Derivando esta (relação) função em relação a x sucessivamente n vezes se obterá n equações da forma:

$$
(2) \quad \begin{cases} y' = f_1(x;\, c_1, c_2, \dots c_n) \\ y'' = f_2(x;\, c_1, c_2, \dots c_n) \\ y''' = f_3(x;\, c_1, c_2 \dots c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = f_n(x;\, c_1, c_2, \dots c_n) \end{cases}
$$

Se (1) e (2) formam um sistema de $n+1$ equações entre $y, y', y'', \dots y^{(n)}, c_1, c_2, \dots c_n$ será possível determinar $c_1, c_2, \dots c_n$ em função de $y, y', y'' \dots y^{(n)}$ e de x e substituindo na equação dada obtem-se uma relação do tipo:

$$(3) \quad F(x;\, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

que é uma equação de ordem n na qual não comparecem mais as n constantes arbitrárias. Chama-se a equação (3) de equação diferencial.

Equações de primeira ordem.

Equações risolute respecto alla derivata prima

1) Equações diferenciais exatas.

Se existe uma equação diferencial de primeira ordem resolvida em relação à derivada 1ª:

$$(1) \quad y' = f(x,y)$$

Pondo $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ com P e Q funções de x e y a equação torna-se

$$(1)' \quad P(x,y)\,dx + Q(x\,y)\,dy = 0$$

O 1º membro desta equação considerados x e y como variáveis independentes é a diferencial exata de uma função $U(x,y)$ tal

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{(conforme já vimos)}$$

Se esta condição se verifica

$$(3) \quad U(x,y) = \int_a^x P(x,y)\,dx + \int_b^y Q(a,y)\,dy$$

e portanto a (1)' pode ser escrita $dU = 0$ donde segue $U = \text{cte}$ que é a integral geral da equação (1)'

$$(4) \quad \int_a^x P(x,y)\,dx + \int_b^y Q(x,y)\,dy = C$$

A (4) é a integral geral da equação (1)'; e em geral se diz que uma equação si sa integrare quando a sua integração se reduz a um problema de quadratura. Observa-se ainda que a integral da (1)' pode por-se sob a forma

$$(4)' \qquad \int_b^y Q(x,y)\,dy + \int_a^x P(x,b)\,dx) = C_1$$

Exemplo:

$$\frac{x(2x^2+2y^2+3)}{x^2+y^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+1}dy = 0$$

aplicando a (4)'

$$\int_0^x \left[\frac{x(2x^2+2y^2+3)}{x^2+y^2+1}\right]_{y=0} dx + \int_0^y \frac{y}{x^2+y^2+1}\,dy = c^{te}$$

$$2x + x/(x^2+y^2+1) = c^{te}$$

2) Caso das variáveis separadas.

Se a equação (1)' é imediatamente integrável se P é uma função sòmente de x e Q, sòmente de y

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

se diz que as variáveis são separadas. Por outro lado, sendo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c^{te}$$

Ao tipo precedente se reconduz a equação da forma:

$$X Y\,dx + X_1 Y_1\,dy = 0$$

com X, X_1 funções de x e Y, Y_1 funções de y

$$\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0$$

$$\int \frac{X}{X_1}dx + \int \frac{Y_1}{Y}dy = c^{te}$$

Observa-se que se $\beta(\alpha)$ é um valor de $y(x)$ para o qual se tem $Y(\beta) = 0$, $[X_1(\alpha) = 0]$ $y = \beta$, $[x = \alpha]$ é uma só solução da equação proposta

$$\frac{tg\,y}{\cos^2 x}dx + \frac{tg\,x}{\cos^2 y}dy = 0$$

se tem

$$\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{tg\,x}dx + \frac{1}{\cos^2 y}\frac{1}{tg\,y}dy = 0$$

$$\log tg\,x + \log tg\,y = c^{te}$$

$$tg\,x\,tg\,y = c^{te}$$

Equações a coeficientes omogêneos.

A equação (1)' se diz a coeficiente homogéneo (de x e y) quando $P(x,y)$ $Q(x,y)$ são funções homogéneas de x e y do mesmo grau m. Neste caso a equação com uma mudança da variável independente pode sempre se transformar em uma outra de variáveis separadas.

$$P(x,y) = P\left(1x, \frac{y}{x}x\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$Q(x,y) = x^m Q\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

e a equação proposta toma a forma

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Se efetuarmos uma mudança de variáveis pondo $\frac{y}{x} = t$ donde $dy = x\,dx + t\,dx$, temos

$$P(1,t)\,dx + Q(1,t)[x\,dt + t\,dx] = 0$$

donde

$$(5) \qquad [P(1,t) + tQ(1,t)]\,dx + xQ(1,t)\,dt = 0$$

$$(6) \qquad \frac{dx}{x} + \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)} = 0$$

A integral geral desta equação é

$$(7) \qquad \log x + \int \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)}\,dt = c^{te}$$

$$-\int \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)}\,dt \qquad\qquad -\int \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)}\,dt$$

$$x = c^{te} \qquad\qquad y = tx = c^{te}$$

b) Ao passar da (5) para a (6) supomos

$$P(1,t) + tQ(1,t) \neq 0$$

Porém, se supormos que para um valor de t

$$P(1,t) + tQ(1,t) = 0,$$

a (5) dá

$$xQ(1,t)\,dt = 0 \quad \therefore \quad t = c^{te}$$

portanto, $y = tx$ onde t é uma raiz da equação $P(1,t) + tQ(1,t) = 0$, são integrais da equação proposta.

c) Consideremos por exemplo a equação:

$$(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$$

$$P(1,t) = 1+t \qquad Q(1,t) = t-1$$

$$P(1,t) + tQ(1,t) = 1 + t^2$$

$$\int \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)}\,dt = \int \frac{t-1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{2}\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + c^{te}$$

