Karen Tonini dos Santos

Avaliação de Opções pelo Modelo Binomial

Florianópolis

2020

Karen Tonini dos Santos

Avaliação de Opções pelo Modelo Binomial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani

Florianópolis

2020

Karen Tonini dos Santos

Avaliação de Opções pelo Modelo Binomial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2020.

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
Vinicius Viana Luiz Albani
Data: 18/12/2020 15:40:39-0300
CPF: 100.707.267-95

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani(Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Documento assinado digitalmente
Edson Cilos Vargas Junior
Data: 17/12/2020 09:31:27-0300
CPF: 088.267.299-13

Prof. Dr. Edson Cilos Vargas Júnior
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Jorge Passamani Zubelli
Khalifa University

Florianópolis
2020

"The question isn't who is going to let me; it's who is going to stop me."
(Ayn Rand)

Resumo

Com a alta volatilidade dos ativos, os derivativos surgiram como uma alternativa para diminuir a exposição do investidor diante dos riscos do mercado financeiro. A utilização das opções fornece ampla possibilidade para o gerenciamento de risco, criando diversas estratégias de negociação. Juntamente com a gestão destas oportunidades, surge o quesito crucial no ramo das opções que é a precificação de ativos. Uma forma de precificar é a utilização de modelos matemáticos, como o Modelo Binomial, que é amplamente conhecido e utilizado devido a sua precisão e simplicidade matemática. Desta forma, o presente trabalho possui o objetivo de apresentar de forma didática o Modelo Binomial e sua aplicação à precificação de opções e de estratégias de negociação com opções. Parte dos resultados obtidos será aplicada a dados reais, considerando preços de ações da empresa Ambev.

Palavras-chave: Modelo Binomial; Precificação de Opções; Estratégias com Opções; Derivativos.

Abstract

Due to the volatility of financial assets, derivatives emerged to allow investors to reduce their risk exposure to market fluctuations. In other words, trading options allows market practitioners to manage their exposure to risk by buying and selling derivatives, like call and put options, written on some financial asset, like bonds, forwards, and stocks. A crucial step related to trading strategies is pricing such instruments. Pricing financial assets and derivatives can be done by using mathematical models. The Binomial Model is well known and universally used by market practitioners due to its accuracy and theoretical simplicity. The present work is aimed to present an introduction to the Binomial Model and different option trading strategies. Part of the results presented so far shall be tested with Ambev stock prices.

Keywords:Binomial Model; Option Pricing; Option Trading Strategies; Derivatives.

Sumário

1 Introdução

Evidências históricas (KUMMER; PAULETTO, 2012) mostram que os primeiros indícios dos derivativos, surgiram no Código de Hammurabi (Hammurabi foi um rei da Babilônia que reinou por volta de 1792 a.C. e 1750 a.C.). Este código conta com o mais antigo corpo de leis escrito e cobre quase todos os aspectos civis, assim como leis comerciais da época. A 48ª lei, dada por "Se alguém tiver um débito de empréstimo e uma tempestade prostrar os grãos ou a colheita for ruim ou os grãos não crescerem por falta d'água, naquele ano a pessoa não precisa dar ao seu credor dinheiro algum, ele devendo lavar sua tábua de débito na água e não pagar aluguel naquele ano."trata-se de um derivativo, mais especificadamente, de uma opção de venda (KUMMER; PAULETTO, 2012). Derivativos podem ser definidos, segundo Hull (2003), como um instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) de outra variável subjacente, mais básica.

Os derivativos são agrupados em quatro grupos: contratos futuros, contratos a termo, swaps e opções. O foco deste trabalho será o estudo de opções de compra e venda, nas quais se caracterizam por contratos que propiciam o direito, sem a obrigação, de compra ou venda de um determinado ativo, por um preço fixado numa data futura (vencimento). Exemplos de ativos subjacentes são ações, commodities de diversos tipos (como barril de petróleo, tonelada de soja ou trigo, Megawatt hora e etc.), índices, títulos (zero-cupom) e moedas. Quanto à possibilidade de exercício este direito de compra ou venda, podem ser classificadas como opções americanas ou europeias. As opções europeias dão o direito de exercício somente no vencimento, enquanto que as americanas permitem o exercício em qualquer data até o vencimento.

A possibilidade de combinar posições simultâneas no mercado à vista e no mercado de opções possibilita um grande número de oportunidades de investimento (FERNANDES; MACHADO-SANTOS et al., 2001). Assim, surgem diversas estratégias que possuem propósitos diferentes, tais como a cobertura de riscos (hedging) e o posicionamento diante das expectativas do mercado. Sendo assim, as estratégias mais recorrentes serão apresentadas e analisadas quanto ao seu "payoff".

Além do mais, tão importante quanto o tipo de opção a ser analisado é o "preço justo" deste tipo de operação. O "preço justo" é o preço que o titular paga para adquirir uma opção, ou seja, é o preço da opção (Bessada, Barbedo e Araújo apud Fernandes, 2016). Para encontrar tal valor, existem diversos modelos, que, a depender das hipóteses subjacentes, nem sempre são realísticos ou precisos. No entanto, dois modelos muito conhecidos são o Modelo Binomial e o Modelo de Black-Scholes.

O modelo binomial (COX; ROSS; RUBINSTEIN, 1979), "é uma técnica muito popular e útil para precificar uma opção que envolve a construção de uma árvore binomial". Além do mais, Baidya e Castro (2001) afirmam que, devido a simplicidade, a facilidade de implementação e principalmente a flexibilidade, o modelo binomial tornou-se uma das metodologias mais utilizadas para a avaliação de opções americanas. O Modelo Binomial tem como base elementos simples de análise combinatória e a sua compreensão exige apenas noções de matemática básica. Já o modelo de Black-Scholes, é baseado na teoria de processos estocásticos em tempo contínuo, exigindo o conhecimento de teorias mais avançadas de cálculo estocástico (ØKSENDAL, 2010). Sendo assim, o foco deste trabalho será no Modelo Binomial, devido à sua precisão e simplicidade.

Além de apresentar a formulação básica do modelo binomial, exibindo suas etapas de construção, este será aplicado nas diferentes estratégias que serão apresentadas, mostrando exemplos numéricos com dados reais para o cálculo do preço de opções com exercício europeu.

2 Derivativos

Como descrito em Hull (2003), um derivativo pode ser definido como um instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) de outra variável mais básica, como uma ação ou um título zero-cupom. Os contratos derivativos podem ser negociados principalmente no mercado de bolsa e no mercado de balcão. No primeiro caso os contratos são padronizados, ou seja, todas as informações como preços, quantidade e qualidade (em caso dos commodities) são especificadas, conforme orientações da bolsa. Já o mercado de balcão é o local no qual são negociadas as operações não registradas na bolsa, reguladas no Brasil pela Comissão de Valores Mobiliários (CMV) e fechadas diretamente entre o comprador e o fornecedor. Os maiores negociadores de derivativos dentro do mercado de balcão são os bancos, gerentes de fundos e outras grandes instituições. Tanto o mercado de balcão quanto a bolsa possuem muitas negociações envolvendo estes ativos financeiros, no entanto, o volume de transações é muito maior no primeiro caso. O fato de as negociações não serem registradas como na bolsa, não significa que no mercado de balcão as informações sejam desordenadas. Os compradores e vendedores possuem suas obrigações, por isso que ainda ocorre grande número negociações nesse tipo de modalidade.

Os derivativos podem ser classificados nas seguintes classes principais: contratos a termo, contratos futuros, opções e swaps. O contrato a termo é um acordo de compra ou venda de um ativo por um preço e data específicos, geralmente negociados em mercado de balcão, onde uma das partes assume a posição de compra e a outra de venda. Os contratos futuros possuem as mesmas características, porém são negociados somente na bolsa (logo são padronizados e além disso há um mecanismo garantindo que o acordo seja cumprido) e também, neste caso os compromissos são ajustados conforme as mudanças do mercado. Por exemplo, suponha que uma empresa irá receber uma quantia de 10.000 dólares daqui a 5 meses. Ao verificar as opiniões do mercado acerca da cotação do dólar futura, o gerente financeiro desta empresa descobre que a expectativa é que o valor irá diminuir. Digamos que hoje a cotação é de R\$4,20 e para daqui a 5 meses estejam precificando a R\$4,00. Desta forma, o gerente financeiro pode negociar um contrato futuro de modo que daqui a 5 meses, irá vender \$10.000,00 por R\$41.000,00, sendo cobrado R\$4,10 o dólar. Assim, como ambas as partes têm a obrigação de cumprir com o contrato, a negociação será realizada. Então o gerente financeiro da empresa, se protegeu do risco de perder dinheiro com a baixa do dólar.

Os swaps são contratos que estabelecem a troca de fluxo de caixa, tendo como base a comparação de rentabilidade entre dois bens, ou seja, contratos entre duas partes que fornecem uma troca de rentabilidade dos ativos subjacentes, numa data específica. Este tipo de operação geralmente é mais utilizada em empresas fortemente vinculadas com moedas ou commodities. Por exemplo, duas empresas podem negociar um swap onde a cada 4 meses trocar a Selic por uma taxa fixa, 3,5%, aplicada em um montante de R$500.000,00 por 5 anos. Então, uma empresa paga o valor sobre a taxa Selic e recebe o valor sobre a taxa de juros de 3,5%, enquanto que a outra paga o valor sobre a taxa de juros de 3,5% e recebe sobre a taxa Selic. Por fim, opções são contratos que fornecem o direito de compra ou venda de um determinado ativo subjacente, por um valor fixado (preço de exercício) numa data futura, contudo o titular não tem a obrigação de exercer este direito, ao contrário dos contratos futuros e a termo.

Em geral, existem três categorias principais de participantes no mercado de derivativos, a saber, hedgers, especuladores e arbitradores. Os hedgers usam derivativos para reduzir os riscos quando há possíveis movimentos futuros nos preços do ativo. Os arbitradores possuem o propósito de encontrar pequenas diferenças entre preços e ganhar proveito disso, ou ainda, da expectativa futura desta diferença sem correr qualquer risco. Por fim, os especuladores usam os derivativos apostando na direção futura da variação do mercado, comprando e vendendo derivativos apenas para ganhar a diferença entre o preço de compra e o preço de venda, sem se importar com o ativo em si, visando apenas o lucro. Note que, no caso dos arbitradores, quando há uma diferença interessante entre os preços de venda e de compra, agentes financeiros desta categoria começam a comprar o ativo para vender, com o propósito de obter lucro. Assim, como a procura deste ativo aumenta, o preço aumenta. No fim, os valores se igualam, removendo a possibilidade de arbitragem.

2.1 Opções

Em uma opção, o emissor é a pessoa que vende o contrato, sendo obrigado a comprar ou vender o ativo pelo preço de exercício estipulado, enquanto que o titular (ou comprador) é aquele que possui o direito (não a obrigação) de compra ou venda do contrato e que paga ao emissor, no momento da aquisição da opção, um valor conhecido como preço da opção. Os dois tipos de opções mais negociadas no mercado são as que dão o direito de compra ou venda de um ativo subjacente, denominadas em inglês call e put, respectivamente. O preço acordado de compra ou venda do ativo nestas opções é conhecido como preço de exercício ou strike, já a data de exercício estabelecida no contrato é conhecida como data de vencimento ou maturidade. Além disso, opções podem ser do tipo americano ou europeu. Nas opções americanas, o trader pode exercê-la em qualquer momento desde a sua aquisição até o seu vencimento, enquanto que as opções europeias dão o direito de exercício apenas na maturidade.

Assim sendo, existem quatro categorias de participantes no mercado de opções:

a) Compradores de opções de compra;

b) Vendedores de opções de compra;

c) Compradores de opções de venda;

d) Vendedores de opções de venda.

Denotando por X o preço de exercício e S_T o preço do ativo subjacente na data de vencimento, o lucro (payoff) obtido será:

a) $max(S_T - X, 0)$, para compradores de opções de compra;

b) $-max(S_T - X, 0)$, para vendedores de opções de compra;

c) $max(X - S_T, 0)$, para compradores de opções de venda;

d) $-max(X - S_T, 0)$, para vendedores de opções de venda.

Lembrando que o preço da opção e o custo inicial da compra da opção não foram considerados.

Além do mais, opções podem ser classificadas como: "in the money" (ITM), "out of the money" (OTM) e "at the money" (ATM). A primeira é uma opção de compra cujo ativo está sendo negociado no mercado à vista por um valor superior ao preço de exercício da opção. Nas opções OTM, o valor do ativo à vista está abaixo do preço de exercício. Enquanto que, nas opções ATM, o preço à vista do ativo é igual ao preço de exercício da opção. Como opções são um tipo de derivativo, existe um ativo subjacente associado. Os principais são ações (na qual a opção atribui o direito de compra ou venda de ações), índices (geralmente negociados com opções europeias onde há palpites sobre os movimentos futuros) e moedas estrangeiras (com a maioria sendo negociadas em mercado de balcão).

Exemplo 2.1.1. *Suponha um agente financeiro comprou 50 ações da empresa A por R\$25,00 e ao ver o preço da ação subir significativamente, decide que quer vendê-las futuramente. Para isto, emite uma opção de compra europeia com o preço de exercício de R\$ 35,00 para daqui 6 meses. Considere o preço da opção de R\$ 1,50. Assim, ao chegar no vencimento da opção, o comprador compara o preço de exercício com o preço atual da ação. Caso o preço da ação esteja maior do que R\$ 35,00, é vantajoso para o comprador exercer a opção e comprar por um preço mais barato. Caso contrário, não é proveitoso exercer a opção, pois estaria comprando por um valor maior do que o do mercado. Suponha o primeiro caso, então segue que o emissor da opção, terá vendido 50 ações por R\$35,00, obtendo* $50 \cdot R\$35,00 = R\$1.750,00$*, além do preço da opção recebido de R\$1,50, logo R\$1.751,50. Como as ações foram compradas por R\$25,00, foi necessário um custo inicial de* $50 \cdot R\$25,00 = R\$1.250,00$*, supondo que este valor não foi tomado emprestado. Por fim, o emissor teve um lucro de* $R\$1.751,50 - R\$1.250,00 = R\$501,50$.

Caso fosse uma opção de compra americana, a diferença seria que o comprador da opção poderia optar por exercer a opção em qualquer momento até a data de vencimento.

2.1.1 Opções Exóticas

Opções que possuem um padrão bem definido e que são negociadas com frequência, assim como preço ou volatilidade implícita estimados, são chamadas de opções plain vanilla. Já os outros casos, negociados no mercado de balcão, sem um padrão, são chamadas de opções exóticas. As opções exóticas são mais conhecidas pelo fato de geralmente possuir uma rentabilidade maior, se comparado às opções plain vanilla. Um exemplo de opção exótica é uma opção americana de compra com vencimento para daqui um mês, na qual existe um restrição de exercício, onde o comprador pode apenas exercer nos dias 15, 16 e 18. Note que caso não houvesse restrições, a opção seria do tipo plain vanilla e negociada na bolsa. Quando existe limitações sobre as datas de exercício, a opção é chamada de bermuda. Existem diversas classificações de opções exóticas, como opção americana não padrão, opções forward start, opções cliquet, opções compostas, opções chooser, opções lookback, shout option e opções asiáticas.

Opções forward start são opções que serão ativadas em algum tempo no futuro, ou seja, a compra e venda da opção forward start é realizada em um instante, mas o vigor da opção ocorre apenas depois de um determinado tempo. Neste tipo de opção exótica, o preço de exercício não é determinado no momento da compra, somente na data de ativação. Algumas prescrições são estabelecidas, como por exemplo ser ATM, mas o valor exato não é estabelecido. A partir do momento da ativação da opção e determinado o preço de exercício, a opção torna-se plain vanilla. Uma opção cliquet ou ainda, ratchet consiste em seguidas opções forward start, com regras para estipular os preços de exercício.

Opções compostas são opções sobre opções, ou seja, opções nas quais o ativo subjacente é uma opção. A opção composta é chamada de suprajacente, enquanto que a outra é chamada de subjacente. Além disso, como se trata de duas opções, o preço da opção subjacente é chamado de back fee. Desta forma existem quatro tipos de opções suprajacentes: opção de compra de uma opção de compra (CoC), opção de compra de uma opção de venda (CoP), opção de venda de uma opção de compra (PoC) e opção de venda de uma opção de venda (PoP). Neste tipo de opção existem dois preços de exercício, duas datas de vencimento e dois preços de opção. Suponha que um investidor compra uma opção composta de compra de uma opção de compra sobre ações (CoC). Denote X_1 o preço de exercício da opção suprajacente, X_2 da opção de compra, T_1 o vencimento da opção composta, T_2 o vencimento da opção de compra, f_1 o preço da opção e f_2 e back fee. Perceba que ao comprar a opção composta, já deve ser pago o preço da opção, como ocorre nas opções plain vanilla. Caso a opção suprajacente for exercida, o titular irá ter o direito de comprar uma opção de compra por X_1. Enquanto que ao comprar uma opção de compra, este possui o direito de comprar ações por X_2. Caso o titular, decida não comprar a opção de compra subjacente, não será necessário pagar o back fee. Para o caso de uma opção composta de compra de uma opção de venda, ao exercer a opção composta, o titular irá ter o direito de comprar uma opção de venda por X_1 e então, irá possuir o direito de vender uma ações, ou outro ativo subjacente, por X_2. Segue raciocínio análogo para opção composta de venda.

Opções chooser é uma opção europeia no qual permite que o comprador escolha se a opção será de compra ou de venda, depois de um tempo estipulado. Geralmente, o preço de exercício e vencimento da opção será o mesmo, independente do que for determinado. Como neste caso existe uma vantagem, opções chooser são mais caras do que as plain vanilla. Além disso, são atrativas nos casos em que o ativo subjacente possui grande volatilidade. Caso na data de vencimento o preço da ação seja maior do que o preço de exercício, é favorável optar por opção de compra. Caso na data de vencimento o preço da ação seja menor do que o preço de exercício, é favorável optar por opção de venda.

Opções com barreira são opções na qual o payoff depende se o ativo subjacente atingiu determinado valor, durante um período de tempo. Uma opção com barreira knock-out é a opção que expira caso o ativo exceda um determinado preço, enquanto que uma opção com barreira knock-in é a opção que não possui valor até o ativo subjacente atingir determinado preço. Através deste procedimento, tanto o prejuízo do vendedor, quanto o lucro do comprador da opção estão limitados, de modo a não prejudicar uma das partes. Opções com barreira podem ser classificadas como up-and-out (o valor do ativo subjacente inicia abaixo de um determinado preço (nível da barreira) e precisa subir para a opção expirar), up-and-in (o valor do ativo subjacente inicia abaixo do nível da barreira e precisa aumentar para que a opção se torne ativa), down-and-out (o valor do ativo subjacente inicia acima do nível da barreira e precisa descer para a opção perder a validade) e down-and-in (o valor do ativo subjacente inicia acima do nível da barreira e precisa aumentar para que a opção se torne ativa). Como este tipo de opção traz uma vantagem ao limitar os lucros e prejuízos, o preço da opção acaba sendo um pouco mais barato ao se comparar com opção sem barreiras.

Opções binárias, ou digitais, são opções com payoffs descontínuos. Este tipo de opção possui um tempo ou data de vencimento, na qual se a opção vence com o preço do ativo subjacente ITM, o emissor obtém lucro, enquanto que caso o preço do ativo esteja OTM, há prejuízo. Os lucros e prejuízos são debitados/descontados de forma automática da conta do emissor, desta forma, são definidos previamente. O nome binária se refere ao fato de que a opção depende apenas de um resultado de sim ou não, conforme o que foi determinado. Além da descontinuidade do payoff, opções binárias se diferem das opções plain vanilla pelo fato de que o emissor não possui uma posição sobre o ativo subjacente (como compra ou venda), apenas se relaciona com seu preço. Existem dois tipos principais de opções binárias: dinheiro-ou-nada e ativo-ou-nada. Uma opção binária dinheiro-ou-nada de compra não possui lucro se, no vencimento da opção, o preço do ativo for menor do que o preço de exercício. Enquanto que no caso em que o preço do ativo esteja maior do que o preço de exercício no momento do vencimento da opção, é paga uma quantidade determinada. Uma opção binária dinheiro-ou-nada de venda não possui lucro se, no vencimento da opção, o preço do ativo for maior do que o preço de exercício. Enquanto que no caso em que o preço do ativo esteja menor do que o preço de exercício no momento do vencimento da opção, é paga uma quantidade determinada. Uma opção binária ativo-ou-nada de compra não possui lucro se, no vencimento da opção, o preço do ativo for maior do que o preço de exercício. Enquanto que no caso em que o preço do ativo esteja menor do que o preço de exercício no momento do vencimento da opção, é pago o preço do ativo, originando a denominação ativo-ou-dinheiro. Uma opção binária ativo-ou-nada de venda não possui lucro se, no vencimento da opção, o preço do ativo for maior do que o preço de exercício. Enquanto que no caso em que o preço do ativo esteja menor do que o preço de exercício no momento do vencimento da opção, é pago o valor do ativo. Note que a diferença entre estes tipos de opções binárias é o valor pago na maturação da opção.

Opções lookback possuem payoffs que estão relacionados ao preço do ativo subjacente alcançar um máximo ou mínimo, durante a vida da opção. Este tipo de opção é negociada somente em mercado de balcão e são do tipo americanas, pois permite que o titular verifique a retrospectiva do preço da ação, decidindo o melhor momento para exercer a opção. Devido a esta vantagem, este tipo de opção acaba sendo um pouco mais cara. Opções lookback podem ser chamadas de retrospectiva (do inglês hindsight), evidenciando sua característica marcante. Este tipo de opção pode ser classificado como floating lookback ou fixed lookback, se referindo ao preço de exercício que pode ser fixo ou flutuante. O lucro de uma opção lookback de compra com preço de exercício flutuante é dado pela diferença entre o preço do ativo final e o mínimo registrado durante a vida da opção. O lucro de uma opção lookback de venda com preço de exercício flutuante é dado pela diferença entre o valor máximo durante a vida da opção e o preço do ativo quando a opção for exercida. Para uma opção lookback de compra com preço de exercício fixo o payoff é o mesmo de uma opção de compra europeia, exceto que no final da vida da opção, o preço do ativo subjacente é trocado pelo valor máximo alcançado durante a vida da opção. O payoff de uma opção lookback de venda com preço de exercício fixo é o mesmo de uma opção de venda europeia, exceto que no final da vida da opção, o preço do ativo subjacente é trocado pelo valor mínimo alcançado durante a vida da opção.

Uma opção shout é uma opção europeia na qual o titular tem a liberdade de bloquear determinado lucro, enquanto a opção continua ativa, ou seja, o titular "grita"(em inglês shout, originando o nome) para o emissor com o intuito de bloquear o lucro, garantindo um payoff mínimo. Ao final da vida da opção, o titular recebe o payoff usual de uma opção europeia e também o lucro recebido no momento em que houve o "grito"(o preço do ativo subjacente naquele instante menos o preço de exercício). Por exemplo, considere uma opção shout de compra europeia com preço de exercício de R\$20,00. Suponha que durante a vida da opção, o preço do ativo subjacente suba até R\$30,00 e neste momento, o titular "gritou". Seja R\$25,00 o preço do ativo subjacente na data de vencimento da opção. Então desta forma, além do payoff usual de uma opção de compra europeia de $max(S_T - X, 0) = max(R\$25,00 - R\$20,00; 0) = R\$5,00$, é obtido um lucro adicional de $R\$30,00 - R\$20,00 = R\$10,00$, obtendo um total de R\$15,00. Uma opção shout de venda age da mesma forma, no entanto, o objetivo do titular da opção de venda é examinar preços mais baixos do que o preço de exercício. Dependendo dos termos da opção, pode ser permitido mais do que um shout. Por causa dessa vantagem, este tipo de opção acaba sendo cara comparado às opções plain vanilla.

Por fim, opções asiáticas são opções nas quais os payoffs dependem de uma média aritmética dos preços do ativo subjacente durante a vida da opção. A média aritmética pode ser tanto para o preço de exercício, quanto para o preço do ativo subjacente no final da opção. Para o segundo caso, ao calcular o payoff, basta substituir o preço no final da vida da opção pela média. Ou seja, para S_M a média aritmética do ativo subjacente durante a vida da opção, o payoff será $max(S_M - X, 0)$, para um comprador de uma opção asiática de compra, sendo X o preço de exercício. O raciocínio é análogo para os outros casos. Quando a média é usada com o preço de exercício, o payoff para um titular de uma opção asiática de compra será dado por $max(S_T - S_M, 0)$, com S_T o preço do ativo subjacente no momento de exercício e S_M a média aritmética do ativo subjacente durante a vida da opção. Geralmente, as opções asiáticas são mais baratas do que opções plain vanilla.

3 Risco

3.1 Taxa de Juros

Para os empréstimos, o juro define a quantidade de dinheiro que um devedor garante pagar ao credor, além do valor emprestado. Em geral, esta quantia se refere à correção do valor emprestado mais uma remuneração pela perda de oportunidade de investimento. O juro é em geral representado em forma percentual sobre o valor emprestado, isto é, a taxa de juros. A taxa de juros é normalmente associada ao período de capitalização, ou seja, o período recorrente em que são cobrados os juros. Por exemplo, para uma taxa de juros de 10% ao ano, será cobrado do devedor ou mutuário, ao final de cada ano, 10% do saldo devedor, ou valor corrigido do empréstimo, apurado no início do mesmo ano. Calibrar apropriadamente a taxa de juros é tarefa de primordial importância para os agentes econômicos, pois os juros têm papel fundamental na determinação do nível de atividade, do emprego, da taxa de câmbio e de outras variáveis econômicas (GARCIA; DIDIER, 2003). Existem duas principais formas de se calcular o montante total a ser devolvido pelo credor, através dos juros simples ou dos juros compostos.

No Brasil, os juros simples são mais utilizados na cobrança de juros de mora, multas por atraso de pagamento ou em financiamentos de curto prazo, como o cheque especial de contas correntes, dentre outros exemplos. Para o seu cálculo, é considerado apenas o valor inicial envolvido, apresentando um crescimento linear. Para C o capital emprestado, r a taxa de juros (sendo dividida por cem) e t o período, tem-se que os juros simples são dados por $J = C \cdot r \cdot t$. Assim, o montante M a ser pago será dado por $M = C + J$. Já os juros compostos são amplamente utilizados pelo sistema financeiro, em financiamentos, cálculo das rendas fixa e variável, dentre outras coisas. São aplicados ao montante de cada período, ou seja, somados ao capital ao fim de cada período de aplicação, representando juros sobre juros. Deste modo, como possui um retorno mais elevado, seu crescimento acaba sendo exponencial. Então para C o capital emprestado, r a taxa periódica de juros (sendo dividida por cem) e n o número de períodos (da taxa de juros) no qual o capital inicial foi aplicado, tem-se que o montante a ser pago será dado por $M = C(1 + r)^n$.

No mercado financeiro, mais especificadamente, no mercado das opções os juros utilizados são os juros compostos. No qual, há a capitalização onde é a frequência com que as taxas de juros irão atuar sobre o capital. Assim, para m a frequência anual da capitalização, tem-se que o montante será dado por $M = C\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{nm}$. Como o mercado de opções é muito veloz, é razoável ter como hipótese $m \to \infty$, assim ao utilizarmos a equação dos juros compostos com capitalização e resolvendo o limite

$$\lim_{m\to\infty} C\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm},$$

segue que $M = C\mathrm{e}^{rn}$. Assim, além de fornecer o valor do montante futuro, a equação pode ser utilizada para encontrar o valor do portfólio hoje (necessário na construção do modelo binomial). Para alterar o portfólio futuro para seu valor atual, basta fazer o seguinte cálculo: $C\mathrm{e}^{-rn}$.

3.1.1 Paridade Call-Put

Paridade call-put é uma relação entre os preços das opções europeias de compra e de venda, nas quais possuem o mesmo preço de exercício, vencimento e ativo subjacente. Considere um portfólio A composto por uma opção de compra europeia sobre uma ação e um montante de Xe^{-rT}, com X o preço de exercício, T o tempo de vencimento da opção e r a taxa de juros neutra ao risco. Quando utiliza-se uma taxa de juros neutra ao risco é assumido que o investimento é neutro ao risco. Desta forma, deve ser levado em conta que o retorno esperado do ativo, é a taxa de juros neutra ao risco (na seção 5.2 o conceito foi explorado com mais detalhes). Considere agora um portfólio B composto por uma ação e uma opção de venda europeia sobre a mesma ação, com o mesmo vencimento e preço de exercício. As ações são sobre a mesma empresa, em ambos os portfólios.

