UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luis Eduardo Fritsch

ESTUDO DE PROBLEMAS DA CIÊNCIA POLÍTICA ATRAVÉS DA TEORIA DOS JOGOS

Florianópolis

2020

Luis Eduardo Fritsch

ESTUDO DE PROBLEMAS DA CIÊNCIA POLÍTICA ATRAVÉS DA TEORIA DOS JOGOS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do Título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Batista Morgado

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fritsch, Luis Eduardo
Estudo de Problemas da Ciência Política através da Teoria dos Jogos / Luis Eduardo Fritsch ; orientador, Leandro Batista Morgado, 2020.
86 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria dos Jogos. 3. Ciência Política. 4. Escolha Racional. 5. Estratégia. I. Morgado, Leandro Batista. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Luis Eduardo Fritsch

ESTUDO DE PROBLEMAS DA CIÊNCIA POLÍTICA ATRAVÉS DA TEORIA DOS JOGOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do Título de "Bacharel em Matemática" e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática.

Florianópolis, 05 de Outubro de 2020.

Documento assinado digitalmente
Silvia Martini de Holanda
Data: 08/10/2020 13:52:17-0300
CPF: 595.791.379-00

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
Leandro Batista Morgado
Data: 07/10/2020 18:47:40-0300
CPF: 016.351.519-02

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Orientador

Documento assinado digitalmente
Leonardo Silveira Borges
Data: 08/10/2020 07:31:20-0300
CPF: 041.171.889-41

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges
Universidade Federal de Santa Catarina

Documento assinado digitalmente
Silvia Martini de Holanda
Data: 08/10/2020 13:52:53-0300
CPF: 595.791.379-00

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado à minha família, aos meus amigos e mestres.

AGRADECIMENTOS

À minha família, mãe Lorena, irmã Fernanda, tio Roque, tia Irene e avó Maria Terezinha, a base de entendimento do que eu conheço por vida, a qual, mesmo havendo alguma possibilidade de escolha, não haveria uma melhor para ter nascido.

À minha namorada Bruna Pacheco, agradeço por tornar os meus dias muito mais felizes, pelo simples fato de existir, e admiro pela pessoa que é, mas, acima de tudo, pelo seu incrível bom gosto para namorado.

Aos meus sogros, Bernadete e Rubens, por todo o apoio e carinho com que sempre me trataram desde que nos conhecemos.

A Eder Nélio Silva, que provou o que é uma irmandade em atitudes e não apenas em palavras, e a Leonardo da Silva, por ter sido uma das primeiras amizades verdadeiras que tive.

A Ana Carolina Martins, pela companhia e amizade diária insubstituíveis nesse caminho, e Jonas Rodeghiero, um exemplo de como razão e emoção podem andar juntas, em uma mistura mais ou menos equilibrada.

A Bruno Alberto Pacheco e Bruna Camargo, pelas noites divertidas que passamos juntos... com jogos de mesa e idas ao cinema.

A Lucas Gabriel Viapiana, pela minha adaptação à nova cidade, discussões e trabalhos em equipe que renovaram minhas esperanças no ser humano.

Ao professor Sergio Juarez Godoy, a grande motivação pela escolha do curso de Matemática, de quem, a cada aula assistida, era como se mais uma parte do mundo fosse descoberta diante dos meus olhos e passasse a fazer mais sentido daquele momento em diante.

Ao meu amigo Enori Pozzo, um dos maiores estímulos à curiosidade e à vontade de aprender um pouco de muito e não um muito de pouco. Deixa eu te contar que foi com você que aprendi que não existe imortalidade tão benquista quanto a boa lembrança que deixamos aos que ficam.

Ao professor João Carlos Martins, um dos primeiros espelhos morais que tive fora da minha família e que me ensinou a ver a história de um modo crítico e que me deu as primeiras noções do que é ser um ser humano verdadeiramente político (no sentido original da palavra).

À professora Ana Lúcia Lehmkuhl, pelo grande exemplo de amor à ciência e incentivo à busca de patamares cada vez mais altos de conhecimento.

Aos professores Nilton Kazuo Gomes Suzuki e Herculano De Biasi e ao amigo Rudinei Luiz dos Santos, pelo aprendizado e mentoria nos meus primeiros passos em um ambiente de pesquisa científica.

Ao PET-Matemática e a todos os petianos da minha geração, pelos bons momentos que passamos juntos, e ao professor José Luiz Rosas Pinho pelo seu arsenal de trocadilhos matemáticos e por sempre ter mostrado que aprender a abstrair noções de uma figura em Geometria é uma sábia faculdade.

Aos professores Leonardo Silveira Borges, Paulo Mendes de Carvalho Neto e Marianna Ravara Vago que, ao longo da graduação, representaram pontos de luz e humanidade onde eu pensei que já não mais existia.

Ao meu orientador Leandro Batista Morgado pela paciência e constantes correções necessárias para este trabalho, além de me relembrar a cada disciplina ministrada o motivo que me trouxe a esse curso.