Da (7) tem-se

$$\log x + \log\sqrt{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c^{te} = 0$$

$$\log\left[x\sqrt{t^2+1}\right] + c^{te} = \operatorname{arctg} t$$

e enfim

$$y = tx \qquad \log\sqrt{x^2+y^2} + c = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

A equação : $P(1,t) + tQ(1,t) = 1 + t(t-1) = t^2+1=0$
não tem raizes no campo ~~complexo~~ real

$$(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

$$P(1,t) = 1+t^2 \qquad Q(1,t) = -2t$$

$$P(1,t) + tQ(1,t) = 1-t^2$$

Pela (6)

$$\frac{dx}{x} - \frac{2t}{1-t^2}\,dt = 0$$

$$\log x + \log(1-t^2) = \log c$$

$$x(t^2-1) = c$$

$$x = \frac{c}{t^2-1} \qquad c = x(t^2-1) \qquad t^2 = \frac{c+x}{x}$$

$$y = tx = \pm\sqrt{x(c+x)} \qquad y = \pm\sqrt{x(c+x)}$$

Tendo-se : $P(1,t) + tQ(1+t) = 1-t^2 = 0$, para $t=\pm 1$ resulta $y = x$ $y=-x$, que se obtem da anterior pondo $c=0$ em $y=\pm\sqrt{x(c+x}$

Equações transformáveis em outras a coeficientes homogêneos

Seja dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

em que a, b, c, a_1, b_1, c_1 são constantes

Pondo-se $x = X+\alpha$ $y = Y+\beta$ com α e β constantes a equação torna-se

$$\frac{dY}{dX} = \varphi\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right)$$

a qual é homogênea (φ é uma função homogênea de grau 0 em relação a X e a Y].

Por outro lado supondo

$$ab_1 - a_1b = 0 \quad \text{, isto é;}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{K} \quad , \quad a_1x+b_1y = K(ax+by)$$

donde a função incógnita

$$u = ax+by$$

$$u' = a + by' = a + b\varphi\left(\frac{u+c}{Ku+c_1}\right)$$

daí

$$\frac{du}{dx} = a + b\varphi\left(\frac{u+c}{Ku+c_1}\right) \quad ; \quad dx = \frac{du}{a+b\varphi\left(\frac{u+c}{Ku+c_1}\right)}$$

na qual as variaveis são separáveis.

Equações lineares.

Chamam-se equações lineares aquelas que são de 1º grau em relação a y e a y', isto é, da forma

$$(8) \qquad y' + P(x)\, y = Q(x)$$

onde supomos $P(x)$ e $Q(x)$ funções de x num certo intervalo e nêle contínuas. Observa-se que se supomos $Q(x) = 0$ a (8) toma a forma

$$y' + P(x)\, y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + P\,dx \qquad \frac{dy}{y} + P\,dx = 0$$

donde

$$\log y + \int P\,dx = \log c$$

$$(9) \qquad y = c\, e^{-\int P\,dx}$$

Provemos que a equação geral (8) pode se transformar em uma outra

$$(10) \qquad y = u v$$

onde u e v são funções a determinar oportunamente. Pela (10) a 8) torna-se $[y' = vu' + uv']$

$$(11) \qquad vu' + u(v' + Pv) = Q$$

Se escolhermos v tal que

$$v' + Pv = 0$$

fazendo-se na (9) $c = 1$

$$(12) \qquad v = e^{-\int P\,dx}$$

a (11) torna-se $vu' = Q$, isto é, $u' = e^{\int P\,dx} Q$

donde

$$(12)' \qquad u = \int e^{\int P\,dx} Q\,dx + c$$

De acordo com a (12) e (12)' a (10) dá para integral geral da equação (8):

$$13) \qquad y = e^{-\int P\,dx} \left\{ \int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C \right\}$$

b) A integral (13) da equação (8) toma a forma

$$y = c\varphi(x) + \psi(x)$$

com $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funções de x $\left[\varphi(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \neq 0\right]$; é uma função linear da constante de integração. Se $y_1(x)$ é uma integral particular da equação (8) correspondente ao valor c_1 da constante teremos:

$$y_1 = c_1 \varphi(x) + \psi(x)$$

e portanto

$$y - y_1 = (c - c_1)\varphi(x)$$

Analogamente se $y_2(x)$ é uma outra integral particular da (8) correspondente a um outro valor c_2 da constante

$$y - y_2 = (c - c_2)\varphi(x)$$

logo $$\frac{y-y_1}{y-y_2} = \frac{c-c_1}{c-c_2}$$

que constitue a relação simples entre as integrais particulares da (8) que é constante e igual à relação simples das constantes correspondentes.

Assim se conhecermos duas integrais particulares bastará resolver em relação a y a equação

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = m$$

com uma constante arbitrária.

c) Exemplo

$$y' + ay = e^{mx}$$

sendo a e m constantes, $a+m \neq 0$

$$\int P\,dx = ax, \quad \int e^{\int P dx} Q\,dx = \int e^{(a+m)x}\,dx = \frac{e^{(a+m)x}}{a+m}$$

donde

$$y = e^{-ax}\left[\frac{e^{(a+m)x}}{a+m} + c\right].$$

Se $a+m=0$ $[m=-a]$ a equação toma a forma

$$y' + ay = e^{-ax}$$

$$\int P\,dx = ax \qquad \int e^{\int P dx} Q\,dx = \int dx = x$$

logo $$y = e^{-ax}(x+c)$$

Pela equação

$$y' - y \cot g\, x = \frac{1}{x} - \cot g\, x \log x$$ se tem:

$$\int P\,dx = -\int \cot g\, x\,dx = -\log \operatorname{sen} x, \quad e^{-\int P dx} = \operatorname{sen} x$$

$$\int e^{\int P dx} Q\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\left\{\frac{1}{x} - \cot g\, x \log x\right\} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x \operatorname{sen} x}\,dx - \int \frac{\cot g\, x}{\operatorname{sen} x} \log x\,dx = \frac{\log x}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{\log x}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x\,dx -$$

$$- \int \frac{\log x}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x\,dx = \frac{\log}{\operatorname{sen} x}.$$

$$y = \left(\frac{\log x}{\operatorname{sen} x} + c\right) \operatorname{sen} x = c \operatorname{sen} x + \log x$$

