}}$ $(b \neq 0)$

9. *Nova ampliação: potências indicadas de base real e expoente racional*

Que são:

$$2^{\frac{3}{4}}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{-1}{2}}, \quad (\sqrt{3})^2 \ ?$$

São exemplos de *potências indicadas* que possuem por *base* um número real $\left(2, \frac{1}{5} \text{ e } \sqrt{3}\right)$ e por *expoente* um número racional relativo $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2} \text{ e } 2\right)$. É mais uma *ampliação* justificada pela seguinte afirmação: *no conjunto* $\mathbb{R}$ *é sempre possível, para cada número racional relativo* r, *construir um único número real* a^r, *onde a base* a *é um número real não-negativo*(*).

O número real a^r é denominado *potência r-ésima* de a e são verificadas as seguintes *propriedades*, extensões das que já foram estabelecidas no caso de expoente inteiro:

$$P1: \ a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$P2: \ a^r : a^s = a^{r-s} \quad (a \neq 0)$$

$$P3: \ (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$P4: \ (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

LEMBRETE AMIGO

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$	$a^1 = a$
$1^r = 1$	$0^r = 0 \ (r \neq 0)$

(*) $r > 0$, se $a = 0$.

1. Aplicando *P*1, *P*2, *P*3 e *P*4, efetue:

*P*1: 1.º) $2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{19}{20}}$

2.º) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^1 \times (\sqrt{3})^1 = (\sqrt{3})^2$

3.º) $b^5 \times b^{-2} = b^{5+(-2)} = b^3$

4.º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$

*P*2: 1.º) $x^p : x^q = x^{p-q} \ (x \neq 0)$

2.º) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 : \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{2-(-1)} = \left(\frac{2}{7}\right)^3$

3.º) $(-3)^3 : (-3)^{\frac{1}{2}} = (-3)^{3-\frac{1}{2}} = (-3)^{\frac{5}{2}}$

4.º) $(\sqrt[3]{2})^2 : \sqrt[3]{2} = (\sqrt[3]{2})^{2-1} = \sqrt[3]{2}$

*P*3: 1.º) $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

2.º) $(a \times b)^p = a^p \times b^p$

3.º) $(3 \times \sqrt{5})^2 = 3^2 \times (\sqrt{5})^2$

4.º) $\left(\frac{1}{2} \times m\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times m^{-1}$

*P*4: 1.º) $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

2.º) $\left(5^{\frac{-2}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{-6}{3}} = 5^{-2}$

3.º) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2 \times -1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

4.º) $(a^{-1})^{-1} = a^1 = a \quad (a \neq 0)$

2. Combinando as propriedades *P*1, *P*2, *P*3 e *P*4, efetue:

1.º) $(5^2 \times \sqrt{2})^3 = 5^6 \times (\sqrt{2})^3$

2.º) $[((-3)^2)^{-1}]^{\frac{-1}{2}} = [(9)^{-1}]^{\frac{-1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

3.º) $(2a^3b)^4 = 2^4 \cdot a^{12} \cdot b^4$

4.º) $\left[2 \times (2)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} = 2^{-3} \times 2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^0 \times \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 1 \times \dfrac{1}{\frac{1}{2^6}} = 1 \times 2^6 = 2^6$

3. Efetue:

$$a \times a \times a$$

Temos: $a \times a \times a = (a \times a) \times a$ (prop. *associativa* da multiplicação)
$= a^2 \times a$ (prop. *P*1)
$= a^3$ (prop. *P*1)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 13

1. Usando expoente negativo para exprimir o produto, torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

   1.ª) $\frac{2}{5} = \ldots$ $\left(\frac{2}{5} = 2 \times 5^{-1} \text{ — modêlo}\right)$

   2.ª) $\frac{3}{4} = \ldots$

   3.ª) $9 = \ldots$ $(9 = 9 \times 1^{-1} \text{ — modêlo})$

   4.ª) $7 = \ldots$

   5.ª) $\frac{2}{9^2} = \ldots$

   6.ª) $\frac{m}{n} = \ldots$ $(n \neq 0)$

2. Vice-versa:

   1.ª) $3 \times 4^{-1} = \ldots$ $\left(3 \times 4^{-1} = \frac{3}{4} \text{ — modêlo}\right)$

   2.ª) $5 \times 3^{-1} = \ldots$

   3.ª) $2 \times 3^{-2} = \ldots$

   4.ª) $a \cdot b^{-1} = \ldots$ $(b \neq 0)$

   5.ª) $8 \times 1^{-1} = \ldots$

   6.ª) $p \cdot q^{-2} = \ldots$ $(q \neq 0)$

3. Aplicando as propriedades $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$, efetue:

   1.ª) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^4$

   2.ª) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$

   3.ª) $(\sqrt{5})^3 \times (\sqrt{5})^2$

   4.ª) $a^m \times a^{-2}$ $(a \neq 0)$

   5.ª) $b^m : b^{-1}$ $(b \neq 0)$

   6.ª) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

   7.ª) $1^{\frac{8}{3}} : 1^{-\frac{25}{4}}$

   8.ª) $(3 \times 5)^4$

   9.ª) $\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$

   10.ª) $(m \times n)^q$

   11.ª) $(3^2)^3$

   12.ª) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

   13.ª) $[(\sqrt[4]{2})^2]^2$

   14.ª) $\left(5^2 \times \frac{1}{2}\right)^{-1}$

   15.ª) $(b^{-2})^{-1}$ $(b \neq 0)$

   16.ª) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2$

   17.ª) $(3x^2y)^2$

   18.ª) $\left(\frac{-1}{2} ab^3c^2\right)^3$

   19.ª) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 3^{-1}\right]^2$

   20.ª) $(a^{-2} \times a^{-4})^{-3} : a^{18}$ $(a \neq 0)$

4. Efetue, usando a propriedade *associativa* da multiplicação e a $P1$:

   1.º) $a \times a \times a \times a$

   2.º) $a^2 \times a \times a \times a$

5. Com a técnica que você já deve ter descoberto..., efetue:

   1.º) $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

   2.º) $a^{17} \times a^{36} \times a^{47}$

   3.º) $b^{-15} \times b^{-10} \times b^{-25}$

10. *Radiciação no conjunto* $\mathbb{R}$

Que é a *raiz quadrada* de um número no conjunto $\mathbb{R}$? A resposta é encontrada resolvendo-se a seguinte equação:

$$\boxed{x^2 = 9}$$

no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$.

Fácil é concluir que o Conjunto-Verdade dessa equação é constituído dos elementos: $^+3$ e $^-3$, pois:

$$(^+3)^2 = 9 \quad \text{e} \quad (^-3)^2 = 9$$

Logo: $V = \{^+3, ^-3\}$ e as *soluções* são $^+3$ e $^-3$.

O importante nessa resposta é você observar que *basta conhecer o número positivo* $^+3$, que satisfaz à equação: $x^2 = 9$, para ficar conhecendo imediatamente o Conjunto-Verdade, cujos elementos serão o número *positivo* $^+3$ e o seu *oposto* -3.

A existência de um *único número positivo*, cujo quadrado é 9, permite que se continue chamando-o, em $\mathbb{R}$, de *raiz quadrada de nove*, como já se fazia desde a 1.ª Série Ginasial. Portanto, por *definição*(*):

$$\sqrt{9} = 3 \text{ (o mesmo que o número positivo } ^+3)$$

O *número negativo*, cujo quadrado é 9, é representado pelos numerais:

$$^-3 \quad \text{ou} \quad -\sqrt{9}$$

Da mesma forma, o Conjunto-Verdade da equação:

$$x^2 = 30, \quad U = \mathbb{R}$$

é $V = \{^+\sqrt{30}, -\sqrt{30}\}$ e, portanto, as soluções da equação são: $^+\sqrt{30}, -\sqrt{30}$, enquanto que a *raiz quadrada de 30 é sòmente o número positivo* $^+\sqrt{30}$.

OBSERVAÇÃO: É comum escreverem-se as soluções da equação:

$$x^2 = 9$$

na forma "abreviada": $\pm\sqrt{9} = \pm 3$, querendo-se com isso indicar as soluções $^+3$ e $^-3$. Mas guarde bem: a $\sqrt{9}$ é sòmente o número positivo $^+3$, a fim de se evitar, entre outros

(*) Considerar a raiz quadrada de um n.º positivo apenas como *um n.º positivo*, só trará vantagens em todos os estudos da Matemática.

fatos, a ambigüidade que surgiria caso se considerasse também $^-3$ como $\sqrt{9}$, pois se $\sqrt{9} = {^+3}$ e $\sqrt{9} = {^-3}$, então $^+3 = {^-3}$, o que é *falso*! Logo:

1) $^+3$ e $^-3$ são números cujo quadrado é 9;

2) sòmente o número positivo $^+3$ é a raiz quadrada de 9, isto é: $\sqrt{9} = {^+3}$;

3) são *verdadeiras* as sentenças:

$$\sqrt{9} = {^+3}, \ -\sqrt{9} = {^-3} \ \text{e} \ \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

e *falsa*: $\sqrt{9} = {^-3}$.

Que é a *raiz cúbica* de um número do conjunto $\mathbb{R}$?

A resposta está na resolução de uma equação do tipo:

$$x^3 = 8,$$

onde o *único* número real do Conjunto-Universo $\mathbb{R}$ que a satisfaz é 2, pois:

$$2^3 = 8$$

Logo: $V = \{2\} \Longrightarrow$ solução: 2

NOTA: Observe que agora o número negativo: $^-2$, *não é solução* da equação: $x^3 = 8$, porque $(^-2)^3 = {^-8} \neq 8$ e, sim, solução da equação: $x^3 = {^-8}$.

De forma análoga poderiam ser formuladas perguntas relativas à raiz *quarta*, raiz *quinta*, raiz *sexta*, ..., raiz *n-ésima* de um número no conjunto $\mathbb{R}$.

Que é a *raiz n-ésima* de um número real positivo no conjunto $\mathbb{R}$?

Seja a equação:

$$\boxed{x^n = b} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} n & \text{é número inteiro positivo} \\ b & \text{é número real positivo} \\ x & \text{é variável no conjunto } \mathbb{R} \end{cases}$$

então:

se n é *par*, existem *dois números reais*: $^+\sqrt[n]{b}$ e $-\sqrt[n]{b}$, *opostos* um do outro, denominados *raiz n-ésima de b*, que são *soluções* da equação proposta;

se n é *ímpar*, existe um *único* número real positivo: $^+\sqrt[n]{b}$, denominado *raiz n-ésima de b*, que é *solução* da equação proposta.

NOTA: O Conjunto-Verdade da equação: $x^2 = 0$, é $V = \{0\}$ e, portanto, a *solução* é 0.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 14

Resolva as seguintes equações no Conjunto $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{x^2 = 16}$

Temos: o expoente é *par* (2), portanto existem *dois* números reais:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{e} \quad -\sqrt{16} = {^-4}$$

que são *soluções* da equação. Logo:

$$V = \{4, {^-4}\}$$

2.ª) $\boxed{y^3 = 64}$

Temos: o expoente é *ímpar* (3), portanto existe um *único* número real:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad (\text{porque } 4^3 = 64)$$

que é *solução* da equação. Logo:

$$V = \{4\}$$

3.ª) $\boxed{z^4 = 21}$

Temos: o expoente é *par* (4), portanto existem *dois* números reais:

$$^+\sqrt[4]{21} \quad \text{e} \quad -\sqrt[4]{21} \quad (\text{as extrações não são exatas})$$

que são *soluções* da equação. Logo:

$$V = \{^+\sqrt[4]{21}, -\sqrt[4]{21}\}$$

4.ª) $\boxed{x^5 = 1}$

O expoente é *ímpar* (5), portanto existe um *único* número real:

$$\sqrt[5]{1} = 1 \quad (\text{porque } 1^5 = 1)$$

que é *solução* da equação. Logo:

$$V = \{1\}$$

LEMBRETE AMIGO

Enquanto $\sqrt{9} = {^+3}$ (a *raiz quadrada* de um número é um *número positivo*), existem dois números: um positivo ($^+3$) e outro negativo ($^-3$), cujo quadrado é 9.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 15

1. Resolva as seguintes equações no conjunto $\mathbb{R}$:

   1.ª) $x^2 = 15$ (expoente *par*; soluções: $+\sqrt{15}$, $-\sqrt{15}$) (Exercício-modêlo)

   2.ª) $y^8 = 1$ (expoente *par*; soluções: $^-1$, $^+1$) (Exercício-modêlo)

   3.ª) $x^3 = \frac{1}{27}$ $\left(\text{expoente } \textit{ímpar}\text{; solução: } \frac{1}{3}\right)$ (Exercício-modêlo)

   4.ª) $z^2 = 6$ 5.ª) $y^5 = 1$ 6.ª) $x^4 = 16$

   7.ª) $x^2 - 4 = 0$ (o mesmo que a equação: $x^2 = 4$; por quê?)

   8.ª) $2y^3 - 2 = 0$ (o mesmo que a equação: $y^3 = 1$; por quê?)

   9.ª) $3z^2 - 24 = 0$ 10.ª) $x^2 = 0$

2. Quais as sentenças *verdadeiras* e quais as sentenças *falsas*?

   1.ª) $\sqrt{9} = {}^+3$ 5.ª) $\sqrt{30} = -\sqrt{30}$

   2.ª) $\sqrt{9} = {}^-3$ 6.ª) $\sqrt{30} = +\sqrt{30}$

   3.ª) $\pm\sqrt{9} = \pm 3$ 7.ª) $\pm\sqrt{30} = \pm\sqrt{30}$

   4.ª) $-\sqrt{9} = {}^-3$ 8.ª) $\sqrt{30} \sim 5{,}47$ (aprox. centesimal)

11. Novidade: *Outro numeral para indicar a raiz n-ésima de um número*

Atente para a seguinte afirmação:

Se em $\sqrt[n]{a}$ o número real a não é negativo e n é um número inteiro positivo $\geqslant 2$, então *sempre existe* o número real b tal que:

$$b^n = a$$

Por quê? Porque basta tomar $b = a^{\frac{1}{n}}$ e você obterá:

$$b^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Então, já se pode escrever:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{pois} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{porque} \quad \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

Também: $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ porque $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^{\frac{3 \times 4}{4}} = 2^3$.

Logo:

$$\boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

(p inteiro positivo)
(q inteiro positivo $\geqslant 2$)

Dêsse modo os *radicais* podem ser representados por um nôvo *numeral* que é uma *potência indicada*, cuja base é um número real não-negativo (a) e de expoente fracionário $\left(\frac{p}{q}\right)$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}; \quad \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

Como aplicação dêsse resultado você pode conduzir o cálculo da *multiplicação de radicais de mesmo radicando*, da seguinte maneira:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$$

$$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{3^7}$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$$

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 16

1. Preencha as lacunas, a fim de tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) $\sqrt[4]{2^3} = \ldots$ $\left(\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}\right)$ (Modêlo) 7.ª) $3^{\frac{2}{5}} = \ldots$ $\left(3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}\right)$ (Modêlo)

   2.ª) $\sqrt[3]{5^3} = \ldots$ 8.ª) $4^{\frac{1}{2}} = \ldots$

   3.ª) $\sqrt{36} = \ldots$ 9.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \ldots$

   4.ª) $\sqrt{1} = \ldots$ 10.ª) $25^{\frac{1}{2}} = \ldots$

   5.ª) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \ldots$ 11.ª) $9^{\frac{2}{3}} = \ldots$

   6.ª) $\sqrt[n]{a^m} = \ldots$ (m int. positivo; n int. positivo $\geqslant 2$) 12.ª) $a^{\frac{r}{s}} = \ldots$ (r int. positivo; s int. positivo $\geqslant 2$)

2. Efetue as seguintes multiplicações de radicais de mesmo radicando, empregando no *cálculo* potências indicadas de expoente fracionário:

1.ª) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{4}$ $\left(4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 4^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{4^8}\right)$ (Modêlo)

2.ª) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5}$ 3.ª) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 4.ª) $\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt{2^2}$

5.ª) $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ (a, positivo) 7.ª) $\sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{b}$ (b, positivo)

6.ª) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$ 8.ª) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt[4]{a^2}$ (a, positivo)

12. *Restrições da radiciação no conjunto* $\mathbb{R}$; *necessidade da criação de novos números*

Que é a *raiz quadrada* de um *número negativo?*

Que é, por exemplo: $\sqrt{-4}$?

É possível adiantar que *não* se trata de número real, pois *não existe* número racional ou número irracional que elevado ao *quadrado* dê como resultado o número *negativo* $^-4$. Se você quisesse "experimentar", por exemplo, o resultado $^+2$ ou $^-2$, verificaria que não é solução, pois:

$$(^+2)^2 = 4 \quad \text{e} \quad (^-2)^2 = 4$$

Logo, $\sqrt{-4}$ *não representa número real*, isto é: $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Outrossim, indicações como:

$$\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}, \ldots, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[4]{-2}, \sqrt[4]{-3}, \ldots, \sqrt[6]{-1}, \sqrt[6]{-2}, \sqrt[6]{-3}, \ldots$$

e de um modo geral raízes expressas por radicais de **índice par** e radicando negativo não *representam números reais*. Tais numerais indicam *outra espécie* de números — os chamados NÚMEROS IMAGINÁRIOS — que serão estudados no Curso Colegial.

LEMBRETE AMIGO

O conhecimento dos *números reais* (conjunto $\mathbb{R}$) e de suas *propriedades estruturais* em relação às *operações adição e multiplicação* já lhe proporcionou uma boa visão da Matemática. Quando você conhecer outras espécies de números — os IMAGINÁRIOS, por exemplo, que pertencem a um conjunto mais amplo (conjunto $\mathbb{C}$ dos *números complexos*) — essa visão será ampliada consideràvelmente.

Você já sabe que as *raízes quadradas* (ou de índice *par*) de números *negativos* não representam números reais e sim *imaginários*. E se em vez de raiz quadrada fôr *raiz cúbica* (ou de índice *ímpar*) de um número *negativo*, como, por exemplo:

$$\sqrt[3]{-8}\ ?$$

Sendo $(^-2)^3 = {}^-8$, segue-se que $\sqrt[3]{-8}$ representa um *número real* (precisamente o $^-2$). Logo: $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{R}$. Também:

$$\sqrt[3]{-1}, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{-3}, \ldots, \sqrt[5]{-1}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[5]{-3}, \ldots, \sqrt[7]{-1}, \sqrt[7]{-2}, \sqrt[7]{-3}, \ldots\ldots$$

que são raízes expressas por meio de radicais de radicando *negativo*, porém de índice *ímpar*, representam *números reais*.

Escreva, agora, *V* se você achar que a sentença é *verdadeira* e *F* se achar que a sentença é *falsa*:

1.ª) $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$	2.ª) $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$	3.ª) $\sqrt[3]{-1} \notin \mathbb{R}$	4.ª) $\sqrt[3]{-1} \in \mathbb{R}$
5.ª) $\sqrt[4]{-3} \in \mathbb{R}$	6.ª) $\sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R}$	7.ª) $\sqrt[5]{-3} \in \mathbb{R}$	8.ª) $\sqrt[5]{-3} \notin \mathbb{R}$
9.ª) $\sqrt[8]{-100} \notin \mathbb{R}$	10.ª) $\sqrt[8]{-100} \in \mathbb{R}$	11.ª) $\sqrt[3]{-100} \notin \mathbb{R}$	12.ª) $\sqrt[3]{-100} \in \mathbb{R}$

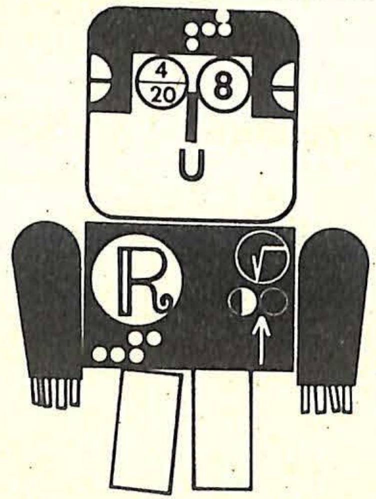
Para você guardar:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

n.os naturais n.os inteiros n.os racionais n.os reais n.os complexos

capítulo 2

CÁLCULO ALGÉBRICO. ESTUDO DOS POLINÔMIOS.

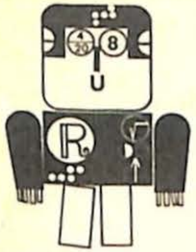


1.ª Parte: - cálculo literal no conjunto R
- generalizações; uso dos quantificadores.

2.ª Parte: - técnicas de simplificação
- técnicas de fatoração

3.ª Parte: - complementação do estudo das equações e sistemas de equações simultâneas do primeiro grau.

4.ª Parte: - tratamento elementar moderno dos polinômios a uma variável; estrutura de anel.



1.ª Parte: - cálculo literal no conjunto R
- generalizações; uso dos quantificadores.

1. *Expressões literais; operações no conjunto* $\mathbb{R}$

O nome *expressão literal* decorre do fato de serem *letras* os símbolos usados nas expressões, em vez de "figurinhas", tais como: $3 \times \square$, $2 \times \triangle, \ldots$ A manipulação com letras torna mais simples o *cálculo*. Assim, por exemplo:

$$3 \times a \quad \text{ou} \quad 3 \,.\, a \quad \text{ou} \quad 3a \quad \text{ou} \quad a + a + a$$

representa uma *expressão algébrica literal*.

Muita *atenção* agora: para o cálculo literal no conjunto $\mathbb{R}$, *qualquer número real* pode ocupar o lugar da letra que figura na expressão. Dêsse modo, para *cada número real* que esteja ocupando o lugar da letra a, na expressão $3a$, você obterá *um número real*.

2. *Avaliação de uma expressão literal; valor numérico*

Se, por exemplo, o número 2 ocupar o lugar de a, dizemos que a é igual a 2 e, portanto, $3a$ passará a representar o produto 3×2, ou seja, o *número real* 6. Diz-se também que 6 é o *valor numérico* da expressão $3a$, que foi *avaliada* para $a = 2$.

Da mesma forma:

se $\quad a = \frac{-1}{3}, \quad$ então $\quad 3a = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$

se $\quad a = \sqrt{2}, \quad$ então $\quad 3a = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Logo:

$$\begin{array}{lcl} a = 2 & \searrow \qquad \nearrow & 6 \\ a = \frac{-1}{3} & - \boxed{\;3a\;} \rightarrow & -1 \\ a = \sqrt{2} & \nearrow \qquad \searrow & 3\sqrt{2} \end{array}$$

Também: $x + y$, $x^2 - y^2$, $3x^2y - 1$, são exemplos de *expressões literais*, onde *qualquer número real* pode ocupar o lugar de x e de y. As *expressões literais*:

$$3 + a \qquad \frac{5a + 3b}{b - 2} \qquad a^2 + 2ab - c^2$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y} \qquad (5a + 3b)(b - 2) \qquad \sqrt{a}$$

serão *avaliadas*, como prática, nos *Exercícios de Aplicação* seguintes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 18

Diga qual o *número real* que as seguintes *expressões literais* estão representando:

1.ª) $\boxed{3 + a}$ quando a assume, respectivamente, os valôres:

$$0, \quad \frac{-7}{2}, \quad {}^-3 \quad \text{e} \quad 5$$

se $a = 0$, então $3 + a = 3 + 0 = 3$ (n.º real)

$a = \frac{-7}{2}$ $\quad 3 + a = 3 + \frac{-7}{2} = \frac{-1}{2}$ (n.º real)

$a = {}^-3$ $\quad 3 + a = 3 + {}^-3 = 0$ (n.º real)

$a = \sqrt{5}$ $\quad 3 + a = 3 + \sqrt{5}$ (n.º real)

2.ª) $\boxed{\dfrac{5a + 3b}{b - 2}}$ quando $\begin{cases} a = {}^-2 \text{ e } b = 0 \\ a = 3 \text{ e } b = 2 \end{cases}$

se $a = {}^-2$ e $b = 0$, então $\frac{5a + 3b}{b - 2} = \frac{5 \times {}^-2 + 3 \times 0}{0 - 2} = \frac{{}^-10}{-2} = 5$ (n.º real)

se $a = 3$ e $b = 2$, então $\frac{5a + 3b}{b - 2} = \frac{5 \times 3 + 3 \times 2}{2 - 2} = \frac{21}{0}$ (*não representa* n.º real!)

CUIDADO: Se uma expressão literal contém indicações de divisões, então devem ser respeitados os princípios estabelecidos para essa operação (0 é elemento *impossível* como divisor!)

LEMBRETE AMIGO

Uma expressão literal como: $\frac{5a + 3b}{b - 2}$, representa *número real*, desde que *qualquer* número real ocupe o lugar de a e qualquer número real *diferente de* 2 ocupe o lugar de b.

3.ª) $\boxed{a^2 + 2ab - c^2}$ quando: $a = {}^-1$, $b = 0$ e $c = 1$

Temos:

$a^2 + 2ab - c^2 = ({}^-1)^2 + 2({}^-1).0 - 1^2 = 1 + 0 - 1 = 0$ (n.º real)

4.ª) $\boxed{\dfrac{x^3 - y^3}{x + y}}$ quando: $x = 4$ e $y = {}^-3$

Temos:

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y} = \frac{4^3 - ({}^-3)^3}{4 + ({}^-3)} = \frac{64 + 27}{1} = 91 \quad \text{(n.º real)}$$

Pergunta importante: para que valôres de x e y a expressão literal:

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y}$$

não representa número real?

A resposta será dada procurando-se os valôres de x e de y que *anulam* a soma: $x + y$, isto é:

$$x + y = 0$$

ou

$$x = {}^-y$$

Portanto, os números representados por x e por y não podem ser *opostos* (ex.: 2 e -2; $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$; $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$, etc. ......).

5.ª) $\boxed{(5a + 3b)(b - 2)}$ quando: $a = 0{,}555\ldots$ e $b = 0{,}555\ldots$, isto é: $a = b = \frac{5}{9}$

Temos:

$$(5a + 3b)(b - 2) = \left(5 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9} - 2\right) = \left(\frac{25}{9} + \frac{15}{9}\right)\left(\frac{{}^-13}{9}\right) =$$

$$= \frac{40}{9} \times \frac{{}^-13}{9} = \frac{{}^-520}{81} \quad \text{(n.º real)}$$

6.ª) $\boxed{\sqrt{a}}$ quando: $a = 4$; $a = 2$; $a = {}^-1$

se $a = 4$ então $\sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$ (número real)

se $a = 2$ então $\sqrt{a} = \sqrt{2}$ (número real)

se $a = {}^-1$ então $\sqrt{a} = \sqrt{{}^-1}$ (*não* representa n.º real; lembre-se: $\sqrt{{}^-1}$ é um n.º *imaginário!*)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 19

1. *Avalie*(*) as seguintes expressões literais:

1.ª) $a - b + c - d$ quando: 1.º) $a = 5$; $b = 2$; $c = {}^-3$; $d = \frac{1}{2}$

(*) O mesmo que calcular o *valor numérico* da expressão literal.

2.º) $a = 0;\ b = -2;\ c = \frac{-3}{4};\ d = 3$

3.º) $a = \frac{1}{4};\ b = 0;\ c = \frac{2}{5};\ d = 0{,}5$

4.º) $a = b = c = d = 2$

2.ª) $(8a + 3b)(c - 1)$ quando: 1.º) $a = -2;\ b = \frac{1}{3};\ c = 3$

2.º) $a = 0;\ b = 2;\ c = 2$

3.º) $a = 3{,}2;\ b = 0{,}333\ldots;\ c = 0$

4.º) $a = 3;\ b = 100;\ c = 1$

3.ª) $\frac{x^2 - y^2}{a + 3}$ quando: 1.º) $x = 1;\ y = -2;\ a = \frac{1}{2}$

2.º) $x = \frac{2}{5};\ y = \frac{5}{4};\ a = 3$

3.º) $x = 0;\ y = -1;\ a = -5$

4.º) Para que valôres de a a expressão $\frac{x^2 - y^2}{a + 3}$ *não* representa n.º real?

4.ª) $\frac{5a + 3a}{b - c}$ quando: 1.º) $a = 4;\ b = -1;\ c = \frac{2}{5}$

2.º) $a = \frac{1}{5};\ b = 0;\ c = -2$

3.º) $a = 1;\ b = 8;\ c = 0$

4.º) A expressão: $\frac{5a + 3a}{b - c}$ sempre representa um número real? Por quê?

5.ª) $\frac{a(x - y)}{a(x + y)}$ quando: 1.º) $a = 3;\ x = 2;\ y = 1$

2.º) $a = \frac{1}{2};\ x = 0;\ y = -1$

3.º) $a = 2;\ x = -3;\ y = \frac{1}{2}$

2. Para:

a	b	c	x	y
-5	3	$\frac{1}{2}$	0	1

avalie as seguintes expressões:

1.ª) $3a + 2b$

2.ª) $x - y + 2a - \frac{b}{5}$

3.ª) $(a + a + a) : (a + a + a)$

4.ª) $\left(\frac{1}{2}a + b\right)\left(\frac{x}{y}\right)$

5.ª) $x \cdot x \cdot x + x$

6.ª) $\sqrt{a}$

7.ª) $5\sqrt{a^2 + b^2} + 3a$

8.ª) $(2a - b) : (x + 3y)$

9.ª) $\frac{x^2(3a - 1)}{x(2b + 1)}$

10.ª) $(a + b)(x - 2y) \cdot 2c$

3. As expressões literais 4.ª, 6.ª, 7.ª e 9.ª do exercício 2 sempre representam um n.º real? Por quê?

3. *Expressões equivalentes; generalizações (uso do quantificador* $\forall$*); propriedades estruturais do conjunto* $\mathbb{R}$

Sejam as seguintes expressões literais:

$$3a + 2a \quad \text{e} \quad 5a$$

Observe seus valôres numéricos quando *qualquer* número real ocupa o lugar de a. Assim, por exemplo:

se $a = 2$, então:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2a = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 6 + 4 = 10 \\ 5a = 5 \times 2 = 10 \end{array}\right\} \text{ mesmo n.º real}$$

se $a = -1$, então:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2a = 3(-1) + 2(-1) = -3 + -2 = -5 \\ 5a = 5(-1) = -5 \end{array}\right\} \text{ mesmo n.º real}$$

E colocando outros números reais no lugar de a, será que as expressões literais: $3a + 2a$ e $5a$ continuarão representando sempre o *mesmo número real?*

SIM. Uma propriedade estrutural muito importante de $\mathbb{R}$, que relaciona a *multiplicação* com a *adição*, garante êsse fato. Trata-se da *propriedade distributiva*:

$$3a + 2a \underset{\text{p.d.m.}}{=} (3 + 2)a = 5a$$

que permite "demonstrar": para *qualquer* valor real de a, as expressões literais $3a + 2a$ e $5a$ representam o *mesmo* número real. Tais expressões são denominadas *equivalentes* e permitem escrever a seguinte *sentença matemática:*

$$\boxed{\forall a,\ 3a + 2a = 5a}$$

onde o *quantificador* universal $\forall$ (lê-se: *qualquer* que seja) está indicando uma *generalização* (ou identidade).

Da mesma forma são *equivalentes* as seguintes expressões:

1.ª) $\boxed{x + x}$ e $\boxed{2x}$

De fato: $x + x \underset{\text{e.n.m.(*)}}{=} 1.x + 1.x \underset{\text{p.d.m.}}{=} (1+1)x = 2x$

Portanto: $\boxed{\forall x, \quad x + x = 2x}$

2.ª) $\boxed{ab + ab}$ e $\boxed{2ab}$

De fato: $ab + ab \underset{\text{e.n.m.}}{=} 1.ab + 1.ab \underset{\text{p.d.m.}}{=} (1+1)ab = 2ab$

Logo: $\boxed{\forall a, \forall b, \; ab + ab = 2ab}$

3.ª) $\boxed{x - x}$ e $\boxed{0}$

De fato: $x - x = x + (-x) = 0$ (x e $-x$ são *opostos*)

Logo: $\boxed{\forall x, \; x - x = 0}$

4.ª) $\boxed{5a^2 - 2a^2}$ e $\boxed{3a^2}$

De fato: $5a^2 - 2a^2 \underset{\text{p.d.m.}}{=} (5-2)a^2 = 3a^2$

Logo: $\boxed{\forall a, \; 5a^2 - 2a^2 = 3a^2}$

5.ª) $\boxed{4x^2y + 9x^2y + \sqrt{2}.x^2y}$ e $\boxed{(13 + \sqrt{2})x^2y}$

De fato: $4x^2y + 9x^2y + \sqrt{2}.x^2y \underset{\text{p.d.m.}}{=} (4 + 9 + \sqrt{2})x^2y = (13 + \sqrt{2})x^2y$

Logo: $\boxed{\forall x, \; \forall y, \; 4x^2y + 9x^2y + \sqrt{2}.x^2y = (13 + \sqrt{2})x^2y}$

(*) e.n.m.: elemento neutro da multiplicação.
p.d.m.: propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

ATENÇÃO: Seriam *equivalentes* as expressões:

$$5a + 2b \quad \text{e} \quad 7ab\,?$$

Não sendo possível usar nenhuma *propriedade estrutural*, vamos atribuir *quaisquer* valôres às letras a e b. Assim, por exemplo:

se $a = 1$ e $b = 2$, temos:

$$5a + 2b = 5 \times 1 + 2 \times 2 = 5 + 4 = \boxed{9}$$

$$7ab = 7 \times 1 \times 2 = \boxed{14}$$

diferentes

Portanto, não é V que para $\forall a$, $\forall b$, $5a + 2b = 7ab$, isto é, essas expressões *não são equivalentes*.

NOTA: Não importa que, para $a = b = 0$, $5a + 2b$ e $7ab$ tenham avaliações iguais (0), pois para que duas expressões sejam equivalentes é necessário que tenham avaliações iguais para *quaisquer* valôres de a e b.

Seriam *verdadeiras* as sentenças:

$\boxed{\forall a, \; \forall b, \; ab + ba = 2ab}$ e $\boxed{\forall a, \; \forall b, \; ab - ab = 0}$?

São, pois: $ab + ba \underset{\text{p.c.m.}}{=} ab + ab = 2ab$ (Expressão 2.ª)

$ab - ab = ab + (-(ab)) = 0$ (ab e $-(ab)$, elementos *opostos*)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 20

1. *Demonstre* (usando a p.d.m.) que são *verdadeiras* as seguintes sentenças matemáticas:

1.ª) $\forall x, \; x + x + x + x = 4x$

2.ª) $\forall a, \; 5a + 4a = 9a$

3.ª) $\forall y, \; 3y^2 - y^2 = 2y^2$

4.ª) $\forall p, \; 6p + \frac{p}{2} = \frac{13p}{2}$

5.ª) $\forall t, \; t - 2t = {}^{-}1t$

6.ª) $\forall t, \; t + 2t = 3t$

7.ª) $\forall z, \; z - z = 0$

8.ª) $\forall x, \; \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$

9.ª) $\forall a, \; \forall b, \; 3ab + 2ab + ab = 6ab$

10.ª) $\forall a, \; \forall b, \; 3ab + \frac{1}{2}ab - \frac{7}{2}ab = 0$

11.ª) $\forall x, \; \forall y, \; 4xy^2 - xy^2 + 5xy^2 = 8xy^2$

12.ª) $\forall x, \; \forall y, \; \forall z, \; {}^{-}7xyz + 5xyz = {}^{-}2xyz$

13.ª) $\forall a, \forall b, \; 5a^2b + \sqrt{2}a^2b = (5 + \sqrt{2})a^2b$

14.ª) $\forall p, \; \forall q, \; \frac{pq}{2} + \frac{pq}{2} = pq$

15.ª) $\forall p, \; \forall q, \; pq - pq = 0$

16.ª) $\forall p, \; \forall q, \; qp - pq = 0$

17.ª) $\forall x, \; \forall y, \; \forall z, \; 3xyz + xyz = 4xyz$

18.ª) $\forall x, \; \forall y, \; \forall z, \; \forall t, \; xyzt - yxzt = 0$

19.ª) $\forall a, \; \forall b, \; \forall c, \; abc - 2abc = {}^{-}abc$

20.ª) $\forall a, \; \forall b, \; \forall c, \; \frac{2abc}{5} + \frac{3abc}{5} = abc$

2. Seriam *equivalentes* as seguintes expressões:

1.ª) $3a + 2b$ e $5ab$?

2.ª) $x + x$ e x^2 ?

3.ª) $\frac{y}{y}$ $(y \neq 0)$ e 0 ?

4. Têrmos semelhantes; expressões literais; monômios

O conhecimento de expressões literais *equivalentes* permite empregar *forma simples* para desenvolver o *cálculo*. É o que você faz quando usa os *numerais mais simples* para representar os números.

Assim, por exemplo, para representar o *cinco* prefere-se o numeral 5, em vez dos numerais: $3 + 2$ ou $2 + 2 + 1$ ou $1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Também, agora, é mais vantajoso empregar a expressão literal $5a$ do que as suas *equivalentes*: $3a + 2a$ ou $2a + 2a + 1a$ ou $a + a + a + a + a$.

É comum encontrar-se, dentro do cálculo algébrico tradicional, palavras como: *parte literal, têrmos semelhantes, coeficientes numéricos, têrmos semelhantes, monômio*, etc.

Com isso se quer dizer que: *expressões literais*, como:

$$3a \quad \text{e} \quad 2a$$

por terem a mesma *parte literal* (isto é, contêm a mesma letra a) são denominadas *têrmos semelhantes*, sendo 3 e 2, respectivamente, seus *coeficientes numéricos*. Também são *semelhantes* os têrmos:

$5a^2$ e $^-2a^2$ pois têm a mesma *parte literal*: a^2 (o mesmo que: aa) sendo os seus *coeficientes numéricos*: 5 e $^-2$

$4x^2y$, $9x^2y$ e $\frac{-1}{2}x^2y$ *parte literal*: x^2y (o mesmo que: xxy)
coeficientes numéricos: 4, 9 e $\frac{-1}{2}$

$12a^3b^2$, a^3b^2 e $5a^3b^2$ *parte literal*: a^3b^2 (o mesmo que: $aaabb$)
coeficientes numéricos: 12, 1 e 5.

$4{,}5x$, $\frac{x}{2}$ e ^-x *parte literal*: x
coeficientes numéricos: $4{,}5$; $\frac{1}{2}$ e $^-1$

As expressões literais que estão sob forma simples, tais como:

$$5a^2,\ 4x^2y,\ 12a^3b^2,\ 4{,}5x$$

cuja parte literal indica sòmente PRODUTOS, recebem também o nome de *monômios*.

5. Cálculo com têrmos semelhantes; reduções

Considerada uma expressão literal, como:

$$5x + 6y + 3x - 2y$$

podemos transformá-la numa *equivalente mais simples*, **reduzindo** os seus têrmos semelhantes:

$$5x \text{ e } 3x \quad \text{como também} \quad 6y \text{ e } ^-2y$$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 5x + 6y + 3x - 2y &= 5x + 3x + 6y + {}^-2y && \text{(usando a p.a.a. e p.c.a.)} \\ &= (5 + 3)x + (6 + {}^-2)y && \text{(usando a p.d.m.)} \\ &= 8x + 4y \end{aligned}$$

Logo: $\boxed{\forall x,\ \forall y,\ 5x + 6y + 3x - 2y = 8x + 4y}$

NOTA: Expressões literais com *dois têrmos*, como: $8x + 4y$, são também denominadas *binômios*.

Outros exemplos: reduzir, usando *propriedades estruturais*, as seguintes expressões literais em outras *equivalentes mais simples*:

1.º) $\boxed{\frac{3}{5}a^2 + 5b^4 - 8a^2 + b^4}$

Temos: $\frac{3}{5}a^2 + 5b^4 - 8a^2 + b^4 = \frac{3}{5}a^2 - 8a^2 + 5b^4 + b^4 =$

$= \left(\frac{3}{5} - 8\right)a^2 + (5 + 1)b^4 = \frac{-37}{5}a^2 + 6b^4$

2.º) $\boxed{\left(\frac{a}{2} + 2x + 1\right) - \left(x - \frac{3a}{4} - \frac{2}{5}\right)}$

Temos: $\left(\frac{a}{2} + 2x + 1\right) - \left(x - \frac{3a}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{a}{2} + 2x + 1 - x + \frac{3a}{4} +$

$+ \frac{2}{5} = \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} + 2x - x + 1 + \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)a +$

$$+ (2-1)x + \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{5}{4}a + x + \frac{7}{5}$$

NOTA: Não esquecer a *técnica* "eliminar parênteses" empregada em:

$$-\left(x - \frac{3a}{4} - \frac{2}{5}\right) = {}^-x + \frac{3a}{4} + \frac{2}{5},$$ conhecida desde a 2.ª Série.

3.º) $\boxed{3m + 4(5n + m - 1) - 2(m - 3n + 8)}$

Temos:

$$\begin{aligned} 3m+4(5n+m-1)-2(m-3n+8) &= 3m+20n+4m-4-2m+6n-16= \\ &=(3+4-2)m+(20+6)n-4-16= \\ &=5m+26n-20 \end{aligned}$$

NOTA: Expressões literais de *três têrmos*, como: $5m + 26n - 20$, são também denominadas *trinômios*.

4.º) $\boxed{3ab - [5b - (3a + 5b - ab)]}$

Temos:
$$\begin{aligned} 3ab - [5b - (3a + 5b - ab)] &= 3ab - [5b - 3a - 5b + ab] = \\ &= 3ab - 5b + 3a + 5b - ab = \\ &= 3ab - ab - 5b + 5b + 3a = \\ &= 2ab + 3a \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 21

Usando *técnicas de cálculo* já conhecidas, *reduza* as seguintes expressões literais a expressões literais equivalentes *mais simples*:

1.ª) $12a + 3a - a + 5a$

2.ª) $5x^2 + 3y^2 - 3x^2 + y^2$

3.ª) $4ab - 4ba$

4.ª) $(x + 2) + (3x - 6) - (8x + 1)$

5.ª) $\left(\frac{1}{3}y^2 - 1\right) - \left(y^2 + 2\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3}y^2$

6.ª) $\left(8a + \frac{2b}{3} - 1\right) - \left(a + \frac{b}{2} + 5\right) + \left({}^-3a - b + \frac{1}{2}\right)$

7.ª) $(a + 2x) + (x - a) - 3x$

8.ª) $\frac{^-4x}{5} - \left[(x - 1) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right]$

9.ª) $\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$

10.ª) $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + x$

11.ª) $y - \{-[-(x - y)]\}$

12.ª) $(m^2-2m+4)-[(2m^2+3)-(8m+7)]$

13.ª) $1 + \frac{3r}{2} - \left[2s + 4\left(r + \frac{s}{4}\right) + 6\right]$

14.ª) $x + x + x - x - x - x$

15.ª) $-\left(\frac{3y^2}{5} - \frac{y^2}{4}\right)$

16.ª) $a^2 - \left(\frac{a^2}{4} + 2\right) + 2$

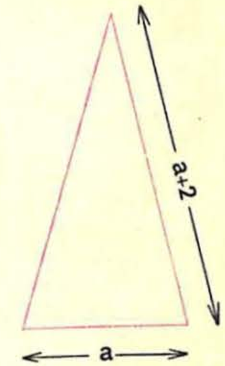
17.ª) $(4x+z) - (y+2z) + (x+2y) - (z-y)$

18.ª) $3mn - 5\left[2nm - \frac{1}{2}\left(mn - 1\right)\right] + \frac{2}{3}$

19.ª) $-3\left(5a^2 - \frac{3ax}{4} + x^2\right) - \left[4a^2 + \frac{5ax}{4} - (3a^2 - 7ax + 5x^2)\right]$

20.ª) $\frac{5}{4}y - x + \left[\frac{2}{3}x + y - \left(\frac{1}{2} + y\right) + \frac{1}{2} - x - y\right]$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 22

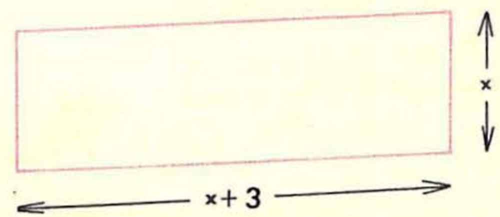


1. No triângulo isósceles da figura ao lado o comprimento da base em metros é a. Os lados iguais têm, cada um, 2m a mais do que a base. Dizer qual, das seguintes expressões literais, representa o *perímetro* do triângulo:

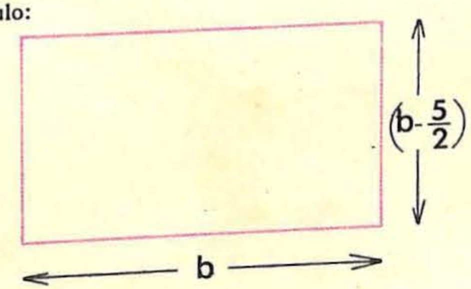
   1.ª) $3a + 12$ 2.ª) $3a + 4$
   3.ª) $a + 12$ 4.ª) $3a + 2$

2. Se, na questão anterior, $a = 2$, qual será o valor, em metros, do perímetro do triângulo?

3. Representar, por meio de uma expressão literal, o perímetro do retângulo:



4. *Idem*, do retângulo:



Exercícios-modêlo:

1. Decida se é V ou F cada uma das seguintes sentenças. No primeiro caso dar uma *demonstração*, por intermédio das propriedades estruturais das operações e, no segundo, um *contra-exemplo*:

1.º) $\boxed{\forall x, \quad 8x + 2x = 10x}$

Temos:

$8x + 2x \overset{?}{=} 10x$

p.d.m.

$(8 + 2)x \overset{?}{=} 10x$

$10x = 10x$

($\overset{?}{=}$ significa que estamos escrevendo o sinal $=$ ainda *"em dúvida"*)

Logo: $\boxed{\forall x, \quad 8x + 2x = 10x \text{ é } V}$

2.º) $\boxed{\forall a, \quad 2a + 3(a + 5) = 5a + 3}$

Temos:

$2a + 3(a + 5) \overset{?}{=} 5a + 3$

p.d.m.

$2a + 3a + 15 \overset{?}{=} 5a + 3$

p.d.m.

$(2 + 3)a + 15 \overset{?}{=} 5a + 3$

$5a + 15 \overset{?}{=} 5a + 3$

Então: será que para $\forall a$, $5a + 15 \overset{?}{=} 5a + 3$?

NÃO, pois se no lugar de a fôr colocado 0, teremos um *contra-exemplo*:

$$5 \times 0 + 15 = 5 \times 0 + 3$$
$$15 = 3 \qquad (F)$$

Logo: $\boxed{\forall a, \quad 2a + 3(a + 5) = 5a + 3 \text{ é } F}$

3.º) $\boxed{\forall m, \quad 5(m \,.\, 4) = 20m}$

Temos:

$5(m \,.\, 4) \overset{?}{=} 20m$

p.c.m.

$5(4 \,.\, m) \overset{?}{=} 20m$

p.a.m.

$(5 \,.\, 4)m \overset{?}{=} 20m$

$20m = 20m$

Logo: $\boxed{\forall m, \quad 5(m \,.\, 4) = 20m \text{ é } V}$

4.º) $\boxed{\forall x, \forall y, \forall a, \forall b, \quad \left(-\frac{1}{2}xy\right) . (^-10ab) = 5xyab}$

Temos:

$\left(-\frac{1}{2}xy\right) . (^-10ab) \overset{?}{=} 5xyab$

p.a.m. e p.c.m.

$-\frac{1}{2}x\,(^-10 \,.\, yab) \overset{?}{=} 5xyab$

p.a.m. e p.c.m.

$-\frac{1}{2}\,(^-10 \,.\, x \,.\, yab) \overset{?}{=} 5xyab$

p.a.m.

$-\frac{1}{2} \,.\, {}^-10\,(xyab) \overset{?}{=} 5xyab$

$5xyab = 5xyab$

Logo: $\boxed{\forall x, \forall y, \forall a, \forall b, \quad \left(-\frac{1}{2}xy\right) . (^-10ab) = 5xyab \text{ é } V}$

5.º) Se você adicionar 3 a *qualquer* número real e multiplicar a soma obtida por 2, então o resultado é o dôbro do número escolhido, mais 1.

A sentença matemática correspondente é:

$$\forall x, \quad (x + 3) \times 2 = 2x + 1$$

Temos:

$(x + 3) \times 2 \overset{?}{=} 2x + 1$

p.d.m.

$x \,.\, 2 + 3 \,.\, 2 \overset{?}{=} 2x + 1$

p.c.m.

$2 \,.\, x + 3 \,.\, 2 \overset{?}{=} 2x + 1$

$2 \,.\, x + 6 \overset{?}{=} 2x + 1$

Logo: $\forall x, \quad (x + 3) \times 2 = 2x + 1$ é F

Contra-exemplo: se $x = 1 \Longrightarrow 2 \times 1 + 6 = 2 \times 1 + 1$

$$2 + 6 = 2 + 1$$
$$8 = 3 \quad (F)$$

2. Diga qual a *propriedade estrutural* dos números reais que permite afirmar serem *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª)	$\forall a, \forall b,$	$a + b = b + a$	é a p.c.a.
2.ª)	$\forall x, \forall y, \forall z,$	$(x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$	é a p.a.m.
3.ª)	$\forall t,$	$(t + 2) + 5 = t + (2 + 5)$	é a p.a.a.
4.ª)	$\forall m,$	$m \,.\, (m + 1) = (m + 1) \,.\, m$	é a p.c.m.

5.ª) $\forall p,\quad p + 0 = p\quad$ é a e.n.a.

6.ª) $\forall q,\quad 1 \,.\, q = q\quad$ é a e.n.m.

7.ª) $\forall a,\quad a + (-a) = 0\quad$ é a e.i.a. (ou existência do *oposto*)

8.ª) $\forall x,\ x \neq 0,\quad x \times \dfrac{1}{x} = 1\quad$ é a e.i.m.

9.ª) $\forall r,\quad 4 \,.\, (r + 3) = 4 \,.\, r + 4 \,.\, 3\quad$ é a p.d.m.

10.ª) $\forall x,\quad (2x + 1)(3x + 7) = 2x \,.\, (3x + 7) + 1 \,.\, (3x + 7)\quad$ é a p.d.m.

LEMBRETE AMIGO

As seguintes sentenças matemáticas traduzem *propriedades estruturais* dos *números reais*:

$\forall a,\ \forall b,\ \forall c,$	$(a+b)+c=a+(b+c)$	p.a.a.	(A)	Grupo Comutativo	CORPO
$\exists 0,\ \forall a,$	$a + 0 = a$	e.n.a.	(N)		
$\forall a,\ \exists(-a),$	$a + (-a) = 0$	e.i.a.	(I)		
$\forall a,\ \forall b,$	$a + b = b + a$	p.c.a.	(C)		
$\forall a,\ \forall b,\ \forall c,$	$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$	p.a.m.	(A)	Grupo Comutativo	
$\exists 1,\ \forall a,$	$a \,.\, 1 = a$	e.n.m.	(N)		
$\forall a,\ a \neq 0,$	$a \,.\, \dfrac{1}{a} = 1$	e.i.m.	(I)		
$\forall a,\ \forall b,$	$a \,.\, b = b \,.\, a$	p.c.m.	(C)		
$\forall a,\ \forall b,\ \forall c,$	$a.(b+c)=a.b+a.c$	p.d.m.	(D)		

Tenha sempre presente que: **essas propriedades dão ao conjunto $\mathbb{R}$ uma estrutura de "corpo"!**

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO — Grupo 24

1. Decida se é V ou F cada uma das seguintes sentenças. No primeiro caso dê uma *demonstração* (por intermédio das propriedades estruturais das operações) e, no segundo, um *contra-exemplo:*

1.ª) $\forall x,\ 2x + 3x = 5x$

2.ª) $\forall x,\ x \neq 0,\ 2x + 3x = 6x$

3.ª) $\forall a,\ 3 \,.\, (a \,.\, 4) = 12 \,.\, a$

4.ª) $\forall a,\ 3 \,.\, (a \,.\, 4) = a \,.\, 12$

5.ª) $\forall a,\ a \neq 0,\ 3 \,.\, (a \,.\, 4) = 7a$

6.ª) $\forall x,\ \forall y,\ 3x \,.\, 4y = 12xy$

7.ª) $\forall a,\ \forall b,\ 5(3a - 2b) - 2(2a + b) = 11a - 12b$

8.ª) $\forall m,\ \dfrac{1}{2}m - m = -\dfrac{1}{2}m$

9.ª) $\forall y,\ 8y - 8y = 0y$

10.ª) $\forall r,\ 12r - 2(3r + 4) = 6r + 8$

11.ª) $\forall b,\ (b + 3) \times 2 = 2 \times (b + 3)$

12.ª) $\forall x, x \neq 0,\ \forall y,\ 2x + 3y - (2x - 4y) = 4x + 7y$

13.ª) $\forall x,\ \forall y,\ 2x + 3y - (2x - 4y) = 7y$

14.ª) $\forall m,\ \forall n, n \neq 0,\ m - n - (m + n) = 2n$

15.ª) $\forall p,\ p \neq 0,\ \forall q,\ q \neq 0,\ 2p + 3(p + 2q) = 5p + 5q$

16.ª) Se você subtrair 2 de *qualquer* número real e multiplicar a diferença obtida por 3, então o resultado será o produto de 3 pelo número escolhido, menos 6.

17.ª) Se você dividir *qualquer* número real por 2 e a seguir adicionar $\dfrac{1}{2}$ ao resultado, então obterá o número escolhido, acrescido de 1.

18.ª) Se você adicionar 4 a *qualquer* número real e multiplicar a soma por 2, então o resultado será o produto de 2 pelo número escolhido, mais 4.

19.ª) Se a e b são *quaisquer* números reais, então:

$$3a \,.\, (2c) = 6ac$$

20.ª) Adicionando-se um número real *qualquer* repetido em três parcelas, obtém-se o triplo dêsse número.

2. Diga qual a propriedade estrutural dos números reais que permite afirmar serem verdadeiras as seguintes sentenças:

1.ª) $\forall m,\quad m + n = n + m$

2.ª) $\forall a,\quad (a + 5) \times 2 = 2 \times (a + 5)$

3.ª) $\forall x,\quad x \,.\, 1 = x$

4.ª) $\forall b,\quad 0 + b = b$

5.ª) $\forall n,\quad n \,.\, (n - 1) = (n - 1) \,.\, n$

6.ª) $\forall y,\quad (-y) + y = 0$

7.ª) $\forall r, \forall s, \forall t,\ r + (s + t) = (r + s) + t$

8.ª) $\forall p,\quad {}^{-}2(3 \,.\, p) = ({}^{-}2 \,.\, 3)p$

9.ª) $\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\quad a(b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$

10.ª) $\forall x,\ (4 + 3x)(2x + 5) = 4(2x + 5) + 3x(2x + 5)$

3. *Demonstre*, usando as propriedades estruturais das operações *adição* e *multiplicação* no conjunto $\mathbb{R}$, que:

1.º) $\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ \forall x,\quad ax + bx + cx = (a + b + c)x\quad$ (Exercício-modêlo)

Temos:

$$\begin{aligned} ax + bx + cx &= (a + b)x + cx = && \text{(p.d.m.)} \\ &= [(a + b) + c]x = && \text{(p.d.m.)} \\ &= (a + b + c)x && \text{(p.a.a.)} \end{aligned}$$

2.º) $\forall m, \forall n, \forall p, \forall y,$ $\quad my + ny + py = (m + n + p)y$

3.º) $\forall a, \forall b, \forall x, \forall y,$ $\quad ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$

4.º) $\forall a, \forall b, \forall x, \forall y,$ $\quad (ax)(by) = (ab)(xy)$. (Exercício-modêlo)

Temos:

$$
\begin{aligned}
(ax)(by) &= axby = & &\text{(p.a.m.)}\\
&= a(xb)y = & &\text{(p.a.m.)}\\
&= a(bx)y = & &\text{(p.c.m.)}\\
&= abxy = & &\text{(p.a.m.)}\\
&= (ab)(xy) & &\text{(p.a.m.)}
\end{aligned}
$$

5.º) $\forall a, \forall b, \forall m, \forall n,$ $\quad (an)(bm) = (ab)(mn)$

6.º) $\forall x, \forall y, \forall z, \forall t,$ $\quad (xyz)t = (xt)(yz)$

7.º) $\forall a, \forall b, \forall c, \forall d,$ $\quad a(bd)c = (ab)(cd)$

8.º) $\forall a, \forall b, \forall x, \forall y,$ $\quad (a + x) + (b + y) = (a + b) + (x + y)$ (Exercício-modêlo)

Temos:

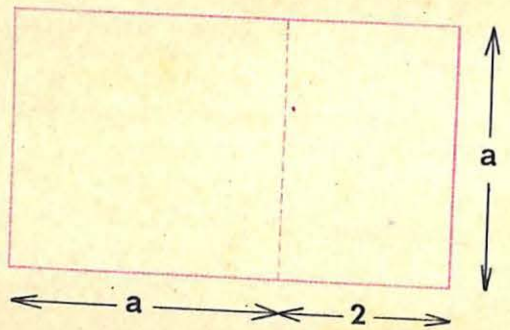
$$
\begin{aligned}
(a + x) + (b + y) &= a + x + b + y = & &\text{(p.a.a.)}\\
&= a + (x + b) + y = & &\text{(p.a.a.)}\\
&= a + (b + x) + y = & &\text{(p.c.a.)}\\
&= a + b + x + y = & &\text{(p.a.a.)}\\
&= (a + b) + (x + y) & &\text{(p.a.a.)}
\end{aligned}
$$

9.º) $\forall a, \forall b, \forall m, \forall n,$ $\quad (a + m) + (b + n) = (a + b) + (m + n)$

10.º) $\forall x, \forall y, \forall z, \forall t,$ $\quad (x + t) + (y + z) = (x + y) + (z + t)$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 25

1. A medida em metros da *base* de um retângulo é $(a + 2)$. A base está dividida em duas partes (vide figura). A medida da *altura* é, em metros, a.

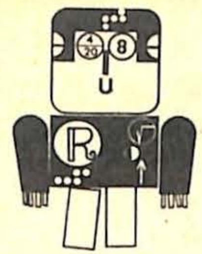


Diga quais das seguintes expressões literais representam, em m^2, a *área* dêsse retângulo:

1.ª) $a^2 + 2$ 2.ª) $a(a + 2)$ 3.ª) $a^2 + 2a$

2. Qual a propriedade estrutural de $\mathbb{R}$ que justifica a equivalência de duas das expressões literais que figuram na primeira questão?

3. Você tem um retângulo cujas medidas são: *base*: x metros; *altura*: n metros a mais que a base. Usando uma propriedade estrutural de $\mathbb{R}$, demonstre que a *área* dêsse retângulo é dada pela seguinte expressão literal: $(x^2 + xn)$ metros quadrados.



2.ª Parte: - técnicas de simplificação
- técnicas de fatoração

Técnicas para o cálculo algébrico

1. *Outras técnicas para o cálculo; disposições práticas*

Já foi ressaltada a importância da presença dos *quantificadores* nas sentenças que envolvem expressões literais. Agora, serão mostradas algumas *técnicas* com *disposições práticas* que também podem conduzir o *cálculo*.

Seja **adicionar** expressões literais, dadas pelos exemplos:

1.º) $3a + 2b - 8$ e $5a - b + 1$

Disposição prática:

$$
\begin{array}{rl}
 & 3a + 2b - 8\\
+ & 5a - \ \ b + 1\\
\hline
 & 8a + \ \ b - 7
\end{array}
$$

NOTA: Os *têrmos semelhantes* são colocados na mesma coluna.

2.º) $\frac{1}{2}x^2y - y + 3x$ e $-x + \frac{2}{5}y + x^2y - 5$

Disposição prática:

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{2}x^2y - 1y + 3x\\
+ & 1x^2y + \frac{2}{5}y - 1x - 5\\
\hline
 & \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{5}y + 2x - 5
\end{array}
$$

Para **subtrair** $4m^2 - 3n + 1$ de $8m^2 + n - 5$, temos:

Disposição prática:

$$
\begin{array}{rl}
 & 8m^2 + 1n - 5\\
- & 4m^2 + 3n - 1\\
\hline
 & 4m^2 + 4n - 6
\end{array}
$$

NOTA: Foram *trocados os sinais* dos têrmos que compõem a expressão literal subtraendo.

Para **multiplicar** expressões literais, consideremos os exemplos:

1.º) $^{-}3a$ por 5 Temos: $^{-}3a \times 5 = {}^{-}15a$

2.º) $^{-}3a^2$ por $5ab$ Temos: $^{-}3a^2 \times 5ab = {}^{-}15a^3b$ (lembrar que: $a^2 . a = a^3$)

3.º) $\frac{1}{2}xy^2$ por $3x^3z$ e o resultado por $\frac{y}{4}$

Temos: $\frac{1}{2}xy^2 \times 3x^3z \times \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{4}\, xx^3y^2yz = \frac{3}{8}x^4y^3z$

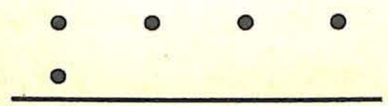
4.º) $2a^2$ por $4a^3 - 5a^2 + \frac{1}{2}a - 1$

Temos:

$$2a^2 \times \left(4a^3 - 5a^2 + \frac{1}{2}a - 1\right) = 8a^5 - 10a^4 + a^3 - 2a^2 \quad \text{(p.d.m.)}$$

Disposição prática:

$$\begin{array}{rl} & 4a^3 - 5a^2 + \frac{1}{2}a - 1 \\ \times & 2a^2 \\ \hline & 8a^5 - 10a^4 + a^3 - 2a^2 \end{array}$$



5.º) $7x + 2$ por $3x^2 - 5x + 1$

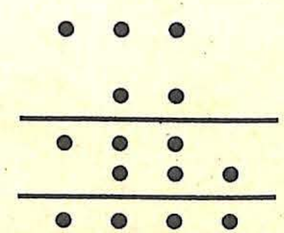
Temos:

$$\begin{aligned}(7x + 2).(3x^2 - 5x + 1) &= 7x(3x^2 - 5x + 1) + 2(3x^2 - 5x + 1) = \text{(p.d.m.)} \\ &= 21x^3 - 35x^2 + 7x + 6x^2 - 10x + 2 = \\ &= 21x^3 - 29x^2 - 3x + 2\end{aligned}$$

Se quiser, você poderá usar a seguinte

Disposição prática:

$$\begin{array}{rr} & 3x^2 - 5x + 1 \\ \times & 7x + 2 \\ \hline & 21x^3 - 35x^2 + 7x \\ & 6x^2 - 10x + 2 \\ \hline & 21x^3 - 29x^2 - 3x^2 + 2 \end{array}$$

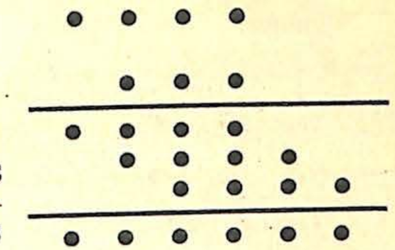


6.º) $5a^2 - 7a^3 + 8 - a$ por $^{-}5a + 2a^2 - 1$

NOTA: Procura-se *ordenar* as expressões literais segundo as potências indicadas *decrescentes* (ou crescentes) da letra a, a fim de facilitar o cálculo.

Usando *disposição prática*, temos:

$$\begin{array}{r} ^{-}7a^3 + 5a^2 - a + 8 \\ 2a^2 - 5a - 1 \\ \hline ^{-}14a^5 + 10a^4 - 2a^3 + 16a^2 \\ 35a^4 - 25a^3 + 5a^2 - 40a \\ 7a^3 - 5a^2 + a - 8 \\ \hline ^{-}14a^5 + 45a^4 - 20a^3 + 16a^2 - 39a - 8 \end{array}$$



7.º) $(3x - y)$ por $(x + y)$ e o resultado por $(2x - 5)$

Temos:

$$\begin{aligned}(3x - y).(x + y).(2x - 5) &= [(3x - y) . (x + y)]\,(2x - 5) = && \text{(p.a.m.)} \\ &= [3x^2 + 3xy - yx - y^2]\,(2x - 5) = && \text{(p.d.m.)} \\ &= 6x^3 + \underline{6x^2y} - \underline{2yx^2} - 2xy^2 - 15x^2 - \underline{15xy} + \underline{\underline{5yx}} + 5y^2 \\ &= 6x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - 10xy + 5y^2 - 15x^2\end{aligned}$$

8.º) $4x^{-3}y$ por $2x^2y^{-1}$

Temos: $4x^{-3}y \times 2x^2y^{-1} = 8x^{-3+2} . y^{1-1} = 8x^{-1} . y^0 = 8x^{-1}$

9.º) $5a^n$ por $\sqrt{2} . a^m$

Temos: $5a^n \times \sqrt{2} . a^m = 5\sqrt{2} . a^{n+m}$

Para **dividir**, observemos os exemplos:

1.º) $4a^3$ por $2a$ $(a \neq 0)$

Temos: $4a^3 : 2a = 2a^2$ (lembrar que: $a^3 : a = a^{3-1} = a^2$)

ou $\frac{4a^3}{2a} = 2a^2$

2.º) $\frac{-1}{2}x^2y^5z$ por $3xy^2$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$

Temos:

$$\frac{-1}{2}x^2y^5z : 3xy^2 = \frac{-1}{6}xy^3z \quad \left(\text{lembrar que: } \frac{-1}{2} : 3 = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}\right)$$

3.º) $6a^2b$ por $2a^5$ $(a \neq 0)$

Temos: $6a^2b : 2a^5 = 3a^{-3}b$ (lembrar que: $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$)

4.º) ab^2 por ab^2 $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Temos: $ab^2 : ab^2 = 1$ (por quê?)

5.º) $5{,}1a^3b^2$ por ${}^{-}3$

Temos: $5{,}1a^3b^2 : {}^{-}3 = {}^{-}1{,}7a^3b^2$

6.º) $(6a^3 - 3a^2 + 4a)$ por $2a$ $(a \neq 0)$

Temos: $(6a^3 - 3a^2 + 4a) : 2a = 6a^3 : 2a - 3a^2 : 2a + 4a : 2a =$ (p.d.d.)(*)

$$= 3a^2 - \frac{3}{2}a + 2$$

7.º) $(5x^{2n} + 3x^n - x^2)$ por x^2 $(x \neq 0)$

Temos: $(5x^{2n} + 3x^n - x^2) : x^2 = 5x^{2n-2} + 3x^{n-2} - 1$

Para calcular a **potência** indicada, como, por exemplo: $({}^{-}3a^2b)^3$, temos: $({}^{-}3a^2b)^3 = {}^{-}27a^6b^3$

Também: $(ax^{-3})^2 = a^2x^{-6}$ $(x \neq 0)$ e $(2x^{-3} \cdot y^2)^{-3} = 2^{-3} \cdot x^9 \cdot y^{-6}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 26

1. Efetue a *adição* das seguintes expressões literais:

1.ª) $2b + 5c - 3a$ e $b - 4c - 2a$

2.ª) $\frac{3}{5}x^2y - 4x + y$ e $2x^2y + \frac{1}{2}x - 3y + 1$

3.ª) $x^3 - x^2 + x$; $2x - x^2 + 5x^3$ e $2x^2 - x + 5x^3$

4.ª) $b^2 + 2bc + c^2$; $b^2 - 2bc - c^2$ e $-b^2 + c^2$

5.ª) $\frac{3a^3}{4} - \frac{2a^2b}{3}$; $a^3 - \frac{1}{2}a^2b + 1$ e $\frac{{}^{-}1}{4}a^3 + 5a^2b - \frac{2}{3}$

6.ª) $x^2 - y^2 + \frac{1}{2}$; $2y^2 + 3x^2 - 1$; $\frac{x^2}{2} - 1 + 3y^2$ e $3x^2 - y^2 + \frac{2}{5}$

2. Efetue as seguintes *subtrações*:

1.ª) $a^2 - b^2$ de $3a^2 + b^2$

2.ª) $5x^2 - 3xy + 2$ de $8x^2 + 4xy - 5$

3.ª) $\frac{2}{3}ab + \frac{4}{5}b$ de ${}^{-}\frac{1}{3}ab + \frac{2}{5}b$

4.ª) $x^2y - \frac{1}{3}xy^2 + y^2$ de $\frac{2}{5}x^2y + xy^2 - 4y^2$

(*) p.d.d.: propriedade distributiva da divisão (só nesse sentido!).

3. Dadas as expressões literais:
$A = a^2 + b^2 - c^2$; $B = a^2 - b^2 + c^2$; $C = a^2 - b^2 + c^2$; $D = b^2 + c^2 - a^2$
Calcule: $(A - B) + (C - D)$

Nota: $(A - B) + (C - D)$ está indicando, simultâneamente, *adições* e *subtrações*, isto é: $[(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 - b^2 + c^2)] + [(a^2 - b^2 + c^2) - (b^2 + c^2 - a^2)]$

4. Sabendo que: $X = a^2 + 2ab + b^2$; $Y = a^2 - 2ab + b^2$; $Z = a^2 - b^2$
Calcule: 1.º) $X + Y + Z$; 2.º) $X - (Y + Z)$; 3.º) $X - (Y - Z)$

5. Sabendo que:
$A = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$; $B = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$; $C = {}^{-}3x^3 + x^2 + x - 3$
Calcule: 1.º) $A + B + C$ 2.º) $A + B - C$ 3.º) $A - (B + C)$ 4.º) $A - ({}^{-}B - C)$

6. Efetue as *multiplicações*:

1.ª) ${}^{-}5x^2 \times 2x^3$

2.ª) $4x^2y^3 \times {}^{-}\frac{1}{4}x^3y^2$

3.ª) $\frac{3}{4}a^3b^2 \times \frac{4}{3}a^2b^3 \times 8c$

4.ª) $0{,}5a^2 \times 2a^3b \times 5ab^2$

5.ª) $3x^n \times 2x^5$

6.ª) $ax^m \times a^2x^n \times a^3x$

7.ª) $3a^2 \times \sqrt{2} \cdot a \times \frac{1}{3}$

8.ª) $x^{-2} \times x^2 \times y^{-3} \times y^3$

9.ª) $3a^2 \times (2a^3 - 4a^2 + a - 5)$

10.ª) $\frac{2x^2}{5} \times \left(1 - 3x^4 + \frac{1}{3}x\right)$

11.ª) $ab \times (a^2 - b^2)$

12.ª) $(x^2y - xy^2) \times {}^{-}3xy$

13.ª) $(m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3) \times 5m^3n^3$

14.ª) $\left(\frac{4}{5}a^2c + \frac{1}{3}bc + \frac{5}{4}abc\right) \times \frac{6}{7}a^2bc$

15.ª) $(3x + 1) \times (5x^2 - x + 4)$

16.ª) $(5x^2 - 7x^3 + 8 - x) \times ({}^{-}5x + 2x^2 - 1)$

17.ª) $(x^2 + y^2 + xy) \cdot (x^2 + y^2 - xy)$

18.ª) $(3a^4 - 5a^3 + 2a^2 + 8a - 1) \cdot (a^2 - 2a + 3)$

19.ª) $({}^{-}3a^2 + 2ab - b^2) \cdot (3a^2 + 2ab - b^2)$

20.ª) $(a + b - c)(a - b + c) \cdot ({}^{-}a + b + c)$

21.ª) $(2x - y)(x + 3y) \cdot (4x + y)$

7. Efetue as seguintes *divisões*:

1.ª) $8x^3 : {}^{-}4x$ $(x \neq 0)$

2.ª) $3a^2b^4 : 5ab^2$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

3.ª) ${}^{-}2x^3y^2 : {}^{-}3$

4.ª) $mn : nm$ $(n \neq 0,\ m \neq 0)$

5.ª) $9x^n : x^2$ $(x \neq 0)$

6.ª) $4a^2 : 3a^5$ $(a \neq 0)$

7.ª) $2a^3b^5 : 2a^3b^6$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

8.ª) $\frac{1}{2}x^{n+1} : \frac{1}{2}x^n$ $(x \neq 0)$

9.ª) $2a^{m+3} : 3a^{m+4}$ $(a \neq 0)$

10.ª) $(4x^2 - 2xy) : 2x$

11.ª) $(3a^3b^4 + 6a^2b^2 - 9ab^4) : 3ab^2$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

12.ª) $\left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{4}xy^2\right) : \left(\frac{1}{2}xy\right)$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$

13.ª) $\left(25x^4y^3 - \frac{1}{5}x^3y^4 + 10x^2y^2\right) : {}^{-}5xy$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$

14.ª) $(a^{2n} \cdot b + a^{2n-1} \cdot b^2 - a^2b^{2n}) : ab$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

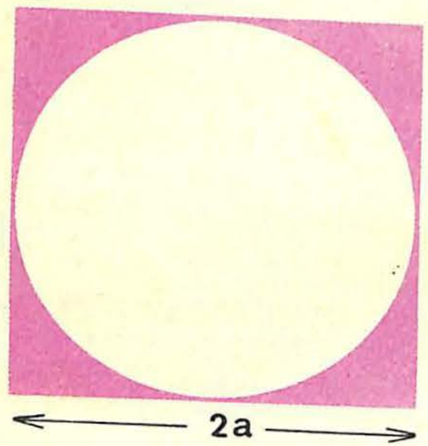
8. Calcule as seguintes *potências* indicadas:

1.ª) $(5x^2y^3)^2$
2.ª) $(-2a^2b^3c)^3$
3.ª) $\left(\frac{1}{2}\ a^2bx\right)^4$
4.ª) $(3a^nb^m)^2$
5.ª) $(ax^{-2})^3$ $(x \neq 0)$
6.ª) $(3a^{-3} \cdot b^2)^{-2}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$
7.ª) $\left(\frac{1}{2}x^{-1} \cdot y^{-1}\right)^{-1}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$
8.ª) $(8x^{-n})^{-2n}$ $(x \neq 0)$
9.ª) $(x^n \cdot y^m \cdot z^p)^{-1}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0)$

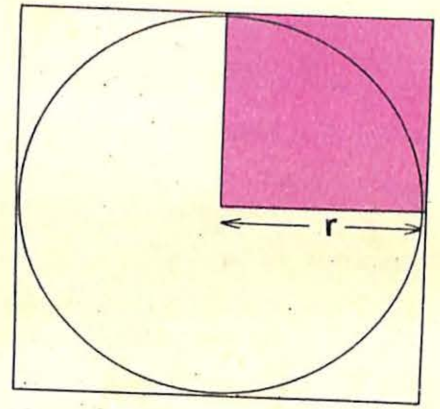
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 27

Escreva a expressão literal que representa a *área* de cada uma das seguintes figuras coloridas:

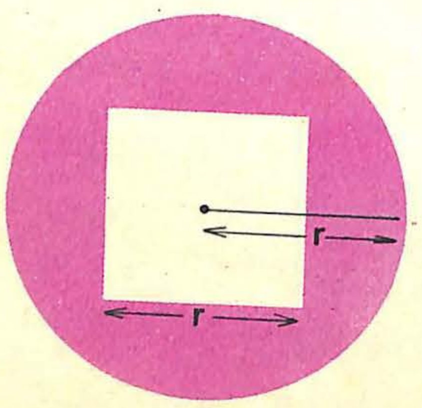
1.ª)



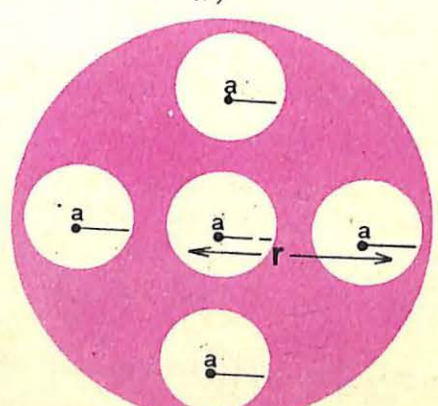
2.ª)



3.ª)



4.ª)



2. *Técnicas usuais na multiplicação; "produtos notáveis"*

Algumas multiplicações de expressões literais — comumente chamadas de *"produtos notáveis"* — são efetuadas mediante técnicas que se guardam fàcilmente de memória. São elas:

1.ª) $\boxed{(a + b)^2 = \ ?}$

Temos: $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$
$= a(a + b) + b(a + b)$ (p.d.m.)
$= a^2 + ab + ba + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

ou:

$$\begin{array}{r} a \ + b \\ a \ + b \\ \hline a^2 + \ ab \quad\quad \\ + \ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Logo: $\boxed{\forall a,\ \forall b,\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

que permite dizer:

O quadrado da soma indicada de dois números quaisquer é igual ao quadrado do primeiro número, mais duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo número, mais o quadrado do segundo número.

Exemplos: $(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$(x + y)^2 = x^2 + 2 \times x \times y + y^2$

$$\left(\frac{m}{2} + 3n\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{m}{2} \times 3n + (3n)^2 =$$

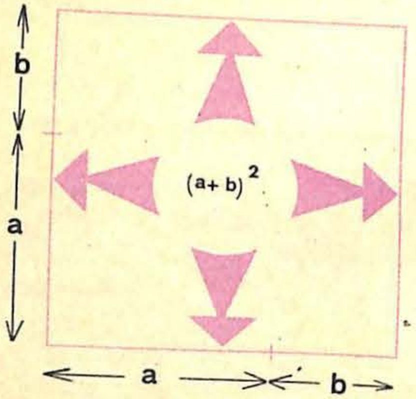
$$= \frac{m^2}{4} + 3mn + 9n^2$$

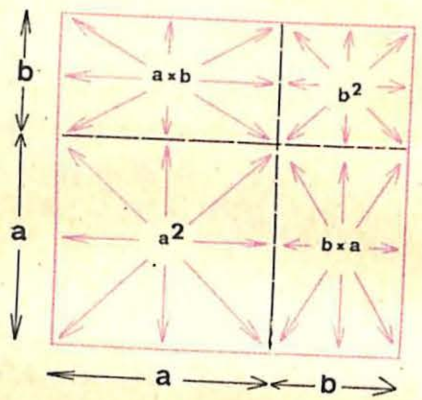
$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2 \times \sqrt{3} \times$
$\times \sqrt{2} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 28

1. Observe as figuras abaixo: a do lado esquerdo é um quadrado de $(a + b)$ unidades de lado e, portanto, a expressão que dá a sua *área* é $(a + b)^2$; do outro lado você tem o *mesmo quadrado*, porém repartido em dois quadrados de *áreas* a^2 e b^2, respectivamente, e os retângulos de áreas: $a \times b$ e $b \times a$.

Qual a sentença matemática (generalização) que traduz a igualdade das áreas dêsses dois quadrados?





2. Você pode determinar o quadrado de um número qualquer decompondo-o nas suas dezenas e unidades. Sabe como? É fácil. Seja, por exemplo, determinar o quadrado de 37. Temos:

$$\begin{aligned} 37^2 &= (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2 = \\ &= 900 + 420 + 49 = \\ &= 1\,369 \end{aligned}$$

2.ª) $\boxed{(a - b)^2 = \ ?}$

Temos:
$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\ &= a(a - b) - b(a - b) = \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Logo: $\boxed{\forall a, \ \forall b, \ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

que permite dizer:

> **O quadrado da diferença indicada de dois números quaisquer é igual ao quadrado do primeiro número, menos duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo número, mais o quadrado do segundo número.**

Exemplos: $(5 - 3)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$$\left(3x^2y - \frac{2}{5}\right)^2 = (3x^2y)^2 - 2 \times 3x^2y \times \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$$
$$= 9x^4y^2 - \frac{12}{5}x^2y + \frac{4}{25}$$

3.ª) $\boxed{(a + b)(a - b) = \ ?}$

Temos:
$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) = \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 = \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2 \end{array}$$

Logo: $\boxed{\forall a, \ \forall b, \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

ou seja:

> **O produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números quaisquer é igual ao quadrado do primeiro número menos o quadrado do segundo número.**

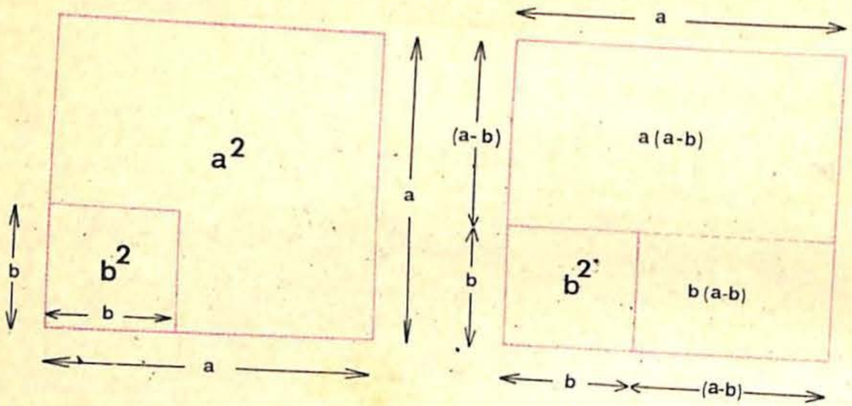
Exemplos: $(5 + 3)(5 - 3) = 5^2 - 3^2$

$(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 29

1. Se você subtrair do quadrado cujo lado mede a unidades (e, portanto, tem a^2 por *área*) o quadrado de lado b (que tem b^2 por *área*) e sendo $a > b$, qual a sentença matemática (generalização) que traduz a *diferença entre as áreas* dêstes quadrados?
Sugestão: Observe o que resta da figura da direita (quadrado de área a^2), quando se subtrai o quadrado de área b^2...



2. Você pode determinar o produto da *soma* pela *diferença* de dois números dispensando o lápis e o papel. Suponha, por exemplo, a multiplicação de 31 por 29. Como:

$$31 = 30 + 1 \quad \text{e} \quad 29 = 30 - 1$$

vem:

$$31 \times 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$$

cálculo que poderá ser feito "de cabeça".

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 30

1. Efetue as seguintes multiplicações usando a técnica dos *"produtos notáveis"*:

1.ª) $(3 + 2)^2$
2.ª) $(2x + 5y)^2$
3.ª) $\left(3c^2 + \frac{d}{7}\right)^2$
4.ª) $(x + \sqrt{3})^2$
5.ª) $(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2$
6.ª) $(8 - 1)^2$
7.ª) $\left(x - \frac{y}{3}\right)^2$
8.ª) $\left(2x^3y^2 - \frac{1}{4}\right)^2$
9.ª) $(y - \sqrt{5})^2$
10.ª) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$
11.ª) $(4 + 3)(4 - 3)$
12.ª) $(5x^2 + 1)(5x^2 - 1)$
13.ª) $\left(\frac{2}{3} + \sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{3} - \sqrt{6}\right)$
14.ª) $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)$
15.ª) $[(m + n) + a][(m + n) - a]$

2. Determine o quadrado dos seguintes números, decompondo-os nas suas dezenas e unidades:

1.º) 32 2.º) 43 3.º) 15 4.º) 24 5.º) 159 6.º) 211

3. Qual é o número que se deve somar a $3^2 + 4^2$ para se obter o quadrado de $(3 + 4)$?

4. Qual o número que se deve somar a $m^2 + n^2$ para se obter o quadrado de $(m - n)$?

5. Faça "de cabeça" as seguintes multiplicações:

1.ª) 21 por 19 2.ª) 51 por 49 3.ª) 201 por 199

3. *Cubos e multiplicações usuais de binômios*

Para o *cálculo* é útil conhecer-se ainda:

O cubo da soma de dois números quaisquer:

$$\boxed{\forall a,\ \forall b,\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

pois:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

O cubo da diferença de dois números quaisquer:

$$\boxed{\forall a,\ \forall b,\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

cuja demonstração segue a linha do caso anterior.