À professora Silvia Martini de Holanda, a primeira pessoa que conheci quando comecei nessa graduação e a qual senti que era uma das melhores que eu poderia ter conhecido por aqui; e não estava enganado.

Ao Capítulo Álvaro Selva Gentil e à Loja Universitária Álcio Antunes por serem meu laboratório constante de melhoria enquanto pessoa e de como não podemos pensar na teoria sem levá-la à prática.

Tirai ao gênero humano a vaidade e a ambição e acabareis de vez com os heróis e os patriotas.

(SÊNECA)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar ao leitor a Teoria dos Jogos, abordando o seu desenvolvimento histórico e algumas aplicações na Ciência Política. O foco deste estudo é a aplicabilidade de modelos da Teoria dos Jogos aos principais problemas enfrentados em nossa vida política cotidiana. Em particular, é apresentado o conceito de Valor de Shapley e é realizada a análise em duas aplicações principais: a divisão de poder e o sistema de votação brasileiro.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Escolha Racional. Estratégia. Recompensas. Equilíbrio de Nash. Indução Reversa. Guerra Fria. Valor de Shapley. Política.

ABSTRACT

This research aims to introduce the reader to Game Theory, elaborating on its historical development and some applications in Political Science. The focus of this study is the applicability of Game Theory models to the main problems faced in our ordinary political life. In particular, the Shapley Value concept is presented and the analysis is carried out in two main applications: the division of power and the Brazilian voting system.

Keywords: Game Theory. Rational Choice. Strategy. Payoffs. Nash Equilibrium. Backward Induction. Cold War. Shapley Value. Politics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O mapeamento deste trabalho é feito com base em três grandes áreas de estudo da interação estratégica: Teoria dos Jogos, Ciência Política e a Teoria da Escolha Racional.

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais 'agentes de decisão' interagem entre si. Ela fornece uma linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo. Portanto, ela pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de 'decisões ótimas' sob condições de conflito (SARTINI et al., 2004).

A Ciência Política trata das estruturas e dos processos de governo. Há, contudo, uma discussão interna sobre o seu objeto de estudo, pois enquanto alguns argumentam que o foco central é o Estado, outros defendem que é o poder (GIANTURCO, 2018). Neste estudo terá preferência o segundo, devido à sua maior abrangência.

A Teoria da Escolha Racional é uma teoria sociológica que se propõe a explicar o comportamento social e político dos agentes a partir de seus interesses e crenças, assumindo que agem racionalmente. Para seu bom uso, ela deve considerar todas as características (ou, ao menos, a parte substancial) envolvidas na situação em análise (BAERT, 1997).

Em Teoria dos Jogos, parte-se do 'Princípio da Escolha Racional', onde se pressupõe jogadores racionais e cujas escolhas ocorrem visando a maximização da sua 'recompensa'.

Em Ciência Política, algumas aplicações podem ser vistas na escolha das melhores alianças em uma coalizão, de assuntos em um debate ou até mesmo do posicionamento ideológico — que pode ser alterado para aumentar as chances de vitória numa campanha eleitoral.

Um modelo clássico dessa área (geralmente, aplicado nas interações ditas 'cooperativas') é o valor de Shapley, que pode ser usado para descobrir o valor de um membro em uma coalizão, a importância de cada partido em uma assembleia legislativa ou a probabilidade de um projeto ser aprovado na mesma.

Esse modelo foi apresentado por Shapley (1951). O autor considera a situação partindo do ponto de vista dos participantes, buscando responder à questão: para um jogador em particular, qual é o valor do jogo? Dessa forma, o que se busca é determinar a vantagem que cada jogador tem de cooperar ou não em um conflito.

Como dito pelo economista e matemático Robert Aumann, muito se fala, por exemplo, da contribuição de Adolf Hitler para o início da 2ª Guerra Mundial, mas, talvez pouco seja dito sobre o papel desempenhado pelo primeiro-ministro inglês Neville Chamberlain nesse período (RAUPP, 2010).

Com a sua obsessão em garantir a paz, o primeiro-ministro passou a atender a todas as demandas do *Führer*. Ao fim das negociações de Munique, em 1938, todas as exigências alemãs haviam sido atendidas. Chamberlain, então, de volta a Londres, exibiu pomposamente o acordo assinado com Hitler e proferiu a seguinte frase: "A paz em nosso tempo está assegurada" (considerada como um dos piores erros de avaliação da história).

Alguns dias depois, as tropas alemãs ocuparam os Sudetos e, meses após, tomaram a Checoslováquia; culminando na invasão da Polônia por Hitler, em 1939. Nesse momento, a Inglaterra declara guerra à Alemanha. Hitler se enfurece com isso, pois Chamberlain o deixou acreditar que aceitariam qualquer coisa que ele fizesse, sem limites. Essas concessões foram um incentivo a Hitler e também o que acabou por levar o mundo a outra guerra.