Note que no vencimento das opções, existem dois possíveis casos para o preço da ação: um valor maior ou menor do que o preço atual. Desta forma, se o valor for maior, segue que no portfólio A, a opção de compra será exercida, logo o valor total do portfólio será de S_T $(S_T - X + X)$. Para o portfólio B, a opção de venda não será exercida, logo o investidor terá apenas o valor da ação no tempo T, S_T. Se o valor da ação for menor, tem-se que no portfólio A o valor total será X (Xe^{-rT} no tempo T). No portfólio B a opção de venda será exercida e assim, o montante será de X $(X - S_T + S_T)$. Portanto, no vencimento das opções, o payoff será, em ambos os casos, dado por $max(S_T, X)$.

Deste modo, como trata-se de portfólios livres de risco, segue que o valor presente dos dois portfólios é o mesmo. Assim, para c o valor da opção europeia de compra e p o valor da opção europeia de venda, segue que

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0.$$

Esta equação é conhecida como paridade put-call. Isto mostra que o valor de uma opção de compra europeia, com determinado preço de exercício e vencimento, pode ser deduzido pelo valor de uma opção de venda europeia, com o mesmo preço de exercício e vencimento.

A equação dada acima é válida apenas para opções europeias, no entanto, existe um resultado parecido para opções americanas. Para C o valor da opção americana de compra e P o valor da opção americana de venda, pode ser mostrado que $S_0 - X \leq C - P \leq$

$S_0 - Xe^{-rT}$. A paridade pode ser interpretada em termos de volatilidade implícita, de modo que as opção de compra e venda, com mesmo preço de exercício e vencimento, possuem as mesmas volatilidades implícitas.

3.2 Volatilidade

A grandeza conhecida como *volatilidade* pode ser definida como o desvio padrão anualizado (WILMOTT, 2010) de uma série temporal de log-retornos (um log-retorno é o logaritmo da razão entre dois elementos consecutivos de uma série temporal de preços de uma ação). Pode ser interpretada como sendo uma medida do quanto se tem de incerteza acerca do retorno de um ativo ou de uma ação (HULL et al., 2013). O desvio padrão, denotado por σ, expressa o grau de dispersão de determinados dados, neste caso, expressa o grau de dispersão dos log-retornos dos preços dos ativos. Para calcular o desvio padrão anualizado, basta multiplicar o desvio padrão pela raiz quadrada do tempo, por exemplo $\sigma_{ano} = \sigma_{dia}\sqrt{252}$ (é convencionado 252 dias úteis por ano). Para n o número de log-retornos observados, $\overline{x}$ a média dos log-retornos e x_i o log-retorno da posição i, o desvio padrão é dado pela seguinte equação

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}.$$

Desta forma, quanto maior a variação do log-retorno (volatilidade) de um ativo, maior é o seu risco. De acordo com Wilmott (2010), a volatilidade é difícil de ser medida e ainda mais de ser prevista, além disso é uma das principais contribuições dos modelos de precificação de opções. Existem alguns tipos principais volatilidade, a saber:

a) Volatilidade Futura;

b) Volatilidade Real;

c) Volatilidade de Hedging;

d) Volatilidade Histórica;

e) Volatilidade Implícita.

A volatilidade futura se refere à volatilidade de um ativo em determinado período futuro. A volatilidade real é a volatilidade instantânea do ativo. Normalmente, é modelada simplesmente como uma constante, já que é dificílima de ser medida com precisão. Ao mesmo tempo, tem-se a volatilidade de hedging que representa o quanto do ativo subjacente deve ser operado "vendido" em opção de venda, com o propósito de proteção ao risco.

A volatilidade histórica, também conhecida como volatilidade realizada, como o próprio nome sugere, está associada ao cálculo do desvio padrão de séries temporais. A volatilidade histórica não mede especificadamente a probabilidade de perda, mas pode ser utilizada com esse propósito. Além disso, é usada para obter um indicador da análise técnica chamado de Bandas de Bollinger (ou do inglês Bollinger Bands), no qual informa se há um cenário favorável para compra ou venda de determinado ativo. Ainda, a volatilidade histórica é utilizada em diversos modelos de precificação e medição da volatilidade futura.

A volatilidade implícita é a previsão da volatilidade ao longo do tempo de vencimento de uma opção, que iguala o preço de mercado observado com o modelo de precificação de uma opção (GABE, 2003). É uma métrica usada por investidores para estimar a volatilidade futura de um preço, conforme certos fatores preditivos e é um fator fundamental para precificar derivativos. Além do mais, para a precificação de opções, a volatilidade implícita é um fator decisivo, pois geralmente, quanto maior a volatilidade implícita, maior o preço da opção. Tanto o Modelo Binomial quanto o de Black-Scholes utilizam esta volatilidade. Já que se trata apenas de uma previsão, é importante lembrar que nada garante que os preços irão seguir a volatilidade esperada, visto que é baseado em cálculos probabilísticos. Vicente e Guedes (2010) afirmam que uma forma alternativa para se obter informações sobre a volatilidade de um ativo consiste em analisar o mercado de opções. Como o preço de uma opção é observável, podemos, a partir deste, extrair a volatilidade implícita. Vale ressaltar que, neste caso, esta volatilidade reflete as expectativas dos agentes do mercado quanto ao comportamento futuro do preço da ação ou do ativo subjacente, até o vencimento das opções.

Deste modo, além da principal finalidade de precificar opções, o modelo de Black-Scholes pode ser manuseado em termos de volatilidade, isto é, por meio de métodos de problemas inversos, encontrar uma equação para calcular a volatilidade implícita. Como existe a hipótese de que os preços dos ativos são dados por um movimento browniano geométrico (DIMSON; MUSSAVIAN, 2000), segue que a volatilidade implícita deve ser igual em todas as opções, o que não acontece na prática. Lanari (2000) afirma que, ao plotar diversas volatilidades implícitas como uma função do preço de exercício das opções, geralmente as opções ATM têm valores menores de volatilidade implícita do que as opções ITM e OTM. Esta oscilação faz com que a curva seja semelhante a um U, conhecido como “smile” da volatilidade implícita. A plotagem de diversas volatilidades implícitas versus os respectivos preços de exercício e vencimentos determina o que é chamado de superfície da volatilidade implícita.

Como Lanari (2000) afirma: o efeito smile decorre da observação empírica de que as volatilidades implícitas de opções com mesmo prazo de vencimento e diferentes preços de exercício variam, gerando uma curva em forma de U. Um fato significativo é que, teoricamente, a volatilidade implícita de opções europeias de compra e venda, com os mesmos vencimentos, são iguais. Além de que, quanto mais acentuado for o smile, maior o risco associado ao ativo. No entanto, a metodologia binomial não incorpora o efeito conhecido como o smile da volatilidade (JAVAHERI, 2011).

3.3 Distribuição de Probabilidade

A probabilidade tem papel fundamental no mercado financeiro. Como os ativos estudados neste trabalho são voláteis, existem riscos e incertezas atrelados à eles, desta forma, é indispensável a utilização da probabilidade para construir a teoria de precificação de ativos e medidas de risco. Assume-se conhecimento em espaços métricos.

Definicão 1. *Seja* Ω *um conjunto. Uma* σ-álgebra *é uma coleção* F *de subconjuntos de* Ω *que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\emptyset$ *e* Ω *pertencem a* F*;*

(ii) se $A \in F$*, então o seu complementar* A^{c} *também pertence a* F*;*

(iii) se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos em* F*, então a união dos seus elementos* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *pertence a* F*.*

Definicão 2. *Para* F *uma* σ*-álgebra de* Ω*. Uma função* P *que associa a cada conjunto pertencente a* F *um valor no intervalo [0,1], ou seja* $P : F \to [0,1]$*, é uma* medida de probabilidade *se satisfizer:*

(i) $P(\emptyset) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$*;*

(ii) $P(A) \geq 0$ *para todo* $A \in F$*;*

(iii) se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset F$ *é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos, então,*

$$P(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_j A_j.$$

Denotando a união enumerável de uma sequência de conjuntos em F dois a dois disjuntos por $\dot{\cup}_{j\in\mathbb{N}} A_j$, tem-se, como consequência de $P(\dot{\cup}_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_j A_j$ que vale a subaditividade de P, isto é, se a sequência de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está contida em F, então

$$P(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j) \in F.$$

Definicão 3. *Para* Ω *um conjunto,* F *uma* σ*-álgebra de* Ω *e* P *uma medida de probabilidade definida em* F*, a trinca* (Ω, F, P) *é definida como um* espaço de probabilidade*, em que* Ω *é denominado espaço amostral,* $A \subset \Omega$ *é denominado evento e para* $\omega \in \Omega$ *um ponto,* ω *é denominado por ponto amostral.*

Exemplo 3.3.1. *Considere o lançamento de um dado. Seja* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *o espaço amostral e note que são as possíveis faces do dado.*

- *Considere* F *um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos possíveis de* Ω*, ou seja,* F *o conjunto das partes de* Ω*. Note que* F *é uma* σ*-álgebra de* Ω*.*

- *Considere* F *definido no item acima. Seja* $P = F \to [0, 1]$ *uma função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 \\ P(A) = \dfrac{\#A}{6}, \quad \text{com } \#A \text{ a quantidade de faces do dado em } A, \\ P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

A primeira condição de medida de probabilidade é claramente satisfeita. Para verificar a segunda, suponha que para $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos,* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in F$*. Desta forma,*

$$P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \frac{\#(A_1 \cup ... \cup A_j)}{6} =$$

$$= \frac{(\#A_1 + ... + \#A_j - \#(A_1 \cap A_2) - ... - \#(A_{j-1} \cap A_j) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ...+}{6}$$

$$\frac{+\#(A_{j-2} \cap A_{j-1} \cap A_j) - ... - \#(A_1 \cap ... \cap A_j)}{6} \leq \frac{\#A_1 + \#A_2 + ... + \#A_j}{6} =$$

$$= \frac{\#A_1}{6} + \frac{\#A_2}{6} + ... + \frac{\#A_j}{6} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\#A_j}{6} = \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j).$$

Logo, a condição de subaditividade é satisfeita. Portanto, segue que P *é uma medida de probabilidade.*

- *Desta forma, segue que* (Ω, F, P) *é um espaço de probabilidade.*

Uma σ-álgebra de Borel (denotado por $\mathbb{B}$) é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de um espaço topológico. Por exemplo, considere $\Omega = \mathbb{R}$. Seja F a menor σ-álgebra contendo todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$. É possível mostrar, usando argumentos simples de teoria dos conjuntos e de topologia, que F contém todos os abertos de $\mathbb{R}$. Desta forma, F é uma σ-álgebra de Borel. Considere o espaço de probabilidade $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}, P)$, com $\mathbb{B}$ a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$. Seja P definida por $P(B) = \int_B f(x)dx$ para todo $B \in \mathbb{B}$, sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma função integrável e não-negativa, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. A noção de integral usada aqui é a de integral de Lebesgue. Como consequência P é uma medida de probabilidade.

Definicão 4. *Sejam* (Ω, F, P) *um espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *uma função. Define-se* X *como uma* variável aleatória n-dimensional *quando, para cada* $B \in \mathbb{B}$*, tem-se que* $X^{-1}(B) \in F$*, isto é, a pré-imagem de* B *por* X *está em* F *(é* F*-mensurável).*

Definicão 5. *As variáveis aleatórias X e Y são* independentes *se, e somente se, para quaisquer $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$, temos que $P(X \in \mathbb{B}_1, Y \in \mathbb{B}_2) = P(X \in \mathbb{B}_1)P(Y \in \mathbb{B}_2)$. Se X e Y são independentes, então $Cov(X,Y) = 0$.*

Exemplo 3.3.2. *Considere o exemplo anterior com o lançamento de um dado e defina a função $X : \Omega \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ \omega = 5, \\ 0, & se\ \omega \neq 5, \end{cases}$$

segue que X é uma variável aleatória.

Definicão 6. *Sejam (Ω, F, P) um espaço de probabilidade e $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. Define-se a* função de distribuição de probabilidade *de X pela função $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ dada por $F_X(x) = P(X \leq x)$, com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $X \leq x$ significa que $X_i \leq x_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Se existir uma função integrável em $\mathbb{R}^n$, $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$F_X(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_X(s_1, s_2, ..., s_n) ds_1 ds_2 ... ds_n,$$

então f_x é chamada de função de densidade de probabilidade *de X.*

Uma maneira mais intuitiva de entender a distribuição de probabilidade, também conhecida como função de distribuição acumulada, é pensar que a função descreve o comportamento do experimento. Desta forma, devido à importância, tanto teórica quanto prática, algumas distribuições receberam nomes específicos, com funções de densidade dadas, como por exemplo distribuição normal, Poisson, Bernoulli, Binomial e geométrica.

3.3.1 Valor Esperado, Variância e Covariância

Definicão 7. *Considere $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória, com Ω um espaço amostral. O* valor esperado *de X, denotado por $E(X)$, é definido por*

$$E(X) = \int_\Omega X dP.$$

O valor dado por $\int_\Omega X dP$ também é chamado de esperança matemática ou média de uma variável aleatória X. Já a variância *de uma variável aleatória X, denotada por $Var(X)$, é dada por:*

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Em geral, denota-se, $Var(X) = \sigma^2$. A raiz quadrada não nula da variância é chamada de desvio padrão.

Exemplo 3.3.3. *Considerando o mesmo exemplo com o lançamento de um dado com seis faces e defina a variável aleatória X como o lado da face do dado lançado. Tem-se que o valor esperado de X é dado por*

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

A variância será dada por

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Então, tem-se que o valor esperado é $\frac{7}{2}$ e a variância é $\frac{35}{12}$.

Definicão 8. *Considere $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ duas variáveis aleatórias, com Ω um espaço amostral. Então, define-se a* covariância *de X e Y por*

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Isto é possível se X e Y possuírem variâncias finitas.

Para facilitar os cálculos, é introduzida a noção de variável aleatória padronizada, na qual possui média igual a 0 e variância 1. Para uma variável aleatória X com média $\mu = E(X)$ e variância $Var(X) = \sigma^2$, tem-se que a variável aleatória padronizada correspondente a X é dada por $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. Por fim, denote μ_X, μ_Y, σ_X^2 e σ_Y^2 as médias e variâncias das variáveis X e Y, respectivamente. Então a covariância entre as variáveis aleatórias padronizadas correspondentes a X e Y, isto é, X^* e Y^*, é definida como o *coeficiente de correlação* e dada por

$$\rho = Cov(X^*, Y^*) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Assim como no caso anterior, se X e Y são independentes, então $\rho(X, Y) = 0$, ou seja, a correlação é nula.

3.3.2 Distribuição Normal

A distribuição normal, também conhecida como distribuição gaussiana, aproxima de forma satisfatória inúmeros eventos, principalmente na área da física, tornando-se uma das distribuições mais utilizadas. Esta distribuição possui dois parâmetros: μ a média ou valor esperado e σ^2 a variância. Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória. X segue uma distribuição normal, se a sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

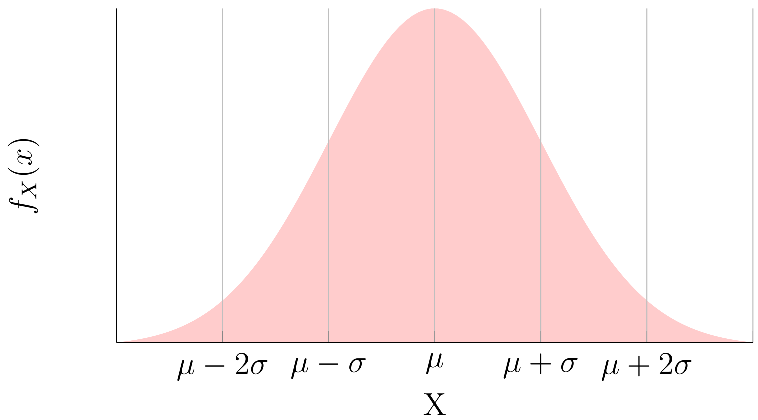
com $x \in \mathbb{R}$. Quando X possui uma distribuição normal, denota-se como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A função de distribuição, ou função de distribuição acumulada, $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx,$$

com $x \in \mathbb{R}$. Geralmente não é possível calcular esta função de modo analítico, já que não é elementar, sendo utilizado métodos numéricos. Com o intuito de facilitar as contas, a função densidade foi padronizada, introduzindo uma nova variável aleatória z, denominada por variável aleatória padronizada. A substituição realizada é $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, (conhecido como $z - score$) obtendo uma função de distribuição mais fácil de ser calculada, dada por $F_X(x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dx$.

O valor de probabilidade encontrado é a área sob a curva da função, por isso, faz-se o uso da integral. Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ a distribuição é conhecida como distribuição normal padrão, ou de distribuição normal centrada e reduzida. Quando $\sigma^2 = 0$, as função de distribuição e de densidade não são definidas, já que existirá divisão por zero. Além do mais, a interpretação utilizada de $P(X < x)$ é a probabilidade de algo acontecer quando for menor do que x, de $P(x_1 < X < x_2)$ é a probabilidade de acontecer algo quando X for maior do que x_1 e menor do que x_2, e assim segue. O gráfico de $f_X(x)$ é simétrico e possui a forma de um sino e a curva é conhecida como curva de Gauss, como apresentado abaixo. Note que o valor máximo da função $f_X(x)$ ocorre em μ.



Além da utilização prática, a distribuição normal é importante para o Teorema Central do Limite, fundamental para a teoria das probabilidades. Resumidamente, este teorema afirma a média de inúmeras variáveis aleatórias (independentes e identicamente distribuídas, isto é, variáveis aleatórias com a mesma distribuição de probabilidade e mutuamente independentes) será normal, mesmo se individualmente isso não aconteça. Outra relevância do modelo, é que é muito utilizado em modelos de precificação de ativos.

3.3.3 Distribuição Binomial

São chamados de ensaios de Bernoulli os ensaios independentes repetidos que possuem apenas dois possíveis resultados e suas probabilidades permanecem constantes durante a realização do ensaio. Estas probabilidades são denotadas por p e q e estão associados ao sucesso (S) e ao fracasso (F), respectivamente. Além disso, tem-se que $p + q = 1$ e $p, q > 0$. O espaço amostral de n ensaios de Bernoulli possui 2^n pontos amostrais com n símbolos S ou F que representam um possível resultado dos eventos.

Geralmente, o interesse nos ensaios de Bernoulli se dá pela probabilidade de acontecer uma determinada quantidade de sucessos, independentemente da ordem. Considere n ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso e $q = 1 - p$ de fracassos, então, segue-se do Teorema de De Moivre-Laplace que a probabilidade $b(k; n; p)$ de k sucessos acontecerem é de $b(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, com $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. A combinação $\binom{n}{k}$ representa as ordens que podem acontecer. Desta forma, uma varável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tem distribuição binomial, se a sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Quando X possui uma distribuição binomial, denota-se como $X \sim b(n, p)$. Tem-se também que nesta distribuição, o valor esperado é dado por $E(X) = np$ e a variância é dada por $Var(X) = np(1-q)$. Quando n, p, e q são relativamente grandes, pelo Teorema de De Moivre-Laplace, a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição normal da seguinte forma:

$$f_X(x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}.$$

3.4 Letras Gregas

Com o intuito de quantificar alguns aspectos dos riscos no mercado de opções, facilitando o gerenciamento dos riscos associados às carteiras de investimento, foram criadas as *letras gregas* das opções, uma forma de medir as sensibilidades destes ativos financeiros. As principais letras gregas usadas pelos agentes do mercado financeiro são a Δ (delta), a Θ (teta), a Γ (gama), a V (vega) e a ρ (rô). De acordo com Hull (2003), para calcular as letras gregas, traders utilizam o modelo Black-Scholes para opções europeias e o modelo binomial para opções americanas. Deste modo, considere opções sobre ações sem pagamento de dividendos.

A delta (Δ) de uma opção mede a sensibilidade do preço da opção com respeito ao preço da ação ou ativo subjacente. Geralmente é utilizada como um indicativo sobre a exposição da opção à variações no preço do ativo e é calculada através da equação:

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta S},$$

em que δV é a variação do preço da opção e δS é a variação do preço da ação subjacente. Teoricamente, para satisfazer uma condição chamada de não-arbitragem, para opções de compra, o valor de Δ deve estar entre 0 e 1 e para opções de venda, o valor deve estar entre -1 e 0. Suponha que $\Delta = 0,5$, isso significa que, quando o valor da ação varia uma quantia, o preço da opção de compra varia 50% da mesma quantia. No caso da Δ de um portfólio de opções ou de outros derivativos que dependem de um único ativo S, a equação é dada por $\Delta = \dfrac{\delta \Pi}{\delta S}$, com Π o valor do portfólio. Também é possível obter a delta de um portfólio de opções ao calcular cada delta individualmente, multiplicá-las pela sua fração correspondente no portfólio e, por fim, somar os resultados.

O perfil de negociador que vende ou compra as opções com o intuito de obter um preço melhor para a ação e assim ter lucro ao se proteger dos riscos, é o perfil que geralmente utiliza a estratégia “delta hedging”. Delta hedging significa manter uma opção e vender uma quantidade Δ do ativo subjacente. Ao tentar alcançar $\Delta = 0$ (denotado como delta-neutro), elimina-se os riscos de mercado, obtendo o que é chamado de posição delta neutra. A delta é vista como a inclinação da curva que relaciona a variação do preço da opção com o ativo subjacente. Desta forma, pode-se pensar que em alguns casos, é trabalhoso vender ou comprar as quantidades certas de ações de modo que consiga Δ ser exatamente 0, já que os valores variam com frequência por conta da volatilidade do ativo. Além disso, como geralmente é utilizado um modelo para descrever a dinâmica do preço da ação, existem os riscos do próprio modelo associados ao mercado. Logo, na prática é quase impossível ter um portfólio de hedge perfeito.

A teta (Θ), também chamada de “time decay” de um portfólio de opções, é a razão entre a mudança do preço da opção e o respectivo intervalo de tempo. Θ indica o quanto o preço da opção irá descer até seu vencimento. Denotando por $\delta\Pi$ a variação do valor de um portfólio Π com respeito a variação de tempo δt, tem-se que a teta do portfólio é dada por:

$$\theta = \frac{\delta \Pi}{\delta t}.$$

O valor de teta aumenta quando as opções são ATM e diminui quando as opções são ITM e OTM. Para compradores de opções de compra e de venda, Θ geralmente será negativa, enquanto que para vendedores de opções de compra e venda, normalmente será positiva. Para o caso do Δ, faz-se conveniente querer utilizar a estratégia de hedge com o intuito de se proteger do preço da ação, já que se trata de algo volátil e incerto, no entanto, para o caso da Θ, se proteger do tempo não faz muito sentido, já que não se trata de algo incerto. Desta forma, Θ é vista como uma descrição estatística do portfólio Π.

A gama (Γ) de um portfólio de opções é a razão entre a variação da delta do portfólio com a variação do preço do ativo subjacente, ou seja, é a velocidade de mudança da delta de um portfólio. Desta forma, para $\Delta = \dfrac{\delta\Pi}{\delta S}$ e S o preço do ativo subjacente, define-se a gama por

$$\Gamma = \frac{\delta\Delta}{\delta S}.$$

A gama também pode ser calculada em termos da segunda derivada da variação do preço da opção (δV) com respeito ao preço do ativo subjacente (S), obtendo $\Gamma = \dfrac{\delta\Delta}{\delta S} = \dfrac{\delta^2 V}{\delta S^2}$. Desta forma, como pode ser abordada desta maneira, a gama pode ser caracterizada como a inclinação da função que relaciona a variação da Δ em função da alteração do preço do ativo subjacente. Quando Γ tem valores altos, as opções estão ATM e, quando apresentar valores baixos, as opções estão ITM ou OTM.

De acordo com Wilmott (2007), a gama possui um papel importante quando há uma incompatibilidade entre a perspectiva do mercado da volatilidade implícita e a volatilidade atual do ativo subjacente. Assim como no caso para a letra grega delta, há a possibilidade *gama-neutra* na qual o investidor vende ou compra opções (e não ações como no caso delta-neutra). Geralmente na estratégia gama-neutra, os reajustes de compra e venda não são realizados com tanta frequência como na delta, pois os custos de transição são altos.

Para Π um portfólio delta-neutro, suponha que a volatilidade do ativo subjacente é constante, assim o valor do portfólio é uma função da ação S e do tempo t. Sejam δS a variação do preço do ativo subjacente em um pequeno intervalo de tempo δt e $\delta\Pi$ a mudança de preço do portfólio. Assim, utilizando as equações $\theta = \dfrac{\delta\Pi}{\delta t}$ e $\Gamma = \dfrac{\delta^2 V}{\delta S^2}$, e usando o fato de que se o portfólio é gama-neutro, consequentemente será delta-neutro, segue que

$$\delta\Pi = \Theta\delta t + \frac{\Gamma\delta S^2}{2}.$$

A vega (V), também conhecida como zeta ou capa, de um portfólio de opções é a razão entre a variação do valor do portfólio e a volatilidade do ativo subjacente, neste caso, a volatilidade implícita. Dessa forma, para σ a volatilidade implícita do ativo e $\delta\Pi$ a mudança do valor do portfólio, tem-se que

$$V = \frac{\delta\Pi}{\delta\sigma}.$$

Quando o valor absoluto da vega for alto, então há uma alta sensibilidade para a variação de volatilidade. Já para o caso em que vega é próxima de zero, tem-se que a mudança na volatilidade tem um efeito muito pequeno na posição. Perceba que a vega é diferente de todas as outras letras gregas, pois está sendo calculada com respeito a um parâmetro e não a uma variável, como nos demais casos. Note ainda que a vega pode ser obtida mesmo que a volatilidade implícita não possa ser adquirida com precisão, já que está associada a um modelo. Então, faz sentido que vega possua apenas um significado teórico.

A rô (ρ) de uma opção é a razão entre a variação de seu preço e a variação da taxa de juros. Ela mensura a sensitividade do valor portfólio com respeito a mudanças na taxa de juros. Para δV, a variação do preço da opção e δr variação da taxa de juros, tem-se que rô é dada por

$$\rho = \frac{\delta V}{\delta r}.$$

Seu valor é alto para opções no ATM com tempo de vencimento longo.

Desta forma, para administrar melhor a exposição ao risco, diversos agentes utilizam estas letras gregas como bússola, isto é, como parâmetros para tomadas de decisão. Além do mais, quando há um portfólio grande para gerenciar, o administrador procura deixar $\Delta = 0$, ou muito próximo a zero.

3.5 Riscos em Finanças

O risco é o efeito da incerteza nos objetivos, ou ainda, o estado de incerteza de uma decisão mediante o conhecimento das probabilidades associadas à ocorrência de resultados. Sob perspectiva financeira, o risco pode ser apontado como o nível de incerteza sobre determinado ativo. Podem ser classificados como risco sistemático e risco não sistemático.

O risco sistemático (ou risco sistêmico) é inerente a todos os ativos negociados no mercado, determinado por eventos de natureza política, econômica e social, afetando todos os setores. Já o risco não sistemático (ou risco não sistêmico) é identificado pelas características inerentes a cada investimento realizado, sendo possível eliminá-lo através de investimentos que não tenham correlação positiva entre si.

No entanto, alguns pesquisadores e especialistas da área, como Wilmott (2010), classificam os riscos como: risco de mercado, risco de crédito, risco de modelo, risco operacional e risco legal. O risco de mercado pode ser considerado como o risco sistemático, não podendo ser eliminado através da diversificação. No qual, procura-se quantificar o risco de perda devido aos movimentos do mercado, como por exemplo a taxa de juros e taxa de câmbio. Esses fatores, impactam todos os setores da economia ao mesmo tempo, por isso a diversificação não é suficiente. O risco de crédito se refere a possibilidade de perda devido ao não cumprimento de uma obrigação financeira, como por exemplo uma instituição financeira entrar em estado de falência e não conseguir pagar suas dívidas. O risco do modelo se refere a possibilidade de perda devido aos erros nos modelos matemáticos, geralmente nos modelos dos derivativos. Isso ocorre porque os modelos possuem certos parâmetros e variáveis que devem ser levados em conta, como volatilidade e taxa de juros. O risco operacional é a possibilidade de perda devido aos erros de equipamentos, procedimentos e sistemas, como por exemplo fraude. Por fim, o risco legal é a possibilidade de perda devido a ação legal, no sentido de contratos legais. Estes riscos, exceto pelo risco de mercado, podem ser classificados como riscos não sistemáticos.

Harry Markowitz é um economista norte americano que foi o primeiro a propor uma metodologia quantitativa moderna acerca da escolha do portfólio. Em seu principal trabalho (MARKOWITZ, 1952), ele quantificou a possível performance futura de um portfólio em termos do retorno esperado e do desvio padrão, mais tarde isso foi interpretado em termos do risco do portfólio. Esta quantificação é geralmente obtida através da modelagem da incerteza do payoff como uma variável aleatória, envolvendo uma função aplicada. Esta função é normalmente denominada de medida de risco (FÖLLMER; SCHIED, 2002).