O produto da soma de dois números quaisquer pela soma de outros dois:

$$\boxed{\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ \forall d,\ (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

O produto da soma (x + a) *pela soma* (x + b):

$$\boxed{\forall x,\ \forall a,\ \forall b,\ (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

fàcilmente demonstráveis usando-se a *propriedade distributiva* da multiplicação em relação à adição.

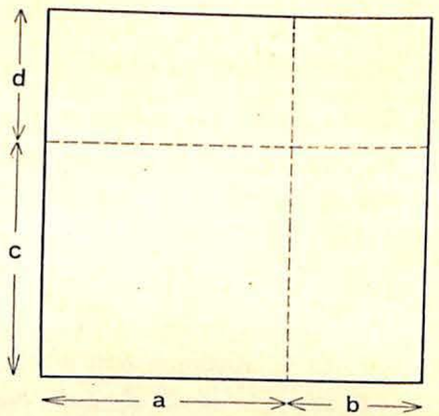
TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 31

1. A base do retângulo da figura ao lado está dividida em dois segmentos de comprimentos a e b unidades, respectivamente. A altura também está dividida em dois segmentos de comprimentos c e d, respectivamente. Pergunta-se:

   1.º) quais as expressões literais que descrevem os comprimentos da base e da altura;

   2.º) *idem*, da área de cada um dos quatro retângulos que compõem a figura;

   3.º) qual a sentença matemática (é uma generalização) que traduz ser a área da figura de dimensões $(a + b)$ e $(c + b)$ igual à soma das áreas dos retângulos que a compõem.



2. Efetue os seguintes *cubos*, aplicando resultados já conhecidos:

1.º) $(x + y)^3$	3.º) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^3$	5.º) $\left(3x - \frac{y}{2}\right)^3$
2.º) $(2a + 3b)^3$	4.º) $(x - y)^3$	6.º) $(mn - 1)^3$

3. Efetue as seguintes multiplicações, aplicando resultados conhecidos:

1.ª) $(x + y)(m + n)$	3.ª) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{2}{3}\right)$	5.ª) $(x + m)(x - n)$
2.ª) $(3a + 2b)(5c + 4d)$	4.ª) $(x - y)(m - n)$	6.ª) $(5a + 3)(5a - 3)$

PRÁTICAS MODERNAS — Grupo 32

Exercícios-modêlo

Demonstre que:

1. $\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ \forall d,$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então: $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Temos: $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = (a \times b^{-1}) \times (c \times d^{-1}) =$ (lembrando que $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$) (pág. 25)

$= a \times b^{-1} \times c \times d^{-1} =$ (p.a.m.)

$= a \times c \times b^{-1} \times d^{-1} =$ (p.c.m.)

$= (a \times c) \times (b^{-1} \times d^{-1}) =$ (p.a.m.)

$= (a \times c) \times (b \times d)^{-1} =$ (*P4*) (pág. 26)

$= \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Aplicações: 1.ª) $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \times 5}{4 \times 7} = \dfrac{15}{28}$

2.ª) $\dfrac{3a}{4b} \times \dfrac{5a}{7b} = \dfrac{3a \times 5a}{4b \times 7b} = \dfrac{15a^2}{28b^2}$

3.ª) $\dfrac{b^2}{3} \times \dfrac{x}{5} \times \dfrac{x - y}{8a} = \dfrac{b^2x(x - y)}{3 \cdot 5 \cdot 8a} = \dfrac{b^2x^2 - b^2xy}{120a}$ $(a \neq 0)$

2. $\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ \forall d,$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

Partindo do *segundo membro:*

$\dfrac{ad + bc}{bd} = (ad + bc) \cdot (bd)^{-1} =$

$= (ad + bc) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) =$ (*P4*)

$= (ad)(b^{-1} \cdot d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) =$ (p.d.m.)

$= a \cdot d \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} + b \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} =$ (p.a.m. e p.c.m.)

$= a \cdot 1 \cdot b^{-1} + 1 \cdot c \cdot d^{-1} =$ (lembrando que $d \cdot d^{-1} = d^{1-1} = d^0 = 1$)

$= ab^{-1} + cd^{-1} =$ (e.n.m.)

$= \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$

obtivemos o *primeiro membro.* Logo, está demonstrado.

Aplicações: 1.ª) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \times 7 + 4 \times 5}{4 \times 7} = \dfrac{21 + 20}{28} = \dfrac{41}{28}$

2.ª) $\dfrac{3a}{4b} + \dfrac{5a}{7b} = \dfrac{3a \times 7b + 4b \times 5a}{4b \times 7b} = \dfrac{21ab + 20ab}{28b^2} = \dfrac{41a\cancel{b}}{28b^{\cancel{2}}} = \dfrac{41a}{28b}$

3.ª) $\dfrac{2x - 3}{4} + \dfrac{1 - x}{6} = \dfrac{6(2x - 3) + 4(1 - x)}{4 \times 6} = \dfrac{12x - 18 + 4 - 4x}{24} =$

$= \dfrac{8x - 14}{24} = \dfrac{\cancel{2}(4x - 7)}{\cancel{24}} = \dfrac{4x - 7}{12}$

3. $\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ \forall d,\ \forall e,\ \forall f,$ se $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$, então: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f} = \dfrac{adf + bcf + bde}{bdf}$

Temos: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f} = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) + \dfrac{e}{f} =$ (p.a.a.)

$= \dfrac{ad + bc}{bd} + \dfrac{e}{f} =$ (resultados anteriores)

$$= \frac{(ad + bc)f + bd(e)}{bdf} = \qquad (idem)$$

$$= \frac{adf + bcf + bde}{bdf} \qquad (\text{p.d.m.})$$

Aplicações:

1.ª) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}$

Temos: $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \times 5 \times 2 + 4 \times 2 \times 2 - 4 \times 5 \times 1}{4 \times 5 \times 2} = \frac{30 + 16 - 20}{40} =$

$$= \frac{26}{40} = \frac{13}{20}$$

2.ª) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ $\quad (x \neq 1,\ x \neq {}^-1,\ x \neq 0)$

Temos: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{1\,(x-1)x - 1\,(x+1)\,x + 1(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,(x-1)\,x} =$

$$= \frac{x^2 - x - x^2 - x + x^2 - 1}{(x^2 - 1)\,x} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - x}$$

3.ª) $\frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ac} + \frac{a-b}{ab}$ $\quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$

Temos: $\frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ac} + \frac{a-b}{ab} = \frac{(ac)(ab)(b-c) + (bc)(ab)(c-a) + (bc)(ac)(a-b)}{(bc)(ac)(ab)} =$

$$= \frac{(abc)a(b-c) + (abc)b(c-a) + (abc)c(a-b)}{(abc)\,.\,(abc)} =$$

$$= \frac{\cancel{(abc)}\,.\,[a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)]}{\cancel{(abc)}\,.\,(abc)} =$$

$$= \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{abc}$$

4.ª) $3x - \frac{y-2x}{5}$

Temos: $\frac{3x}{1} - \frac{y-2x}{5} = \frac{5\,(3x) - 1\,(y-2x)}{1 \times 5} =$

$$= \frac{15x - y + 2x}{5} = \frac{17x - y}{5}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

1. Efetue o *cálculo* indicado nos seguintes grupos de expressões literais:

a) 1.ª) $\frac{2a}{5b} \times \frac{{}^-3a}{7b}$ 3.ª) $\frac{n^2}{3} \times \frac{m}{4} \times \frac{n+m}{5a}$ 5.ª) $\frac{3x^2}{5x-1} \times \frac{2b}{1+3y} \times \frac{1}{4}$

2.ª) $\frac{4x}{5y} \times \frac{x}{8y} \times \frac{1}{2}$ 4.ª) $\frac{a}{a+b} \times \frac{{}^-b}{a-b}$ 6.ª) $\frac{1}{a+1} \times a + 1$

b) 1.ª) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} - \frac{x}{5}$ 5.ª) $\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{x}$ 9.ª) $\frac{y-z}{yz} + \frac{x-y}{xy} + \frac{z-x}{xz}$

2.ª) $\frac{2x-3}{4} + \frac{1-x}{6}$ 6.ª) $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ 10.ª) $\frac{m+n}{m-n} - \frac{n-m}{n+m}$

3.ª) $\frac{5a}{3b} - \frac{a-b}{4b}$ 7.ª) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x}$ 11.ª) $\frac{6}{1+x} - \frac{4}{1-x}$

4.ª) $2c + \frac{d-3c}{4} - 1$ 8.ª) $\frac{1-a^2}{a^2} + \frac{a+2}{2a} - \frac{1}{2}$ 12.ª) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}$

13.ª) $m - \frac{m+n}{2} + \frac{n}{3}$

2. Demonstre que:

1.º) $\forall m,\ \forall n,\ \forall p,\ \forall q$, se $n \neq 0$ e $q \neq 0$, então: $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$

2.º) $\forall x,\ \forall y,\ \forall a,\ \forall b$, se $y \neq 0$ e $b \neq 0$, então: $\frac{x}{y} \times \frac{a}{b} = \frac{x \times a}{y \times b}$

Simplificação de expressões literais — fatoração

4. *Que é "fatorar" uma expressão literal?*

No desenvolvimento do *cálculo* com expressões literais é sempre conveniente trabalhar com expressões literais *equivalentes*, escritas de maneira *mais simples*, isto é, *simplificadas*. Êste é o objetivo da *fatoração* de uma expressão literal, que significa também decompô-la em um *produto* de expressões literais mais simples.

As *técnicas de fatoração* — baseadas no uso das propriedades estruturais das operações — dependem do conjunto de onde os fatôres podem ser tomados e da aplicação que se irá fazer da expressão fatorada. Tais *técnicas* costumam receber nomes especiais, que serão destacados nos exercícios que se seguem:

1. **Pôr "em evidência"**: É a aplicação da *propriedade distributiva* da multiplicação em relação à adição (e subtração). Exemplos:

$$3a + 2a = (3 + 2)a = 5a$$

ou

$$3a + 2a = a(3 + 2) = a5 = 5a$$

e diz-se que o fator a foi pôsto "em evidência". Da mesma forma:

em $\frac{5}{7}x^2 + \frac{5}{7}y^2 = \frac{5}{7}(x^2 + y^2)$ o fator $\frac{5}{7}$ foi pôsto "em evidência"

em $b - b^3 = b(1 - b^2)$ o fator b foi pôsto "em evidência", e

em $x^2y - xy^2 = xy(x - y)$ os fatôres x e y foram postos "em evidência".

Como você "descobriria" o fator que deve ser pôsto "em evidência" na expressão literal: $8x^3 - 6x^2$?

Numa vista geral você já pode pôr o 2 em evidência, que é um fator comum aos têrmos $8x^3$ e $6x^2$. Então:

$$8x^3 - 6x^2 = 2(4x^3 - 3x^2)$$

Pode ser que para a finalidade desejada essa fatoração já satisfaça. Caso contrário, você ainda tem em $4x^3 - 3x^2$ fatôres comuns (o x^2, por ex.). Logo:

$$8x^3 - 6x^2 = 2x^2(4x - 3)$$

e a fatoração está completada. Para você conseguir *de uma vez* os fatôres comuns, basta determinar um *maior divisor comum* dos têrmos que compõem a expressão literal, usando a mesma técnica conhecida desde a 1.ª Série Ginasial: *multiplicam-se os fatôres comuns afetados dos menores expoentes*.

Assim, na fatoração da expressão: $4a^3x^3 - 6a^4x^2 + 18a^5x$, os *fatôres comuns* são 2, a^3 e x^1. Logo:

$$4a^3x^3 - 6a^4x^2 + 18a^5x = 2a^3x(2x^2 - 3ax + 9a^2)$$

Também:

$$\frac{x^2y}{4} - \frac{xy^2}{2} = \frac{xy}{2}\left(\frac{x}{2} - y\right)$$

$$x^{m+1} - x^m = x^m(x - 1)$$

Agora, dois exemplos nos quais se põem fatôres "em evidência" por *mais de uma vez*:

1.º) $ax + bx + ay + by$

pondo-se x "em evidência" nos dois primeiros têrmos: $x(a + b)$

pondo-se y "em evidência" nos dois últimos têrmos: $y(a + b)$

então: $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$

e pondo $(a + b)$ "em evidência", vem, finalmente:

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

2.º) $mn - 2n - 6 + 3m$

agrupando os têrmos com fatôres comuns e procedendo como no exemplo anterior:

$$\begin{aligned} mn - 2n - 6 + 3m &= mn - 2n + 3m - 6 = \\ &= n(m - 2) + 3(m - 2) = \\ &= (m - 2)(n + 3) \end{aligned}$$

2. **"Diferença de dois quadrados"**: É a aplicação do resultado já conhecido:

$$\forall a,\ \forall b,\quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemplos:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$16a^4 - 4b^2 = (4a^2 + 2b)(4a^2 - 2b)$$

NOTA IMPORTANTE

Lembre-se de que a fatoração de uma expressão depende do *conjunto* (considerado como Universo de trabalho) no qual serão tomados os fatôres e da aplicação que se deseja dar à expressão fatorada. Assim, por exemplo, fatorando 20:

no conjunto $\mathbb{Z}$, vem: $20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$

no conjunto $\mathbb{Q}$, vem: $2 = \frac{1}{2} \times 40$ (por ex.)

no conjunto $\mathbb{R}$, vem: $2 = \sqrt{20} \quad \sqrt{20}$ (por ex.)

O mesmo ocorre com as expressões literais. Seja, por ex., fatorar $2x^2 - 1$; sabendo-se que os fatôres pertencem

ao conjunto $\mathbb{Z}$, vem: $2x^2 - 1$ impossível

ao conjunto $\mathbb{Q}$, vem: $2x^2 - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

ao conjunto $\mathbb{R}$, vem: $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}\,.\,x + 1)(\sqrt{2}\,.\,x - 1)$

Salvo informação contrária, vamos supor como nosso Universo de trabalho o conjunto $\mathbb{R}$.

Outros exemplos de fatoração da *"diferença de dois quadrados"*:

$$(a + b)^2 - c^2 = [(a + b) + c][(a + b) - c] = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$100m^6 - 50n^8 = (10m^3 + \sqrt{50}n^4)(10m^3 - \sqrt{50}n^4)$$

Às vêzes ocorre pôr "em evidência" antes, como, por exemplo:

$$ax^2 - ay^2 = a(x^2 - y^2) = a(x + y)(x - y)$$

3. **"Quadrado da soma** (ou da **diferença) indicada de dois números"**: É suficiente lembrar os resultados conhecidos:

$$\forall a, \forall b, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{e} \quad \forall a, \forall b, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

pois as expressões que satisfazem o segundo membro de cada uma das igualdades acima, podem ser fatoradas, "voltando" para o primeiro membro. Assim:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \quad \text{e} \quad 4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$$

$\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\qquad$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

$x \mid y$ $\qquad$ $2a \mid 3b$

$2 \times x \times y = \underline{2xy}$ $\qquad$ $2 \times 2a \times 3b = \underline{12ab}$

Contra-exemplo: $4a^2 + 10ab + 9b^2 = ?$

$?$

$\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

$2a \mid 3b$

$2 \times 2a \times 3b = \underline{12ab}$

4. **Expressão da forma**: $x^2 + (a + b)x + ab$. Como:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

basta "voltar" do segundo membro e fatorá-la no produto das expressões: $(x + a)(x + b)$. Exemplos:

1.º) $x^2 + 5x + 6$

São procurados dois números (a e b), cuja *soma* é 5 e o *produto*, 6. Lembrando que o produto *positivo* ($^+6$) exige que ambos os fatôres sejam *positivos* ou *negativos*, temos as seguintes possibilidades:

$^+1$	e	$^+6$	ou	$^-1$	e	$^-6$
$^+2$	e	$^+3$	ou	$^-2$	e	$^-3$

Sendo a *soma* ($^+5$) um número *positivo*, os números procurados *só podem* ser: $^+2$ e $^+3$. Logo:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2.º) $a^2 - a - 20$

Temos: *produto:* $^-20$ (negativo); logo, os fatôres têm *sinais diferentes:*

$^-1$	e	$^+20$	$^-2$	e	$^+10$	$^-4$	e	$^+5$
$^+1$	e	$^-20$	$^+2$	e	$^-10$	$^+4$	e	$^-5$

soma: $^-1$ (negativo); portanto, os números *só podem* ser: $^+4$ e $^-5$

Logo: $a^2 - a - 20 = (a + 4)(a - 5)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 34

Usando *técnicas de fatoração* no conjunto $\mathbb{R}$, fatore as seguintes expressões literais:

Grupo A

1.ª) $4x + 3x$

2.ª) $\dfrac{2a}{5} - \dfrac{2b}{5}$

3.ª) $a + ax$

4.ª) $8x^3 - 6x^2$

5.ª) $4ax - 8ay$

6.ª) $7a^2b - 14b^2 + 21a^3b^3$

7.ª) $\dfrac{1}{2}x^2yz^3 + \dfrac{1}{4}xy^2z^2 + \dfrac{3}{8}x^3y^3z$

8.ª) $\dfrac{m^2}{6} - \dfrac{m^3}{4} + \dfrac{m^4}{2}$

9.ª) $24a^2b^5 + 32a^5b^6 - 8a^2b^2 - 16a^2b^3$

10.ª) $2x^n - 4x^{n+1}$

11.ª) $\dfrac{x^{2m}}{3} + \dfrac{x^m}{9}$

12.ª) $(m + n)x + (m + n)y$

13.ª) $(p + q)a - (p + q)b$

14.ª) $(x + y)m + (x + y)n$

15.ª) $6ax - 3bx + 4ay - 2by$

16.ª) $mn - x^2 + mx - nx$

17.ª) $x^3 - x^2 + x - 1$

18.ª) $a^2b - 1 + b - a^2$

Grupo B

1.ª) $m^2 - n^2$

2.ª) $x^2 - 1$

3.ª) $x^2 - 4$

4.ª) $x^2 - 5$

5.ª) $4x^2 - 9y^2$

6.ª) $9a^2 - \dfrac{1}{4}$

7.ª) $1 - a^4$

8.ª) $t^8 - t^4$

9.ª) $a^6 - 10$

10.ª) $\dfrac{36x^2}{81} - \dfrac{9y^2}{16}$

11.ª) $(x + y)^2 - z^2$

12.ª) $(2a^2 + 1)^2 - a^2$

13.ª) $100 - (3x - y)^2$

14.ª) $0{,}49 - p^2$

15.ª) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$

16.ª) $(m + n)^2 - (m - n)^2$

17.ª) $75a^2 - 16$

18.ª) $x^{2n} - y^{2n}$

Grupo C

1.ª) $a^2 + 2ab + b^2$ 2.ª) $x^2 - 8x + 16$ 3.ª) $144a^6 - 24a^3 + 1$

4.ª) $9a^4 + 24a^2b^2 + 16b^4$ 5.ª) $81x^4y^2 - 54x^3y^3 + 9x^2y^4$ 6.ª) $a^2 + a + \frac{1}{4}$

7.ª) $\frac{1}{9}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$ 8.ª) $x^4 - 2x^2y^3 + y^6$ 9.ª) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2$

10.ª) $0{,}81a^4 - 1{,}26a^2b + 0{,}49b^2$ 11.ª) $a^{2m} - 2a^mb^n + b^{2n}$

Grupo D

1.ª) $x^2 + 7x + 12$ 2.ª) $y^2 + y - 20$ 3.ª) $a^2 - 4a - 96$

4.ª) $m^2 - 8m + 12$ 5.ª) $t^2 - t - 2$ 6.ª) $n^2 + 44n - 45$

7.ª) $x^2 - 9x - 22$ 8.ª) $z^2 - 15z + 56$ 9.ª) $p^2 - 2p - 3$

10.ª) $y^2 + y - 2$ 11.ª) $x^2 + (a + b)x + ab$

5. *Simplificação de expressões literais*

No caso de as expressões literais indicarem *quocientes*, também chamados frações literais, a *simplificação* dos mesmos decorre do emprêgo de resultados já conhecidos. Exemplos:

1.º) $\boxed{\dfrac{36a^3b^4x^2}{24a^2b^6x^3}}$

Temos: $$\frac{36a^3b^4x^2}{24a^2b^6x^3} = \frac{\cancel{2^2} \cdot 3^{\cancel{2}} \cdot \cancel{a^3}\cancel{b^4}\cancel{x^2}}{\underset{\substack{\downarrow\\2}}{\cancel{2^3}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a^2}b^{\cancel{6}}x^{\cancel{3}}} = \frac{3a}{2b^2x}$$

2.º) $\boxed{\dfrac{12a^2y^2 - 27b^2y^2}{2axy + 3bxy}}$

Temos:

$$\frac{12a^2y^2 - 27b^2y^2}{2axy + 3bxy} = \frac{3y^2(4a^2 - 9b^2)}{xy(2a + 3b)} = \frac{3y^{\cancel{2}}\cancel{(2a + 3b)}(2a - 3b)}{x\cancel{y}\cancel{(2a + 3b)}} = \frac{3y(2a - 3b)}{x}$$

3.º) $\boxed{\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b}}$

Temos: $$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a - b)}} = a - b$$

Como foi feito com os números reais, pode-se *reduzir* as frações literais a um mesmo *denominador comum*. Exemplos:

1.º) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{a}$ $(a \neq 0)$

Nesse caso o denominador comum é a; portanto:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = \frac{x - y + z}{a}$$

2.º) $\dfrac{1 - a^2}{a^2} + \dfrac{a + 2}{2a}$ $(a \neq 0)$

Pode-se usar $2a^3$ como um *múltiplo comum* dos denominadores a^2 e $2a$. Então:

$$\frac{1 - a^2}{a^2} + \frac{a + 2}{2a} = \frac{2a(1 - a^2) + a^2(a + 2)}{2a^3} = \frac{2a - 2a^3 + a^3 + 2a^2}{2a^3} =$$

$$= \frac{2a - a^3 + 2a^2}{2a^3} = \frac{\cancel{a}(2 - a^2 + 2a)}{2a^{\cancel{3}}} = \frac{2 - a^2 + 2a}{2a^2}$$

Porém, usando como múltiplo comum dos denominadores a expressão: $2a^2$, que nesse caso é um m.m.c., por analogia com o que você fazia com os números inteiros, não é preciso simplificar a expressão final, pois é obtida diretamente. De fato:

$$\frac{1 - a^2}{a^2} + \frac{a + 2}{2a} = \frac{2\,(1 - a^2) + a(a + 2)}{2a^2} = \frac{2 - 2a^2 + a^2 + 2a}{2a^2} =$$

$$= \frac{2 - a^2 + 2a}{2a^2}$$

3.º) $\dfrac{a - 1}{a + 1} - \dfrac{a + 1}{a^2 - 1}$ $(a \neq 1$ e $a \neq -1)$

O m.m.c. dos denominadores é: $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$. Logo:

$$\frac{a - 1}{a + 1} - \frac{a + 1}{a^2 - 1} = \frac{(a - 1)(a - 1) - 1(a + 1)}{a^2 - 1} = \frac{a^2 - 2a + 1 - a - 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 - 3a}{a^2 - 1}$$

O mesmo ocorre com as expressões literais que envolvem *multiplicações* e *divisões* combinadas. Exemplos:

$$1.^{\circ})\quad \frac{a^2-b^2}{6a}\times\frac{12a}{a+b}\times\frac{1}{a-b}=\frac{(a^2-b^2)12a}{6a(a+b)(a-b)}=\frac{\cancel{(a+b)(a-b)12a}}{\cancel{(a+b)(a-b)6a}}=2$$

$$2.^{\circ})\quad \frac{a^2-x^2}{6ax}:\frac{a-x}{3x}=\frac{a^2-x^2}{6ax}\times\frac{3x}{a-x}=\frac{(a+x)\cancel{(a-x)3x}}{\cancel{(a-x)6}a\cancel{x}}=\frac{a+x}{2a}$$

$$3.^{\circ})\quad \left(\frac{2a}{x-y}\right)^2:\frac{4a}{x-y}=\left(\frac{2a}{x-y}\right)^2\times\frac{x-y}{4a}=\frac{\cancel{4a^2}}{(x-y)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{x-y}}{\cancel{4a}}=\frac{a}{x-y}$$

$$4.^{\circ})\quad \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}$$

Temos:

$$\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{1-1(1-x)}{1-x}}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}}=\frac{x}{\cancel{1-x}}\times\frac{\cancel{1-x}}{1}=x$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 35

Simplifique as seguintes *expressões literais:*

Grupo A

1.ª) $\frac{15amx^3}{40bmx}$

2.ª) $\frac{18cd^4}{27c^2d^3}$

3.ª) $\frac{85a^2b}{51b^2c}$

4.ª) $\frac{-12acx^2}{26a^2c^2x}$

5.ª) $\frac{84a^3b^2x}{35a^4bx^2}$

6.ª) $\frac{38m^3n^4r^2}{57m^4n^4r}$

7.ª) $\frac{b+b^2}{a+ab}$

8.ª) $\frac{2m+m^2}{2n+mn}$

9.ª) $\frac{a+ax}{a-ax}$

10.ª) $\frac{mx^2-m^3}{nx^2-m^2n}$

11.ª) $\frac{mxy-nxy}{m-n}$

12.ª) $\frac{35xz-45yz}{7x-9y}$

13.ª) $\frac{28x^3-49x^2+77x}{4x^2-7x+11}$

14.ª) $\frac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$

15.ª) $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$

16.ª) $\frac{10x^2-2xy}{15xy-3y^2}$

17.ª) $\frac{3a^2b-5ab^2}{3acd-5bcd}$

18.ª) $\frac{4m^2-25}{2m+5}$

19.ª) $\frac{8a^3+1}{64a^6-1}$

20.ª) $\frac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$

21.ª) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}$

22.ª) $\frac{a^3+3a^2}{a^2-9}$

23.ª) $\frac{a^2-4}{a^2+2a}$

24.ª) $\frac{2mx-10x}{m^2-25}$

Grupo B

1.ª) $\frac{2x}{3}+\frac{x}{3}-\frac{7x}{3}$

2.ª) $\frac{5x-3}{4a}-\frac{1-2x}{3a}-\frac{x}{12a}$

3.ª) $\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{x}$

4.ª) $\frac{1-x^2}{x^2}+\frac{x+2}{2x}+\frac{1}{2}$

5.ª) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$

6.ª) $3x+\frac{y-2xa}{5a}$

7.ª) $\frac{a^2}{a^2+ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a+b}$

8.ª) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}$

9.ª) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$

10.ª) $\frac{m+n}{m-n}+\frac{n-m}{m+n}-\frac{4mn}{m^2-n^2}$

11.ª) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

12.ª) $\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$

13.ª) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$

14.ª) $\frac{c}{b}-\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1$

15.ª) $\frac{8m^2}{12m}-\frac{n^2}{m^2}$

16.ª) $\frac{a+1}{3}+\frac{a-2}{15}$

17.ª) $m-\frac{m+n}{2}$

18.ª) $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ac}+\frac{a-b}{ab}$

19.ª) $\frac{a-b}{2b}-5+\frac{3ab-b^2}{b^2}$

20.ª) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$

21.ª) $x-\frac{x}{x-1}$

22.ª) $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$

23.ª) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$

24.ª) $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}$

25.ª) $a-x+\frac{x^2}{a+x}$

26.ª) $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+1$

27.ª) $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}$

28.ª) $\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}+\frac{2a^2}{a^2-1}$

29.ª) $\frac{2b-x}{x-b}+\frac{b-2x}{x+b}+\frac{3x(x-b)}{x^2-b^2}$

30.ª) $\frac{6}{1+x}-\frac{4}{1-x}-\frac{10x}{x^2-1}$

Grupo C

1.ª) $\frac{3a^2}{5x}\times\frac{2bx}{9a}\times\frac{1}{b}$

2.ª) $\frac{a}{a+b}\times\frac{-b}{a-b}$

3.ª) $\frac{15x}{x-y}\times\frac{x^2-y^2}{5}$

4.ª) $\frac{m-n}{m^2+mn}\times\frac{m^2-n^2}{m^2-mn}$

5.ª) $\frac{x^2-4x}{x^2-2x}\times\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+4}$

6.ª) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\times\frac{3a^2+3b^2}{a^2+2ab+b^2}$

7.ª) $\frac{3a}{b}:\frac{a}{2}$

8.ª) $\frac{8a^2}{2b}:4a$

9.ª) $4ab:\frac{b}{a}$

10.ª) $\frac{4a^2b}{5x^2y}:\frac{-2ab^2}{15x^2y}$

11.ª) $\frac{m}{m+n}:\frac{m}{n}$

12.ª) $\frac{x+y}{x-y}:\frac{1}{x-y}$

13.ª) $\frac{1}{x^2-y^2}:\frac{1}{x-y}$

14.ª) $(x+y):\frac{x+y}{x-y}$

Grupo D

1.ª) $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(a - \frac{b}{c}\right)$

2.ª) $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) : \frac{2y}{x^2 - y^2}$

3.ª) $\frac{4b^2}{a^2 - b^2} : \frac{4a^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

4.ª) $\left(1 + \frac{x-a}{x+a}\right) : \left(\frac{x+a}{x-a} - 1\right)$

5.ª) $\frac{8x^3}{x^3 - y^3} : \frac{4x^2}{x^2 + xy + y^2}$

6.ª) $\frac{a-b}{x+y} : \frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2}$

7.ª) $\dfrac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$

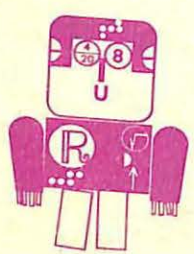
8.ª) $\dfrac{1 - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - 1}$

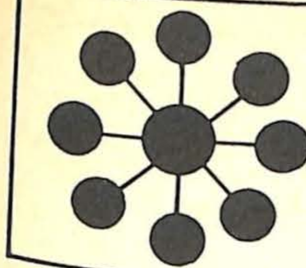
9.ª) $\left(x-3 + \frac{5x}{2x-6}\right) : \left(2x - 1 + \frac{15}{x-3}\right)$

10.ª) $\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right)$

11.ª) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 : \frac{(y-x)^2}{x^2y^2}$

12.ª) $\dfrac{\left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right) \cdot a^2}{\left(\frac{1+a}{1-a} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+a}\right)}$





3.ª Parte: - complementação do estudo das equações e sistemas de equações simultâneas do primeiro grau.

Equações e inequações

1. *Equações e inequações com uma variável, redutíveis ao primeiro grau*

O estudo do *cálculo literal* no conjunto $\mathbb{R}$ permite resolver uma série de equações e de inequações algébricas (também chamadas *fracionárias*) com uma variável, que se *reduzem ao primeiro grau*, sendo, portanto, de resolução conhecida.

Os exemplos dos *Exercícios de Aplicação* esclarecerão tôdas as passagens.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 36

1. Resolva as seguintes equações no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{\frac{x+5}{x} - \frac{2-3x}{2x^2} = 1}$ Neste caso, o 0 (zero) deve ser excluído do Conjunto-Universo, pois tal valor anula os denominadores das frações.

Usando como m.m.c. dos denominadores: $2x^2$, e aplicando *técnica* conhecida (divide-se $2x^2$ pelo denominador x, multiplica-se o quociente obtido ($2x$) pelo numerador $(x+5)$, . . .), temos:

$2x(x+5) - 1 \cdot (2-3x) = 2x^2$

$2x^2 + 10x - 2 + 3x = 2x^2$ (aplicou-se a p.d.m.)

$2x^2 - 2x^2 + 10x + 3x = 2$ (os têrmos em x^2 e em x "passaram" para o 1.º membro e o têrmo constante, para o segundo)

$13x = 2$ (os têrmos semelhantes foram "reduzidos")

$x = \frac{2}{13}$

Como $\frac{2}{13}$ *não anula* nenhum dos denominadores da equação e a torna *verdadeira*, segue-se que pertence ao seu Conjunto-Verdade, isto é, $\boxed{\frac{2}{13}}$ é a *solução* (raiz) da equação proposta.

2.ª) $\boxed{\dfrac{x+3}{x+1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+3}{x-2}}$ Estão excluídos $^-1$ e $^+2$ do Conjunto-Universo. Por quê?

Agora, o m.m.c. é: $(x+1)(x-2)$ e, seguindo a ordem anterior, vem:

$$\begin{aligned}
(x-2)(x+3) - 2(x-2) &= (x+1)(x+3)\\
x^2 + x - 6 - 2x + 4 &= x^2 + 4x + 3\\
x^2 - x^2 + x - 2x - 4x &= 6 - 4 + 3\\
{}^-5x &= 5 \iff x = \frac{5}{^-5} = {}^-1
\end{aligned}$$

Como $^-1$ *anula* o denominador $(x+1)$ da equação, então *não existe* valor de x que a torna verdadeira. Logo:

$$\exists x \;\Big|\; \frac{x+3}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x-2}$$

3.ª) $\boxed{\dfrac{10}{x^2-9} + \dfrac{x+4}{x+3} = \dfrac{x+2}{x-3}}$ Excluídos do Conjunto-Universo: $^-3$ e $^+3$.

m.m.c.: $x^2 - 9$; temos: $1 \,.\, (10) + (x-3)(x+4) = (x+3)(x+2)$

$$\begin{aligned}
10 + x^2 + x - 12 &= x^2 + 5x + 6\\
x^2 - x^2 + x - 5x &= 12 - 10 + 6\\
{}^-4x &= 8 \iff x = \frac{8}{^-4} = {}^-2
\end{aligned}$$

Como $^-2$ não anula nenhum dos denominadores, então $^-2$ é a *solução* (raiz) da equação.

4.ª) $\boxed{\dfrac{3x - a}{x+1} = 5b}$ Excluído do Conjunto-Universo: $^-1$.

m.m.c.: $x + 1$; temos:

$$\begin{aligned}
3x - a &= 5b(x+1)\\
3x - a &= 5bx + 5b\\
3x - 5bx &= 5b + a\\
x(3-5b) &= 5b + a \iff x = \frac{5b+a}{3-5b}
\end{aligned}$$

Se $b \neq \frac{3}{5}$ $\left(\text{pois } b = \frac{3}{5}\ \textit{anula} \text{ o denominador da expressão: } \frac{5b+a}{3-5b}\right)$, então a *solução* (raiz) da equação proposta é: $\dfrac{5b+a}{3-5b}$.

2. Resolva as seguintes *inequações* no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.ª) $\boxed{\dfrac{3x^2+1}{2} - \dfrac{6x^2-18}{4} > 5x}$

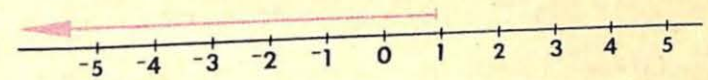
m.m.c.: 4

$$\begin{aligned}
2(3x^2+1) - 1(6x^2-18) &> 20x\\
6x^2 + 2 - 6x^2 + 18 &> 20x\\
\cancel{6x^2} - \cancel{6x^2} - 20x &> {}^-18 - 2\\
{}^-20x &> {}^-20\\
20x < 20 \iff x < \frac{20}{20} &\iff x < 1
\end{aligned}$$

Logo, o Conjunto-Verdade da inequação proposta é constituído de *todos* os números reais *menores que 1*, isto é:

$V = \{$n.os reais **menores** que 1$\}$

Gráfico:



NOTA: o 1 *não faz parte* da indicação da seta

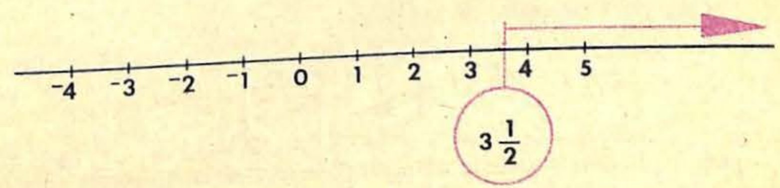
2.ª) $\boxed{\dfrac{1-2x^2}{2} \leqslant x - (x^2+3)}$

m.m.c.: 2

$$\begin{aligned}
1 - 2x^2 &\leqslant 2x - 2x^2 - 6\\
\cancel{-2x^2} + \cancel{2x^2} - 2x &\leqslant {}^-6 - 1\\
{}^-2x \leqslant {}^-7 \iff x \geqslant \frac{7}{2} &\iff x \geqslant 3\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto: $V = \left(\text{n.os reais } \textbf{maiores ou iguais} \text{ a } 3\tfrac{1}{2}\right)$

Gráfico:



NOTA: agora o $3\frac{1}{2}$ *faz parte* da indicação da seta.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 37

Resolva as seguintes *equações* e *inequações* no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.ª) $\frac{9}{x} - \frac{4}{9} = \frac{10}{x} - \frac{1}{2}$

2.ª) $\frac{x-3}{4x^2} - \frac{5-6x}{2x} = 3$

3.ª) $\frac{7}{x} + \frac{1}{3} = \frac{23-x}{3x} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4x}$

4.ª) $\frac{x-4}{x-8} = 9$

5.ª) $\frac{3x+6}{3} - 8 = \frac{x^2-10}{x} + 2$

6.ª) $\frac{x+4}{x+3} + \frac{10}{x^2-9} = \frac{x+2}{x-3}$

7.ª) $\frac{x+3}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x-2}$
(cuidado!) $\nexists x$

8.ª) $\frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x^2}{x-1} + x - \frac{x}{2}$
(cuidado!) $\forall x,\ x \neq 1$

9.ª) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{2x^2-4x-7}{x^2-5x+6}$

10.ª) $\frac{x+a}{x-a} - \frac{4a^2}{x^2-a^2} = \frac{x-a}{x+a}$

11.ª) $\frac{7}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{23-x}{3x} + \frac{1}{4}$

12.ª) $9 = \frac{x-8}{x-4}$

13.ª) $\frac{4x^2-3}{3} - 2x > \frac{4x^2+9}{3}$

14.ª) $\frac{x^2}{5} + 9 \geqslant \frac{x^2-8}{5} - 4x$

15.ª) $\left(\frac{3x}{14} - 1\right)6x \neq \frac{9x^2}{7} + 13$

16.ª) $\frac{5x^3}{8} - \left(2x + \frac{10x^3}{16}\right) < 0$

Sistemas de equações simultâneas

2. *Sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis; novas técnicas de resolução: Método da adição*

Você já aprendeu na 2.ª Série Ginasial a técnica denominada *Substituição de Variáveis* para a resolução de sistemas de equações simultâneas. Agora aprenderá nova técnica, conhecida com o nome de *método da Adição.*

Seja, por exemplo, o *sistema*:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Multiplicam-se ambas as equações por dois números tais que os coeficientes da variável que se quer eliminar tornem-se *iguais em valor* e de *sinais contrários.* No exemplo acima:

multiplica-se a primeira equação por 3 (coeficiente de x na segunda)

e

multiplica-se a segunda equação por $^{-}2$ (coeficiente de x na primeira, com sinal trocado)

isto é:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 21 \\ ^{-}6x + 10y = {}^{-}2 \end{cases}$$

Adicionando-se a seguir, membro a membro, essas equações, obtém-se uma *única equação* contendo **sòmente** a variável y, cujo valor é fàcilmente determinado:

$$+\begin{cases} \cancel{6x} + 9y = 21 \\ \cancel{^{-}6x} + 10y = {}^{-}2 \end{cases}$$
$$19y = 19 \Longleftrightarrow y = \frac{19}{19} = 1$$

Substituindo êsse valor de y na primeira equação, vem:

$$2x + 3 \times 1 = 7$$
$$2x + 3 = 7 \Longleftrightarrow 2x = 7 - 3 \Longleftrightarrow 2x = 4 \Longleftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

Logo: se $x = 2$ e $y = 1$, então o *par* ordenado (2, 1) é a *solução* do sistema proposto(*).

Outro *exemplo*: resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Basta *adicionar,* membro a membro, as equações "como estão", pois os coeficientes de uma das variáveis (y) já são *iguais* e de *sinais contrários* (1 e $^{-}1$). Logo:

$$+\begin{cases} x + \cancel{y} = 10 \\ x - \cancel{y} = 4 \end{cases}$$
$$2x = 14 \Longleftrightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

Substituindo êsse valor de x na primeira equação, vem:

$$7 + y = 10 \Longleftrightarrow y = 10 - 7 = 3$$

Portanto, o *par* ordenado (7, 3) é a *solução* do sistema proposto.

(*) A eliminação da variável y poderá ser obtida de modo análogo àquele empregado para a eliminação da variável x.

LEMBRETE AMIGO

A melhor *técnica* a ser empregada na resolução de um *sistema de equações simultâneas* é a sugerida pela própria "forma" com que se apresenta o sistema. Assim, por exemplo, para resolver os sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 31 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = y \\ \dfrac{2x-5y}{3} - \dfrac{3x+8y}{11} = -56 \end{cases}$$

é "aconselhável" o método da *Substituição de Variáveis*, pois o valor de uma delas já vem "declarado" numa das equações e pronto para ser *substituído* na outra. Já para os sistemas:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -3x + 5y = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

é preferível o método da *Adição*, pela rapidez com que *se elimina* uma das variáveis.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 38

Usando a técnica que achar *mais conveniente*, resolva os seguintes sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x + 5y = 31 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ y = 500 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} 8x + 5y = 36 \\ 4x - 5y = -12 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} x = 3y - 3 \\ x = \dfrac{y+14}{2} \end{cases}$

6.º) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 7y = -17 \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} x = y \\ x + y = 1\,000 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} x + 8y = 4 \\ -x - y = -4 \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$

10.º) $\begin{cases} x + y = 144 \\ x - y = 56 \end{cases}$

11.º) $\begin{cases} 2y + x = 12 \\ x = 3y + 2 \end{cases}$

12.º) $\begin{cases} \dfrac{5x}{4} + \dfrac{3y}{2} = 9 \\ \dfrac{17y}{2} - \dfrac{3x}{4} = 4 \end{cases}$

13.º) $\begin{cases} \dfrac{5x-y}{3} = 5 \\ \dfrac{4x+3y}{4} = 2x - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

14.º) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y - 68 = 3(x-1) \end{cases}$

15.º) $x = y = 200$

16.º) $\begin{cases} -3x + 2y = 12 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

3. *Sistema de duas equações com duas variáveis, redutíveis ao primeiro grau*

Resolva os seguintes *Sistemas*, também chamados *fracionários*, no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.º) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{x-y} = \dfrac{8}{5} & (1) \\ \dfrac{2x+y}{x+1} = 4 & (2) \end{cases}$

Ficam excluídos do Conjunto-Universo os pares ordenados que anulem os denominadores das equações do sistema(*).

Eliminando-se os denominadores de cada uma das equações (o m.m.c. da primeira equação é $5(x-y)$ e o da segunda, $(x+1)$), vem:

$$\begin{cases} 5(2x-y) = 8(x-y) \\ 2x+y = 4(x+1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 10x-5y = 8x-8y \\ 2x+y = 4x+4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 10x-8x-5y+8y = 0 \\ 2x-4x+y = 4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x+3y = 0 \\ -2x+y = 4 \end{cases}$$

$4y = 4 \iff y = \boxed{1}$ e, substituindo em: $2x + 3y = 0$, temos:

$$2x + 3(1) = 0 \iff 2x = -3 \iff x = \boxed{\dfrac{-3}{2}}$$

Os valôres $\frac{-3}{2}$ (para x) e 1 (para y) *não anulam* os denominadores das equações do sistema e, portanto, o *par* ordenado $\left(\frac{-3}{2}, 1\right)$ é a *solução* procurada.

2.º) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+2x} + \dfrac{1+y}{1+2y} = 1 \\ \dfrac{x-3}{y} = 2 \end{cases}$

(*) Os pares ordenados que são excluídos têm as formas: (1) (a, a), $a \in \mathbb{R}$ e (2) $(-1, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Estão excluídos os pares que têm as formas: 1) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ e 2) $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Eliminando os denominadores e seguindo a ordem do exercício anterior, temos:

$$\begin{cases} (1 + 2y)(1 + x) + (1 + 2x)(1 + y) = (1 + 2x)(1 + 2y) \\ x - 3 = 2y \end{cases}$$

e, efetuando as operações indicadas:

$$\begin{cases} 1 + x + 2y + \underline{2yx} + 1 + y + 2x + \underline{2xy} = 1 + 2y + 2x + \underline{4xy} \\ x - 3 = 2y \end{cases}$$

Na primeira equação apareceram têrmos em xy que serão eliminados ao se reduzirem os têrmos semelhantes $(4xy - 4xy)$. Após tal redução, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

cuja resolução já é conhecida:

$$+\begin{cases} x + y = -1 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \quad \text{(multiplicaram-se os membros por } (-1))$$

$$3y = -4 \iff y = \boxed{\frac{-4}{3}}$$

e, como: $x = 2y + 3$, temos: $x = 2\left(\frac{-4}{3}\right) + 3 = \frac{-8}{3} + 3 = \boxed{\frac{1}{3}}$ e a *solução* do sistema é o *par* ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$. Por quê?

3.º) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$ Excluídos os pares $(0, 0)$.

Seguindo o curso normal de resolução (eliminação dos denominadores, etc.), obteremos o sistema:

$$\begin{cases} 6y + 6x = 5xy \\ 6y - 6x = xy \end{cases}$$

no qual os têrmos em xy não são eliminados de pronto, como no exercício anterior.

Dêsse modo, pode-se resolver o sistema proposto usando-se de uma *substituição* (nesse caso chamada "artifício de cálculo"): $\frac{1}{x} = u$ e $\frac{1}{y} = v$, resultando daí um *nôvo sistema*, agora nas variáveis u e v:

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{6} \\ u - v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Resolvendo-o, pelo método da *adição*, obtém-se:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ e "voltando" as variáveis } x \text{ e } y\text{: } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Logo, o *par* ordenado $(2, 3)$, que *não anula* nenhum dos denominadores, é a *solução* do sistema dado.

NOTA: Se você adicionar membro a membro as equações propostas, poderá eliminar imediatamente a variável y, pois obterá:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{x} = 1 \iff x = 2$$

Substituindo o valor de x numa das equações, encontrará: $y = 3$.

4.º) $\begin{cases} \frac{1}{x - y} + \frac{1}{x + y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Excluídos os pares: 1) (a, a), $a \in \mathbb{R}$ e 2) $(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Pode-se resolvê-lo de maneira análoga à do anterior, com as *substituições*:

$$\frac{1}{x - y} = u \quad \text{e} \quad \frac{1}{x + y} = v$$

resultando o sistema: $\begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ u - v = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ que, pelo método da *Adição*,

fornece: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{1}{6} \end{cases}$ e "voltando" às variáveis x e y: $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

ou $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ e a *solução* do sistema proposto é o *par* ordenado (4, 2).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 39

Resolva os seguintes sistemas *fracionários*, no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.º) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3 \\ \dfrac{x}{3} + 2y = 1 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-y}{2x+1} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5y+1} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{3x+2y-10}{4x-5y+1} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} \dfrac{2y-1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+1}{2x+1} + \dfrac{y+1}{2y+1} = 1 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

6.º) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{-2}{9} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{18} \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{3}{x+y} = 0 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{y-2} = 12 \\ \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{y-2} = 22 \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} \dfrac{4}{3x-2y} - \dfrac{2}{x+2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{3x-2y} + \dfrac{1}{x+2y} = 1 \end{cases}$

$\left(\text{Sugestão: } \dfrac{1}{3x-2y} = u; \ \dfrac{1}{x+2y} = v\right)$

10.º) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a+b}{a-b} \\ \dfrac{bx}{a+b} + \dfrac{ay}{a-b} = \dfrac{1}{a-b} \end{cases}$ $(a \neq \pm b)$

4. *Sistemas de três equações simultâneas do primeiro grau com três variáveis; técnicas de resolução*

Pode-se, para resolver um sistema de *três* equações do primeiro grau com *três variáveis*, empregar os métodos da *Substituição*, da *Adição* e ainda *artifícios de cálculo* que conduzam mais fàcilmente à *solução*.

Os exemplos, a seguir, darão uma idéia da resolução de tais sistemas com o uso de diferentes métodos. Exemplos:

1.º) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = {}^-3 \\ {}^-x + 5y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Aplicando o método da *Substituição de Variáveis*: "tira-se" da primeira equação (ou de qualquer outra) o valor de z (ou de outra variável). Logo:

$$z = {}^-3 - 2x + y$$

Substituindo êsse valor nas duas últimas equações, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} z = {}^-3 - 2x + y \\ {}^-x + 5y + 3({}^-3 - 2x + y) = 0 \\ 3x - 2y - ({}^-3 - 2x + y) = 2 \end{cases}$$

Basta agora resolver o sistema formado pelas duas últimas equações (sòmente nas variáveis x e y), que, reduzidos os têrmos semelhantes, se apresenta:

$$\begin{cases} {}^-7x + 8y = 9 \\ 5x - 3y = {}^-1 \end{cases}$$

Aplicando qualquer dos métodos conhecidos, obtém-se: $x = 1$ e $y = 2$.

Substituindo êsses valôres na equação: $z = {}^-3 - 2x + y$, vem:

$$z = {}^-3 - 2 \times 1 + 2 = {}^-3 - 2 + 2 = {}^-3$$

e a *solução* do sistema proposto é dado pela trinca ordenada (1, 2, $^-3$).

Faça a *verificação.*

NOTA: A *trinca* ordenada, *solução* do sistema, é constituída dos *únicos* elementos do *Conjunto-Verdade*, que é a *intersecção* dos três *Conjuntos-Verdade*, relativos a cada uma das equações que compõem o sistema.

2.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

A título de exercício você irá resolvê-lo empregando o método da *Substituição*: "tire" o valor de x na segunda equação, o de y na terceira e substitua êsses valôres na primeira, que se transformará numa equação do primeiro grau na única variável z.

Com a finalidade de mostrar mais um *artifício de cálculo*, pode-se também resolver o sistema proposto procedendo-se da seguinte maneira:

Adicionemos, membro a membro, as três equações que compõem o sistema:

$$2x + 2y + 2z = 12$$

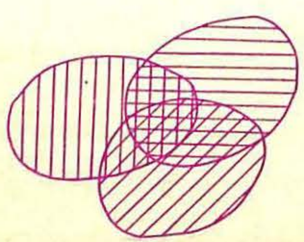
ou dividindo por 2:

$$x + y + z = 6$$

Subtraindo desta equação, respectivamente, as equações do sistema dado, obtém-se:

$$x + y + z - (x + y) = 6 - 3 \text{ ou } z = 3$$
$$x + y + z - (x + z) = 6 - 4 \text{ ou } y = 2$$
$$x + y + z - (y + z) = 6 - 5 \text{ ou } x = 1$$

Portanto, a *trinca* ordenada (1, 2, 3) é a *solução.*



Resolva, aplicando qualquer dos métodos estudados, os seguintes *sistemas de equações*, no Conjunto-Universo $\mathbb{R}$:

1.º) $\begin{cases} {}^{-}5x + 2y + z = 2 \\ 4x - y - 3z = {}^{-}7 \\ x - 2y - z = {}^{-}6 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 5x - y = 7 - z \\ x - z = 1 - 2y \\ 3z - 2y = 11 - 3x \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}4z = 29 \\ 0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z = 38 \\ 0{,}4x + 0{,}5y + 0{,}7z = 51 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} y + z - x = m \\ z + x - y = n \\ x + y - z = p \end{cases}$

(variáveis: x, y e z)

6.º) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 22 \\ y + z = 28 \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 16 \\ y + z = 9 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + z = 21 \\ 5x - 6z = {}^{-}10 \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x + y + t = 16 \\ x + z + t = 18 \\ y + z + t = 20 \end{cases}$

10.º) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{{}^{-}1}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{z} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{{}^{-}7}{2} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{{}^{-}13}{2} \end{cases}$

NOTA: Os sistemas do exercício 9.º (*quatro* equações com *quatro* variáveis) e 10.º (três equações *fracionárias*) são resolvidos de maneira análoga aos anteriores, pelo uso dos *métodos* e *artifícios de cálculo* introduzidos.

LEMBRETE AMIGO

A intensa *exercitação* que até agora você teve no manipular o *cálculo operatório*, no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), o habilita a resolver:

1. qualquer tipo de *equação* e de *inequação* do *primeiro grau* com *uma variável*;
2. *equações* e *inequações fracionárias* redutíveis ao primeiro grau;
3. *sistemas de equações simultâneas* (duas ou mais) do *primeiro grau* e *fracionárias*, redutíveis ao primeiro grau;

e, portanto, ... TODOS OS PROBLEMAS cujas sentenças matemáticas se traduzem nas *equações*, *inequações* e *sistemas* estudados.

4.ª Parte: - tratamento elementar moderno dos polinômios a uma variável; estrutura de anel.

Polinômios

1. *Conceito de polinômio em uma variável*

A fim de melhor conhecer as estruturas que integram a Álgebra Elementar, é necessário estudar as *propriedades* de um *especial conjunto de expressões algébricas*, conhecidas pelo nome de **polinômios.** Tal conjunto será indicado pela letra $\mathbb{P}$.

Que é um *polinômio*?

Tôda expressão algébrica que pode ser posta sob a *forma-padrão:*

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

onde:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n \text{ representam } \textit{números reais}$$

e

$$x \text{ é uma } \textit{variável} \text{ no conjunto } \mathbb{R},$$

sendo seus expoentes números inteiros e positivos, é denominada *polinômio na variável* x(*).

$$a_0;\ a_1x^1;\ a_2x^2;\ \ldots\ldots;\ a_nx^n$$

dizem-se *têrmos* do polinômio e $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, seus *coeficientes*.

Exemplos:

1. A expressão: $8 + 3x + 5x^2$ é um *polinômio* na variável x, cujos *coeficientes* são: $a_0 = 8$; $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$.

(*) Diz-se também: *polinômio em uma indeterminada.*

2. A expressão: $\quad ^{-}4x^5 + 2x - \frac{1}{2} + 5x^2 - 9x^4 + x^3$

também é um *polinômio* na variável x, pois pode ser escrita sob a *forma-padrão*:

$$\frac{-1}{2} + 2x + 5x^2 + x^3 + {}^{-}9x^4 + {}^{-}4x^5$$

onde:

$$a_0 = \frac{-1}{2};\ a_1 = 2;\ a_2 = 5;\ a_3 = 1;\ a_4 = {}^{-}9 \text{ e } a_5 = {}^{-}4$$

Nesse caso diz-se que o polinômio está *ordenado* segundo as potências *crescentes* de x. No caso do polinômio se apresentar sob a forma:

$$^{-}4x^5 + {}^{-}9x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + \frac{-1}{2},$$

diz-se que êle está *ordenado* segundo as potências *decrescentes* de x.

Contra-exemplos:

1.º) $3 + 2x^{-1} - 5x^{-2}$ é uma expressão algébrica, porém *não é polinômio* (lembre-se de que os expoentes da variável x devem ser *inteiros* e *positivos*)

2.º) $\frac{1}{x} + 8$ também *não é polinômio* $\left(\text{lembre-se de que } \frac{1}{x} = x^{-1}\right)$

3.º) $4x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 + x$ ... *não é polinômio* (... o expoente deve ser *inteiro* e positivo)

Indicando por $\mathbb{P}$ o *conjunto dos polinômios*, cada um dos elementos dêsse conjunto (que é um polinômio) pode ser indicado por uma letra maiúscula latina. Assim, temos:

$$A = 8 + 3x + 5x^2$$

$$B = {}^{-}4x^5 + 2x - \frac{1}{2} + 5x^2 - 9x^4 + x^3$$

onde:

$$A \in \mathbb{P} \quad \text{e} \quad B \in \mathbb{P}$$

Se

$A = 2 + 5x^2 - \sqrt{8}\,.\,x^3 + x^5$, A é um polinômio? $A \in \mathbb{P}$?

Sim, pois A pode ser colocado sob a *forma-padrão*, como é fácil verificar:

$$A = 2 + 0.x + 5x^2 - \sqrt{8}.x^3 + 0.x^4 + 1.x^5$$

$$\text{onde} \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = -\sqrt{8} \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 1 \end{cases}$$

e a sentença $A \in \mathbb{P}$ é *verdadeira*.

Para facilitar o estudo dos *polinômios*, denomina-se:

Polinômio nulo, o que possui todos os coeficientes iguais a zero. Indicação:

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots\ldots + 0x^n$$

Polinômio constante, o que possui sòmente o *primeiro têrmo* da forma-padrão, isto é, um *número real*. Exemplos:

$A = 5$ (o mesmo que: $A = 5 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots\ldots$)

$B = \frac{-1}{3}$ $\left(\text{o mesmo que: } B = \frac{-1}{3} + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots\ldots\right)$

$C = a$ (o mesmo que: $C = a + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots\ldots$)

$D = 0$ (o mesmo que: $D = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$)

O polinômio constante que possui $a_0 = 1$ é denominado *polinômio-unidade*. Indicação:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots\ldots\ldots + 0x^n$$

É comum chamar-se:

monômio, o polinômio nulo (0) ou o polinômio que possui um *único coeficiente* diferente de zero; exemplos:

$4x^3$ (o mesmo que: $0 + 0x + 0x^2 + 4x^3 + 0x^4 + \ldots\ldots$)

0 (o mesmo que: $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots\ldots$)

binômio, o polinômio que possui *dois únicos têrmos* com coeficientes diferentes de zero; exemplo:

$x^2 - 1$ (o mesmo que: $-1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots\ldots$)

trinômio, o polinômio que possui *três únicos têrmos* com coeficientes diferentes de zero; exemplo:

$-3x^2+7x+2$ (o mesmo que: $2+7x+-3x^2+0x^3+0x^4+\ldots\ldots$)

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 41

1. Assinale quais das seguintes expressões algébricas são *polinômios*:

1.ª) $2 + 3x - 5x^2$ 2.ª) $-5x^2 + 3x + 2$ 3.ª) $x + x^{\frac{1}{2}}$

4.ª) $x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ 5.ª) $\frac{1}{x}$ 6.ª) 8

7.ª) $3 + 2x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{5}}$ 8.ª) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$

2. Escreva os seguintes polinômios sob *forma-padrão*:

1.º) $A = 2 + 5x^2 - 3x^4 - x + \frac{2}{3}x^3$

2.º) $B = 8y^2 + 2y^6 - \frac{13}{5}$ (a variável agora é y)

3.º) $C = a + bx + cx^2 + dx^3$ (os coeficientes são: a, b, c e d, respectivamente)

4.º) $D = -2t^5 + 8t^4 + \frac{1}{2}t^3 - 15t^2 - t + \frac{3}{4}$ (a variável agora é t)

5.º) $E = \frac{1}{2}$

6.º) $F = -9z^3$ (a variável agora é z)

3. Escreva os seguintes polinômios segundo as potências *decrescentes* de x:

1.º) $A = 8x^3 - 4 + 5x^2 + x^4 + \frac{1}{2}x$

2.º) $B = 1 - 7x + x^2 - 9x^5$

3.º) $C = x^2 - 5x + 6$

4. Assinale se são V ou F, sendo $\mathbb{P}$ o conjunto dos polinômios:

1.ª) Se $A = x^2 - 5x + 6$, então $A \in \mathbb{P}$

2.ª) Se $A = x^2 - 5x + 6$, então $A \notin \mathbb{P}$

3.ª) Se $B = \frac{1}{x}$, então $B \notin \mathbb{P}$

4.ª) Se $B = \frac{1}{x}$, então $B \in \mathbb{P}$

2. *Igualdade de polinômios*

Dados dois polinômios:

$$A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots\dots + a_nx^n$$

e

$$B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots\dots\dots + b_nx^n$$

diz-se que A é *igual* a B e indica-se:

$$A = B \quad \text{se, e sòmente se:} \quad \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Assim, por exemplo, os polinômios:

$$A = 1 + 8x - 3x^2 + 7x^3$$

e

$$B = a + bx + cx^2 + dx^3$$

serão *iguais* se, e sòmente se: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \\ c = {}^-3 \\ d = 7 \end{cases}$

Operações com polinômios

3. *Adição*

Dados os polinômios:

$$A = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_nx^n$$
$$B = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots\dots + b_nx^n$$

chama-se *soma* dos polinômios A e B ao *polinômio*:

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

Logo: $\forall A,\ \forall B \in \mathbb{P},\ (A + B) \in \mathbb{P}$ e a *operação* que determina a *soma* de dois polinômios é denominada *adição de polinômios*. Exemplos:

1.º) Efetuar a *adição* dos polinômios:

$$A = 5 - 3x + \frac{1}{2}x^2$$
$$B = 4 + 2x - 7x^2$$

Temos: $A + B = (5 + 4) + ({}^-3 + 2)x + \left(\frac{1}{2} + {}^-7\right)x^2$

ou $\quad A + B = 9 - x - \frac{13}{2}x^2$

2.º) *Idem*, com os polinômios:

$$C = 8 - x + 10x^3 + 5x^5$$
$$D = {}^-5x + 3x^4 + x^2$$

Ordenando os polinômios de acôrdo com a *forma-padrão*, temos:

$$\begin{array}{rl} C = & 8 + {}^-1x + 0x^2 + 10x^3 + 0x^4 + 5x^5 \\ D = & 0 + {}^-5x + 1x^2 + 0x^3 + 3x^4 + 0x^5 \\ \hline C + D = & 8 + {}^-6x + 1x^2 + 10x^3 + 3x^4 + 5x^5 \end{array}$$

Para adicionar *três* ou *mais* polinômios, adiciona-se à *soma* dos dois primeiros o terceiro e assim sucessivamente.

ATENÇÃO: Se a *soma* de dois polinômios é o *polinômio nulo*, então os polinômios são chamados *opostos*. Exemplo:

$$\begin{array}{rl} A = & 2 - 5x + 8x^2 \\ B = & {}^-2 + 5x - 8x^2 \\ \hline A + B = & 0 + 0x + 0x^2 \quad (\textit{polinômio nulo}) \end{array}$$

Logo, os polinômios A e B são *opostos*. O polinômio B também é indicado por $-A$ (que é o *polinômio oposto aditivo* de A).

OBSERVAÇÃO: No estudo das propriedades estruturais da adição de polinômios a *existência do elemento inverso* (I) é garantida pela existência do *polinômio oposto aditivo*, a *qualquer* polinômio dado. Nestas condições está sempre definida a *subtração* entre dois polinômios A e B: $A - B = A + (-B)$

Propriedades da adição: $\forall A,\ \forall B,\ \forall C \in \mathbb{P}$:

(A) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(N) $A + 0 = A$ (O *polinômio nulo* é o **elemento** *neutro*)

(I) $A + (-A) = 0$

(C) $A + B = B + A$

Verifique você mesmo essas propriedades com os polinômios:

$$A = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^5 \qquad B = 1 + x + x^2 \qquad C = {}^-9x + 6x^4$$

Observe também que a *estrutura* do conjunto $\mathbb{P}$ de polinômios com relação à operação de *adição* é a de **Grupo Comutativo** (vale ANIC).

LEMBRETE AMIGO

O *conjunto dos polinômios* ($\mathbb{P}$), com relação à operação de *adição* de polinômios, tem a ***mesma extrutura*** que o *conjunto dos números reais relativos* ($\mathbb{R}$), pois ambos têm estrutura de *Grupo Comutativo*. Isto significa que os Sistemas Matemáticos:

$\mathbb{P}, +$ e $\mathbb{R}, +$ *comportam-se da mesma maneira!*

4. *Grau de um polinômio*

Dado o polinômio:

$$A(^*) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

se $a_n \neq 0$, diz-se que o expoente n é o *grau* do polinômio. Exemplos:

$4 - 2x^2 + \frac{1}{5}x^3$ é um polinômio do *terceiro grau* (3 é o maior expoente)

$3x^2 - 6x + 7$ é um polinômio do *segundo grau* (2 é o maior expoente)

$x^3 + 1 - 8x^5 + 3x^2 + x$ é um polinômio do *quinto grau* (5 é o maior expoente)

OBSERVAÇÃO: O grau do polinômio *soma* (não-nulo) de dois polinômios A e B (também não-nulos) é sempre *menor* que ou *igual* ao *máximo dos dois graus*. Exemplos:

1.º) Se $A = 2 + 3x + 5x^2$ (grau 2) e $B = {}^-1 + x + 6x^3$ (grau 3) então: $A + B = 1 + 4x + 5x^2 + 6x^3$ (grau 3: *igual* ao *máximo* dos graus 2 e 3).

2.º) Se $A = 6x^2 - 2x + 3$ (grau 2) e $B = {}^-6x^2 + 6x - 5$ (grau 2) então: $A + B = 4x - 2$ (grau 1: *menor* que o *máximo* dos graus, que é 2).

(*) Suposto não-nulo.

1. Determine a, b e c, a fim de que sejam *iguais* os polinômios:

1.º) $2 - 5x + 11x^2$ e $a + bx + cx^2$

2.º) $\frac{^-1}{3} + \sqrt{2}x - x^2$ e $a + bx - 4cx^2$

3.º) $3x + \frac{2}{5}x^2$ e $a + \frac{b}{2}x + 3cx^2$

4.º) $1 + \frac{3}{4}x - 100x^2$ e $(a - 2) + (b + 3)x + (c - 1)x^2$

2. Efetue as *adições* dos seguintes polinômios:

1.º) $A = 3+2x-5x^2+x^3$ $\quad B = 5-x+\frac{2}{3}x^2+9x^3$

2.º) $A = x^5+5x^4-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ $\quad B = {}^-2x^5+23x^3-x^2$ $\quad C = x^4-7x^3-x+\frac{2}{5}$

3.º) $A = 9-x+8x^3-12x^4$ $\quad B = {}^-9+x-8x^3+12x^4$

4.º) $A = 8x^2-5+3x^4+\frac{2}{3}x$ $\quad B = {}^-4x+12x^3-9x^4+1$ $\quad C = x-1$ $\quad D = 3+x-x^2+x^3-x^4$

(É conveniente ordenar os polinômios segundo as potências *crescentes* ou *decrescentes* de x.)

3. Preencha, de modo a tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) O polinômio: $5 - x + 8x^2 - 5x^3$, é o *oposto aditivo* do polinômio: $^-5 + x - \ldots\ldots$

2.ª) O polinômio: $5 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + x^3$, é do ...... grau.

3.ª) O polinômio: $6x^2 - 1 + 2x^5 - x^3 + 8x$, é do ..... grau.

4.ª) O grau do *polinômio-soma* dos polinômios: $2 - 5x^2 + 8x^3$ e $1 + 3x^2 - 5x^3$, é .....

5.ª) O grau do *polinômio-soma* (não-nulo) de dois polinômios é sempre *menor* ou ..... ao máximo dos dois graus.

6.ª) O grau do *polinômio-soma* dos polinômios: $^-9x^2 + x + 1$ e $9x^2 + 13x - 2$, é .....

4. Verifique:

1.º) que a *adição* dos polinômios: $A = 2 + 3x - 5x^2$; $B = 1 + x - 4x^2$ e $C = 3 - 4x$ é *associativa*;

2.º) qual é o *elemento neutro*, no conjunto $\mathbb{P}$ dos polinômios, com relação à operação *adição*;

3.º) qual é o *elemento inverso* (o mesmo, neste caso, que o polinômio *oposto aditivo*) do polinômio: $3 - 9x^2 + 2x^3 - x^4$;

4.º) que a *adição* dos polinômios A e B, do exercício 1.º, é *comutativa*.

5. Qual é a *estrutura* do conjunto $\mathbb{P}$, dos polinômios, com relação à operação *adição*?

5. *Multiplicação*

Dados os polinômios:

$$A = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_nx^n$$

e

$$B = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots\dots + b_mx^m$$

chama-se *produto* dos polinômios A e B, ao *polinômio*:

$$A \cdot B = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots\dots + a_nb_mx^{n+m}$$

Logo: $\forall A$, $\forall B \in \mathbb{P}$, $(A \cdot B) \in \mathbb{P}$ e a operação que determina o *produto* de dois polinômios é denominada *multiplicação* de polinômios.

Exemplo:

Efetue a *multiplicação* dos polinômios:

$$A = 5 - 2x \quad \text{e} \quad B = 2 + 3x - x^2$$

O *produto*: $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots\dots$ pode ser obtido através da seguinte disposição prática, onde figuram sòmente os *coeficientes*:

$$\begin{array}{llll}
b_0 & b_1 & b_2 & \\
a_0 & a_1 & & \\
\hline
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \\
 & a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 \\
\hline
a_0b_0 & a_0b_1 + a_1b_0 & a_0b_2 + a_1b_1 & a_1b_2
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{r}
2 + 3x - x^2 \\
5 - 2x \\
\hline
10 + 15x - 5x^2 \\
- 4x - 6x^2 + 2x^3 \\
\hline
10 + 11x - 11x^2 + 2x^3
\end{array}$$

Para multiplicar *três* ou *mais* polinômios, multiplica-se o *produto* dos dois primeiros pelo terceiro e assim sucessivamente.

O *grau* do polinômio-produto de dois polinômios é igual à *soma* dos *graus* dos polinômios fatôres. Assim, no exemplo estudado, temos:

$$\begin{array}{rll}
B = & 5 - 2x & \text{(grau: 1)} \\
B = & 2 + 3x - x^2 & \text{(grau: 2)} \\
A \cdot B = & 10 + 11x - 11x^2 + 2x^3 & \text{(grau: 3, } \textit{soma} \text{ dos graus)}
\end{array}$$

Propriedades da multiplicação: $\forall A, \forall B, \forall C \in \mathbb{P}$:

(A) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(N) $A \cdot 1 = A$ (O elemento *neutro* é o *polinômio-unidade*, também chamado *elemento-unidade*.)

(C) $A \cdot B = B \cdot A$

ATENÇÃO: *Não existe* propriedade que diga respeito à *existência do elemento inverso* (I) ou *oposto multiplicativo*, pois nem todo polinômio, diferente de zero, admite *inverso*. Exemplo: O polinômio x não admite *inverso*, pois a sentença aberta:

$$x \times A = 1$$

tem Conjunto-Verdade *vazio*, por não existir nenhum polinômio que, multiplicado por x, dê o *polinômio-unidade* (1).

Lembre-se de que a expressão: $\frac{1}{x}$, **não é polinômio!**

Relacionando a *multiplicação* e a *adição* de polinômios, temos ainda a *propriedade distributiva*:

$$\text{(D)} \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Verifique você mesmo essas propriedades (A), (N), (C) e (D) com os polinômios: $A = 2 + 3x - x^2$, $B = 5 - 2x$ e $C = 1 + x - 3x^3$.

6. NOVIDADE: *Nova estrutura algébrica*: ***Anel Comutativo***

Quando num conjunto estão definidas *duas* operações:

adição (+) com as propriedades ANIC

multiplicação (×) com as propriedades ANC

e mais a *propriedade distributiva* (D) da multiplicação em relação à adição, diz-se que o conjunto tem uma **estrutura de Anel Comutativo** com *elemento-unidade*. Assim, por exemplo:

1. O conjunto **Z** (dos inteiros relativos), com relação às operações *adição* e *multiplicação*, tem uma estrutura de **Anel Comutativo.** Verifique.
2. O conjunto $\mathbb{P}$ (dos polinômios a uma variável com coeficientes em $\mathbb{R}$), com relação às operações *adição* e *multiplicação*, tem uma estrutura de **Anel Comutativo.**

É o que foi visto no item 5.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 43

1. Efetue as *multiplicações* dos seguintes polinômios:

   1.º) $A = 3 - 5x + 2x^2 - 8x^3$ $\qquad B = 1 + 2x + x^2$

   2.º) $A = 2x^4 - 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ $\qquad B = x - 4$

   3.º) $A = 3x - x^2 + 4x^5$ $\qquad B = 1 + 2x - x^2$ $\qquad C = 3 + 5x$

   4.º) $A = 7x^2 - x + 2$ $\qquad B = 1 - 3x$ $\qquad C = x + 1$

2. Preencha, de modo a tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) Se o polinômio A é do *terceiro grau* e o polinômio B é do *segundo grau*, então o polinômio-produto $A \,.\, B$ é do .... grau;

   2.ª) O *elemento neutro*, no conjunto $\mathbb{P}$ dos polinômios, com relação à operação *multiplicação*, é o polinômio ....

3. Verifique:

   1.º) que a multiplicação dos polinômios A, B e C é *associativa* (empregue os polinômios do exercício 1, 4.º);

   2.º) que a multiplicação dos polinômios A e B é *comutativa* (use os polinômios do exercício 1, 2.º);

   3.º) que o *polinômio-unidade* $(1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots)$ é o *elemento neutro* no conjunto $\mathbb{P}$, com relação à *multiplicação* (multiplique-o pelo polinômio A, do exercício 1, 1.º).

4. Se $A = 3x^2 - 5x + 7$; $B = 2x - 1$ e $C = x + 2$, então:

   $A\ (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$ (propriedade distributiva)

   e

   $(B + C) \,.\, A = B \,.\, A + C \,.\, A$ (propriedade distributiva)

5. Qual é a *estrutura* do conjunto $\mathbb{P}$, dos polinômios, com relação às *operações adição* e *multiplicação*?

7. *Divisão*

Dados os polinômios A e $B \neq 0$ (isto quer dizer que o polinômio B não é o *polinômio nulo*), chama-se *quociente* de A por B ao polinômio C, *quando existe*, tal que:

$$A = B \,.\, C$$

O polinômio A é denominado *dividendo* e o polinômio B, *divisor*. Diz-se também que:

o polinômio B *divide* o polinômio A;

o polinômio A é *divisível* por B e por C (que por sua vez são *divisores* de A).

A *operação* que permite determinar o *quociente* é denominada *divisão de polinômios*. Assim, por exemplo, dados os polinômios:

$$A = x^2 - 5x + 6 \quad \text{e} \quad B = x - 3$$

o *quociente* de A por B é o polinômio $C = x - 2$, pois:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \,.\, (x - 2) \quad \text{(verifique!)}$$

ATENÇÃO: *Nem sempre existe* o polinômio C com essa propriedade, isto é, dados dois polinômios: A e $B \neq 0$, nem sempre é possível determinar o quociente de A por B. Essa mesma situação você encontrou no conjunto dos números inteiros, onde nem sempre era possível determinar o *quociente* de dois números inteiros: a e $b \neq 0$. Surgiu, então, o *quociente aproximado* e o *resto*, passando a operação a denominar-se *divisão aproximada*. Lembra-se?

Também agora, no conjunto $\mathbb{P}$ dos polinômios, dados dois polinômios A e $B \neq 0$, é *sempre possível* determinar dois polinômios: C e R, onde o polinômio R é de *grau menor* que o polinômio B tais que:

$$A = B \,.\, C + R$$

onde C é o *quociente* (aproximado) e R o *resto* da *divisão aproximada* de A por B.

Se $R = 0$ (polinômio nulo), então a divisão é *exata* (definida simplesmente como *divisão de polinômios*).

Por enquanto será ensinada uma *técnica* para se efetuarem as *divisões* entre polinômios com uma variável. Seja, por exemplo, efetuar a *divisão* do polinômio: $2x^3 - 5x^2 + x - 8$, pelo polinômio: $x^2 + 3x - 4$.

Procedemos da seguinte maneira, supondo os polinômios *ordenados*(*):

1. Divide-se o *primeiro têrmo do dividendo* $(2x^3)$ pelo *primeiro têrmo do divisor* (x^2), obtendo-se, assim, o *primeiro têrmo do quociente* $(2x)$;

2. multiplica-se o primeiro têrmo do quociente pelo divisor e subtrai-se o produto $(-2x^3 - 6x^2 + 8x)$ do dividendo $(2x^3 - 5x^2 + x - 8)$; a diferença obtida $(-11x^2 + 9x - 8)$ representa um *resto*, cujo primeiro têrmo $(-11x^2)$, dividido pelo primeiro têrmo do divisor, dará o segundo têrmo do quociente (-11);

(*) Deve-se, nas divisões de polinômios, ordená-los segundo as potências *decrescentes* (ou *crescentes*) de x.

3. multiplica-se o segundo têrmo do quociente pelo divisor e subtrai-se o produto do primeiro resto obtido; e assim sucessivamente até que se encontre para resto o polinômio nulo (*divisão exata*) ou um polinômio cujo primeiro têrmo não seja divisível pelo primeiro têrmo do divisor (*divisão aproximada*).

Disposição prática:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 5x^2 & +\ x & -\ 8 & x^2 + 3x - 4 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -\ 6x^2 & +\ 8x & & 2x - 11 \longrightarrow \text{quociente (aproximado)} \\ \cline{1-4}
 & -\ 11x^2 & +\ 9x & -\ 8 & \\
 & +\ 11x^2 & +\ 33x & -\ 44 & \\ \cline{2-4}
 & & \multicolumn{2}{r}{\underbrace{42x - 52}_{\text{resto}}} &
\end{array}
$$

Logo: $\boxed{2x^3 - 5x^2 + x - 8 = (x^2 + 3x - 4) \cdot (2x - 11) + 42x - 52}$

e a divisão é *aproximada.*

Outros exemplos:

1.º) Efetue a divisão de: $15x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x$ por $5x^2 + 3x - 1$

Temos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
15x^5 & -\ x^4 & -\ 4x^3 & +\ 5x^2 & -\ x & 5x^2 + 3x - 1 \\ \cline{6-6}
-15x^5 & -\ 9x^4 & +\ 3x^3 & & & 3x^3 - 2x^2 + x \longrightarrow \text{quociente (exato)} \\ \cline{1-5}
 & -10x^4 & -\ x^3 & +\ 5x^2 & & \\
 & +\ 10x^4 & +\ 6x^3 & -\ 2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & +\ 5x^3 & +\ 3x^2 & -\ x & \\
 & & -5x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & \\ \cline{3-5}
 & & 0x^3 & +\ 0x^2 & +\ 0 & \\
\end{array}
$$

(polinômio nulo)

Logo: $\boxed{15x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x = (5x^2 + 3x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x)}$

e a divisão é *exata.*

2.º) Efetue a divisão de: $3x^4 - 5x^3 + 1$ por $2x^2 - x$.

Temos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^4 & -\ 5x^3 & & +\ 1 & 2x^2 - x \\ \cline{5-5}
-3x^4 & +\ \frac{3}{2}x^3 & & & \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{7}{8} \longrightarrow \text{quociente (aproximado)} \\ \cline{1-2}
 & -\ \frac{7}{2}x^3 & & +\ 1 & \\
 & +\ \frac{7}{2}x^3 & -\ \frac{7}{4}x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ \frac{7}{4}x^2 & +\ 1 & \\
 & & +\ \frac{7}{4}x^2 & -\ \frac{7}{8}x & \\ \cline{3-4}
 & & & \underbrace{-\frac{7}{8}x + 1}_{\text{resto}} &
\end{array}
$$

Logo: $\boxed{3x^4 - 5x^3 + 1 = (2x^2 - x) \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{7}{8}\right) + \frac{-7}{8}x + 1}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 44

Efetue as *divisões* entre os seguintes polinômios:

1.º) $x^2 - 2x + 1$ e $x + 1$
2.º) $5x^3 - 8x^2 + 2x + 9$ e $x^2 - 2x + 3$
3.º) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $x + 1$
4.º) $2x^3 - 5x^2 + 6x - \frac{64}{27}$ e $3x - 2$
5.º) $6x^4 - 19x^3 + 3x^2 + 19x + 6$ e $3x^2 - 5x - 3$
6.º) $2x^3 - 10x^2 - x + 5$ e $-2x + 5$
7.º) $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 3$ e $4x^2 - 3x + 5$
8.º) $4x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 7x - 3$ e $x^3 - 3x - 1$
9.º) $-6 + 3x + 13x^2 - 4x^3 - 5x^4 + 3x^5$ e $-2 + x + 3x^2$
10.º) $15 - 11x - 2x^2 + 6x^3$ e $5 + 3x$

LEMBRETE AMIGO

Os conjuntos: **Z** (dos números inteiros relativos) e **P** (dos polinômios), *"comportam-se"* da mesma maneira com relação às operações *adição* e *multiplicação*, isto é, êles têm a *mesma estrutura*:

de **Grupo Comutativo**, com relação à *adição*;

de **Anel Comutativo**, com relação à *adição* e *multiplicação*.

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 45

Você já sabe que os *Sistemas Matemáticos* (isto é, um *conjunto* munido de uma ou mais *operações*) que possuam a MESMA ESTRUTURA, *comportam-se* da mesma maneira. Nestas condições, se um Sistema Matemático possui, por exemplo, estrutura de GRUPO, é *sempre possível* resolver-se nesse Sistema a equação:

$$\boxed{A * x = B}$$

onde A e B representam, em nossas *Práticas*, elementos dos conjuntos **Z**, **Q**, **R** ou do conjunto **P** dos polinômios. De fato, a solução dessa equação é dada por.

$$\boxed{x = B * A'}$$

representando A' o *elemento inverso* de A e $*$ a *operação* definida no conjunto que se estuda.
Exemplo: Resolver as seguintes *equações*:

1.ª) $\boxed{8 + x = 12}$ no Conjunto-Universo **Z** (que possui estrutura de GRUPO em relação à operação *adição*)

A solução é dada por:

$x = 12 + (^-8)$, isto é, *4*, sendo $(^-8)$ o elemento *inverso* (aditivo) de 8, pois a *operação* que figura na equação é a *adição*.

2.ª) $\boxed{8 \times x = 12}$ no Conjunto-Universo $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ (que possui estrutura de GRUPO em relação à operação *multiplicação*)

A solução é dada por:

$x = 12 \times \frac{1}{8}$, isto é, $\frac{3}{2}$, sendo $\frac{1}{8}$ o elemento *inverso* (multiplicativo) de 8, pois a *operação* que figura na equação é a *multiplicação*.

3.ª) $\boxed{A + X = B}$ no Conjunto-Universo **P** (que possui estrutura de GRUPO em relação à operação *adição*)

representando A e B os polinômios dados:

$$A = {}^-2 + 5x - 3x^2, \quad B = 5 - x + 6x^2$$

e X o *polinômio* que se procura, a fim de tornar *verdadeira* a sentença: $A + X = B$.

Como o conjunto **P** dos polinômios possui estrutura de GRUPO em relação à *adição*, segue-se que:

$$X = B + (-A),$$

sendo $(-A)$ o *polinômio oposto* (ou *inverso aditivo*) do polinômio A.