Equação de Bernouilli

Tem a forma

(14) $$y' + Py = Qy^n$$

com n real diferente de 0 e de 1 [para n=0 n=1 recai-se nos casos já examinados] e P e Q funções de x em um certo intervalo e nele contínuas

Dividindo a (14) por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + Py^{1-n} = Q.$$

$$\frac{1}{1-n}\left[y^{1-n}\right]' + P\left[y^{1-n}\right] = Q$$

visto para $\quad y^{1-n} = z$

$$z' + P(1+n)z = Q(1-n)$$

tornando-se linear a equação proposta

De acordo com a (13) e a (14)

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = \left[e^{-(1-n)\int P dx}\left\{(1-n)\int Q e^{(1-n)\int P dx} dx + C\right\}\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Por exemplo a equação

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 x \operatorname{sen} x$$

$P = \frac{1}{x} \qquad Q = x \operatorname{sen} x \qquad n = 2$

$$-(1-n)\int P dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

$$\int Q e^{(1-n)\int P dx} dx = \int \frac{x \operatorname{sen} x}{x} dx = -\cos x$$

$$y = \left[x(\cos x + c)\right]^{-1} = \frac{1}{x(\cos x + c)}$$

Equação de Ricatti

Chama-se equação de Ricatti a equação diferencial da forma

(15) $\qquad y' + L y^2 + M y + N = 0$

com L, M, N funções de x em um dado intervalo

e nele contínuas. A integração desta equação não se pode reconduzir em geral à quadratura mas é possível efetuar a integração quando é conhecido uma integral particular

Seja y_0 uma integral particular da (15)

$$y_0' + L y_0^2 + M y_0 + N = 0$$

subtraindo da (15)

$$(y - y_0)' + L(y - y_0) + M(y - y_0) = 0$$

Visto que fazemos $y - y_0 = t$ esta torna-se

$$t' + Lt(t + 2y_0) + Mt = 0$$

e recai-se então na equação do tipo de Bernoulli

$$t' + (2Ly_0 + M)t = -Lt^2$$

Esta com a transformação $\quad t = \frac{1}{z}$

(16) $\qquad y = y_0 + \frac{1}{z}$

resulta a equação linear

(17) $\qquad z' - (2Ly_0 + M)z = L$

Donde

(18) $\qquad z = e^{\int (2Ly_0 + M)dx}\left[\int I e^{-\int(2Ly_0 + M)dx} + c\right]$

e da (16) e (18) obtem-se a integral geral da equação (15)

Sejam z_1 e z_2 duas integrais particulada (17), teremos:

$$z = \frac{1}{y-y_0} \quad ; \quad z_1 = \frac{1}{y_1-y_0} \qquad z_2 = \frac{1}{y_2-y_0}$$

portanto, de acôrdo com nº 8 b

$$\frac{z-z_1}{z_1-z_2} = \frac{c-c_1}{c_1-c_2} \qquad \frac{y_1-y}{(y-y_0)(y_1-y_0)} = \frac{y_2-y_1}{(y_1-y_0)(y_2-y_0)} = c^{te}$$

da qual

$$\frac{y_2-y_0}{y_2-y_1} : \frac{y-y_0}{y-y_1} = c^{te} \qquad (y_0, y_1, y_2, y) = c^{te}$$

isto é, a relação das quatro integrais particulares da equação de Ricatti é constante.

Se são conhecidas três integrais particulares y_0, y_1, y_2 bastará resolver em relação a y a equação do 1º grau: $(y_0, y_1, y_2, y) = c^{te}$

Equação de 1ª ordem não resolvida em relação à derivada 1ª

Generalidades

Seja dada uma equação diferencial de 1ª ordem do tipo:

(1) $$f(x,y,y') = 0$$

Suponhamos que esta seja resolvível em

relação a y' e que se recai em uma ou mais equações do tipo:

(1)' $$y' = f_1(x,y) \quad ; \quad y' = f_2(x,y) \; ; \; \dots$$

e cujas integrais gerais tenham a forma

$$F_1(x,y,c_1) = 0 \qquad F_2(x,y,c_2) = 0 \; ; \dots$$

Chamaremos integral geral da equação (1) uma solução que compreenda todas as (2). assim se as (1)' são em número finito e n é êste mesmo número, a integral geral da (1) é:

$$F_1(x,y,c_1)\, F_2(x,y,c_2) \dots F_n(x,y,c_n) = 0$$

Por exemplo a equação

$$y'^2 - a^2x^2 = 0$$

daí $$y' = \pm a x$$

e a integral geral da equação dada é

$$\left(y - \frac{a}{2}x^2 - c_1\right)\left(y + \frac{a}{2}x^2 - c_2\right) = 0$$

Equação prive di una delle due variabili x e y

Tem a forma

$$f(x,y') = 0 \qquad f(y,y') = 0$$

Examinemos a 1ª equação

(3) $$f(x, y') = 0$$

e suponhamos que a sua solução seja expressa paramètricamente por

(4) $$x = g(t) \qquad y'_x = \varphi(t) \qquad y'_x = \frac{dy}{dx}$$

Consideremos t como variável independente

$$y'_t\, dt = y'_x\, x'_t\, dt = \varphi(t)\, g'(t)\, dt$$

integrando em relação a t

(5) $$y = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, g'(t)\, dt + C$$

Esta e a relação $x = g(t)$ exprimem paramètricamente a solução da equação (3).

Considerada uma curva integral Γ da equação diferencial dada correspondente a um valor particular de C, todos os outros valores ou todas as outras curvas integrais se obtêm dando a Γ uma translação arbitrária paralela ao eixo dos y.

