o conjunto complementar de C_k em C, isto é, o conjunto dos pontos de C não inferiores a k).

Consideremos a classe K dos números k tais que ou o conjunto C_k seja vazio ou nêsse conjunto o extremo superior de $f(x)$ seja menor que L. Se k pertence a K todo número $k' < k$ tambem pertence a esta classe, o que é evidente se C'_k é vazio, e em caso contrário, estando C'_k contido em C_k, segue do lema anterior.

A classe K é portanto uma classe minorante.

Se K é vazia, em qualquer entorno direito do infinito haverá pontos de C e nêsses pontos o extremo superior de $f(x)$ é L, logo temos neste caso, $\mathcal{E} = -\infty$

Analogamente se demonstra que se K contém todos os n.ºs reais, temos $\mathcal{E} = +\infty$

Enfim, se a classe K não é vazia nem contem todos os n.ºs reais, ela determina um n.º $\mathcal{E}$, tal que todo n.º menor que $\mathcal{E}$ pertence a K e todo n.º maior que $\mathcal{E}$ está fora de K.

Seja $a - b$ um entôrno arbitrário de $\mathcal{E}$, isto é, $a < \mathcal{E} < b$. Estando b fora de K o extremo superior de $f(x)$ em C_b é L. Este campo é separado por um n.º c, compreendido entre $\underline{a}$ e $\underline{\mathcal{E}}$, em uma parte, C_c no qual o extremo superior de $f(x)$ é menor que L, e outra parte contida no intervalo $c - b$, na qual tal extremo será forçosamente L. Segue daqui imediatamente que no conjunto de pontos de C contidos no entôrno arbitrário $a - b$ de $\mathcal{E}$, o extremo superior de $f(x)$ é L, o que demonstra o teorema.

É evidente que se $\mathcal{E}$ não faz parte de C, $\mathcal{E}$ é necessàriamente ponto de acumulação dêsse campo. Se for ponto de isolado de C, haverá um entôrno de $\mathcal{E}$ sem nenhum ponto de C além de $\mathcal{E}$. Se a função for monódroma teremos neste caso $f(\mathcal{E}) = L$, e L será um máximo. Conclue-se que se L não é máximo da função, todo de ponto de (acumulação) Weierstrass é ponto de acumulação de C.

Analogamente se pode demonstrar a existência de um ponto de Weierstrass relativo ao extremo inferior.

Notemos tambem que pode haver outros pontos de Weierstrass; a classe K atrás construida define o máximo do conjunto desses pontos. É fácil demonstrar tambem que os pontos de Weierstrass de qualquer função relativo ao extremo superior ou ao extremo inferior formam sempre um conjunto fechado.

7. Noção Geral de Limite.

Seja $y=f(x)$ uma função definida num campo C, e seja a um ponto de acumulação desse campo. Digamos que y tem por limite o número real b, para x tendendo a a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} y = b$$

quando a cada entorno β de b pode-se fazer corresponder um entorno α conveniente de a, tal

que para todo ponto x de C diferente de a, contido em α, o valor $y=f(x)$ correspondente pertença ao entorno β.

No caso de função polídroma aplica-se a mesma definição de limite, devendo a última condição ser satisfeita para todos os valores de $y=f(x)$, correspondentes ao mesmo valor de x.

Podemos dar outra forma a essa definição, pois a condição acima é evidentemente satisfeita se nos limitarmos aos entornos simétricos de $\underline{b}$ e de $\underline{a}$, pois dentro de qualquer entorno há sempre um entorno simétrico e o elemento que estiver nesse entorno simétrico estará dentro do entorno primitivo. Ora, x estará no entorno simétrico (δ) de a, se tivermos

$$a-\delta < x < a+\delta$$

donde se tira

$$a-x<\delta \quad \text{e} \quad x-a<\delta \quad \text{ou}$$

$$|x-a|<\delta$$

Podemos dizer, portanto, que y tende a $\underline{b}$ para x tendendo a $\underline{a}$, quando, dado o número $\varepsilon > 0$ arbitrário, se pode determinar em correspondência um número positivo δ, tal que para todo ponto x diferente de a satisfazendo à condição

$$|x-a| < \delta$$

temos para o valor (ou valores) de $y = f(x)$ correspondente,

$$|y-b| < \varepsilon$$

Não

11. Funções monótonas.

Seja $y = f(x)$ uma função monódroma definida num campo C; se quaisquer que sejam os pontos x_1 e x_2 de C, com $x_1 < x_2$, tivermos sempre $f(x_1) \leq f(x_2)$

diz-se que $f(x)$ é função não decrescente. Se na mesma hipótese fôr sempre

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

diz-se que $f(x)$ é função não crescente.

Estas duas classes de funções chamam-se funções monótonas.