Logo: $X = (5 - x + 6x^2) + [-({}^-2 + 5x - 3x^2)]$
$X = 5 - x + 6x^2 + 2 - 5x + 3x^2$
$X = 7 - 6x + 9x^2$

e a *solução* da equação proposta:

$$({}^-2 + 5x - 3x^2) + X = (5 - x + 6x^2)$$

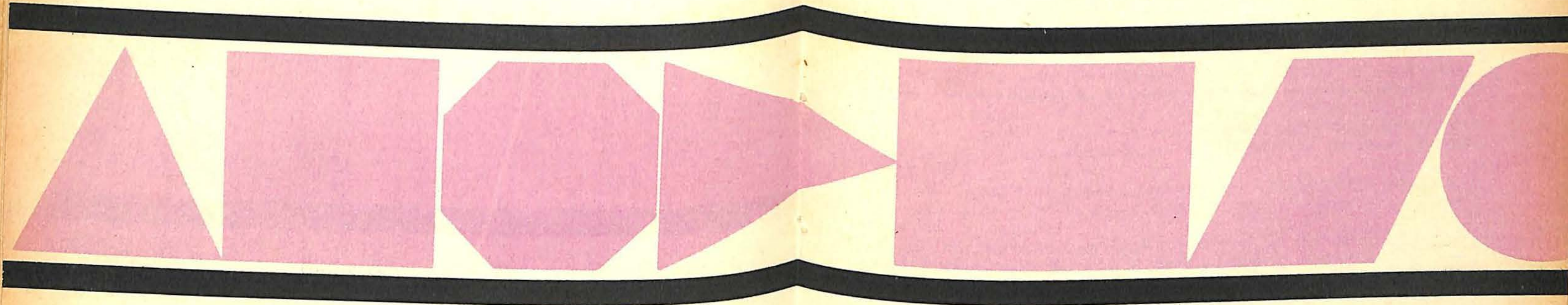
é o polinômio: $7 - 6x + 9x^2$.

Desfrutando a vantagem de saber que um dado Sistema Matemático possui estrutura de GRUPO, resolver as seguintes equações:

1.ª) $5 + x = 12$ no Conjunto-Universo **Z**
2.ª) $^-3 + x = 7$ no Conjunto-Universo **Z**
3.ª) $9 \times x = 18$ no Conjunto-Universo $\mathbb{Q}^*$
4.ª) $1 \times x = \frac{-1}{2}$ no Conjunto-Universo $\mathbb{Q}^*$
5.ª) $\frac{3}{2} + x = 5$ no Conjunto-Universo **R**
6.ª) $3 + 2x = 10$ no Conjunto-Universo **R**
7.ª) $(3 - 2x + 9x^2) + X = (5 + x - 3x^2)$ no Conjunto-Universo **P**
8.ª) $(x^2 + 8x) + X = (x^2 + 8x)$ no Conjunto-Universo **P**
9.ª) $(5x) + X = \left(\frac{1}{2} - x + 8x^3\right)$ no Conjunto-Universo **P**
10.ª) $\left(1 + \frac{1}{3}x - x^2 + 5x^3 - 2x^4\right) + X = \left({}^-4x^3 - x + \frac{2}{5}\right)$ no Conjunto-Universo **P**

capítulo 3

ESTUDO DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS



1.ª Parte: - fazendo Geometria ...
- figuras geométricas planas: curvas fechadas simples
- um pouco de Topologia ...

2.ª Parte: - relações e operações com conjuntos de pontos no plano
- semi-reta; segmento de reta; semi-plano
- medida de segmentos; segmentos; congruentes

3.ª Parte: - ângulos; medida de ângulos; ângulos congruentes
- problemas de aplicação

4.ª Parte: - explorando demonstrações ...
- ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal

1.ª Parte: - fazendo Geometria...
- figuras geométricas planas: curvas fechadas simples
- um pouco de Topologia...

Fazendo Geometria...

1. *Objetivos da Geometria*

Até aqui você estudou e trabalhou com **conjuntos de números.** Estabeleceu *relações, operações* e *propriedades*, dentro da Matemática conhecida pelo nome de *Aritmética*. A seguir estudou *sentenças matemáticas*, ressaltando-lhes as *estruturas algébricas*, na parte conhecida pelo nome de *Álgebra*.

Agora, ao invés de conjuntos de números, você estudará **conjuntos de pontos.** Estará ainda dentro da Matemática, na parte chamada GEOMETRIA.

Os *conjuntos de pontos* constituirão as **figuras geométricas,** para as quais também serão estabelecidas *relações, operações, propriedades* e *sentenças matemáticas*.

Se na *Aritmética* e na *Álgebra* o Universo de trabalho foi o *conjunto de todos os números* ($\mathbb{R}$), na *Geometria*, o Universo de trabalho será o *conjunto de todos os pontos*, conhecido com o nome de **espaço** ($\mathbb{E}$), no qual "vivem" as figuras geométricas, tais como as *linhas*, os *planos*, as *superfícies*,... que são subconjuntos de $\mathbb{E}$.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Há milhares de anos, *babilônios* e *egípcios* usaram as primeiras idéias de Geometria para: estudar *Astronomia*, construir *pirâmides*, *medir* seus campos de agricultura, etc. *Euclides*, um famoso grego, escreveu o primeiro livro de Geometria há 2 200 anos, numa época em que Geometria significava "medida da Terra".

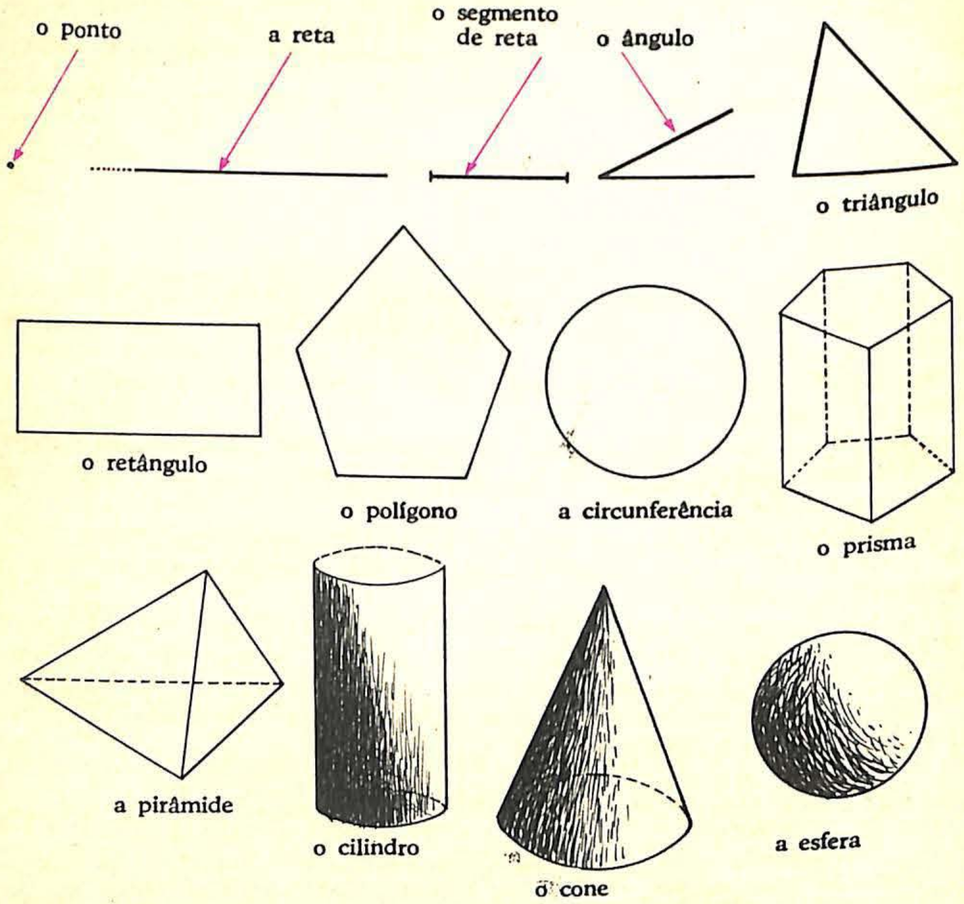
Hoje, em plena *era do espaço*, Geometria tem outros significados. Que é *espaço? Espaço*, para nós, é o **conjunto de todos os pontos.** Em outras palavras, o *espaço* "abrange tudo"!

Uma viagem para Marte, por exemplo, envolve o nosso *espaço*. Se uma *nave espacial* pretendesse fazer tal viagem deveria, entre outras coisas, conhecer no *espaço*: o *"caminho"* que êsse planêta faz ao redor do Sol, sua *localização* e sua *velocidade*.

Pois bem, os estudos ligados principalmente aos *caminhos* e *localização* no *espaço* pertencem à Geometria atual.

2. *Tudo começou com o ponto...*

Tôda figura geométrica é um *conjunto* de *pontos*. Desde a Escola Primária, você "desenha" as figuras geométricas associando-as a modelos físicos. São, pois, familiares os "desenhos" que lembram:



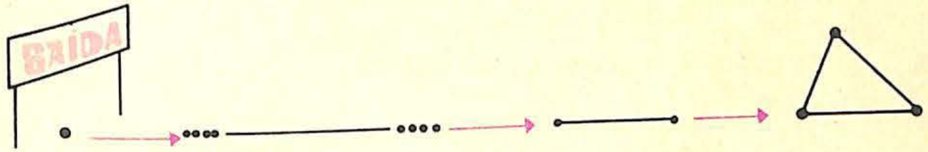
Na Geometria, a ser estudada, você irá conhecer melhor as figuras geométricas por meio de *propriedades* que as caracterizam e que são *sempre verdadeiras*, qualquer que seja a precisão com que foram desenhadas.

Para isso será necessário *conceituá-las*, além de desenhá-las.

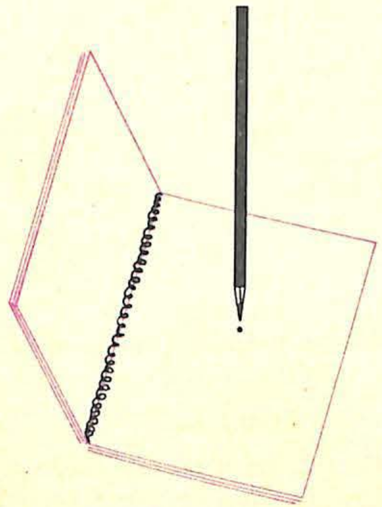
Se você quisesse, por exemplo, *definir* um *triângulo*, poderia dizer que se trata de um *conjunto de pontos*. Porém, tôda figura geométrica é um conjunto de pontos. Então é necessário mais "alguma coisa" para dar a idéia do que seja um triângulo.

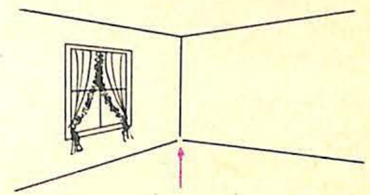
Dizendo que o triângulo é um conjunto de *segmentos de retas*, com determinadas propriedades, você desejaria saber o que é um *segmento de reta* que, por sua vez, exige saber-se que é uma *reta*, e esta, o que é um *ponto!*

Logo, *tudo começou com o ponto*, que passa a ser, assim, o *primeiro elemento* da Geometria, ou seja, a *figura mais simples*, usada para definir as demais. Como antes do ponto "não há nada", êle *não vai ser definido* e por isso é considerado um *conceito primitivo*.



A *imagem* de um ponto pode ser obtida pela marca deixada pela ponta de um lápis (bem apontado!) numa fôlha de papel ou o "canto" onde se encontram as duas paredes de sua sala de aula com o assoalho.



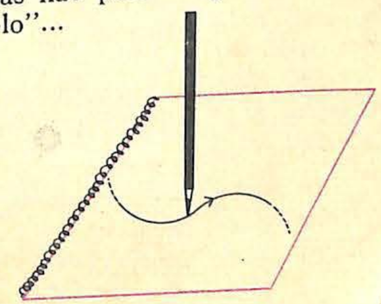


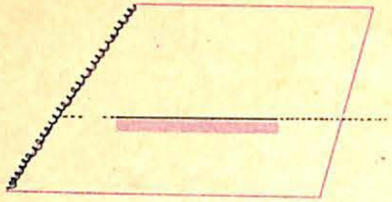
Mas guarde bem: êstes desenhos revelam apenas uma *idéia* do ponto, pois na verdade o ponto da Geometria não possui "tamanho" e você sabe que não encontramos nada no mundo físico sem dimensão!

Você pode, portanto, imaginar um ponto, mas não pode "segurá-lo" nem "carregá-lo"...

Deslocando-se a ponta de um lápis pela fôlha de papel, ficará descrita a figura geométrica denominada *linha* ou *curva*.

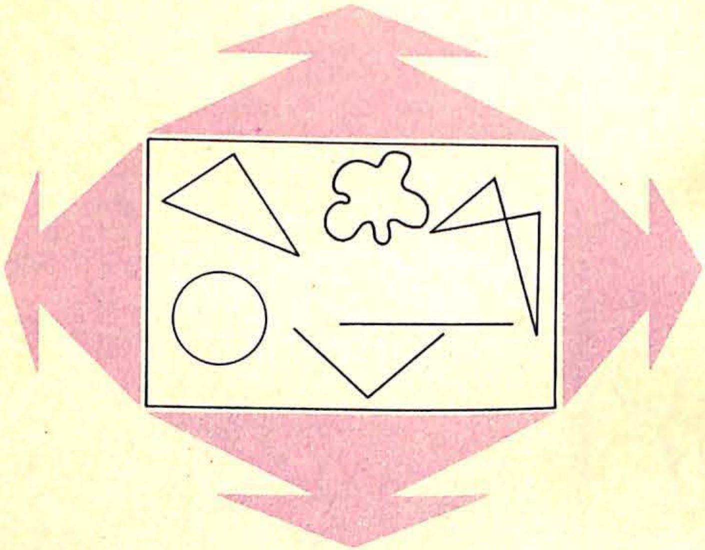
Como é natural, você pode traçar o "tipo" de *linha* que quiser. Não há, porém, *linha* mais simples do que a *linha reta*, geralmente chamada *reta*, cuja imagem é obtida fazendo-se deslizar a ponta de um lápis ao longo de uma *régua*, até . . .





Na verdade a régua possibilitou desenhar "uma parte" da *reta*, pois você pode "imaginá-la" prolongada indefinidamente, mesmo além da fôlha do desenho...

A *superfície* do quadro negro, o *chão* determinado pelo pátio do Colégio, sugerem imagens da figura geométrica denominada *plano*, que é pensado "ilimitado" em todos os "sentidos".



No estudo que será feito vão ser considerados como *"grandes personagens"* da Geometria:

o ponto **a reta** e **o plano**

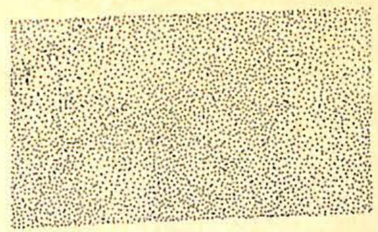
dos quais você já tem *idéia* formada, apesar de *não os ter definido*, por serem *conceitos primitivos*. Nestas condições, não serão os desenhos bem ou mal feitos que os caracterizarão e sim *determinadas propriedades* que êles *possuem*.

Para facilitar o reconhecimento de tais *propriedades*, pode-se empregar *símbolos* para representar os *pontos*, as *retas* e os *planos*. Assim, serão representados:

os *pontos* por: $A, B, C, D, \ldots, P, \ldots$ (letras latinas maiúsculas)
as *retas* por: $a, b, c, d, \ldots, r, \ldots$ (letras latinas minúsculas)
os *planos* por: α, β, γ, δ, ... (letras gregas minúsculas)
(alfa) (beta) (gama) (delta)

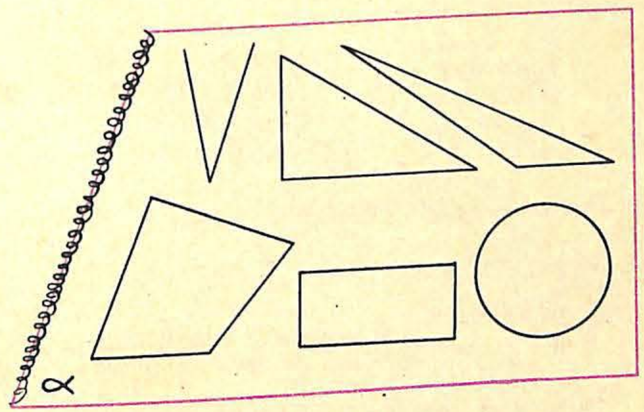
3. *Figuras geométricas que "vivem" no plano*

Vamos considerar o *plano* como um *conjunto infinito de pontos*:



Neste curso de Geometria o *plano* será o *Universo de trabalho*, representado de preferência pela fôlha de seu caderno, onde você já está acostumado a desenhar:

ângulos, triângulos, quadriláteros, circunferências,...

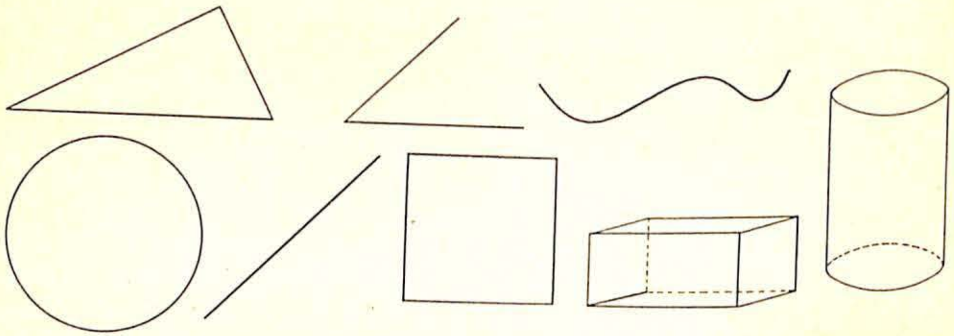


Tais figuras, por possuírem *todos* os seus pontos num *mesmo plano*, são denominadas *figuras geométricas planas*. Em linguagem moderna:

as figuras geométricas planas são subconjuntos do plano

Observação: As figuras geométricas: *prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas, ...*, cujos pontos *não pertencem todos a um mesmo plano*, são chamadas **figuras geométricas espaciais.**

1. Assim como os objetos concretos permitiram a *idéia de número*, os seguintes desenhos dão *idéias* de figuras *geométricas*. Dê, de cada uma delas, o nome pelo qual você as conhece:



2. Diga que *figuras geométricas* sugerem:
   1.º) o conjunto das *estrêlas do céu* à noite;
   2.º) um *raio de luz;*
   3.º) a *dobra* de uma fôlha de caderno em duas partes iguais;
   4.º) a *superfície da pista* de um boliche;
   5.º) a *superfície de uma bolinha de pingue-pongue;* (a resposta — superfície *esférica* — é dada para não haver confusão com a resposta da questão seguinte)
   6.º) uma *bolinha* de gude;
   7.º) uma *bola* de futebol;
   8.º) um *dadinho* de jôgo;
   9.º) os *trilhos* de uma estrada de ferro;
   10.º) um *lápis* comum que nunca foi apontado;
   11.º) . . . e a *Pirâmide de Quéops*, do Egito.

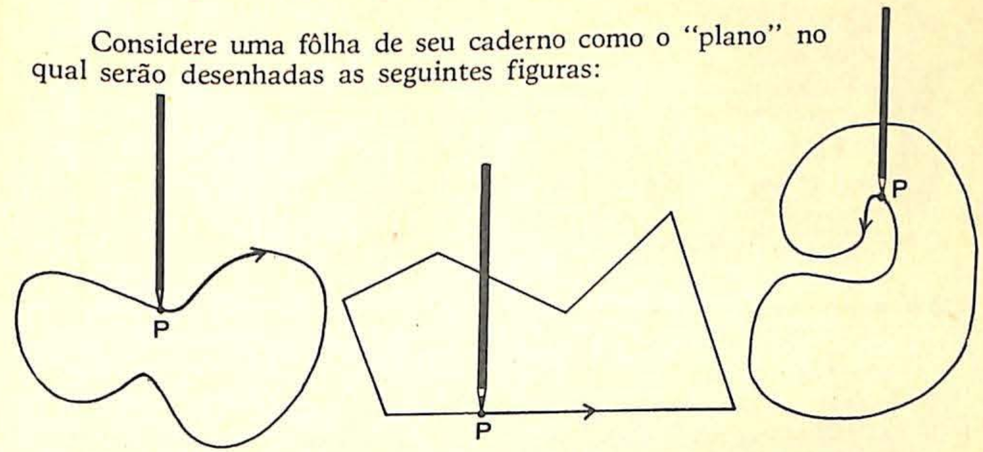
3. Assinale *V* ou *F* nas seguintes sentenças:
   1.ª) Posso desenhar quantos "modelos" de linhas ou curvas eu desejar.
   2.ª) Uma reta é uma linha.
   3.ª) Uma linha é sempre uma reta.
   4.ª) Uma linha nem sempre é uma reta.
   5.ª) Um plano é uma superfície.
   6.ª) Tôda superfície é um plano (cuidado!).
   7.ª) O triângulo é uma figura geométrica plana.
   8.ª) O triângulo é uma figura geométrica espacial.
   9.ª) A pirâmide é uma figura geométrica plana.
   10.ª) O nôvo Estádio de Belo Horizonte sugere uma figura geométrica espacial.

4. Desenhe e dê os respectivos nomes de três figuras geométricas planas e de três figuras geométricas espaciais.

5. O *triângulo* é um subconjunto do plano. É *Verdadeira* ou *Falsa* esta sentença?

4. *Curvas fechadas simples*

Considere uma fôlha de seu caderno como o "plano" no qual serão desenhadas as seguintes figuras:

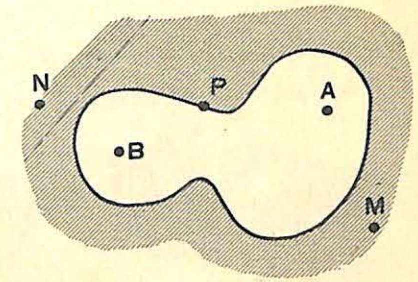


Cada uma delas representa uma figura geométrica plana denominada *curva fechada simples.*

Fechada, porque é sempre possível descrevê-la com a ponta de um lápis, a partir de um ponto inicial (*P*) e, sem "levantar o lápis do papel", chegar ao ponto inicial, não sendo permitido "voltar" pelo percurso já percorrido. (Experimente!)

Simples, porque a curva "não se cruza", ou seja, *não se intercepta* a si. mesma.

As *curvas fechadas simples* determinam no plano (onde se encontram) *três conjuntos*, constituídos respectivamente pelos:



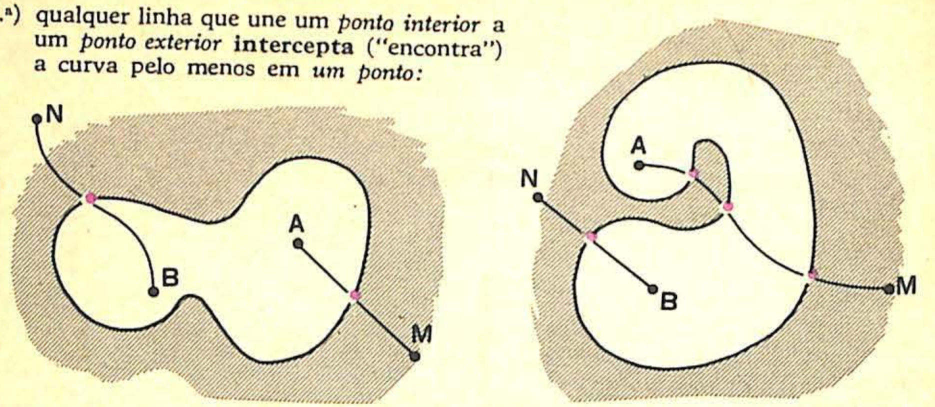
— pontos *interiores* à curva
— pontos da *própria curva*
— pontos *exteriores* à curva

Os pontos interiores compõem a *região interior* ou simplesmente *interior* da curva e os pontos exteriores o *exterior* da curva. Tais regiões estão destacadas na figura, onde:

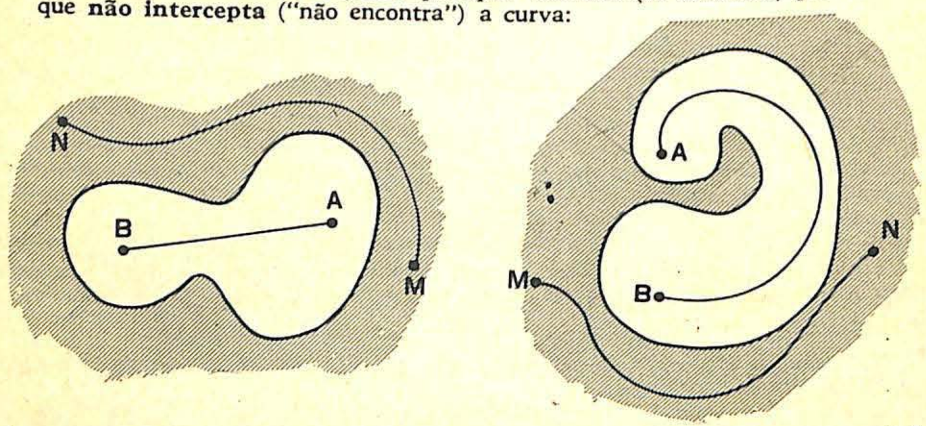
— os pontos *A* e *B pertencem* ao *interior* da curva
— o ponto *P pertence* à curva
— os pontos *M* e *N pertencem* ao *exterior* da curva

ATENÇÃO: As *curvas fechadas simples* gozam das seguintes importantes *propriedades* que as caracterizam:

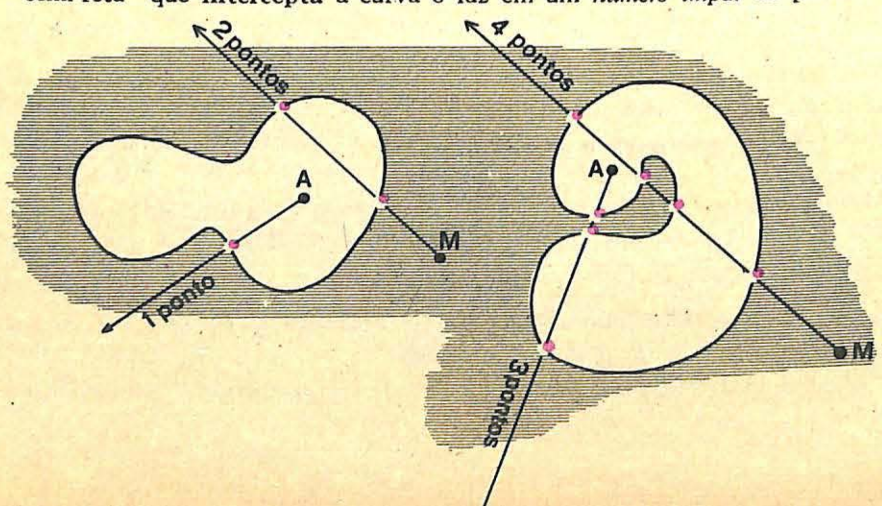
1.ª) qualquer linha que une um *ponto interior* a um *ponto exterior* **intercepta** ("encontra") a curva pelo menos em *um ponto:*



2.ª) é sempre possível unir *dois pontos quaisquer interiores* (ou *exteriores*) por uma linha que **não intercepta** ("não encontra") a curva:

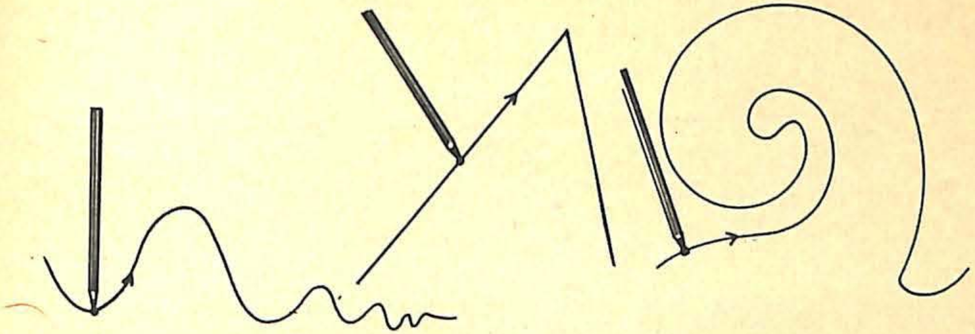


3.ª) a partir de um *ponto exterior* (*M*) qualquer "semi-reta" que **intercepta** *a curva* o faz em um *número par* de pontos; a partir de um *ponto interior* (*A*), qualquer "semi-reta" que **intercepta** a curva o faz em um *número ímpar* de pontos:



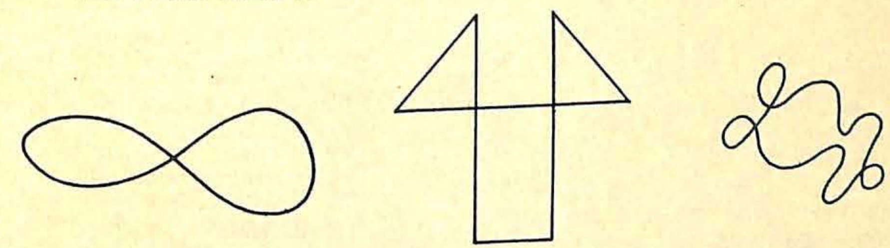
5. *Curvas planas que não são fechadas nem simples*

As figuras geométricas planas:

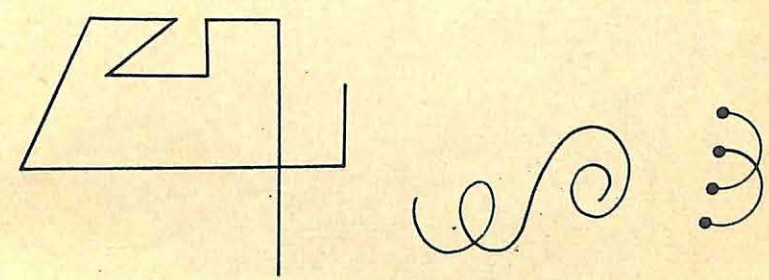


não são fechadas, como é fácil verificar, pois se você começar a descrevê-las "num certo sentido", a partir de um ponto *P*, *não voltará* mais a êsse ponto, a menos que "levante o lápis do papel" ou use o "sentido contrário".

Por outro lado, as curvas:



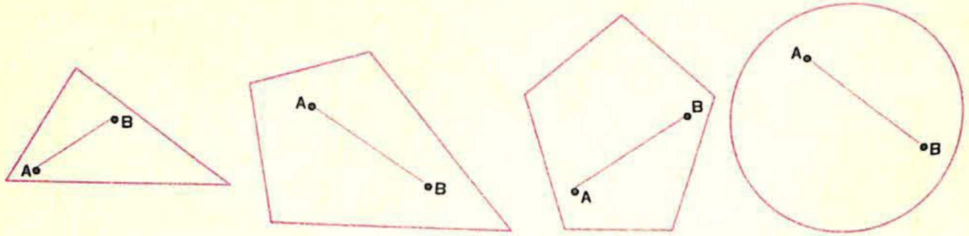
não são simples porque "se cruzam". Também as figuras:



representam curvas que *não são fechadas nem simples.*

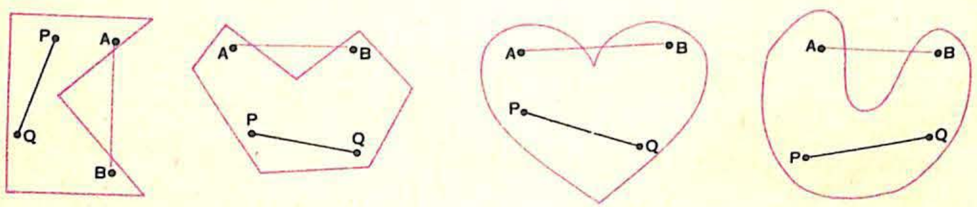
6. *Convexidade*

Têm especial interêsse em nosso curso de Geometria as curvas fechadas simples *convexas*, tais como:



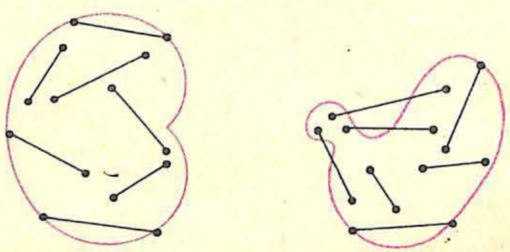
onde o *segmento de reta* que une *dois pontos* ***quaisquer*** (*A* e *B* nas figuras) da região interior à curva está sempre *contido* nessa região.

Já *não são convexas* as curvas fechadas simples:

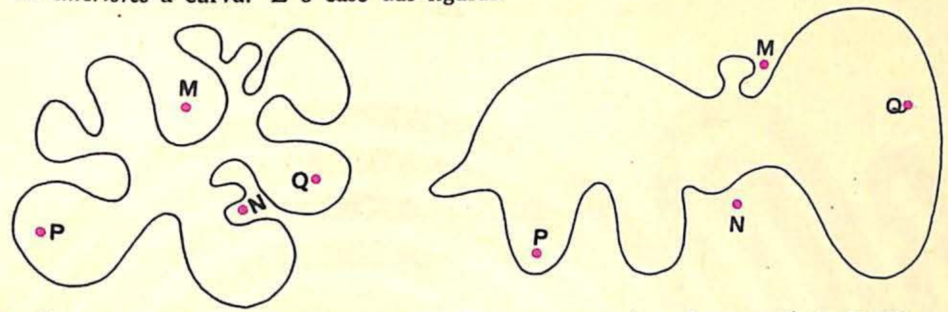


porque o *segmento de reta* que une *dois pontos* ***quaisquer*** *interiores nem sempre está contido* na região interior à curva.

Qual, das duas seguintes curvas fechadas simples, é *convexa?* Por quê?



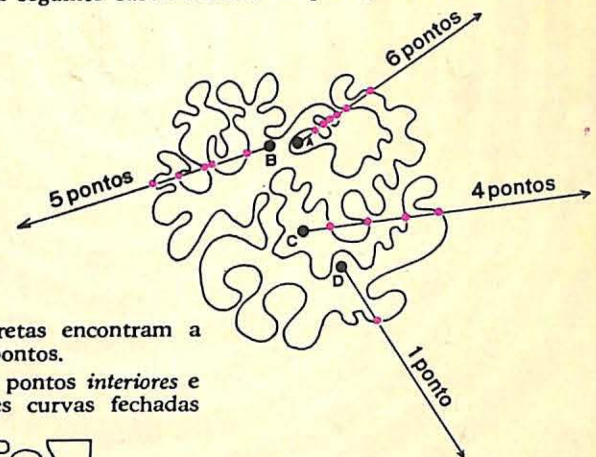
Dependendo da "forma" com que se apresenta uma *curva fechada simples*, é possível, com uma simples observação, reconhecer quais são os pontos do plano *interiores* ou *exteriores* à curva. É o caso das figuras:



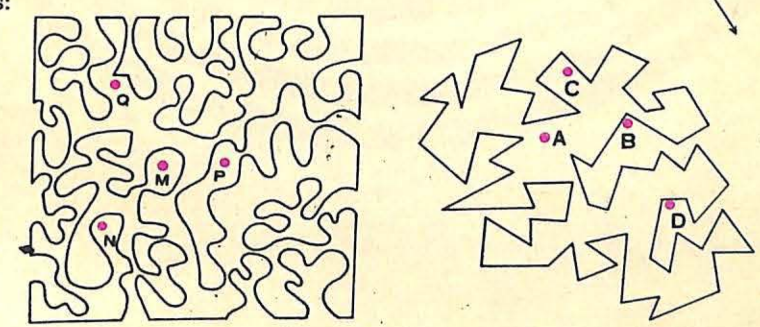
onde *P* e *Q* são pontos *interiores* e *M* e *N*, pontos *exteriores* às respectivas curvas.

Há casos, porém, em que sem recorrer às propriedades que caracterizam as *curvas fechadas simples*, é difícil o reconhecimento de pontos *interiores* ou *exteriores* a uma dada curva. Assim, por exemplo, na seguinte curva fechada simples (embora não pareça!), quais são os pontos *interiores* e quais os *exteriores?*

Basta traçar, pelos pontos, qualquer semi-reta que intercepte a curva e contar o número de pontos da intersecção: se fôr *par*, o ponto é *exterior*; se fôr *ímpar*, o ponto é *interior*. Então, são *interiores* os pontos *B* e *D*, pois as semi-retas traçadas por êles encontram a curva em um número *ímpar* de pontos, e *exteriores* *A* e *C*, porque as semi-retas encontram a curva em um número *par* de pontos.



Diga você, agora, quais os pontos *interiores* e quais os *exteriores* às seguintes curvas fechadas simples:



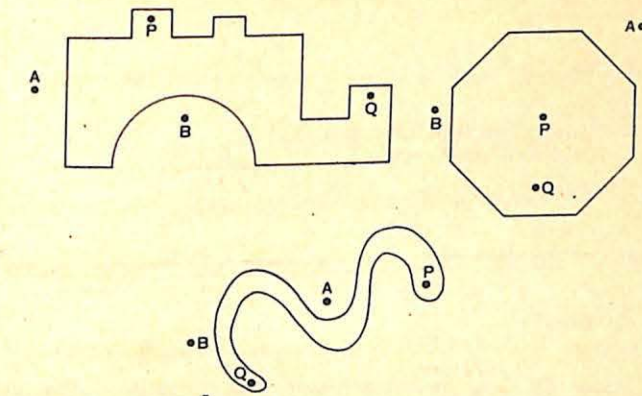
NOTA: As semi-retas empregadas não devem passar pelos "vértices" da figura.

A famosa Curva de Jordan:

O ponto *A* é *interior* ou *exterior* à Curva de Jordan? E o ponto *B*?

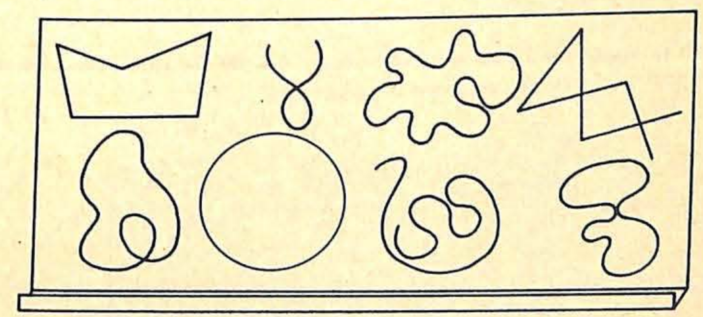
Exercícios de fixação — Grupo 48

1. As seguintes curvas planas são *fechadas simples*. Os pontos *P* e *Q* pertencem ao *interior* e os pontos *A* e *B* ao *exterior* da curva. Procure verificar, desenhando, as três *propriedades* que caracterizam as curvas fechadas simples.

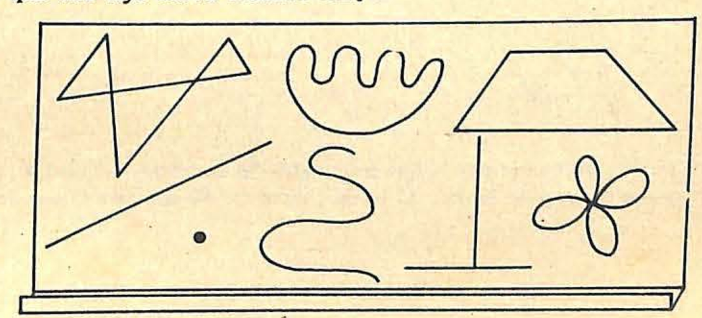


Qual delas é *convexa?* *Por quê?*

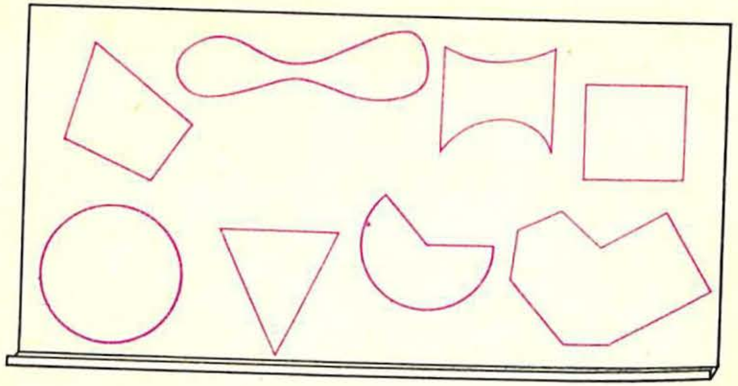
2. Assinale quais, das seguintes figuras geométricas planas, são *curvas fechadas simples:*



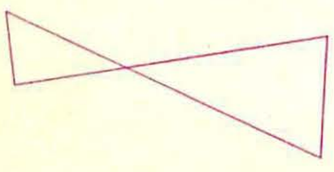
3. *Idem*, que *não seja* curva fechada simples:



4. Assinale quais das seguintes *curvas fechadas simples* são *convexas:*



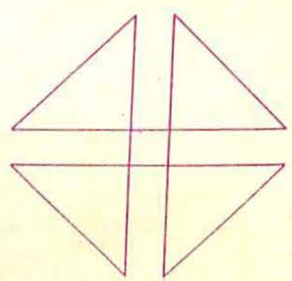
5. A figura geométrica:



não é uma curva fechada simples. Por quê?

Quantas curvas fechadas simples estão representadas nesta figura?

6. O contôrno do mapa do Brasil e o tradicional símbolo do IV Centenário do Rio de Janeiro representam *curvas fechadas simples?* Por quê?



7. Você deve ter percebido (ou não?) que no quadro do exercício 3 consta o *ponto* entre as figuras geométricas desenhadas. O *ponto* é considerado uma *curva simples fechada.* Por quê?

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 49

Observe as três figuras desenhadas:

A : triângulo
B : quadrado
C : circunferência

e responda:

1.º) Quais os numerais pertencentes ao *interior* do triângulo *A?* do quadrado *B?* da circunferência *C?*

2.º) Quais os numerais pertencentes ao *interior* do triângulo, porém, não-pertencentes ao interior das outras duas figuras?

3.º) Quais os numerais pertencentes ao *interior* da figura *C e* ao *exterior* da figura *A?*

4.º) Ao *interior* de quais figuras pertence o numeral 3.

5.º) Quais os numerais pertencentes ao *interior* de *A* ou de *B* (ou de ambas) e ao *exterior de C?*

6.º) Ao *interior* de quais figuras não pertence o numeral 2? E o numeral 3?

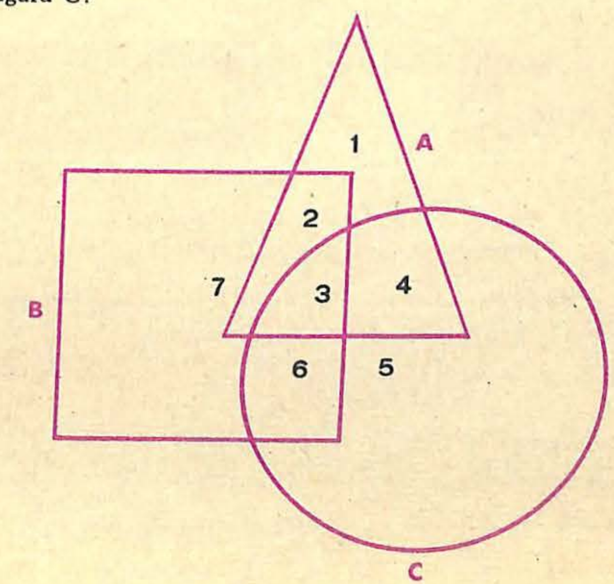
7.º) O numeral 7 pertence ao *exterior* de quais figuras?

8.º) Quais os numerais que pertencem ao *interior* das figuras *A e C,* mas não ao *interior* de *B?*

9.º) Quais são as duas figuras a cujo *interior* pertencem os seguintes pares de numerais:

a) 3 e 6 *b*) 3 e 4 *c*) 2 e 3

10.º) Quais os numerais pertencentes, ao mesmo tempo, ao *interior* da figura *A,* figura *B* e figura *C?*



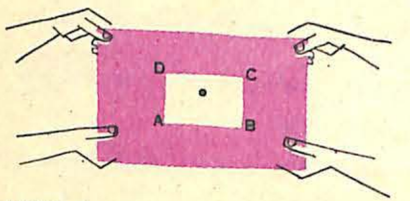
NOTA IMPORTANTE

Um pouco de Topologia....

Estudando *curvas fechadas simples*, você tomou contato com a **Topologia**, um dos modernos ramos da Matemática, relacionados com a Geometria.

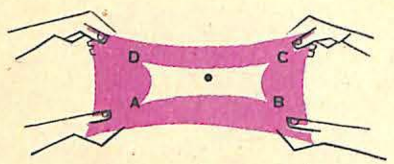
Na *Topologia*, as figuras geométricas têm mais "liberdade" do que na Geometria porque podem mudar de *tamanho* e *forma*, conservando porém outras *propriedades* (*estruturais*) que dizem respeito a sua estrutura.

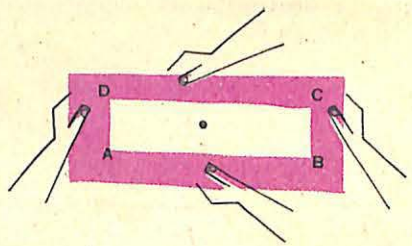
Pode-se apreciar fàcilmente esta distinção usando uma *fôlha de borracha*, ao invés de uma fôlha de papel, para "desenhar" as figuras geométricas planas.



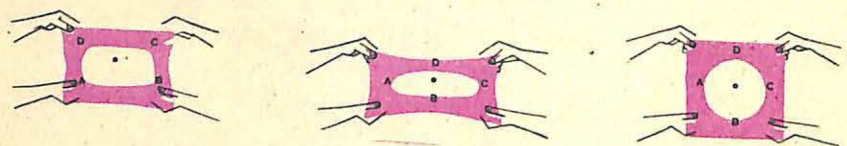
Desenhe, por exemplo, numa *fôlha de borracha* um *retângulo ABCD*, com um *ponto* assinalado no seu *interior*.

Por mais que "se estique" a borracha, o ponto permanecerá sempre no *interior* da figura, que vai continuamente mudando de *forma* e de *tamanho*, pois os lados do retângulo se transformam em linhas curvas. Todavia, o contôrno *ABCD* (que pode ser percorrido sem que a curva se cruze) continuará sempre uma *curva fechada simples*, existindo portanto as regiões *interior* e *exterior* à curva, conforme pode ser apreciado nas figuras abaixo:





"Esticando" a *fôlha de borracha* de um modo especial, você poderá chegar a "transformar" o retângulo inicial numa *circunferência!*



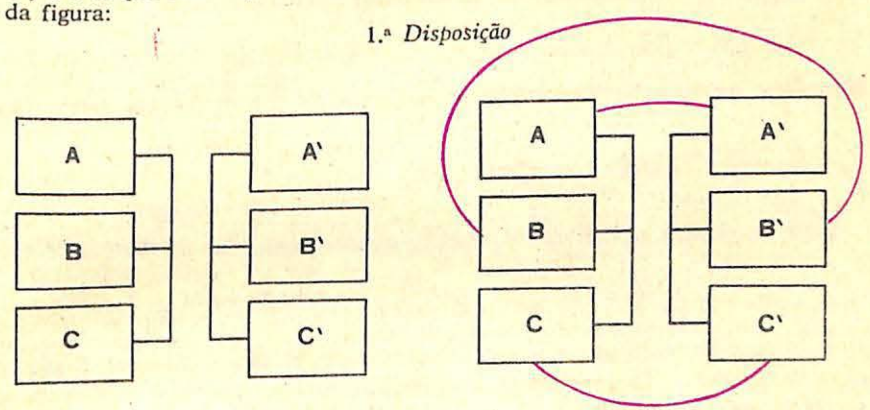
Assim, o retângulo e a circunferência, a despeito de terem *formas diferentes*, são *topològicamente* equivalentes, pois ambos são *curvas fechadas simples* (esta é a *estrutura* delas!), conservando as *propriedades* estudadas para essas curvas.

LEMBRETE AMIGO

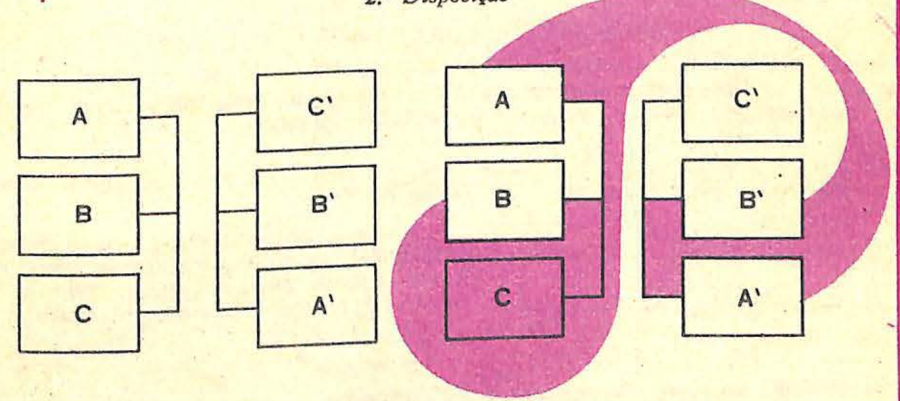
Tudo começou com o *ponto,...* continuou com as *curvas,...* com as *retas,...* com o *plano* e ficou — na Geometria a ser estudada nesta série — com as figuras *geométricas planas*. Nestas, tem importância fundamental o estudo das *curvas fechadas simples*, por estar diretamente ligado ao das *estruturas topológicas*.

A propósito : as idéias de *interior* e *exterior* de uma *curva fechada simples* permitem resolver o histórico problema de um Califa persa que, "desejando" selecionar um marido para sua linda filha, usou um problema de Topologia. Eram propostas duas situações para um mesmo problema: ligar *A* a *A'*, *B* a *B'*, *C* a *C'* por linhas que não se cruzem nem interceptem qualquer outra linha da figura:

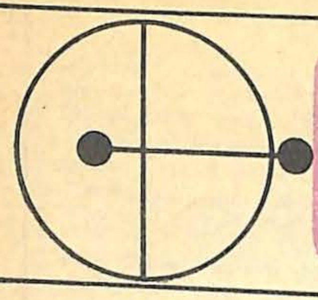
1.ª *Disposição*



2.ª *Disposição*



A solução da primeira disposição é fácil. Já na segunda, depois de ligar *A* com *A'*, *B* com *B'*, resultará uma *curva fechada simples* na qual *C* se encontra no *interior* e *C'* no *exterior* e, conseqüentemente, o caminho que os une encontrará a curva. Logo, não há solução para essa segunda disposição e... "topològicamente" o Califa não quer que sua filha se case...



2.ª Parte: - relações e operações com conjuntos de pontos no plano
- semi-reta; segmento de reta; semi-plano
- medida de segmentos; segmentos; congruentes

Relações e operações com conjuntos de pontos no plano

7. *Primeiras relações e operações*

Com os *pontos* e com as *retas* serão estabelecidas as primeiras *relações*:

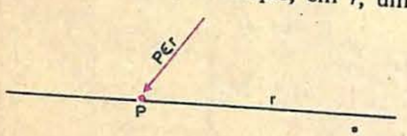
... *é igual a* ...   ... *pertence a* ...

e a *operação*: *intersecção de retas*, onde as retas são pensadas como *conjuntos de pontos*. Tais *relações* e *operação* serão "sentidas" através dos exercícios que se seguem.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 50

1. Com um *lápis* (ponta bem afiada...) e uma *régua* (preferìvelmente de material transparente), você vai "explorar" as seguintes questões:

1.ª) (esta é para auxiliar...) Desenhe uma *reta* qualquer e indique-a por r. Com a ponta do lápis marque, em r, um ponto P.



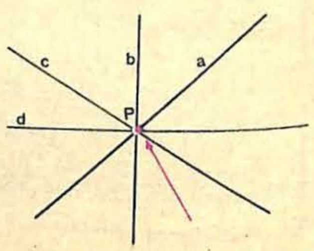
Como o ponto P *pertence* à reta r (lembre-se de que a reta r é um *conjunto de pontos* e P é um *elemento* dêsse conjunto), indica-se tal *relação* empregando o símbolo já conhecido: $\in$

Logo: $P \in r$

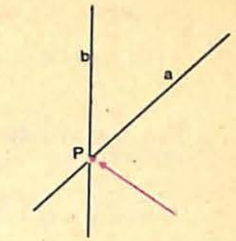
2.ª) Desenhe um *ponto* e represente-o por P. Quantas *retas* você pode traçar por P? Na figura estão assinaladas quatro retas: a, b, c e d. Portanto:

$P \in a, \quad P \in b, \quad P \in c, \quad P \in d$

Será que só "passam" estas retas por P?



2. Se a e b, como retas, são *conjuntos de pontos*, então você pode determinar a *intersecção* delas. Ora, as retas a e b, do exercício anterior, *interceptam-se* (ou seja, "encontram-se") no ponto P. Sendo a intersecção de dois conjuntos um conjunto, segue-se que a intersecção de a e b é o conjunto *unitário* constituído pelo ponto P. Indicação.

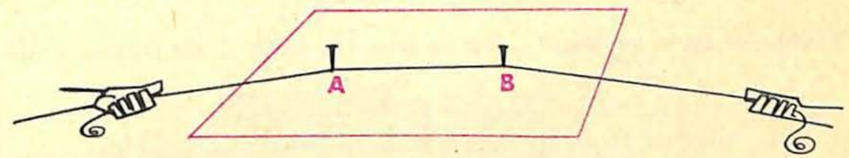


$$a \cap b = \{P\}$$

Você conclui fàcilmente, examinando a fig. da 2.ª questão do Exercício 1, que também:

$a \cap c = \{P\} \quad a \cap d = \ldots \quad b \cap c = \ldots \quad b \cap d = \ldots$

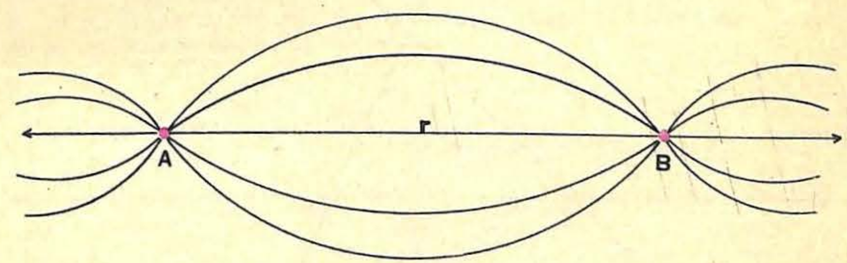
3. Sôbre uma tábua fixe dois pregos que a furem em dois "pontos" A e B em posições diferentes, isto é, *distintos*.



Passando por A e B dois ou mais fios (bem fininhos) e esticando-os bem, você perceberá que os fios se *superpõem*, dando a impressão que *coincidem*. Essa experiência sugere a seguinte *afirmação*, que passa a constituir uma *propriedade* que caracteriza a reta:

Dois pontos distintos determinam uma única reta

Para "testar" essa *afirmação*, marque dois pontos distintos numa fôlha do caderno. Represente-os, respectivamente, por A e B:



Quantas *linhas* você pode traçar ligando A com B? Muitas, não é verdade? Usando a régua, porém, poderá traçar *uma só reta*, que será indicada por r.

Agora você já pode indicar uma reta também por *dois pontos distintos*, precisamente os dois pontos que a determinam, da seguinte maneira:

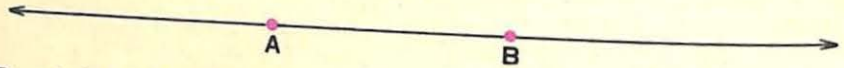
$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

A flecha, com dupla seta nas extremidades, procura indicar os *dois sentidos* que traduzem a *infinidade* da reta. Tanto faz indicar a reta r por $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$, uma vez que os pontos A e B determinam sempre a *mesma reta*.

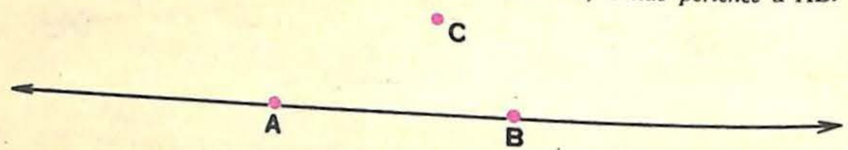
Logo: $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA} = r$

NOTA: Se $A = B$, isto é, A e B representam o *mesmo ponto*, então costuma-se dizer que os pontos A e B *coincidem*. Neste caso, tem-se *só um ponto* e, de acôrdo com o que foi "explorado" no exercício 1.º), por êle passarão *quantas retas você quiser!*

4. Considere numa fôlha de desenho os pontos distintos A e B. Você já sabe que êles determinam a reta $\overleftrightarrow{AB}$:



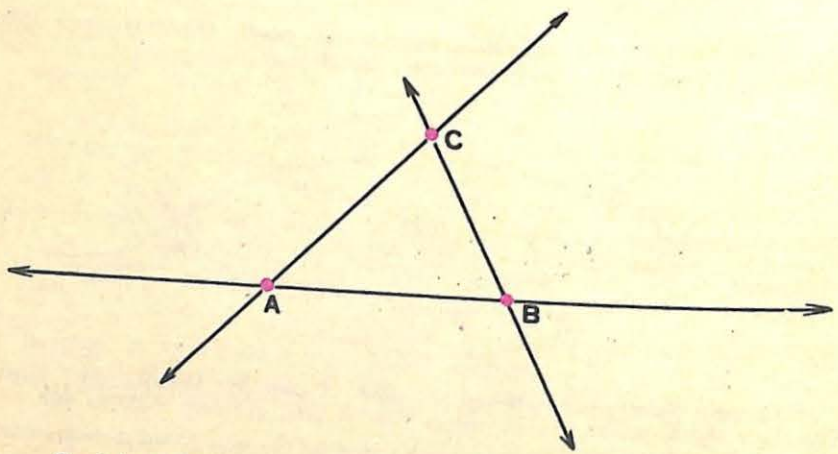
Desenhe, a seguir, um ponto C fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, C *não pertence* a $\overleftrightarrow{AB}$:



Em símbolos, temos: $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Por sua vez:

os pontos A e C determinam a reta $\overleftrightarrow{AC}$

e os pontos B e C determinam a reta $\overleftrightarrow{BC}$



Qual é a *intersecção* das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$?

É o ponto A. Indicação: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$

NOTA: Diz-se também que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são *incidentes* ou *concorrentes* no ponto A.

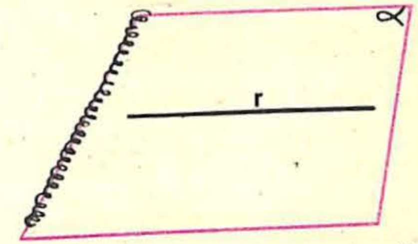
Responda, agora, às seguintes perguntas:

1.ª) Qual é a *intersecção* das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CB}$? Indique com símbolos.

2.ª) Qual é a *intersecção* das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$?

3.ª) Como se torna *verdadeira* a sentença: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{\ldots\}$?

5. No plano α, representado pela sua fôlha de caderno, está desenhada uma reta r:



Neste caso a reta r (que é um *conjunto de pontos*) *está contida* no plano (que também é um *conjunto de pontos*). Tal *relação de inclusão* é indicada por:

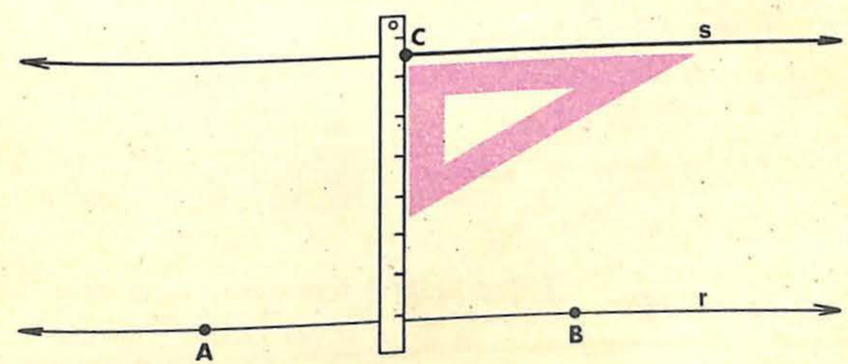
$\boxed{r \subset \alpha}$

Por sua vez, o plano *contém* a reta r: $\boxed{\alpha \supset r}$

6. *Preste bem atenção* a esta questão:

Considerados, numa fôlha de desenho, a reta $\overleftrightarrow{AB} = r$ e o ponto C, fora de $\overleftrightarrow{AB}$, será que nessa fôlha você poderia traçar por C alguma reta que *não interceptasse* ("*não encontrasse*") a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$?

Com auxílio de um *esquadro* e uma *régua* é possível traçar uma reta (indicada por s) que não encontrará a reta r:



As retas s e r, pertencentes ao mesmo plano, que *não se interceptam*, são denominadas *paralelas*. Indicação: $s \,//\, r$.

Então: *Duas retas, situadas no mesmo plano, são* PARALELAS *quando não se interceptam.*

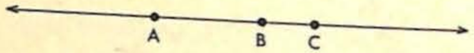
Na linguagem dos conjuntos êste fato significa que a *intersecção* dos conjuntos s e r é o *conjunto vazio*, isto é:

$$s \cap r = \varnothing$$

Usando símbolos conhecidos pode-se, agora, dar uma *definição* de retas *paralelas*, por meio de sentenças matemáticas *equivalentes:*

$$\forall s,\ \forall r \subset \alpha,\ r \neq s, \quad [s \,//\, r] \iff [s \cap r = \varnothing]$$

7. Considerados os pontos distintos A, B e C da reta r:



tem-se que a reta r pode ser *determinada* tanto pelos pontos A e B, como pelos pontos B e C ou A e C. Logo:

$$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$$

e diz-se que A, B e C são *pontos colineares* ou *alinhados*. Vale, pois, a *definição:*

$$[A, B, C, \textit{colineares}] \iff [A, B, C, \text{ pertencem à } \textit{mesma reta}]$$

OBSERVAÇÃO

Retas coplanares e retas reversas

Duas retas são COPLANARES se *existir* um *plano* que as contenha e REVERSAS se *não existir* um *plano* que as contenha.

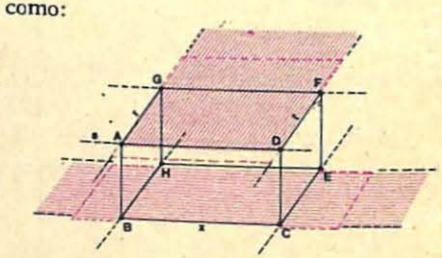
As retas *coplanares* se apresentam como:

— *incidentes*, quando têm *um ponto em comum*, como é o caso das retas r e s da figura ao lado, pois:

$$r \cap s = \{A\}$$

— *paralelas*, quando *não têm ponto em comum*. Na figura:

$$r \,//\, t \quad \text{pois} \quad r \cap t = \varnothing$$



Já as retas r e x representam, na figura, retas *reversas*, por não existir um plano que as contenha.

LEMBRETE AMIGO

No plano:

por *um ponto A* passam **infinitas** retas
por *dois pontos distintos A* e *B* passa uma **única** reta
duas retas *incidentes* interceptam-se num **único** *ponto*
duas retas *paralelas* **não** *se interceptam*

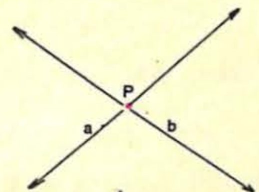
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 51

1. Depois de desenhar na sua fôlha de caderno dois pontos distintos P e Q, responda às seguintes perguntas, justificando-as com construções:

   1.ª) Quantas retas passam por P?
   2.ª) Quantas retas passam por Q?
   3.ª) Quantas retas passam por P e por Q?
   4.ª) É *verdadeira* a sentença: $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$?

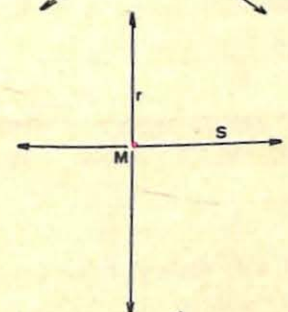
2. Preencha as seguintes sentenças, relativas às respectivas figuras ao lado, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª)



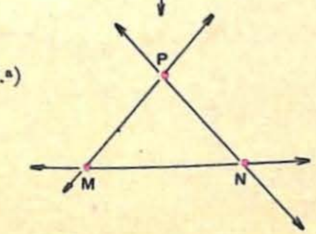
a) $a \cap b = \{\ldots\}$
b) $P \in a$ e $P \in \ldots$
c) $b \cap \ldots = \{P\}$

2.ª)



a) $M \in r$ e $M \ldots s$
b) $r \ldots s = \{M\}$
c) $s \cap \ldots = \{M\}$

3.ª)



a) $\overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{NP} = \{\ldots\}$
b) $\overleftrightarrow{MN} \cap \ldots = \{N\}$
c) $\overleftrightarrow{PM} \cap \overleftrightarrow{MN} \ldots \{M\}$

3. Desenhe uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ e um ponto $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. A seguir, desenhe:

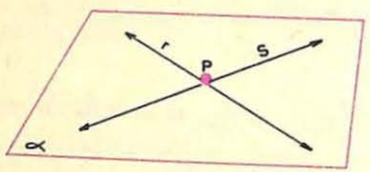
1.º) A reta r que passa por C e *intercepta* $\overleftrightarrow{AB}$ em B;

2.º) a reta s que passa por C e *não intercepta* a reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, seja *paralela* a $\overleftrightarrow{AB}$.

4. Escreva V ou F nas seguintes sentenças:

1.ª) se $r \parallel s$ então $r \cap s = \varnothing$
2.ª) se $r \parallel s$ então $r \cap s \neq \varnothing$
3.ª) se $r \cap s = \varnothing$ então $r \parallel s$
4.ª) se $r \parallel s$ então $s \parallel r$
5.ª) $[P, Q, R,$ colineares$] \iff [P, Q, R$ pertencem à mesma reta$]$
6.ª) $[P, Q, R,$ colineares$] \iff [P, Q, R$ não pertencem à mesma reta$]$

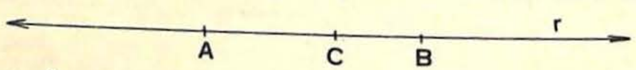
5. As retas r e s estão desenhadas no plano α (considerado como um conjunto de *pontos*). Escreva o *símbolo* conveniente, a fim de tornar *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:



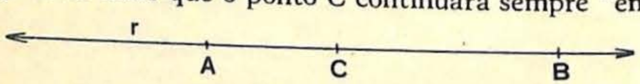
1.ª) $r \ldots \alpha$ ($r \subset \alpha$ — modêlo)
2.ª) $\alpha \ldots s$
3.ª) $r \ldots s = \{P\}$
4.ª) $P \ldots r$ ($P \in r$ — modêlo)
5.ª) $P \ldots s$

8. *Estrutura de ordem nos pontos de uma reta; relação ...estar entre...*

Seja a reta r determinada pelos pontos distintos A e B:

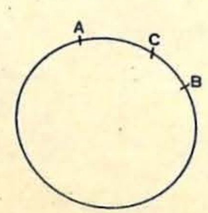


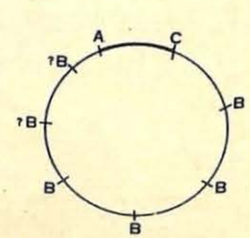
e C um ponto "entre" A e B. Deslocando-se da esquerda para a direita o ponto B, pode-se dizer que o ponto C continuará sempre "entre" A e B:



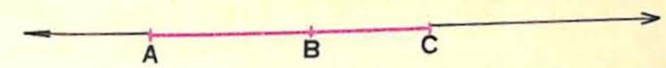
Se, em vez de na reta r, os pontos A e B fôssem tomados numa *circunferência*, conforme figuram no desenho, ainda se poderia dizer que C *está entre* A e B. Porém, fazendo-se deslocar o ponto B (no sentido horário), será que você poderia ainda dizer que C *está entre* A e B?

Não, não é?

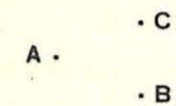




Por isso a relação *...estar entre...* é caracterizada da seguinte maneira: se A, B e C são três pontos distintos e um dêles *está entre* os outros dois, então A, B e C são *colineares*, isto é, *pertencem à mesma reta*. Logo:

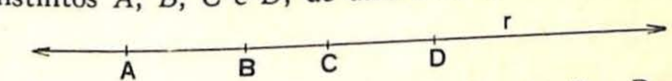


Se A, B e C não são colineares, então nenhum dos pontos *está entre* os outros dois. Assim, por exemplo, na figura:



nenhum ponto *está entre* os outros dois.

Quantas relações *...estar entre...* se pode estabelecer com os quatro pontos distintos A, B, C e D, de uma reta r?



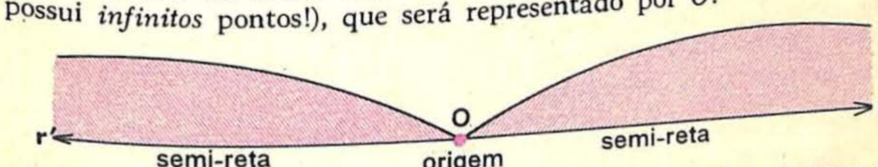
Temos: *B está entre A e C* — *C está entre B e D*
B está entre A e D — *C está entre A e D*

Estabeleça você tôdas as relações *... está entre ...* com os pontos M, N, P, Q e O, dispostos, *nesta ordem*, na reta r.

Semi-reta — segmento de reta — semi-plano

9. *Conceito de semi-reta*

Considere na reta r um de seus pontos (lembre-se de que a reta possui *infinitos* pontos!), que será representado por O:



O ponto O reparte a reta r em duas regiões: r' e r'', cada uma delas denominada **semi-reta**. Por sua vez:

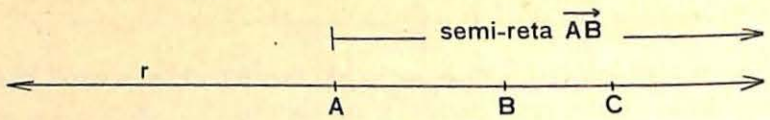
— o ponto O é denominado *origem* de cada uma das semi-retas r' e r''
— as semi-retas r' e r'' da reta r dizem-se *opostas* uma da outra

Logo: A *reunião* das semi-retas r' e r'' e mais o conjunto unitário, formado pelo ponto O, é a própria reta r (que é um conjunto de pontos).

$$\boxed{r' \cup \{O\} \cup r'' = r}$$

Preste atenção, agora, a uma outra conceituação de *semi-reta*, a partir de *dois pontos*, e que é de *muita aplicação* em nossos estudos:

Seja a reta r determinada pelos pontos distintos A e B:



Que é *semi-reta* de *origem* A e que contenha o ponto B?

É *o conjunto de todos os pontos* C da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que A *não está entre* B e C. Indicação: $\overrightarrow{AB}$

Então: $\overleftrightarrow{AB}$ representa a *reta* determinada pelos pontos A e B

$\overrightarrow{AB}$ representa a *semi-reta* determinada pelos pontos A e B (sendo A a *origem*)

10. Conceito de segmento de reta

Considere a reta r determinada pelos dois pontos distintos A e B:

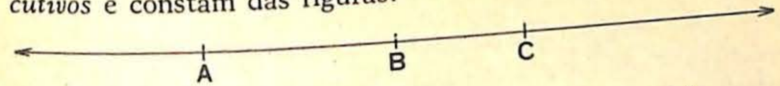
Chama-se *segmento* AB ao conjunto de pontos de r constituídos por A, por B e por todos os pontos que *estão entre* A e B. Os pontos A e B dizem-se *extremos* do segmento. Indicação: $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ (porque $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ representam o *mesmo conjunto* de pontos).

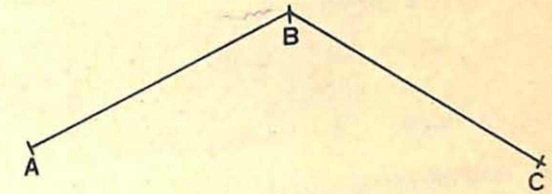
O *segmento* de reta é uma figura plana simples que apresenta *pontos internos*: são os pontos situados entre A e B, e *pontos externos*: são os pontos da reta r que não pertencem a $\overline{AB}$.

> *Cuidado* com as novas indicações, pois as sentenças:
>
> $$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{BA}$$
>
> são *verdadeiras*, enquanto que a sentença:
>
> $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \qquad \text{é } \textit{falsa!}$$
>
> Isto porque dois pontos distintos A e B determinam a *reta* $\overleftrightarrow{AB}$ (ou $\overleftrightarrow{BA}$) e o *segmento* $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$); por outro lado ficam determinadas *duas semi-retas*: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, que são *distintas*.

$\overleftrightarrow{AB}$ é denominada *reta suporte* do segmento $\overline{AB}$ e das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

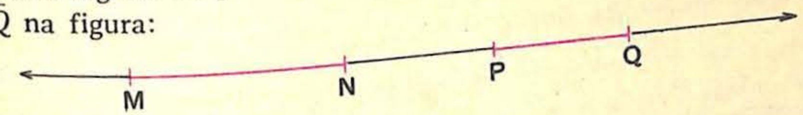
Os segmentos que possuem um *extremo comum* são denominados *consecutivos* e constam das figuras:



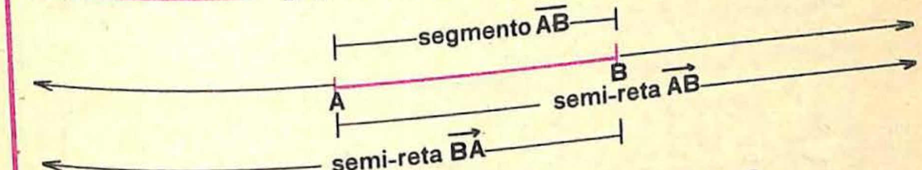


Na primera das figuras os segmentos consecutivos são chamados *colineares* por pertencerem à *mesma reta*.

Dois segmentos podem ser *colineares* e não-consecutivos, como $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ na figura:



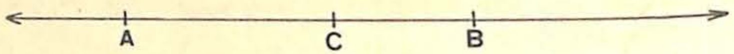
LEMBRETE AMIGO



$\overleftrightarrow{AB}$	indica a *reta* determinada pelos pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	indica a *semi-reta* determinada pelos pontos A e B de *origem* A
$\overrightarrow{BA}$	indica a *semi-reta* determinada pelos pontos A e B de *origem* B
$\overline{AB}$	indica o *segmento de reta* determinado pelos pontos A e B, de *extremos* A e B
$\overleftrightarrow{AB}$	é a *reta suporte* de $\overline{AB}$ e de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 52

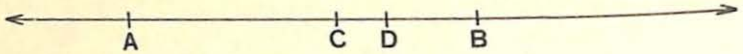
1. Você sabe que com os três pontos A, B e C da figura:



são identificados *três segmentos*: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Responda:

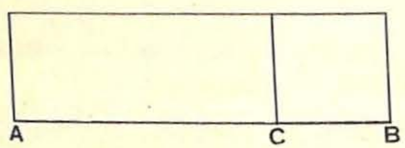
Quantos segmentos você identificaria com *quatro pontos*: A, B, C e D?

Observe a figura:

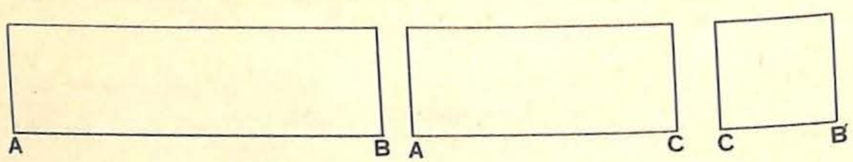


(*informação*: ...é um número múltiplo de 3 e menor do que 8...)

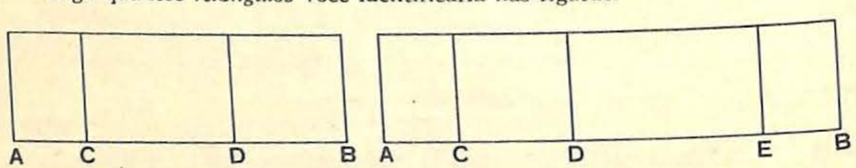
2. Também na figura:



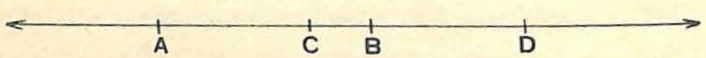
você identifica *três retângulos:*



Diga quantos *retângulos* você identificaria nas figuras:



3. Examine bem a figura:

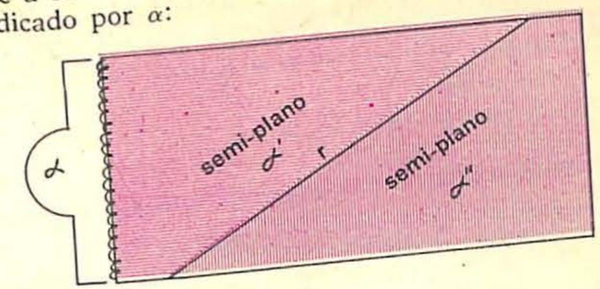


Assinale, agora, com V ou F as seguintes sentenças:

1.ª) $C \in \overline{AB}$	3.ª) $C \in \overrightarrow{BD}$	5.ª) $D \in \overleftrightarrow{AB}$	7.ª) $B \in \overline{CD}$
2.ª) $C \notin \overline{AB}$	4.ª) $B \in \overrightarrow{AD}$	6.ª) $D \notin \overrightarrow{AB}$	8.ª) $A \notin \overleftrightarrow{BD}$

11. *Conceito de semi-plano*

Considere a fôlha de caderno de desenho, que dá idéia da parte de um *plano* indicado por α:



Uma reta qualquer r do plano α (lembre-se de que o plano contém *infinitas* retas!) vai reparti-lo em duas regiões: α' e α'', cada uma delas denominada *semi-plano* de *origem* r.

Os *semi-planos* α' e α'' de α dizem-se *opostos* um do outro e a *reunião* dêles com a reta origem é o próprio plano α. Logo:

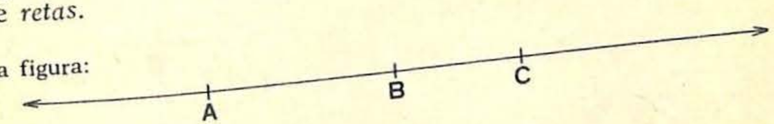
$$\boxed{\alpha' \cup r \cup \alpha'' = \alpha}$$

NOTA: Observe a analogia: enquanto *um ponto* de uma reta a reparte em *duas semi-retas opostas*, *uma reta* de um plano reparte-o em *dois semi-planos opostos*.

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 53

Operações com conjuntos: *reunião* e *intersecção* de *segmentos, semi-retas* e *retas*.

1. Na figura:



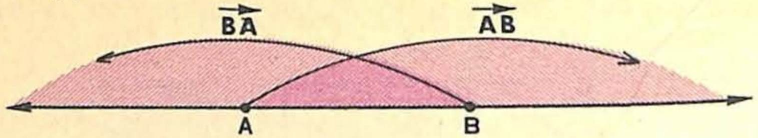
temos:

1.º) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$ (o segmento $\overline{AC}$ é o conjunto dos pontos que *pertencem* ao segmento $\overline{AB}$ *ou* ao segmento $\overline{BC}$ *ou* a ambos)

2.º) $\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$ (o ponto B é o único *elemento comum* aos conjuntos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$)

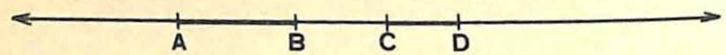
3.º) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$ (por quê?)

2. Atenção: agora você pode *definir* o segmento $\overline{AB}$ como *intersecção* das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, pois:



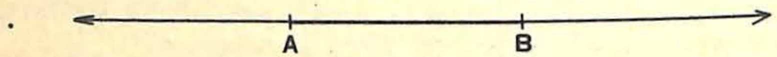
$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$$

3. No caso dos segmentos serem *colineares*, porém *não-consecutivos*, *como no caso da figura:*



então: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \varnothing$, pois $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *não têm* pontos em comum.

4. Na figura:



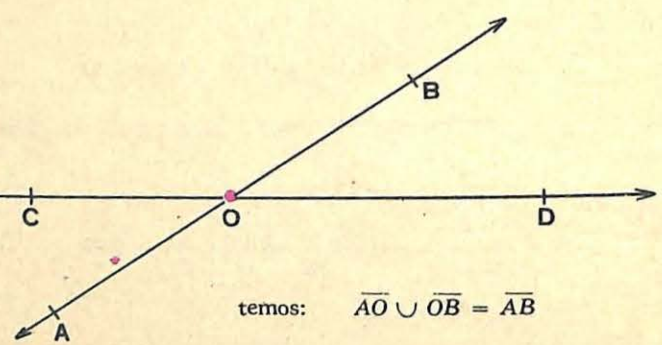
você sabe que: $\overrightarrow{AB} \supset \overline{AB}$ (lembre-se: $\supset$ lê-se "contém"). Então:

$$\overrightarrow{AB} \cup \overline{AB} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overline{AB} = \overline{AB}$$

A seguir, torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $\overline{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \ldots$ 2.ª) $\overline{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \ldots$

5. Na figura:



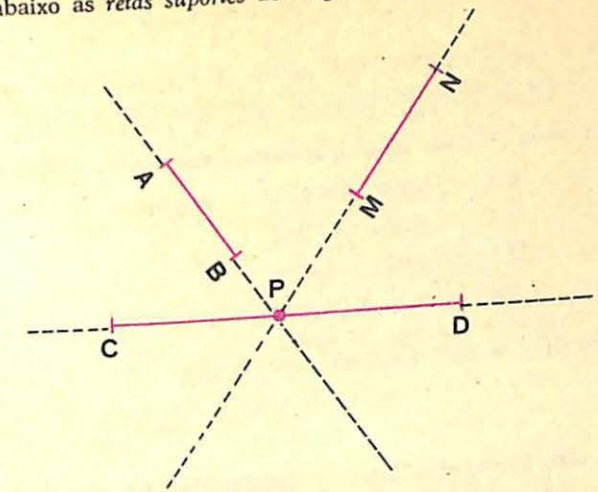
temos: $\overline{AO} \cup \overline{OB} = \overline{AB}$

Torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $\overline{CO} \cup \overline{OD} = \ldots$ 3.ª) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \ldots$

2.ª) $\overrightarrow{OC} \cup \overrightarrow{OD} = \ldots$ 4.ª) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \ldots$

6. Na figura abaixo as *retas suportes* dos segmentos *interceptam-se*, mas os *segmentos não*.



Torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \ldots$ temos: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$ (modêlo)

2.ª) $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \ldots$ temos: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \varnothing$ (modêlo)

3.ª) $\overline{MN} \cap \overline{CD} = \ldots$

4.ª) $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{CD} = \ldots$

5.ª) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{MN} = \ldots$

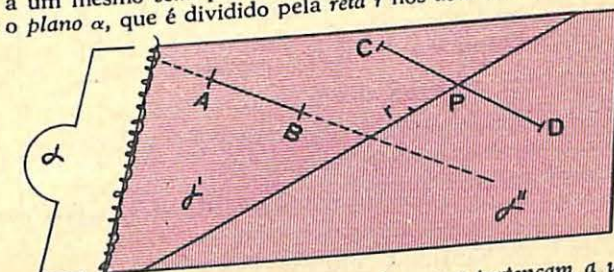
6.ª) $\overline{CP} \cup \overline{PD} = \ldots$

7.ª) $\overrightarrow{PC} \cup \overrightarrow{PD} = \ldots$

8.ª) $\overline{NM} \cup \overrightarrow{MP} = \ldots$

Relações de *pertinência* (entre elemento e conjunto) e de *inclusão* (entre conjuntos):

7. Usando a linguagem dos conjuntos, traduza quando é que *dois pontos A* e *B* ($A \neq B$) *pertencem* a um mesmo *semi-plano* e quando é que *pertencem* a *semi-planos opostos*. Considere o *plano* α, que é dividido pela *reta* r nos *dois semi-planos opostos*: α' e α''.