Talvez, se Chamberlain dissesse, em 1938, que não toleraria certas demandas, Hitler recuaria, pois ainda não estaria preparado para a guerra. Na "Crise dos mísseis de Cuba", em 1962, o presidente americano deixou claro aos russos que, se os mísseis não fossem retirados da ilha, os EUA agiriam. Com isso, o possível avanço de um conflito nuclear foi evitado.

Nesse sentido, por meio da revisão teórica e consulta bibliográfica a livros clássicos das áreas correspondentes, o presente estudo visa discutir a aplicabilidade e limites da Teoria dos Jogos na resolução de problemas como o visto acima.

A estrutura metodológica dos capítulos é composta pela exposição teórica dos assuntos e indicação notacional cabível. Durante todo o texto, exemplos são chamados como auxiliares de fixação das noções estudadas. Sua presença é fundamental para que se deduza a possível ocorrência de cada conceito dentro das formas de representação expostas adiante.

2 ASPECTOS GERAIS

Neste capítulo, é feita uma breve contextualização histórica da Teoria dos Jogos, elencando as principais publicações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Em seguida, são apresentados os conceitos fundamentais e os requisitos para a formalização de um jogo, bem como sua notação usual.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

O economista francês Antoine Augustin Cournot é quem inicia o estudo dessa teoria. Em 1838, com a publicação de *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, destacou-se na análise de problemas envolvendo oligopólios (mercado onde há poucos vendedores para muitos compradores) (DUTTA, 1999).

A análise feita por Cournot (1838) gira em torno de um modelo onde duas empresas, produzindo um mesmo produto, decidem qual é a quantidade que cada uma deveria produzir.

Ao reinventar as 'soluções minimax', com a publicação de quatro artigos sobre jogos estratégicos, o francês Justin Emile Borel se dedica ao estudo de jogos que dependem, simultaneamente, da sorte e habilidade do jogador (SARTINI et al., 2004).

O alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, em 1913, faz a publicação do primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos. Ele afirma que o jogo de xadrez é 'estritamente determinado', isto é, em cada estágio do jogo ao menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão capaz de lhe dar a vitória ou conduzir o jogo ao empate (EBBINGHAUS; KANAMORI; FRASER, 2010).

Embora, em seu início, a Teoria dos Jogos não tenha chamado muita atenção, o trabalho do matemático John von Neumann ajudou a mudar esta situação. Neumann (1928) demonstrou que todo 'jogo finito de soma zero' (onde o ganho de um jogador necessariamente implica a perda dos outros), com duas pessoas, possui uma solução em 'estratégias mistas'.

Em outra publicação, juntamente com o economista Oscar Morgenstern, em 1944, a Teoria dos Jogos invadiu a economia e a matemática aplicada. Neste livro, o estudo se concentra em 'jogos de soma zero', na representação de jogos em 'forma estendida' e abordagem de aspectos como cooperação e formação de coalizão entre os jogadores (NEUMANN; MORGENSTERN, 2007).

O norte-americano John Forbes Nash Jr. foi o responsável por introduzir o conceito de 'equílibrio' em um jogo. A partir dele, percebe-se que nem sempre a estratégia escolhida de forma racional (como sendo a melhor resposta às estratégias escolhidas pelos demais jogadores) é, de fato, a que traz o melhor resultado para todos (NASH, 1950, 1951).

Com esses resultados, aplicações da Teoria dos Jogos começam a surgir em diversas áreas. Por exemplo, Schelling (1960) mostrou como essa teoria pode ser aplicada em situações de conflito ou cooperação — focando no conflito entre Estados Unidos e União Soviética, durante a Guerra Fria.

Por sua vez, o economista húngaro John C. Harsanyi desenvolveu um modelo que trata de situações onde um jogador pode ter informações a mais sobre algum elemento do jogo, quando comparado aos demais jogadores. Em consequência, Harsanyi (1967) acaba estendendo a noção de 'equilíbrio de Nash' para este tipo de situação.

Finalmente, o matemático e economista Reinhard Selten contribuiu com a noção de 'equilíbrio de Nash perfeito em subjogos', sendo esta a estratégia que é necessariamente considerada 'ótima' para todos os possíveis desdobramentos do jogo. Esta noção de equilíbrio dada por Selten (1974) tem extrema importância em jogos que envolvem ameaças e compromissos, pois permite analisar quais são (de fato) plausíveis.

Nash, Harsanyi e Selten são considerados os responsáveis pelas publicações que contextualizaram as ferramentas da Teoria dos Jogos não apenas para 'jogos de soma zero', mas para todos os demais tipos de jogos. Formalizaram a ideia de 'equilíbrio de Nash' e a generalizaram para 'jogos dinâmicos', definindo como o jogo se desdobra ao longo do tempo. Assim, em 1994, receberam o prêmio Nobel de Economia por todas as suas contribuições à área (SARTINI et al., 2004).