Por exemplo, seja a equação

$$y'^3 - x y' + x = 0$$

Façamos

$$y'_x = t \; [= \varphi(t)] \qquad x = t^3/(t-1) \; [= g(t)]$$

Para $t = 1$ tem-se $y' = 1$ $y = x + c$, que não é integral da equação dada.

Teremos

$$dy = t\,\frac{3t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2}\,dt = \frac{2t^4 - 3t^3}{(t-1)^2}\,dt$$

$$= \left[2t^2 + t - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right] dt$$

logo

$$y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \log(t-1) + \frac{1}{t+1} + C$$

e a expressão paramétrica da integral da equação dada é

$$x = \frac{t^3}{t-1} \qquad y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \log(t-1) + \frac{1}{t-1} + C$$

Eliminando t entre estas duas equações se dará y em função de x

b) Seja agora dada a outra equação

$$f(y, y') = 0$$

e seja $y = g(t)$ $y'_x = \varphi(t)$ uma de suas soluções expressa em função do parâmetro t. Se $t = \alpha$ é uma raiz da equação $\varphi(t) = 0$ a reta $y = g(\alpha)$ é uma curva integral da equação dada.

Limitando-se agora a um intervalo no qual

$$\varphi(t) \neq 0$$

e assumindo t como uma variável independente, temos

$$x'_t \, dt = x'_y \, y'_t \, dt = \frac{1}{y'_x} y'_t \, dt = \frac{g'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

e ~~visto que~~ portanto a integral da equação dada expressa sob a forma paramétrica é

$$x = \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{\varphi(t)} dt + C \qquad y = g(t)$$

Se Γ é uma curva integral da equação dada correspondente a um valor particular de c, todas as outras curvas integrais se obtem dando à curva Γ uma translação arbitrária paralela ao eixo dos x

Seja por exemplo a equação

$$y'^3 - yy' + y = 0$$

fazendo

$$y' = t \quad [=\varphi(t)] \qquad y = \frac{t^3}{t-1} \quad [=g(t)]$$

para $t=1$ $y'=1$ $y = c+x$ que não é integral da equação dada

$$dx = \frac{2t^3-3t^2}{t(t-1)^2} dt = \frac{2t^2-3t}{(t-1)^2} dt = \left[2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right] dt$$

A expressão paramétrica da integral geral é

$$x = 2t + \log(t-1) + \frac{1}{t-1} + c$$

$$y = \frac{t^3}{t-1}$$

A equação admite ainda a integral

$$y = 0 \quad [\varphi(0) = 0]$$

Equação homogênea

Seja a equação

$$F(x, y, y') = 0$$

com o 1º membro exprimindo uma função homogênea do gráu m em relação às variáveis x, y.

$$F(tx, ty, y') = t^m F(x, y, y')$$

em um intervalo no qual $x \neq 0$

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = \frac{F(x, y, y')}{x^m}$$

Para $u = \frac{y}{x}$ a equação dada pode ser escrita

$$F(u, y') = 0$$

Se esta pode ser resolvida em relação y', teremos

$$y'_x = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

que sabemos integrar

Mais em geral suponhamos que uma solução da $F(u, y') = 0$ possa exprimir-se parametricamente em funçao de um parâmetro t e se tem:

$$\mu = \frac{y}{x} = g(t) \qquad y'_x = \varphi(t)$$

Diferenciando a relação $y = xg(t)$ temos

$$dy = x g'(t) dt + g(t) dx$$

mas é ainda

$$dy = y'_x dx = \varphi(t) dx$$

e confrontando estas duas últimas obtemos a equação diferencial entre x e t:

$$[g(t) - \varphi(t)] dx + x g'(t) dx = 0$$

que pode ser transformada em uma outra a variáveis separáveis.

Observa-se que se α é uma raiz da equação $g(t) - \varphi(t) = 0$, $dt = 0$ $t = \alpha$; logo $y = xg(\alpha)$ é uma solução da equação dada; exclue-se esta solução e limitando-se a um intervalo no qual $g(t) - \varphi(t) \neq 0$:, dividido por $x[g(t) - \varphi(t)]$ encontramos:

$$\frac{dx}{x} + \frac{g'(t)}{g(t) - \varphi(t)} dt = 0$$

logo a integral da equação dada se exprime parametricamente com a formula

$$x = c e^{\int \frac{g'(t)}{\varphi(t) - g(t)} dt} \qquad y = c g(t) e^{\int \frac{g'(t)}{\varphi(t) - g(t)} dt} \qquad [y = g(t) x]$$

Classe de equações que se integram com o processo de derivação

Seja a resolver a equação:

$$(6) \qquad y = f(x, y')$$

Observemos que suposta conhecida a expressão de y'_x que indicaremos com p, $y'_x = p$ da (6) temos

$$y = f(x, p)$$

e desta nos serviremos para exprimirmos a integral da equação dada. Ora, se derivarmos a (7) temos a equação diferencial em p:

(8) $$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

e se for possível integrar esta equação se recairá por sua integral geral a uma relação do tipo:

(9) $$F(x, p, c) = 0$$

e, portanto, eliminando entre a (7) e a (9) a variável p teremos a integral da equação dada.