Teorema. Se $y = f(x)$ é função monótona de x no campo C e se a é um ponto de acumulação à direita de C existe o $\lim\limits_{x \to a^-} y$

Seja $f(x)$ não decrescente. Chamemos C_1 o conjunto dos pontos $x \neq a$, e seja L o extremo superior de $f(x)$ em C_1, que supomos finito. Para todo x de C_1, temos, então

$$f(x) \leq L$$

Dado um nº $\mathcal{E} > 0$ arbitrário, podemos achar um nº x_1 de C_1 tal que se tenha $f(x_1) > L - \varepsilon$; para todo ponto $x \neq a$ do entor no x_1 e a, os quais satisfazem a condição $x_1 < x < a$, temos $f(x_1) \leq f(x)$, e portanto,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq L$$

isto é, $f(x)$ cai no entorno (ε) arbitrário de L, donde $\lim_{x \to a-} f(x) = L$

Se L fosse infinito, bastaria substituir $L-\varepsilon$ por um nº arbitrário K, repetindo a mesma demonstração chega-se neste caso

$$\lim_{x \to a+-} f(x) = +\infty$$

Se $f(x)$ é função não crescente, com extremo inferior l no mesmo campo C, demonstra-se analogamente que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = l$$

A uma conclusão análoga se chega no caso em que a é ponto de acumulação a esquerda de C, pois basta fazer a mudança de variável $x = -x'$, donde $f(x) = f(-x') = \varphi(x')$ para se recair no caso anterior. Nesta hipótese se a função é não descrescente com extremo inferior l à direita de a, temos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = l$$

e se é não crescente, com extremo superior L.

no mesmo campo, temos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

Esses teoremas se aplicam evidentemente ao caso em que o ponto de acumulação considerado é infinito positivo ou negativo. Também se aplicam no caso em que, sendo a ponto de acumulação à direita (ou à esquerda), a função $f(x)$ é monótona somente nos pontos de C que caem em certo entorno esquerdo (ou direito) de a.

Vemos assim que se uma função monótona é limitada num entorno esquerdo (direito) de um ponto de acumulação à direita (esquerda) a do seu campo de definição, ela é convergente para x tendendo a a pela esquerda (direita).

Suponhamos enfim que o nº a, finito seja ponto de acumulação de C tanto à direita como à esquerda e que a função $f(x)$ seja monótona nos pontos de C de um entorno completo α de a. Como já vimos, existem os dois limites

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a-0)$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a+0)$$

Se a função é não decrescente, temos evidentemente $f(a+0) \geq f(a-0)$ e o contrário se é não crescente. Com efeito, no entorno α de valores de $f(x)$ para $x < a$ são todos menores ou iguais (se $f(x)$ é não decrescente) aos valores para $x > a$; o mesmo acontece portanto com o extremo superior à esquerda de a e inferior à direita, e êsses extremos coincidem com os limites acima.

Podemos ver, além disto, que se a pertence ao campo C, e se os limites acima são iguais o seu valor comum coincide com $f(a)$. Com efeito, para qualquer $x < a$, temos $f(x) \leq f(a)$, e esta desigualdade deve valer também para o extremo superior de $f(x)$ para $x < a$, isto é, $f(a-0) \leq f(a)$. Analogamente se deduz $f(a) \leq f(a+0)$ logo $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$, e sendo iguais os extremos destas desigualdades, temos

$$f(a) = f(a-0) = f(a+0)$$

Suponhamos ainda que a seja ponto de acumulação à direita de C e que para os pontos

$x \neq a$ de um entorno esquerdo de a tenhamos sempre $f(x) \leq b$, sendo $f(x)$ função não decrescente. Neste caso, para se concluir que $\lim_{x \to a-} f(x) = b$ basta que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, se possa achar um desses pontos x para o qual $f(x) > b - \varepsilon$, pois da existência de um tal ponto se conclue a de todo um entorno $x \neq a$ no qual esta propriedade é satisfeita. O mesmo raciocínio se aplica a uma não crescente, assim como para os pontos de acumulação à esquerda.

Tomemos por exemplo a função exponencial $y = b^x$, supondo $b > 1$. Já vimos no capítulo "Potências e logaritmos" as propriedades desta função: ela é definida em todo o campo real, é crescente e toma todos os valores reais positivos. Deduz-se daqui imediatamente

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty \;;$$

seja agora a um n.º real qualquer; sabemos que dado $\varepsilon > 0$, é sempre possível achar um n.º $x < a$ tal que seja $b^a - b^x < \varepsilon$ ou

$$b^x > b^a - \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} b^x = b^a$$

Se fosse $b < 1$ bastaria considerar a função $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$, pois teríamos $\frac{1}{b} > 1$. Deduz-se pois que a última fórmula é válida para qualquer que seja $b > 0$.