1.º) *Condição para que dois pontos não-situados em* r *pertençam a um mesmo semi-plano:*

se $A \in \alpha' \wedge B \in \alpha'$, então $\overline{AB} \cap r = \varnothing$ (lembre-se: $\wedge$ lê-se "e")

isto é, se dois pontos (A e B na figura) *pertencem a um mesmo semi-plano*, então o segmento $\overline{AB}$ *não intercepta* a reta origem r (embora a reta suporte $\overleftrightarrow{AB}$ intercepte!).

2.º) *Condição para que dois pontos não-situados em r pertençam a semi-planos opostos:*

se $C \in \alpha' \wedge D \in \alpha''$, então $\overline{CD} \cap r = \{P\}$

isto é, a condição para que dois pontos (C e D na figura) *pertençam a semi-planos opostos* é que o segmento $\overline{CD}$ *intercepte* a reta origem *r*.

8. Assinale com *V* ou *F*, onde achar que deva, as seguintes sentenças:

1.ª) se $A \in \alpha' \wedge B \in \alpha'$, então $\overline{AB} \subset \alpha'$ (lembre-se: $\subset$ lê-se "contido")

2.ª) se $C \in \alpha'' \wedge D \in \alpha''$, então $\overline{CD} \subset \alpha''$

3.ª) se $C \in \alpha' \wedge D \in \alpha''$, então $\overline{CD} \subset \alpha$

9. Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel r$, isto é: $\overleftrightarrow{AB} \cap r = \emptyset$, então *A* e *B pertencem* ao *mesmo* semi-plano?

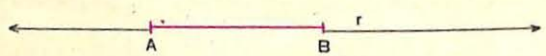
10. Se $\overline{AB} \cap r = \emptyset$, será que você pode concluir que $\overleftrightarrow{AB} \parallel r$? (Cuidado!)

Medida de segmentos — Segmentos congruentes

12. *Conceito de medida de um segmento de reta*

É sempre possível associar *números* a certas partes das figuras geométricas, a fim de melhor estudar suas propriedades. Tais números chamam-se **medidas.**

Inicialmente consideremos os pontos *A* e *B* da reta *r*:



Usando uma régua graduada em *cm*, pode-se fazer corresponder ao ponto *A* o número 4, por exemplo, assinalado na régua. Nestas condições ao *B* corresponderá, na mesma régua, o número 7. A diferença entre êsses dois números (subentende-se o maior menos o menor) é o *número* 3.

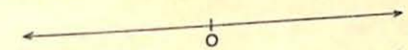
Agora, fazendo-se a régua deslizar ao longo da reta e ao ponto *A* corresponder o 5, então ao *B* corresponderá o 8 e a diferença *permanecerá* o *número* 3.

O número real 3 diz-se *medida* do segmento $\overline{AB}$, quando se toma por unidade o *cm*.

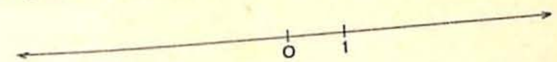
E se a régua fôsse graduada em *mm*? Então a *medida* do segmento $\overline{AB}$ seria 30, como também seria outro número real se a unidade fôsse *polegada*.

A fim de se ficar "à vontade" com relação à unidade, quando se fala em *medida* na Geometria, diz-se simplesmente que é um *número real*, não importando se a unidade empregada é o cm, mm, polegada, etc...

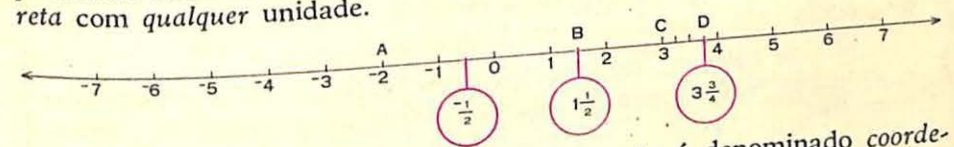
Com essa finalidade, o *conceito de medida* resultará da seguinte correspondência estabelecida entre *pontos da reta* e os *números reais:*



Fixa-se numa reta um ponto *qualquer*, ao qual fazemos corresponder o número *0*, a seguir, fixa-se um *outro ponto*, ao qual fazemos corresponder o número *1:*



Como os pontos, aos quais foram associados 0 e 1, foram escolhidos arbitràriamente, associou-se a êles uma *unidade* sôbre a reta (que poderia ser o *cm*, *dm*, ...) que permite assinalar os pontos correspondentes aos restantes números reais. Fica, pois, perfeitamente definida uma *correspondência biunívoca* (ou *um* a *um*) entre os *números reais* e os *pontos da reta* com *qualquer* unidade.

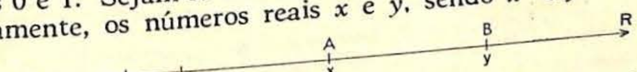


O *número real* correspondente a cada ponto é denominado *coordenada abscissa* ou simplesmente *abscissa* do ponto. O ponto correspondente ao 0 é denominado *origem* do sistema e possui abscissa nula. Exemplos:

A *abscissa* do ponto *A* é o *n.º real:* -2; a *abscissa* do ponto *B* é o *n.º real:* $1\frac{1}{2}$

A *abscissa* do ponto C é o *n.º real:* *3*; a *abscissa* do ponto *D* é o *n.º real:* $3\frac{3}{4}$

Consideremos, agora, a reta *r* na qual foram fixados os pontos correspondentes 0 e 1. Sejam *A* e *B* dois pontos de *r*, que tenham por *abscissa*, respectivamente, os números reais *x* e *y*, sendo $x < y$:

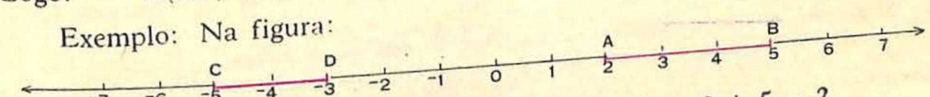


Chama-se **medida** do segmento *AB* ao *número real não-negativo:* $y - x$, isto é, a *diferença* entre as abscissas de *B* e de *A* (nessa ordem!).

Indicação: $m(\overline{AB})$ ou *AB*

Logo: $m(\overline{AB}) = y - x$ [$m(AB)$ é lido: "medida de $\overline{AB}$"]

Exemplo: Na figura:



temos: $m(\overline{AB}) = 5 - 2 = 3$ e $m(\overline{CD}) = -3 - -5 = -3 + 5 = 2$

OBSERVAÇÃO: Não se pedirá a *medida* do segmento $\overline{BA}$, uma vez que, sendo $\overline{AB} = \overline{BA}$ (representam o mesmo *conjunto de pontos*), está associada uma *única medida* a ambos e, portanto, basta conhecer $m(\overline{AB})$.

Se $A = B$, isto é, os pontos A e B são *coincidentes*, então $x = y$ e a diferença $y - x = 0$. Logo:

se $A = B$, então $m(\overline{AB}) = 0$ e também se $m(\overline{AB}) = 0$, então $A = B$

LEMBRETE AMIGO

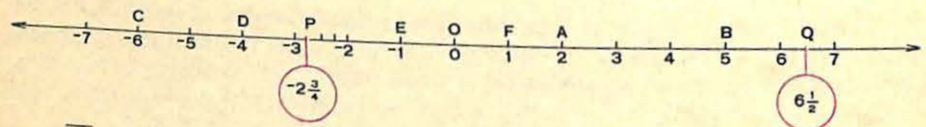
A palavra *comprimento* é, muitas vêzes, usada para *medir* segmentos. Assim, *medida* e *comprimento* de um segmento são palavras sinônimas.

Outras vêzes, emprega-se a palavra *distância* entre A e B, que equivale a dizer, também, *medida* do segmento $\overline{AB}$.

Não se esqueça: como a *medida* de um segmento é um *número real*, então valem para as medidas *tôdas as propriedades* dêsses números!

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 54

1. Determine as *medidas* dos segmentos indicados:



$m(\overline{AB}) = 5 - 2 = 3$

$m(\overline{OB}) = 5 - 0 = 5$

$m(\overline{CD}) = {}^-4 - {}^-6 = {}^-4 + 6 = 2$

$m(\overline{PQ}) = 6\frac{1}{2} - {}^-2\frac{3}{4} = 6\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} = 9\frac{1}{4}$

$m(\overline{PF}) = 1 - {}^-2\frac{3}{4} = 1 + 2\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$

$m(\overline{CO}) = 0 - {}^-6 = 6$

2. Preencher os claros, relativos às medidas do segmentos indicados:

1.º) $m(\overline{DE}) = \ldots$ 3.º) $m(\overline{PB}) = \ldots$ 5.º) $m(\overline{OA}) = \ldots$

2.º) $m(\overline{EA}) = \ldots$ 4.º) $m(\overline{AQ}) = \ldots$ 6.º) $m(\overline{DO}) = \ldots$

13. *Segmentos congruentes; relação de congruência entre segmentos*

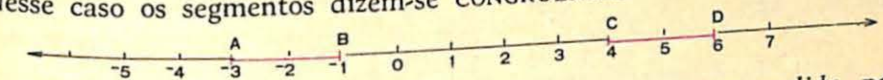
Todo segmento, como *conjunto de pontos*, sòmente é *igual* a si mesmo. Logo:

$\overline{AB} = \overline{AB}$ (porque representa o *mesmo conjunto*)

Também:

$m(\overline{AB}) = m(\overline{AB})$ (porque representa o *mesmo número real*)(*)

Todavia, dois segmentos podem ser distintos e terem *medidas iguais*. Nesse caso os segmentos dizem-se CONGRUENTES. Assim, por exemplo:



os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que são distintos, têm a *mesma medida*, pois:

$m(\overline{AB}) = 2$ e $m(\overline{CD}) = 2$

Logo: O segmento $\overline{AB}$ é *congruente* ao segmento $\overline{CD}$. Indicação:

$$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD}}$$

O símbolo $\cong$ indica a importante *relação de congruência*, usada com freqüência em tôda a Matemática. Portanto:

Dois segmentos são congruentes se, e sòmente se, têm a mesma medida

ou $[\overline{AB} \cong \overline{CD}] \iff [m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})]$

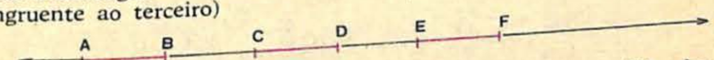
Quais os segmentos *congruentes* que você identifica na reta do exercício 1 do Grupo 54?

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: A *congruência* de segmentos é uma *Relação de Equivalência* porque goza das seguintes *propriedades*:

1.ª) *Reflexiva:* $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (todo segmento é congruente a si mesmo)

2.ª) *Simétrica:* se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, então $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (se um segmento é congruente a um outro, êste outro é congruente ao primeiro)

3.ª) *Transitiva:* se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ (se um segmento é congruente a um segundo segmento e êste é congruente a um terceiro, então o primeiro é congruente ao terceiro)

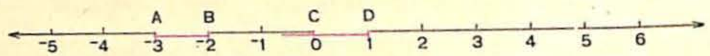


A justificação destas propriedades decorre do fato de que as *medidas* dos segmentos são *números reais* e para êstes *valem* tais propriedades.

(*) Subentende-se SEMPRE com relação à *mesma unidade de medida*.

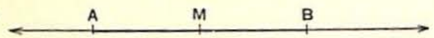
14. *Segmento-unidade; ponto-médio de um segmento*

Um segmento $\overline{AB}$ é denominado *segmento-unidade* se, e sòmente se: $m(\overline{AB}) = 1$. Assim, por exemplo, na figura:



os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *unidades* porque: $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD}) = 1$.

Considerando-se, agora, um segmento qualquer $\overline{AB}$ e se $M \in \overline{AB}$ é tal que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, então o ponto M é denominado *ponto-médio* do segmento $\overline{AB}$:



Logo:

$$[M \text{ é ponto-médio de } \overline{AB}] \iff [\overline{AM} \cong \overline{MB}] \iff [m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})]$$

Qual é o processo *prático* para você determinar o *ponto-médio* de um segmento? Basta marcar os extremos do segmento com uma "cinta de papel" e dobrá-la ao *meio:* o ponto-médio ficará prontamente determinado.

Para maior precisão, usa-se o *compasso.*

15. *Relação de ordem para os segmentos*

Se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *não são congruentes* ($\overline{AB} \not\cong \overline{CD}$), então $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *não têm a mesma medida.*

Neste caso, pode-se definir uma *relação de ordem*(*) para os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, por intermédio das respectivas *medidas* $m(\overline{AB})$ e $m(\overline{CD})$ que, por serem números reais, já satisfazem uma relação de ordem conhecida. Assim, diz-se que:

$\overline{AB}$ é "maior" que $\overline{CD}$ e indica-se: $\overline{AB} > \overline{CD}$ quando $m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$

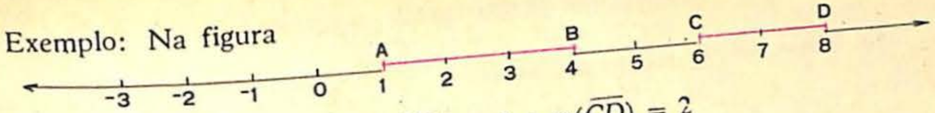
$\overline{AB}$ é "menor" que $\overline{CD}$ e indica-se: $\overline{AB} < \overline{CD}$ quando $m(\overline{AB}) < m(\overline{CD})$

Logo:

$$[\overline{AB} > \overline{CD}] \iff [m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})]$$
$$[\overline{AB} < \overline{CD}] \iff [m(\overline{AB}) < m(\overline{CD})]$$

(*) Poder-se-ia, também, dentro da *linguagem dos conjuntos*, definir que o segmento $\overline{AB}$ é *maior* que o segmento $\overline{CD}$ quando $\overline{AB}$ *contém* um segmento *congruente* a $\overline{CD}$.

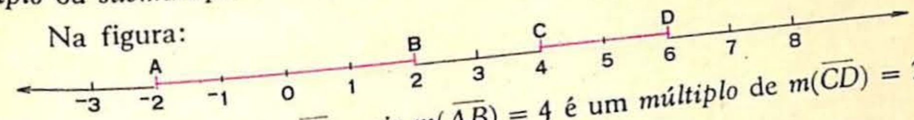
Exemplo: Na figura



temos: $\overline{AB} > \overline{CD}$ porque $m(\overline{AB}) = 3$ e $m(\overline{CD}) = 2$

Também, no caso de a medida do segmento $\overline{AB}$ ser um *múltiplo* ou *submúltiplo* da medida de $\overline{CD}$, diz-se que o segmento $\overline{AB}$ é um *múltiplo* ou *submúltiplo* do segmento $\overline{CD}$. Exemplo:

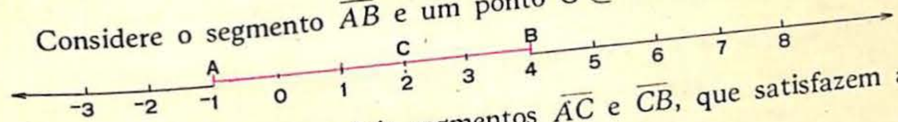
Na figura:



$\overline{AB}$ é *múltiplo* de $\overline{CD}$, pois $m(\overline{AB}) = 4$ é um *múltiplo* de $m(\overline{CD}) = 2$

16. *Adição e subtração de medidas de segmentos; medida da reunião de segmentos*

Considere o segmento $\overline{AB}$ e um ponto $C \in \overline{AB}$:



O ponto C determina dois segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, que satisfazem a seguinte *propriedade fundamental:*

$$\boxed{m(\overline{AC}) + m(\overline{CB}) = m(\overline{AB})}$$

Verifique a exatidão dessa propriedade *medindo* os segmentos da figura, onde:

$$m(\overline{AC}) = 3,\ m(\overline{CB}) = 2 \text{ e } m(\overline{AB}) = 5$$

e, portanto: $m(\overline{AC}) + m(\overline{CB}) = m(\overline{AB})$

Observação: Como $\overline{AC} \cup \overline{CB} = \overline{AB}$, então é possível escrever:

$$m(\overline{AC} \cup \overline{CB}) = m(\overline{AB})$$

ou $$m(\overline{AC} \cup \overline{CB}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CB})$$

Que é: $m(\overline{AB}) - m(\overline{AC})$?

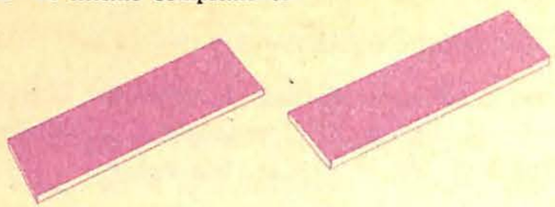
Representa a *diferença* de dois números reais, pois sendo: $m(\overline{AB}) = 5$ e $m(\overline{BC}) = 2$, então:

$$m(\overline{AB}) - m(\overline{AC}) = 5 - 3 = 2$$

número êsse que representa a *medida* do segmento $\overline{CB}$ (na figura)ou de *qualquer segmento* que lhe seja *congruente.*

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 55

1. Duas "tabuinhas" de mesmo comprimento:



corresponderiam, na linguagem dos segmentos, a dois segmentos *iguais* ou *congruentes?*

2. Suponha que um carpinteiro queira cortar 6 tabuinhas tôdas do *mesmo tamanho*, por exemplo 15cm. Se êle cortar a primeira medindo 15cm, poderá continuar sua tarefa cortando as demais pela primeira? De que *propriedade geométrica* se está valendo o carpinteiro?

   (*Sugestão:* lembre-se da Relação de Equivalência . . .)

3. É possível, tomando uma tabuinha como unidade de comprimento, cortar uma tabuinha *três vêzes maior.* Na linguagem dos segmentos o que seria a segunda tabuinha da primeira?

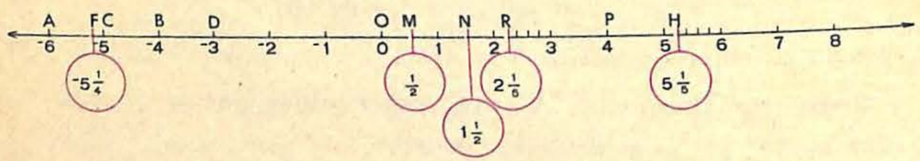
4. Seja o segmento $\overline{AB}$ e M o seu *ponto-médio.* Calcule:

   1.º) o valor da $m(\overline{AB})$, tomando como unidade o segmento $\overline{AM}$

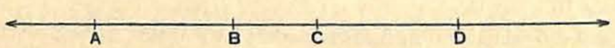
   2.º) o valor da $m(\overline{AM})$, tomando como unidade o segmento $\overline{AB}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 56

1. Na reta abaixo figuram alguns segmentos. No conjunto dêsses segmentos selecionar alguns dos possíveis pares de segmentos que sejam *congruentes:*



2. Preencha os claros de modo a tornar *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:



   1.ª) $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\ldots)$

   2.ª) $m(\overline{AC}) - m(\overline{BC}) = m(\ldots)$

   3.ª) $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) + m(\overline{CD}) = m(\ldots)$

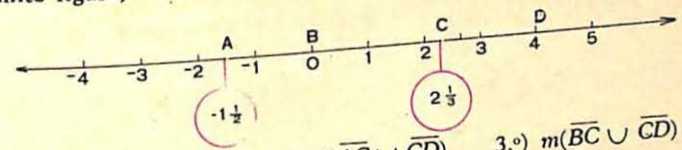
3. Entre os segmentos usados no exercício 1, cite um que seja *maior* que o segmento $\overline{CD}$ e outro que seja *menor* que o segmento $\overline{MN}$. A seguir, calcule a *diferença* entre as respectivas medidas dêsses segmentos.

4. Considerados os pontos A, B, C e D da figura:

   tais que: $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{CD}) = 1$, calcule:

   1.º) $m(\overline{AC})$ 2.º) $m(\overline{BD})$ 3.º) $m(\overline{AD})$

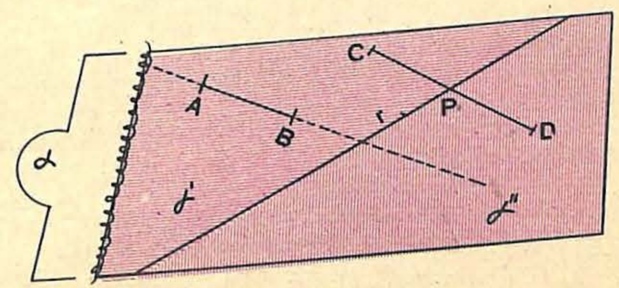
5. Na seguinte figura, calcule a medida das *reuniões* dos segmentos assinalados:

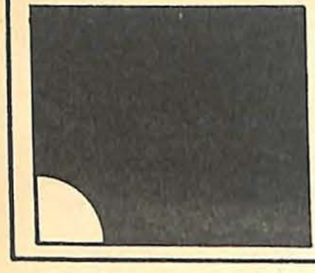


   1.º) $m(\overline{AB} \cup \overline{BC})$ 2.º) $m(\overline{AC} \cup \overline{CD})$ 3.º) $m(\overline{BC} \cup \overline{CD})$

LEMBRETE AMIGO

segmento de reta é um **conjunto de pontos**
medida de um segmento de reta é um **número real**
segmentos congruentes são os que têm a **mesma medida**



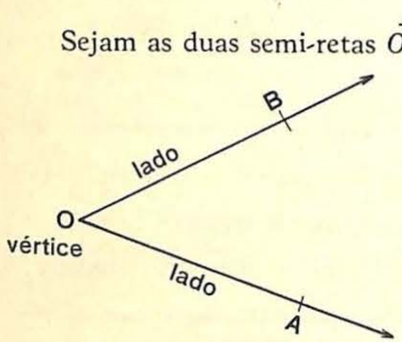


3.ª Parte: - ângulos; medida de ângulos; ângulos congruentes - problemas de aplicação

Ângulos

17. *Conceito de ângulo*

Sejam as duas semi-retas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ de mesma origem O. A *reunião* dessas duas semi-retas é a figura geométrica chamada **ângulo.** Indicação: $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$. Logo:



[Ângulo] $\Longleftrightarrow$ [*reunião* de duas semi-retas de mesma origem]

e simbòlicamente:

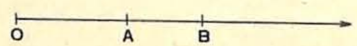
$$\boxed{A\hat{O}B = \vec{OA} \cup \vec{OB}}$$

As semi-retas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são denominadas *lados* e a origem comum O, *vértice* do ângulo.

Casos particulares: 1. Os lados são semi-retas *opostas:*

neste caso, o ângulo diz-se *raso.*

2. Os lados são semi-retas *coincidentes* ($\vec{OA} = \vec{OB}$):

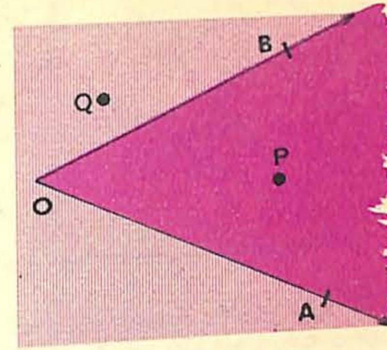


neste caso, o ângulo diz-se *nulo.*

18. *Interior e exterior de um ângulo*

Os ângulos determinam no plano (onde se encontram) *três conjuntos,* constituídos respectivamente pelos:

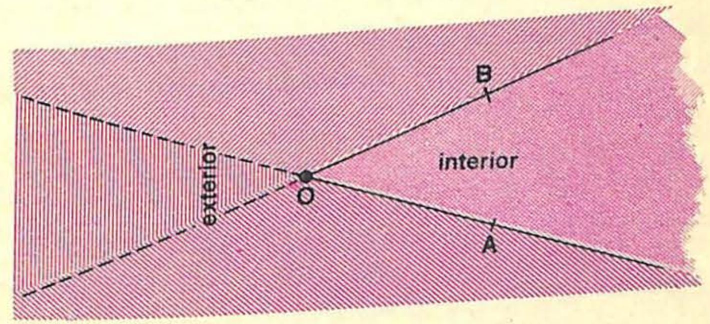
- — pontos *interiores* ao ângulo
- — pontos do próprio *ângulo*
- — pontos *exteriores* ao ângulo



Os pontos interiores compõem a *região interior* ou simplesmente *interior* do ângulo e os pontos exteriores o *exterior* do ângulo.

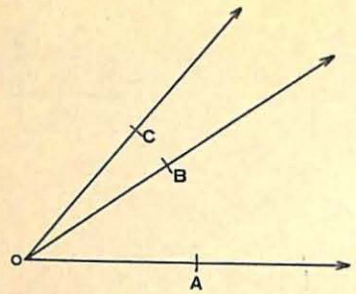
Na figura, o ponto P pertence ao *interior* e o ponto Q ao *exterior* do ângulo $A\hat{O}B$.

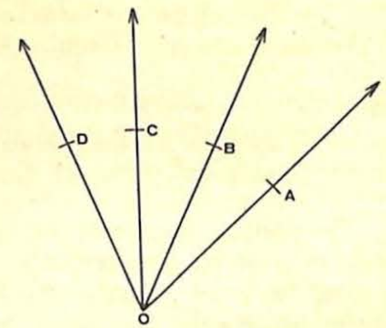
NOTA: Você pode também *definir* o *interior* e o *exterior* de um ângulo da seguinte maneira: A reta $\overleftrightarrow{OA}$, suporte da semi-reta $\vec{OA}$, reparte o plano em dois *semi-planos opostos.* O ponto B pertence a um dêles (assinalado por uma côr). Da mesma forma a reta $\overleftrightarrow{OB}$ reparte o plano em dois *semi-planos opostos,* pertencendo o ponto A a um dêles (assinalado por outra côr). O *interior* do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto dos pontos que resulta da *intersecção* dêsses dois semi-planos (assinalados por côres diferentes). O *exterior* do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto de todos os pontos que *não pertencem* ao ângulo nem ao seu interior.



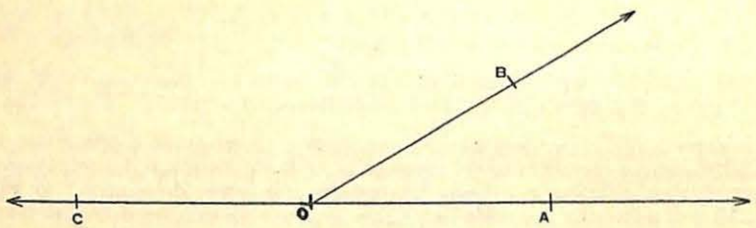
19. *Ângulos adjacentes; ângulos opostos pelo vértice*

Dois ângulos ($A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na figura) são denominados *adjacentes* um ao outro, quando: possuem o *vértice comum* (O), *um lado comum* ($\vec{OB}$) e *não contêm pontos interiores comuns.* Os lados $\vec{OA}$ e $\vec{OC}$, nesse caso, dizem-se *exteriores*. Vários ângulos podem ser adjacentes, dois a dois, numa certa ordem. Em tal caso são chamados *ângulos consecutivos*.

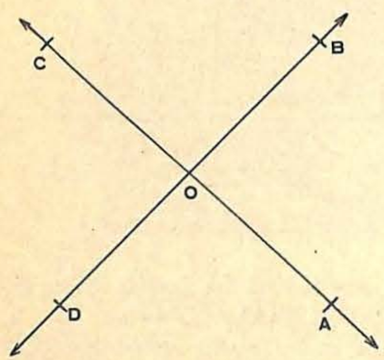




São muito importantes em Geometria os ângulos adjacentes cujos *lados exteriores* são *semi-retas opostas*. É o caso dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$:



Quando duas retas *se interceptam*, os ângulos que elas determinam recebem nomes especiais. Assim, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, que se interceptam em O, determinam os ângulos *adjacentes:*



$A\hat{O}B$	e	$B\hat{O}C$
$B\hat{O}C$	e	$C\hat{O}D$
$C\hat{O}D$	e	$D\hat{O}A$
$D\hat{O}A$	e	$A\hat{O}B$

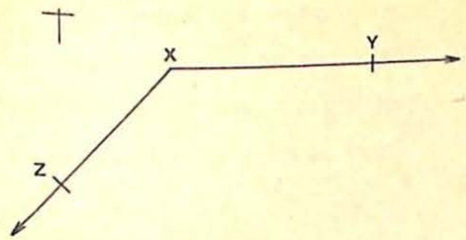
Os ângulos como $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, tais que os lados de um dêles são *semi-retas opostas* dos lados do outro, são denominados *ângulos opostos pelo vértice*. Indicação: o.p.v.

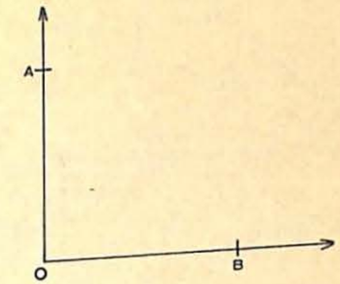
Os ângulos $B\hat{O}C$ e $D\hat{O}A$ da figura também são o.p.v.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 57

1. Desenhe cinco ângulos quaisquer e indique-os por três letras conforme o estudado.

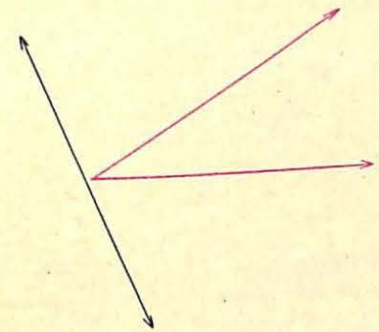
   Modêlo:

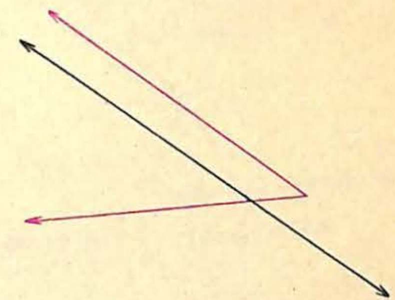




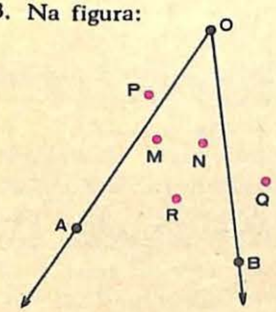
2. Desenhe quatro diferentes figuras que mostrem uma reta contendo exatamente *um ponto* de um ângulo.

   Modêlo:





3. Na figura:



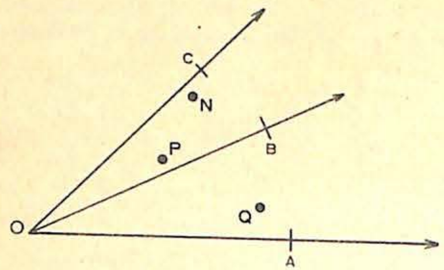
indique quais, dos pontos assinalados, pertencem:

1.º) ao *interior* do ângulo $A\hat{O}B$;

2.º) ao *exterior* do ângulo $A\hat{O}B$;

3.º) ao *ângulo* $A\hat{O}B$ (cuidado!).

4. Na figura:



assinale qual o ângulo que possui:

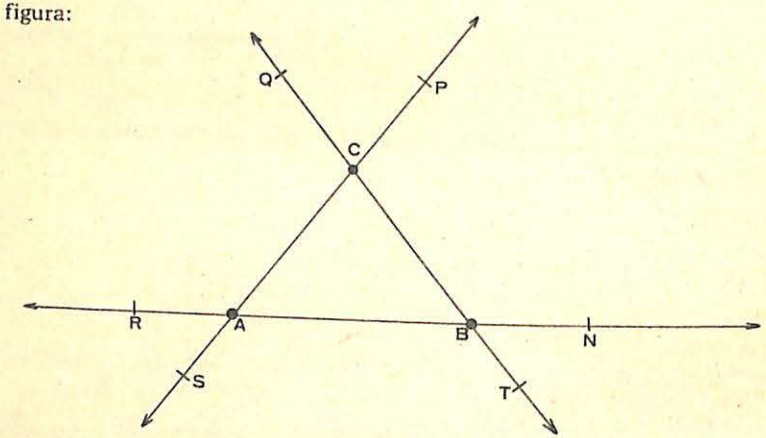
1.º) o segmento $\overline{PQ}$ no seu *interior;* (modêlo: é o ângulo $A\hat{O}C$)

2.º) o segmento $\overline{PN}$ no seu *exterior;*

3.º) o ponto N no seu *interior;*

4.º) o segmento $\overline{QN}$ no seu *interior.*

5. Na figura:



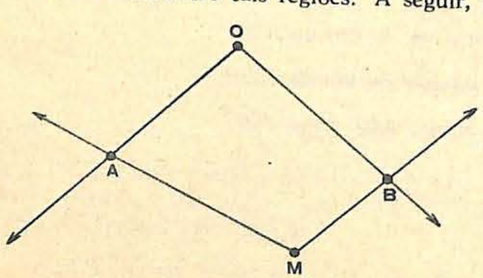
identifique, aos pares:

1.º) os ângulos *adjacentes;*

2.º) os ângulos *opostos pelo vértice.*

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 58

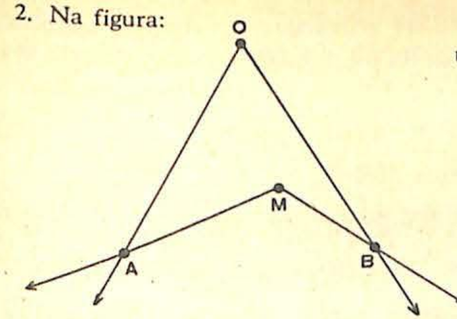
1. Indicando por $I(A\hat{O}B)$ o *interior* do ângulo $A\hat{O}B$ e por $E(A\hat{O}B)$ o seu *exterior*, preencha com côres diferentes tais regiões. A seguir, faça o mesmo em:



1.º) $I(A\hat{O}B) \cap I(A\hat{M}B)$;

2.º) $I(A\hat{M}B) \cap E(A\hat{O}B)$.

2. Na figura:

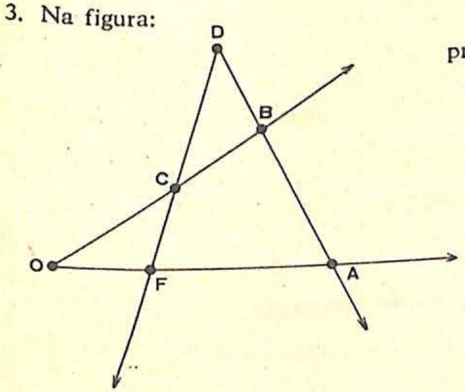


use côres diferentes em:

1.º) $I(A\hat{O}B) \cap I(A\hat{M}B)$;

2.º) $E(A\hat{O}B) \cap E(A\hat{M}B)$.

3. Na figura:



preencha com lápis de côr, de cada vez:

1.º) $I(A\hat{O}B)$; 2.º) $E(A\hat{O}B)$; 3.º) $I(F\hat{D}A)$;

4.º) $I(A\hat{O}B) \cap I(F\hat{D}A)$;

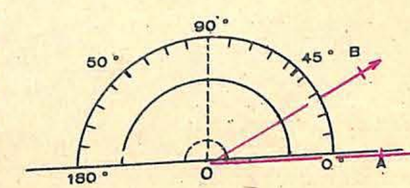
5.º) $I(A\hat{O}B) \cap E(F\hat{D}A)$.

Medida de ângulos — Ângulos congruentes

20. *Conceito de medida de um ângulo*

Assim como foi feito para os *segmentos*, é possível associar a cada ângulo um *número real não-negativo*, que é a sua *medida*, numa certa unidade. Indicação: $m(A\hat{O}B)$ (lê-se: "*medida* do ângulo $A\hat{O}B$").

Também, agora, escolhe-se um *ângulo-unidade* para determinar a *medida* de um ângulo qualquer. Geralmente é empregado o *grau* (1º), outras vêzes o *grado* (1gr), estudados na 1.ª Série Ginasial. O instrumento comumente usado para medir ângulos é o *transferidor*, aferido em *graus* (0º-180º), que equivale a uma semicircunferência dividida em 180 partes iguais e de prática já conhecida.



Logo: Se a unidade fôr o *grau*, então a *medida* do ângulo $A\hat{O}B$ é um *número real não-negativo*, maior ou igual a 0 e menor ou igual a 180:

$$\boxed{0 \leqslant m(A\hat{O}B) \leqslant 180}$$

Se $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ (*ângulo nulo*) então $m(A\hat{O}B) = 0$ e recìprocamente; se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semi-retas opostas (*ângulo raso*), então $m(A\hat{O}B) = 180$ e recìprocamente.

Observação importante:

$m(A\hat{O}B) = 0°$ é uma abreviação de:

"*medida em graus do ângulo* AÔB *é o número real* 0"

$m(A\hat{O}B) = 180°$ é uma abreviação de:

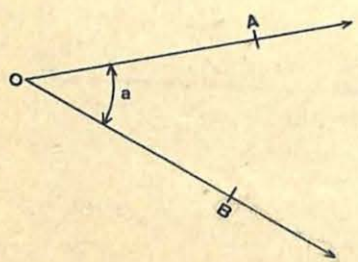
"*medida em graus do ângulo* AÔB *é o número real* 180"

O mesmo ocorre, por exemplo, com:

$m(M\hat{N}P) = 36°$, que é uma abreviação de:

"*medida em graus do ângulo* M$\hat{\text{N}}$P *é o número real* 36"

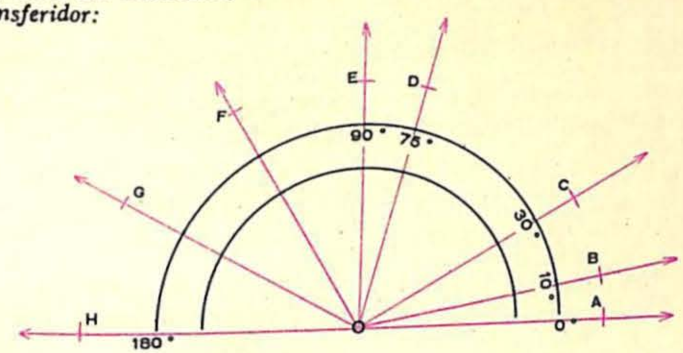
Nota: A *medida* de um ângulo ou o seu "tamanho", como às vêzes é chamado, depende da "abertura" entre os lados registrada pelo *transferidor*. Por êsse fato a medida de um ângulo é também indicada com um *pequeno arco de circunferência* desenhado no *interior* do ângulo. Outras vêzes, a *medida do ângulo* é representada por uma letra minúscula, para facilitar o *cálculo*.



$m(A\hat{O}B) = a$

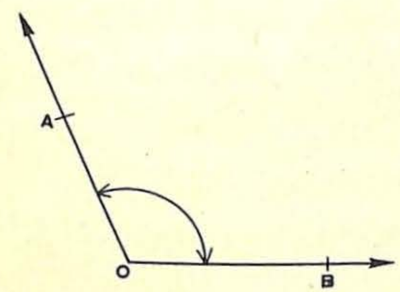
EXERCÍCIOS PRÁTICOS — Grupo 59

1. Escreva, onde fôr necessário, as *medidas* em graus dos seguintes ângulos indicadas pelo *transferidor:*

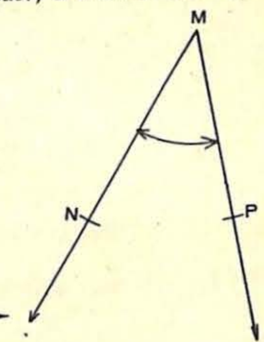


1.º) $m(A\hat{O}B) = 10°$ 3.º) $m(A\hat{O}D) = 75°$ 5.º) $m(A\hat{O}E) = \ldots$ 7.º) $m(A\hat{O}G) = 150°$
2.º) $m(A\hat{O}C) = \ldots$ 4.º) $m(A\hat{O}A) = \ldots$ 6.º) $m(A\hat{O}F) = \ldots$ 8.º) $m(A\hat{O}H) = \ldots$

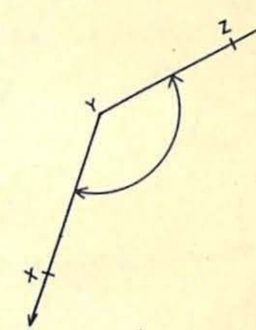
2. Determine, usando o *transferidor*, a medida dos seguintes ângulos:



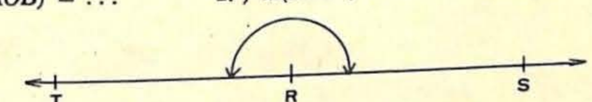
1.º) $m(A\hat{O}B) = \ldots$



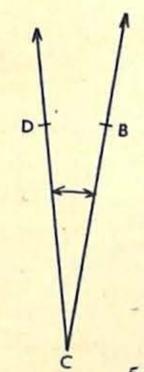
2.º) $m(N\hat{M}P) = \ldots$



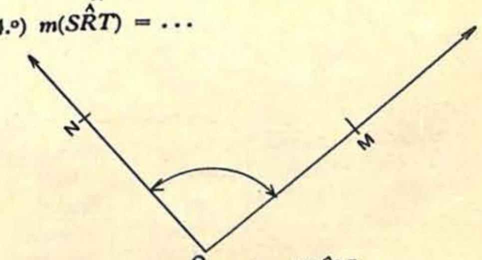
3.º) $m(X\hat{Y}Z) = \ldots$



4.º) $m(S\hat{R}T) = \ldots$



5.º) $m(B\hat{C}D) = \ldots$

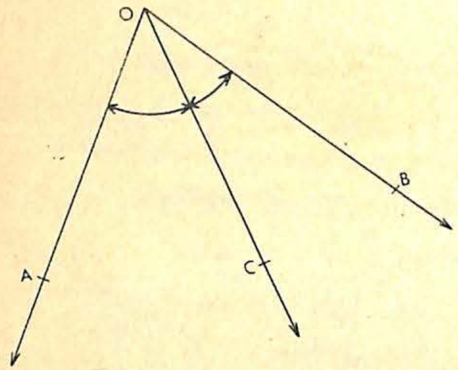


6.º) $m(M\hat{O}N) = .$

21. *Adição e subtração de medidas de ângulos; propriedade fundamental*

Considere o ângulo $A\hat{O}B$ e um ponto C pertencente ao *interior* dêsse ângulo. A semi-reta $\overrightarrow{OC}$ determina dois ângulos: $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$, tais que satisfazem à seguinte *propriedade fundamental:*

$$\boxed{m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}B) = m(A\hat{O}B)}$$



Verifique esta propriedade *medindo* os ângulos da figura, pois:

$$m(A\hat{O}C) = 45^{\circ},\ m(C\hat{O}B) = 30^{\circ}$$
$$\text{e } m(A\hat{O}B) = 75^{\circ}$$

e, portanto:

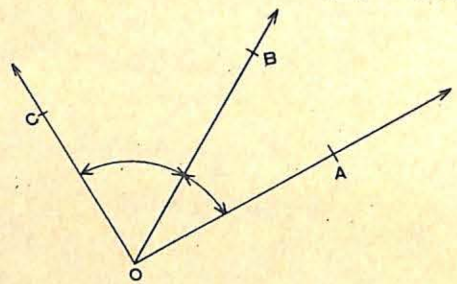
$$m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}B) = m(A\hat{O}B)$$

Também, como é fácil deduzir:

$$m(A\hat{O}B) - m(A\hat{O}C) = m(C\hat{O}B)$$
$$\text{ou} \quad 75^{\circ} - 45^{\circ} = 30^{\circ}$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 60

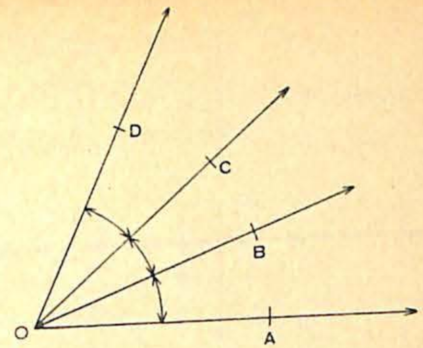
1. Torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças, relativas à figura:



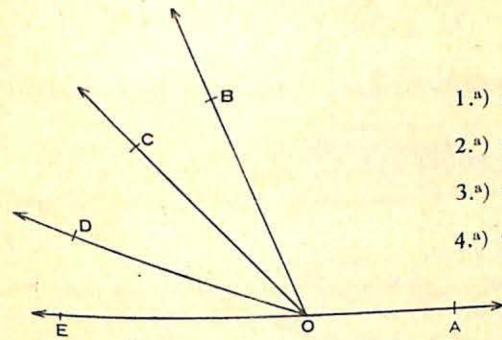
1.ª) $m(A\hat{O}B) = \ldots$ (use o *transferidor*) 2.ª) $m(B\hat{O}C) = \ldots$ (idem)
3.ª) $m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = m(\ldots)$ (*não precisa* usar o transferidor)
4.ª) $m(A\hat{O}C) - m(B\hat{O}C) = m(\ldots)$ (idem)
5.ª) $m(B\hat{O}C) + m(A\hat{O}B) = m(\ldots)$ (idem)
6.ª) $m(A\hat{O}B) + m(\ldots) = m(A\hat{O}C)$ (idem)
7.ª) $m(\ldots) - m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C)$ (idem)
8.ª) $m(A\hat{O}C) - m(\ldots) = m(A\hat{O}B)$ (idem)

2. Mesmo problema, com relação à figura:

1.ª) $m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = m(\ldots)$
2.ª) $m(A\hat{O}C) - m(B\hat{O}C) = m(\ldots)$
3.ª) $m(A\hat{O}B) + m(\ldots) = m(A\hat{O}D)$
4.ª) $m(\ldots) + m(C\hat{O}D) = m(B\hat{O}D)$



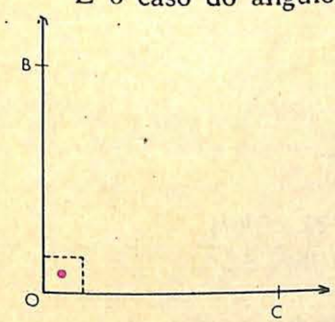
3. Mesmo problema, com relação à figura:



1.ª) $m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) = m(\ldots)$
2.ª) $m(A\hat{O}D) - m(C\hat{O}D) = m(\ldots)$
3.ª) $m(A\hat{O}D) - [m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)] = m(\ldots)$
4.ª) $m(A\hat{O}C) + m(\ldots) = m(A\hat{O}D)$

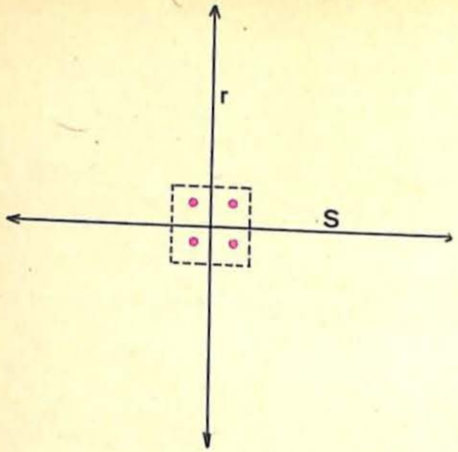
22. *Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso; retas perpendiculares*

Um ângulo diz-se *reto* se a sua medida, em graus, é 90. Indicação: É o caso do ângulo $A\hat{O}B$ da figura:



Logo:

$$[A\hat{O}B \text{ é reto}] \iff [m(A\hat{O}B) = 90^{\circ}]$$



Se duas retas (r e s, na figura ao lado) se interceptam de modo que os *quatro ângulos* formados sejam *retos*, então as retas são denominadas *perpendiculares*.

Indicação: $r \perp s$

Logo:

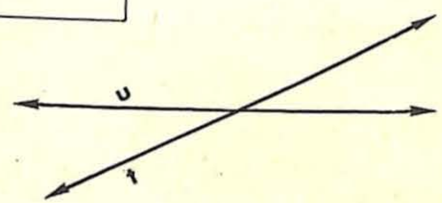
$[r \perp s] \iff$ [os ângulos formados são retos]

e se $A\hat{O}B$ é um *ângulo reto*, então $\vec{OA} \perp \vec{OB}$(*)

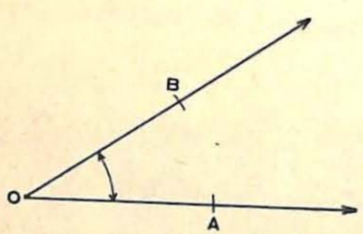
Observe que a *relação de perpendicularidade* entre duas retas é *simétrica*, isto é:

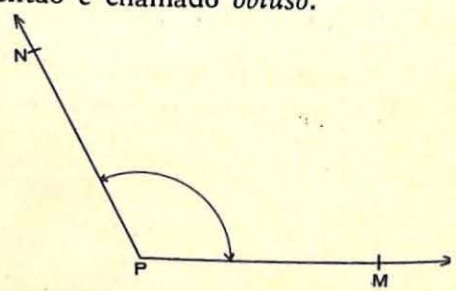
$$\boxed{\text{se } r \perp s, \text{ então } s \perp r}$$

NOTA: Quando duas retas *se interceptam* e não são perpendiculares (u e t, na figura), são chamadas *oblíquas*. Indicação: $u \not\perp t$.



Um ângulo ($A\hat{O}B$ na figura) que tem sua *medida compreendida entre* 0° e 90° é denominado *agudo*. Se a *medida* do ângulo ($M\hat{P}N$ na figura) é *maior* que 90° e *menor* que 180°, então é chamado *obtuso*.

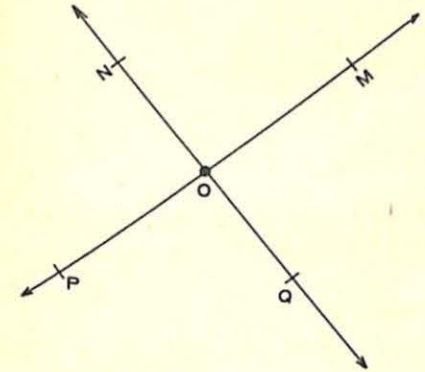


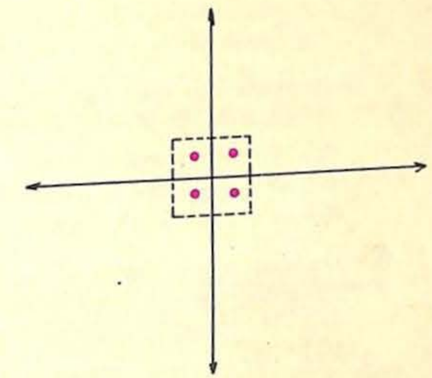


Logo: $[A\hat{O}B \text{ é agudo}] \iff [0° < m(A\hat{O}B) < 90°]$
$[M\hat{P}N \text{ é obtuso}] \iff [90° < m(M\hat{P}N) < 180°]$

(*) Duas *semi-retas* são *perpendiculares* quando pertencem a retas perpendiculares.

1. As duas retas da figura são *perpendiculares*. Que pode você dizer acêrca dos ângulos: $M\hat{O}N$, $N\hat{O}P$, $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}M$?

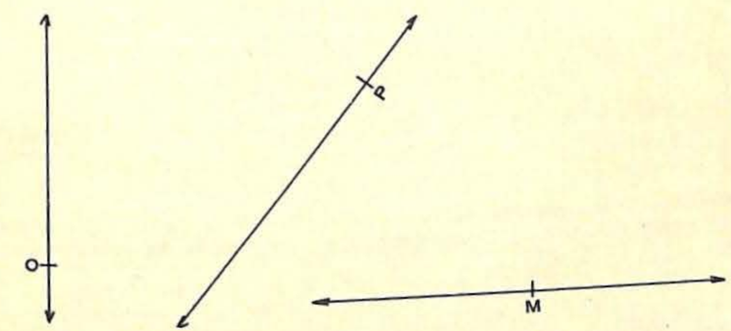




2. As duas retas da figura formam ângulos cuja medida é 90°. Que pode você dizer acêrca dessas retas?

3. Com o emprêgo do *transferidor* e da *régua*:

   1.°) trace a *perpendicular* a cada uma das seguintes retas pelos pontos assinalados;



   2.°) trace pelo ponto $O \in \overleftrightarrow{AB}$ uma reta *oblíqua* a $\overleftrightarrow{AB}$ e que forme com $\vec{OB}$ um ângulo *agudo;*

   3.°) idem, que forme com $\vec{OB}$ um ângulo *obtuso*.

4. Desenhe uma reta r em sua fôlha de desenho. A seguir, construa a reta s, tal que: $s \perp r$ (por qualquer ponto de r) e depois uma terceira reta t, tal que: $t \perp s$ (por qualquer ponto de s).

   Qual é a *relação* existente entre as retas t e r?

1. O *paralelismo* entre retas de um plano pode ser considerado uma *Relação de Equivalência*, desde que seja *definido* da seguinte maneira:

$$[r \parallel s] \iff [r = s \quad \text{ou} \quad r \cap s = \emptyset]$$

De fato, com essa definição de *retas paralelas* valem as *propriedades:*

1.ª) *reflexiva:* $r \parallel r$

2.ª) *simétrica:* se $r \parallel s$, então $s \parallel r$

3.ª) *transitiva:* se $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$

2. O *perpendicularismo* entre retas de um plano *não é* uma relação de equivalência, pois, com a *definição* de *retas perpendiculares* conhecida, temos:

1.º) $r \perp r$ (reflexiva) é *falsa*

2.º) se $r \perp s$, então $s \perp r$ (simétrica) é *verdadeira*

3.º) se $r \perp s$ e $s \perp t$, então $r \perp t$ (transitiva) é *falsa* (pois $r \parallel t$!)

3. Que resultaria da *composição* da relação *paralelismo* ($\parallel$) com a relação *perpendicularismo* ($\perp$)?

$*$	$\parallel$	$\perp$
$\parallel$	$\parallel$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\parallel$

A tábua dessa *operação* (composição de relações), que será indicada por $*$, já está construída.

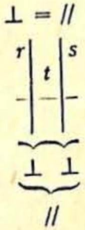
Alguns dos resultados serão explicados; os demais calcule você mesmo. Assim:

$\parallel * \parallel = \parallel$

porque:

$\perp * \perp = \parallel$

porque:



OBSERVAÇÃO: O *Sistema Matemático* constituído pelo conjunto $[\parallel, \perp]$, no plano, e da operação $*$ tem *estrutura* de *Grupo Comutativo*, pois valem as propriedades ANIC. Verifique-as.

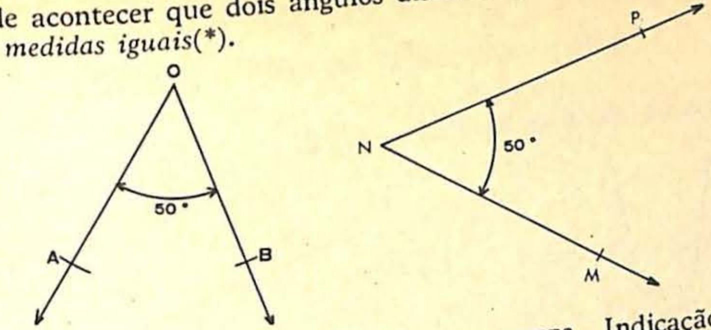
23. *Ângulos congruentes; relação de congruência entre ângulos*

Todo ângulo, como *conjunto de pontos*, sòmente é *igual* a si mesmo. Logo:

$A\hat{O}B = A\hat{O}B$ (porque representa o *mesmo conjunto*)

Também: $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}B)$ (porque, referida na mesma unidade, representa o *mesmo número real*)

Pode acontecer que dois ângulos distintos ($A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$ na figura) tenham *medidas iguais*(*).



Nesse caso os ângulos dizem-se CONGRUENTES. Indicação:

$$\boxed{A\hat{O}B \cong M\hat{N}P}$$

Portanto:

Dois ângulos são congruentes se, e sòmente se, têm a mesma medida

ou $[A\hat{O}B \cong M\hat{N}P] \iff [m(A\hat{O}B) = m(M\hat{N}P)]$

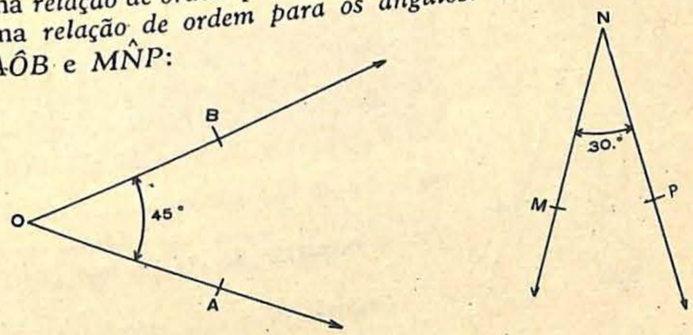
A *congruência* de ângulos é por sua vez uma *Relação de Equivalência* pois valem as *propriedades:*

1.ª) *Reflexiva:* $A\hat{O}B \cong A\hat{O}B$

2.ª) *Simétrica:* se $A\hat{O}B \cong M\hat{N}P$, então $M\hat{N}P \cong A\hat{O}B$

3.ª) *Transitiva:* se $A\hat{O}B \cong M\hat{N}P$ e $M\hat{N}P \cong X\hat{Y}Z$, então $A\hat{O}B \cong X\hat{Y}Z$

Sendo a medida de um ângulo um *número real* e como se pode estabelecer uma *relação de ordem* para os números reais, segue-se que é possível definir uma *relação de ordem para os ângulos*. Assim, com relação aos ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$:

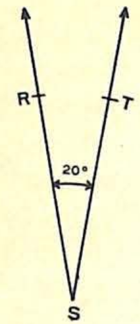


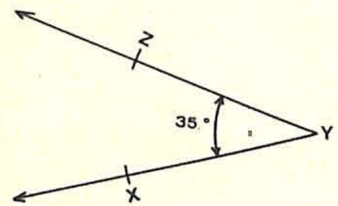
(*) Para facilidade de cálculo, subentende-se o *grau* como unidade.

que não são congruentes, temos:

$$[A\hat{O}B > M\hat{N}P] \iff [m(A\hat{O}B) > m(M\hat{N}P)]$$

e, com relação aos ângulos $R\hat{S}T$ e $X\hat{Y}Z$:

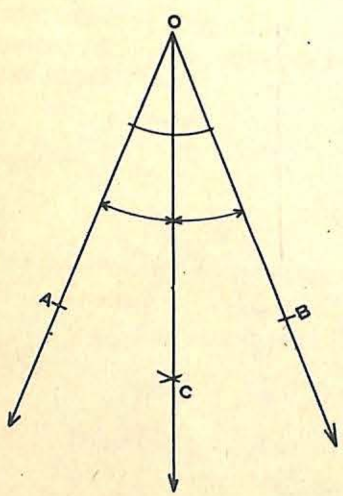




temos: $$[R\hat{S}T < X\hat{Y}Z] \iff [m(R\hat{S}T) < m(X\hat{Y}Z)]$$

24. *Bissetriz de um ângulo*

Seja $\vec{OC}$ uma semi-reta *interior* ao ângulo $A\hat{O}B$, tal que: $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.



Logo: A semi-reta $\vec{OC}$ diz-se BISSETRIZ de $A\hat{O}B$.

> *Bissetriz* de um ângulo é a *semi-reta*, de origem no vértice do ângulo, que o divide em *dois ângulos congruentes*

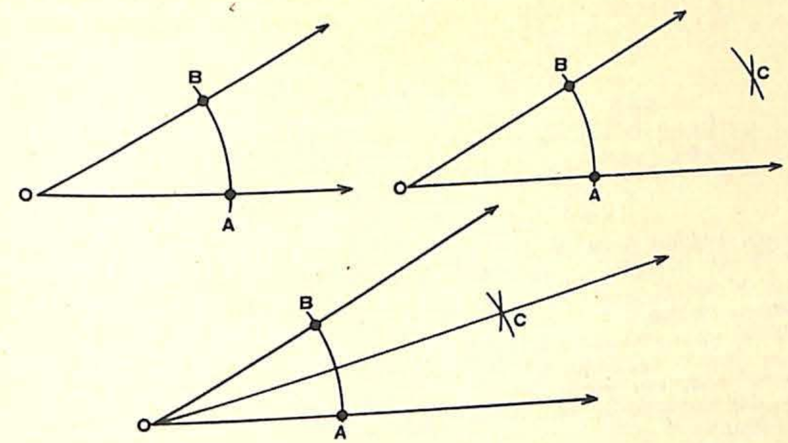
ou

$$[\vec{OC} \text{ é bissetriz de } A\hat{O}B] \iff [A\hat{O}C \cong C\hat{O}B]$$

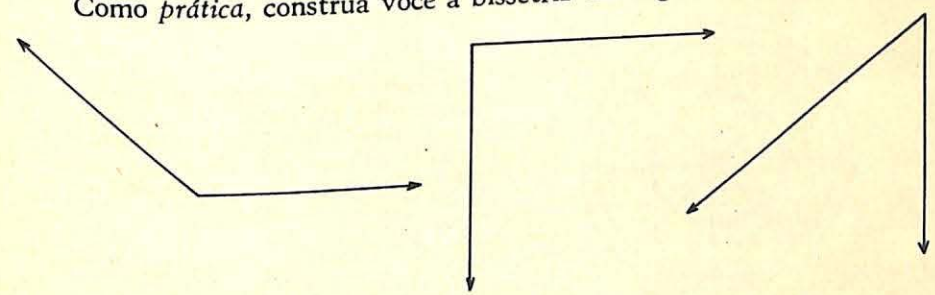
Guarde bem esta *afirmação*:

Todo ângulo não-nulo admite uma, e uma só, bissetriz

A *bissetriz* de qualquer ângulo pode ser construída, usando-se a régua e o compasso, em *três passagens:*

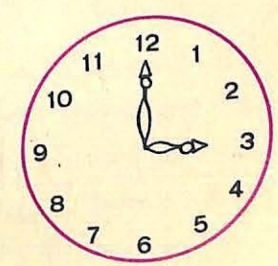


Como *prática*, construa você a bissetriz dos seguintes ângulos:

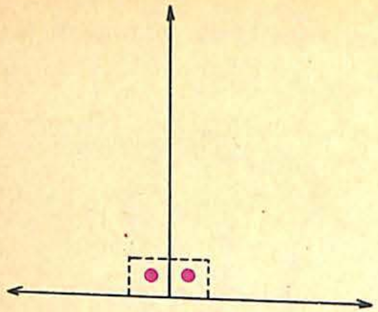


TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 63

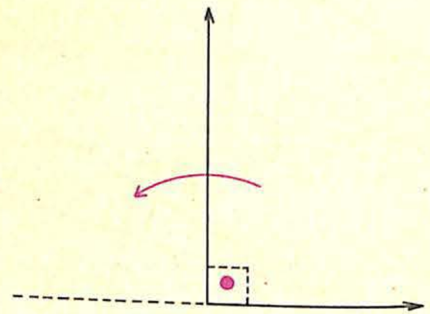
1. Os ponteiros de um relógio marcam três horas. Qual é a medida, em *graus*, do ângulo determinado pelos ponteiros do relógio?



2. Idem, para o caso de os ponteiros marcarem, respectivamente: 6h, 4h, 2h e 4h10m (se quiser, pode usar o transferidor . . .)

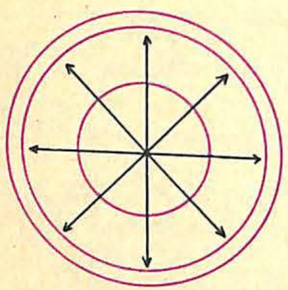


3. Quanto vale, em *graus*, a medida da soma de dois ângulos retos e adjacentes? Quanto vale, em *graus*, a medida de um ângulo raso?



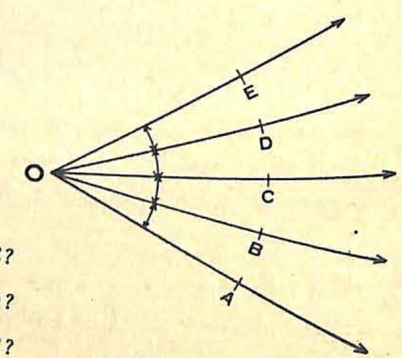
4. Quantos ângulos retos pode você dispor na fôlha do caderno, de modo que tenham o mesmo vértice e os lados de cada um coincidam com os do ângulo consecutivo? Quanto vale, em *graus*, a soma das medidas de todos êsses ângulos retos?

NOTA: Você vai encontrar para essa soma um número de graus maior do que tôdas as medidas estudadas até agora.



5. Que pode você concluir da soma das medidas, em *graus*, dos "ângulos consecutivos" formados por todos os raios de uma roda de bicicleta, em tôrno do centro, agora tomado como "vértice"? Seria 360°?

6. Preste atenção: as semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ determinam quatro ângulos consecutivos congruentes, cuja medida é de 15° cada um. Responda:



1.°) Quanto mede o ângulo $A\hat{O}B$?

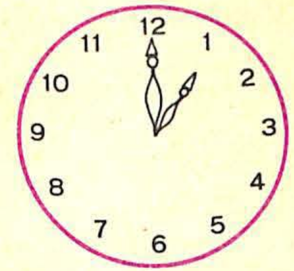
2.°) Quanto mede o ângulo $B\hat{O}D$?

3.°) A semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$?

4.°) A semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}D$?

5.°) A semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}E$?

7. Que fração da medida de um ângulo reto é a medida de um ângulo de 1°?

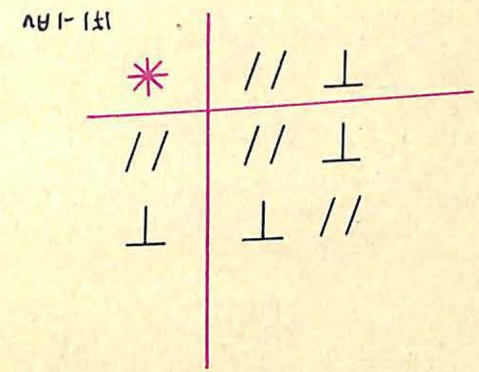


8. Considerando como unidade de medida o *ângulo-minuto*, a medida do ângulo, identificado pelos ponteiros do relógio da figura, é *5*.

Qual é, em *ângulos-minuto*, a medida do ângulo quando o relógio marca 4 horas?

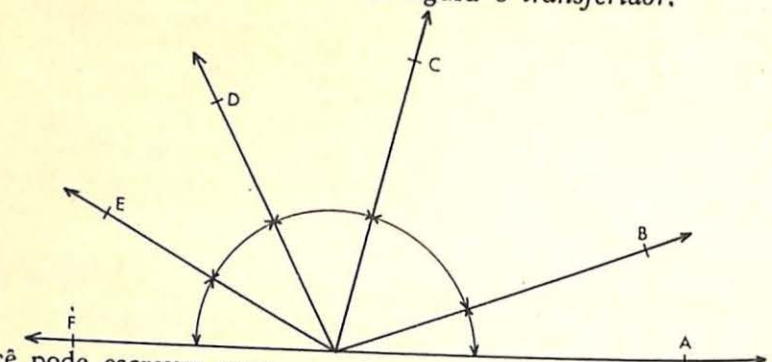
9. Considerando como unidade de medida o *ângulo reto*, a medida do ângulo indicado em 1h é $\frac{1}{3}$. Qual a medida do ângulo quando o relógio marca 4h?

10. Idem, quando o relógio estiver marcando 6h.



LEMBRETE AMIGO

Depois de usar **uma vez** na figura o *transferidor*,

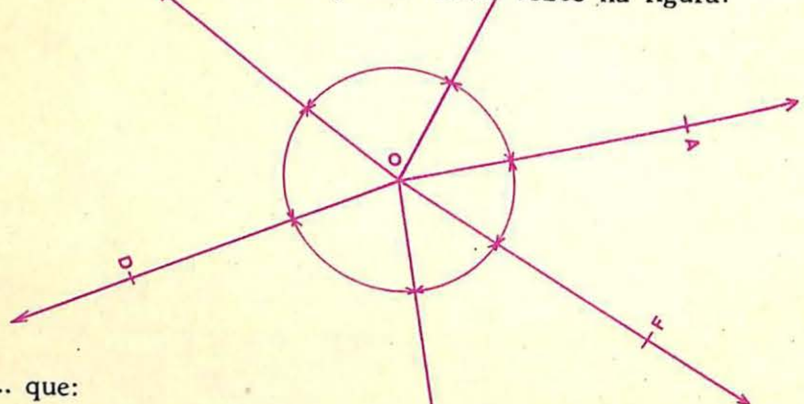


você pode escrever que:

$$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) + m(D\hat{O}E) + m(E\hat{O}F) = 180^\circ$$

isto é: *"a soma das medidas dos ângulos consecutivos formados num mesmo semi-plano, determinado por uma reta, é igual a 180°"*.

... e depois de usar o *transferidor* **duas vêzes** na figura:



... que:

$$m(A\hat{O}B)+m(B\hat{O}C)+m(C\hat{O}D)+m(D\hat{O}E)+m(E\hat{O}F)+m(F\hat{O}A)=360^\circ$$

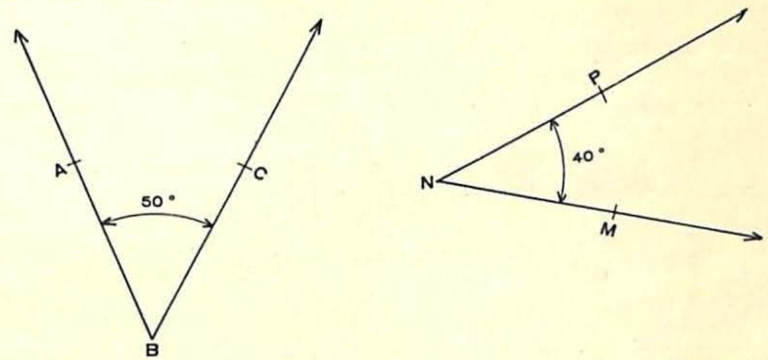
ou seja: *"a soma das medidas dos ângulos consecutivos formados em tôrno de um mesmo ponto é igual a 360°"*.

25. *Ângulos complementares; ângulos suplementares*

Dois ângulos dizem-se *complementares* quando a soma de suas *medidas* é 90°. Assim, por exemplo, os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{N}P$ da figura são *complementares*, pois:

$$m(A\hat{B}C) + m(M\hat{N}P) = 90^\circ$$

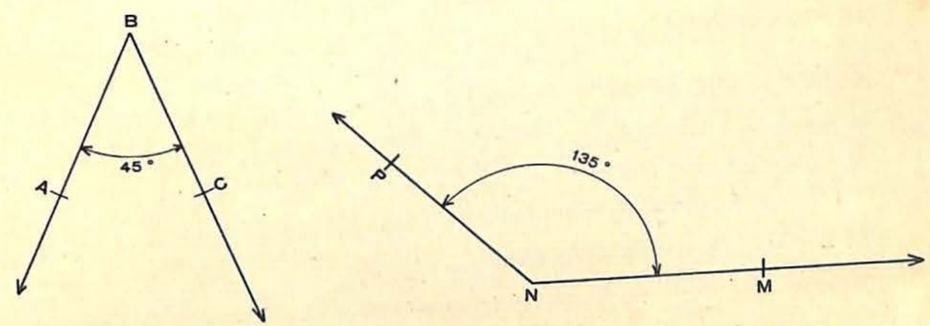
Cada um dos ângulos é denominado *complemento* do outro. Dêsse modo o *complemento* de um ângulo que mede 50° é o ângulo que mede 40° (isto é, 90° – 50°) ou simplesmente um ângulo de 40°.



Dois ângulos dizem-se *suplementares* quando a soma de suas *medidas* é 180°. Os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{N}P$ da figura abaixo são *suplementares*, porque:

$$m(A\hat{B}C) + m(M\hat{N}P) = 180^\circ$$

e cada um dêles é chamado *suplemento* do outro. Portanto, o *suplemento* de um ângulo de 45° é um ângulo de 135°.



EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 64

1.

medida do *ângulo:*	30°	15°20′	90°	45°	0°
medida do *complemento:*	60°	74°40′	0°	45°	90°
medida do *suplemento:*	150°	164°40′	90°	135°	180°

2. Preencha os claros:

medida do *ângulo:*	40°	...	...	89°15′	...
medida do *complemento:*	...	65°	...	...	60°30′18″
medida do *suplemento:*	...	...	130°	...	...

NOTA: Já foi estudada, na 1.ª Série, a prática de operações com medidas *não-decimais.*

3. Complete as seguintes sentenças, a fim de torná-las *verdadeiras:*

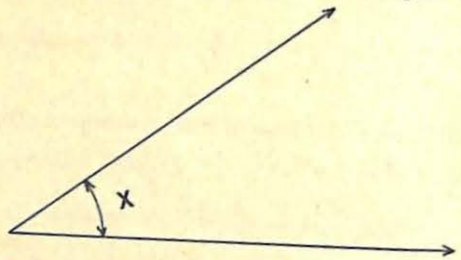
1.ª) Se os ângulos $A\hat{O}B$ e $X\hat{Y}Z$ são *suplementares*, então $m(A\hat{O}B) + m(X\hat{Y}Z) = \ldots$

2.ª) Se $m(A\hat{B}C) + m(N\hat{O}P) = 90°$, então o ângulo $A\hat{B}C$ é o ...... do ângulo $N\hat{O}P$

3.ª) O *suplemento* de um ângulo raso é o ângulo ......

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 65

Representando por x a *medida*, em graus, de um *ângulo* qualquer:



temos, em *linguagem simbólica*, as seguintes representações para as *medidas:*

do *dôbro* dêsse ângulo	$2x$
do *triplo* dêsse ângulo	$3x$
da *metade* dêsse ângulo	$\frac{x}{2}$
de *um têrço* dêsse ângulo	$\frac{x}{3}$
do *complemento* dêsse ângulo	$90 - x$
do *suplemento* dêsse ângulo	$180 - x$
do *dôbro do complemento* dêsse ângulo	$2(90 - x)$
da *metade do suplemento* dêsse ângulo	$\frac{1}{2}(180 - x)$

que serão aplicadas na resolução de alguns *problemas:*

1. A medida da metade de um ângulo, somada com 20° é igual a 70°. Qual a medida dêsse ângulo?

Temos: x representa a medida do ângulo procurado

$\frac{x}{2}$ representa a medida da metade dêsse ângulo

e a *sentença matemática* relativa ao problema conduz à equação:

$$\frac{x}{2} + 20 = 70$$

ou $x + 40 = 140 \iff x = 140 - 40 \iff x = 100$

Logo, a medida, em graus, do ângulo pedido é 100, vulgarmente escrita *100°*.

2. Calcule a *medida* de um ângulo sabendo que ela é igual ao dôbro da de seu complemento.

Temos: x representa a medida do ângulo procurado

$90 - x$ representa a medida do complemento dêsse ângulo

e a *equação* que traduz o problema:

$$x = 2(90 - x)$$

ou $x = 180 - 2x \iff 3x = 180 \iff x = 60$

Resposta: a *medida* do ângulo procurado é 60°.

3. A diferença entre o triplo da medida de um ângulo e a medida de seu suplemento é 122°. Determine a medida do ângulo.

É fácil chegar à equação: $3x - (180 - x) = 122$

onde $x = 75°30'$

Resposta: a medida do ângulo procurado é 75°30′.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 66

1. Representando por x a medida, em graus, de um ângulo, escreva em linguagem simbólica:

1.°) o quádruplo da medida dêsse ângulo;

2.°) três quartos da medida dêsse ângulo;

3.°) a medida do complemento dêsse ângulo;

4.°) o dôbro da medida do suplemento dêsse ângulo;

5.°) a soma da medida dêsse ângulo com a metade dessa medida;

6.°) a diferença entre as medidas do suplemento e do complemento dêsse ângulo;

7.°) o triplo da medida dêsse ângulo mais a metade da medida de seu complemento;

8.°) dois terços da medida dêsse ângulo menos 10.

2. Resolva os seguintes problemas:

1.º) A medida, em graus, do dôbro de um ângulo menos 30° é igual a 150°. Qual a medida dêsse ângulo?

2.º) A têrça parte da medida de um ângulo mais a medida de seu complemento é igual a 60°. Determine a medida dêsse ângulo.

3.º) O triplo da medida de um ângulo é 300°. Qual o valor do suplemento dêsse ângulo?

4.º) A medida de um ângulo é a quinta parte da de seu complemento. Quanto mede êsse ângulo?

5.º) O triplo da medida do complemento de um ângulo é igual à têrça parte da do suplemento dêsse ângulo. Determine a medida do ângulo.

6.º) A medida de um ângulo é a têrça parte da de seu complemento. Calcule a medida do ângulo.

7.º) A soma das medidas de dois ângulos é 90° e a diferença dessas medidas é 50°. Quanto mede cada ângulo?

Modêlo: O problema conduz ao seguinte *sistema de equações:*

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = 50 \end{cases}$$

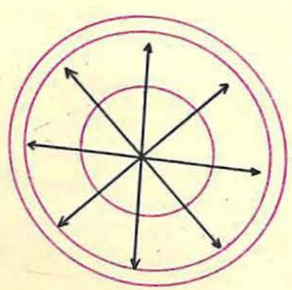
que, resolvido, dá como solução o par (70°, 20°).

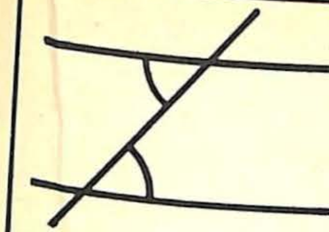
8.º) A medida de um ângulo é igual a 60° a mais que a medida de um outro ângulo. Se, juntas, essas medidas valem 160°, quanto mede cada ângulo?

9.º) A diferença entre as medidas de dois ângulos é 40°. A medida de um dêles é o triplo da do outro. Determine a medida de cada um dos ângulos.

10.º) Dois ângulos suplementares têm a diferença de suas medidas igual a 120°. Calcule a medida de cada um dos ângulos.

(*Sugestão:* Você pode partir do sistema: $x + y = 180 \wedge x - y = 120$)





4.ª Parte: - explorando demonstrações ...
- ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal

Explorando demonstrações ...

26. *Práticas demonstrativas*

Guarde bem, agora, as *demonstrações* que você fará acêrca de importantes *propriedades dos ângulos,* usando para isso *resultados já conhecidos*:

1.ª)

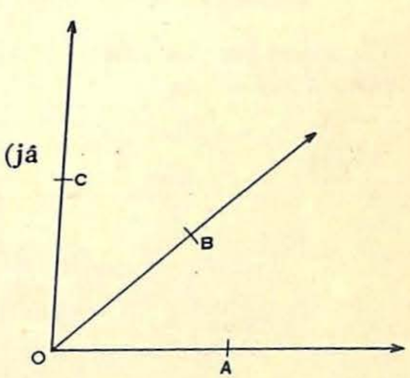
> Dois *ângulos adjacentes* cujos lados exteriores são *semi-retas perpendiculares* são *complementares*

Sejam os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, nas condições do enunciado, isto é:

$$\vec{OC} \perp \vec{OA},$$

ou seja:

$$m(A\hat{O}C) = 90°$$



Por uma *propriedade fundamental* (já estudada) você sabe que:

$$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = m(A\hat{O}C)$$

e sendo $m(A\hat{O}C) = 90°$, vem:

$$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = 90°$$

Que conclui você?

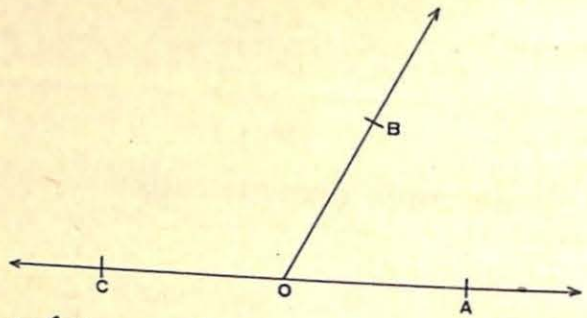
Ora, se a soma das medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ é 90°, então êsses ângulos são *complementares,* como queríamos demonstrar.

NOTA: O "como queríamos demonstrar" — que representa sempre um "*sucesso*" numa demonstração — será abreviado por: *c. q. d.*

2.ª)

Dois *ângulos adjacentes* cujos lados exteriores são *semi-retas opostas* são *suplementares*

A figura está obedecendo às condições do enunciado:



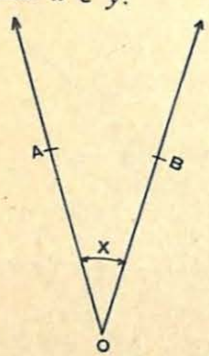
Como: $m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = m(A\hat{O}C)$ (resultado conhecido)
e $m(A\hat{O}C) = 180°$ (porque $\vec{OA}$ e $\vec{OC}$ são semi-retas *opostas*), concluímos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são *suplementares*.

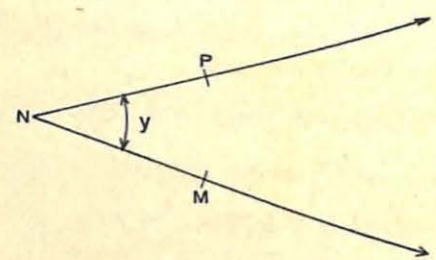
c.q.d.

3.ª)

Ângulos que possuem *complementos congruentes* são *congruentes*

Sejam os ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$, cujas medidas, em graus, são respectivamente x e y:





Logo, o complemento de $A\hat{O}B$ é: $90° - x$
complemento de $M\hat{N}P$ é: $90° - y$

O enunciado afirma que *os complementos são congruentes*, isto é, têm a mesma medida:

$$90° - x = 90° - y$$

ou

$$-x = -y \iff x = y$$

isto é: são iguais as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$ e, portanto, *êles são congruentes*.

c.q.d.

4.ª)

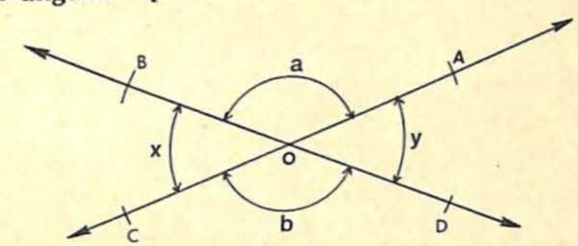
Ângulos que possuem *suplementos congruentes* são *congruentes*

Demonstre você, seguindo caminho análogo ao empregado para demonstrar a 3.ª Propriedade.