Equação de D'Alembert - Lagrange e de Clairaut

a) Chama-se equação D'Alembert - Lagrange àquela do tipo:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

Pode-se aplicar o processo acima indicado pondo-se $y'_x = p$ se tem

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

e derivando em relação a x:

(10) $$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Supondo-se $p - \varphi(p) \neq 0$ teremos a equação linear:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

a qual integrando teremos

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left[\int_a e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}dp + c\right] = \theta(p,c)$$

logo a integral da equação dada se obtem eliminando o parâmetro p entre as duas equações

(10)' $$y = x\varphi(p) + \psi(p), \qquad x = \theta(p, c)$$

b) Se $p - \varphi(p) = 0$ (não identicamente) e sendo α uma constante, raiz da equação $p - \varphi(p) = 0$

Pondo-se $p = \alpha$ e $\frac{dp}{dx} = 0$ a (10) resulta satisfeita e se obtem para a equação dada a outra integral

$$y = x\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

geometricamente correspondente a uma reta.

c) Seja agora identicamente $p - \varphi(p) = 0$ isto é, seja resolver a equação de Clairaut:

(11) $$y = xy' + \psi(y')$$

Para $y' = p$ a (10) resulta:

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

Teremos para $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = c$ e por-dando a integral

$$(12) \qquad y = cx + \psi(c)$$

A curva integral correspondente é uma família de retas

Supondo alem nisso $x + \psi'(p) = 0$ a equação (11) tem-se então a integral que se obtem eliminando p entre as duas equações:

$$(13) \qquad y = px + \psi(p) \quad , \quad x + \psi'(p) = 0$$

a 2ª é obtida da 1ª derivando-a em relação ao parâmetro p. Se da 2ª da (13) podemos determinar p em função de x, a integral (13) não coincide com integral particular obtida da (12), é uma integral singular da equação dada.

Observa-se que a (12) que fornece a integral geral da equação dada representa geometricamente a família de retas tangentes a integral singular.

Resolução de equações diferenciais particulares de 2ª ordem. Aplicações geométricas.

16 a) Seja a integrar a equação

$$(1) \qquad f(x, y'') = 0$$

e admitamos que esta se possa resolver parametricamente com as equações:

$$(2) \qquad x = g(t) \qquad y''_{xx} = \varphi(t) \qquad \left[y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

Observemos que $y(x)$ é uma integral particular da equação e sua integral geral será:

$$y(x) + c_1 x + c_2$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias; portanto, para resolver a (1) bastará determinar uma integral particular que se anula, por exemplo o conjunto de todas as derivadas 1ªs, para o valor $x = x_0$ correspondente ao valor $t = t_0$ do parâmetro t.

Da (2) se tem:

$$d y'_{x} = y''_x \, dx = \varphi(t) g'(t) \, dt$$

e logo

$$y'_x = \int_{t_0}^{t} \varphi(t) g'(t) \, dt = \varphi_1(t)$$

donde $\quad dy = y'_x \, dx = \varphi_1(t) g'(t) \, dt$

e, portanto, a integral geral da (1) se exprime parametricamente com a equação:

$$x = g(t) \qquad y = \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t) g'(t) \, dt + c_1 x + c_2$$

c) Se a equação (1) resolvida em relação a x dá:

$$x = g(y'') \qquad [t = y'', \ \varphi(t) = t]$$

para sua integral geral sob forma paramétrica teremos:

$$(4)' \qquad y = \int_{t_0}^{t} \{g(t) - g(z)\} g'(z) z \, dz + c_1 x + c_2$$
$$x = g(t)$$

17 - a) Seja uma equação do tipo:

$$(5) \qquad f(y, y'') = 0$$

e esta se pode resolver paramètricamente com a equação

$$(6) \qquad y = g(t) \qquad y''_{xx} = \varphi(t)$$

Se tem

$$\cancel{|d(y'^2_x) = 2y'_x y''_{xx} \, dx = 2y''_{xx} \, dy|}$$

$$d(y'^2_x) = 2y'_x y''_{xx} \, dx = 2y''_{xx} \, dy = 2\varphi(t) g'(t) \, dt$$

donde

$$y'^2_x = 2\int_{t_0}^{t} \varphi(t) g'(t) \, dt + c_1 = w^2(t, c_1)$$

com c_1 constante e arbitrária. Teremos

$$y'_x = \pm w(t, c_1)$$

$$dx = \frac{dy}{y'_x} = \pm \frac{g'(t)}{w(t, c_1)} dt$$

da qual

$$(7) \qquad x = \pm \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t) \, dt}{w(t, c_1)} + c_2$$

com c_2 constante e arbitrária. ~~Teremos pois~~

$$\cancel{y'_x = \pm w(t, c_1)}$$

~~logo~~:

$$\cancel{dx = \frac{dy}{y'_x} = \pm \frac{g'(t)}{w(t, c_1)} dt}$$

A primeira da (6) e a (7) exprimem paramètricamente a integral da equação (5).

b) Em particular se a equação (5) pode ser resolvida em relação a y'', admite que se tem $y'' = \varphi(y)$ $[t = y \, ; \, g'(t) = 1]$

$$y'(x) = \pm \sqrt{2\int_{y_0}^{y} \varphi(y) \, dy + c_1} \ ,$$

e pela (17) a integral geral da equação dada é

$$x = \pm \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} \varphi(y) \, dy + c_1}} + c_2$$

c) Se a equação (5) pode ser resolvida em relação a y e se tem

$$y = g(y'') \qquad [t = y'', \varphi(t) = x]$$

a integral geral desta equação é dada sob a forma paramétrica

$$(9) \qquad x = \pm \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{2\int_{t_0}^{t} t g'(t)\,dt + c_1}} + c_2 \quad ; \quad y = y(t)$$

18 - Seja a equação do tipo

$$f(x, y', y'') = 0$$

a integrar. Assumindo y' como uma variável e pondo $y' = p$ a equação se transforma em outra de 1ª ordem:

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

Integrando esta equação temos

$$y'(x) = p(x, c_1)$$

e a integral $y(x)$ da equação dada é

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} p(x, c_1)\,dx + c_2$$

19 - Examinemos alguns problemas geométricos.

a) Determinar a curva plana para a qual em cada ponto a relação entre o ráio de curvatura e o cubo da normal geométrica é proporcional à relação entre a abcissa e o cubo da ordenada do mesmo ponto.

