Potências e Logaritmos dos números reais. Números complexos.

1. Potências com expoente inteiro e positivo.

Seja n um número natural maior que 1. O produto de n fatores iguais a um número real relativo a chama-se potência enésima (a^n) de a e se designa com a notação (a^n); o número a chama-se base e n o expoente da potência; êste conceito se estende ao caso $n = 1$, pondo por definição $a^1 = a$. Da propriedade associativa do produto segue, quaisquer que sejam os números naturais n e p,

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p} \qquad (1)$$

propriedade que se estende a um número qualquer de potências da mesma base a. Se tivermos q fatores iguais a a^n, resulta

$$(a^n)^q = a^{nq} \qquad (2)$$

Enfim, das propriedades comutativa e as

sociativa do produto segue também

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (3)$$

pois temos n fatores iguais a a e n iguais a b; esta última propriedade (propriedade distributiva da potenciação em relação ao produto) se estende a um número qualquer de fatores.

Se nesta fórmula (3) pusermos $ab = c$, supondo $b \neq 0$, deduzimos $a^n = \frac{c^n}{b^n}$ ou

$$\left(\frac{c}{b}\right)^n = \frac{c^n}{b^n}$$

o que também se poderia deduzir diretamente da definição.

2. Potência com expoente nulo ou negativo.

Da fórmula (1) atrás se deduz, pondo $n + p = m$ sendo $a \neq 0$

$$a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p} \qquad (1)$$

esta fórmula só tem significação para $m > p$, pois até aqui só definimos potências com expoente positivo; temos portanto liberdade de dar uma definição de potência com expoente negativo ou nulo; mas essa definição só terá utilidade se for mantida a propriedade formal (1). Para isso, notemos que se em (1) pusermos $m = p$, obteremos

$$a^0 = 1 \qquad (2)$$

fórmula que adotamos para definição de potência com expoente nulo, qualquer que seja a diferente de 0. Pondo depois em (1) $m = 0$ obtemos, para cada número natural p, a fórmula

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \qquad (3)$$

que adotamos também para definição de potência com expoente negativo, para $a \neq 0$. Dessa maneira fica definida a potência a^p, sendo p um n.º inteiro relativo qualquer. Se $p > 0$, êsse conceito se aplica qualquer que seja o n.º real a. Se $p \leq 0$, devemos ter sempre $a \neq 0$

É fácil ver que as potências com expoente inteiro relativo gozam das propriedades fundamentais (1), (2) e (3) do parágrafo anterior. Com efeito, a 1.ª dessas fórmulas serviu para a extensão dêsse conceito, para $n + p = m \leq p$, isto é, quando n é negativo ou nulo. Temos depois,

$$a^{-n} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^n \cdot a^p} = \frac{1}{a^{n+p}} = a^{-n-p}$$

Para a fórmula (2), que é imediata se n ou q é zero, temos

$$\left(a^{-n}\right)^q = \left(\frac{1}{a^n}\right)^q = \frac{1}{a^{nq}} = a^{-nq}$$

$$\left(a^n\right)^{-q} = \frac{1}{(a^n)^q} = \frac{1}{a^{nq}} = a^{-nq}$$

$$\left(a^{-n}\right)^{-q} = \frac{1}{(a^{-n})^q} = \frac{1}{a^{-nq}} = a^{nq}$$

Enfim, quanto à fórmula (3), temos

$$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

3. Propriedades das potências em relação às desigualdades

Vejamos agora as propriedades das potências acima definidas em relação às ~~pro~~ desigualdades. Antes de tudo, notemos que pelas definições dadas

1) uma potência com expoente positivo só se anula quando a base é nula;

2) uma potência com expoente nulo ou negativo não se anula nunca;

3) se a base a é diferente de zero, a potência a^n terá o mesmo sinal que a ou será sempre positiva conforme seja n impar ou par;

4) para ~~+~~ $a = 1$, tôdas as potências de a são iguais a 1, o que se deduz da definição.

Suponhamos agora $a > 0$. Neste caso tôdas as ~~propriedades~~ potências de a com expoente inteiro relativo são positivas. Quanto às relações de desigualdade, temos três casos a considerar:

1) $a > 1$. Neste caso, se n é positivo, temos $a^n > 1$, pois a^n é o produto de n números maiores que 1. Sejam n e p dois números inteiros relativos qualquer, com $n > p$ e portanto, $n = p + q$, sendo $q > 0$. Sendo $a^q > 1$, temos

$$a^n = a^p \cdot a^q > a^p,$$

isto é, quando o expoente cresce, a potência também cresce.

2) $a < 1$. O raciocínio anterior se apli

ca ao número $\frac{1}{a} > 1$, donde se conclue que quando o expoente cresce a potência decresce, isto é, se $p < q$, temos sempre $a^p > a^q$

3) $a = 1$. Neste caso, qualquer que seja n temos sempre $a^n = 1^n = 1$, e não há relações de desigualdade a considerar.

Teorema: Sendo $a > 1$, dado um número positivo arbitrário A, há sempre um número inteiro n tal que

$$a^n > A \qquad (1)$$

Ponhamos, com efeito, $a = 1 + h$ $(h > 0)$. Temos evidentemente, supondo $n > 1$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) > h.n$$

Para que seja satisfeita a desigualdade (1) basta fazer com que seja $1 + nh > A$ ou

$$n > \frac{A-1}{h}$$

Corolário: Sendo $a < 1$, dado um número positivo arbitrário h, há sempre um número inteiro n tal que se tenha $a^n < h$; basta tomar n tal que seja $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} > \frac{1}{h}$, o

que é possível pelo teorema anterior, pois da hipótese segue $\frac{1}{a} > 1$

Recordando ainda a definição que demos em (3) no §2, vemos que as propriedades anteriores se podem resumir como segue, (supondo sempre $a > 0$):

Dado o número arbitràriamente grande A é sempre possível achar um número natural n tal que se tenha $a^n > A$, se $a > 1$ e $a^{-n} > A$ se $a < 1$; dado o número positivo h arbitràriamente pequeno, é sempre possível achar um número natural n satisfazendo as desigualdades $a^{-n} < h$ se $a > 1$ e $a^n < h$ se $a < 1$.

Determinado êsse número n, as mesmas desigualdades são satisfeitas para qualquer outro número natural maior que n.

Vemos ainda que qualquer que seja o número natural n temos sempre

$a^n \gtreqqless 1$ e $a^{-n} \lesseqqgtr 1$ conforme seja $a \gtreqqless 1$ (2)

Daqui se deduz que de

(3) $a \gtreqqless b$ segue respectivamente $a^n \gtreqqless b^n$

pois temos, respectivamente, $\frac{a}{b} \gtreqless 1$

4. Raizes e Propriedades dos Radicais.

Seja a um número real qualquer e n um número natural > 1. Vamos ver se é possível determinar um número real b que satisfaça à condição

$$b^n = a$$

Quando êsse número b existe, chama-se raiz de índice n, ou seja, raiz enésima (n^a) de a e indica-se com a notação $\sqrt[n]{a}$. Esta expressão chama-se tambem um radical e a a quantidade sub-radical ou o radicando. Antes de prosseguir, façamos algumas observações:

a) Se $a=0$, temos sempre uma e uma única solução $b=0$.

b) Se a é negativo e n é par, não existe nenhuma solução, pois qualquer n.º real positivo ou negativo elevado a uma potência com expoente par dá um resultado positivo.

c) Se a é positivo e n par, se existir uma solução positiva b existirá forçosamente uma outra, negativa, $-b$, pois temos $(-b)^n = b^n = a$

d) Se n é impar, se existir uma solução b o número $-b$ satisfará à condição $(-b)^n = -a$.

Destas observações se deduz que é suficiente examinar o problema da pesquisa de uma raiz positiva de um numero a positivo, isto é, estudar o problema da extração da raiz de índice n no campo real absoluto. Neste caso, como passamos a demonstrar, existe sempre um e um único numero real absoluto que é solução do problema.