5.ª)

Ângulos *opostos pelo vértice* são *congruentes*

Sejam os ângulos o.p.v.: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, de medidas, respectivamente: a e b.



Você deve *provar* que

$$a = b$$

para concluir que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.

Ora: $a + x = 180°$ (resultado conhecido (2.ª Prop.))
$x + b = 180°$ (idem)

ou

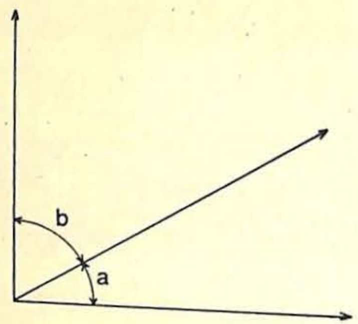
$$a + x = 180° \iff a = 180° - x$$
$$x + b = 180° \iff b = 180° - x$$
$$a = b$$

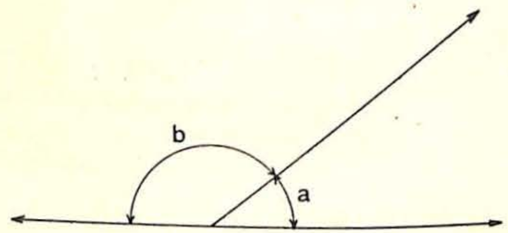
Então, se $a = b$, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são *congruentes*.

c.q.d.

LEMBRETE AMIGO

As letras minúsculas representam a *medida*, em graus, dos ângulos:



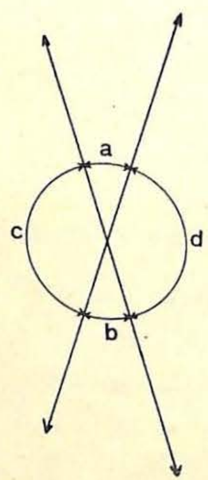


$a + b = 90°$

$a + b = 180°$

$a = b$

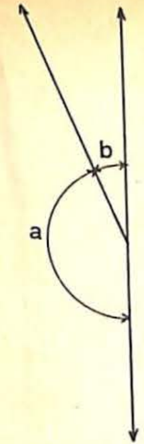
$c = d$



$a + b + c + d = 360°$

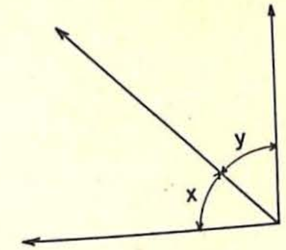
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 67

1. Complete as seguintes sentenças, a fim de torná-las *verdadeiras*:

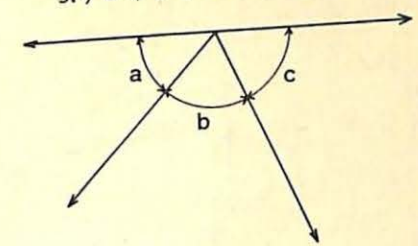


1.ª) $a + b = \ldots$

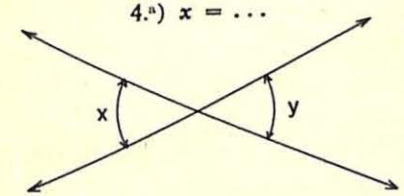
2.ª) $x + \ldots = 90°$



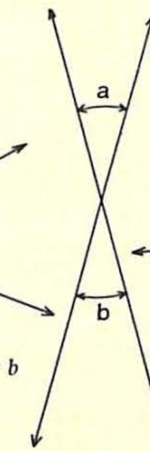
3.ª) $a + b + \ldots = 180°$



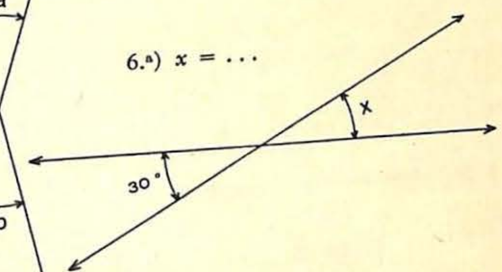
4.ª) $x = \ldots$



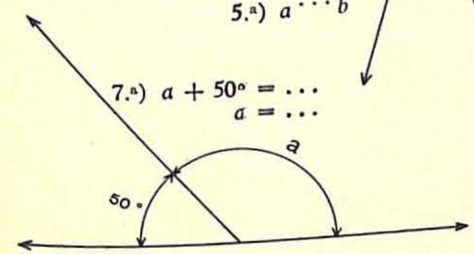
5.ª) $a \cdots b$



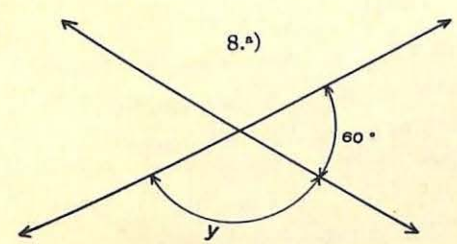
6.ª) $x = \ldots$



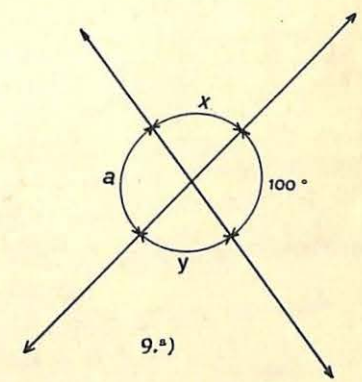
7.ª) $a + 50° = \ldots$
$a = \ldots$



8.ª)

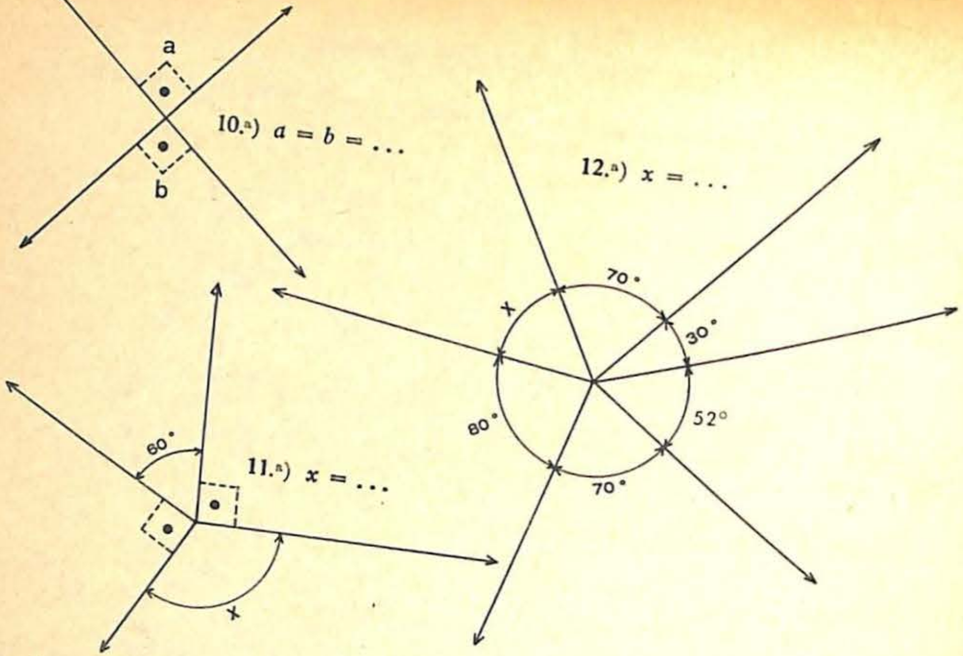


$60° + y = \ldots$
$y = \ldots$

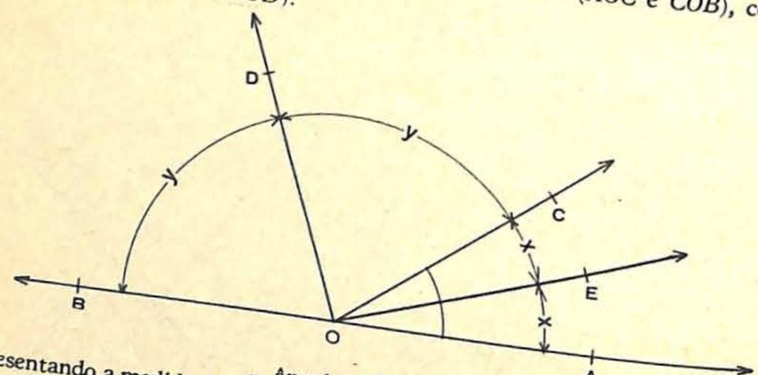


9.ª)

$x = \ldots$
$a = \ldots$
$y = \ldots$
$x + a + y + 100° = \ldots$



2. A figura mostra dois ângulos *adjacentes* e *suplementares* ($A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$), com as respectivas *bissetrizes* ($\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OD}$):



Representando a medida do ↗ ângulo $A\hat{O}C$ por $2x$ (lembre-se de que $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz!)
↘ ângulo $C\hat{O}B$ por $2y$ (idem, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz)

os *resultados* que você já conhece garantem que é *verdadeira* a sentença:

$$2x + 2y = 180° \quad \text{(por quê?)}$$

ou

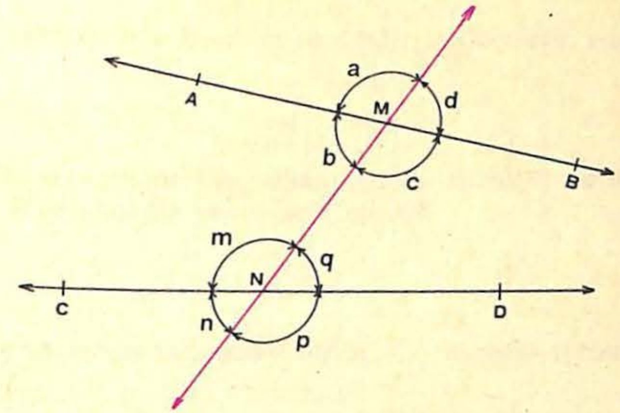
$$x + y = 90°$$

Se $x + y = 90°$, então o ângulo $E\hat{O}D$ é *reto*. Lembrando que $C\hat{O}D$ é o ângulo formado pelas *bissetrizes* $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OD}$, enuncie um RESULTADO que envolva o *ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares.*

Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal

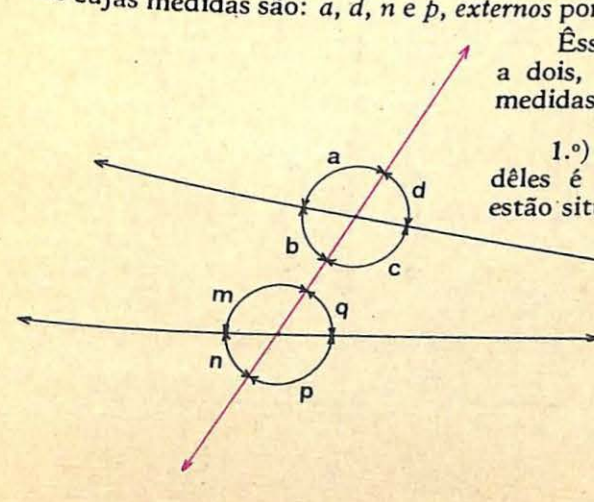
27. Conceito

Sejam as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, interceptadas por uma terceira reta $\overleftrightarrow{MN}$:



A reta $\overleftrightarrow{MN}$ é denominada *transversal* e forma com as outras duas *oito ângulos*, cujas medidas são, respectivamente: a, b, c, d, m, n, p e q. Tais ângulos recebem denominações especiais, dependendo da posição que ocupam em relação à transversal.

Os ângulos da figura cujas medidas são: b, c, m e q, dizem-se *internos* por pertencerem à região do plano limitada pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, e os ângulos cujas medidas são: a, d, n e p, *externos* por não pertencerem a tal região.



Êsses ângulos, combinados dois a dois, na figura, através de suas medidas, recebem os seguintes nomes:

1.º) *correspondentes:* quando um dêles é interno e o outro externo, estão situados no mesmo semi-plano, em relação à transversal, e não são adjacentes:

a e m

b e n

c e p

d e q

2.º) *alternos internos:* quando ambos são internos, não-adjacentes e situados em semi-planos opostos em relação à transversal:

b e q
c e m

3.º) *alternos externos:* ... idem, sendo ambos externos:

a e p
d e n

4.º) *colaterais internos:* quando ambos são internos e situados num mesmo semi-plano em relação à transversal:

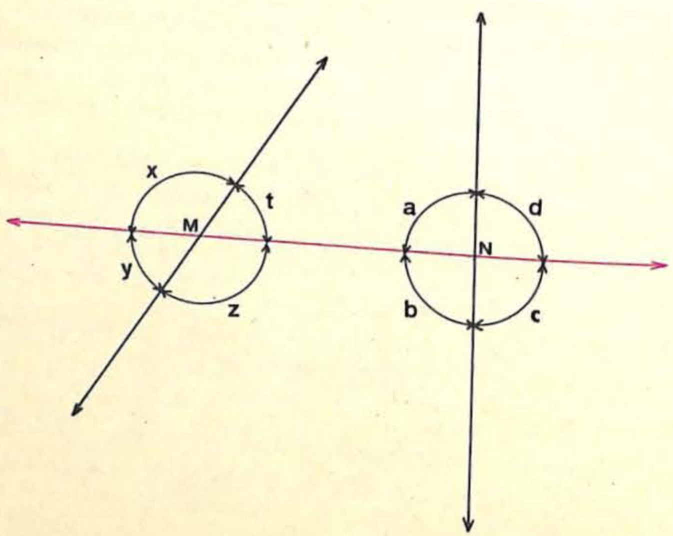
b e m
c e q

5.º) *colaterais externos:* ... idem, sendo ambos externos:

a e n
d e p

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 68

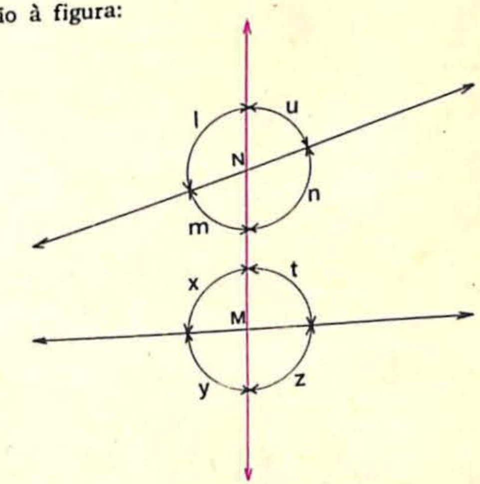
1. Na figura:



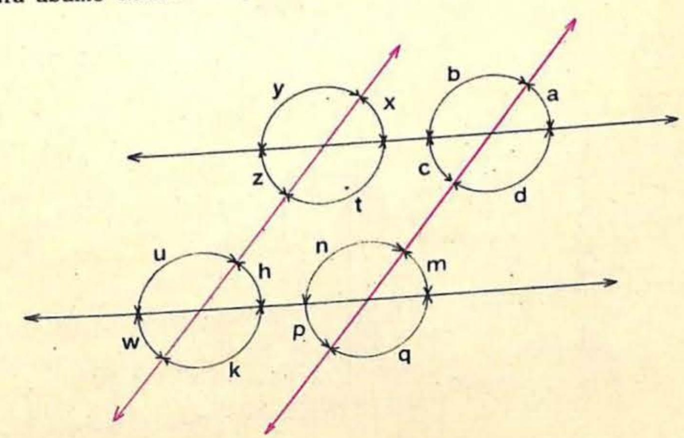
$\overleftrightarrow{MN}$ é a transversal: escreva aos pares os ângulos:

1.º) alternos internos
2.º) correspondentes
3.º) alternos externos
4.º) colaterais internos
5.º) colaterais externos
6.º) opostos pelo vértice

2. Idem, com relação à figura:

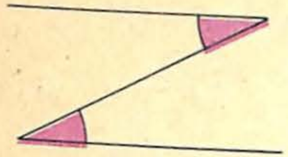


3. Na figura abaixo existem 16 pares de ângulos *correspondentes*. Indique 8 dêles.

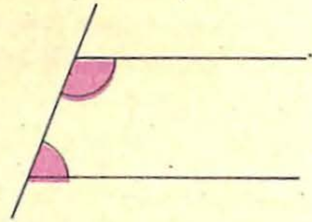


4. Dê os nomes dos ângulos assinalados (considerados aos pares), nas seguintes figuras:

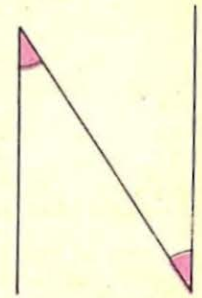
1.ª)



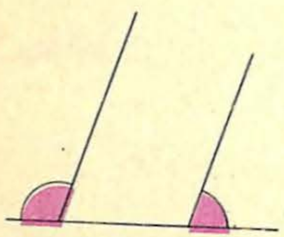
2.ª)



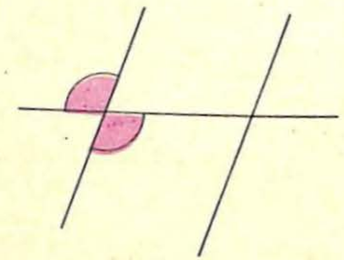
3.ª)



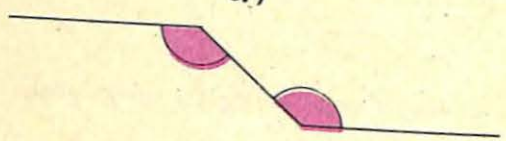
4.ª)



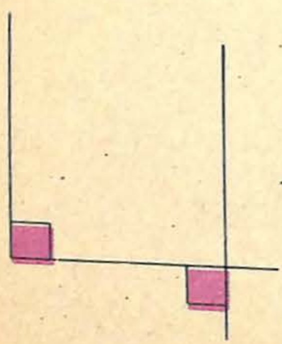
5.ª)



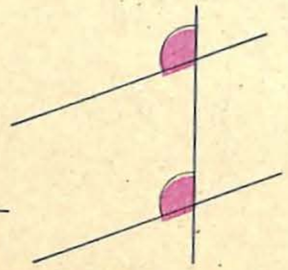
6.ª)



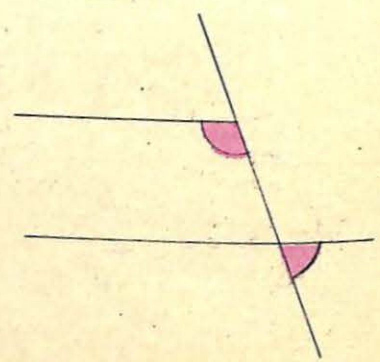
7.ª)



8.ª)

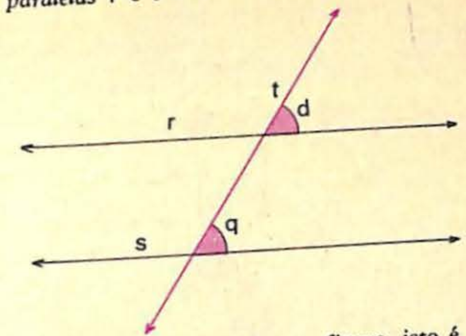


9.ª)



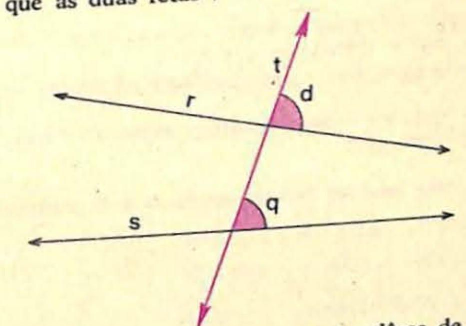
EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 69

1. Trace duas retas *paralelas* r e s e a *transversal* t:



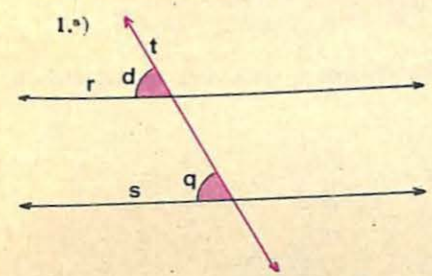
Meça os ângulos *correspondentes* assinalados na figura, isto é, com auxílio do transferidor determine, em graus, os valôres de d e q. Que observou?

2. Suponha, agora, que as duas retas r e s *não sejam paralelas*:

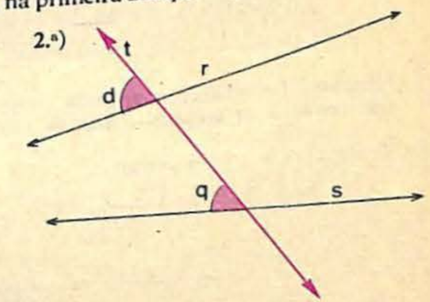


Meça os ângulos *correspondentes* e determine os valôres de d e q. Que observou? Repita êsse exercício com as figuras abaixo, na primeira das quais $r//s$ e na segunda, não:

1.ª)



2.ª)



3. ATENÇÃO: Os resultados obtidos nos exercícios 1 e 2 permitem concluir que:

se $r // s$ então $d = q$

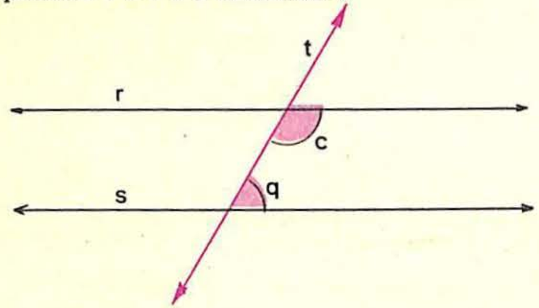
se $r \not\parallel s$ então $d \neq q$

NOTA: O símbolo $\not\parallel$ indica que r *não é paralela* a s.

Guarde, pois, a importante *propriedade:*

Se duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes formados são congruentes

4. Trace as retas *paralelas* r e s e a *transversal* t:



Meça os ângulos *colaterais internos* assinalados e determine os valôres de q e c. Adicione-os, isto é, determine $q + c$.

Quantos graus encontrou? Será que êsses ângulos são *suplementares?*

5. Supondo, agora, as retas r e s não-paralelas, "explore" o mesmo trabalho do exercício anterior. Que observou?

6. Atenção: os resultados obtidos nos exercícios 4 e 5 permitem concluir que:

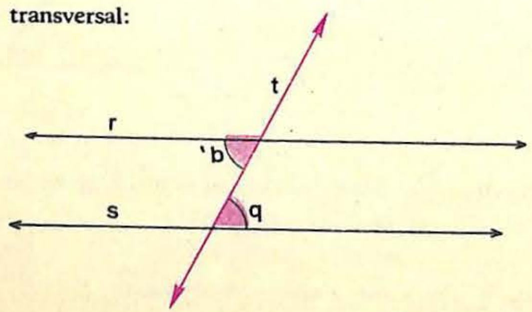
se $r /\!/ s$ então $q + c = 180^\circ$
se $r \not\parallel s$ então $q + c \neq 180^\circ$

valendo, portando, a *propriedade:*

Se duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal, então os ângulos colaterais internos são suplementares

7. "Explore" a existência de uma propriedade, análoga à enunciada no exercício 6, que envolva os ângulos *colaterais externos.*

8. Trace $r /\!/ s$ e t transversal:



e meça os ângulos *alternos internos;* será que $b = q$?

E, se $r \not\parallel s$, será que $b \neq q$?

Deduza, então, a *propriedade* que diz respeito aos ângulos *alternos internos,* formados por duas *retas paralelas* interceptadas por uma *transversal.*

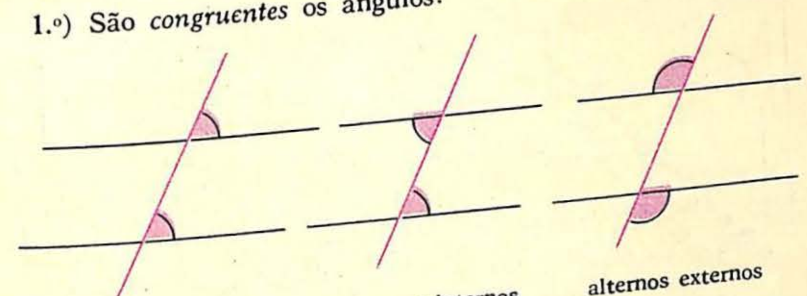
9. Faça "exploração" semelhante para poder enunciar uma *propriedade* que diga respeito aos ângulos *alternos externos,* formados por duas *retas paralelas* interceptadas por uma *transversal.*

10. Tenha sempre presente o seguinte:

LEMBRETE AMIGO

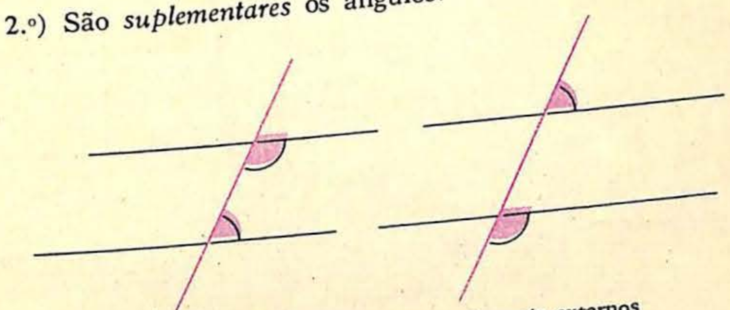
Se duas *retas paralelas* são interceptadas por uma *transversal,* então:

1.º) São *congruentes* os ângulos:



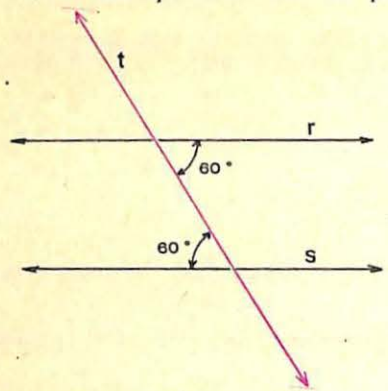
correspondentes — alternos internos — alternos externos

2.º) São *suplementares* os ângulos:



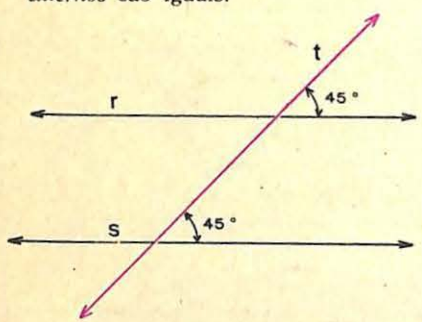
colaterais internos — colaterais externos

1. Você pode RECONHECER fàcilmente se duas retas coplanares são *paralelas* usando as propriedades ora estudadas. Assim, por exemplo, sabendo que são *iguais* as *medidas* dos ângulos *alternos internos* formados por duas retas interceptadas por uma transversal, você conclui que essas retas são *paralelas:*

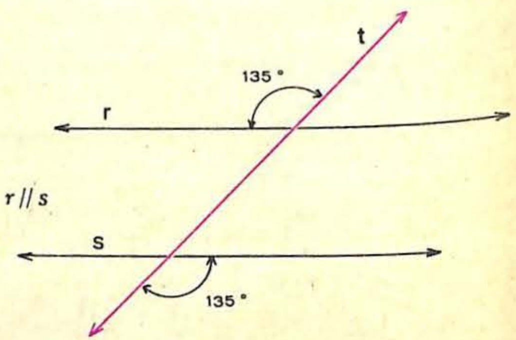


logo: $r // s$

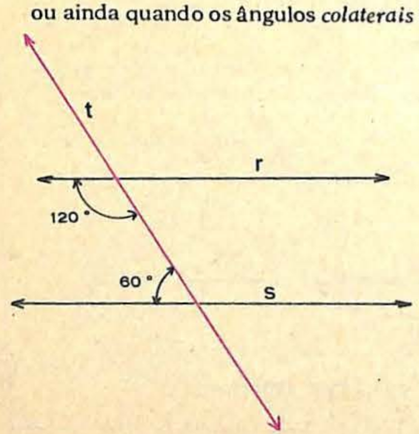
O mesmo ocorre quando as *medidas* dos ângulos *correspondentes* ou ângulos *alternos externos* são iguais:



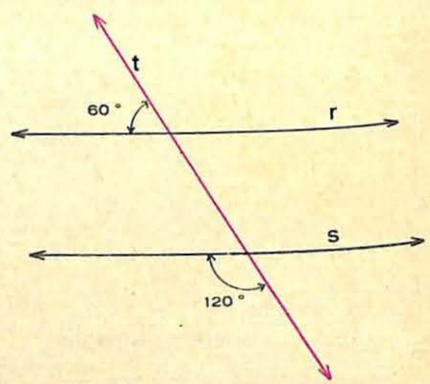
$r // s$



ou ainda quando os ângulos *colaterais internos* (ou colaterais externos) são *suplementares*

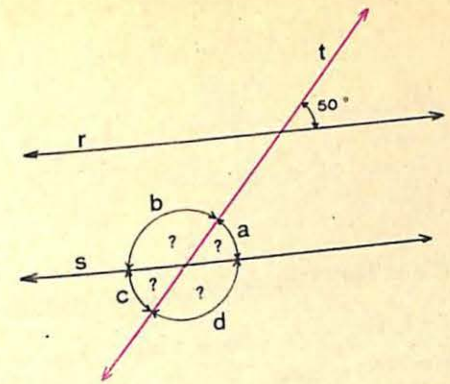


$r // s$



2. Sabendo que $r // s$ e que t é transversal e conhecendo a medida de um dos ângulos formados por essas retas, determine a medida de cada um dos outros ângulos:

1.°)



Temos: $a = 50°$ (porque são medidas de ângulos *correspondentes*)

$c = 50°$ (porque: $a = c$, pois são medidas de ângulos *o.p.v.*)

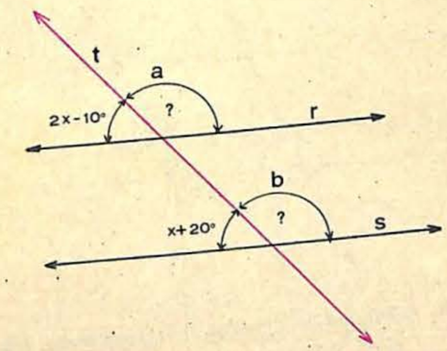
Como: $a + b = 180°$ (porque são medidas de ângulos *adjacentes suplementares*)

e $a = 50°$

vem: $b = 180° - 50° = 130°$ e também: $d = 130°$ (por quê?)

Logo: $a = 50°$, $b = 130°$, $c = 50°$ e $d = 130°$.

2.°)



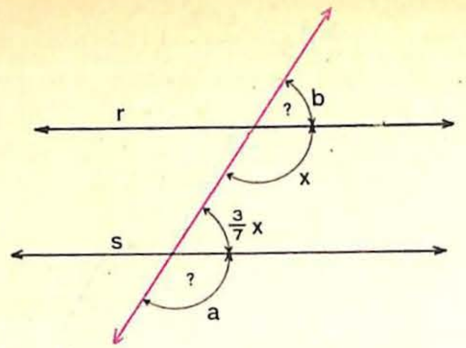
Ora: $2x - 10° = x + 20°$ (medidas de ângulos *correspondentes*)

ou: $2x - x = 30° \iff x = 30°$

Logo: $2x - 10° = 2(30°) - 10° = 50°$

e, portanto: $a = 180° - 50° = 130°$ e $b = a = 130°$

3.º)



Como: $\frac{3}{7}x + x = 180°$ (medidas de ângulos *colaterais internos*)

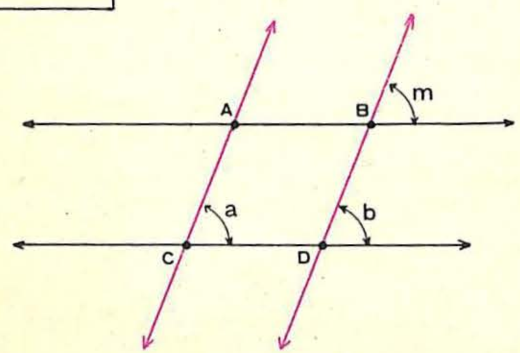
ou $\quad 3x + 7x = 1\,260° \iff 10x = 1\,260° \iff x = 126°$

Logo: $a = x = 126°$ e como: $b + x = 180°$, vem: $b = 180° - 126° = 54°$

3. Uma *prática demonstrativa:* Demonstre que

se $\boxed{\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \text{ e } \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}}$

então $\boxed{a = m}$



Sendo: $a = b$ (medidas de ângulos *correspondentes* formados pelas paralelas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ com a transversal $\overleftrightarrow{CD}$)

e

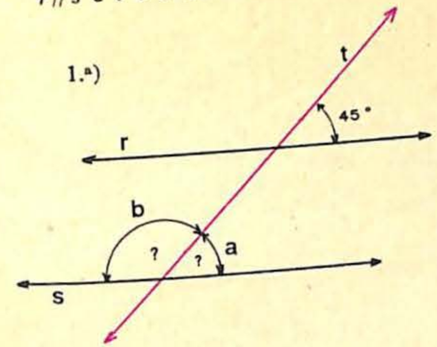
$b = m$ (idem ... pelas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ com a transversal $\overleftrightarrow{BD}$)

conclui-se que: $a = m$ (pela propriedade transitiva da igualdade)

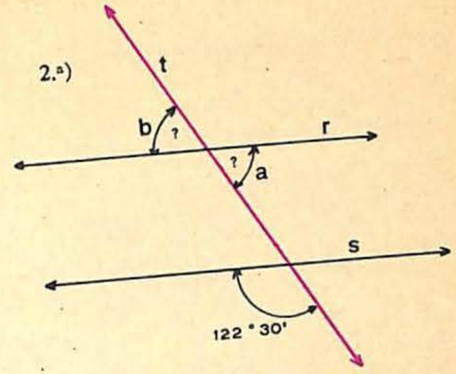
c.q.d.

1. Determine, em graus, as medidas dos ângulos assinalados nas seguintes figuras, onde $r \parallel s$ e t é a *transversal:*

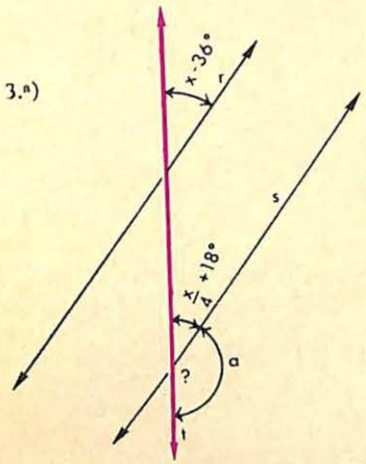
1.ª)



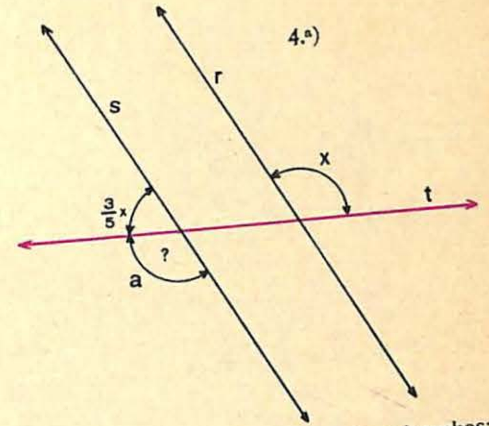
2.ª)



3.ª)

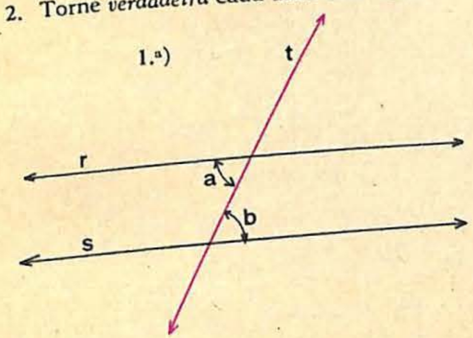


4.ª)



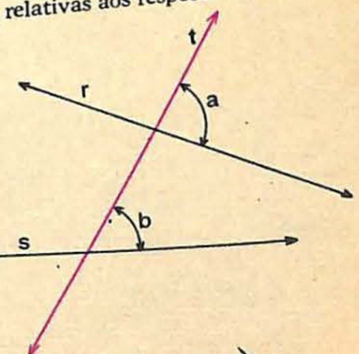
2. Torne *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças, relativas aos respectivos desenhos:

1.ª)



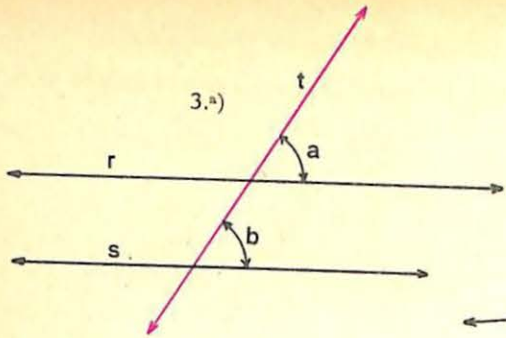
se $r \parallel s$ então $a = \ldots$

2.ª)



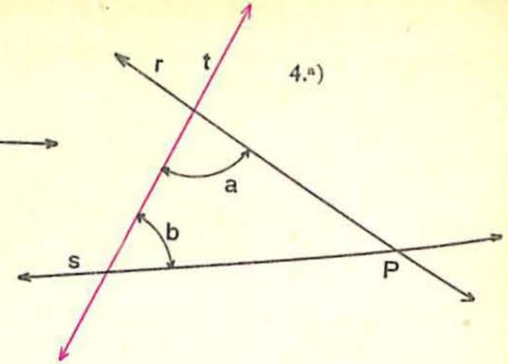
se $a \neq b$ então $r \nparallel \ldots$

3.ª)



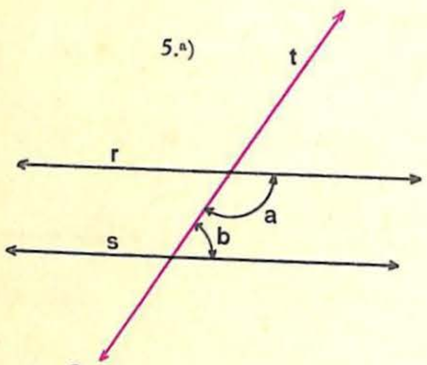
Se $a = \ldots$, então $r \parallel \ldots$

4.ª)



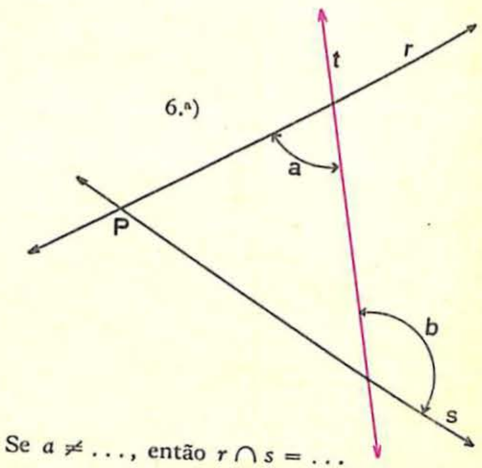
Se $r \cap s = \{P\}$, então $a + b \ldots 180°$

5.ª)



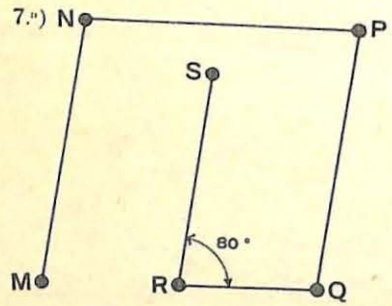
Se $a + b = 180°$, então $r \ldots s$

6.ª)



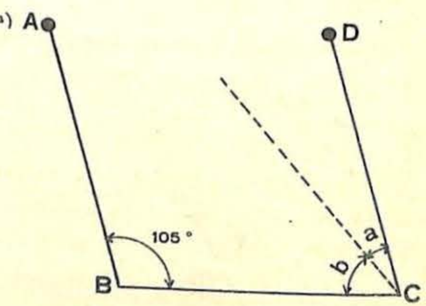
Se $a \neq \ldots$, então $r \cap s = \ldots$

7.ª)



Se $\left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ} \\ \overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{RQ} \\ \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{SR} \end{array} \right\}$ então $m(M\hat{N}P) = \ldots$

8.ª)



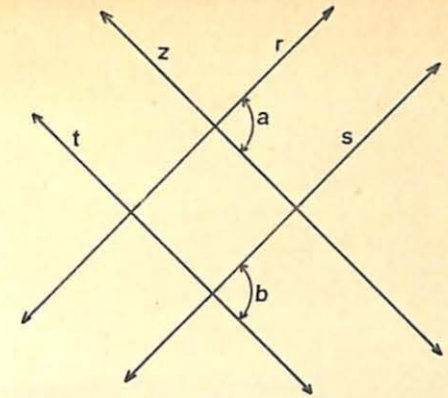
Se $\left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \\ m(A\hat{B}C) = 105° \\ a = 30° \end{array} \right\}$ então $b = \ldots$

3. *Práticas demonstrativas:*

Demonstre, usando os resultados já conhecidos:

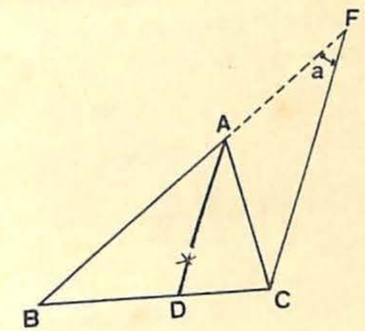
1.º) se $\boxed{r \parallel s \text{ e } t \parallel z}$

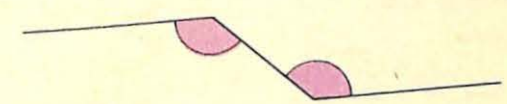
então $\boxed{a = b}$



2.º) se $\boxed{\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{FC} \text{ e } \overrightarrow{AD} \text{ bissetriz de } B\hat{A}C}$

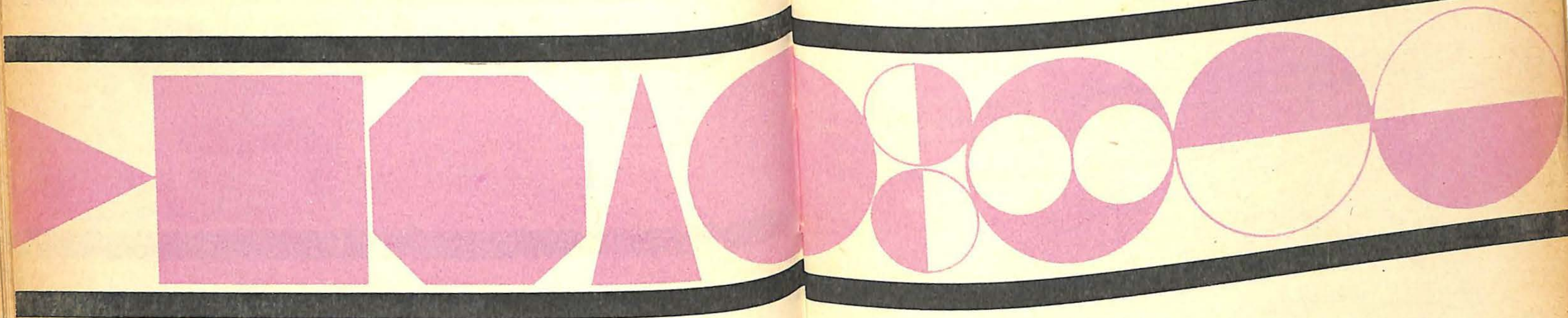
então $\boxed{m(B\hat{A}C) = 2a}$





capítulo 4

ESTUDO DOS POLÍGONOS E DA CIRCUNFERÊNCIA

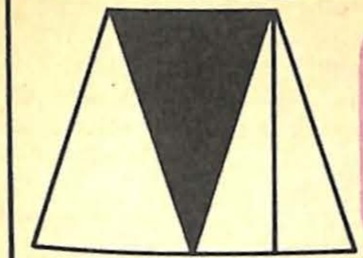


1.ª Parte: - polígonos; triângulos
- congruência de triângulos

2.ª Parte: - construção lógica da Geometria
- da necessidade de provas...
- ... alguns teoremas fundamentais

3.ª Parte: - quadriláteros: paralelogramos e trapézios
- teoremas fundamentais

4.ª Parte: - circunferência; teoremas fundamentais
- arcos de circunferência; medida
- ângulos relacionados com arcos; medida



1.ª Parte: - polígonos; triângulos
- congruência de triângulos

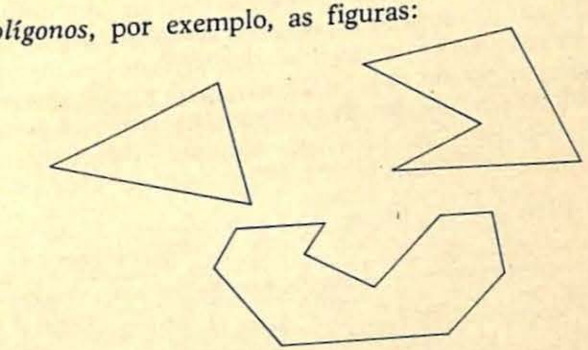
Polígonos

1. Conceito de polígono; diagonais

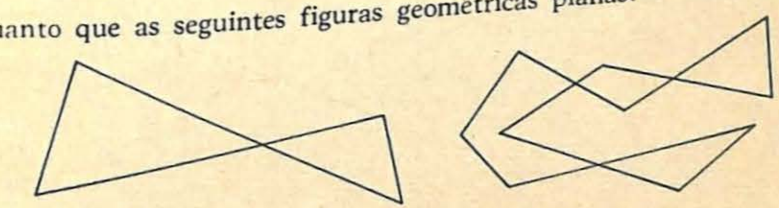
Os *polígonos* são especiais *curvas fechadas simples*. Pode-se, agora, *definir* polígono como:

a figura geométrica plana fechada simples constituída por um conjunto de segmentos de retas consecutivos, de modo que dois dêles, sucessivos, não sejam colineares.

São *polígonos*, por exemplo, as figuras:

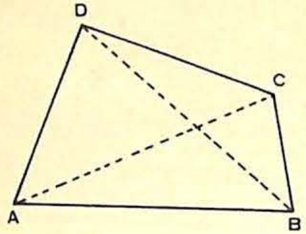


enquanto que as seguintes figuras geométricas planas:



apesar de "fechadas", não são polígonos, pois "se cruzam".

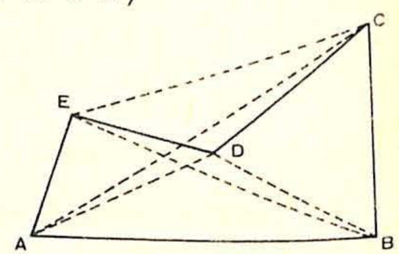
Nos polígonos, os segmentos são denominados *lados* e os pontos, onde dois lados se unem, *vértices*. Dois lados que possuem um vértice comum são denominados *consecutivos* e dois vértices que possuem um lado comum entre êles chamam-se *vértices consecutivos*.



No polígono $ABCD$, por exemplo:

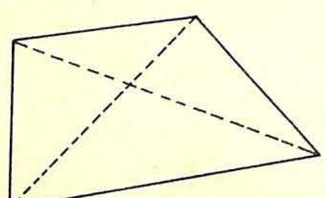
$$\left.\begin{array}{l}\text{os lados } \overline{AD} \text{ e } \overline{DC} \\ \text{os vértices } A \text{ e } B\end{array}\right\} \text{são } \textit{consecutivos}$$

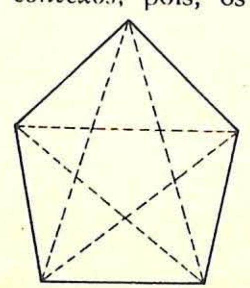
Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois vértices *não-consecutivos*. O polígono $ABCD$ tem as *diagonais*: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. O polígono $ABCDE$ (figura ao lado) tem cinco *diagonais*: $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.



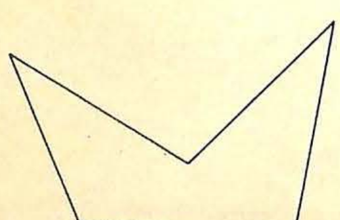
2. *Polígonos convexos*

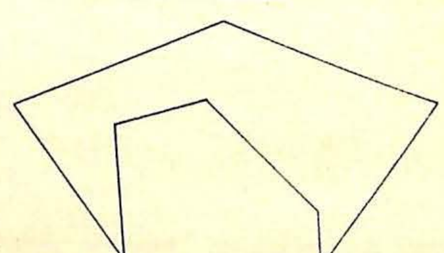
São aquêles nos quais o *segmento* que une dois pontos *quaisquer* de seu interior *pertence inteiramente* à região interior do polígono. Você pode "traduzir" esta propriedade usando como segmento as *próprias diagonais* do polígono. Assim, se *tôdas* as diagonais que podem ser traçadas num polígono pertencem ao seu *interior*, o polígono é denominado *convexo*. Caso contrário é *não-convexo*. São *convexos*, pois, os polígonos:





e *não-convexos* os polígonos:





Neste curso de Geometria serão estudados sòmente os *polígonos convexos*. Tais polígonos recebem nomes especiais conforme o número de lados que possuem. Assim:

n.º de lados	*nome usual*
3	triângulo (ou trilátero)
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono ou hendecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

Um polígono regular cujos lados são todos congruentes e cujos ângulos são todos congruentes é denominado *regular*.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 72

1. Desenhe alguns polígonos convexos (use a régua, lápis e . . . imaginação). A seguir, *conte* o número de vértices e o número de lados de cada um dos polígonos desenhados.

   Qual a propriedade que você "descobriu" acêrca do *número de vértices* relacionado com o *número de lados*, de um mesmo polígono?

2. Preencha os claros da seguinte tabela, baseando-se nos polígonos que deve ter desenhado no exercício anterior:

polígono	*n.º de vértices*	*n.º de lados*	*n.º de diagonais de cada vértice*	*n.º total de diagonais*
triângulo.	3	3	0	0
quadrilátero.	4	. . .	1	2
pentágono.	. . .	5	. . .	5
hexágono.	6	. . .	. . .	. . .
heptágono.	. . .	. . .	4	14
octógono.	. . .	. . .	. . .	. . .
eneágono.	. . .	. . .	6	. . .
decágono.	. . .	10	. . .	35

3. Você seria capaz de "explorar" uma *fórmula* que permitisse determinar o *número total de diagonais* de um polígono convexo?

Vamos ajudá-lo: considere, por exemplo, um hexágono (6 lados); de cada vértice você pode traçar *tantas diagonais quantos são os lados menos três*, isto é: $6 - 3 = 3$, pois de um vértice não se pode traçar diagonal a êle mesmo nem aos vértices adjacentes.

Sua primeira impressão talvez seja de que é possível traçar $6 \times (6 - 3)$ diagonais: se de *cada vértice* partem $6 - 3$ diagonais, de 6 vértices partiriam 6 vêzes mais. Lembre-se, porém, de que êsse produto representa o dôbro do número de diagonais, pois cada diagonal foi contada *duas vêzes*.

Representando por d o número de diagonais de um polígono convexo de n lados ($n > 3$), a seguinte *fórmula* dá o *número total de diagonais* que se pode traçar num polígono convexo:

$$d = \frac{n \times (n - 3)}{2}$$

Aplicando-a no caso do hexágono: $d = \dfrac{6 \times (6 - 3)}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$ (diagonais).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 73

1. Se $ABCDE$ é um polígono convexo de 5 lados e P um ponto pertencente ao *interior* dêsse polígono, em quantos triângulos fica decomposto o polígono quando se une o ponto P aos vértices do polígono?

2. Em quantos triângulos fica decomposto um polígono convexo de n lados ($n > 3$), quando se unem os seus vértices a um ponto qualquer que pertença ao *interior* do polígono?

3. Unindo-se um dos vértices de um hexágono convexo aos demais vértices dêsse polígono, em quantos triângulos fica dividido o hexágono?

4. Em quantos triângulos fica dividido um polígono convexo de n lados ($n > 3$), quando se une um de seus vértices aos demais?

5. Quantas diagonais tem um polígono convexo de 7 lados?

6. Qual o número total de diagonais de um icoságono convexo?

7. O triângulo tem diagonais? Por quê?

8. Qual é o polígono convexo que tem tantas diagonais quantos são os lados?

   (Sugestão: como $d = n$, pode-se resolver a equação $n = \dfrac{n \times (n - 3)}{2}$ dividindo por n ambos os membros: $1 = \dfrac{n - 3}{2}$)

9. Quantos lados tem um polígono convexo cujo número total de diagonais é o *dôbro* do número de lados? (Agora: $d = 2n$)

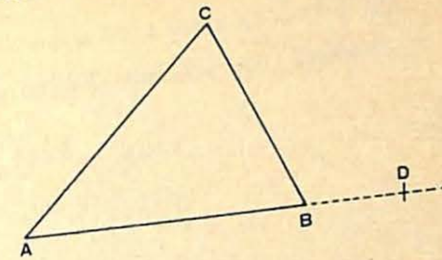
10. Qual é o polígono convexo cujo número total de diagonais é o *triplo* do número de lados? ($d = 3n$)

Triângulos

1. *Conceito*

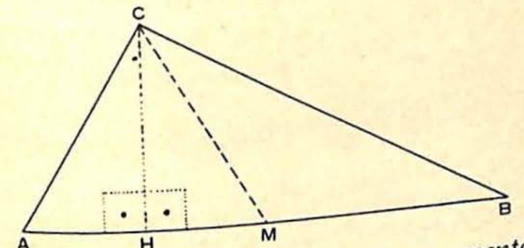
Você já sabe que um triângulo é um polígono de *três lados*. Usando a linguagem dos *conjuntos*, pode-se definir triângulo da seguinte maneira: sejam os pontos A, B e C *não-colineares*; a *reunião* dos três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ é a figura geométrica chamada *triângulo*. Indicação: $\triangle ABC$. Logo:

$$\boxed{\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}}$$



2. *Elementos principais*

Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, costumeiramente abreviados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são chamados *ângulos internos* do $\triangle ABC$. Num triângulo cada lado é *oposto* ao ângulo interno formado pelos outros dois lados e, portanto, também ao vértice dêsse ângulo.



Assim, no $\triangle ABC$ o lado $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo $\hat{C}$ e ao vértice C. O ângulo *adjacente* e *suplementar* de um ângulo interno chama-se *ângulo externo* do triângulo (o ângulo $C\hat{B}D$ da figura).

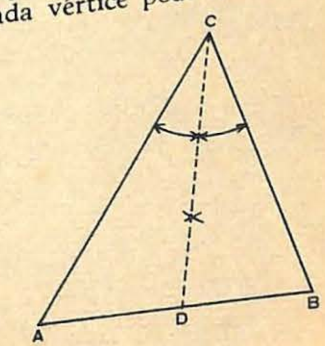
Altura de um triângulo é o *segmento* da perpendicular ($\overline{CH}$ na figura) traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto. Nesse caso, o lado oposto ($\overline{AB}$) é chamado *base* do triângulo e o ângulo $\hat{C}$, *ângulo do vértice*.

Um triângulo tem *três alturas*, pois de cada vértice pode-se traçar a perpendicular ao lado oposto.

Mediana de um triângulo, em relação a determinado lado, é o *segmento* ($\overline{CM}$ na figura) que une o *ponto médio* dêsse lado ao vértice oposto.

Um triângulo tem *três medianas*. Verifique.

Bissetriz de um triângulo, relativa a um ângulo interno, é o *segmento* da bissetriz ($\overline{CD}$ na figura) dêsse ângulo compreendido entre o vértice e o lado oposto.



Um triângulo tem *três bissetrizes internas*. Verifique.

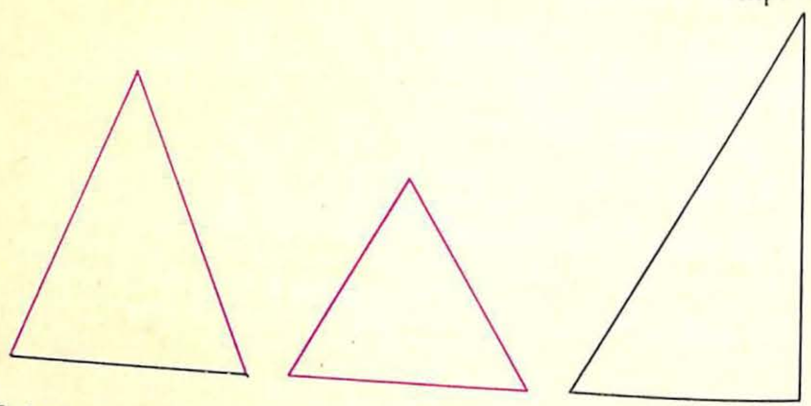
3. *Classificação*

Levando-se em conta os *comprimentos(*) dos lados*, um triângulo diz-se:

isósceles, quando possui *dois lados* de *mesmo comprimento*;

eqüilátero, quando possui *três lados* de *mesmo comprimento*, e

escaleno, quando *não possui* dois lados de mesmo comprimento.

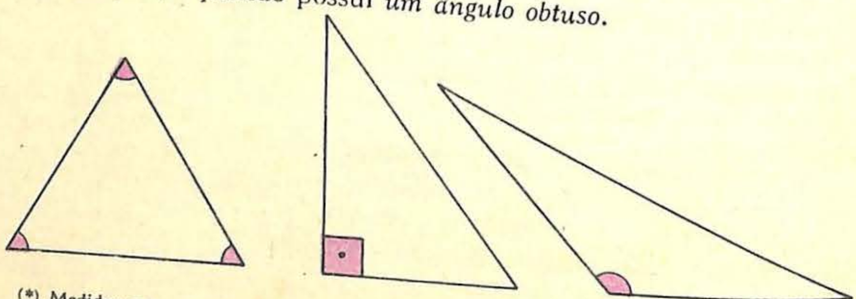


Relativamente às *medidas dos ângulos internos*, o triângulo pode ser chamado:

acutângulo, quando possui os *três ângulos agudos*; caso as medidas dêsses três ângulos sejam iguais, o triângulo diz-se *eqüiângulo*;

retângulo, quando possui *um ângulo reto*; o lado oposto ao ângulo reto é a *hipotenusa* e os outros dois lados, *catetos*, e

obtusângulo, quando possui *um ângulo obtuso*.



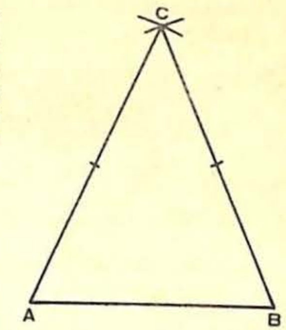
(*) Medidos sempre com a *mesma unidade* (cm, por exemplo); no caso da medida de ângulos, a unidade será sempre o *grau*.

1. *Construção de triângulos isósceles:* Considere um qualquer segmento $\overline{AB}$ como *base* do triângulo isósceles que você quer construir. Escolhido um *comprimento* dado pela abertura de um compasso, basta determinar um dos pontos C(*), intersecção das circunferências traçadas quando se fixa a ponta do compasso respectivamente nos pontos A e B.

   a) Será que *existe* sempre o ponto C?

   b) Quando é que "não existe"?

   c) Por que o triângulo obtido é *isósceles*, quando existe C?



2. *Um resultado importantíssimo para os triângulos isósceles:*

   De cada triângulo isósceles que você construiu, *meça* com o transferidor os ângulos da base. Que observou? Se um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 40°, por exemplo, quanto medirá o outro ângulo da base? Será também 40°? "Explore" êsse resultado com outros triângulos isósceles.

   Na certa você irá concluir que em *qualquer triângulo isósceles* os ângulos da base têm *medidas iguais*.

   Um enunciado mais geral para os resultados obtidos no exercício 2 é:

Se *dois lados* de um triângulo têm o *mesmo comprimento*, então os *ângulos opostos* a êsses lados têm a *mesma medida*

ou: se $m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$ então $m(\hat{B}) = m(\hat{A})$

3. *Construção de triângulos eqüiláteros:* Processo análogo ao empregado no exercício 1. Construa dois triângulos eqüiláteros, um dêles com 3cm de lado e o outro com 5cm de lado. Quantos graus você acha que encontrará para cada um dos ângulos dos triângulos construídos?

   Conclua um *resultado* que envolva as medidas dos ângulos de um mesmo triângulo eqüilátero.

4. 1.°) Desenhe qualquer triângulo isósceles. A seguir, suas *três alturas*. Elas se interceptarão num ponto *interior* ou *exterior* ao triângulo?

   2.°) Resolva o mesmo exercício, empregando um triângulo retângulo.

5. Onde se interceptam as retas suportes das três alturas de um triângulo obtusângulo?

6. 1.°) Todo triângulo isósceles é eqüilátero.

   2.°) Todo triângulo eqüilátero é isósceles.

   Qual das duas sentenças é *verdadeira*? Por quê?

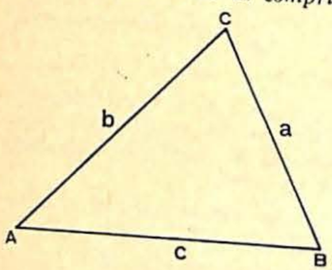
(*) Na intersecção das circunferências traçadas serão encontrados dois pontos: C e C' (situados em semi-planos opostos com relação a $\overleftrightarrow{AB}$); para a obtenção dos resultados desejados, basta "trabalhar" com C.

7. *Um outro resultado para triângulos isósceles:* Desenhe um triângulo isósceles ABC, de modo que $\overline{AB}$ seja a *base*. A seguir, construa: 1.°) a *bissetriz* do ângulo $\hat{C}$; 2.°) a *altura*, tomando por base $\overline{AB}$; 3.°) a *mediana* relativa a AB. Veja se concorda com o resultado:

Em qualquer triângulo isósceles a *bissetriz* do ângulo do vértice, a *altura* e a *mediana*, relativas à base, coincidem

8. *Resultados importantíssimos para qualquer triângulo:*

1.°) *Relacionando os comprimentos dos lados:*



Desenhe um triângulo qualquer ABC. *Meça* os seus lados (as medidas na figura estão representadas por a, b e c, respectivamente):

a) Será que os números que representam as medidas satisfazem qualquer uma das relações:

$a < b + c$?
$b < a + c$?
$c < a + b$?

b) Essas *relações* também valem para os comprimentos dos lados dos triângulos desenhados por seus colegas?
Desenhe, a seguir, um outro triângulo MNP e verifique novamente se são verdadeiras aquelas *relações* que envolvem os comprimentos dos lados. Agora, veja se é capaz de construir os triângulos cujos lados tenham os seguintes comprimentos:

a = 4cm, b = 3cm e c = 2cm
a = 6cm, b = 3cm e c = 3cm

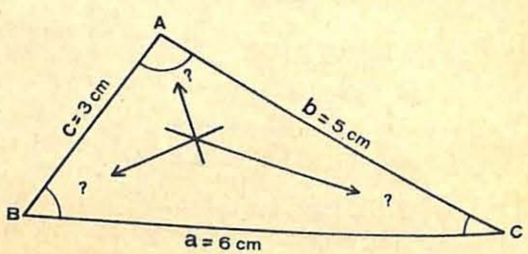
Foi possível? Que pode você concluir depois dêsses exercícios?
O seguinte resultado o auxiliará:

Em todo triângulo, o comprimento de qualquer lado é sempre *menor* que a *soma dos comprimentos* dos outros dois lados

2.°) *Relacionando o comprimento de um lado com a medida do ângulo oposto:*

Construa o $\triangle ABC$, cujos lados meçam, respectivamente:

a = 6cm
b = 5cm
c = 3cm



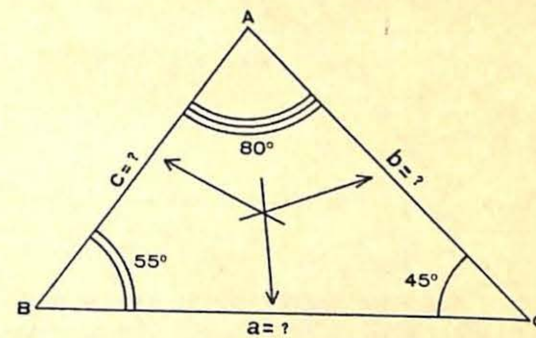
Com o transferidor, meça com cuidado os ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Relacionando o *comprimento de um lado* com *a medida do ângulo que lhe é oposto*, diga:

a) qual das três sentenças é *verdadeira:*

se $a > b$ então $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$
se $a > b$ então $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$
se $a > b$ então $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$

Numa "operação inversa", construa agora um $\triangle ABC$, cujos ângulos meçam, respectivamente:

$m(\hat{A}) = 80°$
$m(\hat{B}) = 55°$
$m(\hat{C}) = 45°$



b) Qual será o lado de maior comprimento?

c) Assinale qual das três sentenças é *verdadeira:*

se $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ então $a > b$
se $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ então $a = b$
se $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ então $a < b$

Na certa, o seguinte *resultado* concordará com o que você "explorou":

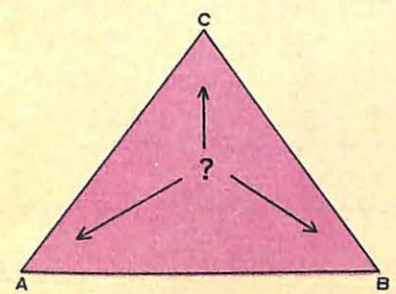
Em todo triângulo, se dois lados são desiguais, então ao *maior lado* opõe-se o *maior ângulo* e, reciprocamente, ao *maior ângulo* opõe-se o *maior lado*

3.°) *Relacionando as medidas dos ângulos internos de um triângulo.*

(RELAÇÃO IMPORTANTÍSSIMA!)

Você, juntamente com todos os colegas de classe, está convidado a "explorar" a seguinte questão:

Quanto vale, em graus, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer?



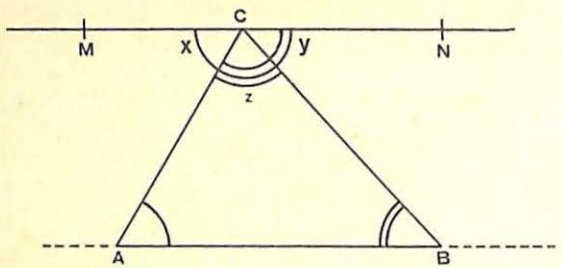
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = ?$$

Usando o transferidor, com *muita atenção*, você encontrará, pròvàvelmente, resultados que *se aproximarão* de 180°. Experimente com novos triângulos.

Nestas condições, *podemos* ou *não* usar *180°* para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

Neste curso de Geometria, vamos *usar 180°* para essa *soma* e, com os conhecimentos que você já possui, *provar* o porquê dessa resolução, que envolve certas "exigências" de paralelismo . . .

De fato, considere um triângulo qualquer ABC e vamos supor traçada pelo vértice C a *reta* $\overleftrightarrow{MN}$ *paralela* ao lado $\overline{AB}$.



Os ângulos formados ($M\hat{C}A$, $A\hat{C}B$, $B\hat{C}N$) têm, respectivamente, as medidas:

$$x, \ z \text{ e } y$$

e os ângulos internos ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$) do $\triangle ABC$, as medidas:

$$m(\hat{A}), \ m(\hat{B}) \text{ e } m(\hat{C})$$

Sendo:

$\hat{A}$ e $M\hat{C}A$ ângulos *alternos internos*, então: $m(\hat{A}) = x$ (por quê?)
$\hat{B}$ e $N\hat{C}B$ ângulos *alternos internos*, então: $m(\hat{B}) = y$ (por quê?)
$\hat{C}$ o mesmo que o ângulo $A\hat{C}B$, então . . .: $m(\hat{C}) = z$ (por quê?)

e como: $x + z + y = 180°$ (resultado já conhecido)
segue-se que:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

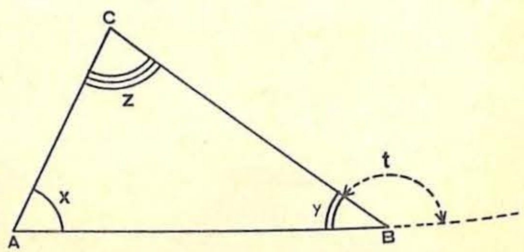
e você provou, graças "àquela *paralela* traçada", que:

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°

4.°) *Relacionando medidas de ângulos internos e ângulos externos.*

Observe bem o $\triangle ABC$. Se y representa a medida de um ângulo interno e t a medida do ângulo externo que lhe é adjacente, quanto vale a soma: $t + y$?

Fácil é concluir que: $t + y = 180°$, isto é, são *suplementares* o *ângulo interno* de um triângulo e o *ângulo externo* que lhe é adjacente.



Por outro lado, sendo as medidas dos ângulos *números reais* e, como:

$$\left.\begin{array}{r} x + z + y = 180° \\ \text{e} \quad t + y = 180° \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{t = x + z}$$

ou seja:

A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não-adjacentes

LEMBRETE AMIGO

Insista nos exercícios exploratórios que revelaram, através das medidas, as utilíssimas RELAÇÕES entre:

os *lados*
os *ângulos*
os *lados* e os *ângulos*

de um mesmo *triângulo*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 75

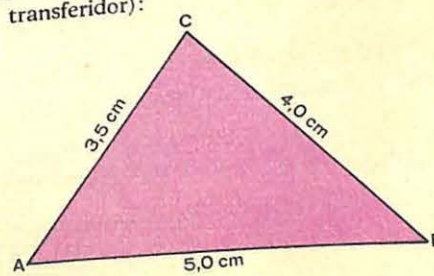
1. Sabendo que um triângulo possui dois lados medindo 3cm cada um, que pode você dizer dêsse triângulo? Enuncie todos os resultados que relacionem os *comprimentos dos lados* e as *medidas dos ângulos* dêsse triângulo.

2. Relacionando os *comprimentos dos lados*, assinale quais dos seguintes triângulos você pode construir:

1.°)	2.°)	3.°)	4.°)	5.°)
$a = 5\text{cm}$	$a = 10\text{cm}$	$a = 4\text{cm}$	$a = 3\text{cm}$	$a = 5\text{cm}$
$b = 7\text{cm}$	$b = 5\text{cm}$	$b = 6\text{cm}$	$b = 5\text{cm}$	$b = 8\text{cm}$
$c = 8\text{cm}$	$c = 4\text{cm}$	$c = 6\text{cm}$	$c = 5\text{cm}$	$c = 3\text{cm}$

3. Relacionando o *comprimento de um lado* com a *medida do ângulo* que lhe é *oposto*, no triângulo abaixo, diga (sem usar o transferidor):

1.°) qual é o *maior* ângulo
2.°) qual é o *menor* ângulo



4. Partindo de que a *soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º*, preencha os claros da seguinte tabela:

$\triangle ABC$	$m(\hat{A})$	$m(\hat{B})$	$m(\hat{C})$
isósceles	65º	. . .	50º
escaleno	. . .	45º	110º30'
isósceles (base $\overline{BC}$)	48º	. . .	. . .
isósceles (base $\overline{AC}$)	. . .	56º	. . .
eqüilátero	. . .	. . .	. . .
retângulo	90º	40º20'	. . .
retângulo	36º	54º	. . .

5. Se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, explique porque são *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) Em qualquer triângulo um só ângulo pode ser obtuso.

2.ª) Em qualquer triângulo a medida de cada ângulo é o suplemento da soma das medidas dos outros dois.

3.ª) Num triângulo *eqüiângulo* (todos os ângulos têm medidas iguais), cada ângulo mede 60º.

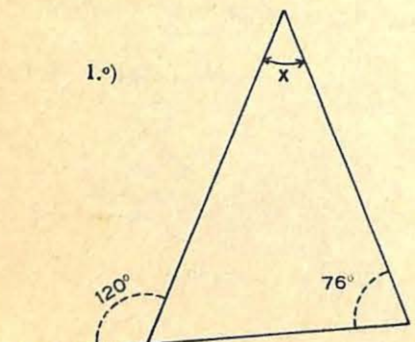
4.ª) Num triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares.

5.ª) Num triângulo isósceles os ângulos da base são agudos.

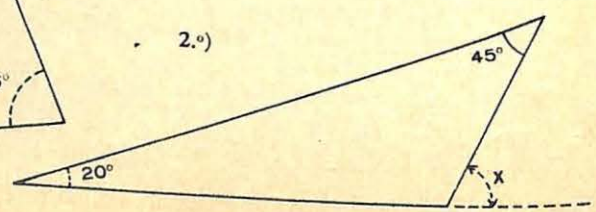
6.ª) Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes (de mesma medida), os terceiros ângulos são respectivamente congruentes.

6. Calcule as medidas, assinaladas por *x*, *y*, *z* e *t*, dos ângulos dos seguintes triângulos:

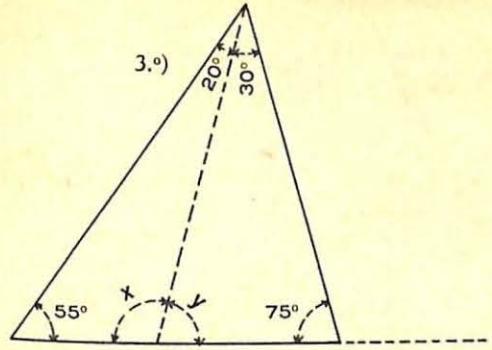
1.º)



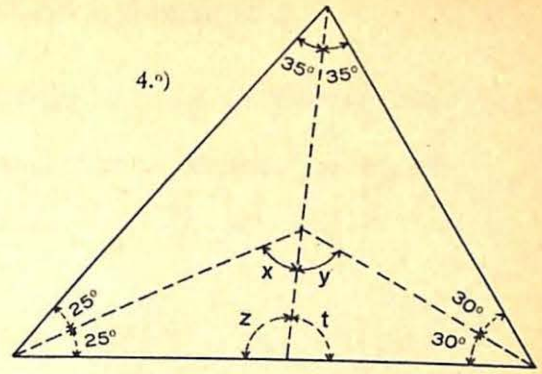
2.º)



3.º)



4.º)



7. Resolva os seguintes problemas:

1.º) Os ângulos de um triângulo medem, respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$. Determine as medidas dêsses ângulos.

(*Sugestão:* $3x + 4x + 5x = 180º \iff 12x = 180º \iff x = 15º$, logo: . . .)

2.º) Os três ângulos de um triângulo medem, respectivamente: $x + 36º$, $2x - 15º$ e $3x - 40º$. Quanto mede cada um?

3.º) Sabendo que num triângulo isósceles a medida de cada um dos ângulos da base é o dôbro da medida do ângulo do vértice, determine as medidas dos ângulos dêsse triângulo.

(*Sugestão:* se x fôr a medida do ângulo do vértice, a medida de cada ângulo da base é $2x$ e, portanto, a soma é . . .)

4.º) Dois ângulos de um triângulo são tais que a soma de suas medidas é 130º e a sua diferença 10º. Quanto mede cada ângulo?

(*Sugestão:* basta resolver o sistema: $x + y = 130º \wedge x - y = 10º$)

5.º) Num triângulo ABC a medida do $\hat{A}$ é o triplo da do $\hat{B}$ e a do $\hat{B}$ é o dôbro da do $\hat{C}$. Calcule essas medidas.

6.º) Num triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede $\frac{1}{7}$ da medida da soma dos outros dois. Quanto medem os ângulos agudos?

7.º) Num triângulo, dois ângulos *externos* medem 110º e 120º, respectivamente. Quanto medem os ângulos internos dêsse triângulo?

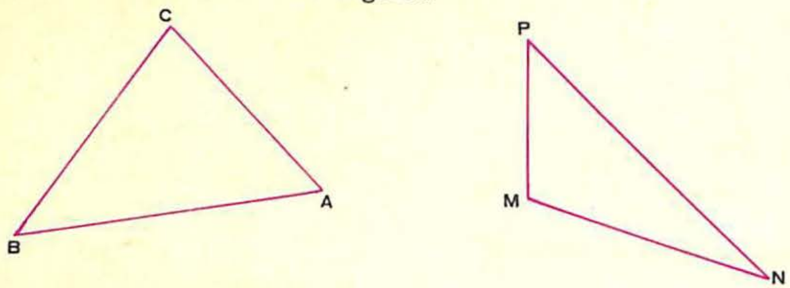
8.º) Num triângulo isósceles, a medida do ângulo do vértice é igual a $\frac{1}{10}$ da soma das medidas dos ângulos externos à base. Quanto mede o ângulo do vértice?

9.º) Calcule as medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, sabendo que a medida do $\hat{C}$ excede a medida do $\hat{A}$ de 30º (ou seja, tem a mais) e excede a medida do $\hat{B}$ de 48º.

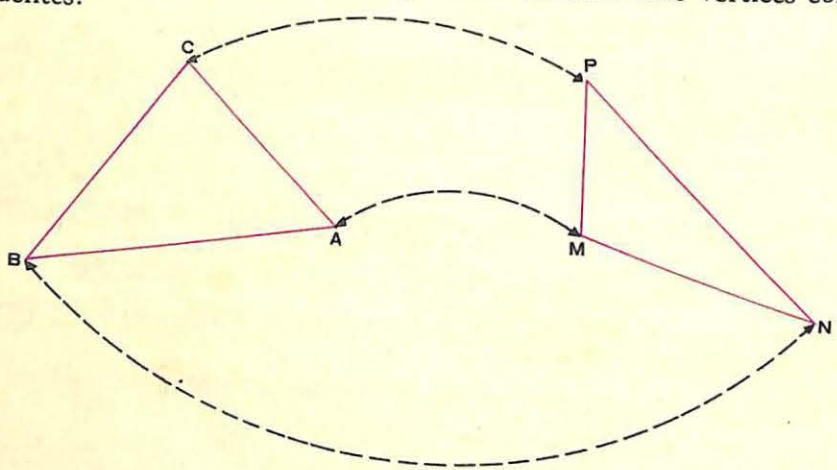
10.º) O ângulo do vértice de um triângulo isósceles é igual a um quinto da medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base. Calcule as medidas dos ângulos internos dêsse triângulo.

4. *Correspondência entre os vértices de dois triângulos*

Sejam, por exemplo, os triângulos:



Os vértices A, B, C e M, N, P dêsses triângulos podem ser postos em *correspondência biunívoca* (ou *um a um*) de *seis* maneiras. Uma delas está sendo assinalada pelas linhas *aplicadas* em cada dois vértices correspondentes:



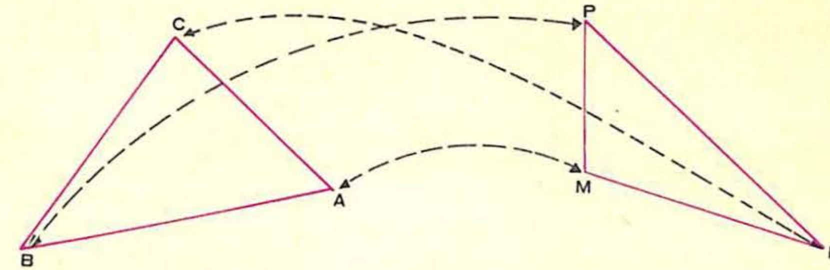
Indicação: $A \leftrightarrow M$ (lê-se: "ao ponto A *corresponde* o ponto M e o ponto M é o *correspondente* do ponto A")
$B \leftrightarrow N$
$C \leftrightarrow P$

Abrevia-se a indicação dessa correspondência entre os vértices A, B, C e M, N, P, assim:

$ABC \leftrightarrow MNP$ (lê-se: "A, B, C correspondem-se com M, N, P")

Outra maneira de fazer os vértices dêsses triângulos se corresponderem é:

$$\begin{matrix} A \leftrightarrow M \\ B \leftrightarrow P \\ C \leftrightarrow N \end{matrix} \iff ABC \leftrightarrow MPN$$



As quatro maneiras restantes seriam:

$$ABC \leftrightarrow NMP \qquad ABC \leftrightarrow PNM$$
$$ABC \leftrightarrow NPM \qquad ABC \leftrightarrow PMN$$

Você está convidado a assinalá-las, por meio de linhas *aplicadas* a dois vértices *correspondentes*.

NOTA: A correspondência $ACB \leftrightarrow MNP$, que você poderia imaginar estabelecer entre os vértices A, B, C e M, N, P já está contada entre as seis apresentadas, pois:

$$\begin{matrix} A \leftrightarrow M \\ C \leftrightarrow N \\ B \leftrightarrow P \end{matrix} \quad \text{pode ser escrita} \quad \begin{matrix} A \leftrightarrow M \\ B \leftrightarrow P \\ C \leftrightarrow N \end{matrix} \iff ABC \leftrightarrow MPN$$

Nas correspondências estabelecidas entre os *vértices* dos triângulos, *os lados* cujos extremos se correspondem chamam-se *lados correspondentes* e os ângulos cujos vértices se correspondem, *ângulos correspondentes*.

NOTA: Não confundir a denominação ângulos CORRESPONDENTES, atribuída a ângulos que *se correspondem* numa dada *correspondência*, com os "*ângulos correspondentes*", denominação tradicional que recebem os ângulos formados por uma transversal com duas retas coplanares (Cap. IV, n.º 27).

Assim, por exemplo, na correspondência: $ABC \leftrightarrow MNP$:

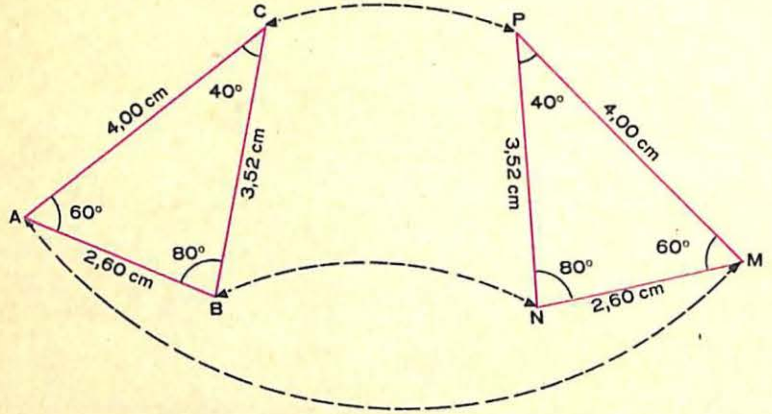
$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \text{ e } \overline{MN} \\ \overline{BC} \text{ e } \overline{NP} \\ \overline{AC} \text{ e } \overline{MP} \end{matrix}\right\} \text{são } \textit{lados correspondentes} \qquad \left.\begin{matrix} \hat{A} \text{ e } \hat{M} \\ \hat{B} \text{ e } \hat{N} \\ \hat{C} \text{ e } \hat{P} \end{matrix}\right\} \text{são } \textit{ângulos correspondentes}$$

5. *Congruência de triângulos*

Qualquer uma das seis correspondências estabelecidas entre os vértices de dois triângulos é chamada **congruência** quando os *lados* e os *ângulos correspondentes* são, respectivamente, *congruentes*.