2.2 CONCEITOS INICIAIS

Inicialmente, é apresentada uma definição formal sobre cada item e os aspectos considerados imprescindíveis para a compreensão da discussão que é realizada neste trabalho.

2.2.1 Jogo

Como dito por Dutta (1999), a Teoria dos Jogos recebeu este nome pela influência que jogos de salão como pôquer, bridge, xadrez, entre outros, tiveram em sua criação e também por serem o grande referencial de desenvolvimento dos conceitos principais dessa teoria: interação, estratégia e racionalidade.

No entanto, a teoria não é limitada por esses jogos: seu objeto é qualquer situação em que há conflito de interesses entre jogadores, onde a recompensa obtida depende das ações de cada um.

Ocorrências dessas situações podem ser percebidas no desfecho de uma guerra, na concorrência entre empresas ou no crescimento de determinada população — como pode ser visto no exemplo a seguir, baseado em RTP (2020).

Exemplo 1 (Uma Sinuca de Bico Diplomática)**.** *Em janeiro de 2020, o abate de um avião civil com um míssil terra-ar pelo Irã adquiriu um contorno diplomático e político complexo. Trata-se de um avião construído nos EUA, pertencente a uma empresa aérea e de tripulação ucraniana, com 82 passageiros iranianos, 57 canadenses e mais alguns de outras nacionalidades, abatido por um sistema de mísseis russo e operado por iranianos.*

Nesse exemplo, o Irã não pode se isentar, alegando ser um ato "insignificante", pois morreram mais de oitenta iranianos. Também não seria prudente culpar a Rússia por falhas no sistema, pois poderia agravar a crise com a Ucrânia e perder um dos poucos apoios políticos que possui. Não pode negar a sua responsabilidade por abater um avião dos EUA e tampouco alegar qualquer crença ideológica anti-estadunidense, pois matou quase sessenta canadenses com esse ataque. Então, qual seria o melhor posicionamento do Irã em relação a isso?

Deste modo, tendo conhecimento de quem são os jogadores, da interação que há entre eles e as possíveis ações que podem ser tomadas, esta situação também pode ser modelada como um jogo.

Para que essa ideia fique suficientemente clara, é dada a seguinte definição:

Definição 1. *Um **jogo** consiste numa situação, onde:*

(i) existe uma interação estratégica entre os jogadores;

(ii) estes reconhecem que existe uma interdependência mútua das suas escolhas.

Em sua abordagem, Dutta (1999) salienta que para uma perfeita compreensão e eventual modelagem dessas situações, é indispensável a análise das seguintes características:

- **Quem está jogando:** o grupo de jogadores que interage estrategicamente;
- **Com o que eles estão jogando:** as ações ou estratégias disponíveis para cada jogador;
- **A ordem:** a disposição das ações escolhidas pelos jogadores (simultâneas ou sequenciais);
- **Recompensa:** quanto o jogador pode ganhar ou perder com as escolhas feitas.

Outro ponto fundamental é saber discernir quando o jogo é cooperativo ou não. Com base na definição de Fiani (2009), temos:

Definição 2. *Um jogo é dito **cooperativo** quando os jogadores podem estabelecer compromissos que possuem garantias efetivas. Se os jogadores não puderem estabelecer tais compromissos, o jogo é dito **não-cooperativo**.*

Convém ainda ressaltar, desde o início, uma classe de jogos (comum em jogos de salão) que também foi um dos alicerces do desenvolvimento dessa teoria:

Definição 3. *Um jogo é dito de **soma constante** (com dois jogadores) se o ganho de um jogador corresponde exatamente àquele perdido por seu adversário.*

No caso particular em que a soma é zero, dizemos que é um **jogo de soma zero**.

2.2.2 Jogadores

Antes de prosseguir, é preciso que se delimite quem são os jogadores desses jogos. Assim:

Definição 4. *Um **jogador** é qualquer ente que:*

(i) participa do jogo em questão;

(ii) é capaz de tomar decisões nele.

Neste trabalho, considera-se que o número de jogadores é finito e que a escolha de suas estratégias é feita de forma racional, sempre em busca da maximização das suas recompensas.

O próximo exemplo é um caso particular da "Tragédia dos Comuns", descrita por Hardin (1968), que diz respeito a uma situação na qual os jogadores, buscando maximizar sua satisfação individual, acabam por esgotar os recursos naturais ou outros de uso comum.

Exemplo 2 (O Dilema do Jantar). *Um grupo de amigos decide jantar em conjunto e dividir a conta igualmente entre todos. O senso comum (entre eles) diz o seguinte:*

- *Todos sabem que os itens escolhidos encarecerão a conta total;*
- *Todo acréscimo de custo será distribuído igualmente entre os demais.*

Como existe uma interação estratégica entre esses amigos (jogadores), pois o valor a ser pago após o jantar depende das escolhas de cada um e eles podem agir de formas distantas dependendo do comportamento dos demais, esse é mais um exemplo do que foi definido por jogo.