Com efeito, seja a um n.º real absoluto. Construamos duas classes de n.os racionais absolutos pondo na 1.ª, H, os n.os h cuja n^a potência seja menor que a, e na 2.ª, H', os numeros h' cuja n^a potência seja maior que a. Nenhuma dessas classes é vazia, pois um n.º racional absoluto h menor que 1 e que a satisfaz à condição $h^n < h < a$, e portanto pertence à classe H; da mesma forma se verifica que todo número maior que 1 e que a pertence à classe H'. É evidente que todo número menor que um nº de H pertence a esta classe e todo nº maior que um nº de H', pertence a esta. Além disto, há no máximo um nº racional exceptuado, pois se houvesse dois, p e q, teríamos $p^n = q^n = a$, o que só é possível se for $p = q$. Finalmente, não pode haver máximo na classe H nem mínimo em H'. Para demonstrá-lo, basta verificar que qualquer que seja o nº h de H, há sempre um nº $k > h$ na mesma classe, e portanto satisfazendo às desigualdades

$$(1) \qquad h^n < k^n < a \qquad \text{ou}$$

$$(2) \qquad 0 < k^n - h^n < a - h^n$$

ora, o segundo membro pode-se escrever

$$k^n - h^n = (k-h)(k^{n-1} + k^{n-2}h + \dots + h^{n-1});$$

sendo L um nº maior que h e supondo também $k < L$, temos

$$k^n - h^n < nL^{n-1}(k-h)$$

Para que seja satisfeita a desigualdade (2) e portanto também a desigualdade (1), basta

que se tenha

$$nL^{n-1}(k-h) < a - h^n,$$

isto é, basta tomar o nº k compreendido entre h e o menor dos números

$$L \quad \text{e} \quad h + \frac{a-h^n}{nL^{n-1}}.$$

Analogamente se demonstra que a classe H' não tem mínimo. Essas duas classes formam pois uma secção no campo racional absoluto, a qual define um nº real absoluto b. Construindo, de acôrdo com a definição de produto, a secção que define b^n, sabemos que todo nº 1ª classe desta secção é menor que um nº h^n e portanto menor que <u>a</u> isto é, a 1ª classe da secção b^n está contida na 1ª classe de a; da mesma forma se vê que a 2ª classe da secção b^n está contida na 2ª classe de a, e portanto $b^n = a$, como queríamos demonstrar.

No caso de ser $n = 1$, é evidente que a única solução é $b = a$, neste caso o símbolo $\sqrt{\ }$ torna-se inútil. Quando

$n=2$, escreve-se apenas $\sqrt{a}$

Demonstrada assim a existência de uma e uma única raiz n^a de um n.º real absoluto, no campo real absoluto, vamos estudar algumas propriedades desta nova operação - a extração de raiz.

Teorema I: Multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo número o índice da raiz e o expoente da quantidade subradical, o radical não se altera.

Seja $b = \sqrt[n]{a^m}$, isto é, $b^n = a^m$. Elevando à potência p, temos

$$b^{np} = a^{mp}$$ e portanto

$$b = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Esta propriedade dos radicais permite fazer sobre os mesmos duas operações importantes:

1) Simplificar um radical, dividindo por um mesmo n.º o índice e o expoente, exemplo: $\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$

2) Reduzir radicais ao mesmo índice (m. m. c. dos índices dos radicais dados). Sejam os radicais $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$. Seja r

o m. m. c. dos índices m, n, p, e seja $r = m.m' = n.n' = p.p'$. Os três radicais podem ser escritos sob a forma

$$\sqrt[mm']{a^{m'}} = \sqrt[r]{a^{m'}}, \quad \sqrt[nn']{b^{n'}} = \sqrt[r]{b^{n'}}, \quad \sqrt[pp']{c^{p'}} = \sqrt[r]{c^{p'}}$$

Antes de efetuar esta redução é conveniente fazer, se for possível, a simplificação anterior.

Esta última operação pode servir para a comparação de radicais de índices diferentes, pois quando os radicais têm índices iguais, as relações de desigualdade são as mesmas que entre as quantidades sub-radicais, como resulta da propriedade (3) no fim do § anterior.

Teorema II: O produto e o quociente de radicais de mesmo índice acham-se efetuando essas operações sobre as quantidades sub-radicais.

Sejam para multiplicar $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Elevando à potência n, temos (3. § 1) $(\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = a.b$, e portanto, $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Para o quociente se aplica analogamente

a fórmula (4) do §1

Uma aplicação importante dêste teorema consiste em fazer sair ou entrar um fator no radical, ex.: $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5.27} = \sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{27} = 3\sqrt[3]{5}$

$$x\sqrt{a-\frac{1}{x}} = \sqrt{ax^2-x}$$

Temos que para introduzir um fator ou um divisor dentro do símbolo do radical, é preciso elevar êsse fator ou divisor a um expoente igual ao índice do radical.

Teorema III: Para elevar um radical a uma potência pode-se elevar a essa potência a quantidade sub-radical.

Êste teorema se deduz imediatamente do anterior, aplicando este ao caso de um maior nº de fatores iguais. Se o índice do radical for divisível pelo expoente, pode-se fazer depois a simplificação 1), e portanto nêste caso pode-se diretamente dividir o índice pelo expoente dado.

Teorema IV: Para extrair a raiz nª de um radical pode-se multiplicar por n o índice do radical.

Êste teorema se deduz imediatamente aplicando a fórmula (2) § 1 pois temos

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{np} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a$$

Êste teorema se estende a um nº qualquer de radicais superpostos: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}} = \sqrt[npq]{a}$

Quanto às propriedades das raízes em relação às desigualdades, deduzem-se imediatamente do § anterior:

1) De $a > 1$ segue, qualquer que seja $n > 1$, $a > \sqrt[n]{a} > 1$

2) Se $a < 1$, segue, qualquer que seja $n > 1$, $a < \sqrt[n]{a} < 1$.

3) Sendo a e b nºs reais positivos e $a > b$, temos, qualquer que seja o nº natural n, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Teorema V: Sendo $a > 1$, dado o número $\varepsilon > 0$ arbitrário, é sempre possível determinar um nº natural n tal que se tenha

$$\sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$$

Basta, com efeito, notar que pelo teorema do parágrafo anterior pode-se determinar n tal que (se tenha) seja satisfeita a desigualdade

$$(1+\varepsilon)^n > a$$

Teorema VI: Sendo $0 < a < 1$, dado o n.º $\varepsilon > 0$ arbitrário, pode-se sempre determinar um número n tal que se tenha

$$\sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon$$

que se deduz do corolário do teorema citado. Estas duas propriedades são também satisfeitas para todo o n.º natural maior que o n.º n determinado.

Note-se que tôdas essas propriedades se referem sempre ao campo real absoluto. Para o campo real relativo basta levar em conta as observações a) e d) do princípio dêste parágrafo.