Dada a importância do risco em finanças, surge a teoria das medidas de risco, com maior propósito acadêmico, trazendo definições e fundamentos de acordo com as necessidades específicas. Algumas das medidas mais conhecidas são as medidas de risco coerentes, convexas, espectrais e de distorção. Dentre estas mensurações, existem as funções mais utilizadas, como Valor em Risco (ou apenas VaR, do inglês Value at Risk), Perda Esperada (ou apenas ES, do inglês Expected Shortfall), Expectativa Condicional da Cauda (ou apenas TCE, do inglês Tail Conditional Expectation), Valor em Risco na Cauda (ou apenas TVaR, do inglês Tail Value at Risk) e Pior Expectativa Condicional (ou apenas WCE, do inglês Worst Conditional Expectation).

3.5.1 Modern Portfolio Theory

Modern Portfolio Theory (MPT), também conhecida por Teoria Moderna do Portfólio pela tradução literal, é a teoria de Markowitz mencionada no item anterior. MPT analisa o quanto adverso ao risco um investidor pode construir um portfólio de modo a maximizar o retorno. Para dar procedimento à teoria, suponha que o investidores avaliam os ativos conforme o retorno esperado e o desvio padrão, são adversos ao risco (entre dois ativos com mesmo retorno, será escolhido o que possui menor risco) e os custos de transição são desconsiderados.

Inicialmente, deve-se ter em mente que se o investidor direciona todo o seu dinheiro em investimentos que podem falir ao mesmo tempo, ou seja, investimentos cujos retornos estão altamente correlacionados, o risco de perder todo o valor também será elevado. Surgindo assim a importância da diversificação dos ativos, então se determinado ativo venha a falir, apenas uma porcentagem do portfólio irá ser perdida. Na MPT o retorno individual dos ativos possuem uma distribuição normal com determinada média e desvio padrão do período específico. Assim, considerando n ativos, existem

$$2n + \frac{n(n-1)}{2}$$

parâmetros (como desvio padrão e correlações). Markowitz afirma que todos os investimentos deveriam ser comparados através da plotagem do retorno esperado com o risco, mensurados pelo desvio padrão. Seja Π um portfólio com n ativos e denote W_i a fração do montante investido no ith ativo. Tem-se que o retorno esperado do portfólio, $\mu\Pi$, será dado por

$$\mu\Pi = \sum_{i=1}^{n} W_i \mu i,$$

com μi o retorno esperado do ativo i. Enquanto que o desvio padrão do retorno será dado por

$$\sigma\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j},$$

com ρ_{ij} a correlação entre o ith e jth ativos.

Markowitz mostra como otimizar um portfólio encontrando as frações do montante investido, obtendo o retorno esperado ótimo para um determinado nível de risco. É apresentando através de uma curva representada em um gráfico, chamada de fronteira eficiente, que exibe o maior retorno esperado conforme um nível de risco. Assim, o investidor não deveria ter um portfólio que não está na fronteira eficiente. Veja na imagem abaixo como as curvas se comportam. O ponto de tangência entre as curvas é chamado de portfólio do mercado.

3.5.2 Capital Asset Pricing Model

Capital Asset Pricing Model (CAPM), também conhecido por Modelo de Precificação de Ativos de Capital pela tradução literal, verifica a relação entre o risco e o retorno que é esperado de um investimento, assim como a teoria anterior, no entanto, este caso tem o intuito de simplificar o MPT. O modelo introduz os riscos sistemático e específico, assim como descreve a relação entre o risco sistemático e o retorno esperado de um ativo, geralmente utilizado para ações.

Antes de apresentar a equação dada pelo modelo, é necessário entender o conceito do β de um ativo. O β de um ativo, indica o quão volátil o ativo é em comparação ao mercado como um todo, ou seja, a sensibilidade do ativo em relação ao mercado. Sejam $Cov(r_a, r_p)$ a covariância entre o retorno do ativo e o retorno do mercado e σ o desvio padrão do retorno do mercado, então tem-se que o beta é dado pela seguinte equação: $\beta = \dfrac{Cov(r_a, r_p)}{\sigma^2}$. Quando $\beta > 1$, tem-se um beta alto, isto é, o ativo é altamente volátil em comparação ao mercado. Para $\beta = 1$ tem-se um beta neutro, então a volatilidade do

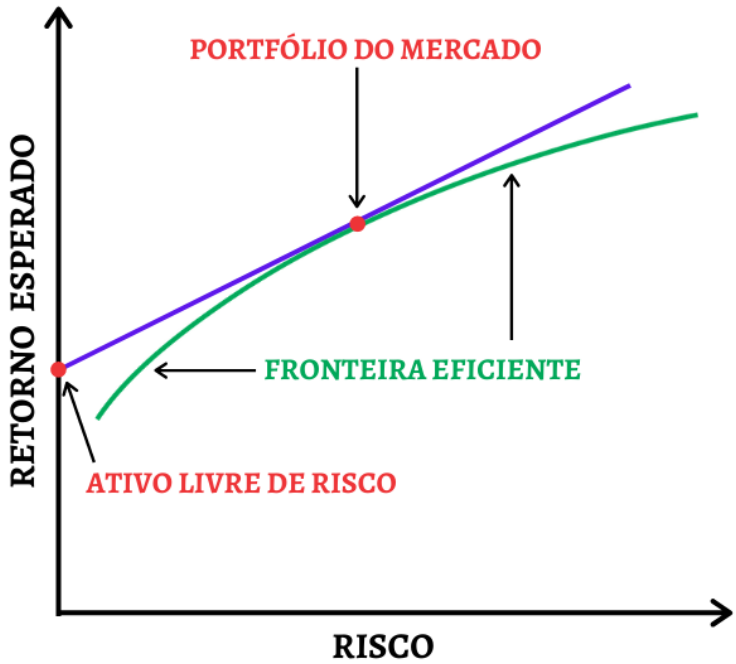


Figura 3.5.1 – Fronteira Eficiente

ativo corresponde com a volatilidade do mercado. Enquanto que no caso em que $\beta < 1$ diz-se que beta é baixo, deste modo o ativo possui menos volatilidade que o mercado. Importante observar que este risco que o indicador beta apresenta, não pode ser eliminado com a diversificação, ou seja, é um risco sistêmico.

Sejam r a taxa de juros neutra ao risco, β_i o beta do ith investimento e $E(R_m)$ a taxa de retorno do mercado esperada, então a equação para calcular o retorno esperado de um ativo é dada por

$$E(R_i) = r + \beta_i(E(R_m - r)).$$

Note que o modelo considera a rentabilidade do mercado como um todo, logo para o caso das ações, pode ser considerada a rentabilidade do Índice Bovespa, assim como a taxa de juros neutra ao risco pode ser considerada a taxa Selic. Neste modelo, os investidores cujos portfólios estão expostos apenas pelo risco sistemático são recompensados. Visto que o risco sistemático não pode ser eliminado ao comprar diversos ativos com riscos diferentes.

3.5.3 Diversificação

A partir dos primeiros estudos sobre portfólios com diversos ativos e seus riscos, surgiu o que se conhece hoje por diversificação em finanças. É considerada uma estratégia de gestão de risco, em que ao possuir diversos ativos diferentes em um portfólio, em média haverá um retorno maior e um risco menor, se comparado aos ativos individualmente. De forma geral, levando em consideração a oscilação do mercado, a performance positiva de alguns ativos neutralizam a performance negativa de outros.

Desta forma, para diversificar um portfólio é fundamental ter ativos não sejam perfeitamente correlacionados entre si. As classes de ativos mais frequentes que podem ser utilizadas para a diversificação no Brasil são ações, títulos públicos, fundos imobiliários e commodities. Claro que existem outras alternativas, como por exemplo investir em outros países. O investidor então, deve destinar porcentagens do portfólio para cada ativo que deseja investir e gerenciar a carteira para que mantenha-se o mais próximo do estabelecido. Também surgem os conceitos dos diferentes tipos de perfil de investidor (conservador, moderado ou arriscado ou também agressivo), que levam em conta a porcentagem que o investidor deseja em ativos mais arriscados. Por exemplo, se prefere optar por 90% em títulos públicos e 10% em ações, diz-se um investidor conservador, já quem prefere 90% em ações e 10% em títulos públicos, considera-se arriscado.

Desta forma, a diversificação reduz o risco do portfólio e protege contra a volatilidade do mercado, oferecendo retorno maior no longo prazo. No entanto, a diversificação possui algumas desvantagens como custo de transições maior do que as carteiras com menos ativos e necessidade de maior dedicação para administrar e gerenciar os ativos.

3.6 Medidas de Risco

Apesar de também levar em consideração o resultado de um ativo, diferentemente do CAPM e da MPT citados acima, a teoria de medidas de risco é pertinente à mensuração do quanto um investidor está exposto ao risco ao comprar determinado(s) ativo(s), assim como definir as propriedades nas quais um portfólio deveria ter para ser classificado como sensível à mensuração do risco. De acordo com Acerbi e Tasche (2002), escrever axiomas significa cristalizar em um número mínimo de afirmações precisas a natureza intrínseca de um conceito. Os autores também afirmam que escrever axiomas é um passo necessário a ser tomado para o processo de traduzir a realidade complexa em uma formulação matemática.

Considere T uma data futura, 0 a data atual e suponha que nenhuma transição é possível entre a data atual e a data futura. Seja X um resultado aleatório de um ativo ou portfólio, definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, F, \mathbb{P})$, com Ω o espaço amostral, F o conjunto de eventos possíveis em Ω e $\mathbb{P}$ a medida de probabilidade definida em Ω dos eventos em F. Denote por $L^p = L^p(\Omega, F, \mathbb{P})$ o espaço de variáveis aleatórias Y satisfazendo

$$||Y||_p = \left(\mathbb{E}\left[|Y|^p\right]\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |Y|^p d\mathbb{P}\right)^{1/p} < \infty,$$

com Y um elemento de L^p (isto é, limitado e integrável). Desta forma, é possível determinar uma função $\rho : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por *função risco*.

3.6.1 Medida de Risco Coerente

Artzner et al. (1999) definem que a *medida de risco coerente* deve satisfazer os quatro axiomas abaixo:

a) (Subaditividade) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$;

b) (Monotonicidade) Se $X \leq Y$, então $\rho(Y) \leq \rho(X)$;

c) (Homogeneidade Positiva) $\forall \lambda > 0$, tem-se que $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$;

d) (Invariância de Translação) $\rho(X + c) = \rho(X) - c$.

O axioma da subaditividade segue do princípio da diversificação apresentando acima, em que o risco de uma posição combinada deve ser menor ou igual a soma dos riscos individuais. A monotonicidade representa o fato de que se os resultados de um ativo, X, são sempre menores que os de outro, Y, então o risco envolvido ao se negociar X será maior ou igual ao do risco de se negociar Y. O terceiro axioma afirma que ao se obter posições maiores em um ativo, aumenta-se na mesma proporção o risco. Por fim, o último axioma mostra que ao adicionar um montante certo c à posição inicial, então o risco deve diminuir na mesma quantidade adicionada. Artzner et al. também citam outro axioma, denotado por axioma da relevância e dado por $\forall X \in L^p$, se $X \leq 0$ e $X \neq 0$, então $\rho(X) > 0$.

Deste modo, Acerbi e Tasche (2002) afirmam que através das medidas de risco coerentes o gerenciamento de riscos se transformou em uma ciência corretamente definida em uma estrutura dedutiva. Além disso, apresenta a possibilidade de uma ordenação, o incentivo à diversificação, proporcionalidade do risco e a segurança da liquidez, indispensáveis no mercado financeiro.

3.6.2 Medida de Risco Convexa

As medidas de risco convexas são uma extensão das medidas de risco coerentes e foram apresentadas por Föllmer e Schied (2002) e Frittelli e Gianin (2002). De acordo com Föllmer e Schied (2002) em alguns casos o risco de uma posição pode aumentar de forma não linear conforme o tamanho da posição. Para isso, o proposto é substituir os axiomas de homogeneidade positiva e subaditividade por outro, mais fraco, chamado de convexidade, no qual afirma-se que a diversificação não aumenta os riscos. Assim, o propósito deste tipo de medida de risco é abranger ativos cujo risco pode ser modelado por funções convexas, correlacionando com a teoria de análise convexa, como é o caso dos derivativos. Desta forma, as medidas de risco convexas satisfazem os seguintes axiomas:

a) (Convexidade) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$, $\forall X, Y \in L^p, 0 \leq \lambda \leq 1$;

b) (Monotonicidade) Se $X \leq Y$, então $\rho(Y) \leq \rho(X)$;

c) (Invariância de Translação) $\rho(X + c) = \rho(X) - c$.

Se considerarmos os axiomas da subaditividade e da homogeneidade positiva, facilmente seria possível obter o axioma da convexidade, desta forma segue que toda medida de risco coerente é uma medida de risco convexa. O recíproco nem sempre é verdadeiro. Se uma medida de risco convexa é normalizada no sentido de $\rho(0) = 0$, então $\rho(X)$ pode ser interpretado como uma exigência de margem. Expected Shortfall, que será abordada futuramente, é um exemplo de medida de risco convexa.

3.6.3 Medida de Risco Espectral

A medida espectral de risco foi proposta por Acerbi (2002) e leva em conta a aversão ao risco que o investidor possui. Ou seja, o comportamento do investidor quanto ao risco que este está se expondo. Para isso, realiza uma média ponderada da perda esperada, dando um peso maior para os casos que possuem maior risco. Uma combinação de medida de risco convexas é uma medida de risco coerente.

Seja $\phi \in L^1([0,1])$ uma função. ϕ é dito função de risco espectral admissível, se ϕ é positivo, decrescente e com norma dada por $||\phi|| = \int_0^1 |\phi(p)|dp = 1$. Sejam ϕ um risco espectro admissível e M_Φ uma medida de risco definida por

$$M_\Phi = -\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)dp,$$

com $F_X(p)$ a função de distribuição de probabilidade de X e p a amplitude de probabilidades acumulativas ($0 \leq p \leq 1$). Então M_Φ é dita medida de risco espectral e ϕ é denominado de *função de aversão ao risco*. A exigência de $\phi \geq 0$ garante o axioma de monotonicidade, enquanto que $||\phi|| = 1$ garante o da invariância de transição. Já a condição $\phi' \leq 0$, exibe que os pesos atribuídos a maiores perdas não seja menor que os pesos atribuídos a perdas menores, refletindo a aversão ao risco. Como exemplo de medidas de risco espectral tem-se o valor esperado e a Expected Shortfall.

Portanto, a medida de risco coerente foi responsável por criar a teoria de medida de risco, incorporando os axiomas matemáticos necessários. Foi o passo inicial para conciliar a teoria com a prática. Em seguida, surgem as medidas de risco convexas que procuram abranger o ativo que não é inserido na medida de risco coerente pelo fato de não ser modelado por funções convexas, como é o caso dos derivativos que são o foco deste trabalho. Por fim, as medidas de risco espectrais englobam a aversão ao risco, característica evidente no agente financeiro e que pode acarretar em algumas consequências não apresentadas nas medidas de risco coerentes.

3.6.4 Valor em Risco (Value at Risk - VaR)

A principal vantagem da medida Value at Risk é que ela resume o risco de uma instituição financeira devido a variáveis do mercado financeiro em uma única medida fácil de entender (MACHRY, 2003). Como definido por Jorion et al. (2007), o Value at Risk representa a perda máxima esperada sobre um horizonte temporal, dado o intervalo de confiança. Assim, pode ser utilizado para calcular, de modo simplificado, o risco agregado de um ativo ou de uma instituição como um todo. Desta forma, para calcular o VaR é necessário estabelecer algumas coisas: determinar o valor atual da carteira (como por exemplo R$10.000,00), medir a variabilidade dos fatores de risco (como por exemplo 10% ao ano), determinar o horizonte temporal (como por exemplo 5 dias), definir o nível de confiança denotado como α (como por exemplo 95%) e declarar a perda máxima possível (como por exemplo R$5.000,00). Como Hull (2003) afirma, o analista deve responder a seguinte sentença: "Eu estou X% certo de que não existirá uma perda maior do que V reais nos próximos N dias", sendo V o VaR do portfólio, X% o nível de confiança e N dias o horizonte temporal. Note que por mais que seja muito próximo da real perda máxima, o VaR obtido é muito amplo, tornando inviável utiliza-lo como única ferramenta para determinar os riscos de um portfólio.

Para estimar as possibilidades de perdas, conforme o nível de confiança é necessário determinar qual distribuição de probabilidade será utilizada. Para o VaR existem duas possibilidades: o método paramétrico e não paramétrico. Para utilizar o método paramétrico, é necessário estimar os parâmetros da distribuição, enquanto que, no método não paramétrico os parâmetros são extraídos a partir do passado, sem determinar hipótese sobre a distribuição do retorno dos ativos, o mais conhecido deles é a simulação histórica. O método paramétrico, também conhecido como delta-normal assume que o retorno dos preços dos ativos segue uma distribuição normal padrão. Dado X uma variável aleatória e $F_X(z) = P(X \leq z)$ a função de distribuição, define-se o VaR de X com nível de confiança α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ como sendo

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{z \in \mathbb{R} | F_X(z) \geq \alpha\}.$$

Para uma distribuição normal, VaR é proporcional ao desvio padrão. Desta forma, para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $F_X(z)$ a função de distribuição da variável aleatória X, segue que

$$VaR = F_X^{-1}(\alpha) = \mu + k(\alpha)\sigma,$$

com $k(\alpha) = \sqrt{2} erf^{-1}(2\alpha - 1)$ e $erf(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-t^2} dt.$

A simulação histórica assume que no futuro os ativos terão a mesma distribuição que tiveram no passado. Deste modo, para calcular é necessário simular a distribuição histórica (ou janela histórica) dos retornos dos ativos da carteira, de modo a simular os retornos futuros e assim determinar a VaR da carteira. O primeiro passo a ser feito é identificar as variáveis presentes no mercado que afetam o portfólio (como por exemplo taxa de juros), em seguida, é necessário coletar dados dos movimentos destas variáveis de mercado da janela histórica. Por exemplo, se o escolhido foi 100 dias, então os dados dos últimos 100 dias são coletados, conforme as variáveis identificadas. Deste modo, obtêm-se 100 alternativos cenários do que pode acontecer entre o dia de hoje e o de amanhã. Assim, o cenário 1 possui as mesmas porcentagens de mudanças do primeiro dia em que os dados foram coletados. A segunda possibilidade, tem o mesmo percentual de variações do que o segundo dia em que os dados foram coletados, e assim segue. Desta forma, para cada cenário é calculado a mudança dos valores do portfólio entre hoje e amanhã, definindo uma distribuição de probabilidade (considerando variações diárias). As cinco piores mudanças, neste caso, é o percentil da distribuição e a perda nesse percentil é a estimativa do VaR. Deste modo, considerando as variações do mercado o ith cenário será dado por

$$v_m \frac{v_i}{v_{i-1}}.$$

Onde v_i representa o valor do ativo no dia i, considerando as variáveis do mercado, e m a quantidade de dias utilizada na simulação histórica.

No entanto, por mais que a VaR seja uma medida de risco muito famosa e fácil de ser aplicada, possui diversas desvantagens. Iniciando com o fato de a VaR não ser considerado como medida de risco coerente, já que não satisfaz o axioma da subaditividade. Desta forma, em alguns casos a VaR desfavorece a diversificação da carteira. Neste caso, para um portfólio que dependa de variáveis de riscos diferentes, a VaR total não é a soma de cada VaR parcial. Além disso, a VaR Paramétrica Normal, na qual são considerados ativos lineares, exclui importantes derivativos, como é o caso das opções, fundamentais para este trabalho. No caso do método da simulação histórica, adota-se a hipótese de que os retornos são independentes e identicamente distribuídos, o que nem sempre é verdade. Existindo por exemplo, tempos de crise em que o comportamento dos ativos no passado serão diferentes do comportamento no futuro. Para isso, surgiu a Valor em Rico Condicional (CVaR - Condicional Value at Risk), também conhecida como ES (Expected Shortfall), propondo corrigir estas falhas da medida VaR.

3.6.5 Expected Shortfall - ES

A Expected Shortfall (ES), também conhecida como Valor em Risco Condicional (Condicional Value at Risk - CVaR) ou Expected Taill Loss (ETL), é uma medida de risco criada com o intuito de remediar as falhas da Value at Risk. Foi introduzida por

Rockafellar e Uryasev. Os autores mostraram que a CVaR é superior à VaR em aplicações de otimização. De acordo com (SARYKALIN; SERRAINO; URYASEV, 2008), existe uma correspondência próxima entre a VaR e a CVaR, com o mesmo nível de confiança, isto é, a VaR é o limite inferior para CVaR. Enquanto que no VaR o gestor de risco deve se perguntar "O quão ruins as coisas podem ser?", na CVaR a pergunta deve ser "Se as coisas ficarem ruins, o quanto posso perder?". Para $\alpha\%$ um nível de confiança, a ES é o valor do retorno esperado, dentre os $\alpha\%$ piores resultados, dado um horizonte temporal T e é definido por

$$ES = E[X|X > VaR_\alpha].$$

Suponha que o retorno dos preços dos ativos segue uma distribuição normal padrão. Então para ϕ a função densidade da distribuição, Φ a função acumulada da distribuição, σ_t a volatilidade do ativo até o instante t, T o horizonte temporal determinado e μ_t a média dos retornos dos preços do ativo do instante inicial até o tempo t, a ES de um ativo é dado por

$$ES(ativo_t) = W_t \cdot \alpha^{-1} \cdot \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \cdot \sigma_t n - \mu_t.$$

Quanto menor o valor de α escolhido, maior será o foco nas maiores perdas. Lembrando que a ES é uma medida de risco coerente e espectral, além disso, como toda medida de risco coerente é uma medida de risco convexa, segue que a Expected Shortfall é um exemplo de todas as medidas de risco apresentadas acima.

4 Estratégias

O ativo subjacente de uma opção pode ter naturezas muito distintas, como por exemplo, ações, contratos futuros de taxas de câmbio, commodities e índices, como o Ibovespa. Neste capítulo trataremos de algumas estratégias de negociação de opções sobre ações. Para o caso de opções sobre outros tipos de ativos, a ideia é muito semelhante. Por simplicidade, será assumido que as opções tratadas são europeias e os custos de transação serão desconsiderados, pois, dependendo do volume negociado, eles se tornam desprezíveis. Da mesma forma, é possível adaptar as ideias abaixo para o caso de opções americanas, mas este caso está além do escopo deste trabalho. Suponha que a taxa de juros é livre de risco, isto é, para uma taxa de juros r, o retorno do ativo será dado utilizando esta taxa de juros e ainda é possível tomar dinheiro emprestado sob a mesma taxa de juros.

4.1 Short Call e Long Put

Um agente financeiro que utiliza a estratégia de *Operar Vendido* (em inglês, Short Call), acredita que futuramente o preço da ação irá cair. O objetivo da estratégia é vender opções de compra (também chamadas de opções call e assim deriva o nome da estratégia) por um preço X_1 e após um intervalo de tempo Δt, comprar ações por um valor X_2, com $X_1 > X_2$ (já que o esperado é a queda dos preços). Após vender a opção, o negociador pode investir o dinheiro, a uma taxa de juros r, obtendo o ganho de $X_1 \mathrm{e}^{r\Delta t}$, enquanto que ao comprar as ações por X_2, seu payoff total é de $X_1 \mathrm{e}^{r\Delta t} - X_2$. Assim, o lucro aumentará conforme o preço das ações caiam. O trader que está comprando a opção de compra obtém a posição long call. O agente financeiro não precisa necessariamente obter as ações para utilizar esta estratégia, este comportamento chama-se vender a descoberto.

Ao Operar Comprado, ou ainda, do inglês Long Put, o negociante acredita que o preço da ação irá aumentar futuramente. O objetivo da estratégia é comprar opções de venda (também conhecidas por opções put e assim deriva o nome desta estratégia) por um preço X_1, obtendo direito de vender ações. Suponha que o negociante tomou emprestado X_1 a uma taxa de juros r. Então, durante o intervalo de tempo Δt, o agente financeiro possui um débito de $X_1 \mathrm{e}^{r\Delta t}$ e vende as ações por um preço X_2, com $X_2 > X_1$. Logo, seu payoff total será de $X_2 - X_1 \mathrm{e}^{r\Delta t}$ e assim, o lucro aumentará conforme o preço das ações aumentem. O agente financeiro que está vendendo a opção de compra obtém a posição short call.

Exemplo 4.1.1. *Suponha que um investidor decide operar vendido e vende uma opção de compra sobre 10 ações, com preço de exercício de* $R\$15,00$*, preço da opção de* $f = R\$0,50$ *e com vencimento para daqui 2 dias. Com isso, obteve um montante de* $10 \cdot$

$R\$15,00 + R\$0,50 = R\$150,50$. *Além disso, suponha que a taxa de juros diária é de* $0,2\%$. *Assim, o investidor decide investir o dinheiro obtido por três dias, obtendo então* $R\$150,50e^{0,002\cdot 3} = R\$151,40$. *Após o intervalo de tempo, como esperado, o preço da ação diminui, então o investidor compra 10 ações por* $R\$13,50$ *a unidade. Portanto, o payoff total desta estratégia é de* $R\$151,40 - 10 \cdot \$13,50 = R\$16,40$.

4.2 Covered Call

A estratégia chamada de Financiamento ou Venda Coberta, ou ainda, em inglês Covered Call, consiste no investidor comprar à vista uma quantidade de ações por um preço X_1 e vender uma opção de compra com a mesma quantidade de ações compradas, por um preço de exercício X_2, com $X_2 > X_1$. A posição de compra do ativo é uma garantia, visto que caso o comprador da opção resolva exercê-la, o vendedor pode entregar as ações. O lucro obtido ao utilizar esta estratégia é dado por $(X_2 - X_1)\Delta + K$, com K o preço da opção e Δ o total de ações. Geralmente esta estratégia é utilizada quando o investidor acredita que haverá uma pequena mudança no preço da ação, tanto um aumento quanto um decrescimento, durante a vida da opção. Pode ser considerada como uma estratégia de proteção ao risco no curto prazo.

Exemplo 4.2.1. *Suponha que um investidor compra* 50 *ações da empresa A por um preço de* $R\$15,00$, *obtendo através de uma empréstimo de* $R\$750,00$ *com taxa de juros de* 3% *a.a.. Para utilizar esta estratégia, ele vende uma opção de compra de* 50 *ações da mesma empresa, A, com preço de exercício de* $R\$17,00$ *e com vencimento para daqui a* 1 *ano, sendo preço da opção de* $R\$1,00$. *Possuindo um total de* $-R\$750e^{0,04} + R\$1,00 = -R\$772,84 + R\$1,00 = -R\$771,84$ *aproximadamente, com* $R\$1,00$ *correspondente ao preço da opção, pago pelo comprador.*

Para daqui um ano, tem-se dois possíveis cenários: o primeiro é o preço da ação ser menor do que $R\$17,00$. *Então a opção não será exercida, obtendo um prejuízo de* $R\$772,84$ *(desconsiderando as ações que já foram compradas no início da estratégia). O outro cenário é o preço da ação ser maior do que* $R\$17,00$, *suponha* $R\$18,00$. *Logo, a opção será exercida e tem-se um total de*

$$50 \cdot R\$17,00 = R\$850,00.$$

Como foi necessário inicialmente obter o empréstimo, seu payoff total será de

$$R\$850,00 - R\$772,84 = R\$78,16,$$

lembrando que o preço da opção já foi incorporado com o valor do empréstido, dado que é pago no início da opção.

4.3 Spreads

Uma estratégia de negociação spread envolve assumir uma posição em duas ou mais opções do mesmo tipo (isto é, duas ou mais opções de compra, ou duas ou mais opções de venda), com preços de exercício diferentes. A seguir serão apresentados os detalhes desta estratégia.

4.3.1 Spread de Alta

Um dos mais populares tipos de spread é o Spread de Alta, ou Trava de Alta, ou ainda, do inglês Bull Call Spread, que consiste em simultaneamente comprar uma opção de compra sobre uma ação com determinado preço de exercício (X_1) e vender uma opção de compra sobre a mesma ação com um preço de exercício maior (X_2, com $X_2 > X_1$). Ambas as opções possuem a mesma data de vencimento T. Note que é necessário um investimento inicial para aderir a esta estratégia. Considere S_T o preço da ação no tempo T.