Note ainda que, aqui, o raciocínio induzido é de que se há uma maior liberdade de compra, pois, individualmente, o valor dividido não ficará tão oneroso.

O problema é que todos os indivíduos são incentivados a comprar pratos mais caros ou pedir outros (doces, bebidas etc.). Assim, a conta total tende a ficar mais cara para todos. Logo, com a ilusão do benefício, todo mundo sai prejudicado.

2.2.3 Ações

Cada jogador possui um conjunto de ações disponíveis durante o jogo, isto é, conhece as escolhas que pode fazer em qualquer momento. Através desse conjunto, o jogador pode traçar a estratégia que maximizará a sua recompensa.

Sendo assim, é natural o que se define a seguir:

Definição 5. *As ações escolhidas por um jogador após a análise do seu conjunto de ações e das respectivas recompensas (suas e dos demais jogadores) são chamadas de* ***estratégia****.*

Essas ações afetam todos os participantes do jogo e, por hipótese, esse conjunto é de conhecimento tanto dele quanto dos demais jogadores.

Definição 6. *Uma estratégia é dita* ***pura*** *quando o jogador escolhe suas ações de forma determinística, não havendo influência para a mudança de escolha.*

Essa caracterização é feita pela existência de um outro tipo de estratégia, que será visto mais adiante: a estratégia mista.

Para Fiani (2009), a racionalidade está relacionada com a coerência entre os meios e os fins pretendidos pelos jogadores, ou seja, ela está relacionda com a estratégia que cada jogador utiliza para alcançar os seus objetivos.

2.2.4 Recompensas

Definição 7. *É denominado por* ***recompensa*** *ou* ***payoff*** *o que cada jogador pode receber ao final do jogo, de acordo com suas escolhas e as dos demais jogadores.*

Essa recompensa, definida acima, é o objetivo do jogador ao utilizar determinada estratégia de jogo. Desse modo, torna-se conveniente ainda definir:

Definição 8. *A* ***função recompensa*** *ou* ***função utilidade*** *do jogador é definida como aquela que determina quais estratégias ele deve adotar para obter qualquer recompensa do jogo.*

A função utilidade serve para orientar a escolha do jogador, sendo que a recompensa escolhida não é, necessariamente, a maior entre todas, mas, a mais preferível dado o contexto do jogo.

2.2.5 Notação

Tendo em vista uma melhor compreensão da teoria, deve-se estabelecer o uso de algumas notações para o prosseguimento deste estudo:

- **Jogo:** denota-se, geralmente, por G;
- **Conjunto dos jogadores:** denota-se por $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}^*$;
- **Conjunto das estratégias do jogador:** seja $i \in J$ e $m_i \in \mathbb{N}^*$ a quantidade de estratégias do jogador i. O conjunto das estratégias do jogador i é denotado por:

$$E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots, e_{im_i}\}.$$

Logo, uma estratégia pura do jogador i é denotada por e_{ij}, onde $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m_i\}$.

- **Perfil de estratégias puras do jogo:** seja G um jogo com n jogadores. Denota-se esse perfil pelo vetor
$$e = (e_{1j_1}, e_{2j_2}, e_{3j_3}, \ldots, e_{nj_n}),$$
onde o jogador 1 opta pela estratégia $e_{1j_1} \in E_1$, o jogador 2 pela estratégia $e_{2j_2} \in E_2$ etc.;
- **Conjunto dos perfis de estratégias puras do jogo:** sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ os conjuntos de estratégias dos n jogadores de G. Então, esse conjunto é dado pelo produto cartesiano:

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n.$$

- **Função utilidade do jogador:** para cada jogador $i \in J$, a função utilidade é denotada por:

$$\begin{array}{rccc} U_i : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & e & \longmapsto & U_i(e) \end{array}$$

É importante lembrar que esta função indica a recompensa $U_i(e)$ obtida pelo jogador i quando os demais jogadores optam pelas suas respectivas estratégias puras descritas no vetor e.

O benefício dessa formalização é visto no exemplo a seguir:

Exemplo 3 (A Batalha dos Sexos)**.** *Um casal, Bob e Elvira, decide ir ao cinema. Eles não escolheram ainda o filme, mas sabem que Elvira prefere um filme de terror, Bob um de romance e irão apenas se concordarem qual assistir. Desse modo, numa escala de satisfação de* 0 *à* 10*, podemos identificar os seguintes casos possíveis:*

1. *Se entrarem em acordo, quem teve o filme escolhido ficará mais satisfeito* (10) *que o outro* (5)*;*
2. *Senão, ambos estarão igualmente insatisfeitos* (0)*.*

Com base nesse exemplo extraído e adaptado de Sartini et al. (2004), observa-se que:

- **Conjunto dos jogadores:**
$$J = \{\text{Bob, Elvira}\};$$
- **Conjunto das estratégias de Bob:**
$$E_\beta = \{\text{Romance, Terror}\};$$
- **Conjunto das estratégias de Elvira:**
$$E_\varepsilon = \{\text{Romance, Terror}\};$$
- **Conjunto dos perfis de estratégias puras do jogo:**
$$\begin{aligned} E &= \{(\{\text{Romance}\},\{\text{Romance}\}),\ (\{\text{Romance}\},\{\text{Terror}\}),\\ &\quad (\{\text{Terror}\},\{\text{Romance}\}),\ (\{\text{Terror}\},\{\text{Terror}\})\}; \end{aligned}$$
- As recompensas, atribuídas a cada jogador por sua função utilidade, referentes as possíveis combinações de estratégias são:
  - Para a combinação $(e_{1\beta}, e_{1\varepsilon}) = (\{\text{Romance}\},\{\text{Romance}\})$:
$$U_\beta(e_{1\beta}, e_{1\varepsilon}) = 10 \quad \text{e} \quad U_\varepsilon(e_{1\beta}, e_{1\varepsilon}) = 5;$$
  - Para a combinação $(e_{1\beta}, e_{2\varepsilon}) = (\{\text{Romance}\},\{\text{Terror}\})$:
$$U_\beta(e_{1\beta}, e_{2\varepsilon}) = 0 \quad \text{e} \quad U_\varepsilon(e_{1\beta}, e_{2\varepsilon}) = 0;$$
  - Para a combinação $(e_{2\beta}, e_{1\varepsilon}) = (\{\text{Terror}\},\{\text{Romance}\})$:
$$U_\beta(e_{2\beta}, e_{1\varepsilon}) = 0 \quad \text{e} \quad U_\varepsilon(e_{2\beta}, e_{1\varepsilon}) = 0;$$

– Para a combinação $(e_{2\beta}, e_{2\varepsilon}) = (\{\text{Terror}\},\{\text{Terror}\})$:

$$U_\beta(e_{2\beta}, e_{2\varepsilon}) = 5 \quad \text{e} \quad U_\varepsilon(e_{2\beta}, e_{2\varepsilon}) = 10.$$

Portanto, ao estabelecer uma notação básica para o jogo, pode-se identificar e classificar mais eficientemente cada informação dada.

Nos próximos capítulos, além de uma notação padrão, serão estudadas formas de representação visual que facilitam o entendimento de cada situação a partir de algumas características básicas.

3 A FORMA NORMAL

Neste capítulo, são apresentados os jogos estáticos e a sua representação, a forma normal. Em seguida, são estudados exemplos básicos e alguns métodos de busca das melhores soluções desses jogos.

Definição 9. *Um jogo é dito **simultâneo** ou **estático** quando cada um dos jogadores desconhece a decisão dos demais no momento em que toma a sua.*

Nesses jogos, assume-se que as escolhas dos jogadores são feitas ao mesmo tempo, sem saber o que os demais escolherão. A maneira de expor esses jogos chama-se forma normal ou forma estratégica.

Daqui por diante, é importante levar em consideração que cada jogador sabe da existência das estratégias dos demais jogadores e o que estas podem lhe afetar, tanto positiva quanto negativamente. É o que motiva a seguinte definição dada por Fiani (2009):

Definição 10. *Um jogo é dito de **informação completa** quando as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.*

3.1 A MATRIZ DE RECOMPENSAS

A forma normal de um jogo é representada por uma matriz de recompensas ou matriz de *payoffs* que consiste em uma tabela, onde estão expostas todas as informações necessárias para analisar a situação.

Nessa tabela, as ações de cada jogador e, ainda, as possíveis combinações de recompensas que cada um recebe ao optar por determinada estratégia estão explícitas — sendo que as linhas representam um dos jogadores e as colunas, o outro.

Exemplos são dados adiante, servindo para um melhor entendimento do arranjo das informações e apoio para a análise de cada característica.

Exemplo 4 (Exemplo Genérico)**.** *Dois jogadores, A e B, estão em uma determinada situação de interação estratégica. O jogador A tem à sua disposição duas estratégias, α e β, e o jogador B também, δ e θ. As recompensas atribuídas a cada possível escolha encontram-se na tabela a seguir:*

A \ B	δ	θ
α	(c, d)	(e, f)
β	(g, h)	(i, j)

Tabela 1: Matriz de *payoffs* do "Exemplo Genérico".