§ 5. Potências com expoente fracionário

O teorema I do paragrafo anterior e as duas aplicações 1) e 2) oferecem evidentes analogias com a propriedade das frações, que não se alteram multiplicando-se o numerador e denominador por um mesmo n.º, assim como as aplicações desta propriedade, isto é: simplificar uma fração e reduzir várias frações ao mesmo denominador. Por outro lado, se m é divisível por p, temos

$$(1) \qquad \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}$$

pois o 2.º membro, elevado à potencia p reproduz a^m. Esta fórmula só tem significação, por enquanto, se $\frac{m}{p}$ for um n.º inteiro. Para maior generalidade, pomos por definição a igualdade (1) mesmo para o caso em que m não seja multiplo de p. A legitimidade dessa definição é consequência do teorema I citado, pois se $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$, reduzida essa fração à expressão mais simples $\frac{r}{s}$, vemos que os dois radicais $\sqrt[p]{a^m}$ e $\sqrt[q]{a^n}$, simplificados, se reduzem ao mesmo radical $\sqrt[s]{a^r}$ sendo portanto

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{r}{s}}$$

O produto e o quociente de potências fracionárias de mesma base se fazem de acôrdo com o teorema II do parágrafo anterior, reduzindo prèviamente os expoentes fracionários ao mesmo denominador, que é o índice do radical. Obtemos assim

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n.q]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

e da mesma forma obtemos tambem

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

Êstes resultados demonstram que a propriedade fundamental das potências (§1 fórmula 1) se estende ao caso dos expoentes fracionários. Daqui resulta imediatamente a propriedade (2) §1, para o caso de n fracionário e q inteiro; se $q = \frac{r}{s}$ basta pôr em evidência o n.º s como índice e fazer as operações sob o radical; esta propriedade é portanto geral. Para a propriedade (3), §1, temos pondo $n = \frac{r}{s}$

$$(ab)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(ab)^r} = \sqrt[s]{a^r b^r} = \sqrt[s]{a^r} \cdot \sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{r}{s}}$$

Enfim, tôdas as propriedades e considerações do §2 se aplicam ao caso dos expoentes fracionários e portanto podemos definir em geral potência com expoente racional relativo qualquer, satisfazendo às mesmas propriedades formais que as potências com expoente inteiro positivo.

Quanto às propriedades relativas às desigualdades, deduzem-se tambem com facilidade das propriedades 1), 2) e 3) do § anterior:

Qualquer que seja o n.º racional positivo h de

$a \gtreqless 1$ segue respectivamente $a^h \gtreqless 1$,

donde se deduz que de

$a \gtreqless b$ segue, respectivamente, $a^h \gtreqless b^h$

Segue daqui que sendo p e q dois números racionais quaisquer e $a > 1$ um n.º real, se tivermos $p > q$ teremos $a^p > a^q$; com efeito, ponhamos $p = q + h$, $(h > 0)$; teremos como já vimos, $a^p = a^q \cdot a^h$, e como $a^h > 1$, etc. Se tivermos $0 < a < 1$, teremos, na mesma hipótese, $a^p < a^q$

Enfim, usando expoentes fracionários, podemos dar outra forma aos teoremas V e VI do § anterior.

<u>Teorema I</u>: Sendo $a > 1$, dado o n.º $\varepsilon > 0$ arbitrário pode-se sempre achar um n.º racional positivo h tal que se tenha

$$a^h < 1 + \varepsilon$$

<u>Teorema II</u>: Sendo $0 < a < 1$, dado o n.º

$\varepsilon > 0$ arbitrário pode-se determinar um n.º racional positivo h tal que se tenha

$$a^h > 1 - \varepsilon$$

Estas desigualdades são também satisfeitas para todo o expoente menor que o n.º h determinado. Para satisfazê-las basta pôr $h = \frac{1}{}$ e aplicar os teoremas já demonstrados.

§ 6. Potências com expoente real.

No parágrafo anterior definimos a operação para uma base a - número real absoluto qualquer - e um expoente racional relativo. Vamos estender esta definição ao caso de um expoente real relativo; para isto nos basearemos nas propriedades das desigualdades. Seja $\alpha = \frac{a}{a'}$ um n.º real qualquer definido por uma secção no campo racional e $b > 1$ um n.º real positivo. Consideremos as duas classes de n.os reais positivos: H - dos n.os b^a e H' - dos n.os $b^{a'}$. Como vimos acima, sendo $a < a'$, teremos sempre $b^a < b^{a'}$. As duas classes são portanto separadas. Para demonstrar que são contíguas basta verificar que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário é possível determinar um n.º a e um n.º a', tais que

$$b^{a'} - b^a < \varepsilon$$

Ora, o 1.º membro desta desigualdade pode-se escrever, como já foi demonstrado para expoentes racionais,

$$b^a (b^{a'-a} - 1) ;$$

seja M um n.º maior que algum n.º $b^{a'}$; teremos também $b^a < 1$ e portanto a desigualdade anterior será satisfeita se tivermos

$$b^{a'-a} < 1 + \frac{\varepsilon}{M}$$

e isto é possível, pois a diferença $a' - a$ pode-se tornar tão pequena quanto se queira.

Vemos assim que as classes H e H' atrás definidas formam um par de classes contíguas que definem um n.º real positivo que se designa com o símbolo b^α estendendo assim a definição de potência ao caso de um expoente real qualquer. Êste n.º b^α satisfaz às desigualdades $b^a < b^\alpha < b^{a'}$

Para $b=1$, pomos por definição $b^\alpha = 1^\alpha = 1$

Para $b<1$, mantendo a definição das potências com expoente negativo, pomos
$$b^\alpha = \left(\frac{1}{b}\right)^{-\alpha} = 1 : \left(\frac{1}{b}\right)^\alpha$$

Da definição dada, deduz-se fàcilmente que de $\alpha < \beta$ segue $b^\alpha < b^\beta$, quaisquer que sejam os n.os reais relativos α e β, sendo $b>1$. As outras propriedades das desigualdades se deduzem da mesma maneira que para os expoentes racionais.

Quando $\alpha = \frac{a}{a'}$ é racional, as desigualdades $b^a < b^\alpha < b^{a'}$ mostram que o n.º b^α definido por elas deve forçosamente coincidir com o n.º b^α já definido para o caso das potências com expoente racional; o mesmo resultado se estende para o caso em que $b \leq 1$.

Estabelecidas as propriedades das desigualdades, pelo mesmo raciocínio empregado várias vezes no estudo dos n.os reais, verificam-se as outras propriedades das potências. Assim, sendo $\alpha = \frac{a}{a'}$ e $\gamma = \frac{c}{c'}$ temos, supondo $b>1$

$$b^a < b^\alpha < b^{a'}$$
$$b^c < b^\gamma < b^{c'}$$

donde
$$b^a . b^c = b^{a+c} < b^\alpha . b^\gamma < b^{a'} . b^{c'} = b^{a'+c'}$$

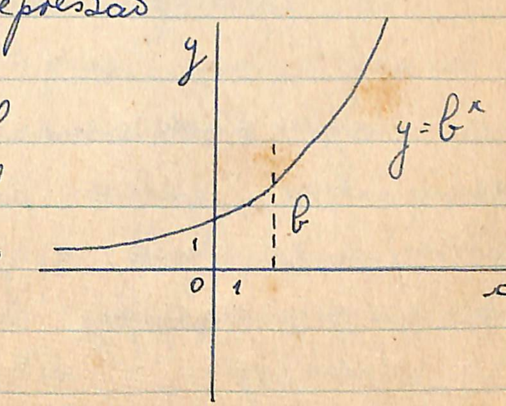
Mas por outro lado temos também
$$a+c < \alpha + \gamma < a' + c',$$

donde
$$b^{a+c} < b^{\alpha+\gamma} < b^{a'+c'}$$

e como os membros extremos destas desigualdades formam um par de classes contíguas, temos enfim,
$$b^\alpha . b^\gamma = b^{\alpha+\gamma}$$

De maneira análoga se demonstram as outras propriedades das potências
$$(b^\alpha)^\gamma = b^{\alpha\gamma}$$
$$(b.d)^\alpha = b^\alpha . d^\alpha$$

Tomemos agora a expressão
$$b^x$$



em que b é um n.º real >1 e x um n.º variável que toma todos os valores reais desde $-\infty$ a $+\infty$. Como já vimos, quando

x cresce, b^x tambem cresce. Quando x é negativo e aumenta em valor absoluto, b^x se aproxima de zero, podendo-se tornar menor que qualquer n.º positivo dado. Se x tende a zero, b^x se aproxima de 1; se x aumenta indefinidamente por valores positivos o mesmo acontece com b^x, que se pode tornar maior que qualquer n.º dado. Estas propriedades são ilustradas na figura, onde está desenhada a curva da equação $y = b^x$

A expressão b^x tem o nome de função exponencial. No parágrafo seguinte examinaremos o problema que consiste em determinar x de modo a satisfazer à relação $b^x = a$, sendo $\underline{a}$ um n.º real positivo.