Apenas para este caso serão apresentados todas as possibilidades de payoffs obtidos, sem considerar o preço da opção adquirido ao vender uma opção de compra. As demais ficam a cargo do leitor, já que seguem um raciocínio análogo. Lembrando que para conseguir lucro, o objetivo é comprar um ativo e vende-lo por um valor maior que o pago na compra.

a) Caso $S_T \geq X_2$. O titular irá exercer opção de compra, pois o preço da ação no tempo T será maior que X_2 e consequentemente, maior que X_1. Assim, pretende comprar pelo preço X_1 e vender por S_T, com o intuito de obter lucro. Então, adquire-se o payoff $S_T - X_1$. Para o caso da outra opção, novamente o titular irá optar pelo exercício, pelo mesmo motivo citado acima, então seu lucro será de $-max(S_T - X_2, 0)$. Obtendo então a recompensa de $-(S_T - X_2)$. Sendo assim, o payoff final será de $S_T - X_1 + (-(S_T - X_2)) = X_2 - X_1$.

b) Para $X_2 > S_T > X_1$. O titular da opção irá ter a mesma estratégia que no item anterior, exercendo a opção para depois vender as ações pelo preço esperado S_T, tendo um payoff de $S_T - X_1$. Já para a venda, não há vantagem para o titular em exercer a opção, pois seu payoff seria de $X_1 - S_T < 0$, ou seja, teria prejuízo. Portanto o ganho é dado por $S_T - X_1 + 0 = S_T - X_1$.

c) Para $S_T \leq X_1$. Tanto na compra quanto na venda da opção de compra, não é vantajoso exercer a opção. Logo, a recompensa será 0 em ambos os casos. Sem obter lucro. Lembrando que não está sendo levado em consideração os preços das opções.

A tabela abaixo e a Figura 4.3.1 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da Ação	Payoff da Compra	Payoff da Venda	Payoff Total
$S_T \geq X_2$	$S_T - X_1$	$-(S_T - X_2)$	$X_2 - X_1$
$X_2 > S_T > X_1$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$S_T \leq X_1$	0	0	0

Tabela 1 – Payoff do Spread de Alta.

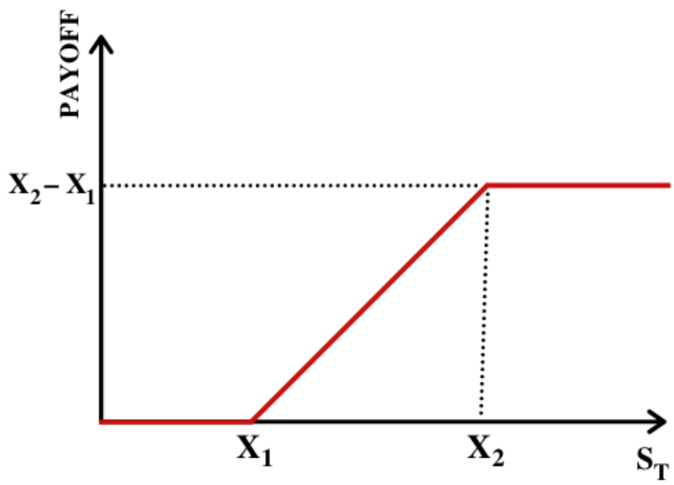


Figura 4.3.1 – Payoff Spread de Alta

Perceba que o investidor que adere ao Spread de Alta, espera que o preço da ação aumente, de modo a ser maior que os dois preços de exercício. Além disso, os spreads podem ser distinguidos das seguintes três formas:

a) As duas opções de call são OTM;

b) Uma call é ITM, enquanto a outra call é OTM;

c) As duas calls são ITM.

A alternativa mais agressiva de todas é a do tipo a), pois custa pouco para arranjar e há uma pequena probabilidade de oferecer uma recompensa alta. A do tipo b) é mais cautelosa do que a do item anterior. Enquanto que a estratégia do tipo c) são as mais conservadoras.

Exemplo 4.3.1. *Suponha que um investidor comprou uma opção de compra com preço de exercício de R\$ 15,00 e com vencimento de 1 ano e ao mesmo tempo vendeu uma opção de compra sobre a mesma ação, com preço de exercício R\$ 17,00, com o mesmo* *vencimento. O preço da opção pago para a opção comprada foi de* $R\$1,20$*, já o preço da opção vendida é de* $R\$1,35$*. Desta forma, existem 3 possíveis cenários para daqui um ano, como apresentados na tabela acima. Suponha que o preço da ação no vencimento da opção é de* $R\$16,50$*. Assim, no vencimento tem-se que o payoff será de* $R\$16,50 - R\$15,00 = R\$1,50$*, considerando os preços das opções, tem-se que o payoff total do investidor será de* $R\$1,50 - R\$1,20 + R\$1,30 = R\$1,60$*.*

4.3.2 Spread de Baixa

No caso em que o trader espera que o preço da ação no tempo T diminua, ele pode optar por uma estratégia muito semelhante com a anterior, conhecida como Spread de Baixa ou Trava de Baixa. Neste caso, o investidor compra opções de venda sobre ações com um preço de exercício (X_1) e vende opções de venda sobre as mesmas ações por outro preço de exercício (X_2). O preço de exercício da opção comprada é maior do que o preço da vendida, ao contrário do que ocorre com o spread de alta, sendo assim, $X_1 > X_2$. As opções possuem o mesmo vencimento T. A tabela abaixo e a Figura 4.3.2 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da Ação	Payoff da Compra	Payoff da Venda	Payoff Total
$S_T \geq X_1$	0	0	0
$X_1 > S_T > X_2$	$X_1 - S_T$	0	$X_1 - S_T$
$S_T \leq X_2$	$X_1 - S_T$	$-(X_2 - S_T)$	$X_1 - X_2$

Tabela 2 – Payoff do Spread de Baixa.

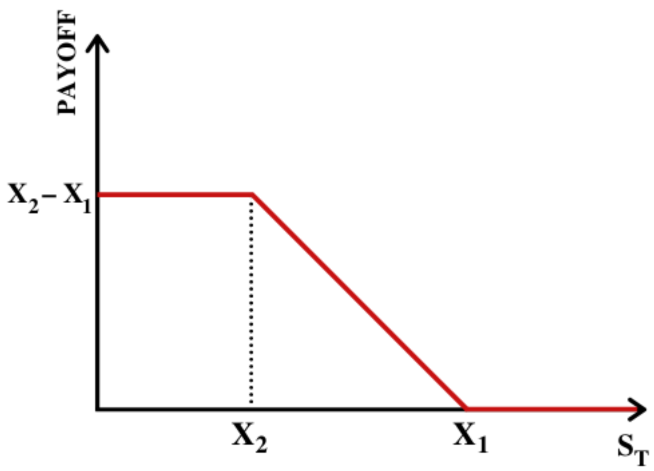


Figura 4.3.2 – Payoff Spread de Baixa

Exemplo 4.3.2. *Suponha que um investidor comprou uma opção de venda com preço de exercício de R\$18,00, com vencimento para daqui um ano e o preço de opção de*

$R\$2,35$. *Ao mesmo tempo, este investidor vende uma opção de venda por um preço de exercício de R$16,00, com o mesmo vencimento e com preço de* $R\$1,98$. *Desta forma, para daqui um ano, tem-se três possíveis cenários: o valor da ação maior do que R$18,00; menor do que R$18,00 e maior do que R$16,00 e menor do que R$16,00. Suponha que o preço da ação no vencimento da opção é de* $R\$15,85$. *Assim, o payoff será de* $R\$18,00 - R\$16,00 = R\$2,00$, *considerando os preços da opções, tem-se que o payoff total será de* $R\$2,00 - R\$2,35 + R\$1,98 = R\$1,63$.

4.3.3 Butterfly Spread

Além dos dois casos citados acima, há outras duas estratégias spreads muito presentes no mercado financeiro. A primeira delas, conhecida como "Butterfly Spread" envolve posições com três preços de exercício diferentes. Pode ser criada comprando uma opção de compra com um preço de exercício relativamente baixo (X_1), comprando uma opção de compra com um preço de exercício relativamente alto (X_3) e vendendo duas opções de compra com um preço de exercício X_2, com $X_1 < X_2 < X_3$. Geralmente, X_2 é próximo do preço atual da ação. Esta estratégia é conhecida como borboleta comprada, enquanto que o método que possui estas mesmas características, porém com opções de venda, chama-se borboleta vendida. Estes tipos de estratégia são utilizados quando o investidor acredita que não haverá uma mudança futura significativa dos preços da ação e exige um pequeno investimento inicial. A tabela abaixo e a Figura 4.3.3 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da ação	Primeira Compra	Segunda Compra	Venda	Payoff Total
$S_T \geq X_3$	$S_T - X_1$	$S_T - X_3$	$-2(S_T - X_2)$	$2X_2 - X_1 - X_3$
$X_3 > S_T > X_2$	$S_T - X_1$	0	$-2(S_T - X_2)$	$2X_2 - S_T - X_1$
$X_2 \geq S_T > X_1$	$S_T - X_1$	0	0	$S_T - X_1$
$S_T \leq X_1$	0	0	0	0

Tabela 3 – Payoff Spread Borboleta.

Exemplo 4.3.3. *Suponha que um investidor decide utilizar a estratégia de borboleta comprada em seus investimentos e que o preço atual da ação da empresa A é de* $S_0 = R\$15,00$. *Assim, ele compra duas opções de compra sobre a ação A, uma com preço de exercício de* $X_1 = R\$13,00$ *e preço de* $R\$2,63$ *e a outra com preço de exercício de* $X_3 = R\$18,00$ *e preço de* $R\$2,58$. *Ao mesmo tempo, vende duas opções de compra com preços de exercício de* $X_2 = R\$16,00$ *e preços de* $R\$1,99$. *Todas as opções citadas possuem vencimento para daqui 4 meses.*

Desta forma, no vencimento das opções teremos as seguintes possibilidades: $S_T \geq X_3$, *obtendo um payoff de* $2 \cdot R\$16,00 - R\$18,00 - R\$13,00 = R\$1,00$; $X_3 > S_T > X_2$, *obtendo um payoff de* $2 \cdot R\$16,00 - S_T - R\$13,00 = R\$19,00 - S_T$; $X_2 \geq S_T > X_1$, *obtendo*

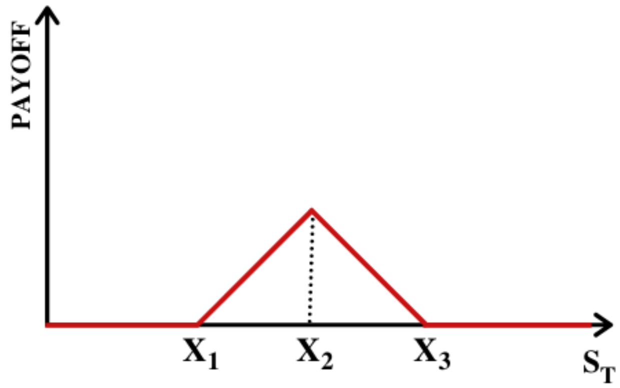


Figura 4.3.3 – Payoff Spread Borboleta

um payoff de $S_T - R\$13,00$; e por fim $S_T \leq X_1$, onde as opções não serão exercidas. Suponha que o preço da ação no vencimento das opções é de $R\$16,95$. Então, segue que o payoff é de $R\$19,00 - S_T = R\$19,00 - R\$16,95 = R\$2,05$, considerando os preços da opções, tem-se que o payoff total será de $R\$2,05 - R\$2,63 - R\$2,58 + 2 \cdot R\$1,99 = R\$0,82$.

4.3.4 Spread de Calendário

O Spread de Calendário (Calendar Spread, em inglês) consiste em adquirir opções com o mesmo preço de exercício, mas com datas de maturidade distintos, diferentemente dos spreads citados anteriormente. Pode ser criado vendendo uma opção de compra por um preço de exercício (X) e comprando uma opção de compra com o mesmo preço de exercício (X), mas com uma data de vencimento maior do que a primeira ($T_1 < T_2$). Geralmente, quanto maior o prazo de vencimento de uma opção, mais cara ela será. Desta forma, o objetivo por trás desta estratégia é ganhar com o decorrer do tempo ou com o aumento da volatilidade. Neste caso o investidor obtém lucro se o preço da ação no vencimento (no caso da opção com vencimento mais curto), é perto de seu preço de exercício, porém, fica com um prejuízo caso esteja significativamente acima ou abaixo do preço de exercício. Considere S_{T_1} o valor da ação no vencimento T_1 e S_{T_2} o valor da ação no vencimento T_2. A tabela abaixo e a Figura 4.3.4 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Exemplo 4.3.4. *Suponha que um investidor decide utilizar a estratégia de spread calendário. Assim, ele vende uma opção de compra com preço de exercício de $X = R\$30,00$, com vencimento para daqui 1 ano ($T_1 = 1$ ano), com preço de $R\$1,35$ e compra uma opção de compra com preço de exercício de $X = R\$30,00$ e com vencimento para daqui 10,5 meses ($T_1 = 10,5$ meses) e preço de $R\$1,05$. Assim, têm-se as seguintes possibilidades*

Preço da Ação	Payoff Opção com T_1	Payoff da Opção com T_2	Payoff Total
$S_{T_1}, S_{T_2} > X$	$X - S_{T_1}$	$S_{T_2} - X$	$S_{T_2} - S_{T_1}$
$S_{T_1} > X > S_{T_2}$	$X - S_{T_1}$	0	$X - S_{T_1}$
$S_{T_2} > X > S_{T_1}$	0	$S_{T_2} - X$	$S_{T_2} - X$
$S_{T_1}, S_{T_2} \leq X$	0	0	0

Tabela 4 – Payoff do Spread de Calendário.

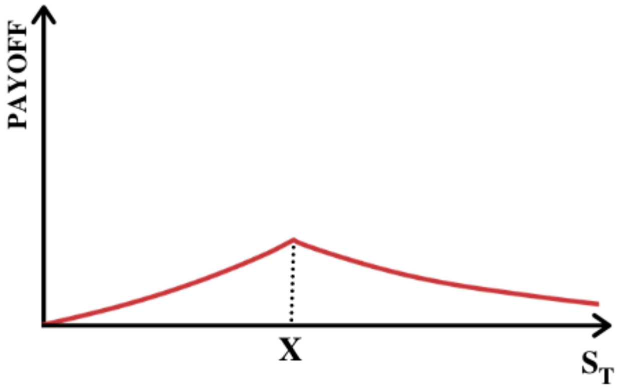


Figura 4.3.4 – Payoff Spread Calendário

(para S_{T_1} o valor da ação no vencimento T_1 e para S_{T_2} o valor da ação no vencimento T_2): $S_{T_1}, S_{T_2} > X$, $S_{T_1} > X > S_{T_2}$, $S_{T_2} > X > S_{T_1}$ e $S_T \leq X$.

Suponha que o preço da ação no tempo T_1 é de $S_{T_1} = R\$28,50$ e no tempo T_2 é de $S_{T_2} = R\$30,83$. Assim, segue que o payoff será de $R\$30,83 - R\$30,00 = R\$0,83$, considerando os preços da opções, tem-se que o payoff total será de $R\$0,83 + R\$1,35 - R\$1,05 = R\$1,13$.

4.4 Combinações

Uma combinação trata-se de estratégias que envolvem assumir uma posição tanto em uma opção de compra quanto de venda, ambas sobre uma mesma ação. Podem ser denominadas "Straddle", "Strip", "Strap"e "Strangle.

4.4.1 Straddle

Ao aderir ao "Straddle" o investidor compra duas opções uma de compra e outra de venda com os mesmos preços de exercício (X) e datas de vencimento (T). Caso o preço da ação esteja próximo do preço de exercício em T, a estratégia conduz a uma perda.

Caso os valores estejam suficientemente dispersos, em qualquer direção, a recompensa será positiva. Conclui-se assim que, quem adota esta estratégia espera uma mudança significativa nos preços das ações. A tabela abaixo e a Figura 4.4.1 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da Ação	Opção de Compra	Opção de Venda	Payoff Total
$S_T > X$	$S_T - X$	0	$S_T - X$
$S_T \leq X$	0	$X - S_T$	$X - S_T$

Tabela 5 – Payoff da Estratégia Straddle.

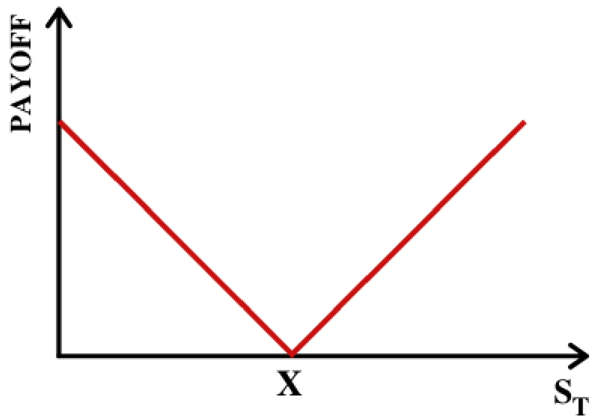


Figura 4.4.1 – Payoff Straddle

Exemplo 4.4.1. *Suponha que um investidor decide utilizar esta estratégia e compra duas opções (uma de compra e outra de venda) com preço de exercício de* $X = R\$17,50$*, com vencimento para daqui 3 meses e preço de* $R\$0,85$*. Imagine que no vencimento da opção, o preço da ação é de R\$18,20. Então o payoff total será de* $R\$18,20 - R\$17,50 - 2 \cdot R\$0,85 = -R\$1,00$*, ou seja, um prejuízo de* $R\$1,00$*.*

4.4.2 Strip e Strap

Uma estratégia "strip" constitui ter posição comprada em uma opção de compra e em duas opções de venda, com os mesmos preços de exercício (X) e data de vencimento (T). Enquanto que na estratégia conhecida como "strap", o negociados adquire uma posição comprada em duas opções de compra e em uma opção de venda, com o mesmo preço de exercício e data de vencimento. A ideia destas estratégias é que em um strip, o agente econômico aposta na queda do preço das ações, enquanto que no strap, ele acredita num aumento do preço. As tabelas abaixo e as Figuras 4.4.2 e 4.4.3 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da Ação	Opção de Compra	Opções de Venda	Payoff Total
$S_T > X$	$S_T - X$	0	$S_T - X$
$S_T \leq X$	0	$2 \cdot (X - S_T)$	$2 \cdot (X - S_T)$

Tabela 6 – Payoff da Estratégia Strip.

Preço da Ação	Opções de Compra	Opção de Venda	Payoff Total
$S_T > X$	$2 \cdot (S_T - X)$	0	$2 \cdot (S_T - X)$
$S_T \leq X$	0	$X - S_T$	$X - S_T$

Tabela 7 – Payoff da Estratégia Strap.

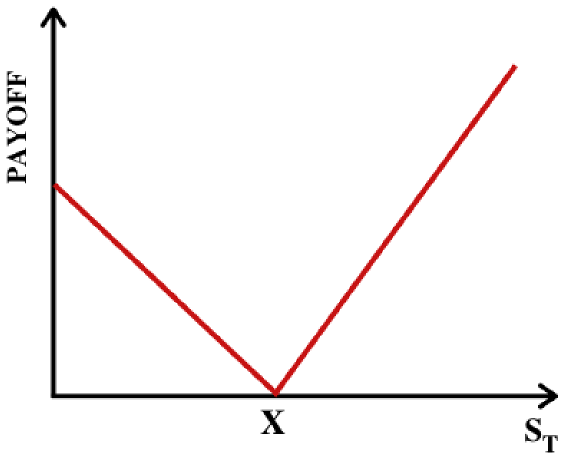


Figura 4.4.2 – Payoff Strap

Exemplo 4.4.2. *Suponha que um investidor decide utilizar a estratégia strip, então compra duas opções de venda e uma de compra, todas com preço de exercício de* $X = R\$42,00$ *e vencimento para daqui 7,5 meses. O preço das opções de venda é de* $R\$1,37$ *e da opção de compra de* $R\$1,49$. *Imagine que no vencimento da opção, o preço da ação é de* $R\$43,70$. *Assim, o payoff será de* $R\$43,70 - R\$42,00 = R\$1,70$, *considerando os preços da opções, tem-se que o payoff total será de* $R\$1,70 + 2 \cdot R\$1,37 - R\$1,49 = R\$2,95$.

4.4.3 Strangle

Por fim, na estratégia "strangle" o investidor possui uma opção de venda e uma de compra, com a mesma data de vencimento, mas com preços de exercício diferentes, suponha X_1 para a opção de compra e X_2 para a opção de venda. Perceba que a diferença

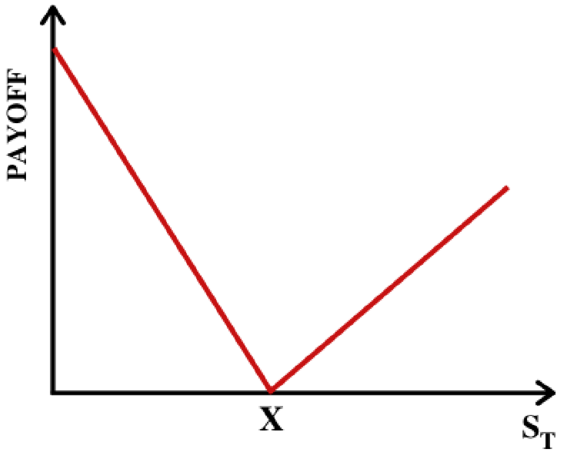


Figura 4.4.3 – Payoff Strip

entre um straddle e um strangle está no preço de exercício, além de que no strangle o risco é menor. O investidor que opta por esta estratégia espera que haja uma mudança significativa no preço da ação, mas não sabe exatamente se haverá um aumento ou uma queda. A tabela abaixo e a Figura 4.4.4 apresentam os payoffs obtidos através da utilização desta estratégia.

Preço da ação	Opção de Compra	Opção de Venda	Payoff Total
$S_T \geq X_1$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$X_1 > S_T > X_2$	0	0	0
$X_2 \geq S_T$	0	$X_2 - S_T$	$X_2 - S_T$

Tabela 8 – Payoff do Strangle.

Exemplo 4.4.3. *Suponha que um investidor decide utilizar a estratégia strangle, então compra uma opção de venda e uma opção de compra com vencimento para daqui 3 meses. O preço de exercício da opção de compra é de* $X_1 = R\$41,00$ *e o preço de* $R\$1,66$*, enquanto que o preço de exercício da opção de venda é de* $X_2 = R\$40,75$ *e preço da opção é de* $R\$1,45$*. Suponha que o preço da ação no vencimento da opção é de* $R\$50,25$*, uma mudança significativa, conforme o que o investidor espera. Assim, o payoff será de* $R\$50,25 - R\$41,00 = R\$9,25$*, considerando os preços da opções, tem-se que o payoff total será de* $R\$9,25 - R\$1,66 + R\$1,45 = R\$9,04$.

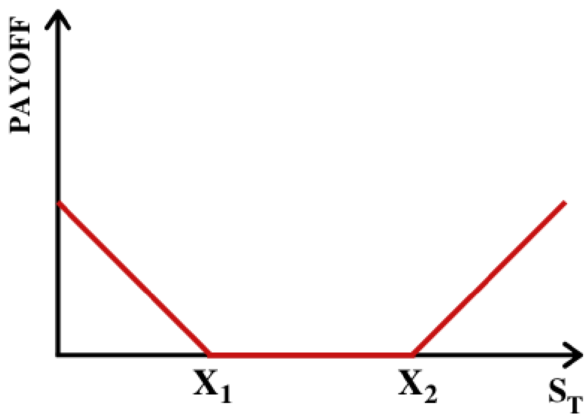
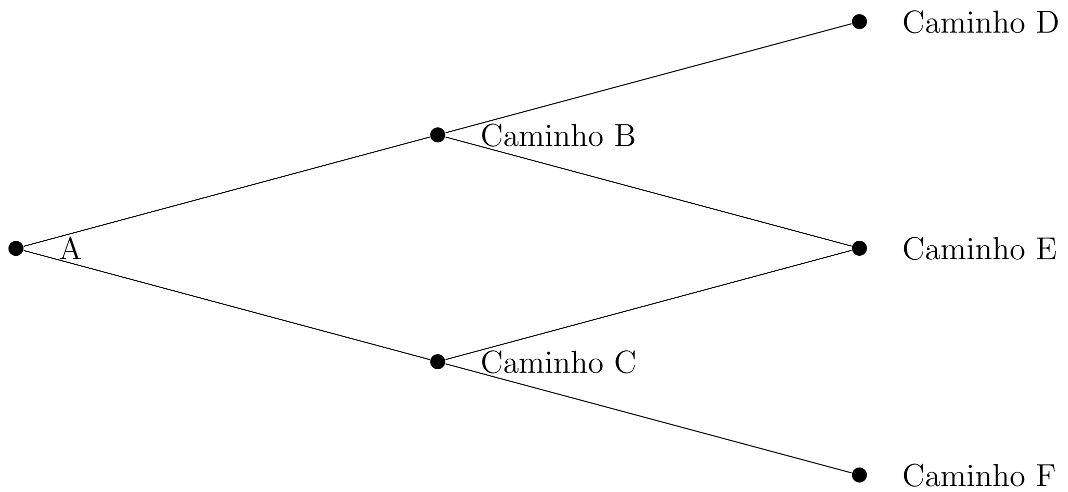


Figura 4.4.4 – Payoff Strangle

5 Modelo Binomial

O modelo binomial é uma técnica muito utilizada para precificar opções e outros derivativos mais complexos. Seus principais atrativos, como afirma Zhao (2018), são sua simplicidade conceitual e sua simplicidade de implementação.

O modelo foi proposto por Cox, Ross e Rubinstein em 1979 e baseia-se na construção de árvores binomiais, as quais consistem na representação, em forma de diagramas de árvores, dos possíveis caminhos que o preço de uma ação pode obter, como representado na imagem abaixo.



Desta forma, para o modelo são construídas árvores que representam os possíveis caminhos que o preço da ação pode adquirir durante a vida de uma opção. Além disso, de acordo com Shreve (2012), o modelo também é uma ferramenta muito útil para compreender a teoria de precificação por arbitragem, além de outros conceitos em teoria de probabilidade.

5.1 O Modelo Binomial e a Opção

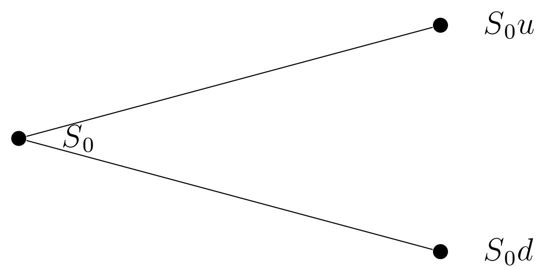
O modelo é valido tanto para opções de compra e venda, quanto para opções europeias e americanas. Inicialmente, para melhor compreensão do leitor, as opções utilizadas serão somente europeias, ou seja, as opções podem ser exercidas somente nos seus vencimentos.

Além do mais, o portfólio utilizado contém uma posição vendida em uma opção de compra. No momento em que o investidor deseja optar por utilizar uma posição vendida em uma opção de venda, a alteração pode ser feita sem mudanças significativas no modelo.

Deve-se levar em conta que o payoff de uma opção de compra é diferente do payoff de uma opção de venda. Por fim, considere que o investimento é neutro ao risco, ou seja, o payoff é o mesmo, independente dos riscos associados à ação. Deste modo, a taxa de juros utilizada para investir o dinheiro é a mesma para quem toma dinheiro emprestado.

5.1.1 O Modelo Binomial de Um Período

Considere um portfólio formado por Δ unidades de uma ação e uma posição vendida em uma opção de compra europeia, sobre a mesma ação. Denote por S_0 o preço atual da ação e T o vencimento da opção. No modelo binomial de um período, consideramos apenas dois possíveis valores para a ação no tempo T: um valor maior do que S_0, denotado por S_0u e outro menor do que S_0, denotado por S_0d. Representamos por u o fator de movimento de alta e por d o de fator de movimento de baixa. Este modelo é chamado de modelo binomial de um período, pois há apenas um passo durante a vida da opção, conforme na figura abaixo.



Considere r uma taxa de juros. Como comentado em 2 (parágrafo anterior à seção sobre opções), num mercado eficiente (isto é, resumidamente, os preços do mercado refletem todas as informações existentes, deixando de existir ação barata ou cara, proposto por Fama), não há possibilidade de arbitragem, para isto, deve ser considerado que r é a mesma taxa de juros para quem investe e para quem opta por tomar dinheiro emprestado. Assim, se um investidor pegar emprestado um montante A, não é possível ele investir este valor a uma taxa de juros maior e obter lucro com esta operação. O rendimento final deve ser apenas a taxa de juros livre de risco, a mesma utilizada no empréstimo. Para anular estas possibilidades de arbitragem, é necessário supor que

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Assim, ao construir o portfólio com Δ ações e a opção, o rendimento futuro, no tempo T deve ser apenas a taxa de juros livre de risco. Além do mais, para f, o preço atual da opção sobre a ação, suponha que, em seu vencimento, para S_0u o payoff da opção valha f_u e para S_0d o payoff valha f_d.