~~Se uma~~

Se uma função $y = f(x)$ é crescente no campo C, a sua inversa é monótona do mesmo tipo; pois, designando com o mesmo índice os valores correspondentes de x e y, sendo x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de C, de $x_1 \leq x_2$ segue, respectivamente, $y_1 \leq y_2$; logo, inversamente, sendo y_1 e y_2 dois valores quaisquer de $f(x)$ que correspondem, respectivamente, a x_1 e x_2, se $y_1 \leqq y_2$ temos, respectivamente, $x_1 \leqq x_2$, isto é, $x = f^{-1}(y)$ é função monódroma e crescente de y, definida no campo ou conjunto I dos valores que toma $f(x)$ quando x varia em C. Da mesma maneira se demonstra que se $f(x)$ é função decrescente a sua inversa é também monódroma decrescente.

Tomemos o caso da função crescente e seja a um ponto de acumulação à direita de C. Vamos demonstrar que de

$$\lim_{x \to a-} y = b$$

segue para a função inversa $x = f^{-1}(y)$ definida no campo I

$$\lim_{y \to b-} x = a$$

Em 1º lugar vê-se que b é ponto de acumulação à direita de I, pois é extremo superior de $f(x)$ no conjunto dos pontos $x < a$ e não é máximo, porque se tivéssemos, por ex., $f(x_1) = b$ com $x_1 < a$, em todos os pontos x do intervalo $x_1 - a$ $f(x)$ seria constante; contra a hipótese. Temos, pois, para $x < a$, $y < b$. De outro lado, dado o entorno esquerdo $c - a$ de x sendo $x \neq a$ um ponto de C dêsse entorno, todos os pontos $y \neq b$ de I que estão no entorno $y_1 - b$ de b correspondem a pontos x de $c - a$, pois de $y_1 < y < b$, segue $c < x_1 < x < a$ $c < x_1 < x < a$ C.Q.D.

No caso da função decrescente, basta tomar como função intermediária $\bar{y} = -y$ para se cair no caso anterior e deduzir de (1), que $\lim_{y \to b+} x = a$. Se a é ponto de acumulação à esquerda e se é $\lim_{x \to a+} y = b$

deduzimos também, se y é crescente, $\lim_{y \to b+} x = a$ e se y é decrescente $\lim_{y \to b-} x = a$

Tomemos por ex. as funções trigonométricas. Seja $y = \operatorname{sen} x$, para x no intervalo $-\frac{\pi}{2} \text{---} +\frac{\pi}{2}$; sabemos pela trigonometria que a função $\operatorname{sen} x$ é crescente nêsse intervalo $-1 \text{---} +1$. Qualquer ponto interno a do intervalo $-\frac{\pi}{2} \text{---} +\frac{\pi}{2}$ é ponto de acumulação à direita e à esquerda, pondo $\operatorname{sen} a = b$ sabemos que

$$\lim_{x \to a \pm} y = b \qquad \text{logo}$$

$$\lim_{y \to b} x = a \quad \text{isto é} \quad \lim_{y \to b} \operatorname{arc\,sen} y = \operatorname{arc\,sen} b$$

Temos também para o ponto $\frac{\pi}{2}$, que é de acumulação à direita,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} y = 1 \qquad \text{donde}$$

$$\lim_{x \to 1-} \operatorname{arc\,sen} y = \frac{\pi}{2}$$

Da mesma forma se demonstra a igualdade

$$\lim_{y \to -1+} \operatorname{arc\,sen} y = -\frac{\pi}{2}$$

Para o $\cos x$ temos que considerar o intervalo $0 \text{---} \pi$ sendo esta uma função decrescente nêsse intervalo; neste caso acha-se sendo $b = \cos a$ $(0 < a < \pi)$,

$$\lim_{y \to b} \operatorname{arc\,cos} y = a \qquad \lim_{y \to 1-} \operatorname{arc\,cos} y = 0$$

$$\lim_{y \to -1+} \operatorname{arc\,cos} y = \pi$$

Enfim pode-se considerar também a função $\operatorname{tg} x$ definida no intervalo aberto $-\frac{\pi}{2} \text{---} +\frac{\pi}{2}$, a qual é crescente e toma nesse intervalo todos os valores reais, e determina, portanto, uma função inversa crescente $\operatorname{arc\,tg} x$, definida em todo campo real. Para esta última função deduzem-se relações análogas às anteriores, e em particular

$$\lim_{x \to \infty+} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty -} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Passemos ao estudo a função inversa da função esponencial $y = b^x$. Se $b > 1$, esta função é crescente e enquanto x percorre o intervalo $-\infty — +\infty$, y percorre o intervalo aberto $0 — +\infty$. A função inversa, $x = \log_b y$ é portanto uma função crescente definida neste último intervalo. Pelas propriedades da função esponencial, deduz-se para um número $\beta > 0$ qualquer

$$\lim_{y \to \beta} \log_b y = \log_b \beta \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0+} \log_b y = -\infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} \log_b y = +\infty$$

O caso $b < 1$ que dá para $\log_b y$ uma função decrescente reduz-se fàcilmente ao anterior

12. Número e. Logaritmos neperianos.

Consideremos a sucessão cujo termo geral é $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vamos demonstrar que esta função do nº natural n é convergente para $n \to \infty$. Com efeito, temos pela fórmula do binómio

1) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \dots + \frac{1}{n^n};$$

o termo geral desta soma pode ser posto sob a forma $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{r!}$ pela qual se vê que fixado $r > 1$ este termo é um produto de $\frac{1}{r!}$ por $r-1$ fatores positivos e menores que 1, que crescem ao mesmo tempo que n. Logo, no 2º membro de (1), quando n cresce, cresce também cada termo a partir do 3º e ao mesmo tempo o nº de termos; de outro lado, essa soma é sempre menor que

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

e como esta última fração é sempre menor que 2, temos, para $n > 1$,

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

A sucessão considerada é portanto convergente e o seu limite, para $n \to \infty$ costuma-se indicar com a letra e. Pode-se demonstrar que êsse n.º é irracional e tem o valor aproximado.

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Consideremos agora a função $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, definida no campo real exterior do intervalo $-1 — 0$; vamos demonstrar que temos

$$2) \qquad \lim_{x\to\infty} y = e$$

Com efeito, para $x>0$, temos, pondo $n = [x]$ $\lim_{x\to+\infty} n = +\infty$ e do $n < x < n+1$, segue

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e como temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

temos também, pelo critério de confronto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Para x negativo e < -1, pomos $x = -(1+y)$ donde $\lim_{x\to-\infty} y = +\infty$, e

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{-(1+y)} = \left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right),$$

donde $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) = e$$

e portanto a desigualdade (2) está demonstrada em geral; pondo $x = \frac{1}{t}$

$$(3) \qquad \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Como aplicação, temos, sendo α, um n.º real qualquer $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha = e^\alpha$$

igualdade que é aliás evidente para $\alpha = 0$

Chamam-se logaritmos neperianos ou naturais os que têm por base o n.º e. Tais logaritmos, que são os mais importantes na análise, costumam-se escrever, sem indicação da base:

$$\log x = \log_e x \qquad (x>0)$$

Vamos demonstrar a relação

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \log a \qquad (a>0)$$

que é evidente para $a=1$. Suponhamos $a \neq 1$. Pondo $t = a^x - 1$, temos evidentemente $\lim_{x \to 0} t = 0$ e tomando os logaritmos neperianos

$$x = \frac{\log(1+t)}{\log a} \qquad \text{donde}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t \log a}{\log(1+t)} = \frac{\log a}{\lim_{t\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \log a$$

já que $\lim_{t\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log \lim (1+t)^{\frac{1}{t}} = \log e = 1$

Não

13. Critério de convergência de Cauchy. Limite máximo e mínimo num ponto.

Uma das proposições mais importantes da teoria dos limites, principalmente pelas suas aplicações em tôda a Análise é o chamado critério de convergência de Cauchy, que damos a seguir:

Teorema: A condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ tenha um limite finito em um ponto de acumulação a do seu campo de definição é que, dado um

número $\varepsilon > 0$ arbitrário, se possa sempre achar em correspondência um entôrno α de a tal que para dois valores quaisquer x' e x'' de x dentro dêle, e distintos de a, se tenha, para o valor (ou valores) correspondentes da função

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

A importância dêste teorema consiste em que, para saber se uma função é convergente, êle nos fornece um critério no qual não intervem o valor do limite, cuja existência é ainda hipotética. Passemos à demonstração:

a) Suponhamos que a função tenha um limite finito b; podemos, então, dado ε positivo e arbitrário, determinar um entorno α de a dentro do qual, para $x \neq a$, se tenha sempre $|f(x) - b| < \varepsilon/2$

Tomados, então, dois valores quaisquer de x: x' e x'' dentro de α e distintos de a, temos

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) - (f(x'') - b)| \leq |(f(x') - b) + (f(x'') - b)| \leq$
$\leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

e portanto condição enunciada é necessária.

b) Suponhamos que a condição seja satisfeita; dado um nº $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos então achar um entorno $\underline{\delta}$ de $\underline{a}$, dentro do qual se tenha, sendo x' e x'' valores quaisquer de x distintos de $\underline{a}$, $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixado o valor de x' nêsse entorno, teremos para todos os pontos $x \neq a$ do mesmo $-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(x') < \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto

$$f(x) < f(x') + \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad f(x) > f(x') - \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja agora $L(\delta)$ e $l(\delta)$, respectivamente o estremo superior e o inferior de $f(x)$ para $x \neq a$ no entorno (δ) de a. Pelas condições acima, teremos evidentemente

$$L(\delta) < f(x') + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$l(\delta) > f(x') - \frac{\varepsilon}{2}$$

donde, sendo $L(\delta) > l(\delta)$

$$0 \leq L(\delta) - l(\delta) \leq \varepsilon$$

Mas pelas propriedades dos estremos das funções, é fácil ver que $L(\delta)$ e $l(\delta)$ são funções monótonas, a 1ª não decrescente, a 2ª não crescente de