§7. Logaritmos e suas propriedades

Seja dado um n.º real positivo $b > 1$. Vamos demonstrar que a cada n.º real e positivo $\underline{a}$ corresponde um e um único n.º real relativo x que satisfaz à condição.

$$(1) \qquad b^x = a$$

Basta para isso, construir as duas classes de n.ºs racionais – C, de n.ºs c tais que $b^c < a$ e C', de n.ºs c' tais que $b^{c'} > a$

Pelas relações de desigualdade, vê-se imediatamente que 1) essas duas classes excluem no máximo um n.º racional; 2) que todo n.º racional menor (maior) que um n.º da classe C (C') pertence à mesma classe; enfim, 3) que nenhum n.º c da 1ª classe pode ser máximo, pois é sempre possível achar outro n.º $d > c$, satisfazendo às desigualdades $b^c < b^d < a$ ou

$$\frac{b^d}{b^c} = b^{d-c} < \frac{a}{b^c}$$

pois $\frac{a}{b^c}$ é maior que 1 e como já vimos, a última desigualdade pode ser satisfeita para um valor positivo da diferença $d-c$; da mesma forma se verifica que a classe C' não tem mínimo. Essas duas classes definem portanto um n.º real x, e como temos ao mesmo tempo $b^c < a < b^{c'}$ e $b^c < b^x < b^{c'}$, segue-se que para êsse valor de x está satisfeita a igualdade (1)

Êste n.º aliás é único, pois sabemos que sendo $x \neq y$, temos sempre $b^x \neq b^y$

O número x assim determinado chama-se logaritmo de a na base b e designa-se com a notação $\log_b a$. A base é sempre suposta maior que 1; podia-se também considerar uma base $b' < 1$, mas como temos $b'^x = \left(\frac{1}{b'}\right)^{-x}$ o problema se reconduziria fàcilmente ao da pesquisa do logaritmo em uma base $\frac{1}{b'}$ maior que 1

Enfim, para $b = 1$, o problema só é possível se $a = 1$, e nêste caso é indeterminado

As propriedades dos logaritmos se deduzem imediatamente das propriedades das potências com expoente real. Vê-se que, quando um n.º varia de 0 a $+\infty$ o seu logaritmo (base $b > 1$) varia de $-\infty$ a $+\infty$. Qualquer que seja a base, o logaritmo de 1 é sempre zero e o logaritmo da base é 1 pois temos

$$b^0 = 1 \quad e \quad b^1 = b$$

Tomemos agora dois n.ºs positivos quaisquer a e c e seja

$$x = \log_b a \quad e \quad y = \log_b c$$

$$a = b^x \quad e \quad c = b^y$$

Das igualdades

$$ac = b^x b^y = b^{x+y} \quad e$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

deduz-se:

1. O logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos das bases. (Êste teorema se estende, naturalmente, a um n.º qualquer de fatores).

2. O logaritmo de um quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o do divisor

Temos também, sendo r um n.º real qualquer,

$$a^r = (b^x)^r = b^{rx},$$

donde

3. O logaritmo de uma potência é igual ao logaritmo da base multiplicado pelo expoente.

No caso particular em que $r = \frac{1}{n}$, sendo n inteiro, temos:

4. O logaritmo de uma raiz é igual ao logaritmo do radicando dividido

pelo índice da raiz.

Estas quatro regras mostram a grande vantagem prática que se pode tirar dos logaritmos, pois reduzem operações complicadas a operações mais simples, bastando para isso ter uma tábua de logaritmos, isto é, uma tabela que ao lado de cada n.ro dê o seu logaritmo (aproximado até uma certa casa decimal pois os logaritmos de n.ros racionais são em geral irracionais). Sôbre o uso das tábuas não nos estenderemos, pois êsse estudo faz parte do curso de álgebra elementar.

§8. Números Complexos.

O cálculo com números complexos foi introduzido na matemática no século XVI, quando se verificou, pela resolução da equação geral do 3.º grau, no caso irredutível, que as raízes reais dessa equação podem ser representadas por meio de fórmulas que envolvem raízes quadradas de números negativos. Tais expressões até então eram

consideradas desprovidas de sentido, isto é, como fórmulas ilusórias; e de fato, quando na fórmula de resolução de uma equação do 2.º grau, o radicando é negativo, sabemos que não há nenhuma raiz real. Ora, se fórmulas que contêm estas expressões, supostas sujeitas às mesmas regras de cálculo formal que os n.ros reais, podem exprimir n.ros reais, era natural pesquisar as suas propriedades e as suas possíveis aplicações; estas últimas se revelaram de uma amplitude imensa, abrangendo quasi todos os domínios da matemática e das suas aplicações à mecânica e à física. As expressões que envolvem raízes pares de n.ros negativos foram chamadas quantidades ou n.ros imaginários, mas a sua definição precisa foi dada sòmente no século XIX, abolindo-se tôda idéia metafísica dos antigos, que fazia com que alguns grandes matemáticos olhassem para êsse cálculo com uma grande desconfiança.

A definição nominal de n.º complexo é a seguinte: chama-se n.º complesco um par ordenado de números reais a e b que designaremos provisòriamente por (a, b); dois n.ºs complescos só são iguais, quando forem iguais respectivamente os primeiros e os segundos números reais que os definem; em outras palavras, temos $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Passemos a definir as operações sobre os n.ºs complescos:

Soma: $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$. Por esta definição se verifica imediatamente que a soma de n.ºs complescos gosa das propriedades comutativa e associativa. Também se deduz fàcilmente que é sempre possível efetuar a operação inversa, isto é, a diferença $(a, b) - (c, d) = (a-c, b-d)$, e que esta diferença gosa das mesmas propriedades que a diferença de n.ºs reais.

<u>Produto</u>:

(1) $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Esta definição do produto, que parece artificial, é apenas a tradução do resultado obtido formalmente com as expressões imaginárias, como veremos dentro em breve.

A propriedade comutativa também é fácil de se verificar, pois temos, segundo a definição:

(2) $$(c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da),$$

e os segundos membros das fórmulas (1) e (2) são iguais, pela definição de igualdade.

Vamos verificar as propriedades associativa e distributiva do produto:

$$[(a, b)(c, d)](e, f) = (ac - bd, ad + bc)(e, f) =$$
$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$
$$(a, b)[(c, d)(e, f)] = (a, b)(ce - df, cf + de) =$$
$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$$

e os segundos membros destas igualdades são iguais:

$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b)(c+e, d+f) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$$
$$(a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) = (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) =$$
$$= (ac - bd + ae - bf; ad + bc + af + be)$$

e os segundos membros destas igualdades tambem são iguais

Chama-se número complesco nulo, e designa-se com o mesmo símbolo 0 (zero) o número $(0, 0)$. Vê-se imediatamente que: somando-se um número complexo com o número 0, o primeiro número não se altera: o produto de qualquer número complexo por zero é sempre zero.

Vejamos agora a operação inversa do produto, isto é, a divisão: chama-se quociente de dois números complexos (a, b) (dividendo) e (c, d) (divisor) um número (x, y) que multiplicado por (c, d) reproduza (a, b). Vê-se logo que se (a, b) é diferente de zero e $(c, d) = 0$ não existe solução. Supondo $(c, d) \neq 0$, temos que resolver a equação

$$(c,d)(x,y) = (a,b)$$

sistema

$$cx - dy = a$$
$$dx + cy = b$$

Ora, o determinante dêsse sistema é c^2+d^2 número essencialmente positivo, já que excluimos a hipótese de ser $c = d = 0$; o sistema admite portanto uma e uma única solução, que é dada por

$$(x,y) = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-da}{c^2+d^2}\right)$$

Se tivermos $(a, b) = 0$, teremos também $(x, y) = 0$. Verificamos assim a propriedade do produto: o produto de dois n.os complexos só se anula quando

um dos fatores se anula.