Logo, pelos os dados da tabela, percebe-se que:

- **Conjunto dos jogadores:**
$$J = \{A, B\};$$

- **Conjunto das estratégias de A:**
$$E_A = \{\alpha, \beta\};$$

- **Conjunto das estratégias de B:**
$$E_B = \{\delta, \theta\};$$

- **Conjunto dos perfis de estratégias puras do jogo:**
$$E = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \theta), (\beta, \delta), (\beta, \theta)\};$$

- As recompensas, atribuídas a cada jogador por sua função utilidade, referentes as possíveis combinações de estratégias são:
  - Para a combinação (α, δ):
$$U_A(\alpha, \delta) = c \quad \text{e} \quad U_B(\alpha, \delta) = d;$$
  - Para a combinação (α, θ):
$$U_A(\alpha, \theta) = e \quad \text{e} \quad U_B(\alpha, \theta) = f;$$
  - Para a combinação (β, δ):
$$U_A(\beta, \delta) = g \quad \text{e} \quad U_B(\beta, \delta) = h;$$
  - Para a combinação (β, θ):
$$U_A(\beta, \theta) = i \quad \text{e} \quad U_B(\beta, \theta) = j.$$

Exemplo 5 (O Dilema do Prisioneiro)**.** *Dois suspeitos de terem cometido um crime são presos pela polícia, porém, as provas ainda não são conclusivas. Mantidos em celas diferentes, não possuem contato algum entre si. Para resolver a situação, a promotoria oferece um mesmo acordo aos dois, separadamente:*

- *Se um confessar e o outro não, o que confessou sairá livre enquanto o que não colaborou será condenado a uma pena de dez anos de prisão;*

- *Se ambos confessarem, serão condenados a cinco anos de prisão cada;*

- *Se ambos não confessarem, serão condenados a um ano de prisão, pois sem a colaboração deles não há como obter uma condenação maior.*

Suspeito 1 \ Suspeito 2	Confessar	Não Confessar
Confessar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
Não Confessar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Tabela 2: Matriz de *payoffs* do "Dilema do Prisioneiro".

Essa tabela corresponde à representação do "Dilema do Prisioneiro" em sua forma normal. Para facilitar a análise dessas informações, denotar-se-á {Confessar} por C e {Não Confessar} por NC. Assim, segue que:

- **Conjunto dos jogadores:**

$$J = \{\text{Suspeito 1, Suspeito 2}\};$$

- **Conjunto das estratégias do Suspeito 1:**

$$E_1 = \{C, NC\};$$

- **Conjunto das estratégias do Suspeito 2:**

$$E_2 = \{C, NC\};$$

- **Conjunto dos perfis de estratégias puras do jogo:**

$$E = \{(C, C), (C, NC), (NC, C), (NC, NC)\};$$

- As recompensas referentes a cada possível combinação de estratégias são:

  – Para a combinação (C, C):

$$U_1(C, C) = -5 \quad \text{e} \quad U_2(C, C) = -5;$$

  – Para a combinação (C, NC):

$$U_1(C, NC) = 0 \quad \text{e} \quad U_2(C, NC) = -10;$$

  – Para a combinação (NC, C):

$$U_1(NC, C) = -10 \quad \text{e} \quad U_2(NC, C) = 0;$$

  – Para a combinação (NC, NC):

$$U_1(NC, NC) = -1 \quad \text{e} \quad U_2(NC, NC) = -1.$$

3.2 ESTRATÉGIAS DOMINANTES E DOMINADAS

Em um jogo pode-se lidar com um vasto número de estratégias, então é conveniente estipular alguns critérios que ajudem a estabelecer a importância de cada uma em relação às outras.

Nesse sentido, como feito por Sartini et al. (2004), define-se a seguir a ocorrência de uma estratégia ser estritamente dominante, fracamente dominante, estritamente dominada ou fracamente dominada.

Definição 11. *Seja G um jogo, com $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sejam e_i', e_i'' estratégias do jogador i e denote por e_{-i} uma escolha de estratégias dos demais jogadores. Considere ainda U_i, a função utilidade que determina as recompensas de i referentes a cada perfil de estratégias. Então, e_i'' é dita* ***estritamente dominante*** *em relação à e_i' se:*

$$U_i(e_i'', e_{-i}) > U_i(e_i', e_{-i}),\ \forall e_{-i} \in E_{-i}.$$

onde E_{-i} é o conjunto dos perfis de escolha dos jogares, exceto por i.

Em outras palavras, uma estratégia é estritamente dominante em relação a outra (do mesmo jogador) se ela resulta sempre em melhores resultados para ele, independente das escolhas dos demais jogadores.

Pela mesma razão, a estratégia e_i' é dita **estritamente dominada** pela estratégia e_i''.

Quando a desigualdade não é estrita, pode ocorrer ainda que:

Definição 12. *Seja G um jogo, com $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sejam e_i', e_i'' estratégias do jogador i e denote por e_{-i} uma escolha de possíveis estratégias dos demais jogadores. Considere ainda U_i, a função utilidade que determina as recompensas de i referentes a cada perfil de estratégias. Então, e_i'' é dita* ***fracamente dominante*** *em relação à e_i' se:*

$$\begin{aligned} U_i(e_i'', e_{-i}) &\geq U_i(e_i', e_{-i}),\ \forall e_{-i} \in E_{-i} \text{ e} \\ U_i(e_i'', e_{-i}) &> U_i(e_i', e_{-i}),\ \text{para algum } e_{-i} \in E_{-i}. \end{aligned}$$

onde E_{-i} é o conjunto dos perfis de escolha dos jogares, exceto por i.