Indicando com K a constante de proporcionalidade, teremos:

$$\frac{R}{N^3} = K \frac{x}{y^3} \qquad \text{mas} \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

e

$$N^3 = -y^3 (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

logo

$$\frac{R}{N^3} = -\frac{1}{y^3 y''} \qquad \therefore \qquad \frac{1}{y^3 y''} = -K \frac{x}{y^3}$$

ou

$$y'' = -\frac{1}{K}\frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{K}\log x - \frac{c_1+1}{K}$$

$$y = -\frac{1}{K}[x \log x - x] - \frac{c_1+1}{K} x + c_2$$

$$y = -\frac{x}{K}(\log x + c_1) + c_2$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

b) Determinar a curva plana tal que em cada ponto o ráio de curvatura é proporcional ao cubo da normal geométrica.

$$\frac{1}{y''} = -Ky^3 \qquad y'' = -\frac{1}{K}\frac{1}{y^3}$$

$$d(y'^2) = -\frac{2}{K}\frac{1}{y^3}\,dy \qquad y'^2 = \frac{1}{K}\frac{1}{y^2} + C_1$$

com c_1 constante arbitrária. Para $c_1 = 0$

$$y'^2 = \frac{1}{K}\frac{1}{y^2} \; ; \quad yy' = \pm\sqrt{1/K}$$

$$dy^2 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{K}}\,dx$$

$$y^2 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{K}}\,x + c_2$$

que é a equação de uma parábola que tem para eixo principal o eixo dos x

Supondo $c_1 \neq 0$ temos

$$y' = \pm\frac{\sqrt{c_1Ky^2+1}}{y\sqrt{K}} \quad \therefore \quad \pm\frac{\sqrt{K}\,y\,y'}{\sqrt{Kc_1y^2+1}} = 1$$

$$\pm\, d\sqrt{c_1Ky^2+1} = \sqrt{K}\,c_1\,dx$$

$$\pm\sqrt{c_1Ky^2+1} = \sqrt{K}\,c_1x + c_2$$

por fim

$$c_1Ky^2 + 1 = (\sqrt{K}\,c_1x + c_2)^2$$

a qual representa uma cônica que tem por eixo principal o eixo dos x.

c) Determinar a curva plana da qual a curvatura é uma função conhecida da abcissa.

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f(x)$$

Para $y' = p$

$$\frac{p'}{(1+p^2)^{3/2}} = f(x)$$

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = f(x)\,dx \qquad \text{integrando}$$

$$\int_0^p \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int_0^x f(x)\,dx + c_1$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int_0^x f(x)\,dx + c_1 = \omega(x,c_1)$$

Da equação $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \omega(x,c_1)$ obtemos

$$p^2 = (1+p^2)\,\omega^2(x,c_1) \; ; \quad p^2[1-\omega^2(x,c_1)] = \omega^2(x,c_1)$$

$$p = \frac{\pm(\omega(x,c_1))}{\sqrt{1-\omega^2(x,c_1)}} \qquad \text{logo}$$

$$y = \int_0^x p\,dx + c_2 = \pm\int_0^x \frac{\omega(x,c_1)}{\sqrt{1-\omega^2(x,c_1)}}\,dx + c_2$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias

d) Determinar a curva plana tal que seu ráio de curvatura é proporcional à normal geométrica [Curva de Ribacour].

$$R = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''} \qquad N = -y\sqrt{1+y'^2}$$

$$N = -a\,R$$

Sendo considerada y' como função incógnita

para $y' = p$

$$\left[y'' = y' \frac{y'' dx}{y' dx} = y' \frac{dy'}{dy} \right] . \quad p y \frac{dp}{dy} = a(1+p^2)$$

$$\frac{2p}{1+p^2} dp = 2a \frac{dy}{y}$$ integrando

$$\log(1+p^2) = 2a \log y + \log c$$

$$1+p^2 = c y^{2a} \quad \therefore \quad p = y' = \sqrt{c y^{2a} - 1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{c y^{2a} - 1}} \qquad x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{c y^{2a} - 1}}$$

com c e c_1 constantes arbitrárias

1º) Supondo $a = -1$ $[N = R]$

$$x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{c y^{-2} - 1}} = \int \frac{y\, dy}{\sqrt{c - y^2}} = -\sqrt{c - y^2}$$

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c$$

a curva é um círculo

2º) para $a = 1$ $[N = -R]$

$$x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{c y^2 - 1}}$$

para $c = \frac{1}{\alpha^2}$ $$x - c_1 = \int \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \alpha \log \frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

$$e^{\frac{x - c_1}{\alpha}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

$$e^{-\frac{x - c_1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \frac{y - \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

somando $$e^{\frac{x - c_1}{\alpha}} + e^{-\frac{x - c_1}{\alpha}} = \frac{2y}{\alpha}$$

$$y = \alpha \cos k \frac{x - c_1}{\alpha}$$

equação da catenária que tem por base o eixo dos x.

3º) Seja $a = -\frac{1}{2}$ $R = 2N$

$$x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{c y^{-1} - 1}} = \int \frac{\sqrt{y}\, dy}{\sqrt{c - y}}$$

fazendo $y = c \cos^2 \theta$

$$x - c_1 = c \int 2 \cos^2 \theta \, d\theta = c(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$

$$x = c_1 + c(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \qquad y = c \cos^2 \theta$$

é a eq. paramétrica

$$c = 2r \qquad t = 2\theta + \pi$$

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) \qquad y = r(1 - \cos t)$$

que é de uma cicloide

e) Determinar enfim a curva plana cujo raio de curvatura é uma função conhecida do arco s

$$\frac{1}{R} = f(s)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \qquad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} = f(s)$$

$$\alpha = \int_0^s f(s)\,ds + \alpha_0 = F(s) + \alpha_0$$

$$x = x_0 + \int_0^s \cos\left(F(s)+\alpha_0\right)ds \qquad y = y_0 + \int_0^s \operatorname{sen}\left(F(s)+\alpha_0\right)ds$$

$$F(s) = \int_0^s f(s)\,ds$$

sendo x_0 y_0 α_0 constantes arbitrárias

Equação diferencial linear homogênea. Determinante wronskiano

20. Chama-se equação diferencial linear homogênea à equação do tipo:

$$(1) \qquad F(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

na qual $p_0, p_1, \dots p_{n-1}, p_n$ são funções conhecidas de x contínuas em um intervalo dado, com $p_0 \neq 0$ no mesmo intervalo. Observamos que se $y_1, y_2, \dots y_k$ são k integrais particulares da equação (1) ainda a função

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_k y_k$$

quaisquer que sejam as constantes $c_1, c_2 \dots c_k$ é uma integral da equação (1).