Consideremos agora os n.os complexos em que o 2.º n.º é 0; temos, segundo as definições de soma e produto,

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$$
$$(a,0)(b,0) = (ab, 0)$$

Há pois um isomorfismo entre os n.os reais a e os n.os complexos da forma $(a, 0)$, em relação às operações inversas. Por esta razão, identificamos os n.os reais a aos números complexos $(a, 0)$; o campo real passa então a constituir uma parte do campo complexo, e os n.os complexos da forma $(a, 0)$ podem ser designados simplesmente pelo mesmo símbolo do n.º real correspondente a. O produto de um número real a por um n.º complexo (c, d) é, como se vê fàcilmente, igual a (ac, ad).

Tomemos também os números em que o 1.º elemento é 0. Para o produto de dois de tais n.os temos:

$$(0,a)(0,b) = (-ab, 0) = -ab,$$

isto é, o seu produto é um n.º real. Em particular,

$$(0,1)^2 = -1$$

Êste número complexo $(0,1)$ é indicado sempre com o símbolo i ou pela propriedade anterior, com o símbolo $\sqrt{-1}$.

Notemos agora que todo número complexo $\alpha = (a, b)$ pode ser decomposto como segue:

$$\alpha = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b(0,1) = a + bi.$$

Esta última expressão $a + bi$ chama-se forma algébrica do nº complexo $(a,b) = \alpha$. Nessa expressão, a parcela a chama-se parte real e designa-se com $R(\alpha)$ e a parcela $\underline{bi}$, parte imaginária; b é o coeficiente do imaginário e designa-se com $I(\alpha)$. O nº i chama-se unidade imaginária e os números da forma bi chamam-se imaginários puros, em contraposição com os números reais, cujo coeficiente do imaginário é 0.

O cálculo com os números complexos faz-se em geral pondo-os sob a forma algébrica, notando que $i^2 = -1$, donde segue $i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; para outra potência qualquer i^m, sendo q o quociente e $r = 0, 1, 2, 3$ o resto da divisão de m por 4 teremos $(i^{4q} = 1^q = 1)$

$$i^m = i^{4q+r} = i^{4q} . i^r = i^r$$

Nesta demonstração empregamos a propriedade associativa do produto; é evidente além que todas as propriedades das potencias inteiras relativas que se deduzem das propriedades associativa e comutativa do produto se estendem ao campo complexo. Quanto à extração de raizes, veremos no fim dêste capítulo.

O quociente de dois nºs complexos $a+bi$ e $c+di$ acha-se mais fàcilmente multiplicando o dividendo e o divisor por $c-di$, o que não altera o resultado e torna o divisor real:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

§ 9 Complexos conjugados. Norma e Módulo.

Dado um nº complexo $\alpha = a + bi$ chama-se número complexo conjugado de α, e indica-se com a notação $\bar{\alpha}$, o número

$a-bi$ obtido de α mudando o sinal do coeficiente do imaginário, ou mudando i em $-i$. Evidentemente, o conjugado de $\bar{\alpha}$ é o próprio α; diz-se também, por isso, que os números α e $\bar{\alpha}$ são conjugados.

O conjugado da soma ou diferença de dois números complexos $\alpha = a + a'i$ e $\beta = b + b'i$ é a soma ou diferença dos conjugados, pois temos

$$(a \pm b) - (a' \pm b')i = (a - a'i) \pm (b - b'i)$$

O conjugado de um produto $\alpha\beta$ é o produto dos conjugados. Basta para prová-lo, recordar a definição do produto; também se pode observar que mudando i em $-i$, o produto i^2 não se altera e portanto a parte real do produto dos conjugados é a mesma que a do produto dos números dados, ao passo que o coeficiente de i muda de sinal.

Daqui segue que o conjugado do quociente de dois complexos é o quociente dos seus conjugados, pois de

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} . \bar{\beta}$$

segue, pondo $\alpha\beta = \gamma$ e supondo $\alpha \neq 0$

$$\bar{\beta} = \overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}$$

Aplicando repetidamente êsses teoremas se deduz que o conjugado de qualquer expressão racional se obtem substituindo cada número complexo que intervem na expressão pelo seu conjugado.

Para que um número $\alpha = a + bi$ seja igual ao seu conjugado é necessário e suficiente que seja $b = 0$, isto é, que o n.º α seja real, pois devemos ter $b = -b$.

A soma e o produto de dois complexos conjugados $a+bi$ e $a-bi$ são os n.os reais $2a$ e $a^2 + b^2$. Reciprocamente, se a soma e o produto de dois n.os complexos $a+bi$ e $c+di$ são reais e se um ao menos dêsses números $a+bi$ não é real, êles são complexos conjugados. Com efeito, devendo a soma ser real, temos $b+d=0$ ou $d=-b$. Para o produto ser real temos $ad+bc=0$ ou $-ab+bc=0$, donde, dividindo por b, que por hipótese não é nulo, resulta $a=c$.

O produto de um número complexo $\alpha = a+bi$ pelo seu conjugado é, como acabamos de ver $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$, isto é, um número real não negativo, que se chama <u>norma</u> do número α. A sua raiz quadrada não negativa chama-se módulo dêsse mesmo nº α e indica-se com a notação $|\alpha|$:

$$|\alpha| = |a+bi| = +\sqrt{a^2+b^2}$$

Tanto o módulo como a norma de um número complexo só se anulam, quando o número dado é nulo, isto é, se $a=b=0$. É evidente também que os quatro números

$$\alpha = a+bi \qquad -\alpha = -a+bi$$
$$\bar{\alpha} = a-bi \qquad -\bar{\alpha} = -a \mp bi$$

têm a mesma norma e o mesmo módulo. De (1) se deduz também $|a| \leq |\alpha|$ e $|b| \leq |\alpha|$, isto é, o valor absoluto da parte real e do coeficiente do imaginário de um número complexo não podem superar o módulo dêsse número.

No caso de um número real, o módulo se confunde com o valor absoluto, como se deduz de (1), pondo $b=0$. É por esta razão que se usa a mesma notação para êsses dois entes. Mas além disto, as propriedades são formalmente as mesmas em todo o campo complexo, como vamos ver:

1. O módulo de um produto é igual ao produto dos módulos dos fatores.

Sejam dados os dois fatores α e β. Sendo $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}.\bar{\beta}$, temos

$$\alpha\beta.\overline{\alpha\beta} = \alpha.\beta.\bar{\alpha}.\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}.\beta\bar{\beta}$$
$$\sqrt{\alpha\beta.\overline{\alpha\beta}} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}.\sqrt{\beta\bar{\beta}}$$

isto é, pela definição do módulo,

$$(2) \qquad |\alpha\beta| = |\alpha|.|\beta|$$

2. O módulo do quociente de dois números é igual ao quociente dos módulos dêsses números. A demonstração é imediata, se partirmos da fórmula (2), pondo $\alpha\beta = \gamma$

3. O módulo de uma soma é no máximo igual à soma dos módulos das parcelas. Com efeito, suponhamos primeiramente $+ \neq 0$ e consideremos a identidade

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1;$$

sendo o segundo membro real, temos aqui, $R(\alpha/(\alpha+\beta)) + R(\beta/(\alpha+\beta)) = 1$ e pela propriedade demonstrada acima para qualquer número

γ $R(\gamma) \leq |R(\gamma)| \leq |\gamma|$

? $\gamma\ (R(\gamma) \leq |R(\gamma)| \leq |\gamma|)$

temos
$$\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha+\beta|} \geq 1$$

e multiplicando pelo n.º positivo $|\alpha+\beta|$,

$$(3) \qquad |\alpha| + |\beta| \geq |\alpha+\beta|$$

Quando $\alpha+\beta=0$ o teorema é evidente, pois os módulos $|\alpha|$ e $|\beta|$ são n.ºs não negativos

4. O módulo de uma diferença é maior ou igual à diferença dos módulos. Basta pôr em (3) $\alpha+\beta=\gamma$, donde $\beta=\gamma-\alpha$ e

$$(4) \qquad |\gamma-\alpha| \geq |\gamma| - |\alpha|$$

Notando que em (3) e (4) podemos substituir α por $-\alpha$ pois $|-\alpha| = |\alpha|$, concluimos as seguintes desigualdades, que resumem os teoremas 3. e 4.:

$$|\beta| - |\alpha| \leq |\beta \pm \alpha| \leq |\beta| + |\alpha|$$

§ 10. Forma trigonométrica dos números complexos. Fórmula de Moivre.