Note que, caso haja um movimento de alta, o portfólio valerá $\Delta S_0 u - f_u$. Já para o movimento de baixa, teremos $\Delta S_0 d - f_d$. Igualando as duas possibilidades e isolando Δ, tem-se:

$$\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d$$

$$\Delta \cdot (S_0 u - S_0 d) = f_u - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}.$$

Perceba que Δ é a razão entre as diferenças dos possíveis preços da opção e dos possíveis preços da ação em T. O objetivo é encontrar uma equação para representar f. Sabe-se que o custo para construir o portfólio é $\Delta S_0 - f$.

Transformando o portfólio futuro para o valor atual, conforme a capitalização contínua explicada anteriormente, tem-se $(\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT}$. Assim, igualando as duas expressões e isolando f, segue-se que

$$(\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT} = \Delta S_0 - f$$

$$f = \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - f_u) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \Delta \cdot (S_0 - S_0 u e^{-rT}) - f_u e^{-rT},$$

substituindo a equação encontrada acima para Δ, tem-se que

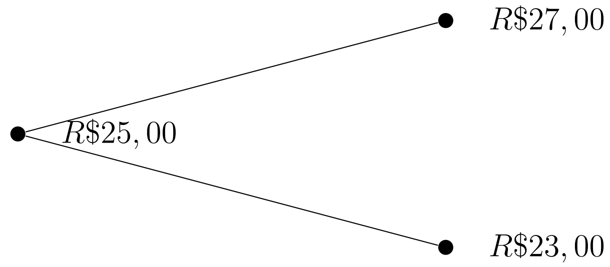
$$f = \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) \cdot (S_0 - S_0 u e^{-rT}) - f_u e^{-rT}$$

$$f = e^{-rT} \cdot [p f_u + (1-p) f_d], \tag{5.1.1}$$

com $p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d}$.

Logo, o preço da opção hoje, sob o modelo binomial de um período, é dado pela equação (5.1.1).

Exemplo 5.1.1. *Considere que o preço de uma ação hoje seja de R\$25,00 e que seu preço daqui 5 meses será R\$27,00 ou R\$23,00. Além disso, suponha que o portfólio seja composto por Δ unidades desta mesma ação e uma posição vendida de uma opção de compra europeia, com vencimento para daqui a 5 meses e com preço de exercício de R\$26,00. O objetivo do exemplo é encontrar o valor justo para o preço da opção, através do modelo binomial de precificação de ativos, considerando apenas um período. Observe abaixo a árvore binomial com os preços da ação.*



Deste modo, se o preço da ação daqui a 5 meses for de R\$27,00, então o seu portador irá exercê-la e o lucro será de $R\$1,00$*. Já para o caso da ação em que o valor da ação é de* $R\$23,00$*, a opção não será exercida. Então, o seu payoff é* $R\$0,00$*. Logo, se o preço da ação subir daqui a 5 meses, o portfólio terá o valor de* $R\$27\Delta - R\$1,00$ *e se o preço descer será de* $R\$23\Delta$*.*

Perceba que o investimento não possui risco já que o portfólio considerado é de hedge, então daqui a 5 meses, no final da vida da opção, o valor deverá ser o mesmo em ambas as alterativas. Ou seja,

$$R\$27\Delta - R\$1,00 = R\$23\Delta$$

$$R\$27\Delta - R\$23\Delta = R\$1,00$$

$$\Delta = 0,25.$$

Logo, se o preço da ação subir, então o valor do portfólio será de $R\$27,00\cdot(0,25) - R\$1,00 = R\$5,75$*, por outro lado, se cair, então será de* $R\$23,00\cdot(0,25) = R\$5,75$*, como esperado já que os portfólios foram igualados anteriormente. Além do mais, exceto para as oportunidades de arbitragem, um investimento sem risco deve render a taxa de juros livre de risco. Suponha que a taxa seja de 5% a.a..*

Para calcular o preço da ação, é necessário encontrar os valores de u *e* d*. Lembrando que* $R\$27,00 = S_0u$*, com* S_0 *o preço da ação hoje. Substituindo,* $R\$27,00 = R\$25,00u$*, segue que* $u = 1,08$ *e para* d*, utilizando o mesmo processo, tem-se que* $R\$23,00 = S_0d$ *e assim,* $d = 0,92$*.*

Agora basta encontrar p*. Utilizando a equação e substituindo, tem-se:*

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

$$p = \frac{e^{0,05\cdot\frac{5}{12}} - 0,92}{1,08 - 0,92}$$

$$p = \frac{1,021 - 0,92}{0,16} = 0,631.$$

Por fim, tem-se

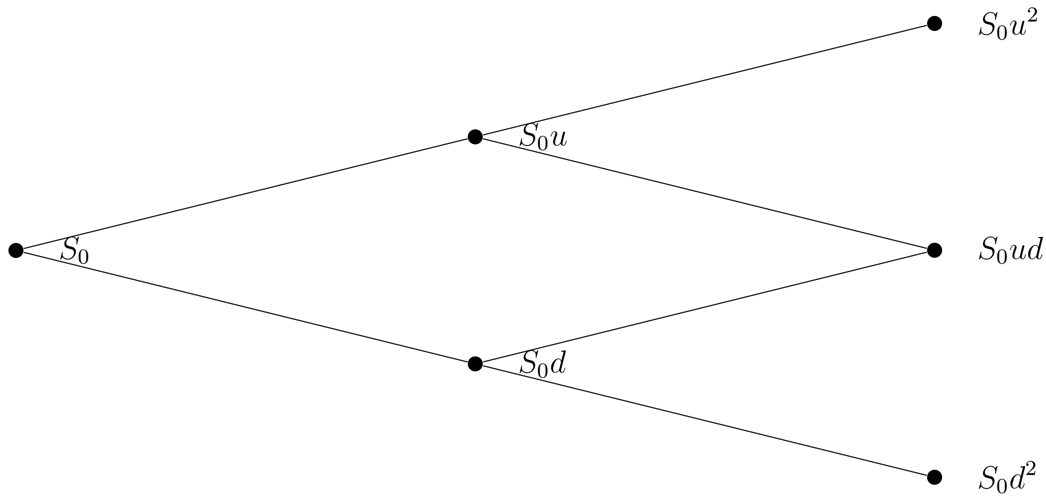
$$\begin{aligned} f &= e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \\ f &= e^{-0,05\cdot\frac{5}{12}}[0,631\cdot(R\$1) + (1-0,631)\cdot R\$0] \\ f &= 0,979[R\$0,631] = R\$0,617. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Portanto, o preço da opção justo é de $R\$0,617$*, aproximadamente.*

5.1.2 Modelo Binomial de Dois Períodos

Para o modelo binomial de dois períodos a principal alteração a ser realizada é dividir o tempo de vencimento da opção em dois períodos. Considere um portfólio igual ao do item anterior, formado por Δ ações e uma posição vendida em uma opção de compra europeia. Denote por S_0 o preço atual da ação e T o vencimento da opção.

Para este caso, durante o tempo T o preço da ação pode ter mais do que dois valores. No primeiro passo, o preço pode subir para S_0u ou cair para S_0d. No segundo, prosseguindo com a mesma ideia mas para os valores S_0u e S_0d, tem-se que para S_0u, este valor pode tanto subir para $S_0uu = S_0u^2$, quanto descer para S_0ud. Analogamente para S_0d, tem-se a possibilidade de subir para $S_0du = S_0ud$ e a de descer para $S_0dd = S_0d^2$, como apresentado na imagem abaixo.



Considere novamente uma taxa de juros r e para impedir a arbitragem, suponha $0 < d < 1 + r < u$. Perceba que neste caso, deve-se verificar o payoff da opção em 3 circunstâncias, ou seja, os payoffs em f_{uu} para S_0u^2, f_{ud} para S_0ud e f_{dd} para S_0d^2.

No modelo de um período, foi concluído que $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ com $p = \dfrac{e^{rT} - d}{u–d}$. Já para este caso, note que f_u e f_d dependem de outras árvores binomiais de um período. Assim, é necessário calcular seus valores seguindo o mesmo raciocínio, obtendo as seguintes equações:

$$f_u = e^{-rT}[pf_{\text{uu}} + (1-p)f_{\text{ud}}]$$
$$f_d = e^{-rT}[pf_{\text{ud}} + (1-p)f_{\text{dd}}].$$

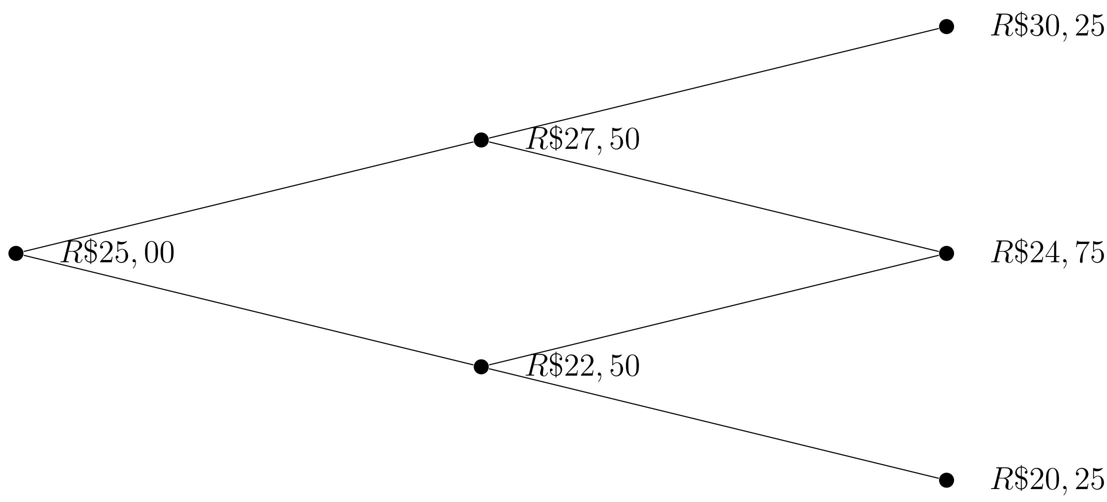
No entanto, há um último detalhe a ser observado. Já que a vida da opção T foi dividida em mais períodos (neste caso dois), denote-os por δt. Assim, substituindo T por δt, temos

$$\begin{aligned} f &= e^{-r\delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \qquad (5.1.3)\\ f_u &= e^{-r\delta t}[pf_{\text{uu}} + (1-p)f_{\text{ud}}]\\ f_d &= e^{-r\delta t}[pf_{\text{ud}} + (1-p)f_{\text{dd}}] \end{aligned}$$

com $p = \dfrac{e^{r\delta t} - d}{u-d}$.

Portanto, o preço da opção hoje será dado pela equação (5.1.3), para o modelo binomial de dois períodos. Utilizando-se um raciocínio análogo pode-se construir o modelo binomial com mais períodos.

Exemplo 5.1.2. *Considere um exemplo similar ao citado acima, no modelo binomial um período. Suponha que o portfólio é composto por* Δ *ações e uma posição vendida de uma opção de compra europeia, com vencimento para daqui 1 ano e com preço de exercício de R\$26,00. Além do mais, considere a taxa de juros igual a 5% a.a., R\$25,00 o preço atual de uma ação e que em cada um dos períodos (com duração de 6 meses), o valor da ação pode subir ou descer* 10%*. O objetivo do exemplo é encontrar o valor justo para o preço da opção, através do modelo binomial de precificação de ativos, com dois períodos. Deste modo, para o primeiro passo, temos que o valor da ação poderá ser R\$27,50 ou R\$22,50 e para o segundo passo, temos as seguintes possibilidades: R\$30,25, R\$24,75 e R\$20,25. Veja a representação destes valores na árvore binomial abaixo.*



Observe que neste caso, estamos dividindo a vida da opção em dois períodos iguais, denotados por δt, assim, como a vida é equivalente a um ano, segue que δt é igual a 6 meses, ou ainda, 0,5 ano. Para encontrar o preço da opção, serão utilizadas as equações dadas na construção do modelo binomial dois períodos: $f = e^{-r\delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$ com $p = \dfrac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$. Assim, ao calcular p, primeiro é necessário descobrir os valores de u e d, logo para $S_0 u = R\$27,50$, $S_0 d = 22,50$ e $S_0 = R\$25,00$, segue que $u = 1,1$ e $d = 0,9$. Logo, tem-se que

$$p = \frac{e^{0,05\cdot(0,5)} - 0,9}{1,1 - 0,9}$$
$$p = \frac{0,125}{0,2} = 0,625.$$

Note que a equação para precificar a opção depende dos possíveis payoffs futuros, verificando-os, obtém-se para o primeiro caso, se o valor da ação for de R\$30,25 a opção valerá $R\$30,25 - R\$26,00 = R\$4,25$. Para o segundo e terceiro casos, a opção não será exercida, já que o preço da ação está menor do que o preço de exercício, assim, não haverá lucro nem prejuízo.

Agora, utilizando as equações encontradas para f_u e f_d e substituindo os valores encontrados acima, tem-se

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-0,05\cdot(0,5)}[(0,625)\cdot R\$4,25 + (1-0,625)\cdot 0] \\ f_u &= 0,975\cdot(R\$2,656) = R\$2,59 \\ f_d &= e^{-0,05\cdot(0,5)}[0,625\cdot(0) + (1-0,625)\cdot(0)] = 0. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Agora basta substituir os dados obtidos na equação de f, resultando em $f = e^{-0,05\cdot(0,5)}[0,625\cdot(R\$2,59) + (1-0,625)\cdot 0] = 0,975[1,618] = R\$1,578$. Assim, o preço da opção justo é de R\$1,57, aproximadamente.

5.1.3 Modelo Binomial n-períodos

Para garantir a eficiência do modelo, é necessário fazer alguns ajustes. (HULL et al., 2013) afirma que, quando o modelo binomial é utilizado na prática, a vida da opção é tipicamente dividida em 30 ou mais períodos. Sendo assim, é fundamental apresentar o modelo com n-períodos.

Além disso, o autor também afirma que os valores de u e d são calculados utilizando a volatilidade da ação (representada por σ), ou seja, o desvio padrão anualizado dos log-retornos da ação. Deste modo, para ser mais preciso definimos $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = \dfrac{1}{u}$. Os valores de p e $1-p$ são chamados de probabilidade de um movimento de alta e probabilidade de um movimento de baixa, respectivamente. Assim, para $p = \dfrac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$, o preço da ação será dado por

$$f = e^{-r\delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$

com

$$
\begin{aligned}
f_u &= e^{-r\delta t}[pf_{\text{uu}} + (1-p)f_{\text{ud}}] \\
f_d &= e^{-r\delta t}[pf_{\text{ud}} + (1-p)f_{\text{dd}}] \\
f_{u^2} &= e^{-r\delta t}[pf_{u^3} + (1-p)f_{u^2d}] \\
f_{\text{ud}} &= e^{-r\delta t}[pf_{u^2d} + (1-p)f_{ud^2}] \\
f_{d^2} &= e^{-r\delta t}[pf_{ud^2} + (1-p)f_{d^3}] \\
&\vdots \\
f_{u^{n-1}} &= e^{-r\delta t}[pf_{u^n} + (1-p)f_{u^{n-1}d}] \\
f_{u^{n-2}d} &= e^{-r\delta t}[pf_{u^{n-1}d} + (1-p)f_{u^{n-2}d^2}]
\end{aligned}
\tag{5.1.5}
$$

Segue com o mesmo raciocínio até encontrar todos os valores para os nós com $n-1$ períodos. Já para f_{u^n}, $f_{u^{n-1}d}$, ..., $f_{ud^{n-1}}$, f_{d^n}, os payoffs são calculados normalmente através da fórmula $\max(S_T - X, 0)$, com X o preço de exercício da opção e S_T o valor da ação no tempo T, considerando o mesmo portfólio formado por Δ ações e uma posição vendida em uma opção de compra europeia.

5.2 Taxa Neutra ao Risco

A precificação neutra ao risco estabelece que ao precificar um derivativo, pode-se assumir que os investimentos são neutros ao risco. Ou seja, ao precificar por exemplo, uma opção em relação ao seu ativo subjacente, os riscos deste não são relevantes. Assim, as equações utilizadas permanecem as mesmas, independente dos riscos atrelados ao ativo subjacente.

Deste modo, a precificação neutra é realizada em termos dos payoffs previstos das opções, descontando-o do vencimento da opção para o presente. Este desconto é feito assumindo-se que o crescimento médio é dado pela taxa de juros neutra ao risco (WILMOTT, 2010). Desta forma, para precificar as opções através do princípio neutro ao risco, deve ser levado em conta que o retorno esperado do ativo é a taxa de juros neutra ao risco e também que, o valor esperado das opções no vencimento deve ser descontado pela taxa neutra ao risco para trazê-lo a valor presente. Isto é exatamente o que foi feito acima na construção do modelo binomial de um ou mais períodos.

Essa teoria mostra a correlação entre uma opção e sua variável subjacente. Se o valor de uma opção está crescendo devido ao aumento do preço da ação, então comprar uma opção e operar vendido é suficiente para se proteger do risco, obtendo um portfólio de hedge. Para saber a quantidade de ações que devem ser utilizadas para operar vendido, basta calcular a letra grega Δ, dada por $\Delta = \dfrac{\delta V}{\delta S}$, com δV a variação do preço da opção e δS a variação do preço da ação subjacente, explicada anteriormente. A precificação neutra ao risco mostra que, por mais que pareça utópico supor que não existem riscos no mercado financeiro, se dividirmos o mercado em duas partes, uma neutra ao risco e a outra com as probabilidades de ganho e perda, o princípio de risco neutro é válido no mercado financeiro com risco. Vejamos como isso ocorre.

Considere o portfólio e suas respectivas notações apresentadas no modelo binomial um período. Tem-se que o preço da opção é dado por $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$, com $p = \dfrac{e^{rT}-d}{u-d}$, utilizando-se o princípio de precificação neutra ao risco. Considere o caso em que os riscos estão associados aos ativos. Seja p a probabilidade de um movimento de alta e $1-p$ a probabilidade de um movimento de baixa. Então, tem-se que o payoff esperado para a opção é de $pf_u + (1-p)f_d$. Já o valor esperado para o preço da ação no tempo T, $E(S_T)$, será dado por $E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$. Ao substituir p, segue-se que

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= pS_0u + (1-p)S_0d \\
E(S_T) &= pS_0(u-d) + S_0d \\
E(S_T) &= \frac{e^{rT}-d}{u-d}S_0(u-d) + S_0d \\
E(S_T) &= (e^{rT}-d)S_0 + S_0d \\
E(S_T) &= S_0e^{rT}.
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

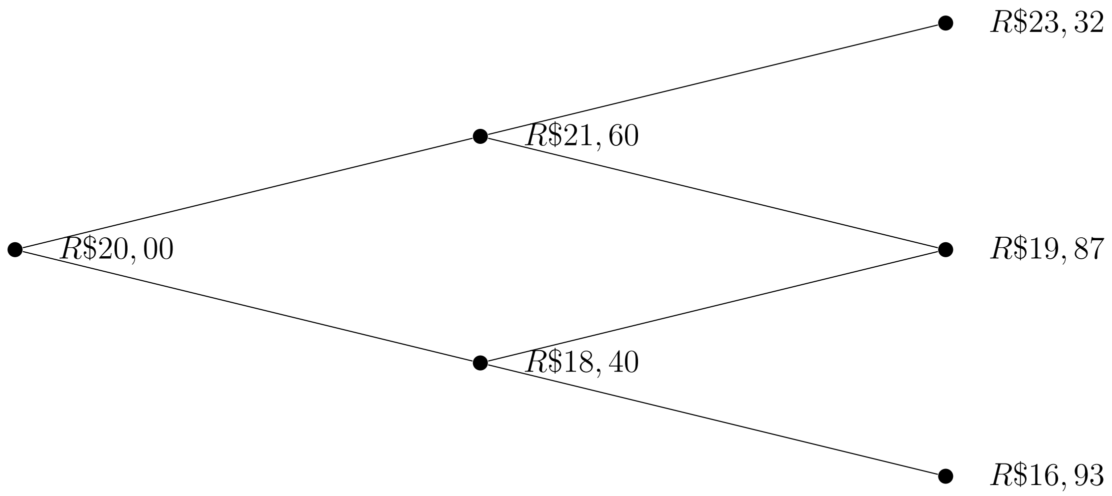
Desta forma, S_T é o montante associado ao capital S_0, aplicado à taxa de juros contínua e livre de risco r pelo tempo T. Então, o preço da ação, considerando as probabilidades de movimentos de alta e de baixa, possui o mesmo comportamento esperado no caso neutro ao risco. Concluindo assim que, ao assumir que o mercado é neutro ao risco, o valor encontrado para ao precificar derivativo é o mesmo encontrado em um mercado com riscos.

5.3 O Modelo Binomial com Opções Americanas

Até o momento foram consideradas apenas opções europeias, isto é, cujo exercício pode ocorrer apenas numa data fixa (vencimento da opção). As opções americanas, por sua vez, podem ser exercidas a qualquer instante até o vencimento. Deste modo, o que será realizado para este caso é verificar em cada passo o preço da opção, para depois, conferir em qual deles será mais vantajoso exercê-la. Ou seja, é calculado o preço da opção em cada período de maneira análoga ao caso europeu, e em seguida, é feita uma análise sobre em qual das possibilidades será mais vantajoso exercer a opção. Veja no exemplo abaixo com o modelo binomial de dois períodos o procedimento realizado.

Exemplo 5.3.1. *Considere um portfólio composto por* Δ *ações e uma posição vendida de uma opção de compra americana, com vencimento para daqui 6 meses e com preço de exercício de R\$21,00. Sejam 3% a.a. a taxa de juros e R\$20,00 o preço atual de uma ação. Além do mais, como comentado no modelo binomial de n-períodos, considere que a volatilidade da ação seja de aproximadamente, 8%. O objetivo do exemplo é encontrar o valor justo para o preço da opção, através do modelo binomial de precificação de ativos, utilizando dois períodos.*

Deste modo, para o primeiro passo, temos que o valor da ação poderá ser R\$21,60 ou R\$18,40 e para o segundo passo, temos as seguintes possibilidades: R\$23,32, R\$19,87 e R\$16,93. Segue abaixo a árvore binomial que representa estes valores.



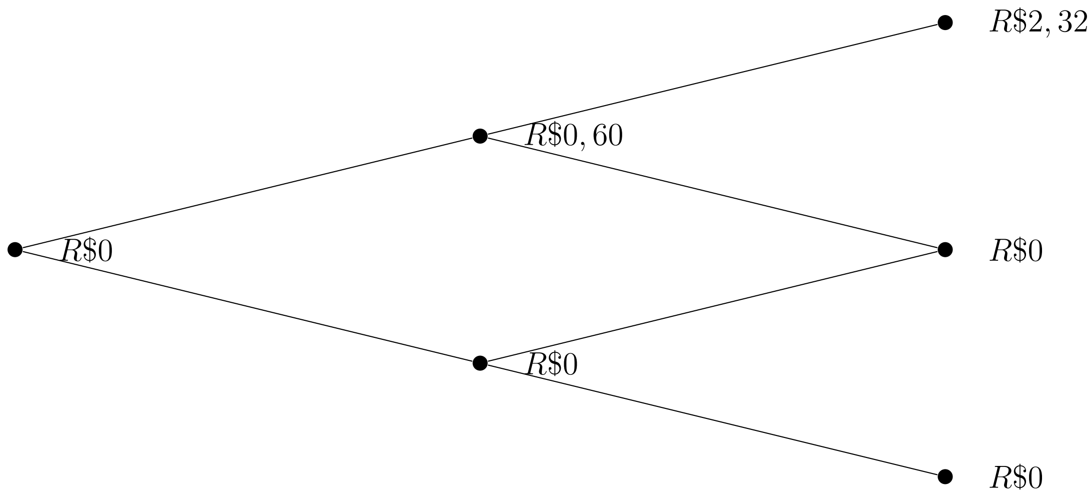
Assim, verificando os payoffs no último período, segue que para o caso de a ação estiver com o preço de $R\$23,32$*, a recompensa será de* $R\$23,32 - R\$21,00 = R\$2,32$*. Já para os dois outros casos, não terá payoff, pois não é vantajoso optar pelo exercício.*

Calculando u e d conforme as equações dadas anteriormente por $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ *e* $d = \dfrac{1}{u}$*, com* $\delta t = \dfrac{3}{12} = 0,25$*, tem-se* $u = e^{0,08\cdot\sqrt{0,25}} = e^{0,04} = 1,040$ *e* $d = \dfrac{1}{1,040} = 0,961$*. Logo, tem-se que*

$$\begin{aligned}
p &= \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \\
p &= \frac{e^{0,03\cdot(0,25)} - 0,961}{1,040 - 0,961} \\
p &= \frac{1,007 - 0,961}{0,079} \\
p &= \frac{0,046}{0,079} = 0,582.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Para o caso em que o preço da ação é $R\$21,60$*, temos que* $f_u = e^{-r\delta t}[p(R\$2,32)+(1-p)0] = e^{-0,03\cdot(0,25)}[0,582\cdot(R\$2,32)] = R\$1,34$*. Para o caso em que o preço da ação é* $R\$18,40$*, temos que* $f_d = e^{-r\delta t}[p(0)+(1-p)0] = R\$0$*. Agora, para o caso em que o preço da ação é* $R\$20,00$*, o procedimento é o mesmo que o realizado com opções europeias. Então, para* $f_u = R\$1,34$ *e* $f_d = R\$0$ *encontrados anteriormente,* $f = e^{-0,03(0,25)}[p(R\$1,34)+(1-p)R\$0] = 0,992[0,582\cdot(R\$1,34)+0] = R\$0,773$*. Portanto, o preço justo da opção, de acordo com o modelo binomial de precificação de ativos com 2 períodos é* $f = 0,77$*.*

Como a opção pode ser exercida em qualquer momento até o vencimento, é necessário verificar o payoff para cada possível preço da ação. Considere $\Delta = 10$*. Para os casos em que o preço da ação for menor do que* $R\$21,00$*, isto é, os casos em que o valor da ação for de* $R\$20,00$*,* $R\$18,40$*,* $R\$19,87$ *e* $R\$16,93$*, a opção não será exercida e o investidor tem um prejuízo de* $R\$0,77$*, por conta do preço da opção. Para o caso em que o preço da ação for* $R\$23,32$*, o portfólio valerá* $-10X + 10S_T - f = -10\cdot R\$21,00 + 10\cdot R\$23,32 - R\$0,77 = R\$22,43$*, considerando que o investidor comprou as ações pelo preço de exercício e vendeu pelo preço* $R\$23,32$*. Para o caso em que o valor da ação for* $R\$21,60$*, o portfólio valerá* $-10X + 10S_T - f = -10\cdot R\$21,00 + 10\cdot R\$21,60 - R\$0,77 = R\$5,23$*. Para o caso em que a ação valer* $R\$18,40$*, o portfólio valerá* $R\$18,40.(10) = R\$184,00$*, considerando que o investidor comprou as ações pelo preço de exercício e vendeu pelo preço* $R\$21,60$*. Segue abaixo a árvore binomial com os payoffs da opção.*



Deste modo, o preço justo da opção, de acordo com o modelo binomial de precificação de ativos com 2 períodos é $f = 0,77$ *e além disso, é mais vantajoso exercer a opção no final do vencimento, caso o preço da ação seja R\$23,32.*

5.4 Dividendos

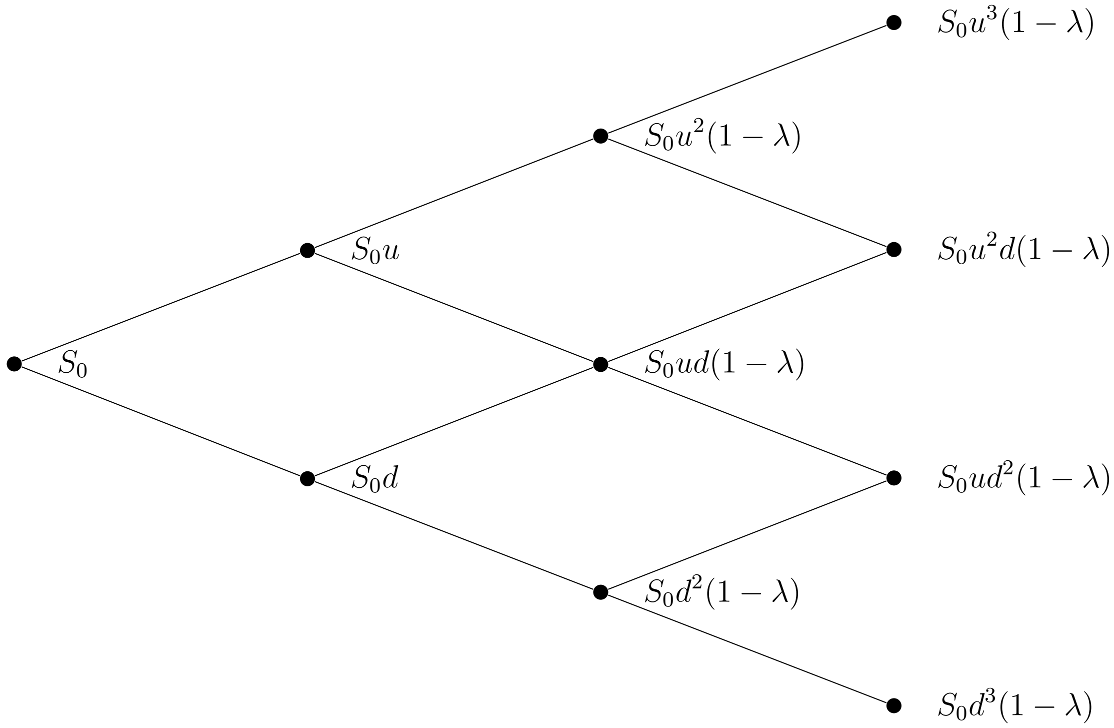
A partir do momento em que um investidor compra uma ação de um empresa, ele se torna um acionista desta. No Brasil, de acordo com o artigo 202 da Lei 6.404/76, os acionistas têm o direito de receber como dividendo obrigatório uma parcela dos lucros da empresa. Desta forma, ao trabalhar com opções sobre ações e propriamente ações, esse elemento deve ser levado em consideração.