Nesse caso os triângulos dizem-se **congruentes.**

Os triângulos ABC e MNP:



são *congruentes*, pois:

$\overline{AB} \cong \overline{MN}$ (porque: $m(\overline{AB}) = m(\overline{MN}) = 2{,}60\text{cm}$)
$\overline{BC} \cong \overline{NP}$
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$

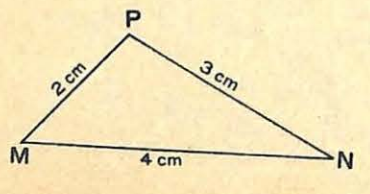
e

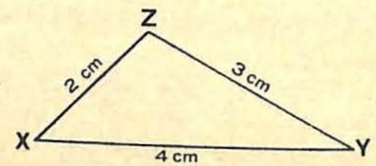
$\hat{A} \cong \hat{M}$ (porque: $m(\hat{A}) = m(\hat{M}) = 60°$)
$\hat{B} \cong \hat{N}$
$\hat{C} \cong \hat{P}$

Indicação: $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle MNP}$

Logo: *Dois triângulos são* CONGRUENTES *se, e sòmente se, existir uma correspondência biunívoca entre os seus vértices, tal que os lados e os ângulos correspondentes sejam, respectivamente, congruentes.*

ATENÇÃO: Considerados, por exemplo, os triângulos:





e a correspondência: $MNP \leftrightarrow ZXY$, sabe-se que os lados $\overline{MN}$ e $\overline{ZX}$ são correspondentes (nessa correspondência!). Como suas medidas são diferentes, pois: $m(\overline{MN}) = 4\text{cm}$ e $m(\overline{ZX}) = 2\text{cm}$, então $\overline{MN} \not\cong \overline{ZX}$.

Será que nestas condições já se pode concluir que os triângulos MNP e ZXY *não são congruentes?*

NÃO, pelo simples fato de *existir* uma outra correspondência entre os vértices (lembre-se de que se pode estabelecer *seis* correspondências), que é uma *congruência*. Essa correspondência é:

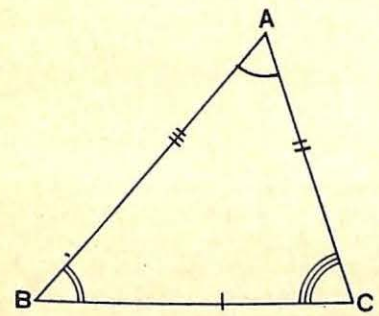
$$MNP \leftrightarrow XYZ$$

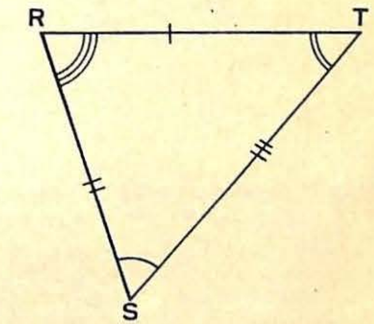
Logo, não é a correspondência $MNP \leftrightarrow ZXY$ que define a congruência entre $\triangle MNP$ e $\triangle ZXY$ e sim a correspondência $MNP \leftrightarrow XYZ$, razão por que, ao escrever os vértices, se deve guardar a POSIÇÃO relativa dos elementos, respectivamente, congruentes.

A *congruência de triângulos* é uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA, pois é:

1) *reflexiva*: $\triangle ABC \cong \triangle ABC$
2) *simétrica*: se $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, então $\triangle MNP \cong \triangle ABC$
3) *transitiva*: se $\triangle ABC \cong \triangle MNP$ e $\triangle MNP \cong \triangle XYZ$, então $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

OBSERVAÇÃO DE ORDEM PRÁTICA: Como a *congruência de dois triângulos* implica a *congruência* de seus *três lados* e *três ângulos* respectivos, costuma-se assinalar com pequenos segmentos os lados correspondentes congruentes e com pequenos arcos os ângulos correspondentes congruentes. Assim, por exemplo:





1.º triângulo: $A \quad B \quad C$ (aqui as letras podem figurar em qualquer ordem)
$\quad\quad\quad\quad\ \ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
2.º triângulo: $S \quad T \quad R$ (aqui, *não!*)

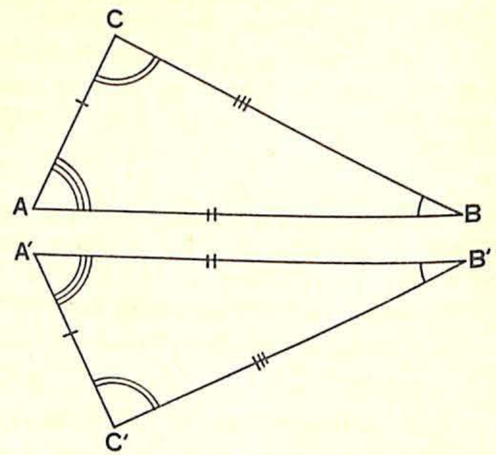
e como, nessa correspondência: $\overline{AB} \cong \overline{ST}$, $\overline{BC} \cong \overline{TR}$, $\overline{AC} \cong \overline{RS}$ e $\hat{A} \cong \hat{S}$, $\hat{B} \cong \hat{T}$, $\hat{C} \cong \hat{R}$

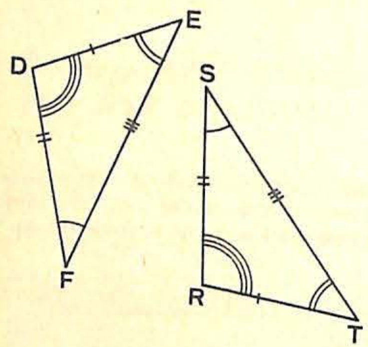
então: $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle STR}$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 76

1. Preencha os claros das seguintes sentenças, que dizem respeito a triângulos *congruentes:*

1.ª) $\triangle ABC \cong \triangle \ldots$



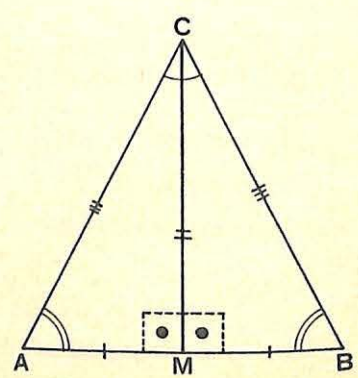


2.ª) $\triangle \ldots \cong \triangle SRT$

2. Dois triângulos *congruentes* podem fazer parte da mesma figura. Exemplo:

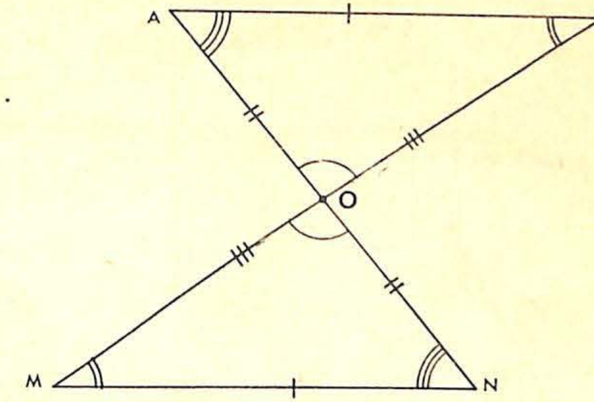
$$\text{onde: } \left\{ \begin{array}{ccc} A & M & C \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B & M & C \end{array} \right.$$

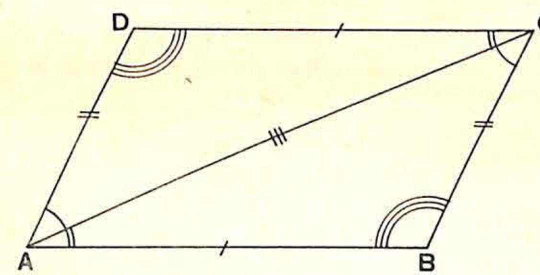
Logo: $\triangle AMC \cong \triangle BMC$



Preencha os claros das seguintes sentenças:

1.ª) $\triangle MON \cong \triangle \ldots$





2.ª) $\triangle \ldots \cong \triangle ABC$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 77

1. *Acêrca de congruência de triângulos ...*

Você sabe que, se dois triângulos são *congruentes*, então *seis* dos seus elementos correspondentes (três lados e três ângulos) são respectivamente *congruentes.*

Todavia, é possível saber se dois triângulos são *congruentes* sem verificar se *todos os lados* correspondentes e *todos os ângulos* correspondentes são, respectivamente, congruentes. Para isso, é *suficiente* — como será "explorado" nos exercícios que se seguirão — verificar se dois triângulos têm, respectivamente congruentes, **sòmente três** dos elementos correspondentes, entre os quais esteja compreendido, necessàriamente, pelo menos *um lado.*

Os exercícios que dizem respeito a essa "economia" de elementos correspondentes, para saber se dois triângulos são congruentes, sugerem os chamados *Casos Clássicos de Congruência de Triângulos.*

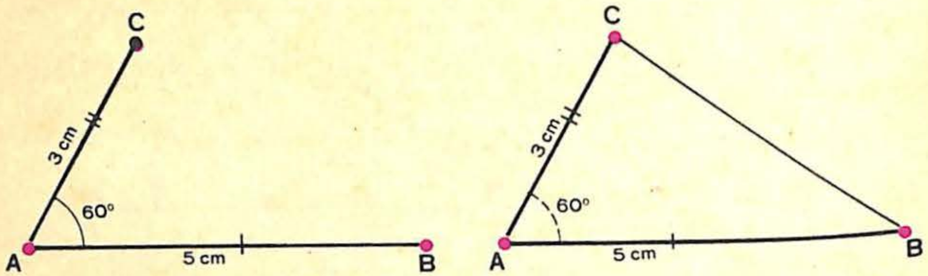
1.º CASO: Você e seus colegas de classe estão convidados a construir um triângulo do qual são conhecidos *sòmente:*

dois lados e o *ângulo* que êsses lados formam.

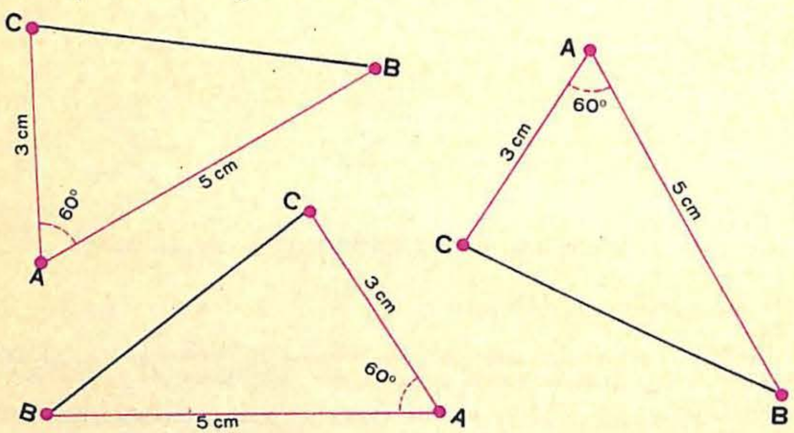
Sejam os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e o ângulo $\hat{A}$ formado por êles, dados respectivamente pelas suas medidas:

$$m(\overline{AB}) = 5\text{cm}$$
$$m(\hat{A}) = 60^\circ$$
$$m(\overline{AC}) = 3\text{cm}$$

Conhecidos os *três vértices* (A, B, C) do triângulo, basta uni-los e o triângulo estará construído:



Será que o triângulo que você construiu é *congruente* aos triângulos abaixo, construídos pelos seus colegas de classe?

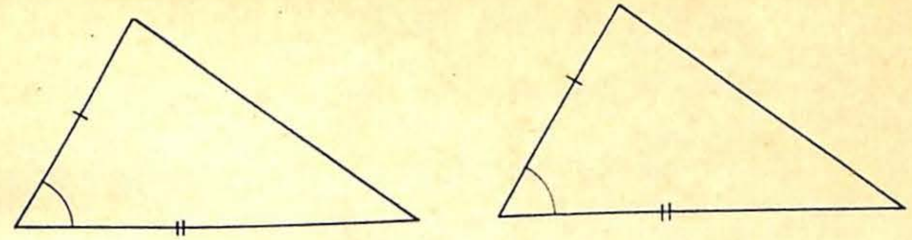


Basta medir o terceiro lado $\overline{BC}$, bem como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de todos os triângulos construídos (em qualquer posição), para verificar que *todos êles são congruentes*. Experimente.

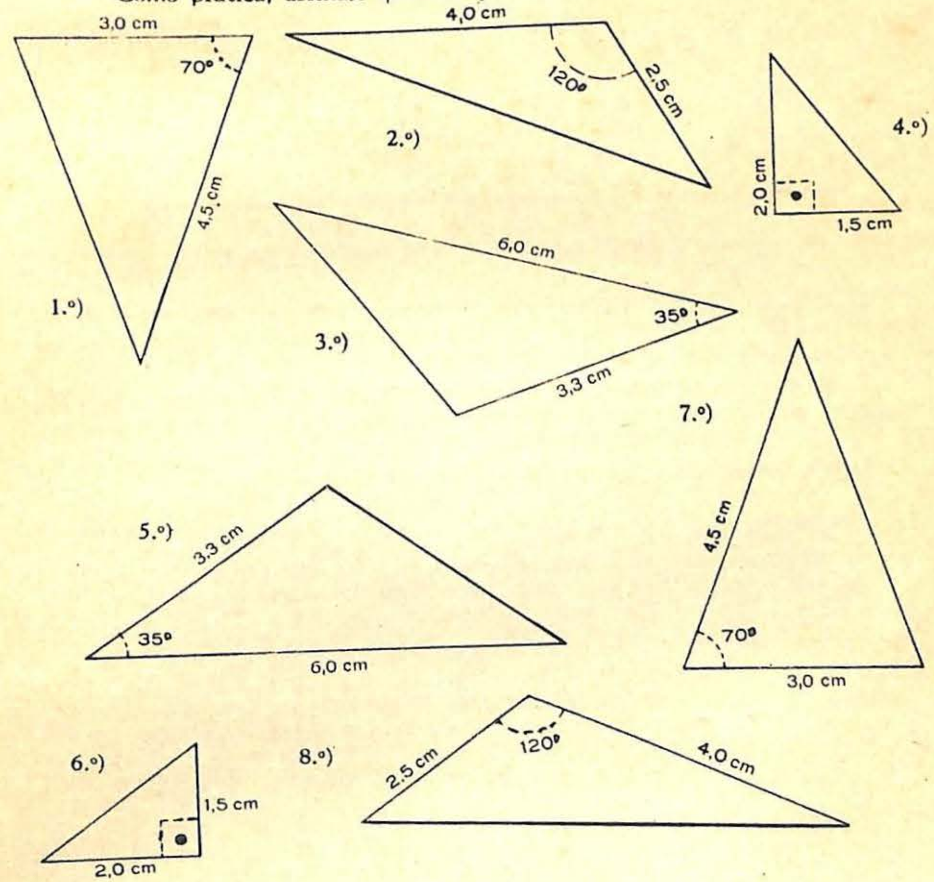
Surge, assim, o *1.º Caso de Congruência de Triângulos:*

Se dois triângulos possuem *dois lados* e o *ângulo por êles formado* respectivamente congruentes, então os triângulos são *congruentes*

Indicação: L.A.L. (lê-se: "lado, ângulo, lado")



Como prática, assinale quais os *pares* de triângulos que são *congruentes:*



Observação: Dois triângulos retângulos que tenham os catetos respectivamente congruentes, são congruentes.

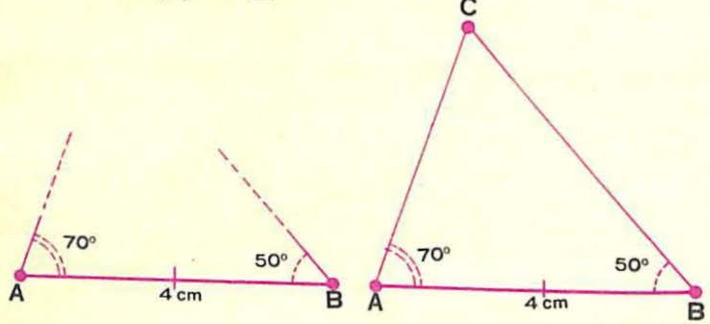
De fato, sendo reto o ângulo formado pelos catetos, a congruência dos triângulos decorre do caso L.A.L.

2.º Caso: Todos agora vão construir um triângulo conhecendo *sòmente:*

um lado e *dois ângulos adjacentes* a êsse lado.

Êsses elementos são dados por suas medidas:

$m(\hat{A}) = 70^{\circ}$
$m(\overline{AB}) = 4\text{cm}$
$m(\hat{B}) = 50^{\circ}$



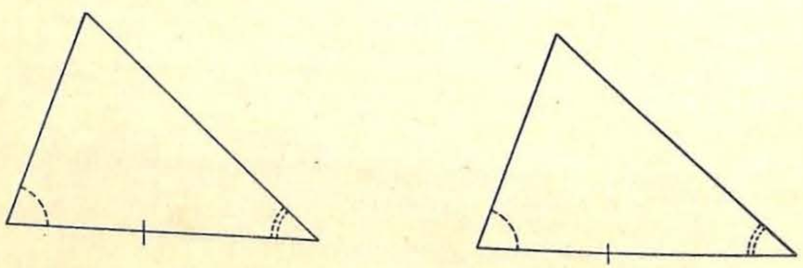
Os três vértices são determinados fàcilmente, pois dois dêles (A e B) são conhecidos, bem como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, pelas respectivas medidas. O terceiro vértice (C) é determinado pela intersecção dos lados não-comuns dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Também agora os triângulos construídos por você e seus colegas são todos *congruentes*, como é ràpidamente verificado medindo-se os demais elementos correspondentes dos triângulos desenhados.

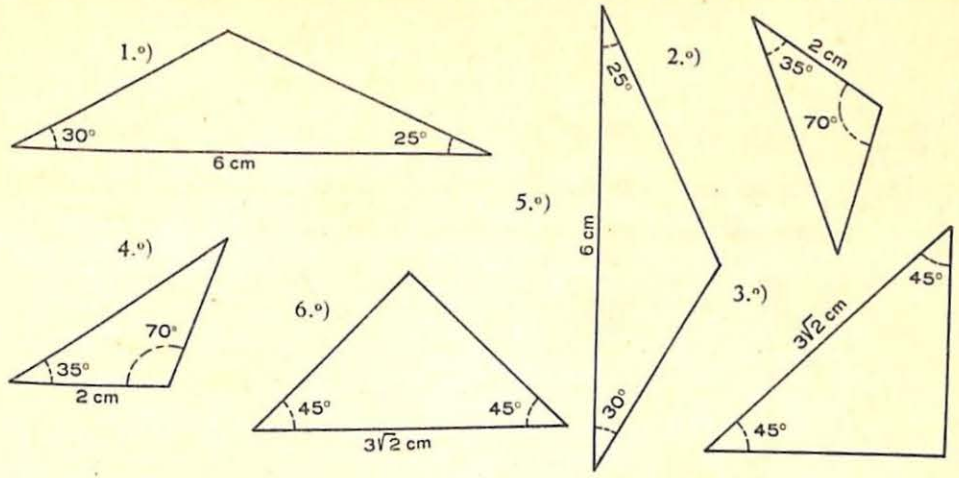
Temos, então, o 2.º *Caso de Congruência de Triângulos:*

> **Se dois triângulos possuem *um lado* e *dois ângulos adjacentes* a êsse lado congruentes, então os triângulos são *congruentes***

Indicação: A.L.A. (lê-se: "ângulo, lado, ângulo")



Assinale, como prática, quais os pares de triângulos que são *congruentes:*

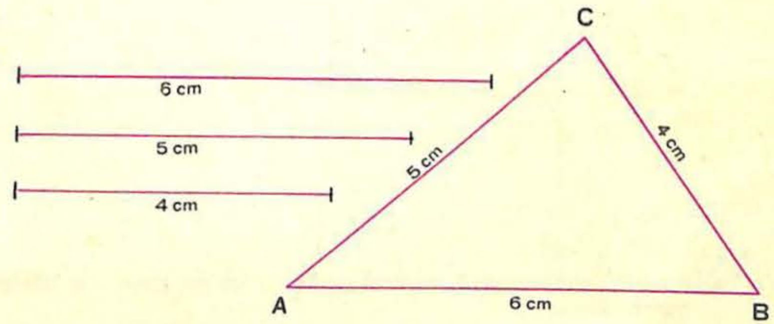


3.º Caso: Todos são convidados a construir um triângulo do qual são conhecidos *sòmente*:

os *três lados*,

através de suas medidas:

$m(\overline{AB}) = 6\text{cm}$
$m(\overline{AC}) = 5\text{cm}$
$m(\overline{BC}) = 4\text{cm}$

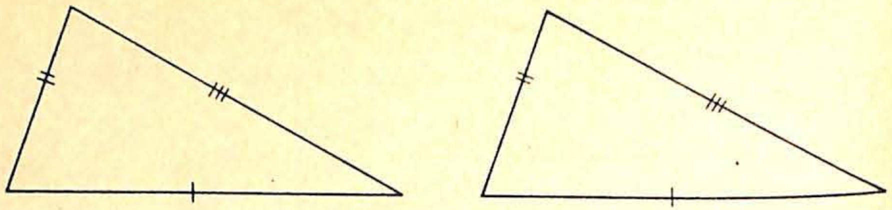


Partindo de qualquer lado (AB, por exemplo), basta usar o compasso duas vêzes: a primeira, com centro em A e raio de 5cm, e a segunda, com centro em B e raio de 4cm. O terceiro vértice é um dos pontos (C) de intersecção das circunferências traçadas. O ponto C existe porque: $6\text{cm} < 5\text{cm} + 4\text{cm}$ (resultado já conhecido).

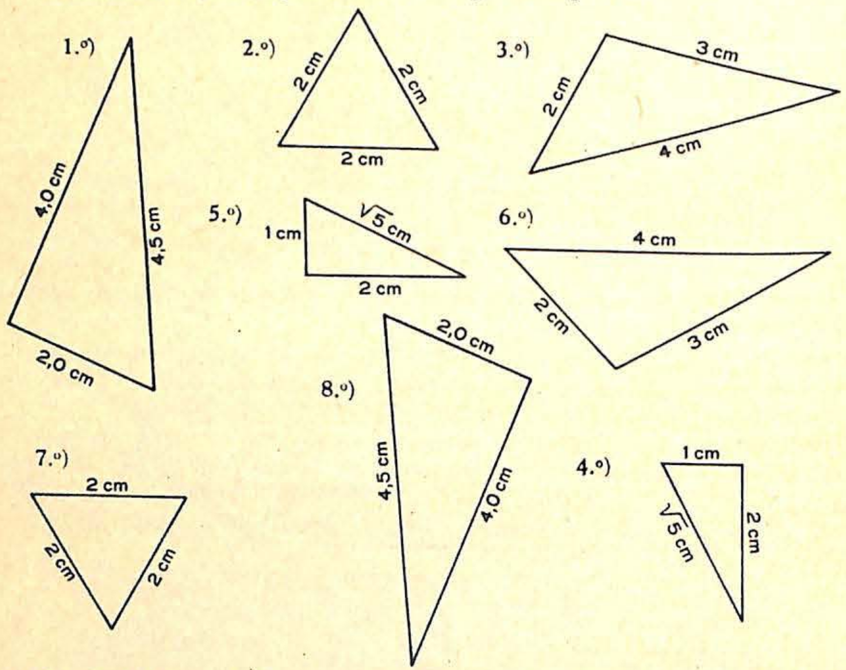
Também agora pode-se verificar que os triângulos construídos pelos alunos da classe são todos *congruentes*, medindo-se os ângulos correspondentes dos triângulos desenhados. Daí, temos o 3.º *Caso de Congruência de Triângulos:*

> **Se dois triângulos possuem os *três lados* respectivamente congruentes, então os triângulos são *congruentes***

Indicação: L.L.L. (lê-se: "lado, lado, lado")



Assinale, aos pares, quais são os triângulos *congruentes:*



4.º CASO: Pede-se, ainda, a tôda a classe que construa um triângulo do qual são conhecidos *sòmente:*

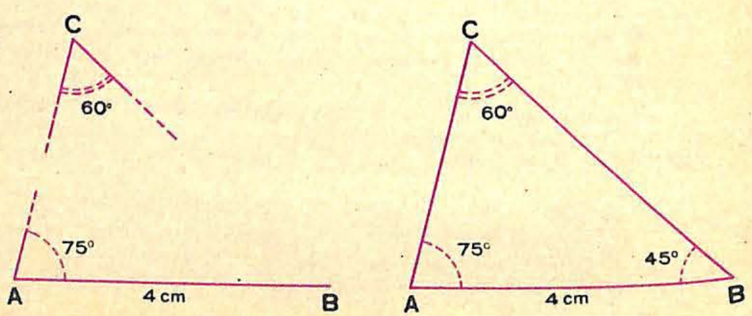
um lado, um ângulo adjacente a êsse lado e *um ângulo oposto* a êsse lado,

por intermédio de suas medidas:

$m(\overline{AB}) = 4\text{cm}$

$m(\hat{A}) = 75°$

$m(\hat{C}) = 60°$



Ora, sendo 180° a soma das medidas dos três ângulos de um triângulo e como já são conhecidas as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, a medida do $\hat{B}$ será:

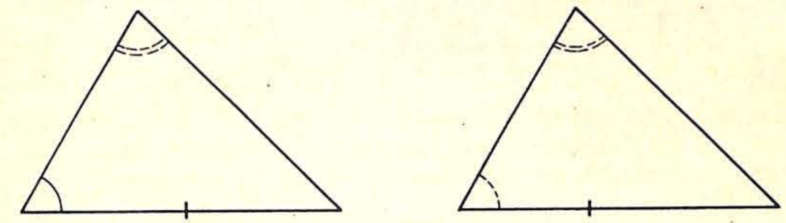
$$m(\hat{B}) = 180° - (75° + 60°) = 180° - 135° = 45°$$

Portanto, a intersecção dos lados não-comuns do ângulo $\hat{A}$ (que mede 75°) e do ângulo $\hat{B}$ (que mede 45°) determinará o terceiro vértice C (caso já conhecido: A.L.A.).

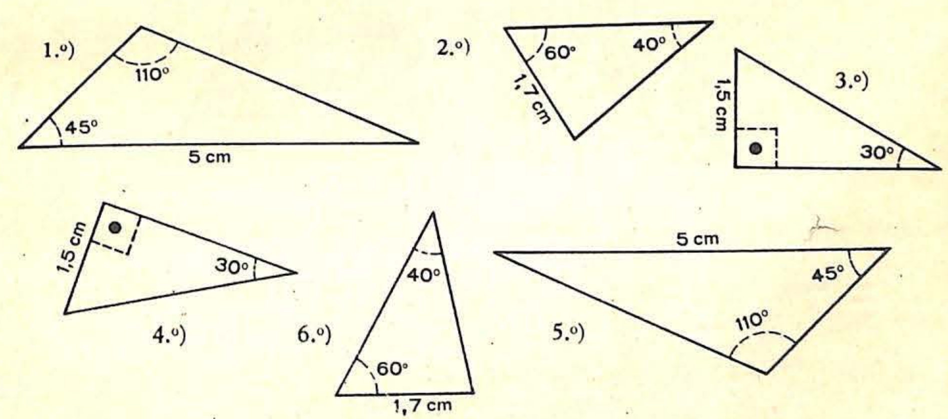
Como todos os triângulos construídos pela classe são *congruentes*, "nasce" o 4.º *Caso de Congruência de Triângulos:*

Se dois triângulos possuem *um lado, um ângulo adjacente* e *um ângulo oposto* a êsse lado, respectivamente *congruentes*, então os triângulos são *congruentes*

Indicação: L.A.A$_0$ (lê-se: "lado, ângulo, ângulo oposto")



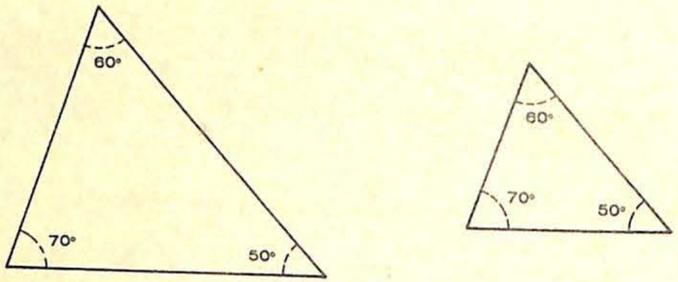
Assinale quais os pares de triângulos que são *congruentes:*



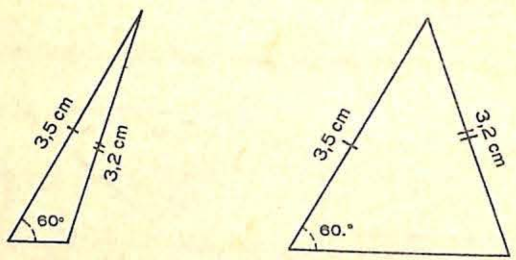
OBSERVAÇÃO: Por êste caso (L.A.A$_0$), dois triângulos retângulos que possuam um cateto (ou hipotenusa) e um ângulo agudo, respectivamente congruentes, são congruentes.

ATENÇÃO: Muito cuidado na "exploração" da CONGRUÊNCIA de dois triângulos, pois não basta três elementos *quaisquer*, tomados como correspondentes, serem congruentes. É necessário levar em conta a *posição* dêsses elementos, e que um dêles, pelo menos, seja *lado*.

Por exemplo, não existe o caso A.A.A., pois você pode ter dois triângulos com os três ângulos respectivamente congruentes e que *não sejam congruentes:*



Também não existe o caso A.L.L. (ou L.L.A.), pois, apesar de possuírem os elementos correspondentes, congruentes nessa *ordem*, dois triângulos podem não ser congruentes, como os seguintes:

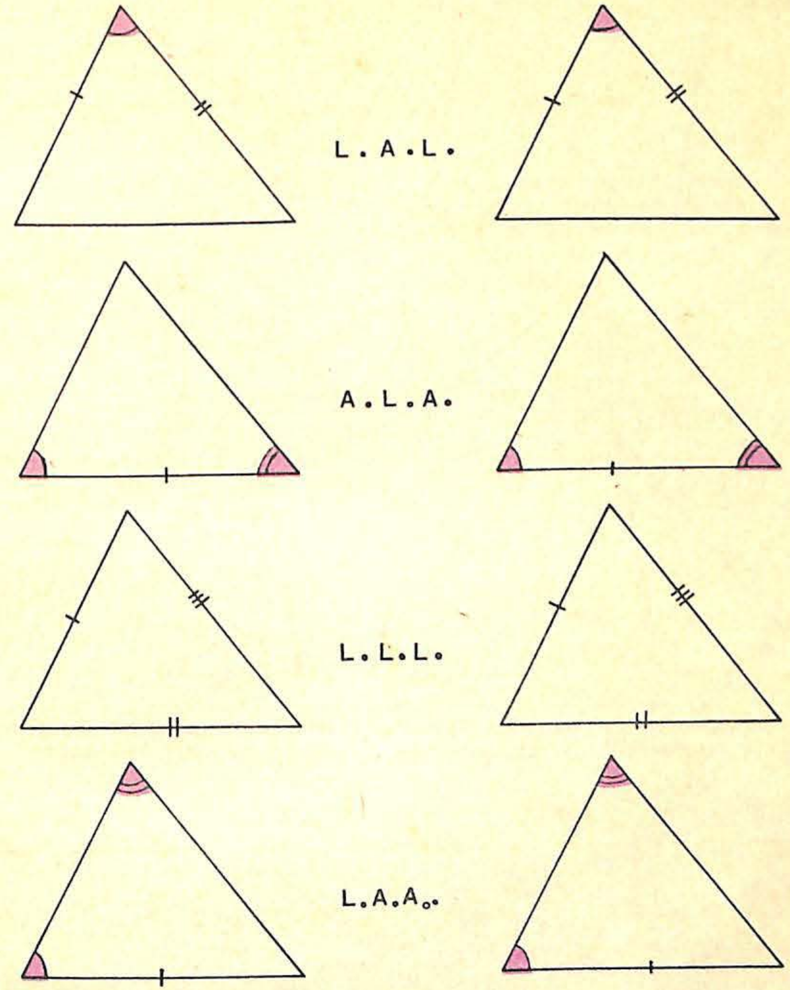


onde o ângulo congruente (60°) *não é o formado* pelos *lados congruentes*.

"Explore", por intermédio de exemplos, que também *não existe* o caso A.A.L. (ou L.A.A.).

LEMBRETE AMIGO

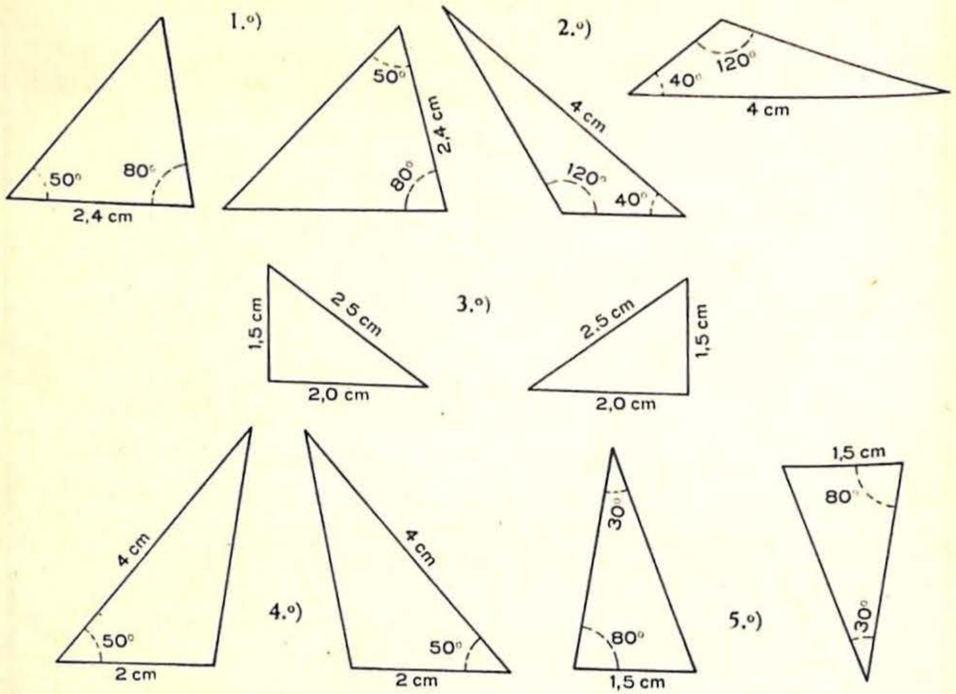
Os únicos **Casos de Congruência de Triângulos** são:



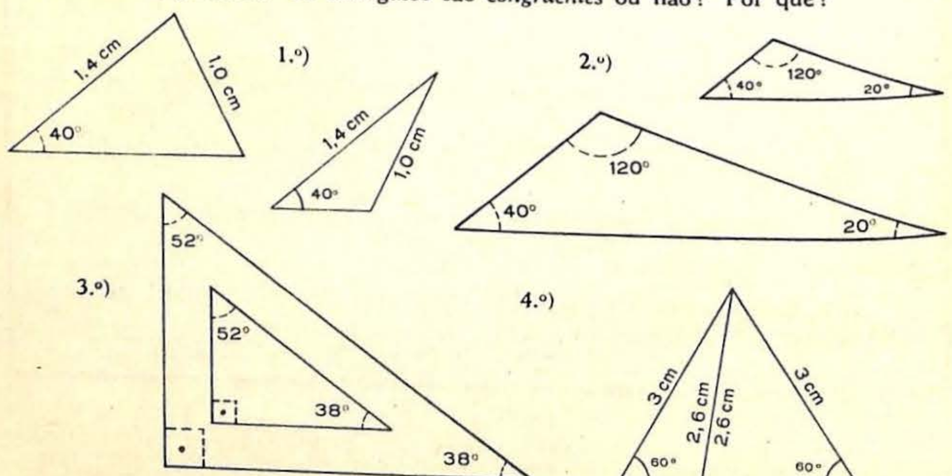
. . . que lhe permitem reconhecer, com enorme "economia", se dois triângulos são *congruentes* . . .

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 78

1. Os seguintes pares de triângulos são *congruentes*, de acôrdo com os casos clássicos estudados (L.A.L., A.L.A., L.L.L., L.A.A$_0$). Assinale, para cada par, qual o caso empregado:



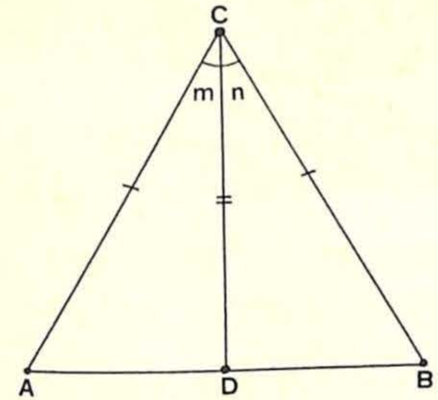
2. Os seguintes pares de triângulos possuem *três* de seus elementos principais respectivamente congruentes. Os triângulos são *congruentes* ou não? Por quê?



3. Justifique o "porquê" da congruência dos triângulos que fazem parte da mesma figura. Exemplos-modêlo:

1.°) Dados: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ "prove" que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$

$m = n$



Solução:

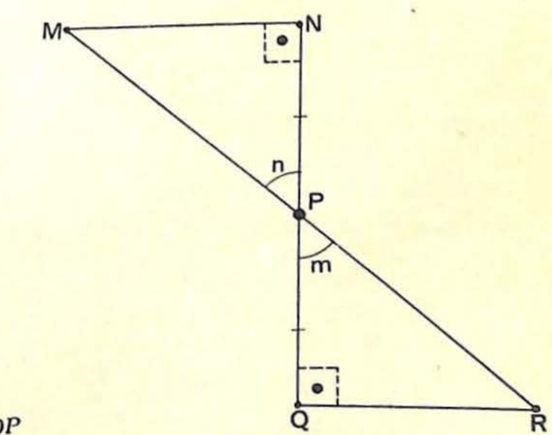
Basta empregar um dos casos de congruência estudados, desde que se disponha de *três* elementos correspondentes, respectivamente *congruentes*, guardando a *mesma posição*.

Como: $\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{BC} & \text{(dado)} \\ m = n & \text{(dado)} \\ \overline{CD} \cong \overline{CD} & \text{(é o } \textit{mesmo} \text{ na figura)} \end{cases}$

segue-se que: $\triangle ACD \cong \triangle BCD$
pelo caso L.A.L.

2.°) Dados: $\overline{NP} \cong \overline{PQ}$ "prove" que $\triangle MNP \cong \triangle RQP$

$\hat{N} \cong \hat{Q}$

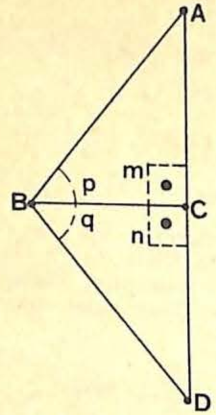


Como: $\begin{cases} \hat{N} \cong \hat{Q} & \text{(dado)} \\ \overline{NP} \cong \overline{PQ} & \text{(dado)} \\ n = m & \text{(o.p.v.)} \end{cases}$

segue-se que: $\triangle MNP \cong \triangle RQP$
(caso A.L.A.)

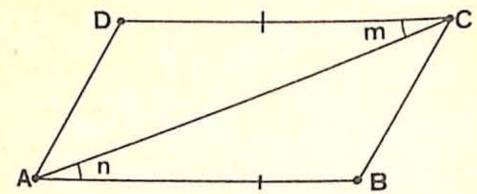
Nota: O terceiro elemento ($n = m$) decorreu de fato já conhecido.

3.º) Dados: $m = n$
$p = q$



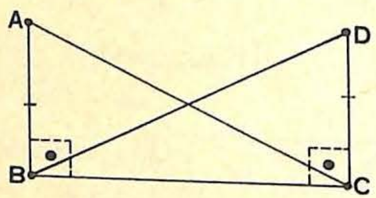
"prove" que $\triangle BCA \cong \triangle BCD$

4.º) Dados: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$m = n$



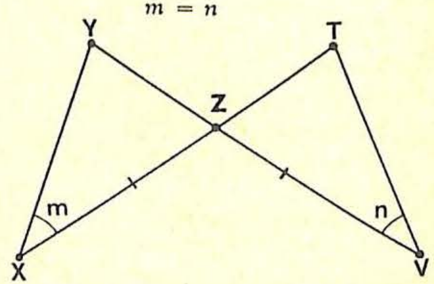
"prove" que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

5.º) Dados: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\hat{B} \cong \hat{C}$



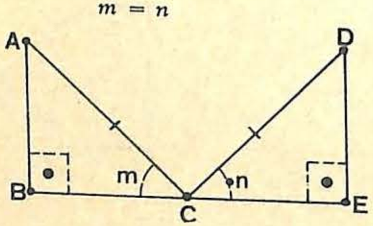
"prove" que $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

6.º) Dados: $\overline{XZ} \cong \overline{ZV}$
$m = n$



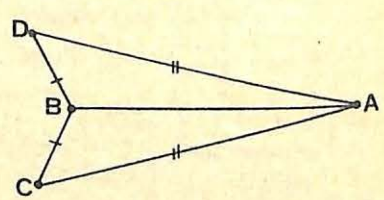
"prove" que $\triangle XYZ \cong \triangle VTZ$

7.º) Dados: $\overline{AC} \cong \overline{DC}$
$m = n$

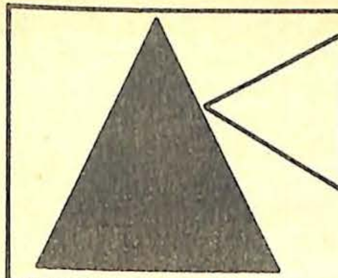


"prove" que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$

8.º) Dados: $\overline{AD} \cong \overline{AC}$
$\overline{BD} \cong \overline{BC}$



"prove" que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$



2.ª Parte: - construção lógica da Geometria
- da necessidade de provas...
- ... alguns teoremas fundamentais

Construção lógica da Geometria

6. *Insuficiência das medidas e das observações para "provar" que uma afirmação é verdadeira*

Até agora você "explorou" diversas situações, verificando, por intermédio de *instrumentos* (régua, compasso e transferidor) e de *observações*, algumas *propriedades* de figuras geométricas, tais como:

1) Os ângulos alternos internos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal são congruentes;
2) em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes;
3) em todo triângulo o comprimento de qualquer lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois;
4) os casos de congruência de triângulos (L.A.L., A.L.A., L.L.L., L.A.A_0).

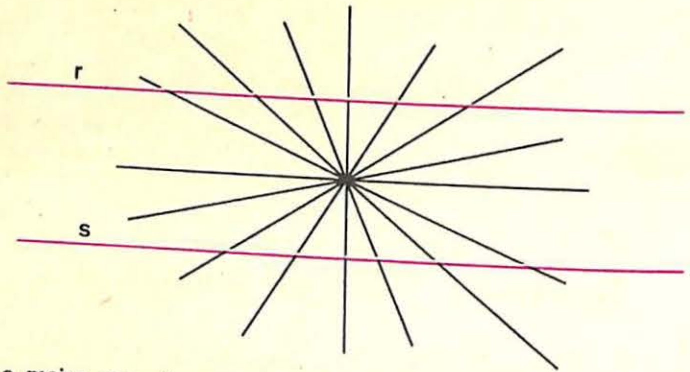
Todavia, por mais corretamente que sejam efetuadas as construções, não se pode *concluir* que os resultados obtidos sejam absolutamente certos, uma vez que *tôdas as medidas* estão sujeitas a pequenos erros.

Mesmo que as figuras geométricas tenham sido *observadas* com o máximo de atenção, não estamos habilitados a aceitar certos resultados pelo fato de os "estarmos vendo". Fôsse assim, você jamais poderia afirmar que as milhares de "pequeninas" estrêlas observadas no céu são milhares de vêzes *maiores* que a Terra. Ou que é a Terra que gira ao redor do Sol, pois a *observação diária*, que mostra o Sol "levantando-se" de manhã no horizonte, pondo-se a pino ao meio-dia e "deitando-se" à tarde, faz "crer" que é o Sol que gira em tôrno da Terra!

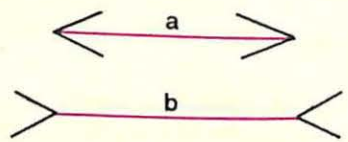
Portanto, usando sòmente a vista, pode-se tirar *conclusões falsas*.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 79

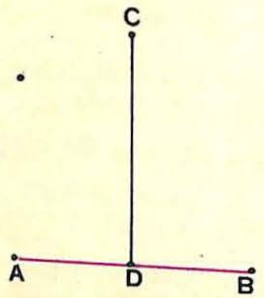
1. As linhas *r* e *s* da figura são *retas* ou *curvas?*



2. Qual é o maior comprimento: *a* ou *b?*



3. Qual é a sentença *verdadeira:*



1.ª) $m(\overline{CD}) < m(\overline{AB})$?

2.ª) $m(\overline{CD}) = m(\overline{AB})$?

3.ª) $m(\overline{CD}) > m(\overline{AB})$?

ATENÇÃO: Observe com cuidado a figura da pág. 233 e depois... conclua!

Da necessidade de provas

7. Necessidade de um processo dedutivo

Suponhamos que você tenha verificado experimentalmente que *os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes*. Mesmo que essa propriedade seja verdadeira para "mil triângulos isósceles", você jamais poderia concluir que ela continuaria verdadeira para "um milhão de triângulos isósceles" sem que a verificasse para um triângulo de cada vez!

Daí a necessidade de se ter um processo dedutivo — denominado *demonstração* — que possa justificar plenamente ser verdadeira a citada

propriedade para **qualquer** triângulo isósceles, independente do *tamanho* da figura ou da *precisão* com que foi desenhada. Êste é o poder da *generalização* de uma *demonstração* em Matemática, que permite construir lògicamente a Geometria.

Demonstra-se que a informação expressa numa sentença é *verdadeira*, mediante um *processo dedutivo*, desenvolvido sucessivamente por intermédio de *definições* e de *resultados conhecidos*, mais elementares, já comprovados ou aceitos como verdadeiros.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 80

Procure justificar as conclusões que tirar das informações expressas nas seguintes sentenças:

a) (*Modêlo*) Todo paulista é brasileiro.
João é paulista. Logo... (João é brasileiro)

NOTA: Se *todo* paulista é brasileiro, João, sendo paulista, está incluído no *todo*... e quem pode "o mais" pode "o menos"!

a') (*Modêlo*) Todo paulista é brasileiro.
João é brasileiro. Logo...

NOTA: Nada se pode concluir, pois ser brasileiro não significa ser paulista — embora não esteja excluído — podendo ser baiano, gaúcho,..., e o fato de poder "o menos" não implica poder "o mais"!

b) Se dois ângulos são suplementares, então os ângulos são adjacentes.
(*Sugestão:* pode-se raciocinar com contra-exemplos...)

b') Se dois ângulos são adjacentes, tendo como lados exteriores semi-retas opostas, então os ângulos são suplementares.

c) Se chove, a grama fica molhada.
A grama está molhada, então...

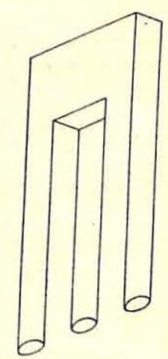
c') Se chove, a grama fica molhada.
Choveu, então...

d) Qualquer triângulo eqüilátero é isósceles.
O $\triangle\, ABC$ é eqüilátero, logo...

d') Qualquer triângulo eqüilátero é isósceles.
O $\triangle\, ABC$ é isósceles, logo...

e) Tôdas as bruxas voam com vassouras.
Alcéia e Meméia são bruxas, logo...

e') Tôdas as bruxas voam com vassouras.
Alcéia e Meméia voam com vassouras, logo... (cuidado!)



POSTULADOS E TEOREMAS DA GEOMETRIA EM ESTUDO

8. *Que é postulado? Que é teorema?*

As sentenças ou proposições que são feitas usualmente no lar, na escola, *dentro da Matemática*, etc..., apresentam-se sob uma das duas formas:

1) sentenças que são aceitas como *verdadeiras* **sem prova**, denominadas **postulados** (ou axiomas);

2) sentenças que **podem ser provadas** como *verdadeiras*, denominadas **teoremas.**

Assim, por exemplo, na Geometria, enunciadas as sentenças:

"*Por um ponto passam infinitas retas*"

"*A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°*"

pode-se, dada a evidência da primeira, "aceitá-la" como *verdadeira*, dispensando uma demonstração (que dificilmente se poderia realizar...). Nessas condições essa sentença foi tomada como **postulado.**

Já a segunda sentença não pode ser aceita como *verdadeira* com tanta facilidade (por que a soma não seria 179° ou 181°?), a menos que seja *demonstrada*, como foi feito à pág. 210. Então, trata-se de um **teorema** dentro da Geometria que se está estudando.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Não estamos proibidos de tomar a segunda sentença também como postulado e usá-la depois para demonstrar a verdade de outras sentenças.

2.ª) Pode-se, ainda, construir lògicamente uma Geometria, na qual se toma como postulado a sentença: "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é *menor* (ou *maior*) que 180°", isto é, contrariando a afirmação feita na segunda sentença acima. Tudo vai depender da Geometria que se quer construir.

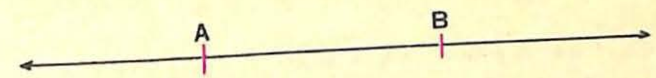
9. *Primeiros postulados*

Pode-se agora reunir, sob forma de **postulados,** as situações encontradas em exercícios *práticos*, principalmente nascidas nos exercícios *exploratórios*. Tais *postulados* serão utilizados para justificar as demonstrações dos *teoremas*.

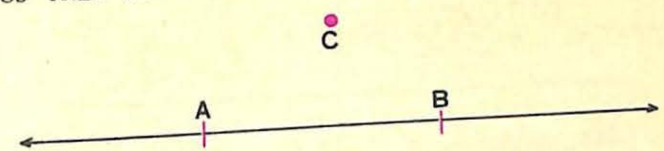
Então, com os *conceitos primitivos* (não-definidos), com as *definições* estudadas, com sentenças aceitas como *postulados* e com outras tomadas como *teoremas* constrói-se lògicamente uma Geometria.

A Geometria em estudo será fundamentada nos seguintes *postulados:*

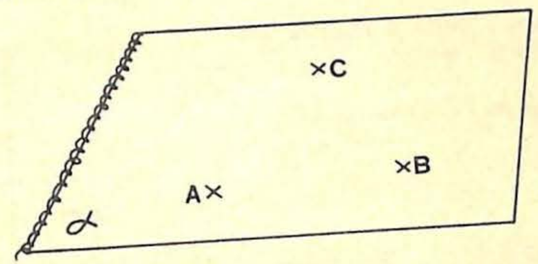
P1: DOIS PONTOS DISTINTOS DETERMINAM UMA E SÒMENTE UMA RETA(*)



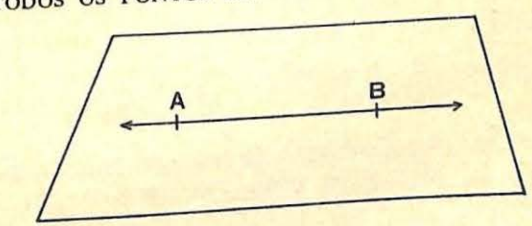
P2: NUMA RETA EXISTEM PELO MENOS DOIS PONTOS(**). EXISTEM PELO MENOS TRÊS PONTOS NÃO NUMA MESMA RETA (NÃO-COLINEARES)



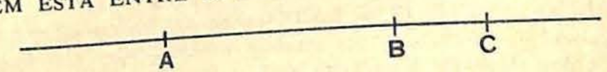
P3: TRÊS PONTOS NÃO-COLINEARES DETERMINAM UM E SÒMENTE UM PLANO



P4: SE DOIS PONTOS DISTINTOS DE UMA RETA PERTENCEM A UM PLANO, ENTÃO TODOS OS PONTOS DA RETA PERTENCEM AO PLANO



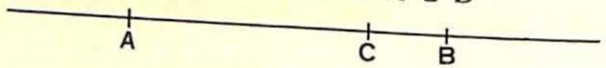
P5: SE *B* ESTÁ ENTRE *A* E *C*, ENTÃO *A*, *B* E *C* SÃO COLINEARES E *B* TAMBÉM ESTÁ ENTRE *C* E *A*



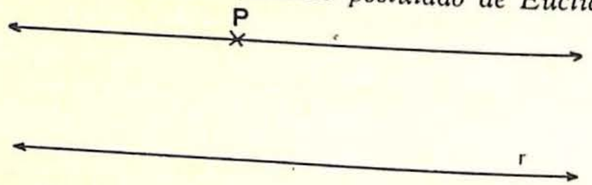
(*) Simbòlicamente: $(\forall A)\ (\forall B)\ (A \neq B) \rightarrow [(\exists \mid r)\ (A \in r \wedge B \in r)]$; a mesma linguagem poderá ser usada com os demais *postulados*.

(**) Dada a *correspondência biunívoca* existente entre os *números reais* e os *pontos da reta*, daí decorre que existem *infinitos pontos* na reta.

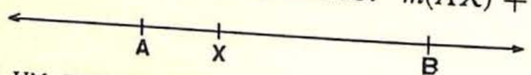
P6: Para dois pontos A e C existe, pelo menos, um ponto B na reta $\overleftrightarrow{AC}$, tal que C está entre A e B



P7: É única a reta paralela à reta r, traçada por um ponto P que não pertence a r (famoso *postulado de Euclides!*)

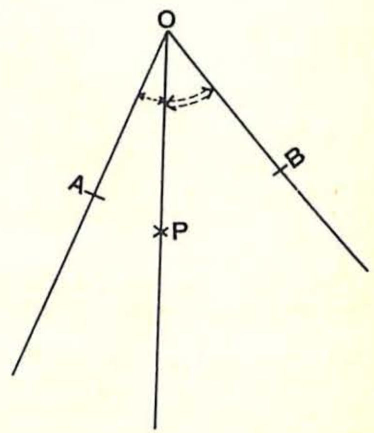


P8: Se X está entre A e B, então: $m(\overline{AX}) + m(\overline{XB}) = m(\overline{AB})$



P9: Se P é um ponto interior ao ângulo $A\hat{O}B$, então:

$m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B) = m(A\hat{O}B)$



P10: Se com dois triângulos ocorre um dos casos: L.A.L., A.L.A., L.L.L., L.A.A$_0$, então os dois triângulos são congruentes

NOTA IMPORTANTE

A *Geometria* construída de acôrdo com os *postulados* enunciados, entre os quais se encontra o famoso **postulado de Euclides**, é denominada **geometria Euclidiana.**

Uma Geometria é *não-euclidiana* quando entre seus *postulados* figura um que *contraria* o postulado de Euclides.

10. *Primeiros teoremas; forma "se-então"*

Os *teoremas*, como você já sabe, são sentenças que podem ser *provadas* como verdadeiras. Os teoremas compõem-se de *duas partes:*

hipótese (H): são os fatos *dados*(*)

tese (T): é o fato ou os fatos que *devem ser provados*

Todo teorema pode ser sempre escrito sob a seguinte *forma condicional:*

se .... então ......
(H) (T)

conhecida pela forma *se-então*. Exemplos:

1.º) O teorema: *"Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes"*, pôsto sob a forma "se-então", fica:

$\text{"SE } \underbrace{\text{dois ângulos são opostos pelo vértice}}_{H}\text{, ENTÃO } \underbrace{\text{os ângulos são congruentes}}_{T}\text{"}$

A sentença: *dois ângulos são opostos pelo vértice* é a *hipótese* por conter os *fatos dados*, enquanto que a sentença: *os ângulos são congruentes*, é a *tese*, pois contém o fato que *deve ser provado*.

2.º) O teorema: *"Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores são semi-retas opostas, são suplementares"*, pode ser escrito:

"se dois ângulos adjacentes possuem os lados exteriores como semi-retas opostas, então os ângulos são suplementares"

onde: H $\{$ dois ângulos adjacentes possuem lados exteriores como semi-retas opostas

T $\{$ os ângulos são suplementares

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 81

1. Sublinhe com uma linha a *hipótese* e com duas linhas a *tese* de cada uma das seguintes sentenças:

Modêlo: Se *dois ângulos adjacentes possuem os lados exteriores como semi-retas perpendiculares*, então *os ângulos são complementares*.

(*) Suposições.

1.ª) Se dois ângulos possuem suplementos congruentes, então os ângulos são congruentes.

2.ª) Se eu tiver lápis e papel, então irei desenhar.

3.ª) Se os ângulos consecutivos são formados em tôrno de um mesmo ponto, então a soma de suas medidas é igual a 360°.

4.ª) Se eu escrever um livro de Matemática, então saberei tôdas as respostas.

5.ª) Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

2. Escreva as seguintes sentenças sob a forma *se-então:*

Modêlo: "Dois ângulos que possuem complementos congruentes são congruentes"
"*Se* dois ângulos possuem complementos congruentes, *então* os ângulos são congruentes"

1.ª) Dois ângulos adjacentes cujas bissetrizes formam um ângulo de 45°, são complementares.

2.ª) Estudando, você será alguém.

3.ª) Todo triângulo eqüilátero é isósceles.

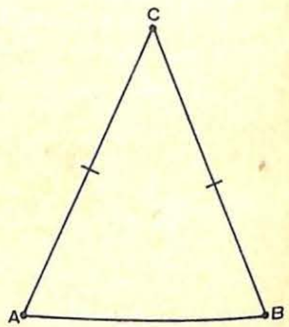
4.ª) Se jogarmos com um bom quadro, poderemos ser tricampeões de futebol.

5.ª) Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

3. Desenhe uma figura correspondente aos seguintes teoremas da Geometria, usando *letras* para caracterizar a *hipótese* (os fatos dados) e a *tese* (o fato ou os fatos que devem ser provados):

Modêlo: Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

Temos: $H \{ \triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$(*)
$T \{ \hat{A} \cong \hat{B}$



1.º) Se dois ângulos adjacentes possuem seus lados exteriores como semi-retas opostas, então os ângulos são suplementares.

2.º) Se duas retas se interceptam, então os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

3.º) Se um triângulo é eqüilátero, então o triângulo é eqüiângulo.

4.º) Se dois ângulos são adjacentes e suplementares, então o ângulo formado pelas bissetrizes dêsses ângulos é reto.

5.º) Se os ângulos formados num mesmo semi-plano determinado por uma reta são consecutivos, então a soma das medidas dêsses ângulos é igual a 180°.

(*) Lê-se: $\triangle ABC$ *tal que* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

11. *Como "enfrentar" um teorema com êxito*

Não há regras rígidas para se demonstrar um teorema. Pode-se, todavia, PARTINDO dos fatos dados na *hipótese* e empregando os conhecimentos advindos das *definições*, dos *postulados* e de *teoremas* já conhecidos, CHEGAR aos fatos apontados na *tese*.

Essa "caminhada" pode ser facilitada por construções auxiliares, e procurando:

1) escrever o teorema sob a forma "se-então" (caso ainda não esteja);

2) desenhar uma figura que represente os fatos contidos na hipótese e na tese (o uso de letras facilitará essa representação).

NOTA: Posteriormente, quando pela prática a hipótese e a tese forem fàcilmente identificadas, poderemos dispensar a forma "se-então" para os teoremas.

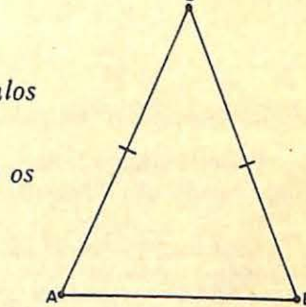
Exemplo-modêlo: Demonstrar o teorema:

T.1 : *Em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Temos: SE *um triângulo é isósceles*, ENTÃO *os ângulos da base são congruentes.*

$H \; \{ \triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$

$T \; \{ \hat{A} \cong \hat{B}$



Um plano de demonstração: Para *provar* que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são *congruentes*, basta provar que êsses ângulos participam de figuras congruentes (triângulos, por exemplo; você já sabe reconhecer fàcilmente se são congruentes).

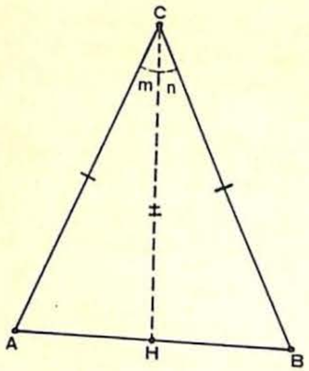
Nestas condições, traça-se *algum segmento*, de propriedades conhecidas, que decomponha o $\triangle ABC$ em dois novos triângulos. Tal segmento poderá ser:

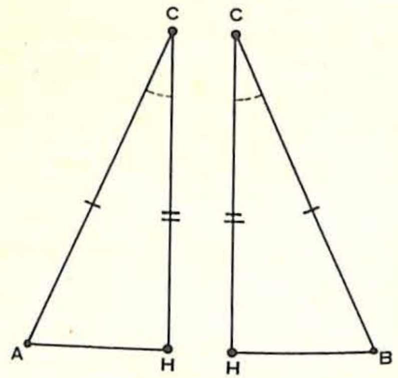
a *bissetriz* relativa ao ângulo $\hat{C}$

ou a *mediana* relativa à base $\overline{AB}$

ou a *altura* relativa à base $\overline{AB}$

Se fôr a *bissetriz*, esta irá dividir o ângulo $\hat{C}$ em dois ângulos congruentes, isto é, de medidas iguais ($m = n$), ensejando a formação dos triângulos: ACH e CHB, nos quais figuram os dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ que nos interessam.





Confrontando êsses triângulos, observa-se que êles possuem:

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (por hipótese) (L)

$m = n$ (por construção da bissetriz) (A)

$\overline{CH} \cong \overline{CH}$ (por ser lado comum) (L)

e, portanto, são *triângulos congruentes* pelo 1.º Caso (L.A.L.).

Dêsse modo os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, como correspondentes de triângulos congruentes, são *congruentes*, isto é: $\hat{A} \cong \hat{B}$, como queríamos demonstrar.

Observação: Se em vez da bissetriz você traçasse a *mediana*, relativa à base $\overline{AB}$, e seguisse o mesmo raciocínio, provaria também que $\hat{A} \cong \hat{B}$, porque agora os triângulos obtidos seriam congruentes pelo caso L.L.L. Experimente!

Outro "caminho" para provar que $\hat{A} \cong \hat{B}$ é traçar a *altura*, relativa à base $\overline{AB}$, pois nesse caso os triângulos obtidos seriam *congruentes* por serem *retângulos* que possuem a *hipotenusa* e um *cateto*, respectivamente, *congruentes*. Sabe por quê?

Porque é sempre possível "compor" um triângulo *isósceles* com dois triângulos retângulos que possuam a *hipotenusa* e um *cateto*, respectivamente, congruentes. E tais triângulos são *congruentes*, nessa "composição", pelo caso L.A.A$_o$.

Depois de você se acostumar a êste tipo de raciocínio, será possível *sintetizar* as demonstrações mediante *esquemas* que indicam as diversas "passagens" da demonstração.

Como exemplo, vamos conduzir a *demonstração* do T.1 usando um *esquema* comum, onde, à esquerda, figuram as *afirmações* feitas e, à direita, as *justificações* respectivas:

SE *um triângulo é isósceles*, ENTÃO *os ângulos da base são congruentes.*

$H\ \{\triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$

$T\ \{\hat{A} \cong \hat{B}$

Demonstração:

Afirmações	*Justificações*
1) $\overline{CH}$ é bissetriz de $\hat{C}$, ou seja, $m = n$	1) Todo ângulo admite uma bissetriz e, portanto, pode-se construir $\overline{CH}$.
2) $\triangle ACH \cong \triangle BCH$	2) Caso L.A.L. $\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (p/hipótese)} \\ m = n \text{ (p/construção)} \\ \overline{CH} \cong \overline{CH} \text{ (lado comum)(*)} \end{cases}$
3) $\hat{A} \cong \hat{B}$	3) Ângulos que se correspondem em triângulos congruentes

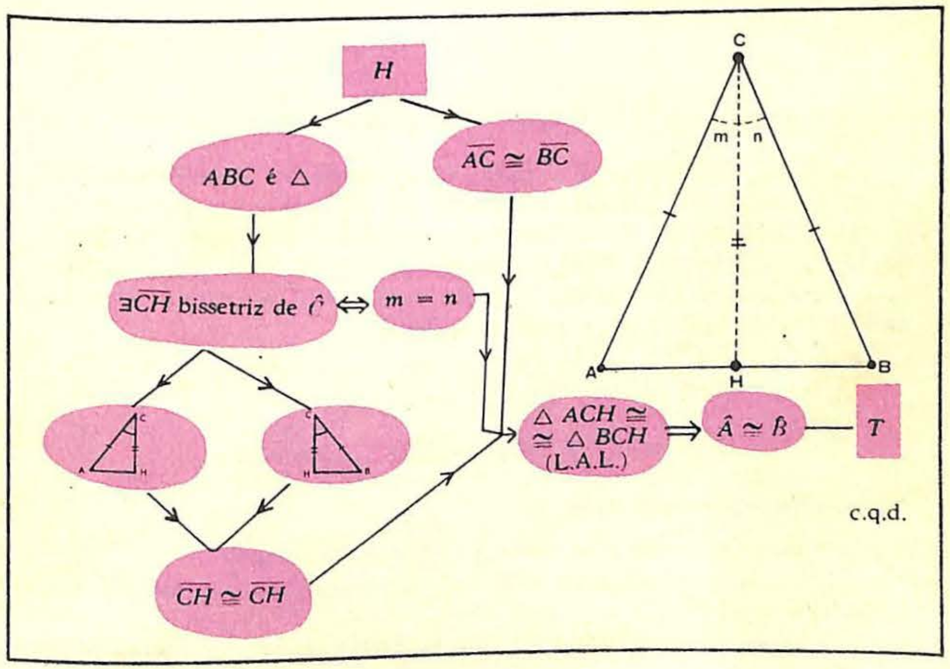
c.q.d.

Pode-se, também, efetuar a *demonstração* do teorema por meio de esquemas desenhados(**), coloridos de preferência, onde figuram uma série de *deduções* através de *construções* (—·—), de *equivalências* ($\Longleftrightarrow$) e de *implicações* ($\Longrightarrow$), que permitem *sair* da hipótese e *chegar* à tese.

Assim, por exemplo, voltando ao teorema:

"SE *um triângulo é isósceles*, ENTÃO *os ângulos da base são congruentes*"

sua demonstração será esquematizada da seguinte maneira:



(*) $\overline{CH} \cong \overline{CH}$ pela propriedade *reflexiva* da congruência de segmentos.

(**) Essa é a técnica preferida pela matemática e pedagogista francesa Lucienne Félix.

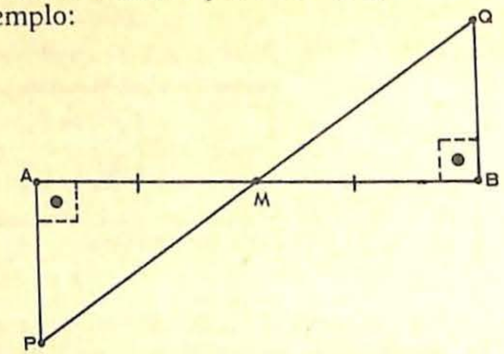
Outras vêzes o *teorema* pode ser proposto sob forma simplificada, como por exemplo:

Dados

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$

$\overline{PA} \perp \overline{AB}$

$\overline{QB} \perp \overline{AB}$



Provar

$\triangle AMP \cong \triangle BMQ$

DEMONSTRAÇÃO:

	Afirmações	*Justificações*
1)	$\hat{A} \cong \hat{B}$ (retos)	1) $\overline{PA} \perp \overline{AB}$, $\overline{QB} \perp \overline{AB}$
2)	$\overline{AM} \cong \overline{MB}$	2) Hipótese
3)	$A\hat{M}P \cong B\hat{M}Q$	3) o.p.v.
4)	$\triangle AMP \cong \triangle BMQ$	4) A.L.A.

c.q.d.

LEMBRETE AMIGO

Não há *formas rígidas* para você conduzir a demonstração de um teorema. As possíveis "regras" iniciais que o vão guiar numa demonstração muito se assemelham às usadas no desenvolvimento de um *jôgo*: quanto mais conhecidas, melhor você irá jogando.

Também na Geometria, quanto mais você fôr *demonstrando*, mais irá apurando o seu *espírito dedutivo!*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 82

Demonstre os seguintes teoremas:

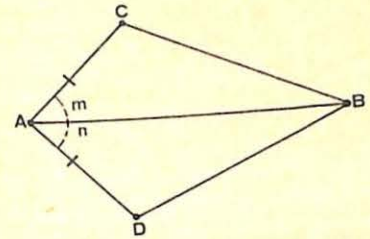
1.º) Se um triângulo é eqüilátero, então o triângulo é eqüiângulo.

2.º) Se $\overline{CH}$ é bissetriz do ângulo do vértice de um triângulo isósceles, então $\overline{CH}$ é também mediana e altura.

3.º) Se ABC é um triângulo, então a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°.

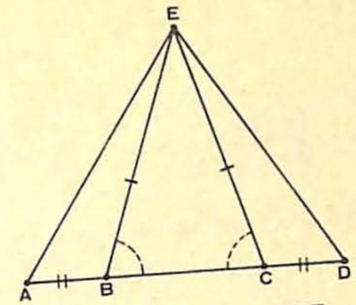
4.º) Se ABC é um triângulo, então a soma das medidas dos ângulos externos do triângulo (um para cada vértice) é igual a 360°.

5.º) Dados: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
$m = n$



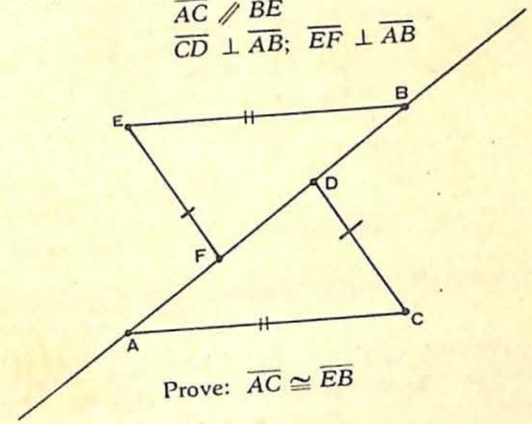
Prove: $\overline{CB} \cong \overline{DB}$

6.º) Dados: $\overline{BE} \cong \overline{CE}$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$



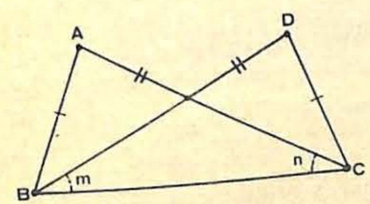
Prove: $\triangle ABE \cong \triangle DCE$

7.º) Dados: $\overline{CD} \cong \overline{EF}$
$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$; $\overline{EF} \perp \overline{AB}$



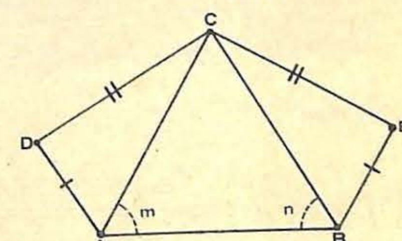
Prove: $\overline{AC} \cong \overline{EB}$

8.º) Dados: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\overline{AC} \cong \overline{DB}$



Prove: $m = n$

9.º) Dados: $\overline{AD} \cong \overline{BE}$
$\overline{DC} \cong \overline{EC}$
$m = n$

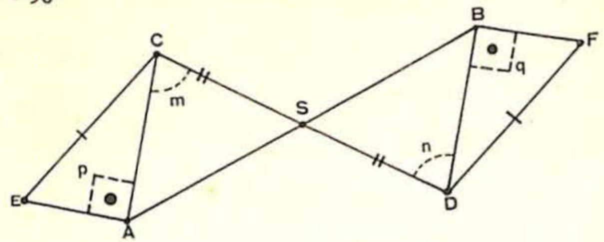


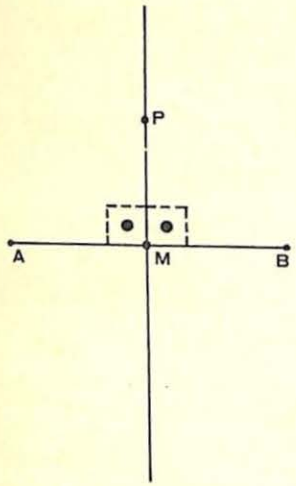
Prove: $\hat{D} \cong \hat{E}$

10.º) Dados: $\overline{SC} \cong \overline{SD}$; $\overline{CE} \cong \overline{DF}$

$m = n$; $p = q = 90°$

Prove: $\overline{AE} \cong \overline{BF}$





Observação: *Mediatriz* de um segmento é o nome que se atribui à *reta perpendicular* a êsse segmento, pelo seu *ponto médio*.

Como exercício, demonstre: "Todo ponto pertencente à *mediatriz* de um segmento é *eqüidistante* dos extremos dêsse segmento".

(*Sugestão:* Unindo-se P (pertencente à mediatriz) aos extremos A e B do segmento $\overline{AB}$, do qual M é ponto médio, formam-se os triângulos PMA e PMB, congruentes pelo caso L.A.L., e daí . . .)

Demonstre outro exercício, usando a mesma figura: "Se P é *eqüidistante* de A e B, então P pertence à *mediatriz* do segmento $\overline{AB}$.

12. *Teorema recíproco de outro teorema*

Quando dois teoremas são tais que a *hipótese do primeiro* é a *tese do segundo* e a *hipótese do segundo* é a *tese do primeiro*, os teoremas dizem-se *recíprocos* um do outro.

Formalmente, dois teoremas *recíprocos* um do outro se apresentariam assim:

se "isto", então "aquilo" e **se "aquilo", então "isto"**

Exemplos:

1.º) Teorema: *Se* um triângulo é isósceles, *então* os ângulos da base do triângulo são congruentes.

Teorema recíproco ou recíproca: *Se* os ângulos da base de um triângulo são congruentes, *então* o triângulo é isósceles.

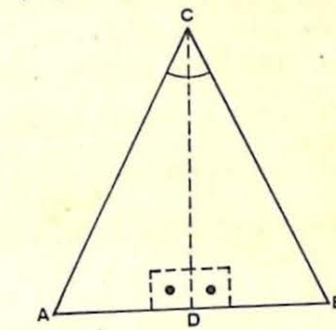
2.º) Teorema: *Se* dois ângulos são opostos pelo vértice, *então* êsses ângulos são congruentes.

Recíproca: *Se* dois ângulos são congruentes, *então* êsses ângulos são opostos pelo vértice.

Observação importante: A *recíproca* de um teorema pode *não ser verdadeira*. Nos exemplos dados a *recíproca* do 1.º Teorema é *verdadeira* (se os ângulos da base de um triângulo são congruentes, é certo que o triângulo é isósceles), enquanto que a *recíproca* do 2.º Teorema *não é verdadeira* (dois ângulos podem ser congruentes sem que sejam opostos pelo vértice).

Exercício Prático: Demonstre que *se* os ângulos da base de um triângulo são *congruentes, então* o triângulo é *isósceles*.

(*Sugestão:* Trace a bissetriz do ângulo do vértice e aplique o caso L.A.A$_0$ nos dois triângulos formados)



Quando a *hipótese* de um teorema contém *mais de um fato*, então tal teorema admite *mais de uma recíproca*. Exemplo.

Teorema: $H \begin{cases} \triangle\ ABC \\ \overline{CD} \perp \overline{AB} \\ \overline{CD}, \text{ bissetriz de } \hat{C} \end{cases}$

$T \ \{ \ \overline{AC} \cong \overline{BC}$

Nota: Demonstre êste teorema como exercício. (*Sugestão:* Use o caso A.L.A.)

Um *teorema recíproco* do teorema proposto:

$H \begin{cases} \triangle\ ABC \\ \overline{AC} \cong \overline{BC} \\ \overline{CD}, \text{ bissetriz de } \hat{C} \end{cases}$

$T \ \{ \ \overline{CD} \perp \overline{AB}$

(*Sugestão para a demonstração:* Use o caso L.A.L.)

Nota: "Se um triângulo é isósceles, então a bissetriz do ângulo do vértice é a altura relativa à base", é o enunciado dêste teorema.

Outro teorema recíproco do teorema proposto:

$H \begin{cases} \triangle\ ABC \\ \overline{AC} \cong \overline{BC} \\ \overline{CD} \perp \overline{AB} \end{cases}$

$T \ \{ \ \overline{CD} \text{ é bissetriz de } \hat{C}$

(*Sugestão para a demonstração:* Use o caso L.A.A$_0$)

Como exercício, enuncie êste teorema.

13. *Método indireto para se demonstrar um teorema*

As demonstrações estudadas até agora para provar que é *verdadeira* a informação dada por uma sentença da forma:

se "isto", *então* "aquilo"

obedecem ao chamado *método direto*, por conduzirem "diretamente" a dedução, a partir dos fatos da *hipótese*, das definições, dos postulados e de teoremas já conhecidos, até à *tese*.

O *método indireto* é uma outra maneira de conduzir a demonstração de um teorema: consiste em mostrar que a informação dada pelo teorema *não pode ser falsa*. Nestas condições, se a informação dada pelo teorema não pode ser falsa, então ela será *verdadeira*.

Há, pois, uma equivalência lógica entre as *sentenças condicionais*(*)

[*se* "isto", *então* "aquilo"] $\Longleftrightarrow$ [*se* "não aquilo", *então* "não isto"]

Exemplo:

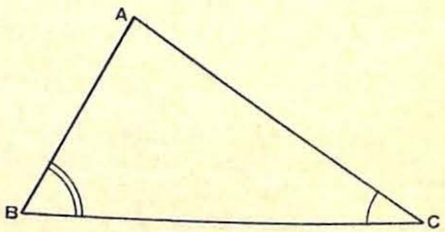
[*se* choveu, *então* a grama está molhada] $\Longleftrightarrow$ [*se* a grama não está molhada, *então* não choveu]

Usualmente, na aplicação do *método indireto*, diz-se: *negando-se a tese*, deve-se ter como conseqüência a *negação da hipótese*.

Observação: Quando, ao *se negar a tese* de um teorema, se tem como conseqüência a *negação de uma verdade já estabelecida*, em vez da negação da hipótese, o método "indireto" que conduz a demonstração é denominado: **método da redução ao absurdo**(**).

Exemplos:

1.º) Teorema — T.2 : *Se os dois ângulos de um triângulo são desiguais, então ao maior ângulo opõe-se o maior lado.*



$H \ [\ \hat{B} > \hat{C}$

$T \ [\ m(\overline{AC}) > m(\overline{AB})$

Demonstração (usando o *método indireto*):

Negando-se a *tese*: $(m(\overline{AC}) > m(\overline{AB}))$, temos que:

$m(\overline{AC}) = m(\overline{AB})$ *ou* $m(\overline{AC}) < m(\overline{AB})$

(*) Estas sentenças são denominadas *contra-positiva* uma da outra.
(**) Do latim: *reductio ad absurdum*.

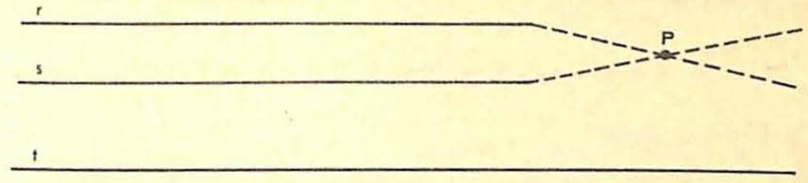
Se $m(\overline{AC}) = m(\overline{AB}) \Longleftrightarrow \triangle ABC$ é isósceles $\Longrightarrow \hat{B} \simeq \hat{C}$, que **nega** a *hipótese* $(\hat{B} > \hat{C})$.

Se $m(\overline{AC}) < m(\overline{AB}) \Longrightarrow \hat{B} < \hat{C}$ (resultado *já conhecido*: "ao maior lado opõe-se o maior ângulo") que, também, nega a *hipótese* $(\hat{B} > \hat{C})$. c.q.d.

2.º) Teorema — T.3 : *Se num plano duas retas são paralelas a uma terceira, então as duas retas são paralelas entre si.*

$H \begin{cases} r \parallel t \\ s \parallel t \end{cases}$

$T \ [\ r \parallel s$



Demonstração (usando o *método da redução ao absurdo*):

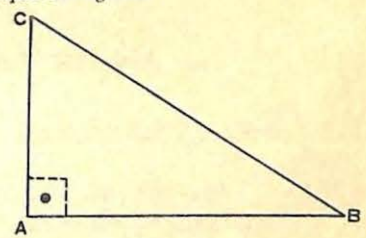
De fato: se $r \not\parallel s$, então $r \cap s = \{P\}$ por serem coplanares.

Mas isto é um *absurdo*, pois pelo ponto P estariam passando *duas retas paralelas* à reta t, o que contradiz o *postulado de Euclides*, aceito, em nossa Geometria, como *verdade!*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 83

Demonstre, usando o *método indireto*, os seguintes teoremas:

1.º) *Modêlo* — *Um triângulo retângulo tem dois ângulos que são agudos*



Querendo, pode-se colocá-lo sob a forma "se-então":

Se ABC é um triângulo retângulo, *então* o $\triangle ABC$ tem dois ângulos que são agudos.

$H \ [\ \hat{A}$, reto

$T \ [\ \hat{B}$ e $\hat{C}$, agudos

Negando-se a tese ($\hat{B}$ e $\hat{C}$, agudos) pode acontecer que:

$\hat{B}$ *não é agudo* e $\hat{C}$ *é agudo*; $\hat{B}$ *é agudo* e $\hat{C}$ *não é agudo*

ou $\hat{B}$ *não é agudo* e $\hat{C}$ *não é agudo*.

Como o $\hat{A}$ *é reto*, então de qualquer um dêsses casos resulta que:

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) > 180°$, o que é um *absurdo*, pois contradiz o resultado aceito como *verdade*: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$. c.q.d.

2.º) Um triângulo não pode ter dois ângulos retos.

3.º) Um dos ângulos da base de um triângulo isósceles não pode ser reto.

4.º) Se um triângulo é retângulo, então a hipotenusa é maior que qualquer cateto. (*Sugestão:* Lembrar que ao maior lado de um triângulo opõe-se o maior ângulo).

5.º) Se um triângulo não é isósceles, então a bissetriz do ângulo do vértice não é perpendicular ao lado oposto.

6.º) Se num plano duas retas são paralelas, então tôda reta coplanar que intercepta uma delas intercepta também a outra.

7.º) Se duas retas interceptadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

8.º) Traçando-se por um ponto fora de uma reta a perpendicular e uma oblíqua, o segmento da perpendicular é menor que o segmento da oblíqua.