Tomemos um n.º complexo qualquer $\alpha = a + bi$

não nulo e seja ρ o ~~seu módulo~~. Como já vimos, temos sempre

$$\rho \geq |a| \qquad \rho \geq |b|$$

e portanto as duas frações $\frac{a}{\rho}$ e $\frac{b}{\rho}$ estão sempre compreendidos no intervalo $-1 \overline{\quad} +1$ Estas frações satisfazem ainda à relação

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1$$

Podemos pois achar um ângulo φ tal que se tenha $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$

$$(1) \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\rho}$$

Êste ângulo φ pode ser determinado pela sua tangente que é $\frac{b}{a}$, e o quadrante a que pertence pelos sinais do seno e do coseno, isto é, dos n.ºs a e b. Evidentemente, o ângulo φ está assim determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π; se o ângulo φ (medido em radianos) satisfaz as igualdades (1), o mesmo acontece com todos os ângulos compreendidos na fórmula $\varphi + 2k\pi$, sendo k um n.º inteiro relativo qualquer. Qualquer um dêsses ângulos se chama argumento do n.º complexo dado

Das fórmulas (1) tiramos

(2) $a = \rho \cos\varphi$ e $b = \rho \operatorname{sen}\varphi$

donde

(3) $\alpha = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

Esta é a forma trigonométrica do número complexo, em que se põem em evidência o módulo e o argumento. As vantagens dessa forma trigonométrica aparecem principalmente no produto e nas potências: tomem os números

$$\alpha = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \text{ e } \beta = \rho\,\sigma(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi);$$

fazendo o produto e pondo em evidência os módulos ρ e σ, temos $\alpha\beta = \rho\sigma(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$
$= \rho\sigma[(\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi) + i(\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi \operatorname{sen}\psi)]$

ou

(4) $\alpha\beta = \rho\sigma[\cos(\varphi + \psi) + i \operatorname{sen}(\varphi + \psi)]$;

como o 2º membro já está sob a forma trigonométrica, verificamos novamente que o módulo do produto $\alpha\beta$ é igual ao produto dos módulos dos fatores. Verificamos ainda mais, que o argumento de um produto é a soma dos argumentos dos fatores. Daqui se deduz imediatamente que o argumento de um quociente

é igual à diferença entre o argumento do dividendo e o do divisor.

A fórmula (4) se estende evidentemente a qualquer número de fatores. Em particular, se tivermos n fatores iguais a α, obtemos a importante fórmula de Moivre:

$$\alpha^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

Se pusermos, como para os n.os reais, $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, aplicando a êste quociente a regra precedente, tomando para 1 o argumento 0, temos imediatamente

$$\alpha^{-n} = \rho^{-n}(\cos -n\varphi + i \operatorname{sen} -n\varphi),$$

o que estende a fórmula de Moivre ao caso das potências negativas; para $n = 0$, a mesma fórmula dá também, $\alpha^0 = 1$ de acôrdo com a definição

Mais adiante examinaremos a operação inversa da potenciação. falta demonstração + completa

§11. Representação geométrica dos números complexos. Vetores no plano.

Tomemos em um plano dois eixos orientados Ox e OY, retangulares e dispostos como mostra a figura, segundo a convenção usada em Geometria Analítica, e sobre êsses eixos a mesma unidade de medida u. Representemos sobre o eixo Ox a parte real e sôbre o eixo OY o coeficiente do imaginário dos n.os complexos; a cada número complexo $\alpha = a + bi$ corresponde assim um ponto A em Ox e outro, B em OY, e portanto um ponto P do plano cujas projeções sobre os eixos são êsses pontos A e B; reciprocamente, a cada ponto P corresponde um par de números reais, que são as medidas dos segmentos OA e OB, sendo A e B as projeções do ponto P sobre os dois eixos. Podemos pois representar cada n.o complexo $\alpha = a + bi$ por um ponto de um plano. Êste ponto chama-se <u>afixo</u> do número complexo dado e o plano sobre o qual se faz essa representação chama-se <u>plano de Argand-Gauss</u>. Quando não houver confusão possível, representaremos o afixo de um n.o com a mesma letra com que representamos êsse número.

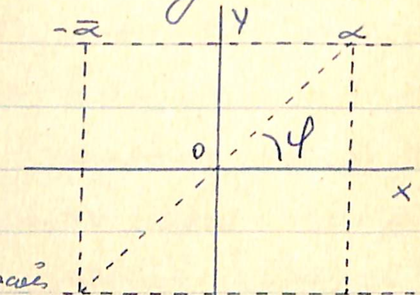
Nessa representação, os números reais

são representados pelos pontos de Ox e os imaginários puros pelos de Oy. Por esta razão, esses eixos são chamados respectivamente <u>eixo real</u> e <u>eixo imaginário</u>. Resulta tambem (chamados) claramente a significação geométrica do módulo e do argumento. O módulo é igual, pelo teorema de Pitágoras, à distância da origem O ao afixo P do número dado, e o argumento ao ângulo orientado que faz a reta OP com a direção positiva do eixo Ox, sendo o sentido positivo de rotação aquele que leva o eixo Ox ao eixo Oy com uma rotação de $\frac{\pi}{2}$. Os números complexos que têm o mesmo módulo ρ estão representados pelos pontos de uma circunferência de centro O e ráio ρ. Vemos assim que o módulo e o argumento de um número complexo são, respectivamente, o <u>ráio vetor</u> e a <u>anomalia</u> do seu afixo, no sistema de coordenadas polares de centro O e eixo Ox.

Notemos ainda que dado um

número complexo α e o seu afixo no plano de Argand-Gauss, o seu conjugado $\bar{\alpha}$ será representado pelo ponto simétrico α em relação ao eixo OX, o número $-\alpha$, oposto de α, pelo ponto simétrico de α em relação à origem e o número $-\bar{\alpha}$, oposto do conjugado ou conjugado do oposto de α, pelo ponto simétrico de α em relação ao eixo Oy. Êsses números têm como argumentos, respectivamente, $-\varphi$, $\pi+\varphi$ e $\pi-\varphi$ ou êstes números somados a um múltiplo inteiro de 2π, sendo φ o argumento de α.

Vamos agora dar outra representação geométrica dos números complexos que facilita a interpretação das quatro operações fundamentais.