5.4.1 Modelo Binomial com Pagamento de Dividendo

Com o intuito de aprimorar cada vez mais o modelo, é necessário considerar o pagamento de dividendos, principalmente nos casos em que a vida da opção é maior do que um ano. Quando a distribuição dos dividendos é aprovada, são definidas duas datas importantes, a data *ex dividendos* e a do pagamento.

A data *ex dividendos* é a data a partir da qual os acionistas não possuem o direito de receber os dividendos, ou seja, apenas quem comprou as ações da empresa antes desta data irão se beneficiar com o pagamento. O fator relevante para a aplicação do modelo, é que na data *ex dividendos* ocorre uma diminuição no preço da ação decorrente da distribuição dos dividendos que será realizada. Grosso modo, o preço da ação na data *ex dividendos* diminui aproximadamente o mesmo valor que será pago em dividendos. Desta forma, o preço das opções de compra diminuem e das opções de venda aumentam.

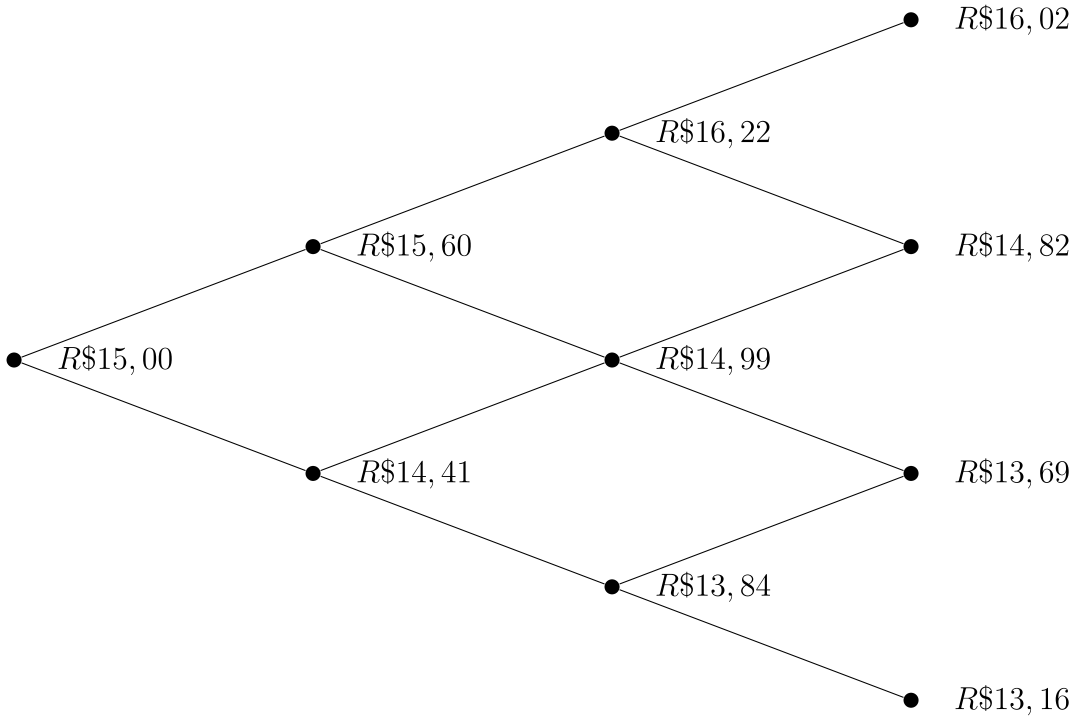
Considere um portfólio formado por Δ unidades de uma ação e uma posição vendida em uma opção de compra europeia, sobre a mesma ação. Além disso, tem-se a informação de que haverá um pagamento de dividendos durante a vida da opção. Denote m a data ex dividendos. Suponha que a árvore binomial terá n períodos, a data ex dividendos será no período i e o preço da ação irá diminuir em uma proporção λ. Desta forma, é necessário analisar a árvore binomial em duas etapas: os preços da ação antes e depois da data ex dividendo. Para o primeiro caso, não há necessidade de mudanças na análise, pois é o mesmo caso estudado anteriormente e o preço da ação permanece dado por $S_0 u^j d^{i-j}$, com $j \in \{1, ..., m-1\}$. No entanto, no caso em que existirá alteração no preço da ação, o valor será dado por $S_0 u^j d^{i-j}(1-\lambda)$, com $j \in \{m, ..., n\}$. Observe a imagem abaixo da árvore binomial com três períodos, supondo que a data ex coincide com o segundo período da árvore.



Desta forma, depois da construção da árvore binomial o processo para encontrar o preço da opção continua o mesmo para o caso em que não há o pagamento de dividendos.

Exemplo 5.4.1. *Considere um portfólio composto por 10 ações e uma posição vendida de uma opção de compra europeia, com vencimento para daqui a 1 ano e com preço de exercício de R\$15,50. Além do mais, seja 3% a.a. a taxa de juros e R\$15,00 o preço atual da ação subjacente, com volatilidade de 8%. Suponha que se tem a informação de que será paga uma quantia em dividendos, com data ex dividendo para daqui 8 meses, alterando 5% o preço da ação. O objetivo do exemplo é encontrar o valor justo para o preço da opção, através do modelo binomial de precificação de ativos.*

Assim, como nos outros casos, o primeiro passo é construir a árvore binomial com os possíveis valores para o preço da ação, neste caso com 3 períodos. Calculando u *e* d *conforme as equações dadas tem-se* $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{0,08\sqrt{\frac{3}{12}}} = e^{0,04} = 1,040$ *e* $d = \dfrac{1}{1,040} = 0,961$. *A árvore binomial desejada possui 3 períodos e com a informação de que daqui a 8 meses será a data ex dividendos, segue que o preço da ação só será alterada no terceiro período. Desta forma, para os primeiros dois períodos, o cálculo segue normal. Obtendo então os seguintes valores:* $S_0 = R\$15$; $S_0u = R\$15,60$; $S_0d = R\$14,41$; $S_0u^2 = R\$16,22$; $S_0ud = R\$14,99$ *e* $S_0d^2 = R\$13,84$. *Para o último período, basta utilizar a equação* $S_0u^jd^{i-j}(1-\lambda)$ *apresentada anteriormente, logo obtém-se* $S_0u^3(1-0,05) = R\$16,86(1-0,05) = R\$16,02$; $S_0u^2d(1-0,05) = R\$14,82$; $S_0ud^2(1-0,05) = R\$13,69$ *e* $S_0ud^3(1-0,05) = R\$13,16$. *Segue abaixo a árvore binomial com os possíveis preços da ação.*



Agora basta verificar o payoff da opção. Note que, no último período, o único caso em que vale a pena exercer a opção é quando o valor da ação for R\$16,02, obtendo um lucro de $R\$16,02 - R\$15,50 = R\$0,52$ *por ação. Agora, basta encontrar o valor de* p*, dado pela equação* $p = \dfrac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$*. Então,*

$$p = \frac{e^{0,03 \cdot 0,25} - 0,961}{1,040 - 0,961} =$$

$$p = \frac{1,007 - 0,961}{0,079} = 0,588.$$

Logo, tem-se $f_{uu} = e^{-r\delta t}[p \cdot R\$0,52 + (1-p) \cdot R\$0] = e^{-0,03 \cdot 0,25}[0,588 \cdot R\$0,52] = 0,992[R\$0,305] = R\$0,303$*,* $f_{ud} = e^{-r\delta t}[p \cdot R\$0 + (1-p) \cdot R\$0] = 0$*;* $f_{dd} = 0,992[p \cdot R\$0 + (1-p) \cdot R\$0] = 0$*;* $f_u = 0,992[0,588 \cdot R\$0,303 + (1-p) \cdot R\$0] = R\$0,176$*;* $f_d = 0,992[p \cdot R\$0 + (1-p) \cdot R\$0] = 0$ *e* $f = 0,992[0,588 \cdot R\$0,176 + (1-p) \cdot R\$0] = R\$0,103$*. Desta forma, o preço justo da opção é de R\$0,10, aproximadamente.*

6 Aplicação

O primeiro passo para a aplicação do modelo binomial foi coletar os dados históricos de uma ação, fornecidos pelo site Yahoo Finance. A empresa escolhida foi a Ambev e os dados observados de ABEV3 foram de 08/04/2019 até 03/05/2019.

Preliminarmente, é necessário estabelecer os parâmetros necessários que são o preço da ação (S_0), preço(s) de exercício da(s) opção(ões) ($X_1, X_2, ...$), taxa de juros (r), número de passos da árvore binomial (n), volatilidade (σ) e vencimento(s) da(s) opção(ões) ($T_1, T_2, ...$). Em seguida, são determinadas as equações utilizadas no modelo binomial, que são $\delta t = \dfrac{T}{n}$, fator movimento de alta ($u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$), fator movimento de baixa $\left(d = \dfrac{1}{u}\right)$, probabilidade de alta $\left(p = \dfrac{e^{r\delta t} - d}{u - d}\right)$ e probabilidade de baixa $(1 - p)$. Independente da estratégia utilizada, ao optar por usar o modelo binomial de precificação de ativos, é preciso construir a árvore binomial, contendo os possíveis valores para o preço do ativo subjacente. Para encontrar a volatilidade da ação, σ, foram utilizados os preços de fechamento da ação disponíveis no site Yahoo Finance. Assim, foi necessário primeiro encontrar a variação do preço da ação, fornecido pela divisão entre o preço no período i e o preço no período $i + 1$. Após isso, foi calculado o log-retorno deste período, ou seja, $\ln\left(\dfrac{r_i}{r_{i+1}}\right)$, com r_i o retorno encontrado do período i. O desvio padrão é calculado automaticamente pelo Excel ao inserir o comando "=desvpad"e selecionar o período de tempo desejado. Por fim, basta anualizar a volatilidade.

A construção da árvore binomial é realizada a partir de uma sentença condicional. O processo realizado foi inicialmente colocar o preço atual da ação e inserir um número qualquer nas extremidades inferiores e superiores da árvore, como na Figura 6.0.1. Suponha que o preço atual da ação, S_0, está inserido na célula A1. Serão dadas as seguintes sentenças condicionais, escritas na célula B2: se as células A1 e A2 estiverem vazias, então B2 permanece vazia; se A2 estiver vazia e A1 não estiver vazia, então tem-se um movimento de baixa e B2 é dado por $A1 \cdot d = S_0 d$; se tanto A1 quanto A2 não forem vazios, então tem-se um movimento de alta e B2 é dado por $A2 \cdot u$. Escrevendo na linguagem do Excel, tem-se "=SE(A2=; SE(A1=; ; A1*d); A2*u)". Agora, basta fixar as operações e estender para as demais células.

O próximo passo é construir a árvore com os preços da(s) opção(ões). O procedimento é semelhante ao realizado para a construção do árvore binomial, no entanto, para o preço justo da opção o procedimento é retrógrado. Após a construção da árvore com os possíveis preços do ativo subjacente, é preciso calcular o payoff da opção, dado por $\max(S_T - X, 0)$ ou $\max(X - S_T, 0)$. Suponha que os payoffs estão nas células C1,

R$ 15,00	R$ 1,00	R$ 1,00	R$ 1,00	R$ 1,00	R$ 1,00	R$ 1,00	R$ 1,00
	R$ 1,00						
		R$ 1,00					
			R$ 1,00				
				R$ 1,00			
					R$ 1,00		
						R$ 1,00	
							R$ 1,00

Figura 6.0.1 – Árvore Binomial

C2 e C3. Então, serão dadas as seguintes sentenças condicionais, escritas na célula B2: se C3 está vazia, então B2 fica vazia; se C3 não está vazia, então B2 será dada por $e^{-r\delta t}[p \cdot C2 + (1-p) \cdot C3]$. Escrevendo na linguagem do Excel, tem-se, ”=SE(C3=;;EXP(-rδt)*(p*C2 + (1-p)C3)”. Agora, basta fixar as operações e estender para as demais células.

Por fim, para aplicar o modelo binomial, suponha que hoje é o dia 06/05/2019. Assim, foram observados os valores de fechamento da ação dos últimos 30 dias e calculada a volatilidade, conforme os passos explicados acima. Para anualiza-la, basta multiplicar o resultado encontrado por $\sqrt{12}$, já que um ano possui 12 meses. Assim, a volatilidade encontrada foi de $\sigma = 14,46\%$. O preço da ação no dia 06/05/2019 é de R$17,30, logo, $S_0 = R\$17,30$. Relembrando que o payoff de uma opção de compra europeia é $\max(S_T - X, 0)$ e de uma opção de venda europeia é $\max(X - S_T, 0)$.

6.1 Spread de Alta

O spread de alta consiste em comprar e vender duas opções de compra europeias sobre uma mesma ação e com mesmo vencimento. Por exemplo, um investidor decide utilizar esta estratégia e simultaneamente, compra uma opção de compra europeia com vencimento para 6 meses e preço de exercício $X_1 = R\$18,05$, e vende uma opção de compra europeia com vencimento para daqui 6 meses e com preço de exercício de $X_2 = R\$18,55$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, tem-se os valores exibidos na Figura 6.1.1 para o spread de alta.

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos 6 períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.1.2.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo de cada opção utilizada na estratégia spread de alta. Tem-se então que para a opção de compra europeia comprada, com $X_1 = R\$18,05$, o preço justo é de $f_1 = R\$0,62$.

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R$ 17,30
Preço de Exercício	X_1	R$ 18,05
Preço de Exercício	X_2	R$ 18,55
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T	0,5
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,016666667
Fator de movimento de alta	u	1,018843112
Fator de movimento de baixa	d	0,981505384
Probabilidade de alta	p	0,524363354
Probabilidade de baixa	1-p	0,475636646

Figura 6.1.1 – Valores Spread de Alta

Enquanto que para a opção de compra europeia vendida, com $X_2 = R\$18,55$, o preço justo é de $f_2 = R\$0,43$. Para os payoffs referente aos preços das opções, tem-se que como foi comprado uma opção de compra europeia com preço justo de R\$0,62 e vendido uma opção de compra europeia com preço justo de R\$ 0,43, o payoff para os preços das opções é de $-R\$0,62+R\$0,43 = -R\$0,19$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 1, observa-se que para os preços da ação de R\$ 30,29 até R\$ 18,64 (14 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.1.1, o payoff será de $X_2 - X_1 = R\$18,55 - R\$18,05 = R\$0,50$. Para os demais casos, segue que não terá payoff, pois não é vantajoso exercer as opções. A Tabela 9 apresenta os possíveis payoffs. Utilizando o site Yahoo Finance para verificar o preço da ação no vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de $S_T = R\$17,71$. Logo, o payoff total do investidor foi de $R\$0,00 - R\$0,19 = -R\$0,19$, ou seja, um prejuízo de R\$0,19.

Preço da ação	Payoff Total
De $R\$30,29$ até $R\$18,64$	$R\$18,55 - R\$18,05 = R\$0,50$
$S_T < R\$18,64$	$R\$0,00$

Tabela 9 – Payoff do Spread de Alta.

6.2 Spread de Baixa

Esta estratégia consiste em comprar e vender duas opções de venda europeias sobre uma mesma ação e com mesmo vencimento. Assim, é necessário estabelecer estes

25	26	27	28	29	30
R$ 27,59	R$ 28,11	R$ 28,64	R$ 29,18	R$ 29,73	R$ 30,29
R$ 26,58	R$ 27,08	R$ 27,59	R$ 28,11	R$ 28,64	R$ 29,18
R$ 25,60	R$ 26,09	R$ 26,58	R$ 27,08	R$ 27,59	R$ 28,11
R$ 24,67	R$ 25,13	R$ 25,60	R$ 26,09	R$ 26,58	R$ 27,08
R$ 23,76	R$ 24,21	R$ 24,67	R$ 25,13	R$ 25,60	R$ 26,09
R$ 22,89	R$ 23,32	R$ 23,76	R$ 24,21	R$ 24,67	R$ 25,13
R$ 22,05	R$ 22,47	R$ 22,89	R$ 23,32	R$ 23,76	R$ 24,21
R$ 21,24	R$ 21,64	R$ 22,05	R$ 22,47	R$ 22,89	R$ 23,32
R$ 20,47	R$ 20,85	R$ 21,24	R$ 21,64	R$ 22,05	R$ 22,47
R$ 19,72	R$ 20,09	R$ 20,47	R$ 20,85	R$ 21,24	R$ 21,64
R$ 18,99	R$ 19,35	R$ 19,72	R$ 20,09	R$ 20,47	R$ 20,85
R$ 18,30	R$ 18,64	R$ 18,99	R$ 19,35	R$ 19,72	R$ 20,09
R$ 17,63	R$ 17,96	R$ 18,30	R$ 18,64	R$ 18,99	R$ 19,35
R$ 16,98	R$ 17,30	R$ 17,63	R$ 17,96	R$ 18,30	R$ 18,64
R$ 16,36	R$ 16,67	R$ 16,98	R$ 17,30	R$ 17,63	R$ 17,96
R$ 15,76	R$ 16,06	R$ 16,36	R$ 16,67	R$ 16,98	R$ 17,30
R$ 15,18	R$ 15,47	R$ 15,76	R$ 16,06	R$ 16,36	R$ 16,67
R$ 14,62	R$ 14,90	R$ 15,18	R$ 15,47	R$ 15,76	R$ 16,06
R$ 14,09	R$ 14,35	R$ 14,62	R$ 14,90	R$ 15,18	R$ 15,47
R$ 13,57	R$ 13,83	R$ 14,09	R$ 14,35	R$ 14,62	R$ 14,90
R$ 13,07	R$ 13,32	R$ 13,57	R$ 13,83	R$ 14,09	R$ 14,35
R$ 12,60	R$ 12,83	R$ 13,07	R$ 13,32	R$ 13,57	R$ 13,83
R$ 12,13	R$ 12,36	R$ 12,60	R$ 12,83	R$ 13,07	R$ 13,32
R$ 11,69	R$ 11,91	R$ 12,13	R$ 12,36	R$ 12,60	R$ 12,83
R$ 11,26	R$ 11,47	R$ 11,69	R$ 11,91	R$ 12,13	R$ 12,36
R$ 10,85	R$ 11,05	R$ 11,26	R$ 11,47	R$ 11,69	R$ 11,91
	R$ 10,65	R$ 10,85	R$ 11,05	R$ 11,26	R$ 11,47
		R$ 10,45	R$ 10,65	R$ 10,85	R$ 11,05
			R$ 10,26	R$ 10,45	R$ 10,65
				R$ 10,07	R$ 10,26
					R$ 9,88

Figura 6.1.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Spread de Alta

parâmetros, informando os valores coletados. Um investidor decide utilizar esta estratégia e simultaneamente, compra uma opção de venda europeia com vencimento para 6 meses e preço de exercício $X_1 = R\$18,60$ e vende uma opção de venda europeia com vencimento para daqui 6 meses e com preço de exercício de $X_2 = R\$18,13$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, tem-se os valores exibidos na Figura 6.2.1 para o spread de baixa.

Perceba que os valores de u, d, p e $1-p$ são os mesmos da estratégia spread de alta, pois os parâmetros r, σ e δt são os mesmos nos dois casos. Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.2.2. Nos quais, serão os mesmos do caso anterior, pelo mesmo motivo já apresentado, os parâmetros

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R$ 17,30
Preço de Exercício	X_1	R$ 18,60
Preço de Exercício	X_2	R$ 18,13
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T	0,5
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,016666667
Fator de movimento de alta	u	1,018843112
Fator de movimento de baixa	d	0,981505384
Probabilidade de alta	p	0,524363354
Probabilidade de baixa	1-p	0,475636646

Figura 6.2.1 – Valores Spread de Baixa

utilizados são iguais.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo de cada opção utilizada na estratégia spread de baixa. Tem-se então que para a opção de venda europeia comprada, com $X_1 = R\$18,60$, o preço justo é de $f_1 = R\$1,12$. Enquanto que para a opção de venda europeia vendida, com $X_2 = R\$18,13$, o preço justo é de $f_2 = R\$0,84$. Assim, como foi comprado uma opção de venda europeia com preço justo de R\$1,12 e vendido uma opção de venda europeia com preço justo de R\$ 0,84, segue que os payoffs referente aos preços das opções é de $-R\$1,12 + R\$0,84 = -R\$0,28$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 2, observa-se que para os preços da ação de R\$ 30,29 até R\$ 18,64 (14 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.2.2, a opção não será exercida, logo não possui recompensa para o investidor. Em nenhum dos casos, S_T satisfaz a inequação $X_1 > S_T > X_2$, logo não precisa ser verificado. Para $S_T \leq X_2$, ou seja, para os possíveis preços da ação de R\$ 17,96, até R\$ 9,88, tem-se que o payoff é de $X_1 - X_2 = R\$18,60 - R\$18,13 = R\$0,47$. A Tabela 10 apresenta os possíveis payoffs. Utilizando o site Yahoo Finance para verificar o preço da ação no vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de $S_T = R\$17,71$. Logo, o payoff total do investidor foi de $R\$0,47 - R\$0,28 = R\$0,19$, ou seja, um lucro de R\$0,19.

Preço da ação	Payoff Total
De R\$30,29 até R\$18,64	$R\$0,00$
De R\$17,96, até R\$9,88	$R\$18,60 - R\$18,13 = R\$0,47$

Tabela 10 – Payoff do Spread de Baixa.

25	26	27	28	29	30
R$ 27,59	R$ 28,11	R$ 28,64	R$ 29,18	R$ 29,73	R$ 30,29
R$ 26,58	R$ 27,08	R$ 27,59	R$ 28,11	R$ 28,64	R$ 29,18
R$ 25,60	R$ 26,09	R$ 26,58	R$ 27,08	R$ 27,59	R$ 28,11
R$ 24,67	R$ 25,13	R$ 25,60	R$ 26,09	R$ 26,58	R$ 27,08
R$ 23,76	R$ 24,21	R$ 24,67	R$ 25,13	R$ 25,60	R$ 26,09
R$ 22,89	R$ 23,32	R$ 23,76	R$ 24,21	R$ 24,67	R$ 25,13
R$ 22,05	R$ 22,47	R$ 22,89	R$ 23,32	R$ 23,76	R$ 24,21
R$ 21,24	R$ 21,64	R$ 22,05	R$ 22,47	R$ 22,89	R$ 23,32
R$ 20,47	R$ 20,85	R$ 21,24	R$ 21,64	R$ 22,05	R$ 22,47
R$ 19,72	R$ 20,09	R$ 20,47	R$ 20,85	R$ 21,24	R$ 21,64
R$ 18,99	R$ 19,35	R$ 19,72	R$ 20,09	R$ 20,47	R$ 20,85
R$ 18,30	R$ 18,64	R$ 18,99	R$ 19,35	R$ 19,72	R$ 20,09
R$ 17,63	R$ 17,96	R$ 18,30	R$ 18,64	R$ 18,99	R$ 19,35
R$ 16,98	R$ 17,30	R$ 17,63	R$ 17,96	R$ 18,30	R$ 18,64
R$ 16,36	R$ 16,67	R$ 16,98	R$ 17,30	R$ 17,63	R$ 17,96
R$ 15,76	R$ 16,06	R$ 16,36	R$ 16,67	R$ 16,98	R$ 17,30
R$ 15,18	R$ 15,47	R$ 15,76	R$ 16,06	R$ 16,36	R$ 16,67
R$ 14,62	R$ 14,90	R$ 15,18	R$ 15,47	R$ 15,76	R$ 16,06
R$ 14,09	R$ 14,35	R$ 14,62	R$ 14,90	R$ 15,18	R$ 15,47
R$ 13,57	R$ 13,83	R$ 14,09	R$ 14,35	R$ 14,62	R$ 14,90
R$ 13,07	R$ 13,32	R$ 13,57	R$ 13,83	R$ 14,09	R$ 14,35
R$ 12,60	R$ 12,83	R$ 13,07	R$ 13,32	R$ 13,57	R$ 13,83
R$ 12,13	R$ 12,36	R$ 12,60	R$ 12,83	R$ 13,07	R$ 13,32
R$ 11,69	R$ 11,91	R$ 12,13	R$ 12,36	R$ 12,60	R$ 12,83
R$ 11,26	R$ 11,47	R$ 11,69	R$ 11,91	R$ 12,13	R$ 12,36
R$ 10,85	R$ 11,05	R$ 11,26	R$ 11,47	R$ 11,69	R$ 11,91
	R$ 10,65	R$ 10,85	R$ 11,05	R$ 11,26	R$ 11,47
		R$ 10,45	R$ 10,65	R$ 10,85	R$ 11,05
			R$ 10,26	R$ 10,45	R$ 10,65
				R$ 10,07	R$ 10,26
					R$ 9,88

Figura 6.2.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Spread de Baixa

6.3 Butterfly Spread

A estratégia Butterfly Spread, mais especificadamente borboleta comprada, envolve a compra de uma opção de compra europeia com um preço de exercício relativamente baixo (X_1), compra de uma opção de compra europeia com um preço de exercício relativamente alto (X_3) e venda de duas opções de compra europeia , ambas com preço de exercício X_2, com $X_1 < X_2 < X_3$. Desta forma, ao inserir os parâmetros, tem-se quatro opções e três preços de exercício. Um investidor decide utilizar esta estratégia e compra uma opção de compra europeia com vencimento para 1 ano e preço de exercício $X_1 = R\$16,05$, vende uma opção de compra europeia com vencimento para daqui 1 ano e com preço de exercício de $X_3 = R\$18,17$ e por fim, vende duas opções de compra europeias com preço de exercício de $X_2 = R\$17,45$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, tem-se os valores exibidos na Figura 6.3.1 para a estratégia borboleta comprada.

Parâmetros			
		Valor	
Preço da Ação	S_0	R$	17,30
Preço de Exercício	X_1	R$	16,05
Preço de Exercício	X_2	R$	17,45
Preço de Exercício	X_3	R$	18,17
Taxa de juros (anual)	r	6,50%	
Volatilidade	σ	14,46%	
Vencimento (anos)	T	0,833333333	
Número de passos	n	30	

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,027777778
Fator de movimento de alta	u	1,024392752
Fator de movimento de baixa	d	0,976188086
Probabilidade de alta	p	0,531465159
Probabilidade de baixa	1-p	0,468534841

Figura 6.3.1 – Valores Borboleta Comprada

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.3.2.