δ para $\delta > 0$. A diferença $L(\delta) - l(\delta)$ é portanto também função monótona não decrescente. Mas essas três funções de δ são limitadas ao menos em um entorno de 0, e portanto têm limites finitos para $\delta \to 0$, e pelas desigualdades (5), vemos que

$$\lim_{\delta \to 0} [L(\delta) - l(\delta)] = \lim_{\delta \to 0} L(\delta) - \lim_{\delta \to 0} l(\delta) = 0$$

donde
$$\lim_{\delta \to 0} L(\delta) = \lim_{d \to 0} l(\delta) = b$$

Isto quer dizer que dado $\varepsilon > 0$ pode-se achar um nº $\delta > 0$ tal que no entorno

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \text{ , ou}$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad \text{isto é,}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

o que prova que a condição enunciada é também suficiente.

Êste teorema se aplica também para o limite à esquerda, se a é ponto de acumulação à direita, bastando substituir o entorno (δ), pelo entorno esquerdo $a - \delta$ a a de a;

tal que no entorno δ de a se tenha
$b - \varepsilon < l(\delta) \leq L(\delta) < b + \varepsilon$ e como para todo

$x \neq a$ dêsse entorno (δ) é sempre $l(\delta) \leq f(x) \leq L(\delta)$, sem... finalmente

igualmente se aplica ao limite à direita, assim como ao caso de ponto de acumulação infinito, para o qual fàcilmente se adapta a demonstração dada. Assim, por exemplo, no caso das sucessões, podemos enunciar o critério de convergência da seguinte maneira:

A condição necessária e suficiente para que a sucessão $a_1, a_2, \ldots a_n$ seja convergente, é que dado o n.º ε positivo arbitrário, se possa achar em correspondência um n.º inteiro n, tal que para $n' > a$ e $n'' > a$ se tenha sempre

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$$

ou, indicando com n o menor dos n.ºs n' e n'' e com $n+p$ o outro, tenhamos, para $n > N$ e p inteiro e positivo qualquer

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

Seja $y = f(x)$ uma função qualquer definida num campo C e a um ponto de acumulação de C. O raciocínio que fizemos em relação às funções $L(\delta)$ e $l(\delta)$ continua válido

do se admitirmos que estas funções possam tomar o valor $+\infty$ ou $-\infty$, isto é, admitido isto, estas quantidades são sempre funções monótonas de δ, respectivamente, não decrescente e não crescente, e a sua diferença, a oscilação de $f(x)$ no entorno (δ) de a (excluido o ponto a), $\Omega(\delta) = L(\delta) - l(\delta)$ é função não decrescente de δ. Temos evidentemente $\Omega(\delta) > 0$ e portanto, chamando L, l e Ω os limites destas funções monótonas para $\delta \to 0$, temos

$$\Omega \geq 0 \quad \text{ou} \quad L \geq l$$

Os números L e l chamam-se respectivamente <u>limite máximo</u> e <u>limite mínimo</u> de $f(x)$ no ponto a; e Ω a <u>oscilação</u> no mesmo ponto. Considerando sòmente os pontos de C à esquerda de a, no caso dêste ser ponto de acumulação à direita, definem-se anàlogamente, o limite máximo esquerdo L_e e o limite mínimo esquerdo l_e de $f(x)$ em a, assim como a oscilação esquerda (~~de a, isto é,~~) Ω_e; também se definem os mesmos elementos à direita de a, isto é, os números L_d, l_d, Ω_d, respectivamente, limite máximo e mínimos direitos e oscilação direita de $f(x)$ em a. Se a é ponto de acumulação à esquerda e à direita, existem sempre os quatro limites (finitos ou infinitos) L_e l_e L_d e l_d. Evidentemente o maior e o menor dos quatro coincidem, respectivamente com os limites L e l definidos atrás.

Verifica-se, por ex., que para a função $y = e^x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ temos no campo ponto 0, com as notações anteriores,

$$L_e = L_d = L = 1 \quad , \quad l_e = l_d = l = -1$$

e para a função $y = \dfrac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{(1 - \operatorname{sen} \frac{1}{x})}$ e no mesmo ponto 0, temos

$$L_e = l_e = -\infty \quad L_d = +\infty \quad l_d = \frac{1}{2}$$

14. Funções contínuas

Seja C um conjunto de nº. x e x_0 um ponto de acumulação de C, pertencente a C. Se $y = f(x)$ é uma função definida em C e se é

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

diz-se que $f(x)$ é contínua no ponto x_0. Como não admitimos o infinito como valor de uma função em um ponto, o 2º membro de (1) é sempre um nº. finito. Deduzimos daqui que se uma função é contínua em um ponto x há um entorno dêsse ponto no qual ela é limitada. Também se deduz, nesta hipótese, que se $f(x_0) \neq 0$, há um entorno de x_0 tal que para todos os pontos x dêsse entorno $f(x)$ conserva um sinal constante (o de $f(x_0)$).