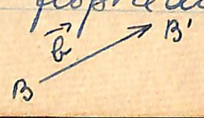


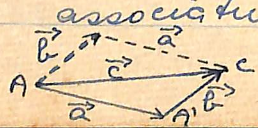
Chama-se *vetor* no plano um ente geométrico constituído por um nº real não negativo chamado *módulo*, uma direção paralela a êsse plano e um sentido de percurso segundo essa direção. Um vetor pode sempre ser representado por um segmento AB do plano,

de comprimento igual ao seu módulo, e com a mesma direção do vetor, distinguindo-se nêsse segmento uma origem A e uma extremidade B, sendo o sentido do vetor o que vai de A a B. O mesmo vetor é representado também por qualquer segmento equipolente a AB, isto é, igual, paralelo e percorrido no mesmo sentido que AB. Se o módulo do vetor é 0, o seu segmento representativo se reduz a um ponto, pois a origem coincide com a extremidade; nêste caso dizemos que o vetor é nulo e a êle não corresponde nenhuma direção ou sentido determinados. Todos os vetores nulo são iguais. Dois vetores não nulos só são iguais quando têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Representaremos um vetor por um segmento com uma seta na extremidade, indicando o sentido; um vetor será designado por uma letra com uma seta sobre ela: $\vec{a}$, $\vec{b}$, etc. ou pela notação AB, em que

A e B são respectivamente a origem e a extremidade de um qualquer dos segmentos representativos do vetor dado

Dados dois vetores $\vec{a} = AA'$ e $\vec{b} = BB'$ chama-se soma $\vec{a}+\vec{b}$, o vetor AC que se obtem tirando de A' como origem um segmento que represente o vetor $\vec{b}$. Esse vetor AC tambem se chama resultante dos vetores AA' e $A'C$. Pelas propriedades dos paralelogramos vê-se que essa soma é independente da escôlha dos segmentos empregados na sua construção, e que se obteria o mesmo resultado efetuando a soma $\vec{b}+\vec{a}$, o que demonstra a propriedade comutativa da soma. Tambem se verifica imediatamente que dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ é sempre possível determinar um e um único vetor $\vec{b}$ que satisfaça à condição $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, bastando para isso somar $\vec{c}$ com o vetor que se obtem de $\vec{a}$ mudando o sentido; êste último vetor (oposto de $\vec{a}$) se indica com $-\vec{a}$ e o vetor $\vec{b}$ obtido, com $\vec{c}-\vec{a}$ (diferença de vetores). A propriedade associativa da soma





e portanto tôdas as propriedades da diferença análogas às dos números reais relativos, se demonstram tambem com facilidade.

Dados no plano dois eixos eixos ortogonais Ox e Oy, chamam-se componentes de um vetor AB as medidas algébricas das projeções do segmento AB sobre os eixos Ox e Oy. Se uma dessas projeções é nula, a coordenada correspondente é 0, e o vetor, se não é nulo, é paralelo ao outro eixo. O único vetor de componentes nulas é o vetor nulo. Por um teorema elementar de geometria, que diz que a soma algébrica das projeções dos lados de uma poligonal é igual à projeção do segmento que une o vértice inicial ao vértice final, vê-se imediatamente que a componente, relativa a um qualquer dos eixos, da soma de dois ou mais vetores é igual à soma das componentes desses vetores, relativas ao mesmo eixo. Um teorema análogo vale naturalmente para a diferença.

Dado um número complexo $\alpha = a + a'i$, podemos representá-lo pelo vetor $\vec{a}$ de compomentes a e a'. Nêste caso, pelo resultado anterior, a soma de dois ou mais números complexos será representada pelo vetor soma dos vetores que representam os números dados. O mesmo se pode dizer em relação à diferença de dois vetores. Quando não houver confusão designaremos o vetor representativo de um número α pela mesma letra α.

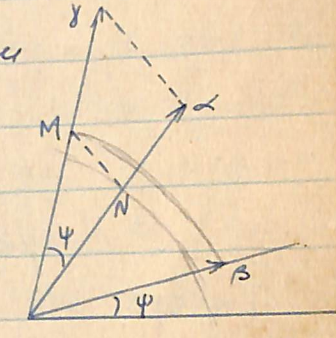
Seja β um número complexo de módulo 1. Sendo φ o seu argumento, temos $\beta = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. O produto dêsse número complexo β por outro número qualquer $\alpha = \rho(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$, dá outro número complexo de mesmo módulo que α e argumento igual ao dêste número acrescido de ψ, como se deduz da igualdade

$$\alpha\beta = \rho(\cos(\varphi+\psi) + i \operatorname{sen}(\varphi+\psi))$$

Podemos interpretar êsse resultado, dizendo que o produto de α por β se obtem fazendo girar de um ângulo φ o vetor representativo do nº α. Em particular, para multiplicar um nº α por i basta fazer girar o vetor α de um ângulo reto no sentido positivo. Para multiplicar um número α por um nº qualquer $\beta = \sigma(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ podemos multiplicá-lo primeiro por $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$,

e depois pelo número real σ, o que equivale a fazer girar o vetor α de um ângulo φ e multiplicar o seu módulo por σ.

Esta operação se pode construir geometricamente, quando se dá o círculo de raio 1 com centro na origem. Para isso, constroe-se a semi-reta OP, que faz com o vetor α o ângulo φ e sobre ela o segmento OM, de comprimento σ; traça-se depois $\alpha\gamma$ paralela a NM, sendo ON o segmento unitário sôbre a semi-reta $O\alpha$.

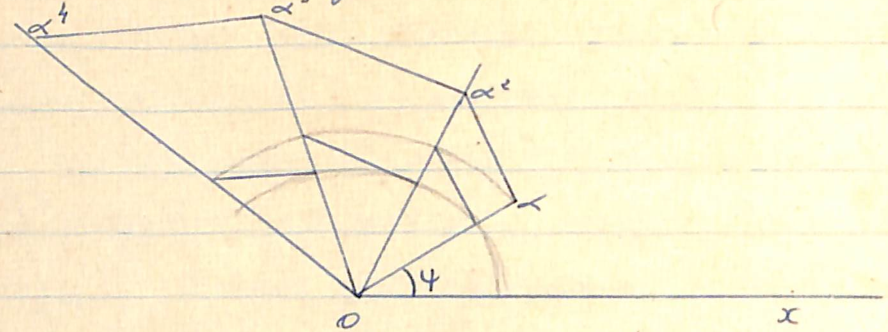


Com efeito, com êsse processo construimos a quarta proporcional dos números $|\gamma|$ 1, $|\alpha|$, $|\beta|$; donde $|\gamma| = |\alpha| . |\beta|$

Uma construção inversa se faz para a divisão. Basta supor na figura atrás conhecidos γ e α; para determinar β, traça-se NM paralela à reta $\alpha\gamma$, obtendo-se OM, de comprimento $|\beta| = \frac{|\gamma|}{|\alpha|}$; o argumento de β é o ângulo que faz a semi-reta OP com o vetor α.

Como aplicação, construimos na figura

abaixo a 4ª potência de um número complexo α de módulo maior que 1.



§12. Raiz de um número complexo. Raizes da unidade.

Seja dado um número complexo $\alpha \neq 0$ sob a forma trigonométrica:

$$\alpha = \rho(\cos\varphi + i \,\mathrm{sen}\,\varphi) \qquad (\rho \neq 0)$$

Propomo-nos determinar um outro número complexo (raiz de índice n de α)

$$\beta = \sigma(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

que elevado à potência inteira n dê em resultado α, isto é, tal que se tenha $\beta^n = \alpha$. Pela fórmula de Moivre, isto equivale a

$$\sigma^n(\cos n\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,n\vartheta) = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

ou (1) $\sigma^n = \rho$ (2) $n\vartheta = \varphi + 2k\pi$

Dessas duas igualdades tiramos

(3) $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ (3') $\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi$

A 1ª relação determina univocamente σ, que deve ser um nº real absoluto. Fazendo depois em (3') $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$, temos no 2º termo, $k/n \cdot 2\pi$, n ângulos distintos e menores que 2π, aos quais correspondem n números complexos distintos β que satisfazem à condição requerida. Para qualquer outro valor de k, sendo nq o maior múltiplo de n não maior que k, temos

$$k = nq + r \qquad \text{com} \qquad 0 \leq r < n$$

Substituindo na fórmula (3'), obtemos

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{r}{n}2\pi + 2q\pi$$

o qual difere de um dos ângulos já determinados de um múltiplo inteiro de 2π, e portanto não corresponde a nenhuma nova raiz.

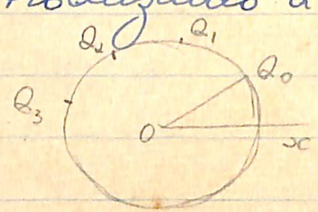
Há, pois, exatamente n raizes n^{as} distintas de um nº complexo qualquer $\alpha \neq 0$; os seus afixos estão todos no mesmo círculo com centro na origem e raio $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$, e os ráios vetores fazem entre si ângulos que são sempre múltiplos inteiros de $\frac{2\pi}{n}$. Qualquer dessas raizes se pode designar com o mesmo símbolo $\sqrt[n]{\alpha}$. Se $\alpha=0$, é evidente que há uma única raiz, $\beta=0$. Para conservar a generalidade, dizemos que nêste caso há n raizes iguais a 0.