LEMBRETE AMIGO

Guarde bem:

1. *se "isto", então "aquilo"* e *se "aquilo", então "isto"*

   é a forma com que se apresentam dois teoremas *recíprocos* um do outro;

2. a seguinte *equivalência*:

   [se "isto", então "aquilo"] $\Longleftrightarrow$ [se "não aquilo", então "não isto"]

   é empregada na demonstração que obedece ao *método indireto*.

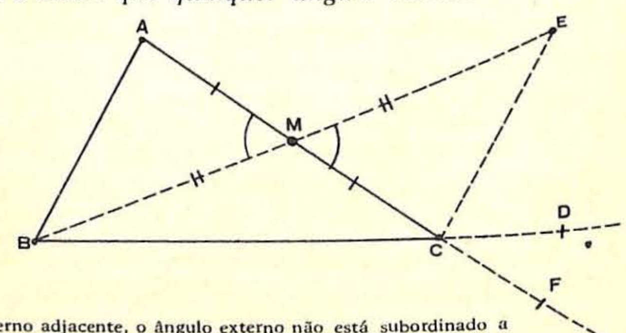
Alguns teoremas fundamentais

I — *Sôbre* TRIÂNGULOS

T.4 : **Teorema do ângulo externo:** *Se um ângulo é externo de um triângulo, então êle é maior que qualquer ângulo interno não-adjacente(*).*

$H \begin{cases} A\hat{C}D, \text{ externo} \\ \hat{A}, \hat{B}, \text{ internos não-adjacentes} \end{cases}$

$T \begin{cases} A\hat{C}D > \hat{A} \\ \text{e} \\ A\hat{C}D > \hat{B} \end{cases}$



(*) Com relação ao ângulo interno adjacente, o ângulo externo não está subordinado a nenhuma relação, podendo ser *menor*, *igual* ou *maior*, conforme o ângulo interno seja *obtuso*, *reto* ou *agudo*, respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações

1) $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ e $\overline{BM} \cong \overline{ME}$
2) $\triangle ABM \cong \triangle CME$
3) $\hat{A} \cong A\hat{C}E$
4) $A\hat{C}D > A\hat{C}E$
5) $A\hat{C}D > \hat{A}$

Justificações

1) Por construção
2) Caso L.A.L. (por quê?)
3) Ângulos correspondentes de triângulos congruentes
4) $m(A\hat{C}D) > m(A\hat{C}E)$ (o ponto E é *interior* ao $A\hat{C}D$)
5) $A\hat{C}E \cong \hat{A}$

c.q.d.

NOTA: Para provar que $A\hat{C}D > \hat{B}$, basta considerar o ângulo externo $B\hat{C}F$, que é o.p.v. ao ângulo $A\hat{C}D$, e repetir o mesmo processo para o lado $\overline{BC}$, do que resultará: $B\hat{C}F > \hat{B}$, ou ainda: $A\hat{C}D > \hat{B}$.

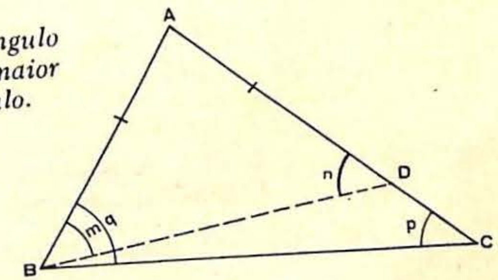
Conseqüências do T.4 .

É comum chamar-se COROLÁRIO a todo teorema que é conseqüência *imediata* de outro teorema. Os teoremas (corolários) que se seguem já foram verificados "experimentalmente" em Exercícios Exploratórios:

T.5 : *Se dois lados de um triângulo são desiguais, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo.*

$H \; \{ \; \overline{AC} > \overline{AB}$

$T \; \{ \; \hat{B} > \hat{C}$



DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações

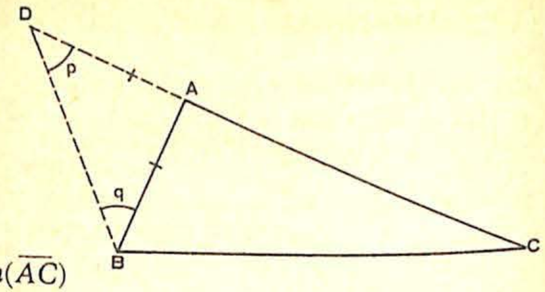
1. Construção, em $\overline{AC}$, de $\overline{AD} \cong \overline{AB}$
2. $\triangle ABD$ é isósceles
3. $m = n$
4. $n > p$
5. $m > p$
6. $q > m$
7. $q > p$ ou $\hat{B} > \hat{C}$

Justificações

1. Possível, porque $\overline{AC} > \overline{AB}$ (por hipótese)
2. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
3. Medidas dos ângulos da base de um $\triangle$ isósceles
4. Teorema do ângulo externo (T.4)
5. $m = n$ e $n > p$
6. O ponto D pertence ao interior do $A\hat{B}C$
7. Propriedade transitiva (se $q > m$ e $m > p$, então $q > p$)

c.q.d.

T.6 : *Se ABC é um triângulo, então a medida de qualquer lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.*



$$H \begin{cases} \overline{BC}, \text{ maior lado do} \\ \triangle\ ABC \end{cases}$$

$$T \ \{\ m(\overline{BC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{AC})$$

DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1) $\overline{DA} \cong \overline{AB}$	1) Por construção
2) $\triangle\ ABD$ é isósceles	2) $\overline{DA} \cong \overline{AB}$
3) $p = q$	3) Medidas dos ângulos da base de um $\triangle$ isósceles
4) $q < m(D\hat{B}C)$	4) O ponto A pertence ao *interior* do $D\hat{B}C$
5) $p < m(D\hat{B}C)$	5) $p = q$
6) $m(\overline{BC}) < m(\overline{DC})$	6) T.5
7) $m(\overline{BC}) < m(\overline{DA}) + m(\overline{AC})$	7) $m(\overline{DC}) = m(\overline{DA}) + m(\overline{AC})$
8) $m(\overline{BC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{AC})$	8) $\overline{DA} \cong \overline{AB}$

c.q.d.

Conseqüência: *A medida de qualquer lado de um triângulo é maior que a diferença das medidas dos outros dois.*

De fato, como: $m(\overline{BC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{AC})$

então: $m(\overline{AB}) > m(\overline{BC}) - m(\overline{AC})$

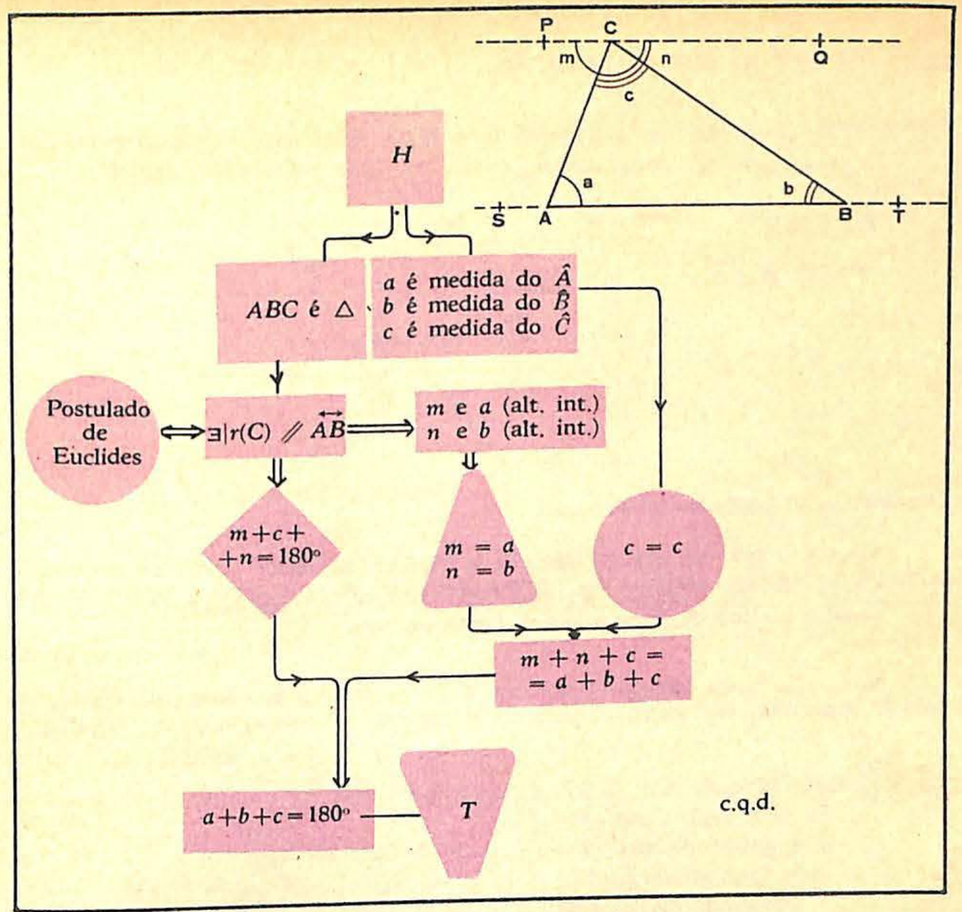
UM BOM EXERCÍCIO...: Verifique experimentalmente e depois tente demonstrar que:

"*Se* dois triângulos possuem dois lados respectivamente congruentes e os ângulos, determinados por êsses lados, desiguais, *então* os terceiros lados são desiguais e o maior dêles é o que se opõe ao maior dos ângulos."

Vale a *recíproca*. Demonstre, usando o método indireto.

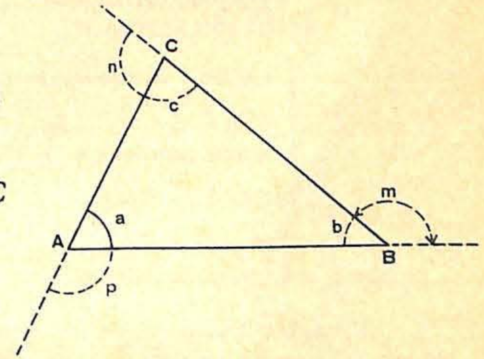
T.7 : *A soma das medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.*

NOTA: Êste teorema já foi provado (pág. 210). Como exercício, vamos demonstrá-lo novamente, por intermédio de um *esquema-desenho*.



Conseqüência

T.8 : *A soma das medidas, em graus, dos ângulos externos(*) de um triângulo é igual a 360°.*



$$H \begin{cases} m,\ n \text{ e } p, \text{ medidas dos} \\ \text{ângulos externos do } \triangle\ ABC \end{cases}$$

$$T \ \{\ m + n + p = 360°$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como: $m + b = 180°$ (resultado conhecido)
$n + c = 180°$
$p + a = 180°$

$$\overline{(m+n+p)+(a+b+c) = 540°} \iff (m+n+p) = 540° - (a+b+c)$$

ou $m+n+p = 540° - 180°$ (porque: $a+b+c = 180°$)

ou $m+n+p = 360°$

c.q.d.

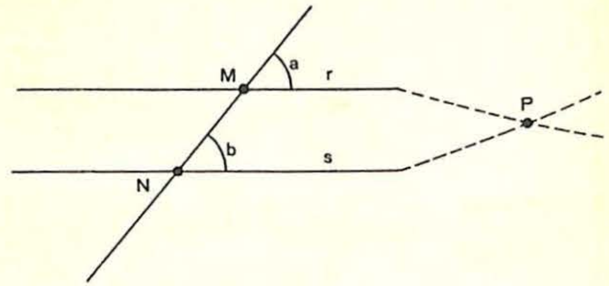
(*) Subentende-se: um para cada vértice.

II — *Sôbre* RETAS PARALELAS

T.9 : *Se uma transversal forma com duas retas coplanares ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas.*

H [$a = b$

T [$r \,/\!/\, s$



DEMONSTRAÇÃO (método indireto):

Negando a tese: se $r \not\parallel s$, então $r \cap s = [P]$ e no "triângulo" MNP que se formaria teríamos: $a > b$ (pelo teorema do ângulo externo), o que viria *negar a hipótese* ($a = b$)

Logo, r e s não se interceptam e, portanto, $r \,/\!/\, s$.

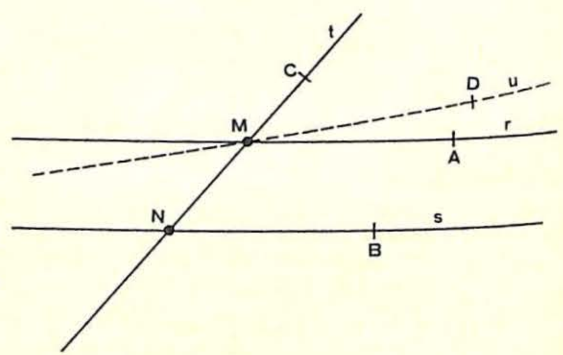
c.q.d.

NOTA: De forma análoga demonstra-se que os ângulos formados pela transversal com as duas retas coplanares são *alternos internos* ou *alternos externos*.

T.10 (*Recíproco* do T.9): *Se duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

$$H \begin{cases} r \,/\!/\, s \text{ e } t \text{ transversal} \\ C\hat{M}A \text{ e } C\hat{N}B \text{ são correspondentes} \end{cases}$$

T [$C\hat{M}A \cong C\hat{N}B$



DEMONSTRAÇÃO (método indireto):

Negando a tese: se $C\hat{M}A$ não é congruente a $C\hat{N}B$, então pode-se traçar, por M, a reta u, de modo que $C\hat{M}D \cong C\hat{N}B$. Nestas condições, pelo T.9, a reta $u \,/\!/\, s$. Mas êste resultado **contradiz** o *postulado de Euclides*, pois por M estariam passando *duas* retas paralelas (u e r) à reta s. Para evitar tal contradição, a reta u deve *coincidir* com a reta r e, portanto: $C\hat{M}D \cong C\hat{M}A$ ou $C\hat{M}A \cong C\hat{N}B$.

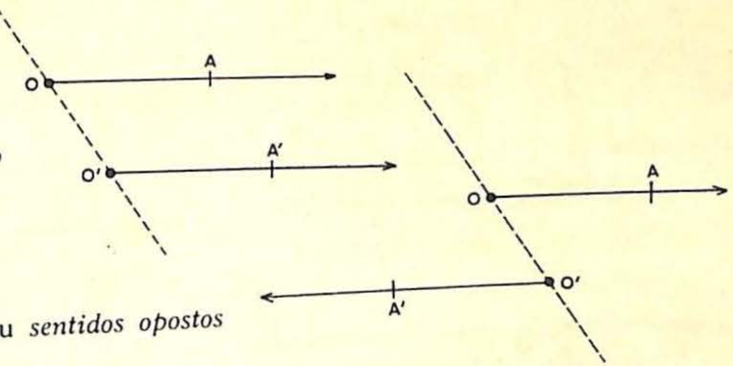
c.q.d.

III — *Sôbre* ÂNGULOS

Inicialmente: duas semi-retas paralelas $\vec{OA}$ e $\vec{O'A'}$ possuem:

o *mesmo sentido*

ou *sentidos opostos*



conforme pertençam ao mesmo semi-plano ou a semi-planos opostos, em relação à reta $\overleftrightarrow{OO'}$.

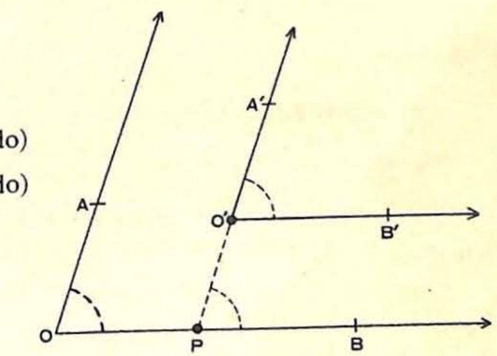
T.11 : *Se dois ângulos têm os lados respectivamente paralelos, então os ângulos são congruentes ou suplementares.*

Podem ocorrer *três* possibilidades quanto ao *sentido* dos lados:

1.º) Os lados são paralelos e de *mesmo sentido*; neste caso os ângulos são *congruentes*.

$$H \begin{cases} \vec{OA} \,/\!/\, \vec{O'A'} \text{ (mesmo sentido)} \\ \vec{OB} \,/\!/\, \vec{O'B'} \text{ (mesmo sentido)} \end{cases}$$

T [$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$



DEMONSTRAÇÃO:

De fato: $\overleftrightarrow{O'A'} \cap \overleftrightarrow{OB} = [P]$

Como:

$A\hat{O}B$ e $A'\hat{P}B$ são *correspondentes* relativamente às paralelas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{O'A'}$ $\Longrightarrow$ $A\hat{O}B \cong A'\hat{P}B$ (T.10)

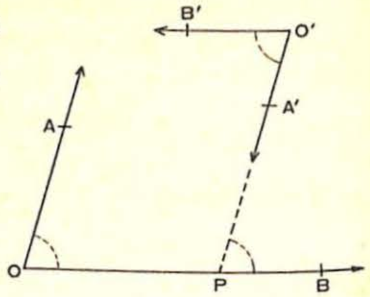
$A'\hat{P}B$ e $A'\hat{O}'B'$ são *correspondentes* relativamente às paralelas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{O'B'}$ $\Longrightarrow$ $A'\hat{P}B \cong A'\hat{O}'B'$ (T.10)

$\Longrightarrow$ $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$ (propriedade *transitiva* da congruência) c.q.d.

2.º) Os lados são paralelos e de *sentidos opostos*; ainda neste caso os ângulos são *congruentes*.

$$H\ \left\{\begin{array}{l}\vec{OA} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'A'} \text{ (sentidos opostos)}\\ \vec{OB} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'B'} \text{ (sentidos opostos)}\end{array}\right.$$

$$T\ \{\ A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$$



DEMONSTRAÇÃO:

Seguindo "marcha" análoga ao 1.º caso:

$$\overleftrightarrow{O'A'} \cap \overleftrightarrow{OB} = \{P\}$$

Como:

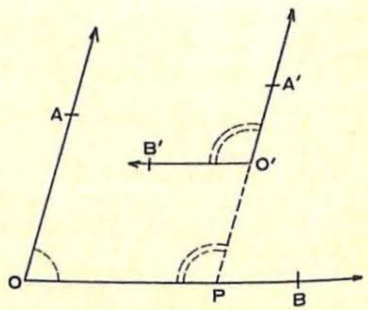
$$\left.\begin{array}{l}A\hat{O}B \text{ e } A'\hat{P}B \text{ são correspondentes} \Longrightarrow A\hat{O}B \cong A'\hat{P}B\\ A'\hat{P}B \text{ e } A'\hat{O}'B' \text{ são alternos internos} \Longrightarrow A'\hat{P}B \cong A'\hat{O}'B'\end{array}\right\}\ A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$$

c.q.d.

3.º) Dois lados paralelos têm o *mesmo sentido* e dois têm *sentidos opostos*; neste caso os ângulos são *suplementares*.

$$H\ \left\{\begin{array}{l}\vec{OA} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'A'} \text{ (mesmo sentido)}\\ \vec{OB} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'B'} \text{ (sentidos opostos)}\end{array}\right.$$

$$T\ \{\ m(A\hat{O}B) + m(A'\hat{O}'B') = 180^\circ$$



DEMONSTRAÇÃO:

Da mesma forma: $\overleftrightarrow{O'A'} \cap \overleftrightarrow{OB} = \{P\}$

Como:

$m(A\hat{O}B) + m(O\hat{P}A') = 180^\circ$ (ângulos colaterais internos relativamente a $\vec{OA} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'A'}$)

e sendo:

$$m(O\hat{P}A') = m(B'\hat{O}'A') \text{ (correspondentes)}$$

vem:

$$m(A\hat{O}B) + m(A'\hat{O}'B') = 180^\circ$$

c.q.d.

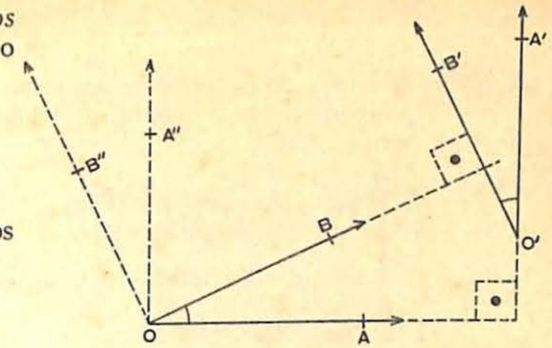
T.12 : *Se dois ângulos têm os lados respectivamente perpendiculares, então os ângulos são congruentes ou suplementares.*

Temos *três* casos:

1.º) Os ângulos são *ambos agudos* ou *ambos obtusos*; neste caso os ângulos são *congruentes*

$$H\ \left\{\begin{array}{l}\vec{OA} \perp \vec{O'A'}\\ \vec{OB} \perp \vec{O'B'}\\ A\hat{O}B \text{ e } A'\hat{O}'B'\text{, agudos}\end{array}\right.$$

$$T\ \{\ A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$$



DEMONSTRAÇÃO:

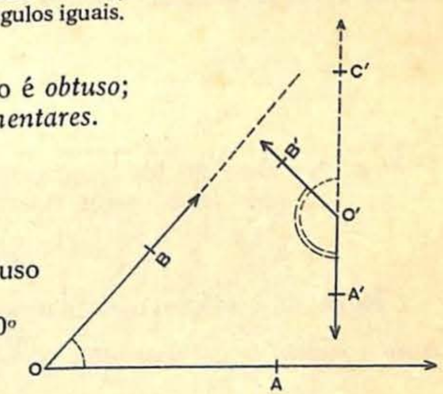
$$\left.\begin{array}{l}\text{Traçando por } O\text{: } \left\{\begin{array}{l}\vec{OA''} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'A'}\\ \vec{OB''} \mathbin{/\!\!/} \vec{O'B'}\end{array}\right\} \Longrightarrow A''\hat{O}B'' \cong A'\hat{O}'B' \text{ (lados } /\!\!/ \text{s de mesmo sentido)}\\ \text{Como: } A''\hat{O}B'' \text{ e } A\hat{O}B \text{ têm o mesmo complemento } (A''\hat{O}B) \Longrightarrow A\hat{O}B \cong A''\hat{O}B''\end{array}\right\} \Longrightarrow A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'$$

NOTA: No caso de ambos os ângulos serem *obtusos*, então a congruência decorrerá do fato de serem tais ângulos *suplementos* de ângulos iguais.

2.º) Um dos ângulos é *agudo* e o outro é *obtuso*; neste caso os ângulos são *suplementares*.

$$H\ \left\{\begin{array}{l}\vec{OA} \perp \vec{O'A'}\\ \vec{OB} \perp \vec{O'B'}\\ A\hat{O}B\text{, agudo e } A'\hat{O}'B'\text{, obtuso}\end{array}\right.$$

$$T\ \{\ m(A\hat{O}B) + m(A'\hat{O}'B') = 180^\circ$$



DEMONSTRAÇÃO:

Como: $m(A'\hat{O}'B') + m(B'\hat{O}'C') = 180^\circ$ (resultado conhecido)

e $B'\hat{O}'C' \cong A\hat{O}B$ (1.º caso)

então: $m(A\hat{O}B) + m(A'\hat{O}'B') = 180^\circ$

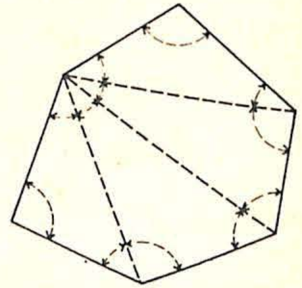
c.q.d.

3.º) Ambos os ângulos são *retos*; neste caso os ângulos são *congruentes* e *suplementares*.

A demonstração é imediata, pois tendo os ângulos a mesma medida (90°) êles são *congruentes* e *suplementares*.

IV — *Sôbre* POLÍGONOS CONVEXOS

T.13: *A soma das medidas, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a tantas vêzes 180° quantos são os lados menos dois.*



$$H \begin{cases} S_i: \text{ soma das medidas dos ângulos internos} \\ n: \text{ n.º de lados do polígono} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; S_i = (n-2)180°$$

DEMONSTRAÇÃO:

Um polígono convexo de n lados decompõe-se, a partir de um vértice, em $n-2$ triângulos (no caso de $n = 6$, como na figura, tem-se 4 triângulos). Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é igual à soma das medidas dos ângulos internos de *todos os triângulos* em que êle ficou decomposto e como para cada triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é 180°, segue-se que para $(n-2)$ triângulos resultará a seguinte *soma*: $(n-2) \times 180°$. Logo:

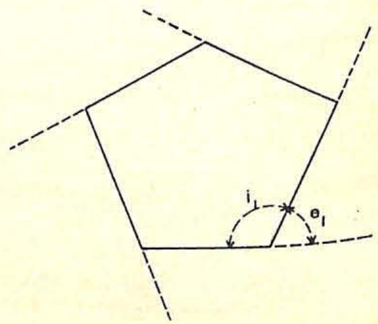
$$\boxed{S_i = (n-2)180°} \qquad \text{c.q.d.}$$

Prática: No caso do *hexágono* (figura), a soma das medidas, em graus, de seus ângulos internos será:

$$S_i = (6-2)180° = 4 \times 180° = 720°$$

NOTA: Se o polígono convexo de n lados fôr *eqüiângulo* (*todos* os ângulos iguais), então a *medida* de qualquer dêles é $\dfrac{(n-2)180°}{n}$

T.14: *A soma das medidas, em graus, dos ângulos externos(*) de um polígono convexo é sempre igual a 360°.*



$$H \begin{cases} S_e: \text{ soma das medidas dos ângulos externos} \\ n: \text{ n.º de lados do polígono} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; S_e = 360°$$

(*) Subentende-se: um para cada vértice.

DEMONSTRAÇÃO:

Cada ângulo externo é o suplemento do ângulo interno adjacente, isto é (na figura):

$$i_1 + e_1 = 180°$$

para *cada* vértice do polígono. Como são n vértices, segue-se que a soma *total*, incluindo *todos* os ângulos internos (S_i) e *todos* os externos em causa (S_e), será:

$$S_i + S_e = 180°n \iff S_e = 180°n - S_i$$

Substituindo S_i pelo seu valor ($(n-2)\,180°$), obtemos para S_e:

$$S_e = 180°n - (n-2)180° = 180°n - 180°n + 360°$$

$$\boxed{S_e = 360°} \qquad \text{c.q.d.}$$

Prática: No caso do *pentágono* (figura), a soma das medidas, em graus, de seus ângulos externos é igual a 360°.

OBSERVAÇÃO: Se o polígono de n lados fôr *eqüiângulo*, cada ângulo externo mede $\dfrac{360°}{n}$.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 84

1. Preencha os claros da seguinte tabela:

Polígonos	S_i	S_e
triângulo......	...	360°
quadrilátero ...	360°	...
pentágono.....	...	360°
hexágono......	720°	...
octógono.......	...	360°
decágono......	...	...
dodecágono....	1800°	...
icoságono......	...	360°

2. Responda às seguintes perguntas:

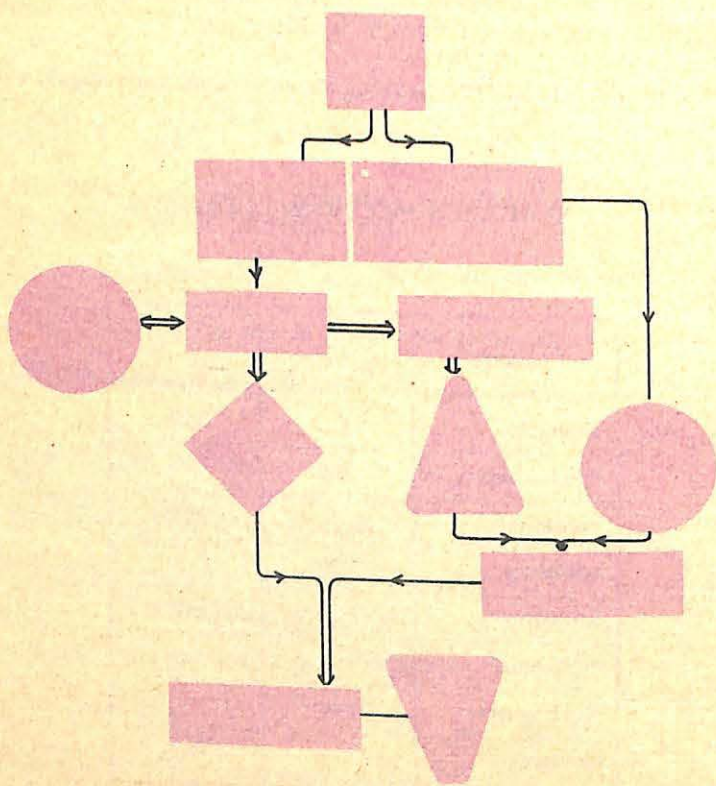
1.ª) Quantos lados tem um polígono eqüiângulo, onde o $S_i = 900°$?
2.ª) Quantos lados tem um polígono eqüiângulo, cujo ângulo externo mede $72°$?
3.ª) Quanto vale o S_e de um polígono de 100 lados?
4.ª) Qual é o polígono em que S_e vale o dôbro do S_i?

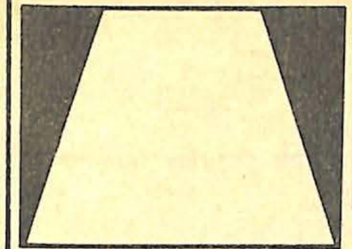
LEMBRETE AMIGO

Não "decore" demonstração de teorema!

Valorize-se, usando qualquer dos métodos apresentados.

Dê o seu próprio "toque" ao empregar tais métodos e você estará realizando-se em Matemática!



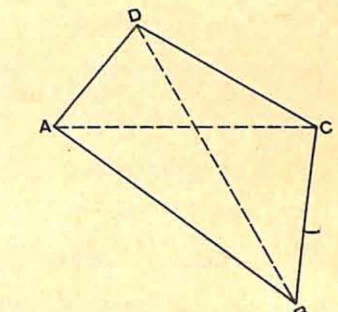


3.ª Parte: - quadriláteros: paralelogramos e trapézios
- teoremas fundamentais

Quadriláteros: paralelogramos e trapézios

QUADRILÁTEROS

1. *Definição*



Quadrilátero(*) é o polígono de *quatro lados*. Dois lados ou dois ângulos não-consecutivos, de um quadrilátero, dizem-se *opostos*. Assim, no *quadrilátero ABCD* (figura), temos:

lados opostos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
ângulos opostos: $\hat{A}$ e $\hat{C}$; $\hat{B}$ e $\hat{D}$

Você já sabe também que:

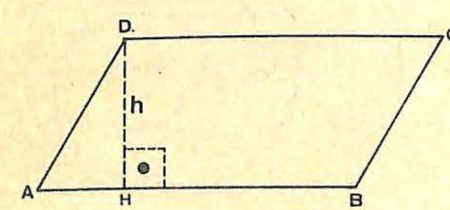
$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são *diagonais*; $S_i = 360°$; $S_e = 360°$

Os principais quadriláteros, que serão estudados a seguir, são os *paralelogramos* e os *trapézios*.

PARALELOGRAMOS

2. *Definição*

Paralelogramo *é o quadrilátero que possui os dois pares de lados opostos respectivamente* **paralelos.**

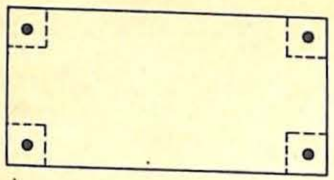


No paralelogramo $ABCD$ da figura o segmento $\overline{DH}$, *perpendicular* ao lado $\overline{AB}$, chama-se *altura* do paralelogramo. Na figura, temos: $m(\overline{DH}) = h$, e o lado $\overline{AB}$ é tomado como *base*.

(*) Subentende-se: *convexo*.

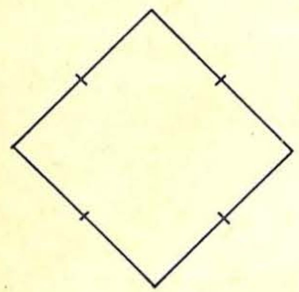
Costumam receber nomes especiais os seguintes paralelogramos:

1. *retângulo:*



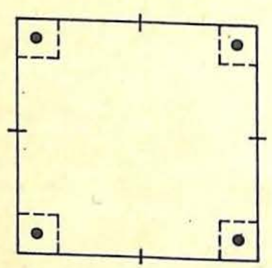
← quando possui os *quatro ângulos internos retos*

2. *losango:*



← quando possui os *quatro lados de mesmo comprimento*

3. *quadrado:*

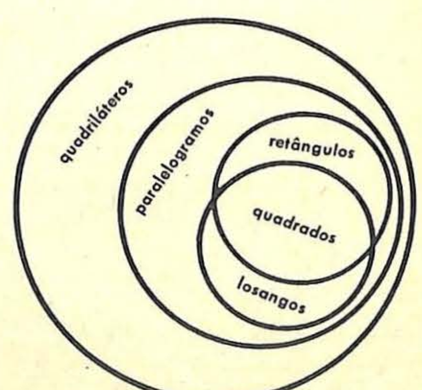


← quando possui os *quatro lados de mesmo comprimento* e os *quatro ângulos internos retos*

Logo: os *quadrados* são, ao mesmo tempo, *retângulos* e *losangos*.

Na linguagem dos *conjuntos*:

os quadrados constituem o *conjunto-intersecção* do conjunto dos retângulos com o conjunto dos losangos.



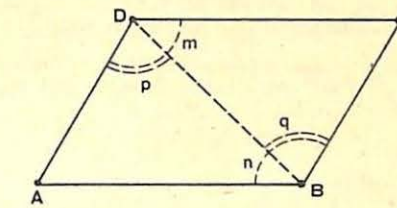
T.15 : *Se um quadrilátero é um paralelogramo, então:*

1.º) *os lados opostos são congruentes*

2.º) *os ângulos opostos são congruentes.*

$$H \begin{cases} \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \\ \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD},\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \hat{A} \cong \hat{C},\ \hat{B} \cong \hat{D} \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Basta traçar uma diagonal ($\overline{DB}$, por exemplo) e provar que os triângulos formados ($\triangle ADB$ e $\triangle CBD$) são *congruentes* (caso A.L.A., e não se esqueça de que $m = n$, por serem medidas de ângulos alternos internos formados por duas retas paralelas com uma transversal . . .).

Segue-se, então, que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$, $\hat{B} \cong \hat{D}$.

c.q.d.

NOTA: A prova dêste teorema inclui a demonstração de mais os seguintes fatos:

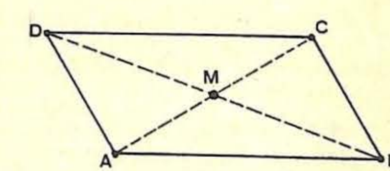
1) "Um paralelogramo é dividido em dois triângulos congruentes por qualquer de suas diagonais"

2) "Segmentos de retas paralelas compreendidos entre retas paralelas são congruentes"

T.16 : *Se um quadrilátero é um paralelogramo, então as diagonais interceptam-se ao meio.*

$$H \begin{cases} \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \\ \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{DM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AM} \cong \overline{MC} \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Basta provar que: $\triangle AMB \cong \triangle DMC$ (caso A.L.A., usando o T.15). O resto você já aprendeu como fazer.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 85

Enuncie e demonstre as *recíprocas* dos teoremas T.15 e T.16

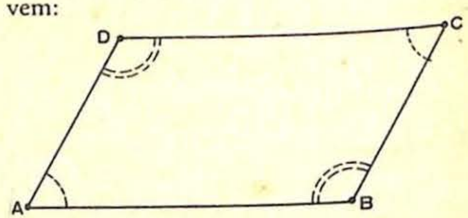
Como *modêlo*, tratemos das *recíprocas* do T.15:

1. Se um quadrilátero(*) possui os lados opostos congruentes dois a dois, então o quadrilátero é um paralelogramo.

   (*Sugestão* para demonstração: Trace a diagonal, ... use o L.L.L.)

2. Se um quadrilátero possui os ângulos opostos congruentes dois a dois, então o quadrilátero é um paralelogramo.

   (*Sugestão* para demonstração: Como $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$ bem como $\hat{B} \cong \hat{D}$, por hipótese, vem:



$$2.m(\hat{A}) + 2.m(\hat{B}) = 360°$$

ou

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180°,$$

isto é, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares.

Sendo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ colaterais internos em relação às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, interceptadas pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$, segue-se que: $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$.

Da mesma forma, prova-se que $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e, portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 86

1. Demonstre: Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
2. Demonstre: O quadrilátero que possui dois lados opostos congruentes e paralelos é um paralelogramo.
3. Demonstre: Os segmentos das perpendiculares baixadas dos vértices opostos de um paralelogramo a uma mesma diagonal são congruentes.
4. Demonstre: As bissetrizes dos ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas.
5. Demonstre: As bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo formam um retângulo.
6. Os ângulos consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente, 42° e 138°. Quanto mede cada um dos outros ângulos?
7. Num paralelogramo um ângulo agudo é a quinta parte do ângulo obtuso. Quanto medem em graus os ângulos dêsse paralelogramo?
8. Num paralelogramo o ângulo obtuso é o dôbro do ângulo agudo. Calcule, em graus, as medidas dêsses ângulos.

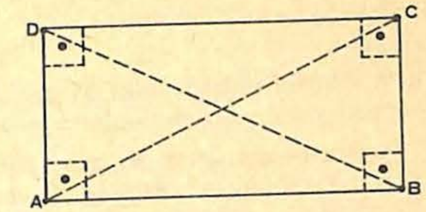
(*) Subentende-se: quadrilátero convexo.

UMA PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA DOS RETÂNGULOS

T.17 : *As diagonais de um retângulo são congruentes.*

$$H \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \text{ (retos)} \\ \overline{AC} \text{ e } \overline{BD}, \text{ diagonais} \end{cases}$$

$$T \;\{\; \overline{AC} \cong \overline{BD}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Basta provar que: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (por quê?) e daí $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
(L.A.L.)

c.q.d.

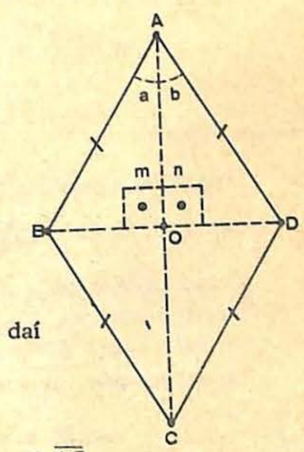
Recíproca do T.17: enuncie e demonstre (... usando o caso L.L.L. e a propriedade dos ângulos colaterais internos formados por duas paralelas e uma transversal).

UMA PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA DOS LOSANGOS

T.18 : *As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos.*

$$H \;\{\; \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

$$T \begin{cases} \overline{AC} \perp \overline{BD} \\ a = b \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Basta provar que: $\triangle BOA \cong \triangle DOA$ (por quê?) e daí
(L.L.L.)

$m = n \implies \overline{AC} \perp BD$

$a = b \implies \overrightarrow{AC}$, bissetriz que contém a diagonal $\overline{AC}$.

c.q.d.

Recíproca do T.18: enuncie e demonstre como exercício.

PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DOS QUADRADOS

Sendo o quadrado um paralelogramo que possui *todos os lados congruentes* e *todos os ângulos retos*, segue-se que o quadrado é ao mesmo tempo:

retângulo e *losango*

e, portanto, possui *tôdas as propriedades* dessas figuras: as diagonais são congruentes, perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos!

Recìprocamente, se num *paralelogramo* as diagonais são congruentes e perpendiculares entre si ou as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos e são congruentes, então o paralelogramo é um *quadrado*.

UMA IMPORTANTE APLICAÇÃO NOS TRIÂNGULOS

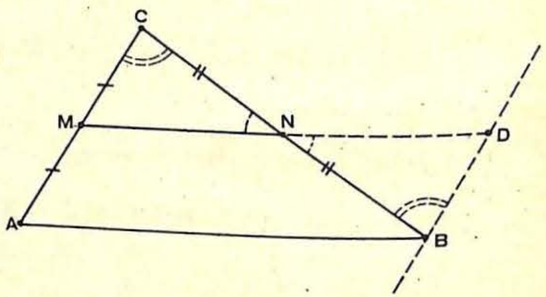
T.19 : *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:*

1.º) *é paralelo ao terceiro lado*

2.º) *e sua medida é igual à metade da medida(*) do terceiro lado.*

$$H \begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MC} \\ \overline{BN} \cong \overline{NC} \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{MN} \,/\!\!/\, \overline{AB} \\ m(\overline{MN}) = \dfrac{m(\overline{AB})}{2} \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Traçando-se por B a paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ até interceptar $\overleftrightarrow{MN}$ em D, obtém-se:

$$\triangle BND \cong \triangle CNM \quad \text{(A.L.A., por quê?)}$$

Como: $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ e $\overline{MC} \cong \overline{BD}$, segue-se que $\overline{AM} \cong \overline{BD}$ (propriedade transitiva) e sendo, por construção, $\overline{BD} /\!\!/ \overline{AM}$, o quadrilátero $ABDM$ é um *paralelogramo* (Exercício 2-Grupo 86). Logo: $\overline{MD} /\!\!/ \overline{AB}$ e, portanto: $\overline{MN} /\!\!/ \overline{AB}$ (1.ª parte da tese).

Como, também, $\overline{MN} \cong \overline{ND}$ ($\triangle CMN \cong \triangle BND$), conclui-se que:

$$m(\overline{AB}) = m(\overline{MD}) = 2.m(\overline{MN})$$

ou

$$m(\overline{MN}) = \frac{m(\overline{AB})}{2} \quad \text{(2.ª parte da tese)}$$

c.q.d.

(*) Subentende-se, *como sempre*, em relação à *mesma unidade*.

Conseqüência do T.19: *O segmento traçado pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo, paralelamente a um segundo lado, divide o terceiro lado ao meio.*

De fato, pelo T.19, o segmento que tem as extremidades nos pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (figura acima) é *paralelo* a $\overline{AB}$. Pelo *postulado de Euclides* é **única** a paralela a $\overline{AB}$ por M e, portanto, o segmento considerado coincide com $\overline{MN}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 87

1. Demonstre: Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então o paralelogramo é retângulo.
2. Demonstre: São congruentes os segmentos das perpendiculares traçadas dos vértices opostos de um retângulo a uma mesma diagonal.
3. Demonstre: Unindo-se, consecutivamente, os pontos médios dos lados de um retângulo, obtém-se um losango.
4. Demonstre: Os segmentos que unem, ordenadamente, os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero formam um paralelogramo. (*Sugestão:* trace as diagonais e aplique o T.19)
5. Calcule, em graus, as medidas dos ângulos de um losango, sabendo que uma de suas diagonais forma com um dos lados um ângulo que mede 40º.
6. Num losango o ângulo formado pela bissetriz com um dos lados mede 50º. Calcule a medida dos demais ângulos.
7. Quanto mede um ângulo externo de um retângulo?
8. As diagonais de um losango medem, respectivamente, 5cm e 3cm. Dê um processo para construir êsse losango.

LEMBRETE AMIGO

Para demonstrar que um quadrilátero convexo é um *paralelogramo*, basta provar *um* dos seguintes fatos:

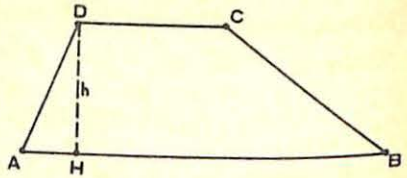
1) os lados opostos são paralelos;
2) os ângulos opostos são congruentes;
3) os lados opostos são congruentes;
4) as diagonais se dividem ao meio.

TRAPÉZIOS

3. Definição

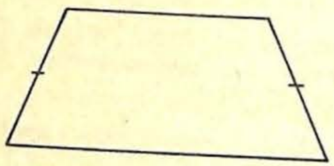
Trapézio *é o quadrilátero que possui* **dois,** *e apenas dois, de seus lados* **paralelos.**

Os dois lados paralelos são chamados *bases*, maior e menor, e o segmento $\overline{DH} \perp \overline{AB}$, *altura* do trapézio.



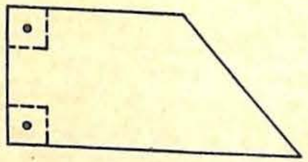
Os trapézios são denominados:

isósceles $\Longleftrightarrow$



quando têm os lados não-paralelos *congruentes*

retângulo $\Longleftrightarrow$



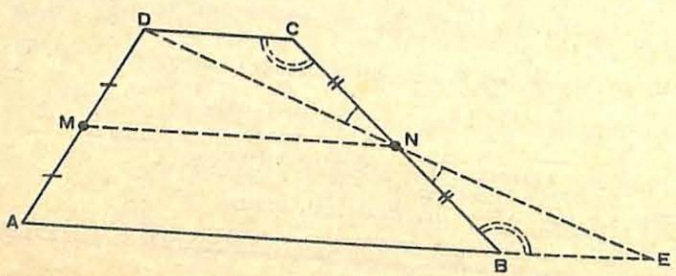
quando tem *dois ângulos retos*

TEOREMAS FUNDAMENTAIS SÔBRE TRAPÉZIOS

T.20 : *O segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio:*

1.°) é paralelo às bases

2.°) tem por medida a semi-soma das medidas das bases.



$$H \begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MD} \\ \overline{BN} \cong \overline{NC} \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{AB} \\ m(\overline{MN}) = \dfrac{m(\overline{AB}) + m(\overline{DC})}{2} \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Traça-se $\overleftrightarrow{DN}$, tal que: $\overleftrightarrow{DN} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{E\}$

Tem-se, assim: $\triangle DCN \cong \triangle EBN$ (A.L.A., por quê?). Logo:

$$\overline{DN} \cong \overline{NE} \quad \text{e} \quad \overline{DC} \cong \overline{BE}$$

No $\triangle DAE$ vem, pelo T. 19:

$$\overline{MN} \parallel \overline{AE} \Longrightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \text{ (1.ª parte da tese)}$$

e

$$m(\overline{MN}) = \frac{m(\overline{AE})}{2} = \frac{m(\overline{AB})+m(\overline{BE})}{2} = \frac{m(\overline{AB})+m(\overline{DC})}{2} \text{ (2.ª parte da tese)}$$

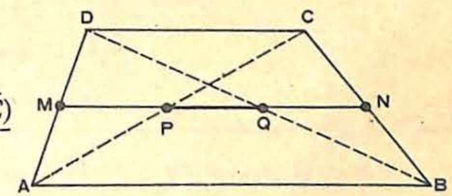
c.q.d.

NOTA: O segmento $\overline{MN}$ é denominado *base média* do trapézio.

T.21 : *As diagonais de um trapézio determinam na base média um segmento cuja medida é a semidiferença das medidas das bases.*

$$H \begin{cases} \overline{MN}, \text{ base média do} \\ \text{trapézio } ABCD \end{cases}$$

$$T \; \{ \; m(\overline{PQ}) = \frac{m(\overline{AB}) - m(\overline{DC})}{2}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Com efeito:

$$\triangle ABD \Longrightarrow m(\overline{MQ}) = \frac{m(\overline{AB})}{2} \text{ (T.19 e conseqüência)}$$

$$\triangle CDA \Longrightarrow m(\overline{MP}) = \frac{m(\overline{DC})}{2} \text{ (idem)}$$

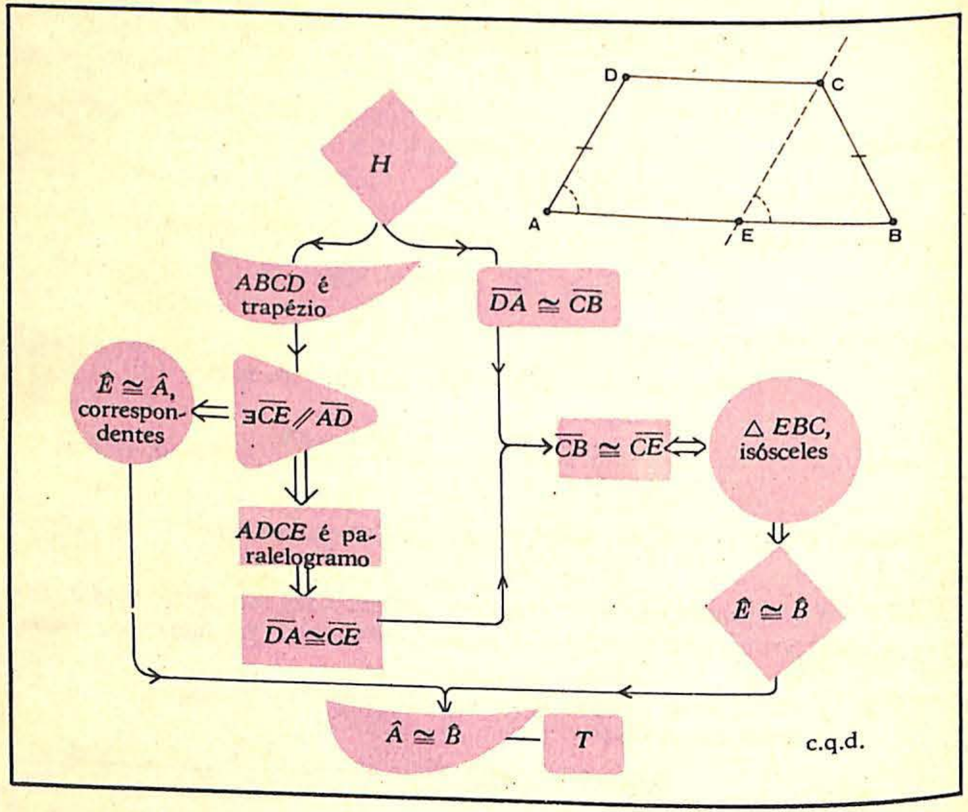
Como: $m(\overline{PQ}) = m(\overline{MQ}) - m(\overline{MP})$, vem:

$$m(\overline{PQ}) = \frac{m(\overline{AB})}{2} - \frac{m(\overline{DC})}{2} = \frac{m(\overline{AB}) - m(\overline{DC})}{2}$$

c.q.d.

UMA PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA DO TRAPÉZIO ISÓSCELES

T.22 : *Se um trapézio é isósceles, então os ângulos contíguos à mesma base são congruentes.*



NOTA: $\hat{D} \cong \hat{C}$, como *suplementos* de ângulos congruentes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 88

1. Demonstre: num trapézio isósceles as diagonais são congruentes.
2. Num trapézio a soma das medidas de dois ângulos opostos é igual a 176° e uma delas excede a outra de 34°. Calcule as medidas dos ângulos dêsse trapézio.
3. Num trapézio os dois ângulos da base maior medem, respectivamente, 36° e 45°20'. Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos outros dois ângulos.
4. Num trapézio retângulo, a medida, em graus, de um dos ângulos agudos é os 2/5 do ângulo reto. Qual é a medida do outro ângulo?
5. O ângulo formado pelas bissetrizes do ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior de um trapézio retângulo mede 92°. Calcule as medidas dos ângulos agudo e obtuso dêsse trapézio.

4.ª Parte:
- circunferência; teoremas fundamentais
- arcos de circunferência; medida
- ângulos relacionados com arcos; medida

Circunferência; teoremas fundamentais

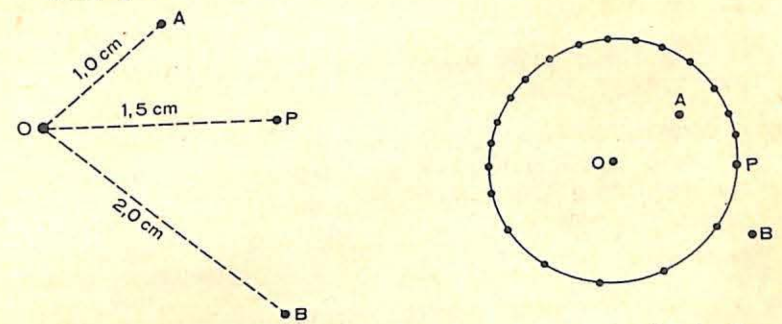
1. *Conceito*

Na sua fôlha de desenho fixe um ponto O e procure determinar, nessa fôlha:

1.°) um ponto P que tenha 1,5cm de *distância* de O;

2.°) um ponto A que tenha 1cm de *distância* de O e um ponto B que tenha 2cm de *distância* de O;

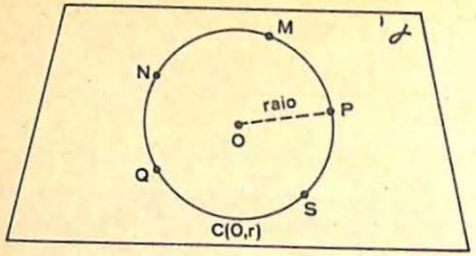
3.°) mais vinte pontos distintos (em tôdas as direções da fôlha de desenho) que satisfaçam a condição de terem 1,5cm de *distância* de O.



Unindo todos os pontos que têm 1,5cm de distância de O, você irá identificando uma importante figura geométrica plana que não "passa" pelos pontos A e B. Essa figura é a *circunferência*, a "mais especial" das curvas fechadas simples.

2. *Definição*

Dado, num plano α, um *ponto* O e um *número real positivo* r, chama-se *circunferência* de *centro* O e *raio* r ao *conjunto dos pontos* dêsse plano que tenham a distância r de O.



Indicação: $C(O, r)$ (lê-se: circunferência de *centro* O e *raio* r)

Simbòlicamente:

$$C(O, r) = \{P \in \alpha \mid m(\overline{OP}) = r\}$$

(lê-se: "$C(O, r)$ é o conjunto dos pontos P pertencentes ao plano α tais que a medida de $\overline{OP}$ é igual a r).

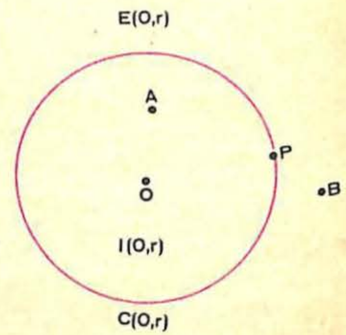
A palavra "raio" *também* indica *qualquer* segmento de reta (por exemplo, $\overline{OP}$ na figura), cujos extremos são, respectivamente, o *centro* e *um ponto da circunferência*. Assim:

se M, N, Q e $S \in C(O, r)$, então $m(\overline{OM}) = m(\overline{ON}) = m(\overline{OQ}) = m(\overline{OS}) = r$

Você já sabe que o instrumento que permite construir a circunferência com maior precisão é o *compasso*.

3. Regiões determinadas num plano por uma circunferência

A circunferência $C(O, r)$ permite classificar os pontos do plano (onde se encontra) em três conjuntos:



1.º) O constituído pelos pontos da *própria circunferência* $C(O, r)$;

2.º) o constituído pelos pontos pertencentes à *região interior* à $C(O, r)$; tal conjunto é denominado *disco* de centro O e raio r;

Indicação: $I(O, r)$

3.º) o constituído pelos pontos pertencentes à *região exterior* à $C(O, r)$;

Indicação: $E(O, r)$

Nestas condições há uma *relação de ordem* nas *distâncias* dos pontos do plano ao centro O. Assim:

$$P \in C(O, r) \iff m(\overline{OP}) = r$$
$$A \in I(O, r) \iff m(\overline{OA}) < r$$
$$B \in E(O, r) \iff m(\overline{OB}) > r$$

Chama-se *círculo* ou *disco fechado*, e indica-se por $D(O, r)$, à *reunião* do disco $I(O, r)$ com a circunferência $C(O, r)$. Logo:

$$\boxed{D(O, r) = I(O, r) \cup C(O, r)}$$

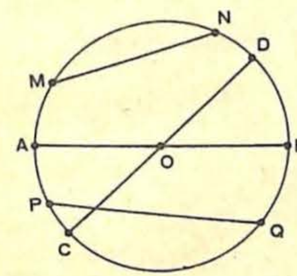
Quando é que um ponto M pertence ao *círculo* $D(O, r)$?

Simbòlicamente, temos:

$$M \in D(O, r) \iff m(\overline{OM}) \leqslant r$$

4. Cordas e diâmetros de uma circunferência

Todo segmento de reta cujos extremos pertencem à circunferência é denominado *corda*. Na $C(O, r)$ da figura, estão assinaladas as cordas: $\overline{MN}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$.



A corda que contém o centro é chamada *diâmetro*. Fácil é concluir que se $\overline{AB}$ é qualquer *diâmetro*, então os pontos A, O e B são colineares e, portanto:

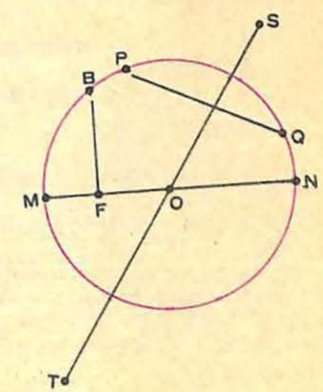
$$m(\overline{AB}) = m(\overline{AO}) + m(\overline{OB}) = r + r = 2r$$

Como $\overline{CD}$ é também diâmetro da $C(O, r)$ (observe a figura), então: $m(\overline{CD}) = 2r$, também.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 89

Relativamente à circunferência $C(O, r)$ da figura ao lado, escreva V ou F em cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $P \in C(O, r)$
2.ª) $P \in E(O, r)$
3.ª) $P \notin I(O, r)$
4.ª) $\overline{MN}$ é diâmetro
5.ª) $\overline{MO}$ é corda
6.ª) $\overline{MO}$ é raio
7.ª) $m(\overline{MO}) = r$
8.ª) $N \in I(O, r)$
9.ª) $N \in D(O, r)$
10.ª) $S \notin I(O, r)$
11.ª) $F \in D(O, r)$
12.ª) $\overline{PQ}$ é corda
13.ª) $\overline{ST}$ é corda
14.ª) $m(\overline{OF}) = r$
15.ª) $m(\overline{MN}) = 2r$
16.ª) $m(\overline{ST}) \neq 2r$

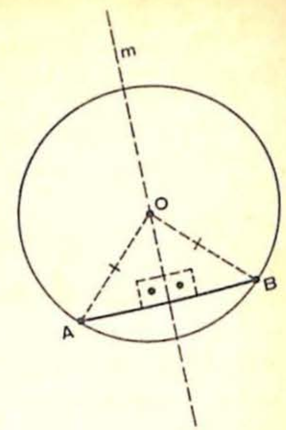


5. *Propriedade característica do diâmetro*

T.22 : *Em qualquer circunferência a mediatriz de qualquer corda passa pelo centro.*

$H \begin{cases} \overline{AB}, \text{ corda da } C(O,\ r) \\ m, \text{ mediatriz de } \overline{AB} \end{cases}$

$T \ \{ \ O \in m$



DEMONSTRAÇÃO:

Se a corda é diâmetro, o teorema já está demonstrado.

Em qualquer outro caso, sendo o centro O *eqüidistante* de A e B, e m a mediatriz de $\overline{AB}$, segue-se que $O \in m$ (*Observação* da pág. 244). c.q.d.

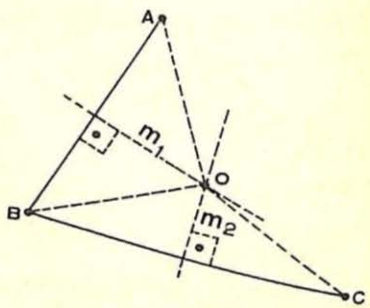
Conseqüência: Tôda *perpendicular* traçada do centro a qualquer corda de uma circunferência passa pelo *ponto médio* da corda.

6. *Construção de uma circunferência por três pontos dados*

T.23 : *Por três pontos não-colineares é possível construir uma circunferência, e uma só, que passa por êles.*

$H \ \{ \ A, B, C$, não-colineares

$T \begin{cases} \text{por } A, B \text{ e } C \text{ passa } C(O,\ r) \\ \text{e ela só} \end{cases}$



DEMONSTRAÇÃO:

Traça-se: $\left.\begin{array}{l} m_1, \text{ mediatriz de } \overline{AB} \\ m_2, \text{ mediatriz de } \overline{BC} \end{array}\right\} \Longrightarrow m_1 \cap m_2 = \{O\}$

Como:

$\left.\begin{array}{l} O \in m_1 \Longrightarrow O \text{ é eqüidistante de } A \text{ e } B \\ O \in m_2 \Longrightarrow O \text{ é eqüidistante de } B \text{ e } C \end{array}\right\} \Longrightarrow O \text{ é eqüidistante de } A, B \text{ e } C$

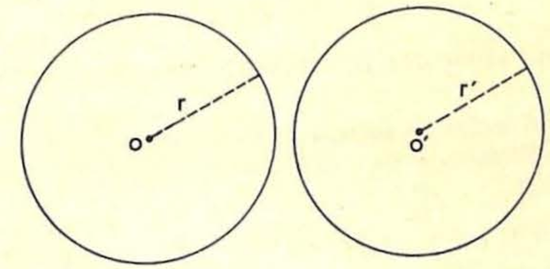
Logo, *existe* uma circunferência de centro O cujo raio é o segmento $\overline{OA}$ (de medida r), que passa também por B e C. Essa circunferência é *única*, pois qualquer outra circunferência que passe por A, B e C, devendo ter o seu centro nas mediatrizes m_1 e m_2, tê-lo-á necessàriamente na intersecção delas, isto é, o próprio ponto O. c.q.d.

Conseqüência: Para determinar-se o *centro* de uma circunferência, no caso em que êste não seja visível, basta tomar três pontos quaisquer A, B e C da circunferência, traçar as mediatrizes das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e determinar o *ponto de intersecção* das mesmas.

7. *Circunferências congruentes*

Duas circunferências dizem-se *congruentes* se, e sòmente se, possuem raios *iguais*.

Indicação: $C(O,\ r) \cong C(O',\ r')$.



Logo: $[C(O,\ r) \cong C(O',\ r')] \Longleftrightarrow [r = r']$

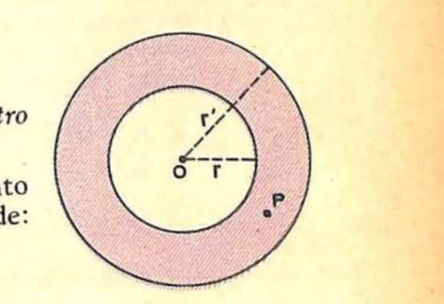
A *Congruência* de circunferências é uma *Relação de Equivalência*, pois é:

1.º) *reflexiva*: $C(O,\ r) \cong C(O,\ r)$

2.º) *simétrica*: se $C(O,\ r) \cong C(O',\ r')$, então $C(O',\ r') \cong C(O,\ r)$

3.º) *transitiva*: se $C(O,\ r) \cong C(O',\ r')$ e $C(O',\ r') \cong C(O'',\ r'')$, então $C(O,\ r) \cong C(O'',\ r'')$

8. *Circunferências concêntricas; coroa*



Circunferências que possuem o *mesmo centro* são denominadas *concêntricas*.

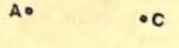
Chama-se *coroa* circular $O(r,\ r')$ ao conjunto dos pontos P que verificam a dupla desigualdade:

$$r < m(\overline{OP}) < r'$$

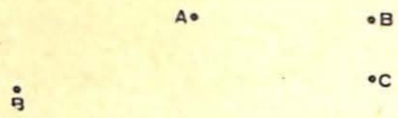
TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 90

1. Trace a circunferência que passa pelos pontos:

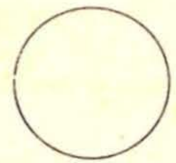
1.º)



2.º)



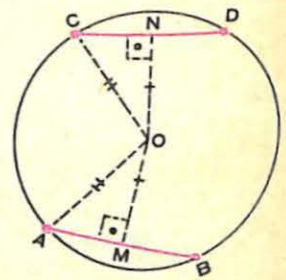
2. Determine o *centro* da seguinte circunferência:



3. Desenhe a *coroa* $O(3, 5)$, tomando por unidade o cm.

PROPRIEDADES DAS CORDAS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

T.24 : *Se duas cordas da mesma circunferência*(*) *são congruentes, então elas distam igualmente do centro.*



$$H \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ na } C(O,\ r) \\ \overline{OM} \perp \overline{AB} \text{ e } \overline{ON} \perp \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \ \{\ m(\overline{OM}) = m(\overline{ON})$$

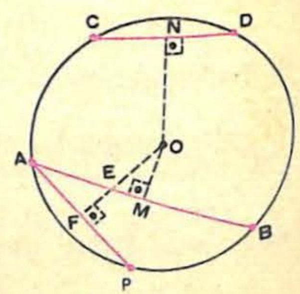
Demonstração:

São congruentes os triângulos retângulos AMO e CNO, porque possuem a hipotenusa (raio) e um cateto ($\overline{AM} \cong \overline{CN}$), respectivamente, congruentes.

Logo: $\overline{OM} \cong \overline{ON} \implies m(\overline{OM}) = m(\overline{ON})$ c.q.d.

Exercício: Enuncie e demonstre a *recíproca* do T.24.

T.25 : *Se duas cordas de uma circunferência*(*) *são desiguais, então suas distâncias ao centro da circunferência são desiguais em ordem inversa: a maior dista menos.*



$$H \begin{cases} m(\overline{AB}) > m(\overline{CD}) \text{ na } C(O,\ r) \\ \overline{OM} \perp \overline{AB} \text{ e } \overline{ON} \perp \overline{DC} \end{cases}$$

$$T \ \{\ m(\overline{OM}) < m(\overline{ON})$$

(*) Ou de circunferências congruentes.

Demonstração:

Constrói-se na $C(O,\ r)$, a partir de A, uma corda $\overline{AP}$, tal que $\overline{AP} \cong \overline{CD}$.

Se $\overline{OF} \perp \overline{AP}$, então, pelo T.24: $m(\overline{OF}) = m(\overline{ON})$.

Basta, então, provar que $m(\overline{OM}) < m(\overline{OF})$.

De fato, $\overleftrightarrow{OF} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{E\}$ e $\overline{OE}$ está contido em $\overline{OF}$; portanto:

$$\left.\begin{array}{l} m(\overline{OE}) < m(\overline{OF}) \\ \text{e como } (m\overline{OM}) < m(\overline{OE})(^*) \end{array}\right\} \implies m(\overline{OM}) < m(\overline{OF}) \text{ ou } m(\overline{OM}) < m(\overline{ON})$$

c.q.d.

Exercício. Enuncie e demonstre a recíproca do T.25.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 91

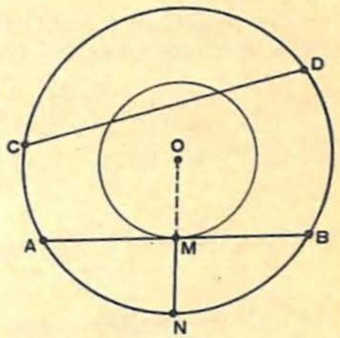
Na figura, temos:

$$m(\overline{OM}) < m(\overline{ON})$$

e a corda $\overline{CD}$ contém pontos interiores à circunferência menor.

É V ou F a sentença:

$$m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})\ ?$$

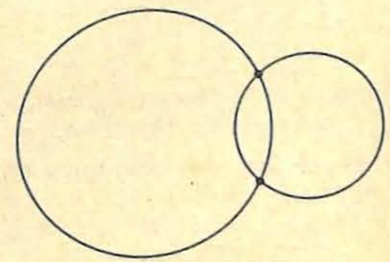


POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

9. "Comportamento" de duas circunferências

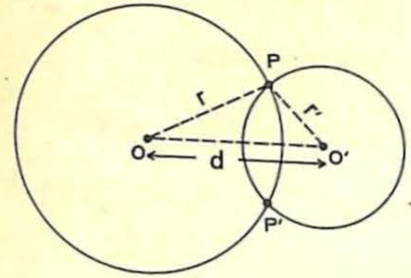
Você já deve ter desenhado ou observado circunferências nas posições:

1.ª) **Secantes**



(*) O comprimento da perpendicular é *menor* que o comprimento da oblíqua traçada de um mesmo ponto a uma mesma reta.

As circunferências que se interceptam em *dois pontos* são denominadas *secantes*. Se $C(O, r)$ e $C(O', r')$ são *secantes*, a intersecção é constituída pelos pontos P e P', isto é:



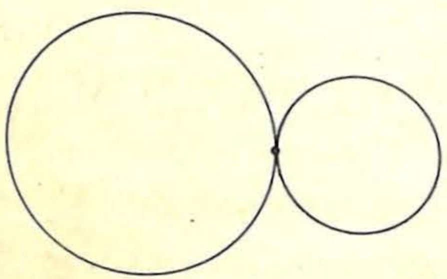
$$\boxed{C(O, r) \cap C(O', r') = \{P, P'\}}$$

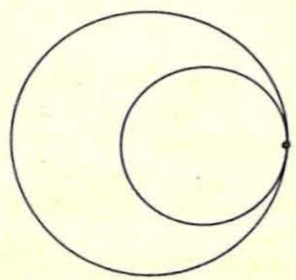
Se $m(\overline{OP}) = r$, $m(\overline{O'P'}) = r'$ e $m(\overline{OO'}) = d$, com $r \geqslant r'$ e $d > 0$, então as circunferências $C(O, r)$ e $C(O', r')$ são *secantes* se, e sòmente se:

$$\boxed{r - r' < d < r + r'}$$

que é a dupla desigualdade válida para o $\triangle\ OPO'$ da figura.

2.ª) **Tangentes**

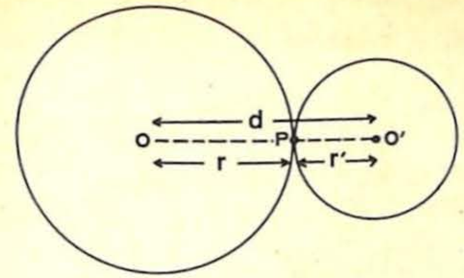


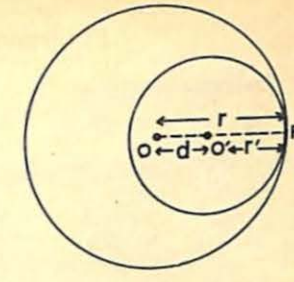


As circunferências que se "tocam" sòmente num ponto (P) são denominadas *tangentes* exteriores (1.ª figura) ou interiores (2.ª figura).

Nesse caso a intersecção dos conjuntos $C(O, r)$ e $C(O', r')$ é constituída pelo único ponto P:

$$\boxed{C(O, r) \cap C(O', r') = \{P\}}$$

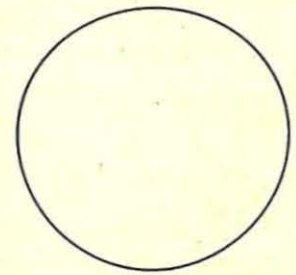


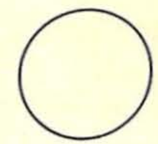


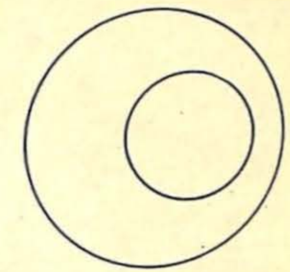
Duas circunferências são *tangentes* se, e sòmente se:

$\boxed{d = r + r'}$ ou $\boxed{d = r - r'}$ $(r > r')$

3.ª) **Exteriores**



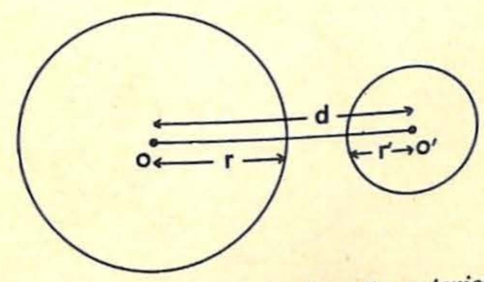


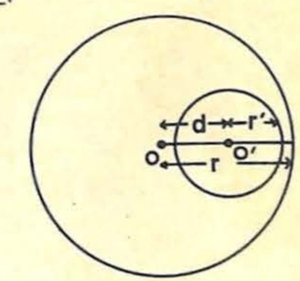


As circunferências que *não têm ponto em comum* (figuras acima) são denominadas *exteriores* ou *não-secantes*.

Nesse caso a intersecção dos conjuntos $C(O, r)$ e $C(O', r')$ é o *conjunto vazio*, isto é:

$$\boxed{C(O, r) \cap c(O', r') = \varnothing}$$



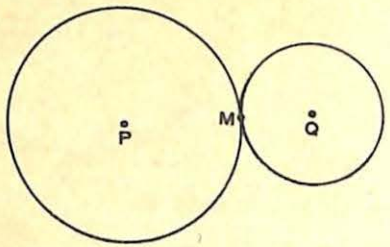


Duas circunferências são *exteriores* se, e sòmente se:

$\boxed{d > r + r'}$ ou $\boxed{d < r - r'}$ $(r > r')$

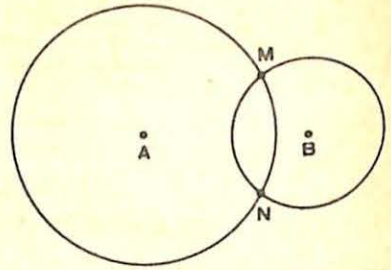
1. Preencha os claros:

1.º)



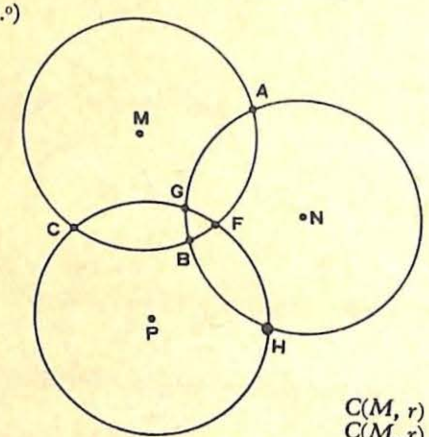
$C(P, r) \cap C(Q, s) = \ldots$

3.º)

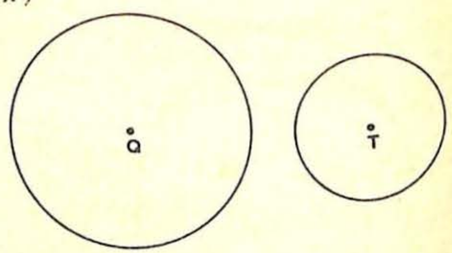


$C(A, r) \cap C(B, s) = \{\ldots, \ldots\}$

2.º)



4.º)

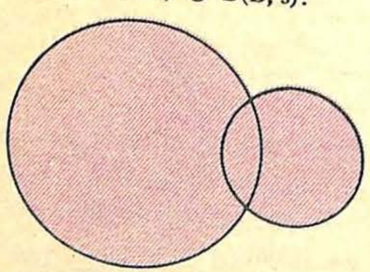


$C(Q, r) \cap C(T, s) = \ldots$

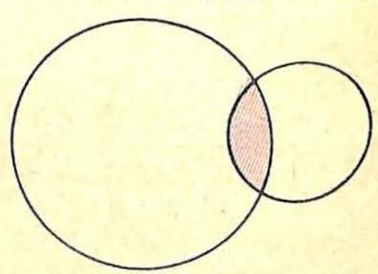
$C(M, r) \cap C(N, r) = \ldots$
$C(M, r) \cap C(P, r) = \ldots$
$C(N, r) \cap C(P, r) = \ldots$

2. (*Modêlo*) Colorir nas figuras do exercício 1-3.º, a *reunião* e a *intersecção* dos *discos* formados.

$D(A, r) \cup D(B, s)$:



$D(A, r) \cap D(B, s)$:



3. Colorir na figura do exercício 1-2.º:

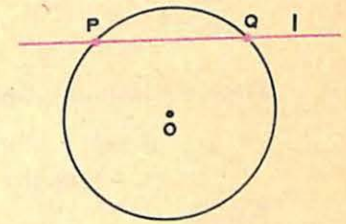
$D(M, r) \cup D(N, r)$ $\qquad$ $D(M, r) \cup D(N, r) \cup D(P, r)$
$D(N, r) \cup D(P, r)$ $\qquad$ $D(M, r) \cap D(N, r) \cap D(P, r)$

4. A *reunião* dos discos dos exercícios anteriores é *convexa?* E a *intersecção?*

10. "*Comportamento*" *de uma reta com uma circunferência*

Desenhadas, numa fôlha de caderno, uma reta l e uma circunferência $C(O, r)$, podem ocorrer *três casos:*

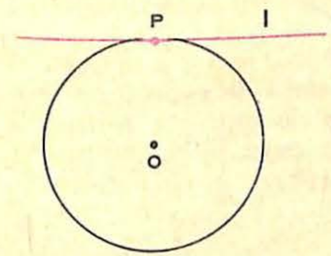
1.º) **A reta é *secante* à circunferência:**



$l \cap C(O, r) = \{P, Q\} \iff$ [a reta l é *secante* à $C(O, r)$]

P e Q são os pontos de *intersecção*

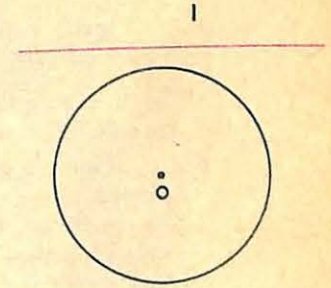
2.º) **A reta é *tangente* à circunferência:**



$l \cap C(O, r) = \{P\} \iff$ [a reta l é *tangente* à $C(O, r)$]

P é o ponto de *contato* ou de *tangência*

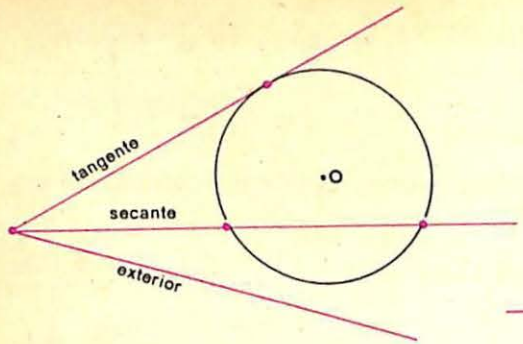
3.º) **A reta é *exterior* à circunferência:**

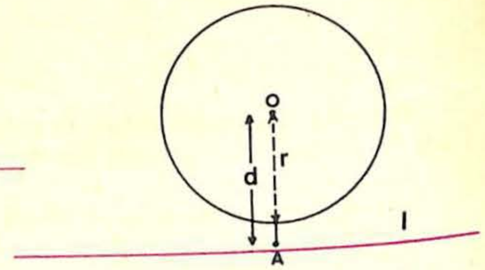


$l \cap C(O, r) = \varnothing \iff$ [a reta l é *exterior* à $C(O, r)$]

A reta l diz-se também *não-secante* à $C(O, r)$

Dadas uma reta l e uma circunferência $C(O, r)$, como se poderia *provar* que a reta l "*toca*" a circunferência em *um ponto? Intercepta* a circunferência em *dois pontos? Intercepta* em *nenhum ponto?*





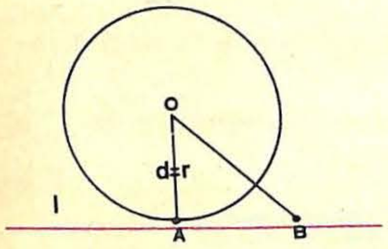
d>r

Basta confrontar os números reais d e r, onde:

d representa a *medida* do segmento $\overline{OA} \perp l$
r representa a *medida* do raio

Temos:

1.º) Se $d > r$, então l é "completamente" *exterior* à circunferência; o ponto A da reta, o *mais próximo* do centro O, é *exterior* à $C(O, r)$, isto é, $A \in E(O, r)$;



d=r

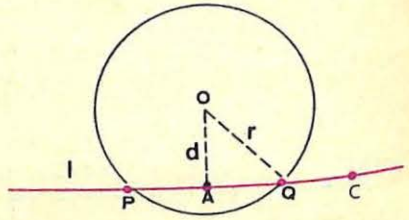
2.º) Se $d = r$, então a reta l é *tangente* à $C(O, r)$; o ponto de contato A é o *mais próximo* do centro e *pertence* à circunferência, sendo os demais pontos (B) de l *exteriores* à circunferência, pois $m(\overline{OB}) > r$. Logo:

se l é *tangente* à $C(O, r)$, então $l \perp \overline{OA}$

Esta é a propriedade característica da tangente à circunferência: *ser perpendicular ao raio no ponto de contato.*

3.º) Se $d < r$, então a reta l é *secante* à circunferência; o ponto A da reta l é *interior* à circunferência, isto é: $A \in I(O, r)$.