Portanto da:

$$F(y_1) = 0 \quad F(y_2) = 0 \quad \dots \quad F(y_k) = 0$$

deduz-se

$$F(c_1 y_1) = 0 \quad F(c_2 y_2) = 0 \quad \dots \quad F(c_k y_k) = 0$$

e somando

$$F(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_k y_k) = 0$$

Daí concluimos que se $y_1, y_2, \dots y_n$ são n integrais particulares da equação (1) ainda a função

$$(2) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

a qual contém n constantes arbitrárias é uma integral da equação (1). Surge naturalmente a pergunta: a (2) é a integral geral da equação (1)?

Para responder esta pergunta precisamos da noção de função linearmente dependente em um intervalo.

Função linearmente dependente

a) Dadas n funções $y_1, y_2, \dots y_n$ finitas e contínuas em um intervalo (a, b) dizemos que estas são linearmente independentes em (a, b) quando não é possível determinar as constantes $c_1, c_2, \dots c_n$ não tôdas nulas para as quais se tenha identicamente em (a, b):

$$(3) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

Quando isto é possível diremos que as funções $y_1, y_2, \dots y_n$ são linearmente dependentes no intervalo (a, b).

b) Por exemplo as n funções $1, x, x^2 \dots \dots x^{n-1}$ são linearmente independentes em qualquer intervalo. Portanto, pelo princípio de identidade, a relação:

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots c_n x^{n-1} = 0$$

pode verificar-se identicamente dando-se para a constante c todos os valores.

c) As funções: $e^{\rho x}, x e^{\rho x}, x^2 e^{\rho x}, \dots, x^{n-1} e^{\rho x}$ com ρ constante (real ou complexa) qualquer são linearmente independentes em qualquer intervalo.

Portanto se tem:

$$c_1 e^{\rho x} + c_2 e^{\rho x} x + c_3 e^{\rho x} x^2 + \dots c_n x^{n-1} e^{\rho x} = e^{\rho x}(c_1 + c_2 x$$

$$+ c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1})$$

e o fator $e^{\rho x}$ é diferente de zero em qualquer intervalo

d) Mais em geral consideremos a função do sistema

$$\begin{matrix} e^{\rho_1 x}, & x e^{\rho_1 x}, & x^2 e^{\rho_1 x}, & \dots, & x^{n_1} e^{\rho_1 x} \\ e^{\rho_2 x}, & x e^{\rho_2 x}, & x^2 e^{\rho_2 x}, & \dots, & x^{n_2} e^{\rho_2 x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\rho_k x}, & x e^{\rho_k x}, & x^2 e^{\rho_k x}, & \dots, & x^{n_k} e^{\rho_k x} \end{matrix}$$

onde $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_k$ são constantes reais ou complexas duas a duas distintas, e $n_1, n_2, \dots, n_k$ inteiros positivos o nulo, e demonstremos que estas funções (distribuidas em quadro de k linhas) são independentes em qualquer intervalo.

Tinhamos visto em c) que o teorema é verdadeiro quando nos referimos as funções de uma só linha, isto é, para $k = 1$. Por indução, demonstrando que se o teorema é verdadeiro para a função de $k-1$ linhas o será também para a função de

k linhas. Uma relação linear homogênea entre as funções dadas se existe será a forma:

$$(4) \qquad \varphi_1(x)\, e^{\rho_1 x} + \varphi_2(x)\, e^{\rho_2 x} + \dots + \varphi_k(x)\, e^{\rho_k x} = 0$$

onde $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_k(x)$ são polinômios em x de graus respectivamente $m_1, m_2, \dots m_k$ não superiores respectivamente aos números $n_1, n_2, \dots n_k$ e nenhum dos polinomios $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ ... $\varphi_k(x)$ poderá ser identicamente nulo, havendo admitido o teorema para um quadro de $K-1$ linhas.

Da (4) dividindo por $e^{\rho_k x}$ se tem:

$$\varphi_1(x)\, e^{(\rho_1-\rho_k)x} + \varphi_2(x)\, e^{(\rho_2-\rho_k)x} + \dots + \varphi_{k-1}(x)\, e^{(\rho_{k-1}-\rho_k)x} + \varphi_k(x) = 0$$

onde $\rho_1-\rho_k$, $\rho_2-\rho_k$, ..., $\rho_{k-1}-\rho_k$ são constantes duas a duas distintas e tôdas diferentes de 0

Derivando em relação a x, temos

$$(4)' \qquad \overset{*}{\varphi}_1(x)\, e^{(\rho_1-\rho_k)x} + \overset{*}{\varphi}_2(x)\, e^{(\rho_2-\rho_k)x} + \dots + \overset{*}{\varphi}_{k-1}(x)\, e^{(\rho_{k-1}-\rho_k)x} + \varphi'(x) = 0$$

pois

$$[\varphi(x)\, e^{\rho x}]' = \varphi'(x)\, e^{\rho x} + \rho e^{\rho x} \varphi(x) = [\rho \varphi(x) + \varphi'(x)]\, e^{\rho x}$$

para $\rho \neq 0$ o grau de $\rho\varphi(x) + \varphi'(x)$ é o grau de $\varphi(x)$