Agora, basta construir quatro árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia. Tem-se então que para a opção de compra europeia comprada, com $X_1 = R\$16,05$, o preço justo é de $f_1 = R\$2,29$. Para as opções de compra europeias vendidas, com $X_2 = R\$17,45$, o preço justo é de $f_2 = R\$0,94$. Enquanto que, para a outra opção de compra comprada, com $X_3 = R\$18,17$, segue que o preço justo é de $R\$1,13$. Assim, como foram compradas duas opções de compra europeias com preço justo de R\$2,29 e R\$0,94 e vendido duas opções de compra europeias com preço justo de R\$ 1,33, o total referente apenas aos preços das opções é de $-R\$2,29 + 2 \cdot R\$1,33 - R\$0,94 = -R\$0,57$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 3, observa-se que para os preços da ação de R\$ 35,65 até R\$ 19,05 (14 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.3.2, o payoff é de $2X_2 - X_1 - X_3 = 2 \cdot R\$17,45 - R\$16,05 - R\$18,17 = R\$0,68$. Para R\$ 18,15, o payoff é de $2 \cdot X_2 - X_1 - S_T = 2 \cdot R\$17,45 - R\$16,05 - R\$18,15 = R\$0,70$. Para R\$ 17,30 e R\$ 16,49, segue que o payoff é de $S_T - X_1 = R\$17,30 - R\$16,05 = R\$1,25$ e $S_T - X_1 = R\$16,49 - R\$16,05 = R\$0,44$, respectivamente. Por fim, para os casos em que

25	26	27	28	29	30
R$ 31,60	R$ 32,37	R$ 33,16	R$ 33,97	R$ 34,80	R$ 35,65
R$ 30,11	R$ 30,85	R$ 31,60	R$ 32,37	R$ 33,16	R$ 33,97
R$ 28,70	R$ 29,40	R$ 30,11	R$ 30,85	R$ 31,60	R$ 32,37
R$ 27,35	R$ 28,01	R$ 28,70	R$ 29,40	R$ 30,11	R$ 30,85
R$ 26,06	R$ 26,70	R$ 27,35	R$ 28,01	R$ 28,70	R$ 29,40
R$ 24,83	R$ 25,44	R$ 26,06	R$ 26,70	R$ 27,35	R$ 28,01
R$ 23,67	R$ 24,24	R$ 24,83	R$ 25,44	R$ 26,06	R$ 26,70
R$ 22,55	R$ 23,10	R$ 23,67	R$ 24,24	R$ 24,83	R$ 25,44
R$ 21,49	R$ 22,01	R$ 22,55	R$ 23,10	R$ 23,67	R$ 24,24
R$ 20,48	R$ 20,98	R$ 21,49	R$ 22,01	R$ 22,55	R$ 23,10
R$ 19,52	R$ 19,99	R$ 20,48	R$ 20,98	R$ 21,49	R$ 22,01
R$ 18,60	R$ 19,05	R$ 19,52	R$ 19,99	R$ 20,48	R$ 20,98
R$ 17,72	R$ 18,15	R$ 18,60	R$ 19,05	R$ 19,52	R$ 19,99
R$ 16,89	R$ 17,30	R$ 17,72	R$ 18,15	R$ 18,60	R$ 19,05
R$ 16,09	R$ 16,49	R$ 16,89	R$ 17,30	R$ 17,72	R$ 18,15
R$ 15,34	R$ 15,71	R$ 16,09	R$ 16,49	R$ 16,89	R$ 17,30
R$ 14,61	R$ 14,97	R$ 15,34	R$ 15,71	R$ 16,09	R$ 16,49
R$ 13,93	R$ 14,27	R$ 14,61	R$ 14,97	R$ 15,34	R$ 15,71
R$ 13,27	R$ 13,60	R$ 13,93	R$ 14,27	R$ 14,61	R$ 14,97
R$ 12,65	R$ 12,96	R$ 13,27	R$ 13,60	R$ 13,93	R$ 14,27
R$ 12,05	R$ 12,35	R$ 12,65	R$ 12,96	R$ 13,27	R$ 13,60
R$ 11,48	R$ 11,76	R$ 12,05	R$ 12,35	R$ 12,65	R$ 12,96
R$ 10,94	R$ 11,21	R$ 11,48	R$ 11,76	R$ 12,05	R$ 12,35
R$ 10,43	R$ 10,68	R$ 10,94	R$ 11,21	R$ 11,48	R$ 11,76
R$ 9,94	R$ 10,18	R$ 10,43	R$ 10,68	R$ 10,94	R$ 11,21
R$ 9,47	R$ 9,70	R$ 9,94	R$ 10,18	R$ 10,43	R$ 10,68
	R$ 9,25	R$ 9,47	R$ 9,70	R$ 9,94	R$ 10,18
		R$ 9,03	R$ 9,25	R$ 9,47	R$ 9,70
			R$ 8,81	R$ 9,03	R$ 9,25
				R$ 8,60	R$ 8,81
					R$ 8,40

Figura 6.3.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Borboleta Comprada

$S_T \leq X_1$, ou seja, para quando o valor da ação for de R$ 15,71 até R$ 8,40 (12 últimas linhas) as opções não serão exercidas, logo não haverá lucro nem prejuízo. A Tabela 11 apresenta os possíveis payoffs. Utilizando o site Yahoo Finance para verificar o preço da ação no vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de $S_T = R\$15,32$. Logo, o payoff total do investidor foi de $-R\$0,57$, ou seja, um prejuízo de R$0,57.

Preço da ação	Payoff Total
R$35,65 até R$ 19,05	R$0,68
R$18,15	R$0,70
R$17,30	R$1,25
R$16,49	R$0,44
$S_T < R\$16,05$	R$0,00

Tabela 11 – Payoff do Borboleta.

6.4 Spread de Calendário

Spread de Calendário consiste em adquirir opções com preços de exercício iguais, mas vencimentos diferentes. Considere um investidor que decide optar por essa estratégia, logo ele compra uma opção de compra europeia com preço de exercício de $X_1 = R\$17,58$, com vencimento para daqui 3 meses e vende uma opção de compra europeia com mesmo preço de exercício, ou seja, $X_2 = X_1 = R\$17,58$ e com vencimento para daqui 3,2 meses. Denote a opção com vencimento de 3 meses por Opção 1 e a opção com vencimento de 3,2 meses por Opção 2. Perceba que neste caso, teremos dois valores para δt, pois o vencimento das opções são diferentes. Logo, têm-se dois valores para u, d, p e $1-p$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, tem-se os valores exibidos na Figura 6.4.1 para a estratégia spread calendário.

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R$ 17,30
Preço de Exercício	X_1 = X_2	R$ 17,58
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T_1	0,25
Vencimento (anos)	T_2	0,266666667
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt_1	0,008333333
Fator de movimento de alta	u_1	1,01328762
Fator de movimento de baixa	d_1	0,986886626
Probabilidade de alta	p_1	0,517222481
Probabilidade de baixa	1 - p_1	0,482777519
Delta t	δt_2	0,008888889
Fator de movimento de alta	u_2	1,013726372
Fator de movimento de baixa	d_2	0,98645949
Probabilidade de alta	p_2	0,517787647
Probabilidade de baixa	1 - p_2	0,482212353

Figura 6.4.1 – Valores Spread Calendário

Desta forma, será necessário construir duas árvores binomiais para cada valor de u e d com um total de 30 passos. A Figura 6.4.2 exibe as últimas seis colunas da árvore binomial com os parâmetros da Opção 1 e a Figura 6.4.3 exibe as últimas seis colunas da árvore binomial com os parâmetros da Opção 2.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço

25	26	27	28	29	30
R$ 24,06	R$ 24,38	R$ 24,71	R$ 25,04	R$ 25,37	R$ 25,71
R$ 23,44	R$ 23,75	R$ 24,06	R$ 24,38	R$ 24,71	R$ 25,04
R$ 22,83	R$ 23,13	R$ 23,44	R$ 23,75	R$ 24,06	R$ 24,38
R$ 22,23	R$ 22,53	R$ 22,83	R$ 23,13	R$ 23,44	R$ 23,75
R$ 21,65	R$ 21,94	R$ 22,23	R$ 22,53	R$ 22,83	R$ 23,13
R$ 21,09	R$ 21,37	R$ 21,65	R$ 21,94	R$ 22,23	R$ 22,53
R$ 20,54	R$ 20,81	R$ 21,09	R$ 21,37	R$ 21,65	R$ 21,94
R$ 20,00	R$ 20,27	R$ 20,54	R$ 20,81	R$ 21,09	R$ 21,37
R$ 19,48	R$ 19,74	R$ 20,00	R$ 20,27	R$ 20,54	R$ 20,81
R$ 18,97	R$ 19,23	R$ 19,48	R$ 19,74	R$ 20,00	R$ 20,27
R$ 18,48	R$ 18,73	R$ 18,97	R$ 19,23	R$ 19,48	R$ 19,74
R$ 18,00	R$ 18,24	R$ 18,48	R$ 18,73	R$ 18,97	R$ 19,23
R$ 17,53	R$ 17,76	R$ 18,00	R$ 18,24	R$ 18,48	R$ 18,73
R$ 17,07	R$ 17,30	R$ 17,53	R$ 17,76	R$ 18,00	R$ 18,24
R$ 16,63	R$ 16,85	R$ 17,07	R$ 17,30	R$ 17,53	R$ 17,76
R$ 16,20	R$ 16,41	R$ 16,63	R$ 16,85	R$ 17,07	R$ 17,30
R$ 15,77	R$ 15,98	R$ 16,20	R$ 16,41	R$ 16,63	R$ 16,85
R$ 15,36	R$ 15,57	R$ 15,77	R$ 15,98	R$ 16,20	R$ 16,41
R$ 14,96	R$ 15,16	R$ 15,36	R$ 15,57	R$ 15,77	R$ 15,98
R$ 14,57	R$ 14,77	R$ 14,96	R$ 15,16	R$ 15,36	R$ 15,57
R$ 14,19	R$ 14,38	R$ 14,57	R$ 14,77	R$ 14,96	R$ 15,16
R$ 13,82	R$ 14,01	R$ 14,19	R$ 14,38	R$ 14,57	R$ 14,77
R$ 13,46	R$ 13,64	R$ 13,82	R$ 14,01	R$ 14,19	R$ 14,38
R$ 13,11	R$ 13,29	R$ 13,46	R$ 13,64	R$ 13,82	R$ 14,01
R$ 12,77	R$ 12,94	R$ 13,11	R$ 13,29	R$ 13,46	R$ 13,64
R$ 12,44	R$ 12,60	R$ 12,77	R$ 12,94	R$ 13,11	R$ 13,29
	R$ 12,27	R$ 12,44	R$ 12,60	R$ 12,77	R$ 12,94
		R$ 12,11	R$ 12,27	R$ 12,44	R$ 12,60
			R$ 11,95	R$ 12,11	R$ 12,27
				R$ 11,80	R$ 11,95
					R$ 11,64

Figura 6.4.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Spread Calendário (Opção 1)

justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia. Tem-se então que para a opção de compra comprada o preço justo é de $f_1 = R\$0,50$. Enquanto que, a Opção 2 possui preço justo de $f_2 = R\$0,54$, assim, analisando apenas os preços das opções, o total é de $-R\$0,50 + R\$0,54 = R\$0,04$. Para os payoffs, é necessário primeiro verificar para a Opção 1, pois o vencimento é menor. Desta forma, tomando como base a Tabela 4, observa-se que para os preços da ação de R$ 25,71 até R$ 17,76 (15 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.4.2, os payoffs serão de, considerando S_{T_1} o preço da ação no vencimento da Opção 1, $X - S_{T_1}$. Para os demais casos, a Opção 1 não será exercida. A Tabela 12 apresenta os possíveis payoffs.

Agora, verificando os preços para a Opção 2, tem-se que nos casos R$ 26,04 até R$ 17,79 (15 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.4.3, os payoffs serão de, considerando S_{T_2} o preço da ação no vencimento da Opção 2, $S_{T_2} - X$. Para os demais casos, a Opção 2 não será exercida, logo não haverá lucro nem prejuízo. A Tabela 13 apresenta os

25	26	27	28	29	30
R$ 24,33	R$ 24,66	R$ 25,00	R$ 25,34	R$ 25,69	R$ 26,04
R$ 23,67	R$ 24,00	R$ 24,33	R$ 24,66	R$ 25,00	R$ 25,34
R$ 23,04	R$ 23,36	R$ 23,68	R$ 24,01	R$ 24,34	R$ 24,67
R$ 22,42	R$ 22,73	R$ 23,04	R$ 23,36	R$ 23,68	R$ 24,01
R$ 21,82	R$ 22,12	R$ 22,42	R$ 22,73	R$ 23,04	R$ 23,36
R$ 21,23	R$ 21,53	R$ 21,82	R$ 22,12	R$ 22,42	R$ 22,73
R$ 20,66	R$ 20,95	R$ 21,23	R$ 21,53	R$ 21,82	R$ 22,12
R$ 20,12	R$ 20,39	R$ 20,67	R$ 20,96	R$ 21,24	R$ 21,54
R$ 19,58	R$ 19,84	R$ 20,12	R$ 20,39	R$ 20,67	R$ 20,96
R$ 19,05	R$ 19,31	R$ 19,58	R$ 19,84	R$ 20,12	R$ 20,39
R$ 18,54	R$ 18,79	R$ 19,05	R$ 19,31	R$ 19,58	R$ 19,84
R$ 18,04	R$ 18,29	R$ 18,54	R$ 18,79	R$ 19,05	R$ 19,31
R$ 17,55	R$ 17,79	R$ 18,04	R$ 18,29	R$ 18,54	R$ 18,79
R$ 17,08	R$ 17,31	R$ 17,55	R$ 17,79	R$ 18,04	R$ 18,29
R$ 16,62	R$ 16,85	R$ 17,08	R$ 17,31	R$ 17,55	R$ 17,79
R$ 16,17	R$ 16,40	R$ 16,62	R$ 16,85	R$ 17,08	R$ 17,31
R$ 15,74	R$ 15,96	R$ 16,17	R$ 16,40	R$ 16,62	R$ 16,85
R$ 15,32	R$ 15,53	R$ 15,74	R$ 15,96	R$ 16,17	R$ 16,40
R$ 14,90	R$ 15,11	R$ 15,32	R$ 15,53	R$ 15,74	R$ 15,96
R$ 14,50	R$ 14,70	R$ 14,90	R$ 15,11	R$ 15,32	R$ 15,53
R$ 14,11	R$ 14,31	R$ 14,50	R$ 14,70	R$ 14,90	R$ 15,11
R$ 13,73	R$ 13,92	R$ 14,11	R$ 14,31	R$ 14,50	R$ 14,70
R$ 13,36	R$ 13,55	R$ 13,73	R$ 13,92	R$ 14,11	R$ 14,31
R$ 13,00	R$ 13,18	R$ 13,36	R$ 13,55	R$ 13,73	R$ 13,92
R$ 12,65	R$ 12,83	R$ 13,00	R$ 13,18	R$ 13,36	R$ 13,55
R$ 12,31	R$ 12,48	R$ 12,65	R$ 12,83	R$ 13,00	R$ 13,18
	R$ 12,15	R$ 12,31	R$ 12,48	R$ 12,65	R$ 12,83
		R$ 11,98	R$ 12,15	R$ 12,31	R$ 12,48
			R$ 11,82	R$ 11,98	R$ 12,15
				R$ 11,66	R$ 11,82
					R$ 11,50

Figura 6.4.3 – Árvore Binomial com Preço da Ação Spread Calendário (Opção 2)

possíveis payoffs. Examinando os valores através do site Yahoo Finance tem-se que no dia 06/08/2019 o preço de fechamento da ação foi de R$ 20,48. Assim, segue que o payoff da primeira opção é de $R\$17,58 - R\$20,48 = -R\$2,90$. O preço de fechamento da ação no dia 21/08/2019 foi de R$18,80, correspondente ao vencimento da Opção 2. Então, o payoff da segunda opção é de $R\$18,80 - R\$17,58 = R\$1,22$. Desta forma, o payoff total desta estratégia, considerando estes parâmetros, é de $R\$1,22 - R\$2,90 + R\$0,04 = -R\$1,64$.

6.5 Straddle

Nesta estratégia o investidor compra uma opção de compra e outra opção de venda com os mesmos preços de exercício e datas de vencimento. Considere um investidor que decide optar por essa estratégia, então ele compra uma opção de compra europeia com preço de exercício de $X_1 = R\$18,25$ com vencimento para daqui 5 meses e uma compra uma opção de venda europeia com mesmo preço de exercício, $X_1 = X_2 = R\$18,25$ e com

Preço da ação	Payoff Opção 1
R$25,71	$R\$25,71 - R\$17,58 = R\$8,13$
R$25,04	$R\$25,04 - R\$17,58 = R\$7,46$
R$24,38	$R\$24,38 - R\$17,58 = R\$6,80$
R$23,75	$R\$23,75 - R\$17,58 = R\$6,17$
R$23,13	$R\$23,13 - R\$17,58 = R\$5,55$
R$22,53	$R\$22,53 - R\$17,58 = R\$4,95$
R$21,94	$R\$21,94 - R\$17,58 = R\$4,36$
R$21,37	$R\$21,37 - R\$17,58 = R\$3,79$
R$20,81	$R\$20,81 - R\$17,58 = R\$3,23$
R$20,27	$R\$20,27 - R\$17,58 = R\$2,69$
R$19,74	$R\$19,74 - R\$17,58 = R\$2,16$
R$19,23	$R\$19,23 - R\$17,58 = R\$1,65$
R$18,73	$R\$18,73 - R\$17,58 = R\$1,15$
R$18,24	$R\$18,24 - R\$17,58 = R\$0,66$
R$17,76	$R\$17,76 - R\$17,58 = R\$0,18$

Tabela 12 – Payoff do Calendário Opção 1.

Preço da ação	Payoff Opção 2
R$26,04	$-R\$26,04 + R\$17,58 = R\$8,46$
R$25,34	$-R\$25,34 + R\$17,58 = -R\$7,76$
R$24,67	$-R\$24,67 + R\$17,58 = -R\$7,09$
R$24,01	$-R\$24,01 + R\$17,58 = -R\$6,43$
R$23,36	$-R\$23,36 + R\$17,58 = -R\$5,78$
R$22,73	$-R\$22,73 + R\$17,58 = -R\$5,15$
R$22,12	$-R\$22,12 + R\$17,58 = -R\$4,54$
R$21,54	$-R\$21,54 + R\$17,58 = -R\$3,96$
R$20,96	$-R\$20,96 + R\$17,58 = -R\$3,38$
R$20,39	$-R\$20,39 + R\$17,58 = -R\$2,81$
R$19,84	$-R\$19,84 + R\$17,58 = -R\$2,26$
R$19,31	$-R\$19,31 + R\$17,58 = -R\$1,73$
R$18,79	$-R\$18,79 + R\$17,58 = -R\$1,21$
R$18,29	$-R\$18,29 + R\$17,58 = -R\$0,71$
R$17,79	$-R\$17,79 + R\$17,58 = -R\$0,21$
$S_T < R\$17,79$	$R\$0,00$

Tabela 13 – Payoff do Calendário Opção 2.

vencimento para daqui 5 meses. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, tem-se os valores exibidos na Figura 6.5.1 para a estratégia straddle.

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.5.2.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço

Parâmetros			
		Valor	
Preço da Ação	S_0	R$	17,30
Preço de Exercício	X_1	R$	18,60
Taxa de juros (anual)	r	6,50%	
Volatilidade	σ	14,46%	
Vencimento (anos)	T	0,5	
Número de passos	n	30	

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,016666667
Fator de movimento de alta	u	1,018843112
Fator de movimento de baixa	d	0,981505384
Probabilidade de alta	p	0,524363354
Probabilidade de baixa	1-p	0,475636646

Figura 6.5.1 – Valores Straddle

justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia. Tem-se então que para a opção de compra o preço justo é de $f_1 = R\$0,33$. Enquanto que, a opção de venda possui o preço justo de $f_2 = R\$1,13$, assim, analisando apenas os preços das opções, o total é de $-R\$0,33 - R\$1,13 = -R\$1,46$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 5, observa-se que para os preços da ação de R\$ 28,85 até R\$ 18,52 (14 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.5.2, o payoff da opção de compra será de $S_T - X$. Para os demais casos, a opção de compra não será exercida. A Tabela 14 apresenta os possíveis payoffs. Para a opção de venda, caso o valor da ação for de R\$ 17,90 até R\$ 10,38 os payoffs serão de $X - S_T$. Enquanto para os demais, não haverá vantagem em exercer a opção. A Tabela 15 apresenta os possíveis payoffs. Verificando o preço da ação na data de vencimento da opção (na verdade um dia depois, pois dia 06/10/2019 era domingo), tem-se que o preço de fechamento é de R\$18,87. Assim, o payoff total do investidor é de $R\$18,87 - R\$18,25 - R\$1,46 = -R\$0,84$, ou seja, um prejuízo de R\$0,84.

6.6 Strip

A estratégia constitui em comprar uma opção de compra europeia e duas opções de venda europeias com os mesmos preços de exercício e data de vencimento. Considere um investidor que decide optar por essa estratégia, então ele compra três opções, uma de compra europeia com preço de exercício de $X = R\$18,45$ com vencimento para daqui 7 meses e duas opções de venda europeias com vencimento para daqui 7 meses e com preços de exercício de $X = R\$18,45$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações,

25	26	27	28	29	30
R$ 26,49	R$ 26,94	R$ 27,41	R$ 27,88	R$ 28,36	R$ 28,85
R$ 25,60	R$ 26,04	R$ 26,49	R$ 26,94	R$ 27,41	R$ 27,88
R$ 24,74	R$ 25,17	R$ 25,60	R$ 26,04	R$ 26,49	R$ 26,94
R$ 23,91	R$ 24,33	R$ 24,74	R$ 25,17	R$ 25,60	R$ 26,04
R$ 23,11	R$ 23,51	R$ 23,91	R$ 24,33	R$ 24,74	R$ 25,17
R$ 22,34	R$ 22,72	R$ 23,11	R$ 23,51	R$ 23,91	R$ 24,33
R$ 21,59	R$ 21,96	R$ 22,34	R$ 22,72	R$ 23,11	R$ 23,51
R$ 20,87	R$ 21,23	R$ 21,59	R$ 21,96	R$ 22,34	R$ 22,72
R$ 20,17	R$ 20,51	R$ 20,87	R$ 21,23	R$ 21,59	R$ 21,96
R$ 19,49	R$ 19,83	R$ 20,17	R$ 20,51	R$ 20,87	R$ 21,23
R$ 18,84	R$ 19,16	R$ 19,49	R$ 19,83	R$ 20,17	R$ 20,51
R$ 18,21	R$ 18,52	R$ 18,84	R$ 19,16	R$ 19,49	R$ 19,83
R$ 17,60	R$ 17,90	R$ 18,21	R$ 18,52	R$ 18,84	R$ 19,16
R$ 17,01	R$ 17,30	R$ 17,60	R$ 17,90	R$ 18,21	R$ 18,52
R$ 16,44	R$ 16,72	R$ 17,01	R$ 17,30	R$ 17,60	R$ 17,90
R$ 15,89	R$ 16,16	R$ 16,44	R$ 16,72	R$ 17,01	R$ 17,30
R$ 15,35	R$ 15,62	R$ 15,89	R$ 16,16	R$ 16,44	R$ 16,72
R$ 14,84	R$ 15,10	R$ 15,35	R$ 15,62	R$ 15,89	R$ 16,16
R$ 14,34	R$ 14,59	R$ 14,84	R$ 15,10	R$ 15,35	R$ 15,62
R$ 13,86	R$ 14,10	R$ 14,34	R$ 14,59	R$ 14,84	R$ 15,10
R$ 13,40	R$ 13,63	R$ 13,86	R$ 14,10	R$ 14,34	R$ 14,59
R$ 12,95	R$ 13,17	R$ 13,40	R$ 13,63	R$ 13,86	R$ 14,10
R$ 12,51	R$ 12,73	R$ 12,95	R$ 13,17	R$ 13,40	R$ 13,63
R$ 12,10	R$ 12,30	R$ 12,51	R$ 12,73	R$ 12,95	R$ 13,17
R$ 11,69	R$ 11,89	R$ 12,10	R$ 12,30	R$ 12,51	R$ 12,73
R$ 11,30	R$ 11,49	R$ 11,69	R$ 11,89	R$ 12,10	R$ 12,30
	R$ 11,11	R$ 11,30	R$ 11,49	R$ 11,69	R$ 11,89
		R$ 10,92	R$ 11,11	R$ 11,30	R$ 11,49
			R$ 10,74	R$ 10,92	R$ 11,11
				R$ 10,55	R$ 10,74
					R$ 10,38

Figura 6.5.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Straddle

tem-se os valores exibidos na Figura 6.6.1 para a estratégia straddle.

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.6.2.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia, só será necessário construir duas, pois as duas opções de venda, possuem os mesmos dados, logo os preços destas opções serão iguais. Tem-se então que para a opção de compra o preço justo é de $f_1 = R\$0,57$. Enquanto que para as opções de venda o preço justo é de $f_2 = R\$1,03$, assim, analisando apenas os preços das opções, o total é de $-R\$0,57 - 2 \cdot R\$1,03 = -R\$2,63$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 6, observa-se que para os preços da

Preço da ação	Payoff Opção Compra
R$28,85	$R\$28,85 - R\$18,25 = R\$10,60$
R$27,88	$R\$27,88 - R\$18,25 = R\$9,63$
R$26,94	$R\$26,94 - R\$18,25 = R\$8,69$
R$26,04	$R\$26,04 - R\$18,25 = R\$7,79$
R$25,17	$R\$25,17 - R\$18,25 = R\$6,92$
R$24,33	$R\$24,33 - R\$18,25 = R\$6,08$
R$23,51	$R\$23,51 - R\$18,25 = R\$5,26$
R$22,72	$R\$22,72 - R\$18,25 = R\$4,47$
R$21,96	$R\$21,96 - R\$18,25 = R\$3,71$
R$21,23	$R\$21,23 - R\$18,25 = R\$2,98$
R$20,51	$R\$20,51 - R\$18,25 = R\$2,26$
R$19,83	$R\$19,83 - R\$18,25 = R\$1,58$
R$19,16	$R\$19,16 - R\$18,25 = R\$0,91$
R$18,52	$R\$18,52 - R\$18,25 = R\$0,27$
$S_T < R\$18,52$	$R\$0,00$

Tabela 14 – Payoff do Straddle Opção Compra.

Preço da ação	Payoff Opção Venda
$S_T > R\$17,90$	$R\$0,00$
R$17,90	$R\$18,25 - R\$17,90 = R\$0,35$
R$17,30	$R\$18,25 - R\$17,30 = R\$0,95$
R$16,72	$R\$18,25 - R\$16,72 = R\$1,53$
R$16,16	$R\$18,25 - R\$16,16 = R\$2,09$
R$15,62	$R\$18,25 - R\$15,62 = R\$2,63$
R$15,10	$R\$18,25 - R\$15,10 = R\$3,15$
R$14,59	$R\$18,25 - R\$14,59 = R\$3,66$
R$14,10	$R\$18,25 - R\$14,10 = R\$4,15$
R$13,63	$R\$18,25 - R\$13,63 = R\$4,62$
R$13,17	$R\$18,25 - R\$13,17 = R\$5,08$
R$12,73	$R\$18,25 - R\$12,73 = R\$5,52$
R$12,30	$R\$18,25 - R\$12,30 = R\$5,95$
R$11,89	$R\$18,25 - R\$11,89 = R\$6,36$
R$11,49	$R\$18,25 - R\$11,49 = R\$6,76$
R$11,11	$R\$18,25 - R\$11,11 = R\$7,14$
R$10,74	$R\$18,25 - R\$10,74 = R\$7,51$
R$10,38	$R\$18,25 - R\$10,38 = R\$7,87$

Tabela 15 – Payoff do Straddle Opção Venda.

ação de R$ 31,68 até R$ 18,75 (14 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.6.2, o payoff da opção de compra é de $S_T - X$. Para os demais casos, não será vantajoso exercer a opção e assim, não haverá lucro nem prejuízo. A Tabela 16 apresenta os possíveis payoffs. Para as opções de venda, tem-se que para os preços da ação de R$ 18,01 até R$ 9,45 (17 últimas linhas) o payoff será de $2 \cdot (X - S_T)$. A Tabela 17 apresenta os possíveis

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R$ 17,30
Preço de Exercício	X_1	R$ 18,45
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T	0,583333333
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,019444444
Fator de movimento de alta	u	1,020368163
Fator de movimento de baixa	d	0,980038417
Probabilidade de alta	p	0,526317982
Probabilidade de baixa	1-p	0,473682018

Figura 6.6.1 – Valores Strip

payoffs. Verificando o preço da ação na data de vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de R$ 18,45. Logo, o payoff total foi de -R$2,63 (apenas o que foi gasto com o preço das opções).

Preço da ação	Payoff Opção Compra
R$31,68	$R\$31,68 - R\$18,45 = R\$13,23$
R$30,43	$R\$30,43 - R\$18,45 = R\$11,98$
R$29,22	$R\$29,22 - R\$18,45 = R\$10,77$
R$28,07	$R\$28,07 - R\$18,45 = R\$9,62$
R$26,96	$R\$26,96 - R\$18,45 = R\$8,51$
R$25,89	$R\$25,89 - R\$18,45 = R\$7,44$
R$24,87	$R\$24,87 - R\$18,45 = R\$6,42$
R$23,89	$R\$23,89 - R\$18,45 = R\$5,44$
R$22,94	$R\$22,94 - R\$18,45 = R\$4,49$
R$22,04	$R\$22,04 - R\$18,45 = R\$3,59$
R$21,16	$R\$21,16 - R\$18,45 = R\$2,71$
R$20,33	$R\$20,33 - R\$18,45 = R\$1,88$
R$19,52	$R\$19,52 - R\$18,45 = R\$1,07$
R$18,75	$R\$18,75 - R\$18,45 = R\$0,30$
$S_T < R\$18,75$	$R\$0,00$

Tabela 16 – Payoff do Strip Opção Compra.