Para construir geomètricamente as n raizes n^{as} de um n.º dado, α, começamos por traçar um círculo com centro na origem e ráio $\sqrt[n]{|\alpha|}$. Depois tiramos pela origem a semireta que faz com Ox o ângulo $\frac{\varphi}{n}$, a qual corta a circunferência em um ponto Q_0, que é o afixo de uma das raizes. Dividindo então a circunferência em n partes iguais, a partir de Q_0, os outros pontos de divisão, $Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1}$ são os afixos das outras raizes.

Enfim, note-se que, fixado o valor de ρ, uma das raizes é dada pela fórmula

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right)$$

e elevando à potência m e introduzindo a noção de potência fracionária de um n.º complexo, definida por $\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}$, obtemos a nova extensão da fórmula de Moivre ao caso dos expoentes racionais.



$$(4) \qquad \alpha^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\varphi + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}\varphi\right)$$

Um caso particular importantíssimo é aquele em que $\alpha = 1$; o seu argumento é um qualquer dos n.os $2k\pi$ com k inteiro, e a fórmula que dá tôdas as raizes é

$$(5) \qquad \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

Sim

Os seus afixos estão sôbre o círculo de ráio 1, com centro na origem. Se tomarmos para o número 1 o argumento 0, o ponto Q_0 da construção anterior será o afixo de 1, isto é, a interseção dêsse círculo com o eixo Ox. O problema de determinar tôdas as raizes n^{as} da unidade coincide pois com a da divisão do círculo em n arcos iguais ou o de construir o polígono regular de n lados inscrito no círculo de ráio 1. Entre as raizes está sempre a raiz real 1, e, se n é par, a raiz real -1; as outras raizes são sempre conjugadas duas a duas.

Vamos dar algumas propriedades das raizes da unidade:

Não

1. Se ε é uma raiz n.ª de 1, tôdas as potências de ε também o são. Com efeito,

sendo por hipótese $\varepsilon^n = 1$, segue

$$(\varepsilon^p)^n = \varepsilon^{pn} = (\varepsilon^n)^p = 1^p = 1$$

Consideremos agora a sucessão

$$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots \varepsilon^s, \dots$$

Seja p o menor inteiro positivo que satisfaz à condição $\varepsilon^p = 1$. Os n.os $\varepsilon^0, \dots \varepsilon^{p-1}$ são todos distintos, pois se para $0 \leq r < s < p$ tivéssemos $\varepsilon^r = \varepsilon^s$ teríamos $\varepsilon^{r-s} = 1$, o que não é possível, pois $s - r < p$; todos os outros elementos da sucessão (6) são iguais a êsses p primeiros repetidos na mesma ordem. Com efeito, sendo q e r o quociente e o resto da divisão de s por p, temos

$$\varepsilon^s = \varepsilon^{pq+r} = (\varepsilon^p)^q . \varepsilon^r$$

Temos assim, $\varepsilon^p = \varepsilon^0 = 1$, $\varepsilon^{p+1} = \varepsilon$, $\varepsilon^{p+2} = \varepsilon$, etc. Por esta razão êsse n.º p chama-se período da raiz ε; daqui segue tambem que para que se tenha $\varepsilon^s = 1$, é preciso que s seja múltiplo de p. Em particular n deve ser múltiplo de p, isto é,

Nos

<u>2. O período de uma raiz n^a da unidade é sempre um divisor de n.</u>

Chama-se <u>raiz primitiva</u> aquela cujo período n

É evidente que existe ao menos uma raiz primitiva, a que tem por argumento $\frac{2\pi}{n}$; também é primitiva a raiz de argumento $\frac{(n-1)}{n.2\pi} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}$, que é conjugada da anterior. Do exposto, segue

Nos

<u>3. Se ε é raiz n^a primitiva da unidade, tôdas as n raizes são dadas por</u>

$$\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots \varepsilon^{n-1}$$

pois esses n.os são raizes distintas em n.º de n

É fácil achar o período de qualquer é p, temos $(\varepsilon^q)^p = \varepsilon^{qp} = 1$, o que só é possível se pq for divisível pelo período de ε, que é n; para que p seja o período de ε^q, é preciso que pq seja o menor múltiplo de q nessas condições, isto é, o mínimo múltiplo comum de q e n. Sendo d o máximo divisor comum de q e n, devemos ter portanto, $pq = \frac{q.n}{d}$, ou $q = \frac{n}{d}$. Para que ε^q seja raiz primitiva é preciso que seja $p = n$, ou $d = 1$, isto é, que q seja primo com n. Daqui segue que o n.º de raizes primitivas de índice n é igual ao n.º de n.os inteiros positivos não maiores que n e primos com n, incluindo o n.º 1. Tal número é chamado <u>indicador de Gauss</u>, e indica-se com o símbolo $\varphi(n)$. O cálculo elementar dá

$$\varphi(1)=1 \qquad \varphi(2)=1 \qquad \varphi(3)=2 \qquad \varphi(4)=2$$
$$\varphi(5)=4 \qquad \varphi(6)=2 \qquad \varphi(7)=6 \qquad \varphi(8)=4$$

Note-se que todo êste raciocínio só depende do nº n e não da raiz primitiva particular ε.

Seja ε uma raiz n^a primitiva $(n>1)$. Da identidade

$$(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1})(1-\varepsilon)=1-\varepsilon^n$$

notando que $\varepsilon \neq 1$ e $\varepsilon^n=1$, segue que o primeiro parêntesis é nulo, isto é:

não

<u>4. A soma das n raizes n^{as} distintas da unidade é sempre nula.</u>

Consideremos tambem o produto das raizes, que é evidentemente

$$\varepsilon^{1+2+\ldots+(n-1)}=\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

se n é impar, $\frac{n-1}{2}$ é inteiro, e êsse produto é igual a $(\varepsilon^n)^{\frac{n-1}{2}}=1$; se n é par, $\varepsilon^{\frac{n}{2}}$ é uma raiz de período 2 e portanto igual a -1, e sendo $n-1$ impar, temos $(\varepsilon^{\frac{n}{2}})^{n-1}=(-1)^{n-1}=-1$;

em resumo:

não

<u>5. O produto das n raizes n^{as} distintas da unidade é $+1$ ou -1, conforme seja n impar ou par.</u>

Para determinar todas as raizes n^{as} de um número complexo qualquer α, basta determinar uma raiz particular β e multiplicá-la por cada uma das raizes n^{as} da unidade. Com efeito, sendo ε uma raiz n^a de 1, temos

$$(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\cdot\varepsilon^n=\beta^n=\alpha;$$

se tomarmos as n raizes distintas da unidade, teremos assim as n raizes distintas de α; se ε é uma raiz n^a primitiva, tôdas as raizes de α serão dadas por

$$\beta,\ \beta\varepsilon,\ \beta\varepsilon^2, \ldots \beta\varepsilon^{n-1}$$

Segue tambem aqui que a soma das raizes n^{as} distintas de um nº complexo qualquer α é sempre nula $(n>1)$, e que o produto é $\pm\alpha$ conforme seja n impar ou par. Do 1º dêsses resultados se deduz fàcilmente a proposição geometrica:

Seja dado um polígono regular

qualquer e uma reta passando pelo centro. A soma das distâncias a esta reta dos vértices que estão de um lado da mesma é igual à soma das distâncias dos vértices que estão do lado oposto: com efeito, fixado um sentido positivo na direção normal à reta, a medida algébrica da distância de um vértice do polígono a esta reta pode sempre ser considerada como a parte real (ou coeficiente do imaginário) da raiz n^a de um n.º complexo conveniente, sendo n o número de lados do polígono.