Se C é um conjunto denso em si e se $f(x)$ é contínua em todos os pontos de C, diz-se que essa função é <u>contínua no campo C</u>. Neste caso o valor de $f(x)$ em cada ponto x_0 de C podendo ser definido como o limite de $f(x)$ para $x \to x_0$, segue do teorema de unicidade do limite que $f(x)$ é monódroma no campo C, por ex., toda função contínua num intervalo aberto ou fechado é monótona nêsse intervalo.

A maior parte das funções estudadas em Matemática são definidas nos intervalos abertos ou fechados, e portanto em conjuntos densos em si. Pelos teoremas sôbre limites deduz-se imediatamente, para a continuidade em um ponto u_0:

— A soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são funções contínuas, contanto que último caso o valor do divisor no ponto u_0 não seja 0.

— Uma função (contínua) de função contínua é contínua (neste caso está satisfeita a hipótese b do teorema 9, § 9.

Para a continuidade num campo C, temos:

— Um polinômio em x, assim como as funções e^x, a^x $(a>0)$, sen u, cos u, arc tg u, são contínuas em todo o campo real.

— A função tg u é contínua no intervalo aberto $-\frac{\pi}{2} — +\frac{\pi}{2}$ e em todos os que se deduzem dêste, acrescentando à variável um múltiplo inteiro qualquer de π

— As funções arc sen u e arc cos u definidas no fim de § 11 são contínuas em todo o intervalo fechado $-1 — +1$.

— A função x^α para $\alpha>0$ é contínua ~~(para todos os valores de x que)~~ em todo intervalo (aberto) $0 — \infty$. Para $\alpha<0$ ela é contínua no intervalo aberto $0 — \infty$

— A função $\log x$ é contínua (para todos os valores de x) em todo intervalo $0 — +\infty$

— A função racional de x é contínua para todos os valores de x que não anulem o denominador.

Do que vimos no parágrafo anterior se deduz também que se uma função $f(u)$ é contínua num ponto u_0, a sua oscilação nêsse ponto é nula, isto é, dado um n.º $\varepsilon>0$ arbitrário, há um entorno (δ) de u_0 tal que dados dois valores u' e u'' de u quaisquer dentro dêle (inclusive u_0), seja sempre $|f(u')-f(u'')|<\varepsilon$ e $\Omega(\delta)<\varepsilon$

Também se define <u>continuidade à direita</u> e <u>à esquerda</u>, quando se tem, respectivamente $\lim_{u\to u_0+} f(u) = f(u_0)$ e

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$$

Por exemplo, a função já definida atrás $y = [x]$ é contínua só à direita para todos os valores inteiros de x, pois temos, sendo n inteiro,

$$\lim_{x \to n-} [x] = n - 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to n+} [x] = n = [n]$$

Vamos demonstrar alguns teoremas importantes:

Lassance

Teorema 1: Se uma função $f(x)$ definida e contínua num intervalo fechado $a \text{—} b$ tem nos extremos a e b valores de sinais contrários essa função $f(x)$ se anula ao menos em um ponto interno dêsse intervalo.

Seja por exemplo $f(a) > 0$ e portanto $f(b) < 0$. Consideremos o conjunto dos pontos x de $a \text{—} b$ tais que $f(x) > 0$, e seja x_0 o seu extremo superior. Temos, evidentemente, $a < x_0 < b$, (pois para $a < x_0 < b$) pois para cada um dêsses extremos há um entorno (direito e esquerdo) em que $f(x)$ tem o mesmo sinal respectivamente $+$ e $-$. Em qualquer entorno de x_0 existem pontos x do conjunto, para os quais $f(x) > 0$ e pontos fora do conjunto (por ex., os pontos $x > x_0$), para os quais $f(x) < 0$. Se fosse $f(x_0) \neq 0$ haveria ao menos um entorno de x_0 em que $f(x)$ teria sinal constante, o que não é possível, logo, temos forçosamente, $f(x_0) = 0$ o que demonstra o teorema.

Lassance

Teorema 2. Se $f(x)$ é uma função monódroma definida em um conjunto fechado C e contínua em todos os pontos de acumulação de C ela é limitada e alcança em C os seus extremos superior e inferior (que serão máximo e mínimo respectivamente).

Como excluimos a hipótese que o infinito seja ponto de C, êste conjunto sendo fechado tem que ser limitado; seja ξ um ponto de Weierstrass relativo ao extremo superior L de $f(x)$. Se ξ ~~não é~~ ponto iso lado de C, temos $L = f(\xi)$ e como $f(\xi)$ é um n.º finito, o teorema está demonstrado nesta hipótese. Se ξ não é ponto isolado, será de acumulação, e portanto pertence ao conjunto C, que é fechado. Pela continuidade de $f(x)$ em ξ, segue que para cada $\varepsilon > 0$ existe um entôrno de ξ tal que para todo x dentro dêle se tenha