$\overset{*}{\varphi}_1(x)$, $\overset{*}{\varphi}_2(x)$, ... $\overset{*}{\varphi}_{k-1}(x)$, $\varphi_k'(x)$ são polinômios em x ainda dos graus $m_1, m_2, \dots, m_k$ não identicamente nulos (as constantes $\rho_1-\rho_k$, $\rho_2-\rho_k$, ..., $\rho_{k-1}-\rho_k$ são todos diferentes de zero)

Derivando a (4)' m_k vezes visto que se tem identicamente:

$$\varphi_k^{(m_k+1)}(x) = 0$$

obtemos da (4) uma relação do tipo:

$$\omega_1(x)\, e^{(\rho_1-\rho_k)x} + \omega_2(x)\, e^{(\rho_2-\rho_k)x} + \dots + \omega_{k-1}(x)\, e^{(\rho_{k-1}-\rho_k)x} = 0$$

com $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... $\omega_{k-1}(x)$ não identicamente nulos e isto é absurdo tendo sido admitido como verdadeiro o teorema para a função de $k-1$ linhas.

22. Determinante wronskiano

a) Consideremos n funções $y_1, y_2, \dots y_n$ linearmente dependentes em (a, b), verifique-se a (3) para valores das constantes $c_1, c_2, \dots c_n$ não todos nulos, e suponhamos ainda que as funções $y_1, y_2, \dots y_n$ tenham em (a, b) finitas até a de ordem $n-1$

Da (3) derivando $(n-1)$ vezes obtemos

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' = 0$$

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n'' = 0$$

(5) $$\dots\dots\dots$$

$$c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} = 0$$

condição necessária para que êste sistema linear homogêneo nas constantes $c_1, c_2, \dots c_n$ tenha uma solução não nula é que o determinante dos coeficientes seja identicamente nulo em (a, b), isto é,

(5)' $$W(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots & y_n \\ y_1', & y_2', & \cdots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)}, & \dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

O ~~sistema~~ determinante considerado que tínhamos indicado com o símbolo $W(y_1, y_2, \cdots y_n)$ chama-se wronskiano de n funções $y_1, y_2, \cdots y_n$. Portanto, a condição necessária para que as n funções $y_1, y_2, \cdots y_n$ sejam linearmente dependentes em (a, b) é que seja identicamente nulo em (a, b) o wronskiano $W(y_1, y_2, \cdots y_n)$

b.- Pode-se inverter sob um certo aspeto o teorema precedente, utilisando-se a regra de derivação de um determinante o que

permitirá construir imediatamente a derivada de um determinante wronskiano. Seja o determinante

$$D = \sum \pm a_{1 i_1},\ a_{2 i_2},\ a_{3 i_3}, \dots a_{n i_n}$$

onde a_{ik} são funções de x em um certo intervalo e nele derivável. Derivando obtemos:

$$D' = \sum \pm a_{1,i_1}' \, a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} + \sum \pm a_{1,i_1} \, a_{2,i_2}' \dots a_{n,i_n} + \dots$$
$$+ \sum \pm a_{1,i_1} \, a_{2 i_2} \dots a_{n,i_n}'$$

a derivada de um determinante é igual à soma dos determinantes obtidos, derivando sucessivamente a 1ª, a 2ª, ... n^{ma} linha (coluna).

Aplicando esta regra ao determinante (5)' e derivando por linha observamos que os determinantes obtidos da derivação da 1ª, 2ª, ... $(n-1)^{ma}$ fila são nulos porque têm duas filas iguais teremos simplesmente:

$$W'(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

que é a derivada de um determinante wronskiano se obtem derivando a sua última fila

c) O teorema enunciado em a) o invertemos do seguinte modo: Se em (a, b) verifica-se identicamente $W(y_1, y_2, \dots y_n) = 0$ e a matriz

$$M = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

existe em cada ponto de (a, b) a característica $n-1$, além das n funções $y_1, y_2, \dots y_n$ dadas linearmente, existem n constantes não tôdas nulas $c_1, c_2, \dots c_n$ para as quais se tem identicamente em (a, b):

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

Indiquemos por brevidade com

$$A_1 \,,\; A_2 \,,\; \dots \; A_n$$

$$B_1 \,,\; B_2 \,,\; \dots \; B_n$$

ordenadamente os complementos algébricos dos elementos da última e da penúltima fila do determinante $W(y_1, y_2, \dots y_n)$;

$$\Sigma f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\xi = \varphi(\theta_i)$$

$z = z_0$

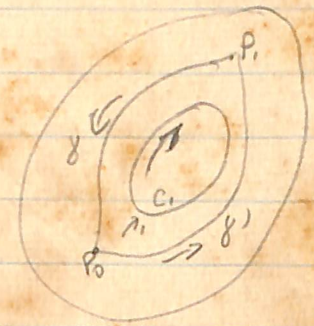
$$\lim_{n \to \infty} |a_n z_0^n| = 0$$

$g > 0$ $\quad$ n ň ug

$$|a_n z_0^n| < g$$

$$|z| < |z_0|$$

$$\sum |a_n z^n| = \sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \leq g \sum$$



Teorema de Riemann lim.

Corolario da inte. impróprias

$\lim \frac{A''}{A'} = J(u_0 v_0)$

Figuras.

Comprimento de um arco de curva. - pontos prof. Ang. T.

Integrais impróprias - Fantapié - caderno

Integrais curvilíneas

Sansone caderno · Derivada de integral relativamente a um parâmetro

Formas diferenciais exatas

Integral dupla num retângulo

Teorema de Darboux e Consequências. Critério Riemann

Integral num domínio qualquer

Área de um domínio. Volumes. - pontos prof. Ang. T.

Teorema média

Cálculo de uma integral dupla estendida a um retângulo. pontos prof. Ang. T.

Integrais múltiplas

Fórmula de Green no plano

Séries: Diferencial Integral de uma dif. exata

Limite de áreas correspondentes

x Funções monogenas.

x Equação de Laplace

Séries.

Exame de Cálculo amanhã às 8 horas. Uma grande expectativa. Qual será o resultado?