25	26	27	28	29	30
R$ 28,64	R$ 29,22	R$ 29,82	R$ 30,43	R$ 31,05	R$ 31,68
R$ 27,51	R$ 28,07	R$ 28,64	R$ 29,22	R$ 29,82	R$ 30,43
R$ 26,42	R$ 26,96	R$ 27,51	R$ 28,07	R$ 28,64	R$ 29,22
R$ 25,38	R$ 25,89	R$ 26,42	R$ 26,96	R$ 27,51	R$ 28,07
R$ 24,37	R$ 24,87	R$ 25,38	R$ 25,89	R$ 26,42	R$ 26,96
R$ 23,41	R$ 23,89	R$ 24,37	R$ 24,87	R$ 25,38	R$ 25,89
R$ 22,48	R$ 22,94	R$ 23,41	R$ 23,89	R$ 24,37	R$ 24,87
R$ 21,60	R$ 22,04	R$ 22,48	R$ 22,94	R$ 23,41	R$ 23,89
R$ 20,74	R$ 21,16	R$ 21,60	R$ 22,04	R$ 22,48	R$ 22,94
R$ 19,92	R$ 20,33	R$ 20,74	R$ 21,16	R$ 21,60	R$ 22,04
R$ 19,14	R$ 19,52	R$ 19,92	R$ 20,33	R$ 20,74	R$ 21,16
R$ 18,38	R$ 18,75	R$ 19,14	R$ 19,52	R$ 19,92	R$ 20,33
R$ 17,65	R$ 18,01	R$ 18,38	R$ 18,75	R$ 19,14	R$ 19,52
R$ 16,95	R$ 17,30	R$ 17,65	R$ 18,01	R$ 18,38	R$ 18,75
R$ 16,28	R$ 16,62	R$ 16,95	R$ 17,30	R$ 17,65	R$ 18,01
R$ 15,64	R$ 15,96	R$ 16,28	R$ 16,62	R$ 16,95	R$ 17,30
R$ 15,02	R$ 15,33	R$ 15,64	R$ 15,96	R$ 16,28	R$ 16,62
R$ 14,43	R$ 14,72	R$ 15,02	R$ 15,33	R$ 15,64	R$ 15,96
R$ 13,86	R$ 14,14	R$ 14,43	R$ 14,72	R$ 15,02	R$ 15,33
R$ 13,31	R$ 13,58	R$ 13,86	R$ 14,14	R$ 14,43	R$ 14,72
R$ 12,78	R$ 13,05	R$ 13,31	R$ 13,58	R$ 13,86	R$ 14,14
R$ 12,28	R$ 12,53	R$ 12,78	R$ 13,05	R$ 13,31	R$ 13,58
R$ 11,79	R$ 12,03	R$ 12,28	R$ 12,53	R$ 12,78	R$ 13,05
R$ 11,33	R$ 11,56	R$ 11,79	R$ 12,03	R$ 12,28	R$ 12,53
R$ 10,88	R$ 11,10	R$ 11,33	R$ 11,56	R$ 11,79	R$ 12,03
R$ 10,45	R$ 10,66	R$ 10,88	R$ 11,10	R$ 11,33	R$ 11,56
	R$ 10,24	R$ 10,45	R$ 10,66	R$ 10,88	R$ 11,10
		R$ 10,04	R$ 10,24	R$ 10,45	R$ 10,66
			R$ 9,84	R$ 10,04	R$ 10,24
				R$ 9,64	R$ 9,84
					R$ 9,45

Figura 6.6.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Strip

6.7 Strap

Muito semelhante à estratégia anterior, esta estratégia consiste em operar comprado uma opção de venda europeia e duas opções de compra europeias, todas com os mesmos preços de exercício e datas de vencimento. Suponha que um investidor decide utilizar esta estratégia. Desta forma, compra uma opção de venda europeia e duas opções de compra europeias, com preços de exercício de R$18,10 e vencimento para daqui 9 meses. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, têm-se os valores exibidos na Figura 6.7.1 para a estratégia strap.

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.7.2.

Preço da ação	Payoff Opção Venda
$S_T > R\$18,01$	$R\$0,00$
R\$18,01	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$18,01) = R\$0,88$
R\$17,30	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$17,30) = R\$2,30$
R\$16,62	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$16,62) = R\$3,66$
R\$15,96	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$15,96) = R\$4,98$
R\$15,33	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$15,33) = R\$6,24$
R\$14,72	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$14,72) = R\$7,46$
R\$14,14	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$14,14) = R\$8,62$
R\$13,58	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$13,58) = R\$9,74$
R\$13,05	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$13,05) = R\$10,80$
R\$12,53	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$12,53) = R\$11,84$
R\$12,03	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$12,03) = R\$12,84$
R\$11,56	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$11,56) = R\$13,78$
R\$11,10	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$11,10) = R\$14,70$
R\$10,66	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$10,66) = R\$15,58$
R\$10,24	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$10,24) = R\$16,42$
R\$9,84	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$9,84) = R\$17,22$
R\$9,45	$2 \cdot (R\$18,45 - R\$9,45) = R\$18,00$

Tabela 17 – Payoff do Strip Opção Venda.

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R\$ 17,30
Preço de Exercício	X_1	R\$ 18,10
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T	0,75
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,025
Fator de movimento de alta	u	1,023126635
Fator de movimento de baixa	d	0,977396116
Probabilidade de alta	p	0,529847576
Probabilidade de baixa	1-p	0,470152424

Figura 6.7.1 – Valores Strap

Agora, basta construir as árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia. Note que, só será necessário construir duas árvores binomiais, pois as duas opções de compra possuem os mesmos parâmetros, logo os preços destas opções serão iguais. Tem-se que para a opção de venda o preço justo é de $f_1 = R\$0,82$ e para as opções de venda o preço justo é de $f_2 = R\$0,88$.

25	26	27	28	29	30
R$ 30,64	R$ 31,35	R$ 32,07	R$ 32,81	R$ 33,57	R$ 34,35
R$ 29,27	R$ 29,95	R$ 30,64	R$ 31,35	R$ 32,07	R$ 32,81
R$ 27,96	R$ 28,61	R$ 29,27	R$ 29,95	R$ 30,64	R$ 31,35
R$ 26,71	R$ 27,33	R$ 27,96	R$ 28,61	R$ 29,27	R$ 29,95
R$ 25,52	R$ 26,11	R$ 26,71	R$ 27,33	R$ 27,96	R$ 28,61
R$ 24,38	R$ 24,94	R$ 25,52	R$ 26,11	R$ 26,71	R$ 27,33
R$ 23,29	R$ 23,83	R$ 24,38	R$ 24,94	R$ 25,52	R$ 26,11
R$ 22,25	R$ 22,76	R$ 23,29	R$ 23,83	R$ 24,38	R$ 24,94
R$ 21,25	R$ 21,74	R$ 22,25	R$ 22,76	R$ 23,29	R$ 23,83
R$ 20,30	R$ 20,77	R$ 21,25	R$ 21,74	R$ 22,25	R$ 22,76
R$ 19,40	R$ 19,84	R$ 20,30	R$ 20,77	R$ 21,25	R$ 21,74
R$ 18,53	R$ 18,96	R$ 19,40	R$ 19,84	R$ 20,30	R$ 20,77
R$ 17,70	R$ 18,11	R$ 18,53	R$ 18,96	R$ 19,40	R$ 19,84
R$ 16,91	R$ 17,30	R$ 17,70	R$ 18,11	R$ 18,53	R$ 18,96
R$ 16,15	R$ 16,53	R$ 16,91	R$ 17,30	R$ 17,70	R$ 18,11
R$ 15,43	R$ 15,79	R$ 16,15	R$ 16,53	R$ 16,91	R$ 17,30
R$ 14,74	R$ 15,08	R$ 15,43	R$ 15,79	R$ 16,15	R$ 16,53
R$ 14,08	R$ 14,41	R$ 14,74	R$ 15,08	R$ 15,43	R$ 15,79
R$ 13,45	R$ 13,76	R$ 14,08	R$ 14,41	R$ 14,74	R$ 15,08
R$ 12,85	R$ 13,15	R$ 13,45	R$ 13,76	R$ 14,08	R$ 14,41
R$ 12,28	R$ 12,56	R$ 12,85	R$ 13,15	R$ 13,45	R$ 13,76
R$ 11,73	R$ 12,00	R$ 12,28	R$ 12,56	R$ 12,85	R$ 13,15
R$ 11,20	R$ 11,46	R$ 11,73	R$ 12,00	R$ 12,28	R$ 12,56
R$ 10,70	R$ 10,95	R$ 11,20	R$ 11,46	R$ 11,73	R$ 12,00
R$ 10,23	R$ 10,46	R$ 10,70	R$ 10,95	R$ 11,20	R$ 11,46
R$ 9,77	R$ 9,99	R$ 10,23	R$ 10,46	R$ 10,70	R$ 10,95
	R$ 9,55	R$ 9,77	R$ 9,99	R$ 10,23	R$ 10,46
		R$ 9,33	R$ 9,55	R$ 9,77	R$ 9,99
			R$ 9,12	R$ 9,33	R$ 9,55
				R$ 8,91	R$ 9,12
					R$ 8,71

Figura 6.7.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Strap

Assim, analisando apenas os preços das opções, o total é de $-R\$0,82 - 2 \cdot R\$0,88 = -R\$2,58$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 7, observa-se que para os preços da ação de R\$17,30 até R\$ 8,71 (16 últimas linhas), exibidos na Figura 6.7.2, o payoff da opção de venda é de $X - S_T$. Para os demais casos, não será vantajoso exercer a opção e assim, não haverá lucro nem prejuízo. A Tabela 18 apresenta os possíveis payoffs. Para as opções de compra, tem-se que para os preços da ação de R\$ 34,35 até R\$ 18,11 (15 primeiras linhas) o payoff é de $2 \cdot (S_T - X)$. Para os demais casos, não é vantajoso exercer as opções. A Tabela 19 apresenta os possíveis payoffs. Verificando o preço da ação na data de vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de R\$ 16,87. Logo, o payoff total para o negociador foi de $R\$18,10 - R\$16,87 - R\$2,58 = R\$1,23 - R\$2,58 = -R\$1,35$, ou seja, um prejuízo de R\$1,35.

Preço da ação	Payoff Opção Venda
$S_T > R\$17,30$	$R\$0,00$
R\$17,30	$R\$18,10 - R\$17,30 = R\$0,80$
R\$16,53	$R\$18,10 - R\$16,53 = R\$1,57$
R\$15,79	$R\$18,10 - R\$15,79 = R\$2,31$
R\$15,08	$R\$18,10 - R\$15,08 = R\$3,02$
R\$14,41	$R\$18,10 - R\$14,41 = R\$3,69$
R\$13,76	$R\$18,10 - R\$13,76 = R\$4,34$
R\$13,15	$R\$18,10 - R\$13,15 = R\$4,95$
R\$12,56	$R\$18,10 - R\$12,56 = R\$5,54$
R\$12,00	$R\$18,10 - R\$12,00 = R\$6,10$
R\$11,46	$R\$18,10 - R\$11,46 = R\$6,64$
R\$10,95	$R\$18,10 - R\$10,95 = R\$7,15$
R\$10,46	$R\$18,10 - R\$10,46 = R\$7,64$
R\$9,99	$R\$18,10 - R\$9,99 = R\$8,11$
R\$9,55	$R\$18,10 - R\$9,55 = R\$8,55$
R\$9,12	$R\$18,10 - R\$9,12 = R\$8,98$
R\$8,71	$R\$18,10 - R\$8,71 = R\$9,39$

Tabela 18 – Payoff do Strap Opção Venda.

Preço da ação	Payoff Opção Compra
R\$34,35	$2 \cdot (R\$34,35 - R\$18,10) = R\$32,50$
R\$32,81	$2 \cdot (R\$32,81 - R\$18,10) = R\$29,43$
R\$31,35	$2 \cdot (R\$31,35 - R\$18,10) = R\$26,50$
R\$29,95	$2 \cdot (R\$29,95 - R\$18,10) = R\$23,69$
R\$28,61	$2 \cdot (R\$28,61 - R\$18,10) = R\$21,02$
R\$27,33	$2 \cdot (R\$27,33 - R\$18,10) = R\$18,46$
R\$26,11	$2 \cdot (R\$26,11 - R\$18,10) = R\$16,02$
R\$24,94	$2 \cdot (R\$24,94 - R\$18,10) = R\$13,68$
R\$23,83	$2 \cdot (R\$23,83 - R\$18,10) = R\$11,45$
R\$22,76	$2 \cdot (R\$22,76 - R\$18,10) = R\$9,32$
R\$21,74	$2 \cdot (R\$21,74 - R\$18,10) = R\$7,29$
R\$20,77	$2 \cdot (R\$20,77 - R\$18,10) = R\$5,34$
R\$19,84	$2 \cdot (R\$19,84 - R\$18,10) = R\$3,49$
R\$18,96	$2 \cdot (R\$18,96 - R\$18,10) = R\$1,71$
R\$18,11	$2 \cdot (R\$18,11 - R\$18,10) = R\$0,02$
$S_T < R\$18,11$	$R\$0,00$

Tabela 19 – Payoff do Strap Opção Compra.

6.8 Strangle

Esta estratégia consiste em comprar uma opção de compra europeia e uma opção de venda europeia, ambas com vencimentos iguais, no entanto, com diferentes preços de exercícios. Suponha que um investidor decide utilizar esta estratégia. Desta forma, ele compra uma opção de compra europeia com vencimento para daqui 4,5 meses e com preço de exercício de $X_1 = R\$17,68$ e compra uma opção de venda europeia com vencimento para daqui 4,5 meses e com preço de exercício de $X_2 = R\$17,90$. Assim, após estabelecer os parâmetros e as equações, têm-se os valores exibidos na Figura 6.8.1 para a estratégia strangle.

Parâmetros		
		Valor
Preço da Ação	S_0	R$ 17,30
Preço de Exercício	X_1	R$ 17,68
Preço de Exercício	X_2	R$ 17,90
Taxa de juros (anual)	r	6,50%
Volatilidade	σ	14,46%
Vencimento (anos)	T	0,375
Número de passos	n	30

Equações		
		Valor
Delta t	δt	0,0125
Fator de movimento de alta	u	1,016298161
Fator de movimento de baixa	d	0,983963209
Probabilidade de alta	p	0,521096214
Probabilidade de baixa	1-p	0,478903786

Figura 6.8.1 – Valores Strangle

Ao inserir as sentenças condicionais e construir uma árvore binomial para o preço da ação com um total de 30 períodos, para os últimos seis períodos tem-se os valores exibidos na Figura 6.8.2.

Agora, basta construir duas árvores binomiais, com o intuito de encontrar o preço justo para cada uma das opções utilizadas nesta estratégia. Obtém-se o preço justo na opção de compra de $f_1 = R\$0,64$ e o na opção de venda de $f_2 = R\$0,59$. Assim, analisando apenas os preços das opções, o total é de $-R\$0,64 - R\$0,59 = -R\$1,23$. Observando os payoffs das opções, tomando como base a Tabela 8, observa-se que para os preços da ação de R\$28,10 até R\$ 17,87 (15 primeiras linhas), exibidos na Figura 6.8.2, o payoff da opção de compra é de $S_T - X$. Para os demais casos, não será vantajoso exercer a opção e assim, não haverá lucro nem prejuízo. A Tabela 20 apresenta os possíveis payoffs. Para a opção de venda, para os preços da ação de R\$ 17,30 até R\$ 10,65 (16 últimas linhas) o payoff será de $X - S_T$. Para os demais casos, a opção não será exercida. A Tabela 21 apresenta os possíveis payoffs. Verificando o preço da ação na data de vencimento da opção, tem-se que o valor de fechamento foi de R\$ 18,80. Logo, o payoff total para o negociador foi de $R\$18,80 - R\$17,68 - R\$1,23 = -R\$0,11$, ou seja, um prejuízo de $R\$0,11$.

25	26	27	28	29	30
R$ 25,92	R$ 26,34	R$ 26,77	R$ 27,20	R$ 27,65	R$ 28,10
R$ 25,09	R$ 25,50	R$ 25,92	R$ 26,34	R$ 26,77	R$ 27,20
R$ 24,29	R$ 24,69	R$ 25,09	R$ 25,50	R$ 25,92	R$ 26,34
R$ 23,52	R$ 23,90	R$ 24,29	R$ 24,69	R$ 25,09	R$ 25,50
R$ 22,77	R$ 23,14	R$ 23,52	R$ 23,90	R$ 24,29	R$ 24,69
R$ 22,05	R$ 22,41	R$ 22,77	R$ 23,14	R$ 23,52	R$ 23,90
R$ 21,35	R$ 21,69	R$ 22,05	R$ 22,41	R$ 22,77	R$ 23,14
R$ 20,67	R$ 21,00	R$ 21,35	R$ 21,69	R$ 22,05	R$ 22,41
R$ 20,01	R$ 20,34	R$ 20,67	R$ 21,00	R$ 21,35	R$ 21,69
R$ 19,37	R$ 19,69	R$ 20,01	R$ 20,34	R$ 20,67	R$ 21,00
R$ 18,76	R$ 19,06	R$ 19,37	R$ 19,69	R$ 20,01	R$ 20,34
R$ 18,16	R$ 18,46	R$ 18,76	R$ 19,06	R$ 19,37	R$ 19,69
R$ 17,58	R$ 17,87	R$ 18,16	R$ 18,46	R$ 18,76	R$ 19,06
R$ 17,02	R$ 17,30	R$ 17,58	R$ 17,87	R$ 18,16	R$ 18,46
R$ 16,48	R$ 16,75	R$ 17,02	R$ 17,30	R$ 17,58	R$ 17,87
R$ 15,96	R$ 16,22	R$ 16,48	R$ 16,75	R$ 17,02	R$ 17,30
R$ 15,45	R$ 15,70	R$ 15,96	R$ 16,22	R$ 16,48	R$ 16,75
R$ 14,96	R$ 15,20	R$ 15,45	R$ 15,70	R$ 15,96	R$ 16,22
R$ 14,48	R$ 14,72	R$ 14,96	R$ 15,20	R$ 15,45	R$ 15,70
R$ 14,02	R$ 14,25	R$ 14,48	R$ 14,72	R$ 14,96	R$ 15,20
R$ 13,57	R$ 13,80	R$ 14,02	R$ 14,25	R$ 14,48	R$ 14,72
R$ 13,14	R$ 13,36	R$ 13,57	R$ 13,80	R$ 14,02	R$ 14,25
R$ 12,72	R$ 12,93	R$ 13,14	R$ 13,36	R$ 13,57	R$ 13,80
R$ 12,32	R$ 12,52	R$ 12,72	R$ 12,93	R$ 13,14	R$ 13,36
R$ 11,93	R$ 12,12	R$ 12,32	R$ 12,52	R$ 12,72	R$ 12,93
R$ 11,55	R$ 11,74	R$ 11,93	R$ 12,12	R$ 12,32	R$ 12,52
	R$ 11,36	R$ 11,55	R$ 11,74	R$ 11,93	R$ 12,12
		R$ 11,18	R$ 11,36	R$ 11,55	R$ 11,74
			R$ 11,00	R$ 11,18	R$ 11,36
				R$ 10,83	R$ 11,00
					R$ 10,65

Figura 6.8.2 – Árvore Binomial com Preço da Ação Strangle

Preço da ação	Payoff Opção Compra
R$28,10	$R\$28,10 - R\$17,68 = R\$10,42$
R$27,20	$R\$27,20 - R\$17,68 = R\$9,52$
R$26,34	$R\$26,34 - R\$17,68 = R\$8,66$
R$25,50	$R\$25,50 - R\$17,68 = R\$7,82$
R$24,69	$R\$24,69 - R\$17,68 = R\$7,01$
R$23,90	$R\$23,90 - R\$17,68 = R\$6,22$
R$23,14	$R\$23,14 - R\$17,68 = R\$5,46$
R$22,41	$R\$22,41 - R\$17,68 = R\$4,73$
R$21,69	$R\$21,69 - R\$17,68 = R\$4,01$
R$21,00	$R\$21,00 - R\$17,68 = R\$3,32$
R$20,34	$R\$20,34 - R\$17,68 = R\$2,66$
R$19,69	$R\$19,69 - R\$17,68 = R\$2,01$
R$19,06	$R\$19,06 - R\$17,68 = R\$1,38$
R$18,46	$R\$18,46 - R\$17,68 = R\$0,78$
R$17,87	$R\$17,87 - R\$17,68 = R\$0,19$
$S_T < R\$17,87$	$R\$0,00$

Tabela 20 – Payoff do Strangle Opção Compra.

Preço da ação	Payoff Opção Venda
$S_T > R\$17,30$	$R\$0,00$
R$17,30	$R\$17,90 - R\$17,30 = R\$0,60$
R$16,75	$R\$17,90 - R\$16,75 = R\$1,15$
R$16,22	$R\$17,90 - R\$16,22 = R\$1,68$
R$15,70	$R\$17,90 - R\$15,70 = R\$2,20$
R$15,20	$R\$17,90 - R\$15,20 = R\$2,70$
R$14,72	$R\$17,90 - R\$14,72 = R\$3,18$
R$14,25	$R\$17,90 - R\$14,25 = R\$3,65$
R$13,80	$R\$17,90 - R\$13,80 = R\$4,10$
R$13,36	$R\$17,90 - R\$13,36 = R\$4,54$
R$12,93	$R\$17,90 - R\$12,93 = R\$4,97$
R$12,52	$R\$17,90 - R\$12,52 = R\$5,38$
R$12,12	$R\$17,90 - R\$12,12 = R\$5,78$
R$11,74	$R\$17,90 - R\$11,74 = R\$6,16$
R$11,36	$R\$17,90 - R\$11,36 = R\$6,54$
R$11,00	$R\$17,90 - R\$11,00 = R\$6,90$
R$10,65	$\$17,90 - R\$10,65 = R\$7,25$

Tabela 21 – Payoff do Strangle Opção Venda.

7 Considerações Finais

Os derivativos possuem a principal finalidade de proteção de risco para os investidores. Assim, o presente trabalho consistiu em uma apresentação acerca dos derivativos (com ênfase em opções do tipo plain vanilla), uma exibição de diferentes estratégias utilizadas no mercado financeiro, assim como a exposição detalhada do desenvolvimento do modelo binomial de precificação de derivativos. Por fim, o modelo foi implementado nas estratégias apresentadas, em opções sobre ações da empresa Ambev. Vale ressaltar que a empresa foi escolhida de modo aleatório e não é indicação de compra ou venda. Por questões acadêmicas, foram utilizados 30 passos nas árvores binomiais, assim como empregada a volatilidade histórica para concluir uma aproximação da volatilidade futura.

Sendo assim, na implementação foi possível notar que o modelo binomial foi coerente com o esperado, trazendo valores para as opções adequadas com as estratégias utilizadas. Por exemplo, na estratégia Spread Calendário onde o investidor compra duas opções com mesmos preços de exercícios, mas vencimentos diferentes, o valor da opção com vencimento maior mostrou-se superior, exatamente o almejado, visto que em teoria esta opção tem valor maior. Portanto, pode-se concluir que o modelo comporta-se de forma esperada, logo a metodologia utilizada foi suficiente para obter o cálculo aproximado dos preços justos.

De acordo com FERNANDES (2016), a estimativa da volatilidade por diferentes metodologias produzirá diferentes resultados de preços. Desta forma, o agente financeiro que deseja o preço justo mais preciso para as opções, deve não somente estimar a volatilidade através de outros métodos, como também aumentar o número de passos das árvores binomiais.

Referências

ACERBI, C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1505–1518, 2002.

ACERBI, C.; TASCHE, D. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes*, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 379–388, 2002.

AMARAL, C. A. L. V. d. Derivativos: o que são e a evolução quanto ao aspecto contábil. *Revista Contabilidade & Finanças*, SciELO Brasil, v. 14, n. 32, p. 71–80, 2003.

ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.

BAIDYA, T. K. N.; CASTRO, A. d. L. Convergência dos modelos de árvores binomiais para avaliação de opções. *Pesquisa operacional*, SciELO Brasil, v. 21, n. 1, p. 17–30, 2001.

BARCEDO, C.; ARAUJO, G. S.; LION, O. M. B. *Mercado de derivativos no Brasil: conceitos, operações e estratégias.* [S.l.]: Record: Rio de Janeiro, 2009.

CORNUEJOLS, G.; TÜTÜNCÜ, R. *Optimization methods in finance.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. v. 5.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979.

DIMSON, E.; MUSSAVIAN, M. Market efficiency. *The current state of business disciplines*, Spellbound publications, v. 3, n. 1, p. 959–970, 2000.

FAMA, E. F. *Efficient market hypothesis.* Tese (Doutorado) — Ph. D. dissertation, University of Chicago, Graduate School of Business, 1960.

FERNANDES, A. C.; MACHADO-SANTOS, C. et al. *Avaliação de estratégias de investimento com opções.* [S.l.]: Faculdade de Economia, Universidade do Porto, 2001.

FERNANDES, F. D. N. *MODELOS DE PRECIFICAÇÃO EM FINANÇAS: UMA APLICAÇÃO EM OPÇÕES SOBRE AÇÕES*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2016.

FÖLLMER, H.; SCHIED, A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, Springer, v. 6, n. 4, p. 429–447, 2002.

FRITTELLI, M.; GIANIN, E. R. Putting order in risk measures. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1473–1486, 2002.

GABE, J. Volatilidade implícita versus volatilidade estatística: Uma avaliação para o mercado brasileiro a partir dos dados de opções e ações da telemar sa. 2003.

GARCIA, M. G.; DIDIER, T. Taxa de juros, risco cambial e risco brasil. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2003.

HULL, J. et al. *Fundamentals of futures and options markets*. [S.l.]: Pearson Higher Education AU, 2013.

HULL, J. C. *Options futures and other derivatives*. [S.l.]: Pearson Education India, 2003.

JAVAHERI, A. *Inside volatility arbitrage: the secrets of skewness*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 317.

JORION, P. et al. *Financial risk manager handbook*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. v. 406.

KUMMER, S.; PAULETTO, C. The history of derivatives: A few milestones. In: *EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 431–466.

LANARI, C. S. O efeito"sorriso"da volatilidade implícita do modelo de black e scholes: estudo empírico sobre as opções telebrás pn no ano de 1998. UFMG, 2000.

MACHRY, M. S. *O uso do value at risk (var) como medida de risco para fundos de pensão*. Tese (Doutorado), 2003.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MORAES, C. C. *Value at risk e expectes shortfall: medidas de risco e suas propriedades: um estudo empírico para o mercado brasileiro*. Tese (Doutorado), 2013.

NIEPPOLA, O. et al. Backtesting value-at-risk models. 2009.

ØKSENDAL, B. Mathematics and finance: The black-scholes option pricing formula and beyond. *Preprint series. Pure mathematics http://urn. nb. no/URN: NBN: no-8076*, Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo, 2010.

PAULA, G. D. et al. Utilizando operações de hedge com opções como instrumento de proteção ao investimento em períodos de crise no mercado acionário brasileiro. Florianópolis, 2009.

RICHARDSON, R. J. et al. Pesquisa social: métodos e técnicas. 14. reimpr. *São Paulo: Atlas*, 2012.

RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. Teoria de medidas de risco: Uma revisão abrangente. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Financas, v. 12, n. 3, p. 411–464, 2014.

ROSS, S. A.; WESTERFIELD, R. W.; JORDAN, B. D. Princípios de administração financeira. 2ª. *8ª. reimpr. São Paulo: Atlas*, 2009.

SARYKALIN, S.; SERRAINO, G.; URYASEV, S. Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization. In: *State-of-the-art decision-making tools in the information-intensive age*. [S.l.]: Informs, 2008. p. 270–294.

SHREVE, S. *Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

VICENTE, J. V. M.; GUEDES, T. de S. A volatilidade implícita contém informações sobre a volatilidade futura? evidências do mercado de opções de ações da petrobras. *BBR-Brazilian Business Review*, FUCAPE Business School, v. 7, n. 1, p. 48–65, 2010.

WILMOTT, P. *Paul Wilmott introduces quantitative finance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

WILMOTT, P. *Frequently asked questions in quantitative finance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

ZHAO, J. American option valuation methods. *International Journal of Economics and Finance*, Canadian Center of Science and Education, v. 10, n. 5, 2018.