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon$$

Mas dentro dêsse entorno o extremo superior de $f(x)$ é ainda L, e portanto temos

$$f(\xi) - \varepsilon < L \leq f(\xi) + \varepsilon$$

$$|L - f(\xi)| \leq \varepsilon$$

Ora, L e $f(\xi)$ são dois n.ºs determinados; para que a sua diferença, seja em valor absoluto menor ou igual a um n.º positivo arbitrário, é preciso que se tenha

$$f(\xi) = L$$

A mesma demonstração se pode fazer para o extremo inferior l, concluindo assim a existência de um ponto η de C tal que $f(\eta) = l$

Teorema 3. Tôda função $f(x)$ contínua em um intervalo fechado $a - b$, assume nêsse intervalo todos os valores compreendidos entre o seu máximo L e o seu mínimo l (o máximo e o mínimo existem pois o intervalo $a - b$ é um conjunto fechado).

Seja, com efeito, K um n.º real qualquer compreendido entre l e L e consideremos a função $F(x) = f(x) - K$; nos pontos ξ e η do intervalo $a - b$, definidos atrás, temos

$$F(\xi) = f(\xi) - K = L - K > 0 \quad \text{e}$$

$$F(\eta) = f(\eta) - K = l - K < 0$$

Mas $F(x)$ é também uma função contínua no intervalo $a - b$, e portanto no intervalo de extremos ξ e η, que está contido no anterior; pelo teorema 1 esta função se anula ao menos em um ponto x_0 compreendido entre ξ e η, e portanto pertencente ao intervalo $a - b$; deduz-se assim, $f(x_0) = K$ como queríamos demonstrar ($F(x_0) = 0 \therefore f(x_0) - K = 0 \therefore f(x_0) = K$)

N **Teorema 4.** Se uma função $f(x)$ é contínua e crescente num intervalo a — b, existe uma função inversa monódroma $x = \varphi(y)$ que é também contínua e crescente em todo o intervalo $f(a)$ — $f(b)$, e que toma nêsse intervalo todos os valores do intervalo a — b.

Seja $f(a) = c$ e $f(b) = d$; já vimos que de $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c$ e $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = d$ se deduz que a função inversa é também crescente sendo sêus extremos $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$

A função inversa é

$$x = \varphi(y)$$

$$\lim_{y \to c+} x = a \qquad \lim_{y \to d-} x = b$$

Dos teoremas anteriores se conclue que o campo de definição de $\varphi(y)$ é o intervalo c — d, logo $\varphi(y)$ é contínua nos extremos dêsse intervalo. Para os outros pontos basta notar que se $a < x_0 < b$, temos, pondo $y_0 = f(x_0)$, $c < y_0 < d$, e pela consideração dos intervalos a — x_0 e x_0 — b fàcilmente se conclue a continuidade à esquerda e à direita, e portanto a continuidade, simplesmente, de $\varphi(y)$ em qualquer ponto y_0 do intervalo c — d.

Se $f(x)$ é decrescente no intervalo a — b, temos $d < c$ e a função inversa $\varphi(y)$ será decrescente e contínua no intervalo d — c. A demonstração se faz da mesma maneira.

15 Continuidade uniforme.
N Teorema de Heine

Diz-se que uma função monódroma $y = f(x)$ definida num intervalo qualquer é uniformemente contínua nêsse intervalo quando a cada nº $\varepsilon > 0$ arbitrário se pode fazer corresponder um nº positivo δ tal que em qualquer intervalo de amplitude de δ contido no intervalo dado a oscilação da função $f(x)$ seja menor que ε

Ora, a condição para que dois pontos x' e x'' sejam internos a um intervalo de amplitude δ é

1) $|x'-x''|<\delta$

por outro lado, se $f(x)$ se satisfaz a condição enunciada, temos, sob a hipótese

2) $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

pois o 1º membro é no máximo igual à oscilação de $f(x)$ em um intervalo de amplitude δ.

Reciprocamente, se de (1) segue (2), tomando $\delta'<\delta$ $(\delta'>0)$, vemos que a oscilação de $f(x)$ em todo o intervalo (aberto ou fechado) de amplitude δ' será menor ou igual a ε, e portanto $<2\varepsilon$, pois a oscilação de uma função em um intervalo é o extremo superior do conjunto dos números $|f(x')-f(x'')|$ para x' e x'' nêsse intervalo.

Pode-se pois definir a continuidade uniforme de outra maneira:

Diz-se que uma função $f(x)$ é uniformemente contínua num intervalo quando dado $\varepsilon>0$ arbitrário se pode achar um número $\delta>0$ tal que de $|x'-x''|<\delta$ sendo x' e x'' pontos dêsse intervalo, se deduz sempre $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

Por esta definição se vê imediatamente que se uma função é uniformemente contínua em um intervalo ela é contínua em todos os pontos dêsse intervalo, pois fixado um ponto x' a condição enunciada na última definição exprime exatamente a continuidade de $f(x)$ no ponto x'.