Como a reta l possui *infinitos pontos, devem existir* pontos (C) *exteriores* à circunferência. Assumindo como **postulado** que: *Tôda reta que passa por um ponto interno a uma circunferência intercepta-a em* **dois** *pontos*, segue-se que l intercepta $C(O, r)$ nos pontos P e Q.



d<r

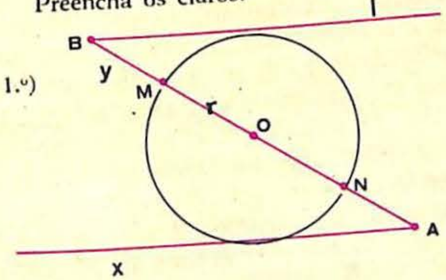
Conclusão:

$l \cap C(O, r) = \{P, Q\}$	se, e sòmente se, $d < r$
$l \cap C(O, r) = \{A\}$	se, e sòmente se, $d = r$
$l \cap C(O, r) = \varnothing$	se, e sòmente se, $d > r$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 93

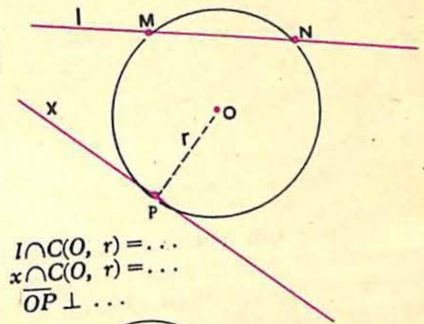
Preencha os claros:

1.º)

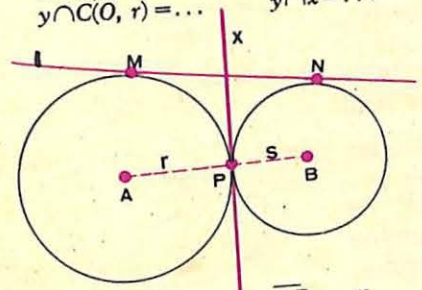


$l \cap C(O, r) = \ldots$ $\quad x \cap C(O, r) = \ldots$
$y \cap C(O, r) = \ldots$ $\quad y \cap x = \ldots$

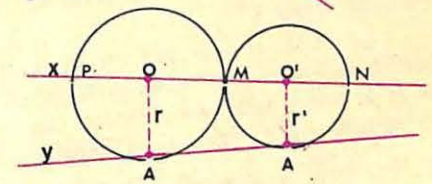
2.º)



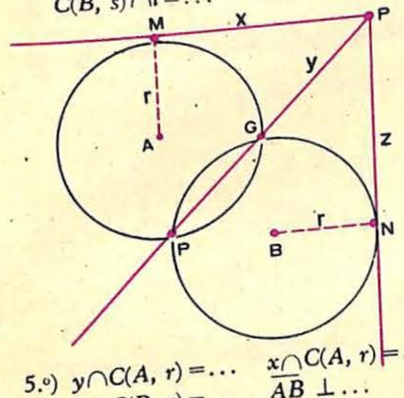
$l \cap C(O, r) = \ldots$
$x \cap C(O, r) = \ldots$
$\overline{OP} \perp \ldots$



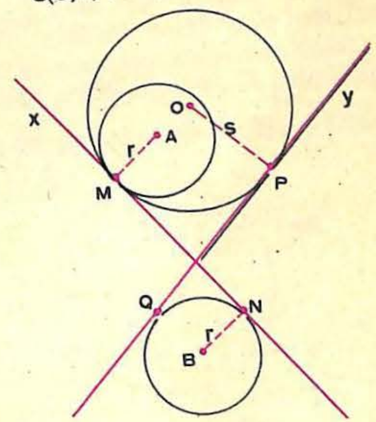
3.º) $C(A, r) \cap l = \ldots$ $\quad \overline{AP} \ldots x$
$C(B, s) \cap l = \ldots$ $\quad \overline{BP} \perp \ldots$



4.º) $\overline{OA} \perp \ldots$ $\quad x \cap C(O, r) = \ldots$
$\overline{O'A'} \perp \ldots$ $\quad y \cap C(O', r') = \ldots$
$C(O, r) \cap C(O', r') = \ldots$



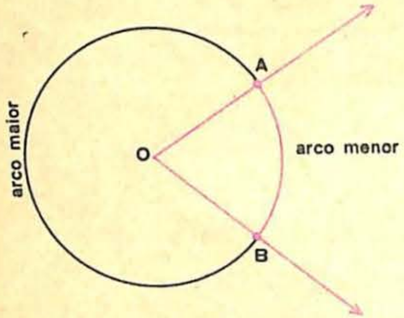
5.º) $y \cap C(A, r) = \ldots$ $\quad x \cap C(A, r) = \ldots$
$y \cap C(B, r) = \ldots$ $\quad \overline{AB} \perp \ldots$



6.º) $C(A, r) \cap C(O, s) = \ldots$
$x \cap C(A, r) = \ldots$
$y \cap C(B, r) = \ldots$

Arcos de circunferência; medida

11. *Ângulo central; arco menor e arco maior*

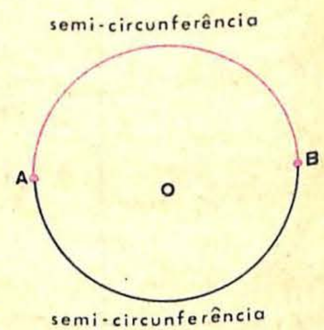


Seja a circunferência $C(O, r)$.

Um *ângulo central* de $C(O, r)$ é qualquer ângulo cujo vértice é o centro O.

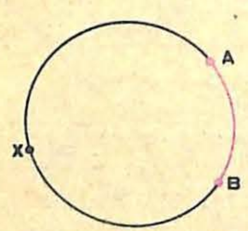
Se A e B são os pontos onde os lados do ângulo interceptam, respectivamente, a circunferência, então: *o conjunto constituído por A e B e de todos os pontos da circunferência pertencentes ao interior do ângulo $A\hat{O}B$ é denominado* ***arco menor AB*** *de extremos A e B e centro O.*

Existe um outro arco de circunferência, de extremos A e B, que é o *conjunto de pontos constituídos por A e B e de todos os pontos da circunferência pertencentes ao exterior do ângulo $A\hat{O}B$*, denominado **arco maior AB** de centro O.



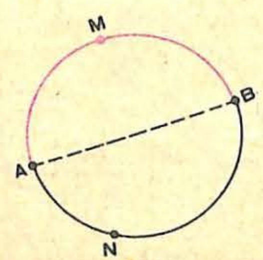
Se A e B são extremos de um diâmetro, então existem *dois arcos AB*, constituídos por A e B e por todos os pontos da circunferência pertencentes a um mesmo semi-plano em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e denominados *semi-circunferências*.

Indicações: Indicando um arco por $\overset{\frown}{AB}$, tal notação poderá ser ambígua, porque sempre existem *dois arcos* tendo A e B por extremos. Nestas condições, costuma-se tomar outro ponto qualquer da circunferência para caracterizar o arco que se deseja. Quando não há referência, entende-se por $\overset{\frown}{AB}$ o *arco menor*. Assim, nas figuras:



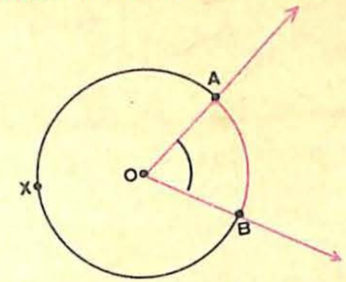
$\overset{\frown}{AB}$ *é o arco menor*

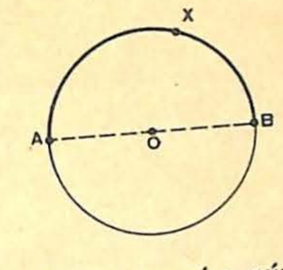
$\overset{\frown}{AXB}$ *é o arco maior*



$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{ANB}$ *são semi-circunferências*

12. *Medida de um arco*





Tomando por unidade o *grau*, a medida de um arco é o *número real* obtido da seguinte maneira:

1) Se $\overset{\frown}{AB}$ é um *arco menor*, então sua medida é a medida do correspondente *ângulo central*, isto é:

$$\boxed{m(\overset{\frown}{AB}) = m(A\hat{O}B)}$$

2) Se $\overset{\frown}{AXB}$ é um *arco maior*, então:

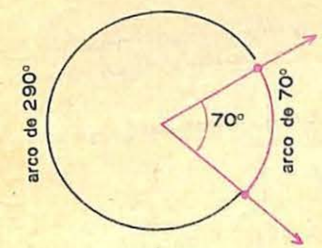
$$\boxed{m(\overset{\frown}{AXB}) = 360 - m(\overset{\frown}{AB})}$$

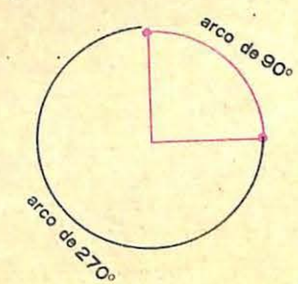
3) Se $\overset{\frown}{AXB}$ é uma *semi-circunferência*, então:

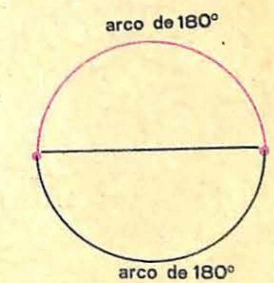
$$\boxed{m(\overset{\frown}{AXB}) = 180}$$

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 94

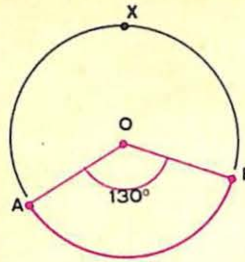
1. As medidas dos arcos estão assinaladas em graus:





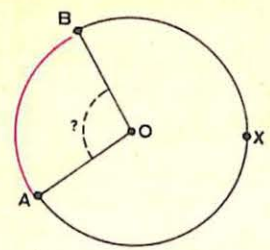


2. Preencha os claros:



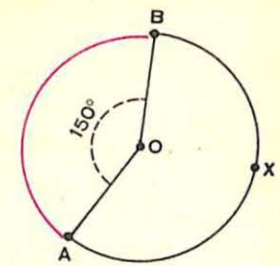
1.º) $m(\widehat{AB}) = 130°$

$m(\widehat{AXB}) = \ldots$



2.º) $m(\widehat{AB}) = \ldots$

$m(\widehat{AXB}) = 283°30'$

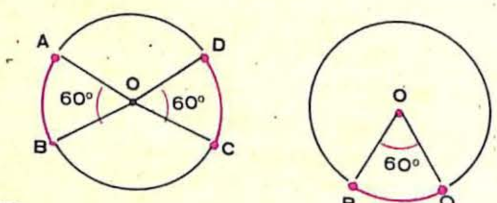


3.º) $m(\widehat{AB}) = 150°$

$m(\widehat{AXB}) = \ldots$

13. *Arcos congruentes*

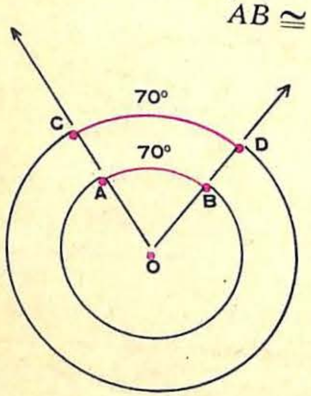
Dois arcos, na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, são denominados *congruentes* se, e sòmente se, têm a *mesma medida*. Assim, por exemplo, se $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são arcos da mesma circunferência e $\widehat{AB}$ e $\widehat{PQ}$ são arcos de circunferências congruentes:



temos:

$\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, pois $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) = 60°$

$\widehat{AB} \cong \widehat{PQ}$, pois $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PQ}) = 60°$



Atenção: Dois arcos podem ter a *mesma medida* e *não serem congruentes;* basta êsses arcos não pertencerem à mesma circunferência ou a circunferências congruentes, como mostra a figura:

$\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$, apesar de terem a mesma medida *não são arcos congruentes*, por não pertencerem a circunferências congruentes.

Se $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ pertencem à *mesma circunferência* ou a *circunferências congruentes*, então:

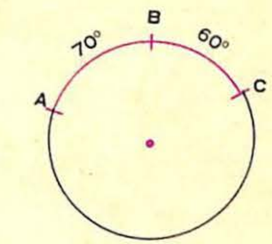
$\widehat{AB} > \widehat{CD} \iff m(\widehat{AB}) > m(\widehat{CD})$

ou $\widehat{AB} < \widehat{CD} \iff m(\widehat{AB}) < m(\widehat{CD})$

14. *Propriedade fundamental entre arcos*

Se $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ são arcos da mesma circunferência, tendo sòmente o *ponto B em comum*, então a *reunião* dêsses arcos é o arco $\widehat{AC}$, tal que:

$$\boxed{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) = m(\widehat{ABC})}$$



Na figura, temos:

$$m(\widehat{AB}) = 70°,\ m(\widehat{BC}) = 60°$$

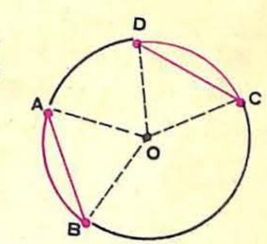
Logo:

$$70° + 60° = 130° = m(\widehat{ABC})$$

15. *Propriedade fundamental entre arcos e cordas correspondentes*

Se $\widehat{AB}$ é um *arco menor*, diz-se que a corda $\overline{AB}$ é a *corda correspondente* ao arco $\widehat{AB}$, que por sua vez é o *arco correspondente* à corda $\overline{AB}$. No caso de o arco ser a *semi-circunferência*, a corda correspondente é o *diâmetro* de mesmos extremos que o arco.

T.26 : *Se duas cordas de uma mesma circunferência(*) são congruentes, então os arcos correspondentes são congruentes.*



H [$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ na $C(O,\ r)$

T [$\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

Demonstração:

Traçados os raios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, formam-se os triângulos AOB e COD, que são *congruentes*, pelo caso L.L.L. (por quê?). Logo:

$$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \iff m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \iff \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

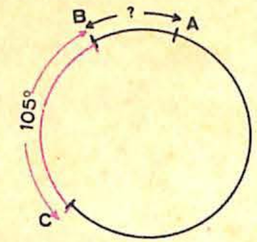
c.q.d.

Exercício: Enuncie e demonstre a *recíproca* do T.26.

(*) Ou de circunferências *congruentes*.

1. Preencha os claros:

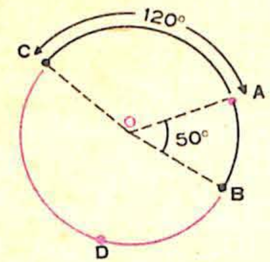
1.º)



$m(\widehat{AB}) = \ldots$

Sabendo que: $m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) = 150°$

2.º)

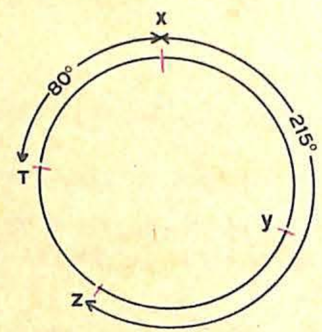


$m(\widehat{CDB}) = \ldots$

$m(A\hat{O}C) = \ldots$

2. Nas circunferências:

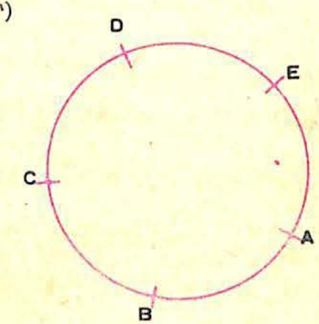
1.ª)



se $m(\widehat{XYZ}) = 215°$ e $m(\widehat{TX}) = 80°$,

qual é a $m(\widehat{ZT})$?

2.ª)



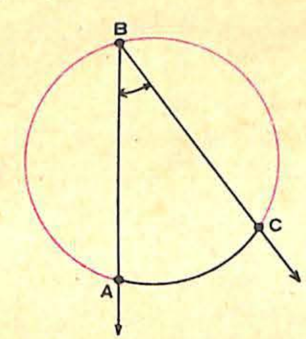
se $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD}) = m(\widehat{DE}) = m(\widehat{EA})$,

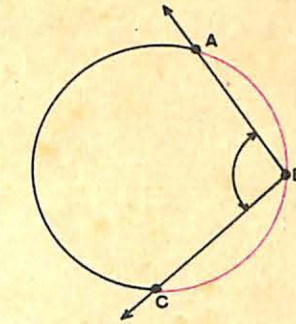
qual é a $m(\widehat{AB})$?

Ângulos relacionados com arcos; medidas

16. *Ângulo inscrito num dado arco*

Um ângulo ($A\hat{B}C$ na figura) diz-se **inscrito** num dado arco ($\widehat{ABC}$ na figura) se:





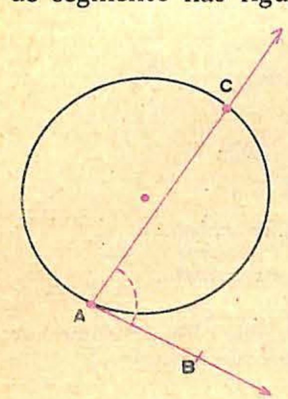
1.º) os extremos do arco pertencem aos lados do ângulo;

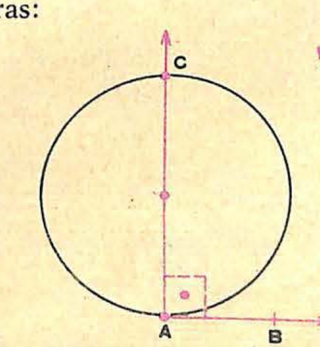
2.º) o vértice do ângulo é um ponto do arco, distinto dos extremos.

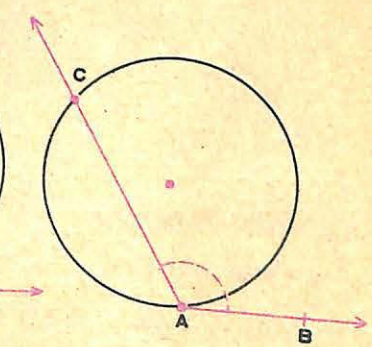
Na primeira figura o ângulo $A\hat{B}C$ está *inscrito* num *arco maior* e, na segunda, num *arco menor*.

17. *Ângulo de segmento*

No caso especial de o ângulo ter o vértice na circunferência, um dos lados contido numa secante e o outro numa tangente, que passa pelo vértice, êle é denominado *ângulo de segmento*. Assim, $B\hat{A}C$ é um ângulo de segmento nas figuras:







18. *Ângulos que interceptam arcos*

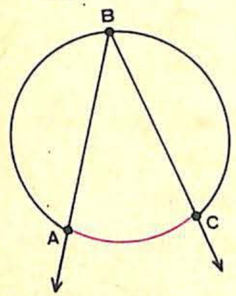
Um ângulo, cujo vértice pertence à $C(O, r)$ ou ao seu *exterior*, **intercepta** um arco se:

1.º) os extremos do arco pertencem aos lados do ângulo;

2.º) exceto os seus extremos, o arco pertence ao *interior* do ângulo.

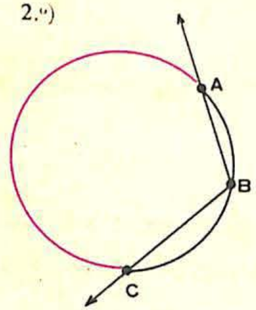
Exemplos:

1.º)



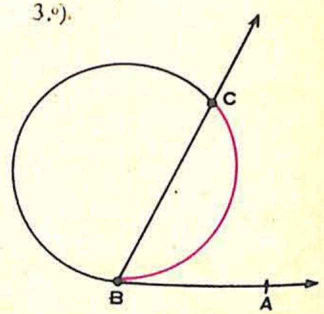
$A\hat{B}C$ *intercepta* o arco $\overset{\frown}{AC}$

2.º)



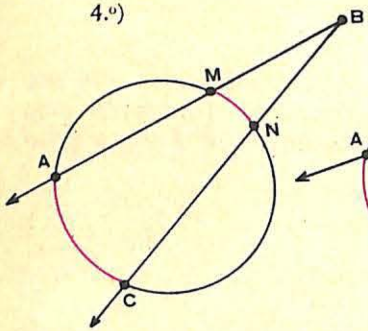
$A\hat{B}C$ *intercepta* o arco $\overset{\frown}{AC}$

3.º)



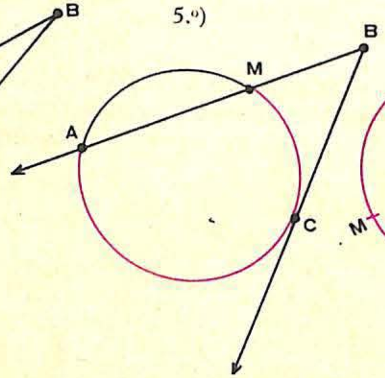
$A\hat{B}C$ *intercepta* o arco $\overset{\frown}{BC}$

4.º)



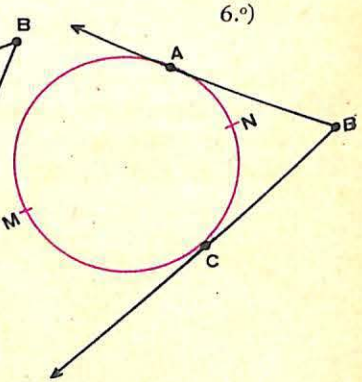
$A\hat{B}C$ *intercepta os* arcos $\overset{\frown}{MN}$ e $\overset{\frown}{AC}$

5.º)



$A\hat{B}C$ *intercepta os* arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{MC}$

6.º)



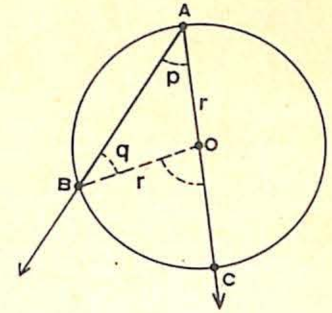
$A\hat{B}C$ *intercepta os* arcos $\overset{\frown}{AMC}$ e $\overset{\frown}{ANC}$

NOTA: Os lados do ângulo $A\hat{B}C$ pertencem ambos a *secantes* à $C(O, r)$ (como nos exemplos 1.º, 2.º, 4.º) ou um à *secante* e outro à *tangente* (como nos exemplos 3.º e 5.º) ou ambos a *tangentes* à $C(O, r)$ (como no exemplo 6.º).

19. *Medida de um ângulo inscrito*

T.27 : *A medida de um ângulo inscrito num dado arco da $C(O, r)$ é igual à metade da medida do arco interceptado pelos seus lados.*

Consideremos os três casos possíveis:



1.º *caso*: Um dos lados do ângulo $B\hat{A}C$ passa pelo centro O.

H $\begin{cases} B\hat{A}C, \text{ ângulo inscrito,} \\ \text{passando um dos lados por } O \end{cases}$

T $\{ \ m\,(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BC})$

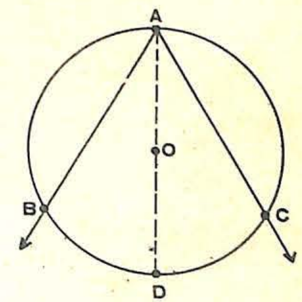
DEMONSTRAÇÃO:

Traçado $\overline{OB}$, o $\triangle ABO$ é isósceles, pois $m(\overline{OA}) = m(\overline{OB}) = r$ e, portanto: $p = q$
Como: $m(B\hat{O}C) = p + q$ (teorema do ângulo externo), vem:

$$m(B\hat{O}C) = p + q = 2p \iff p = \frac{1}{2}\, \underbrace{m(B\hat{O}C)}$$

ou
$$m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BC}) \qquad \text{c.q.d.}$$

2.º *caso:* O centro O pertence ao *interior* do ângulo.



H $\begin{cases} B\hat{A}C, \text{ ângulo inscrito} \\ O \text{ pertence ao interior de } B\hat{A}C \end{cases}$

T $\{ \ m\,(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BC})$

DEMONSTRAÇÃO:

Sabendo que: $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{A}D) + m(D\hat{A}C)$
e $m(\overset{\frown}{BDC}) = m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{DC})$

temos, pelo 1.º *caso:*

$$m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{DC})$$

ou
$$m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, [m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{DC})] \iff m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BC})$$

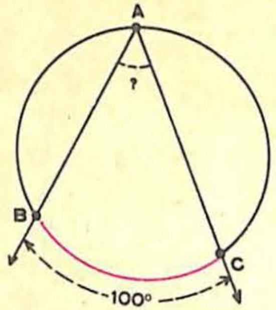
c.q.d.

3.º *caso:* O centro O pertence ao *exterior* do ângulo.
Demonstre como exercício.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS — GRUPO 96

1. Na $C(O, r)$, das figuras, calcule:

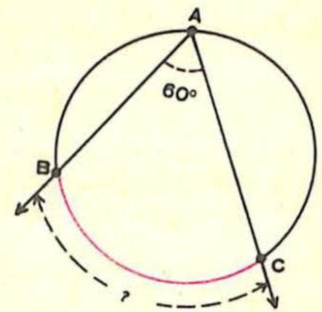
1.º) O valor do ângulo *inscrito* $B\hat{A}C$, que *intercepta* um arco de 100°.



Temos: $m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BC})$

ou $m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$

2.º) O valor do arco *interceptado* pelo ângulo *inscrito* de 60°.

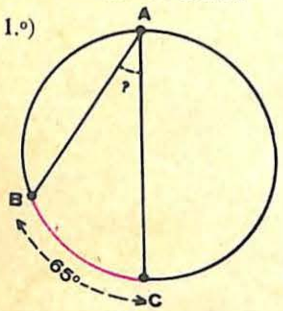


Temos: $m(B\hat{A}C) = 60°$

Como: $m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \times m(B\hat{A}C) = 2 \times 60° = 120°$

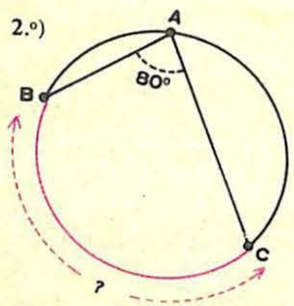
2. Preencha os claros:

1.º)



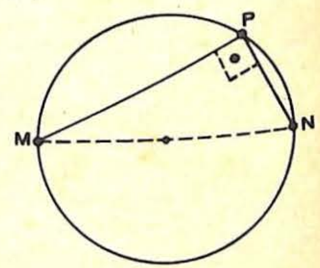
$m(\overset{\frown}{BC}) = 65°$
$m(B\hat{A}C) = \ldots$

2.º)



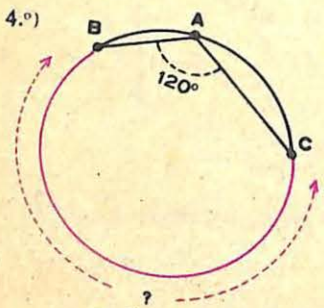
$m(\overset{\frown}{BC}) = \ldots$
$m(B\hat{A}C) = 80°$

3.º)



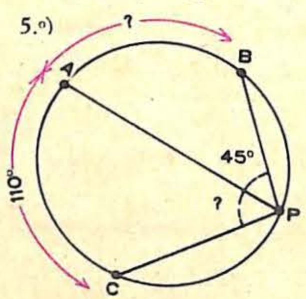
$m(M\hat{P}N) = \ldots$
$m(\overset{\frown}{MN}) = \ldots$

4.º)



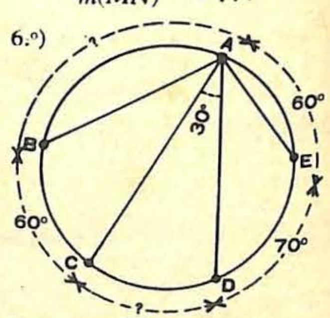
$m(B\hat{A}C) = 120°$
$m(\overset{\frown}{BC}) = \ldots$

5.º)



$m(\overset{\frown}{AB}) = \ldots$
$m(A\hat{P}C) = \ldots$

6.º)



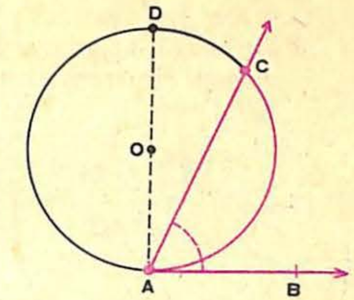
$m(\overset{\frown}{AB}) = \ldots$
$m(\overset{\frown}{CD}) = \ldots$

20. *Medida de um ângulo de segmento*

T.28: *A medida de um ângulo de segmento de uma $C(O, r)$ é igual à metade da medida do arco interceptado pelos seus lados.*

H $\begin{cases} B\hat{A}C, \text{ ângulo (agudo) de} \\ \text{segmento na } C(O,\ r) \end{cases}$

T $\left[\ m\,(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{AC})\right.$



DEMONSTRAÇÃO:

Tracemos o diâmetro $\overline{AD}$.

Como: $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{A}D) - m(C\hat{A}D)$

então: $m(B\hat{A}C) = 90° - \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{DC})$ (pois $B\hat{A}D$ é reto e $m(C\hat{A}D) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{DC})$ porque $C\hat{A}D$ é ângulo inscrito)

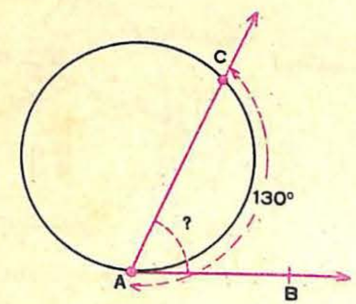
ou $m(B\hat{A}C) = \dfrac{180° - m(\overset{\frown}{DC})}{2}$

ou $m(B\hat{A}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{AC})$

c.q.d.

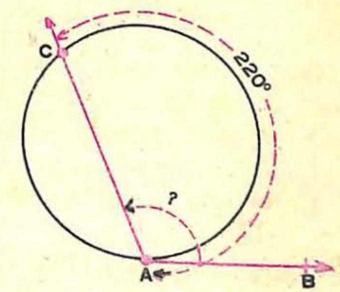
EXERCÍCIO: Demonstre o T.28 no caso de o *ângulo de segmento* $B\hat{A}C$ ser *obtuso*.

Exemplos:



se $\overset{\frown}{AC} = 130°$

então $m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2} \times 130° = 65°$

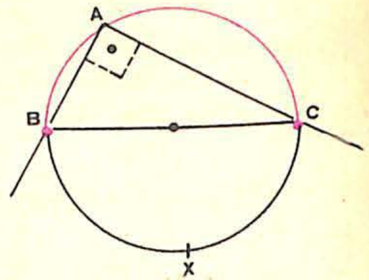


se $\overset{\frown}{AC} = 220°$

então $m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2} \times 220° = 110°$

21. *Conseqüência do T.28*

1.ª) O ângulo *inscrito* numa *semi-circunferência* é reto.

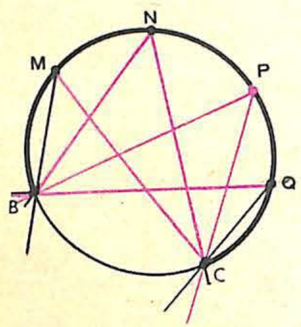


A demonstração é imediata, porque tal ângulo *intercepta* uma semi-circunferência, a qual mede 180°.

Logo:

$$m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{BXC}) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$$

2.ª) Ângulos *inscritos* num *mesmo arco* são congruentes.



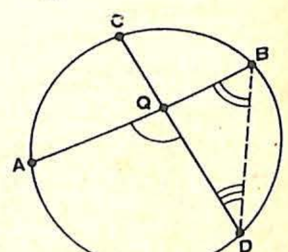
De fato:

$$m(B\hat{M}C) = m(B\hat{N}C) = m(B\hat{P}C) =$$

$$= m(B\hat{Q}C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{BC})$$

3.ª) Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam em Q, então o ângulo $A\hat{Q}D$ (ou $B\hat{Q}C$) tem por medida:

$$m(A\hat{Q}D) = \frac{1}{2}\, [m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})].$$



Com efeito, construindo-se $\overline{BD}$, temos os ângulos *inscritos* $A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$. Então, do $\triangle\ QBD$, vem:

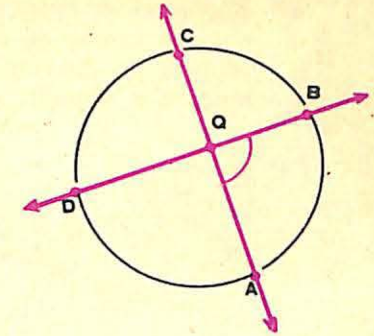
$$m(A\hat{Q}D) = m(A\hat{B}D) + m(C\hat{D}B) \text{ (teorema do ângulo externo)}$$

ou

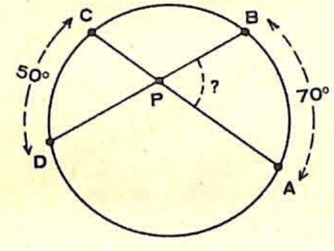
$$m(A\hat{Q}D) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD}) + \frac{1}{2}\, m(\widehat{BC}) = \frac{1}{2}\, [m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})]$$

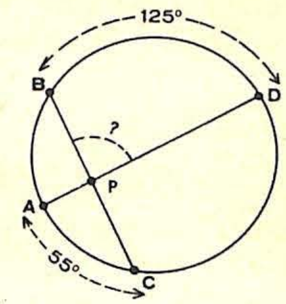
Nota: Êsse mesmo resultado pode ser aplicado no caso de se querer determinar a medida de um ângulo formado por duas retas *secantes* a uma circunferência que se interceptam no *interior* da circunferência.

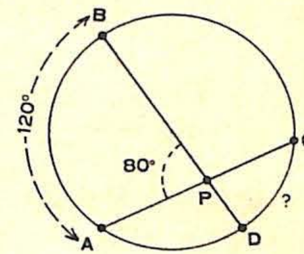
$$m(A\hat{Q}B) = \frac{1}{2}\, [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})]$$



Exemplos:





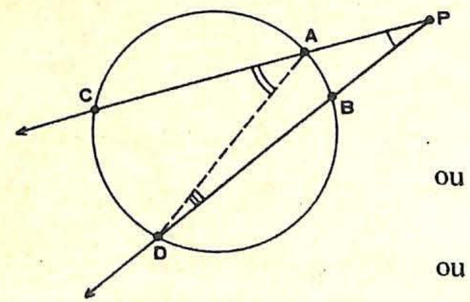


$$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}[70° + 50°] \qquad m(B\hat{P}D) = \frac{1}{2}[125° + 55°] \qquad m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}[m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})]$$

$$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2} \times 120° = 60° \qquad m(B\hat{P}D) = \frac{1}{2} \times 180° = 90° \qquad 80° = \frac{1}{2}[120° + m(\widehat{CD})]$$

$$160° = 120° + m(\widehat{CD}) \iff m(\widehat{CD}) = 40°$$

4.ª) A medida de um ângulo formado por duas retas *secantes* a uma circunferência, que se interceptam no *exterior* da circunferência, é igual à *metade da diferença das medidas dos arcos interceptados*.



De fato, traçando-se a corda $\overline{AD}$ e relacionando os ângulos internos com o externo do triângulo PAD, vem:

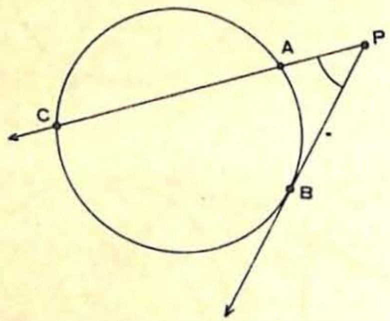
$$m\,(C\hat{A}D) = m(A\hat{D}B) + m(A\hat{P}B)$$

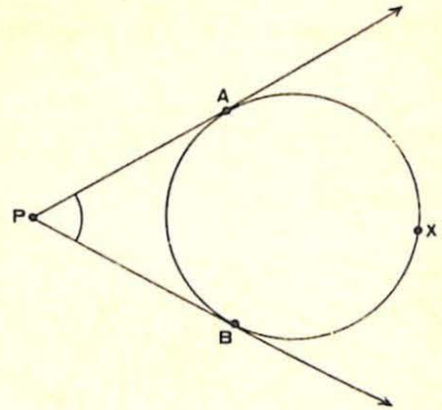
ou $$\frac{1}{2} m(\widehat{CD}) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB}) + m(A\hat{P}B)$$

ou $$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\, [m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})]$$

c.q.d.

5.ª) Também: a medida de um ângulo formado por *uma secante* e *uma tangente* ou *duas tangentes* à circunferência, que se interceptam no *exterior* da circunferência, é igual à *metade da diferença das medidas dos arcos interceptados*.

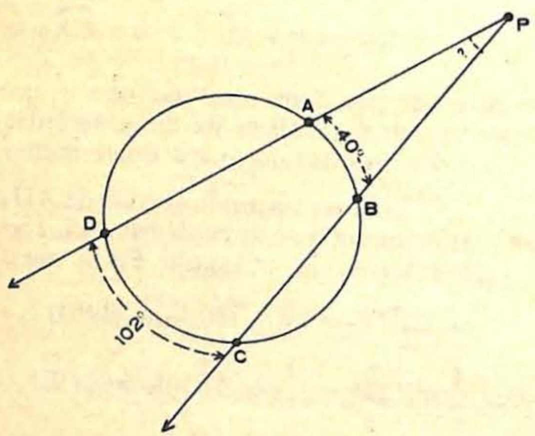


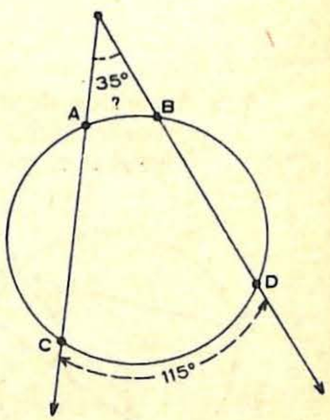


$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\,[m(\widehat{BC}) - m(\widehat{AB})]$ $\qquad$ $m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\,[m(\widehat{AXB}) - m(\widehat{AB})]$

Verifique você mesmo êsses resultados.

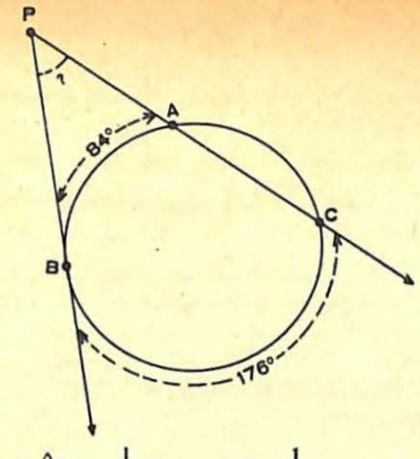
Exemplos:

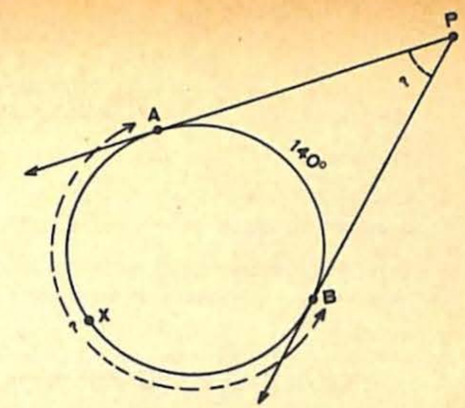




$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\,[102° - 40°] = \frac{1}{2} \times 62° = 31°$ $\qquad$ $35° = \frac{1}{2}\,[115° - m(\widehat{AB})]$

$70° = 115° - m(\widehat{AB}) \Longleftrightarrow m(\widehat{AB}) = 115° - 70° = 45°$



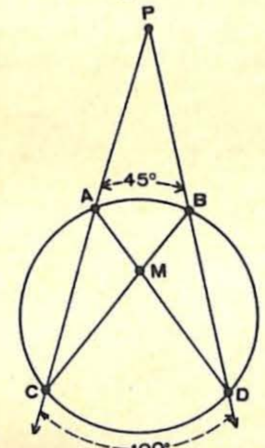


$m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\,[176° - 84°] = \frac{1}{2} \times 92° = 46°$ $\qquad$ $m(A\hat{P}B) = \frac{1}{2}\,[220° - 140°] = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$

NOTA: se $m(\widehat{AB}) = 140°$, então $m(\widehat{AXB}) = 360° - 140° = 220°$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 97

1. Na figura:

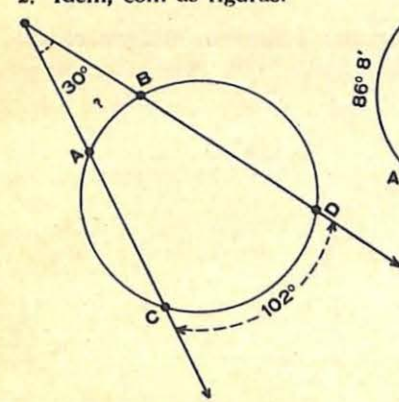


Calcule:

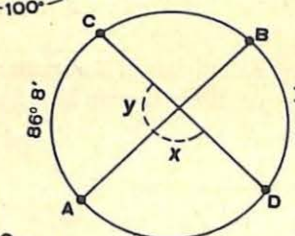
$m(C\hat{A}D) = \ldots$ $\qquad$ $m(A\hat{P}B) = \ldots$

$m(C\hat{B}D) = \ldots$ $\qquad$ $m(C\hat{M}D) = \ldots$

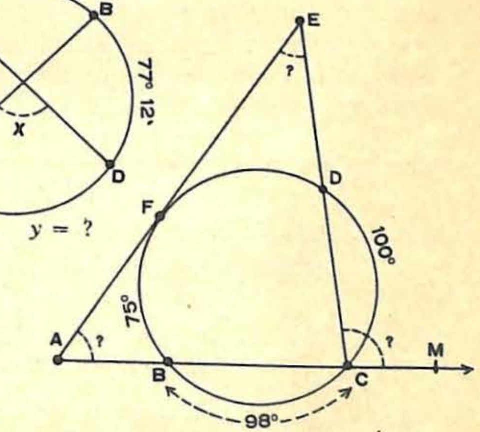
2. Idem, com as figuras:



$m(\widehat{AB}) = ?$



$x = ?$ $\quad$ $y = ?$



$m(C\hat{A}F) = ?$ $\quad$ $m(F\hat{E}D) = ?$ $\quad$ $m(M\hat{C}D) = ?$

3. Demonstre: se dois ângulos inscritos na mesma circunferência são congruentes, então as cordas dos arcos interceptados são congruentes.

4. Demonstre: se corda $\overline{AB} \parallel$ corda $\overline{CD}$ e $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$, então $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD})$.

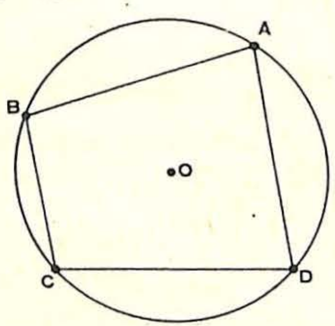
5. O arco $\overset{\frown}{AC}$ excede o arco $\overset{\frown}{BD}$ de $30°$. Calcule a medida dêsses arcos, sabendo-se que o ângulo formado pelas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ mede $80°$.

6. Seja $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência e C um ponto tal que o arco $\overset{\frown}{BC}$ seja igual a $32°$. Traçando-se a corda $\overline{BC}$, calcule a medida dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA

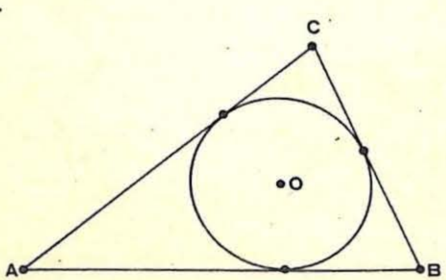
22. *Definição*

Se os lados de um polígono são *cordas* de uma circunferência, o polígono é denominado *inscrito* na circunferência. Esta, por sua vez, é denominada *circunscrita* ao polígono.



Na figura, o quadrilátero $ABCD$ é *inscrito* na circunferência $C(O, r)$ e esta é *circunscrita* ao quadrilátero.

Um polígono cujos lados são todos *tangentes* à mesma circunferência é denominado *circunscrito* à circunferência. Esta, por sua vez, diz-se *inscrita* no polígono.



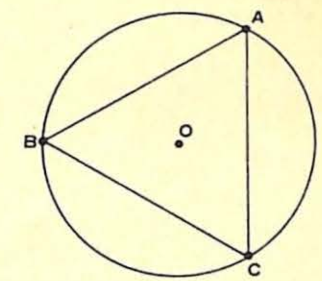
Na figura, o triângulo ABC é *circunscrito* à circunferência $C(O, r)$ e esta é *inscrita* no triângulo.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 98

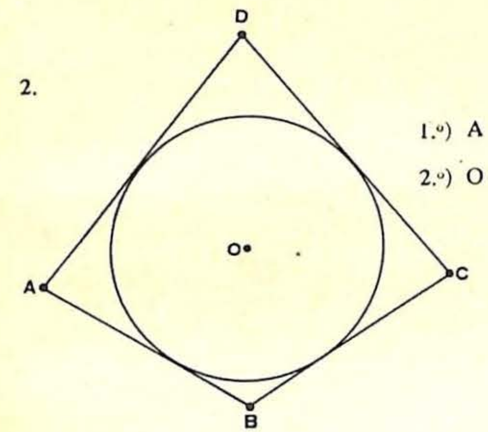
1.

1.º) O $\triangle ABC$ está .... $C(O, r)$.

2.º) A $C(O, r)$ está .... $\triangle ABC$.



2.



1.º) A $C(O, r)$ está .... quadrilátero $ABCD$.

2.º) O quadrilátero $ABCD$ está .... $C(O, r)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 99

Demonstre:

1.º) Se um dos lados de um triângulo inscrito numa circunferência é diâmetro então o triângulo é retângulo.

2.º) Os arcos determinados pelos lados de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência são congruentes.

3.º) Se um quadrilátero é inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

4.º) Se num quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência se traçam as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são congruentes.

apêndice

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS

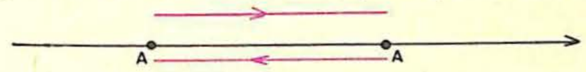
- Grupo das translações; grupo das rotações; simetrias

Grupo das translações; grupo das rotações; simetria

GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

1. *Segmento orientado; medida algébrica*

Seja o segmento $\overline{AA'}$, determinado pelos pontos A e A' da reta *r:*



O segmento AA' diz-se *orientado* quando se fixa um dos dois sentidos com que se pode percorrê-lo: de A para A', ou o seu *oposto*: de A' para A.

Tais sentidos serão assinalados por setas e o *segmento orientado* de A para A' terá a seguinte indicação : $\overrightarrow{AA'}$.

Assim como a cada *segmento* foi associada uma *medida* — que é um número real não-negativo —, a cada *segmento orientado* associa-se um número real relativo, denominado *medida algébrica* (m_a) do segmento orientado, da seguinte maneira:

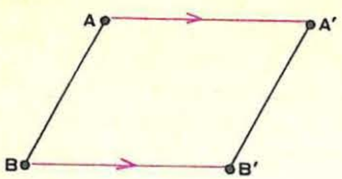
Se a medida do segmento $\overline{AA'}$, numa certa unidade, é 3, então:

$$m_a(\overrightarrow{AA'}) = {}^{+}3 \qquad \text{e} \qquad m_a(\overrightarrow{A'A}) = {}^{-}3$$

Serão consideradas *positivas* as medidas algébricas dos segmentos paralelos entre si e orientados num *certo sentido* e *negativas* as medidas algébricas dos segmentos orientados em *sentido oposto*.

2. *Segmentos eqüipolentes; verificação pelos paralelogramos*

Seja o paralelogramo:

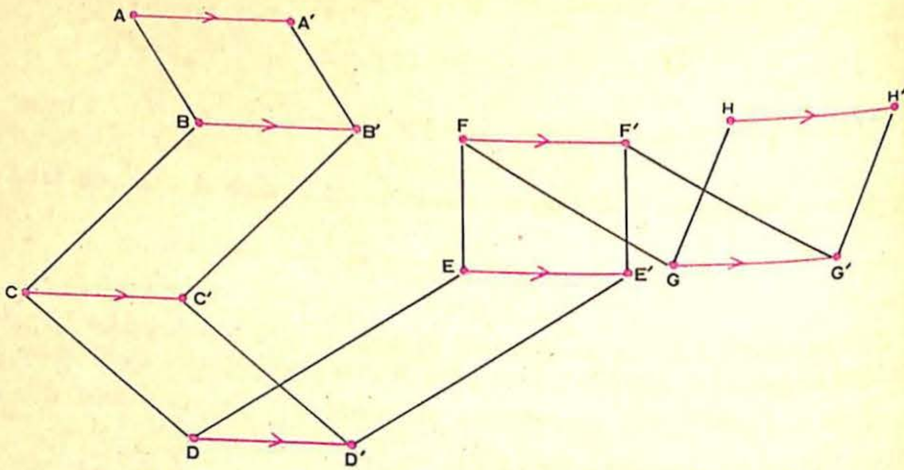


Os segmentos $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$ dizem-se *eqüipolentes* porque são:

1.º) orientados no *mesmo sentido;*

2.º) *paralelos* e *congruentes.*

Considere, agora, o seguinte *conjunto* de paralelogramos:



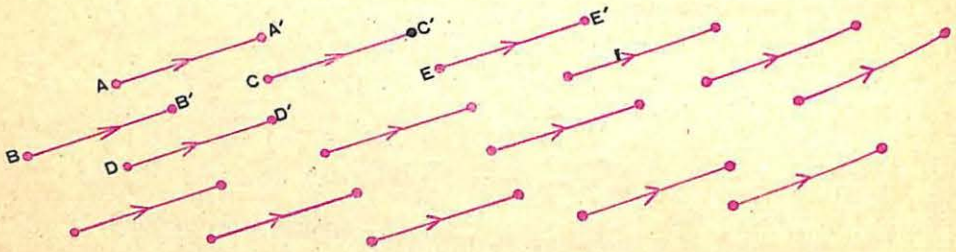
Os segmentos: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{GG'}$ e $\overrightarrow{HH'}$ são *eqüipolentes entre si* porque:

1.º) são orientados no *mesmo sentido;*

2.º) são *paralelos* e *congruentes.*

3. *Translação no plano*

Considere no plano *um segmento orientado* $\overrightarrow{AA'}$, cuja *medida algébrica*, numa certa unidade, é o número real a e *um conjunto de segmentos eqüipolentes a* $\overrightarrow{AA'}$: $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, ...



A *correspondência* que a cada ponto A (ou B, ou C, ou D, ou E, ...) faz corresponder um ponto A' (ou B', ou C', ou D', ou E', ...), extremidade

do segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$ (ou $\overrightarrow{BB'}$, ou $\overrightarrow{CC'}$, ou $\overrightarrow{DD'}$, ou $\overrightarrow{EE'}$, ...) chama-se TRANSLAÇÃO no plano, de *segmento orientado* $\overrightarrow{AA'}$.

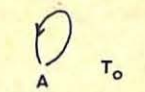
Indicação: T_a (a é a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AA'}$)

A *translação* T_a também é chamada uma *transformação* dos pontos do plano, porque "transforma" um ponto A num ponto A', mediante o segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$:

O ponto A' diz-se, por sua vez, "transformado" de A pela translação T_a.

Se o segmento orientado tem medida algébrica nula, isto é, $a = 0$, então o ponto A é transformado *nêle mesmo* e a translação é chamada *neutra* ou *identidade:*

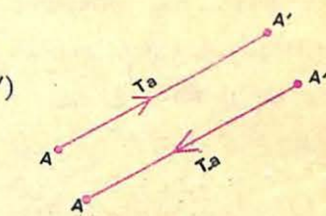
Indicação: T_0



A *translação inversa* de T_a é a translação de segmento orientado $\overrightarrow{A'A}$ que transforma A' no ponto A.

Indicação: T_{-a}

(a é a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AA'}$)

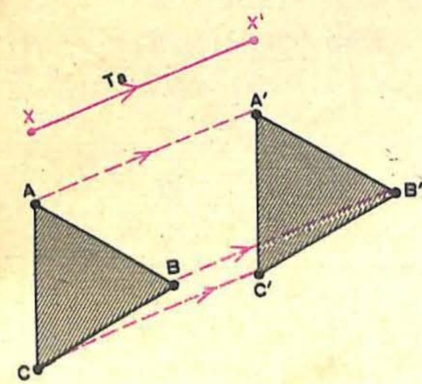


4. *Translação de figuras planas*

Como você efetuaria a translação T_a, de segmento orientado $\overrightarrow{XX'}$, de um triângulo ABC?

Basta traçar pelos seus vértices, respectivamente, os segmentos *paralelos* e *congruentes* ao segmento orientado XX'.

Os segmentos traçados são *eqüipolentes* entre si e suas extremidades respectivas A', B' e C', determinam o $\Delta A'B'C'$, que é o transformado do Δ ABC pela translação T_a.



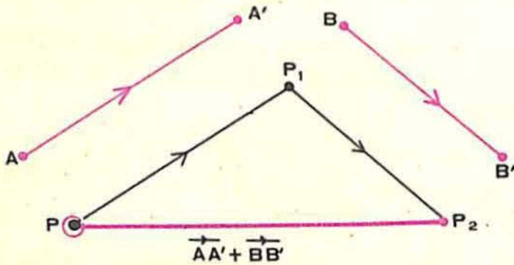
Você conclui fàcilmente que $\triangle\ ABC \cong \triangle\ A'B'C'$ (caso L.L.L.).
Demonstre, como exercício, que:

Por uma translação no plano um polígono é transformado num polígono congruente.

(*Sugestão:* basta demonstrar que os lados dos polígonos, correspondentes pela *translação*, são respectivamente *congruentes*, bem como os ângulos.)

5. *Adição de translações; estrutura*

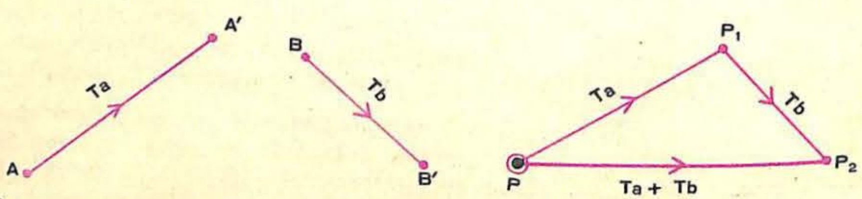
Como você determinaria a *soma* de dois segmentos orientados $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$?



Basta por um *ponto qualquer P* do plano traçar o segmento $\overrightarrow{PP_1}$ *eqüipolente* a $\overrightarrow{AA'}$ e pela extremidade P_1 traçar o segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ *eqüipolente* a $\overrightarrow{BB'}$. O segmento orientado $\overrightarrow{PP_2}$ representa a *soma* de $\overrightarrow{AA'}$ com $\overrightarrow{BB'}$, isto é:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}$$

Vamos, agora, determinar a *soma* de *duas translações*.
Sejam as *translações* T_a e T_b, caracterizadas, respectivamente, pelos *segmentos orientados* $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$.



e P um ponto *qualquer* do plano. Aplicando: a *translação* T_a em P, êste se transforma em P_1; a *translação* T_b em P_1, êste se transforma em P_2.

Nestas condições, a *translação* T_c, de *segmento orientado:* $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}$ que aplicada em P o transforma no ponto P_2, é denominada *soma* das translações T_a e T_b. Indicação: $T_c = T_a + T_b$.

A operação que produz essa soma é a *adição*(*) *de translações*.

Qual é a *estrutura* do Sistema Matemático constituído:

$$\begin{cases} \text{pelo conjunto das } \textit{translações no plano?} \\ \text{pela operação } \textit{adição} \text{ de translações?} \end{cases}$$

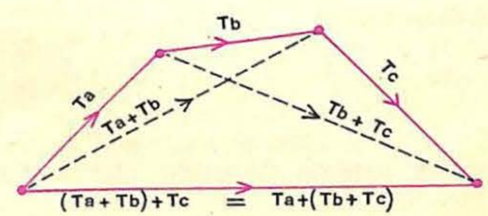
Você pode verificar, como exercício, que valem as seguintes *propriedades*, para quaisquer translações T_a, T_b e T_c:

(A) — *Associativa*:
$(T_a + T_b) + T_c = T_a + (T_b + T_c)$ (observe na figura)

(N) — *Elemento Neutro*: $\exists T_0 \mid T_a + T_0 = T_a$
(*Translação neutra* ou *Identidade*)

(I) — *Elemento Inverso*: $\forall T_a, \exists T_{-a} \mid T_a + T_{-a} = T_0$
(*Translação inversa*)

(C) — *Comutativa*: $T_a + T_b = T_b + T_a$



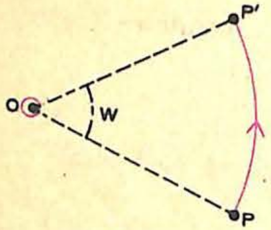
Logo, o *conjunto das translações no plano*, com relação à operação *adição de translações*, tem *estrutura* de GRUPO COMUTATIVO.

*) Também chamada *composição* de translações.

6. *Rotações no plano em tôrno de um ponto; arcos orientados*

Quando a um arco $\widehat{PP'}$ se associa um sentido de percurso, diz-se que o arco $\widehat{PP'}$ está *orientado*.

O *sentido positivo* ou *anti-horário* do arco orientado $\widehat{PP'}$ é aquêle considerado contrário ao percorrido pelos ponteiros de um relógio.



Seja O um ponto fixo no plano. A um ponto qualquer P dêsse plano façamos corresponder um ponto P', tal que:

$$\overline{OP} \cong \overline{OP'} \quad \text{e} \quad m(\widehat{PP'}) = w$$

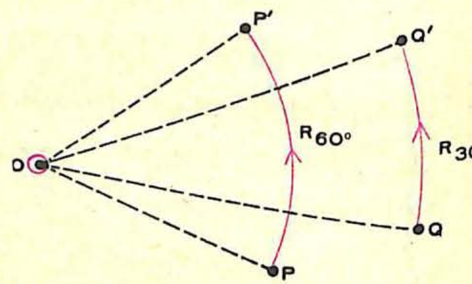
sendo w a *medida*, em graus, do arco orientado $\widehat{PP'}$.

Chama-se ROTAÇÃO de *centro* O e *amplitude* w, a tôda *transformação* que a qualquer ponto P do plano faz corresponder um ponto P', tal que:

$$\overline{OP} \cong \overline{OP'} \quad \text{e} \quad m(\widehat{PP'}) = w$$

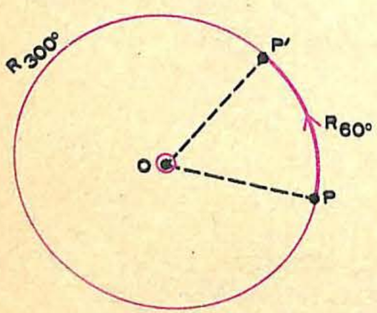
sendo: $0° \leqslant w \leqslant 360°$.

Indicação: R_w



Na figura estão representadas duas *rotações* de centro 0: $R_{60°}$ e $R_{30°}$, aplicadas respectivamente aos pontos P e Q do plano.

Quando $w = 0°$ ou $w = 360°$, a rotação é denominada *neutra* ou *identidade*, pois por essa rotação um ponto qualquer do plano é transformado *nêle mesmo*.



Indicação: R_0

Se a rotação R_w transforma P em P', a *rotação inversa* de R_w é a rotação, de amplitude

$$w' = 360 - w,$$

que transforma P' em P. Indicação: $R_{w'}$

Na figura, observa-se que:

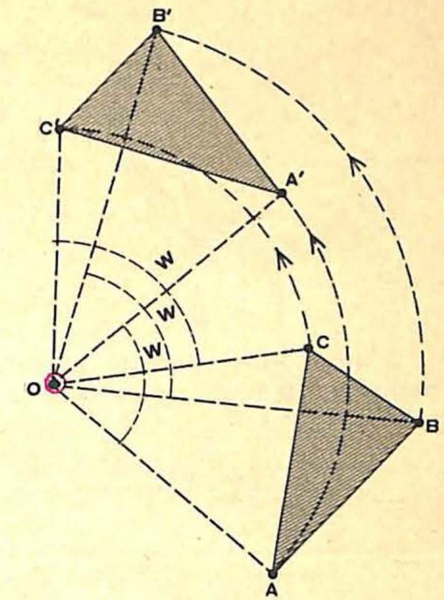
$R_{60°}$ transforma P em P' e a sua *inversa* $R_{(60°)'} = R_{300°}$ transforma P' em P.

7. *Rotação de uma figura em tôrno de um ponto*

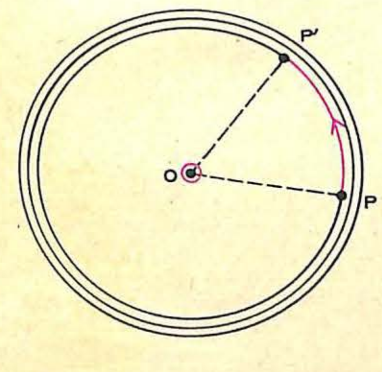
Que é transformar, por uma *rotação* R_w, o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$?

É efetuar a rotação, de *centro* O e *amplitude* w, que transforma os vértices A, B e C, respectivamente, nos vértices A', B' e C'.

Na figura, o $\triangle A'B'C'$ é o *transformado* do $\triangle ABC$ pela *rotação* R_w, de centro O e amplitude w.



8. *Arcos co-terminais; aplicações nas rotações*

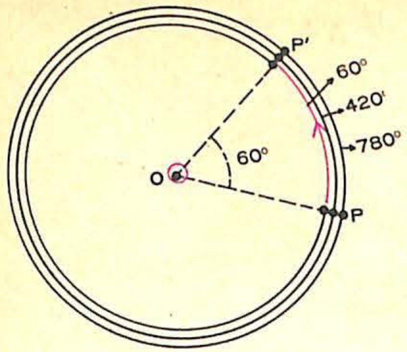


Suponha um ponto P "descrevendo" uma circunferência, de centro O e raio $\overline{OP}$. O ponto P pode, caminhando no sentido anti-horário, "passar" uma vez por P', continuar descrevendo a circunferência e sòmente "parar" em P', depois de dar *um número qualquer de voltas*.

Obteremos, assim, arcos orientados, de mesmas extremidades que o arco $\widehat{PP'}$, isto é, *todos* terão "origem" em P e "término" em P'. Tais arcos são denominados *co-terminais*.

Como, para cada volta dada, a medida do arco orientado fica acrescida de 360°, é sinal de que agora vamos encontrar arcos de medidas superiores a 360°.

Nestas condições, pode-se estender o conceito de *Rotação* a arcos orientados, de *medidas superiores a 360°*, mediante os respectivos arcos



co-terminais. Basta operar com a medida do *menor arco co-terminal* (que é sempre menor que 360°) a um arco dado.

Exemplo: são *co-terminais* do arco $\overset{\frown}{PP'}$ os arcos que medem, respectivamente:

$$\begin{aligned} & & 60^\circ \\ 60^\circ + 1 \times 360^\circ &= & 420^\circ \\ 60^\circ + 2 \times 360^\circ &= & 780^\circ \\ 60^\circ + 3 \times 360^\circ &= & 1\,140^\circ \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots \end{aligned}$$

Então, em vez de se operar, por exemplo, com um arco de 780°, basta trabalhar com a medida de seu menor arco co-terminal, que é 60°, pois:

$$\begin{array}{r|l} 780^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} \rightarrow 60^\circ & 2 \end{array} \quad \text{ou} \quad 780^\circ = 2 \times 360^\circ + \underset{\uparrow}{60^\circ}$$

9. *Adição de rotações no plano; estrutura*

Agora já podemos "fechar" a *adição* de duas rotações, definindo a *soma* de duas rotações de centro O da seguinte maneira:

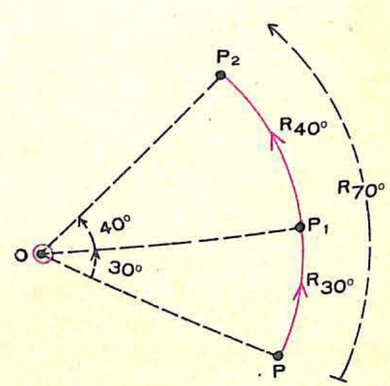
se R_{w_1} é a rotação que transforma P em P_1 (na fig., $w_1 = 30^\circ$)

e R_{w_2} é a rotação que transforma P_1 em P_2 (na fig., $w_2 = 40^\circ$),

então *soma* de R_{w_1} com R_{w_2} é a rotação R_w, de amplitude $w_1 + w_2$, que transforma P em P_2 (na fig., $w = w_1 + w_2 = 70^\circ$)

A *operação* que produz essa *soma* é chamada *adição*(*) de *rotações*.

Indicação: $R_w = R_{w_1} + R_{w_2}$



OBSERVAÇÃO: se $w_1 + w_2 < 360^\circ$,
então $w = w_1 + w_2$ (figura)
se $w_1 + w_2 \geqslant 360^\circ$,
então $w = (w_1 + w_2) - 360^\circ$

(*) Também denominada *composição* de rotações.

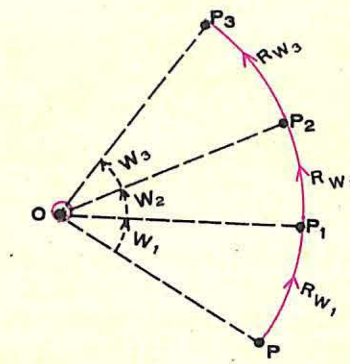
PROPRIEDADES:

(A) — *Associativa:*
$(R_{w_1} + R_{w_2}) + R_{w_3} = R_{w_1} + (R_{w_2} + R_{w_3})$

(N) — *Elemento Neutro:* $\exists R_0 \mid R_w + R_0 = R_w$
(Rotação *neutra* ou *Identidade*)

(I) — *Elemento Inverso:* $\forall R_w, \exists R_{w'} \mid R_w + R_{w'} = R_0$
(Rotação *inversa*)

(C) — *Comutativa:* $R_{w_1} + R_{w_2} = R_{w_2} + R_{w_1}$



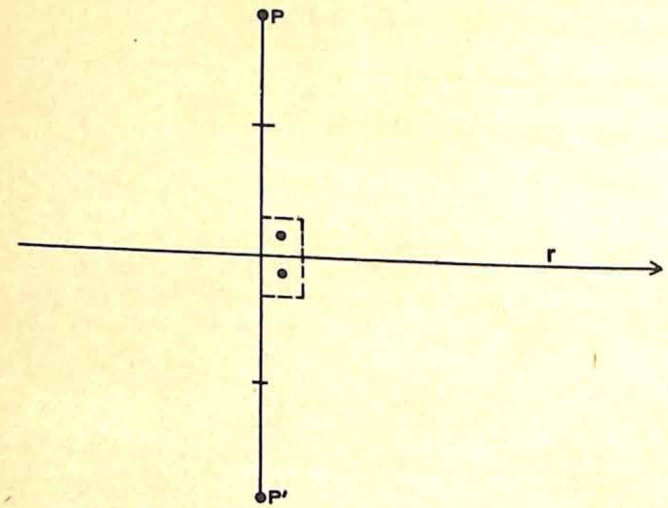
Logo, também o *conjunto das rotações no plano* em tôrno de um ponto, com relação à operação de *adição de rotações*, tem *estrutura* de GRUPO COMUTATIVO.

LEMBRETE AMIGO

A unidade da Matemática continua presente nas transformações geométricas planas. O fato de as *translações* e as *rotações* estudadas terem a MESMA ESTRUTURA, em relação às operações de *adição* definidas, permite dizer que elas pertencem ao GRUPO *das transformações geométricas planas*.

10. *Simetria axial*

Consideremos, no plano de sua fôlha de desenho, uma reta r:



O ponto P' é denominado *simétrico* de um ponto P, com relação à reta r, se os pontos P e P':

1.º) estão situados em *semi-planos opostos* em relação à reta r;

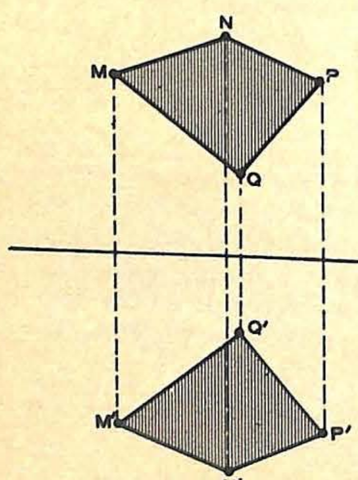
2.º) a reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é *perpendicular* à reta r;

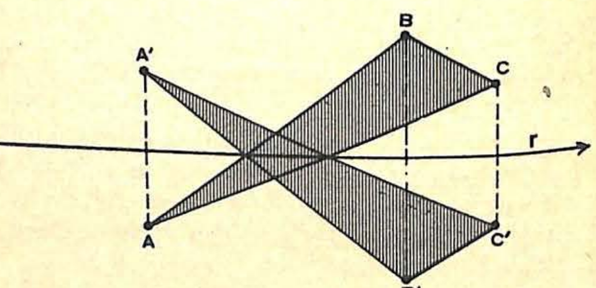
3.º) A *distância* de P a r é *igual* à *distância* de P' a r.

A reta r é denominada *eixo de simetria* dos pontos P e P'. Todo ponto do eixo de simetria diz-se *simétrico de si mesmo*.

A *transformação* no plano que a cada ponto faz corresponder o seu simétrico, com relação a uma reta, é denominada SIMETRIA AXIAL.

Na figura:

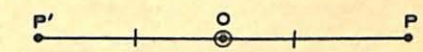




temos: o quadrilátero $MNPQ$ e seu *simétrico* $M'N'P'Q'$; o triângulo ABC e seu *simétrico* $A'B'C'$, com relação ao eixo de simetria r.

11. *Simetria central*

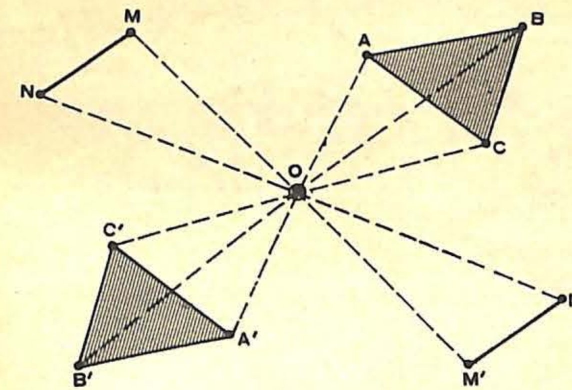
Um ponto P' é *simétrico* de um ponto P, com relação a um ponto fixo O, se O é o *ponto-médio* do segmento $\overline{PP'}$.



O ponto O, denominado *centro de simetria*, é simétrico de si mesmo. Dois pontos P e P' de um plano têm sòmente um centro de simetria: o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$.

A *transformação* no plano que a cada ponto faz corresponder o seu simétrico, com relação a um centro fixo O, é denominada SIMETRIA CENTRAL.

Na figura:



temos: o segmento $\overline{MN}$ e seu *simétrico* $\overline{M'N'}$; o triângulo ABC e seu *simétrico* $A'B'C'$, com relação ao centro de simetria O.

NOTA: A *simetria central* é uma *rotação* especial ($R_{180°}$) em tôrno do centro O. Verifique você mesmo êsse fato.

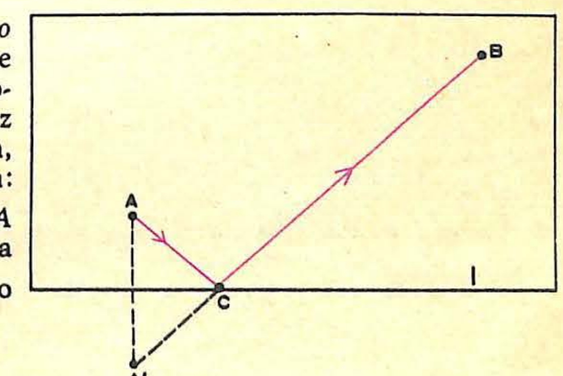
Uma aplicação prática da *simetria axial*:

Qual é o *menor caminho* que uma bolinha A tem de percorrer para bater numa bolinha B, tocando uma só vez num dos lados de uma mesa, como mostra a figura? Basta:

1.º) construir A' simétrico de A em relação ao lado l da mesa

2.º) determinar a intersecção de $A'B$ com l, isto é:

$$\overline{A'B} \cap l = \{C\}$$



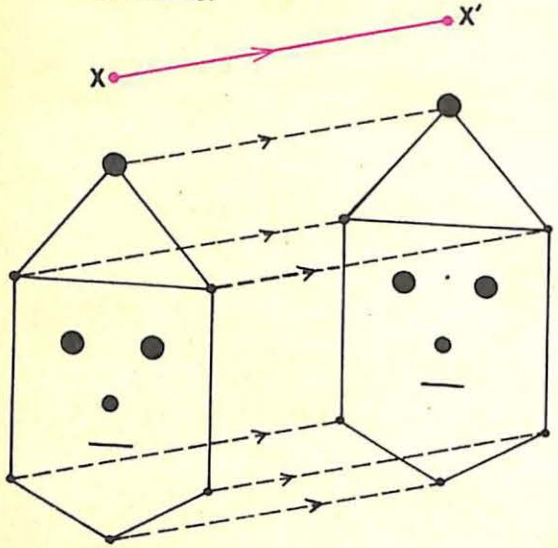
O ponto C, no lado l da mesa, é onde a bolinha deve tocar para, a seguir, bater em B, percorrendo o *menor caminho*.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 100

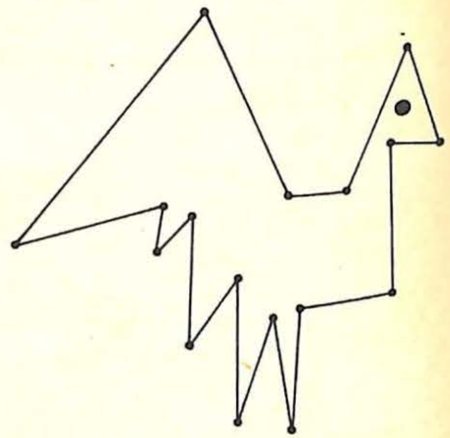
Acêrca de *translações:*

1. Na *translação* T_a, de amplitude $\overrightarrow{XX'}$, onde $m_a(\overrightarrow{XX'}) = 4\text{cm}$, efetue a translação das seguintes figuras planas:

1.ª) Modêlo:

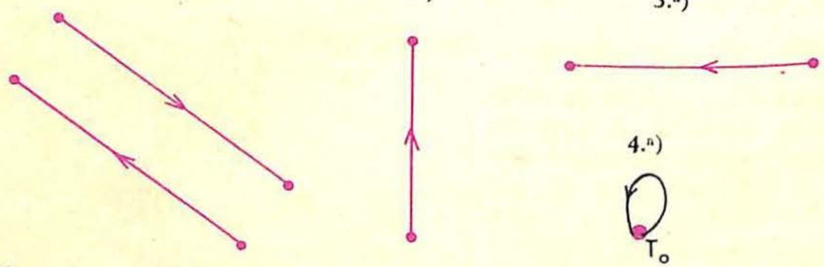


2.ª)



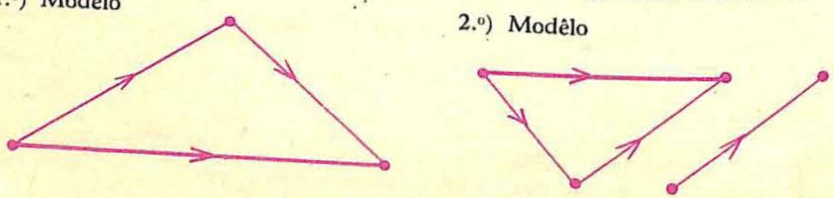
2. Represente a *translação inversa* de cada uma das seguintes translações:

1.ª) Modêlo: 2.ª) 3.ª) 4.ª)

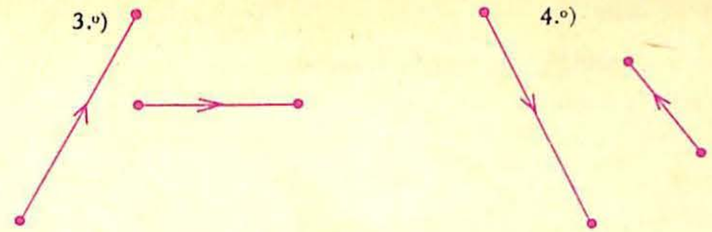


3. Efetue a *soma* de cada um dos seguintes pares de segmentos orientados:

1.º) Modêlo 2.º) Modêlo



3.º) 4.º)



4. Considere na reta um *conjunto de translações:*

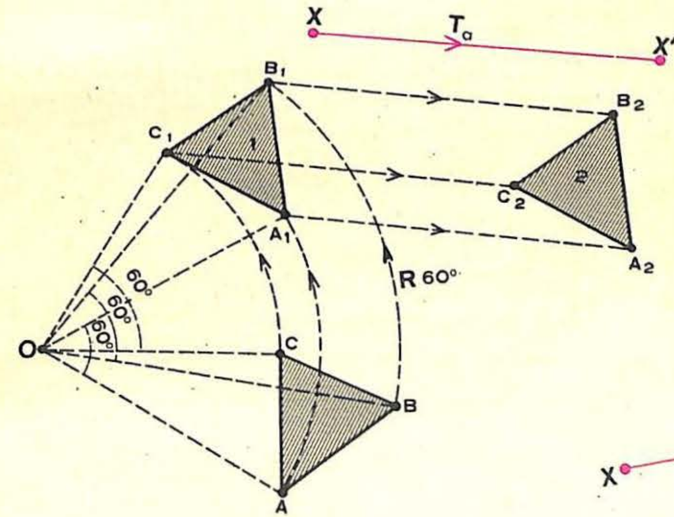
O Sistema Matemático constituído pelo *conjunto de translações* numa reta em relação à operação *adição de translações*, tem *estrutura* de GRUPO COMUTATIVO?

Acêrca de *translações e rotações:*

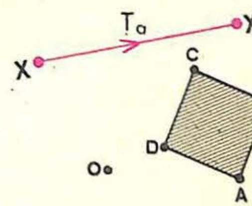
5. Fixado O como centro e sendo $m(\overline{OP}) = 3\text{cm}$, determine os respectivos *transformados* de P pelas seguintes *rotações:*

1.ª) $R_{30°}$	2.ª) $R_{120°}$	3.ª) R_0
4.ª) $R_{(30°)'}$	5.ª) $R_{(60°)}$	6.ª) $R_{(0)'}$

6. Efetue no $\triangle ABC$, desenhado na sua fôlha de desenho uma *rotação* $R_{60°}$, de centro O e, a seguir, uma *translação* T_a, de amplitude $\overrightarrow{XX'}$ (fixada na fôlha), onde $m_a(\overrightarrow{XX'}) = 4\text{cm}$ (Modêlo)



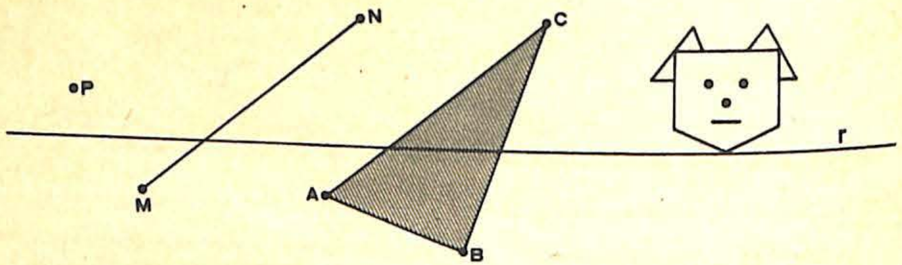
7. Idem, no quadrado $ABCD$, efetue: T_a, onde $m(\overrightarrow{XX'}) = 2\text{cm}$ e, a seguir, $R_{50°}$, de centro O.



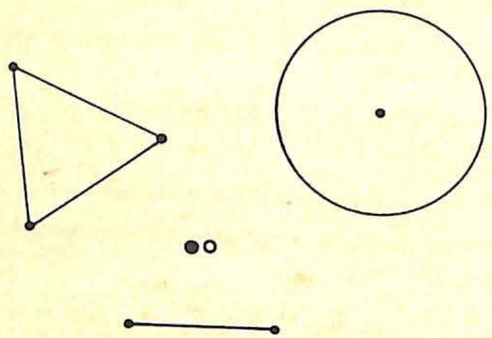
Acêrca de *simetrias:*

8. Determine os simétricos das seguintes figuras:

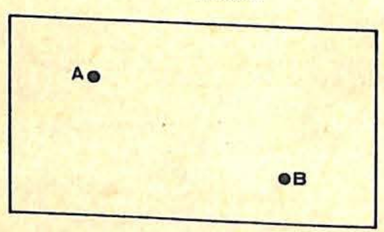
1.ª) com relação à *reta r:*



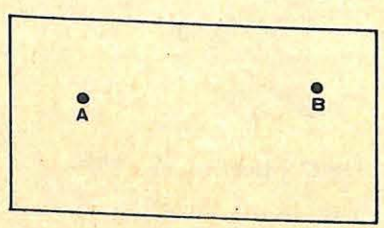
2.ª) com relação ao *centro O:*



9. Qual é o *menor caminho* que a bolinha *A* deve percorrer para bater na bolinha *B*, tocando uma só vez num dos lados da mesa?

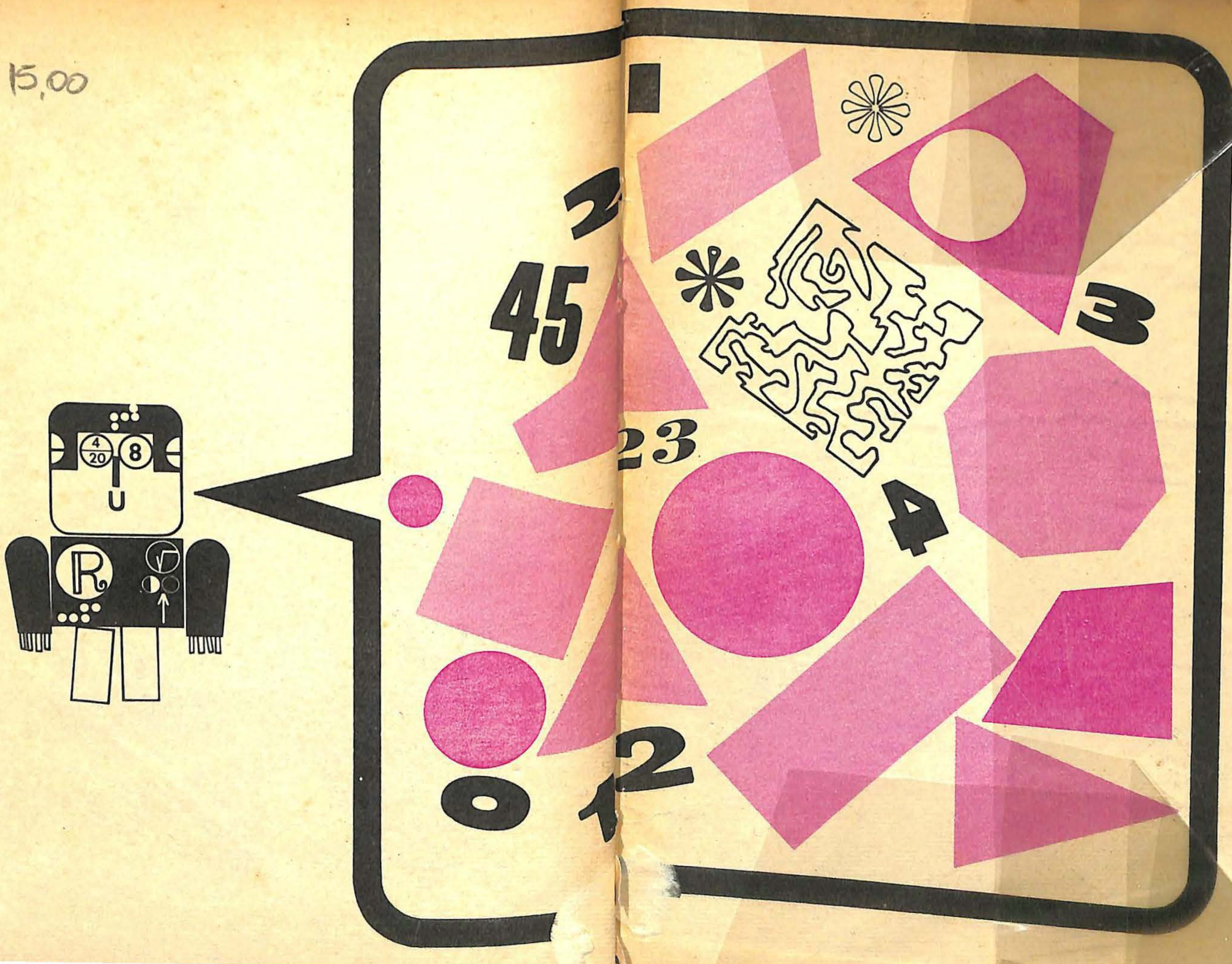


10. Idem, tocando uma vez em cada um dos dois lados consecutivos da mesa?



Obra executada nas oficinas da
SÃO PAULO EDITORA S. A.
São Paulo 6, SP — Brasil

91548
R$ 15,00



COMPANHIA EDITORA NACIONA