A recíproca, porém, não é verdadeira; basta considerar a função $\frac{1}{x}$ que é contínua em todos os pontos do intervalo $0 - \infty$, mas que no entanto não é uniformemente contínua nêsse intervalo, pois a diferença

$$\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}=\frac{x''-x'}{x'\times x''}$$

pode-se tornar maior em valor absoluto, que qualquer nº dado, mesmo se o limite é valor absoluto da diferença $x''-x'$.

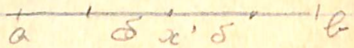
Este fato se explica fàcilmente se notarmos que na definição de continuidade em um ponto x', o nº δ que aparece na condição (1) depende em geral de x' e nem sempre se pode fixar um valor de $\delta>0$ independente de x' tal que de (1) se deduz (2).

Ora, vamos demonstrar a esse respeito um teorema importantíssimo:

Teorema de Heine

Tôda função contínua num intervalo fechado a—b é uniformemente contínua nêsse intervalo.

Seja $y=f(x)$ uma função contínua em a—b. Fixado o número $\varepsilon>0$, a cada ponto x de a—b se pode fazer corresponder um nº $\delta>0$ tal que a condição



(3) $|x'' - x'| < \delta$

tenha como consequência (se x'' também está em a—b),

(4) $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$

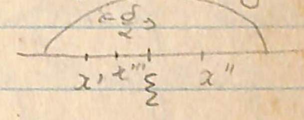
Ora, fixado x', há evidentemente uma infinidade de números δ que satisfazem a essa condição. Seja $\delta(x')$ o extremo superior do conjunto dêsses números e δ_1 o extremo inferior da função $\delta(x')$ no intervalo a—b. Vamos demonstrar que δ_1 é positivo.

$\delta(x)$ é uma função de x, varia com x, logo terá um extremo superior e inferior.

Com efeito, pelo teorema de Weierstrass contínua intervalos fechados há em a—b um ponto ξ tal que em qualquer entorno de ξ, do extremo inferior de $\delta(x)$ seja ainda δ_1. Ora, sendo $f(x)$ contínua em ξ, há um número $\gamma>0$ tal que de $|x-\xi|<\gamma$ segue

$$|f(x)-f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos o intervalo $\xi-\frac{\gamma}{2}$ — $\xi+\frac{\gamma}{2}$, e seja x' um ponto qualquer de a—b nêsse intervalo, isto é, satisfazendo a condição $|x'-\xi| < \frac{\gamma}{2}$



Se tivermos

(5) $|x''-x'| < \frac{\gamma}{2}$

das duas últimas desigualdades se deduz

$$|x''-\xi| \leq |x''-x'| + |x'-\xi| < \gamma$$

Temos pois, se x'' está em a—b, ao mesmo tempo

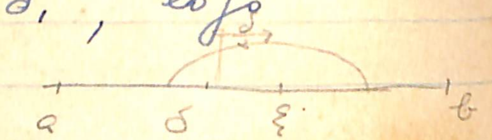
$$|f(x')-f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e}$$

$$|f(x'')-f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{donde}$$

(6) $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$

Vemos assim que fixado um ponto x' de $a — b$ no entorno $(\frac{\gamma}{2})$ de ξ, a condição (5) para qualquer ponto x'' do mesmo intervalo tem como consequência a desigualdade (6), donde se deduz para todos êsses pontos x', $\delta(x') \geq \frac{\gamma}{2}$, mas nêsse mesmo entorno de ξ o extremo inferior de $\delta(x)$ é ainda δ_1, logo

$$\delta_1 > \frac{\gamma}{2}$$



isto é, δ_1 é positivo, como queríamos demonstrar. Fixado pois um número positivo $\delta < \delta_1$, para qualquer ponto x de $a — b$ a condição (3) tem como consequência (4), o que demonstra a continuidade uniforme de $f(x)$ em $a — b$.

Observação: Êste teorema se demonstra mais fàcilmente por meio do teorema de Borel-Lebesgue demonstrado no § 4.

Com efeito, pela continuidade da função $f(x)$, cada ponto x_0 do intervalo $a — b$ é interno ao menos a um entorno (δ) de x_0 no qual a oscilação de $f(x)$ é menor que ε. Consideremos o conjunto F de todos os intervalos $x_0 - \delta — x_0 + \delta$ que satisfazem a essa condição, para todos os pontos x_0 do intervalo fechado $a — b$. Pelo teorema citado, pode-se determinar um número finito n dêsses intervalos que contêm internamente todos os pontos de $a — b$. Os extremos dêsses intervalos formam um conjunto I com um número finito de pontos; seja γ um nº positivo menor que a mínima distância de dois pontos distintos quaisquer de I. Qualquer intervalo de amplitude γ contido em $a — b$, contém no máximo um ponto P de I, e portanto está contido em um dos n intervalos determinados acima (um que contenha P). Logo a oscilação de $f(x)$ no intervalo de amplitude γ é sempre menor que ε, e sendo ε arbitrário, o teorema está demonstrado.