Em outras palavras, uma estratégia é fracamente dominante em relação a outra (do mesmo jogador) se ela apresenta resultados melhores ou iguais do que as outras estratégias dele e apresenta um resultado estritamente melhor para, pelo menos, um perfil de estratégias.

Pela mesma razão, a estratégia e_i' é dita **fracamente dominada** pela estratégia e_i''.

Para se perceber melhor como esses conceitos se mostram na prática, são dados mais alguns exemplos a seguir:

Exemplo 6 (Uma Eleição à Moda Antiga)**.** *Os candidatos Odorico e Ascânio disputarão a próxima eleição à prefeitura da cidade. Enquanto Odorico tem uma vasta experiência nesse meio, Ascânio está concorrendo pela primeira vez. Com isso,*

- *Ascânio precisa decidir se divulga com mais antecedência sua candidatura ao cargo;*
- *Odorico precisa decidir se aumenta os gastos previstos para a sua campanha.*

A tabela representa o percentual de votos estimado por ambos em cada caso:

Odorico \ Ascânio	Divulgar	Não Divulgar
Aumentar	$(50, 50)$	$(60, 40)$
Não Aumentar	$(35, 65)$	$(70, 30)$

Tabela 3: Matriz de *payoffs* da "Eleição à Moda Antiga".

Neste exemplo, se Odorico escolhe aumentar os gastos com a campanha, Ascânio obterá maior percentual divulgando antes a sua candidatura ($50 > 40$). O mesmo ocorre se Odorico decidir não aumentar seus gastos ($65 > 30$).

Portanto, {Divulgar} é uma estratégia estritamente dominante de Ascânio. Consequentemente, {Não Divulgar} é uma estratégia estritamente dominada dele.

Deste modo, independente do que Odorico escolher, agindo de forma racional, Ascânio preferirá a estratégia {Divulgar}.

Agora, verificando as opções de Ascânio, se ele escolher divulgar a candidatura, Odorico obterá maior percentual se escolher {Aumentar} os gastos com a campanha ($50 > 35$).

Por outro lado, se Ascânio decidir não divulgar, Odorico obterá maior percentual se escolher {Não Aumentar} os gastos ($70 > 60$) — com uma intriga que pode ser evitada dentro do partido pelo uso desnecessário de verbas.

Logo, Odorico não possui estratégia estrita ou fracamente dominante e, assim, também não possui estratégia estrita ou fracamente dominada.

No exemplo seguinte, adaptado do trabalho de Gianturco (2018), embora a ideia principal seja vencer o adversário em cada território, dependendo do caso, acaba por se perceber que a conquista de empates pode ser suficiente.

Exemplo 7 (O Problema do Coronel Blotto)**.** *Em uma guerra, um coronel é encarregado de desenvolver uma estratégia de resposta ao rápido avanço de um exército inimigo por territórios neutros. O controle dessa área gira em torno de três territórios principais. Para planejar essas batalhas, ele sabe que:*

(i) *Tanto ele quanto o inimigo têm um número equivalente de seis tropas;*

(ii) *Conquista o território aquele que mobilizar mais tropas para ele;*

(iii) *Nenhum deles sabe quantas tropas o outro mobilizará para cada território;*

(iv) As tropas não podem ser dispostas de forma que cada campo possua menos tropas que o seu anterior;

(v) Vence a guerra aquele que conquistar mais territórios.

Note que os dois têm apenas três formas de posicionar suas tropas: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$ e $(1, 1, 4)$. Isso gera a seguinte tabela:

Blotto \ Inimigo	$(2, 2, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 1, 4)$
$(2, 2, 2)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
$(1, 2, 3)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 1, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

Tabela 4: Matriz de *payoffs* do “Coronel Blotto”.

Dado isso, segue que:

- $(1, 1, 4)$ contra $(1, 2, 3)$ gera um empate;
- $(1, 2, 3)$ contra $(2, 2, 2)$ gera um empate;
- $(2, 2, 2)$ vence $(1, 1, 4)$.

Note que $\{(2, 2, 2)\}$ é uma estratégia fracamente dominante em relação às demais estratégias para ambos os jogadores. Igualmente, $\{(1, 1, 4)\}$ é fracamente dominada por todas as outras.

Como o coronel sempre obterá uma recompensa maior ou igual do que se fizesse qualquer uma das outras escolhas, então segue que a melhor distribuição de tropas que ele pode fazer é $\{(2, 2, 2)\}$.

Esse modelo também é aplicável em sistemas eleitorais. Veja que, para ganhar o voto de um eleitor, cada partido ou candidato precisa investir tempo, dinheiro e energia maiores do que os adversários. Mas, não investem em vários campos visando ganhar todos os votos, apenas uma maioria.

Observe, ainda, que um excesso de promessas em campanha ou no exercício do governo pode estimular a expectativa dos eleitores e aumentar a popularidade, mas, frequentemente, tem como recompensa a própria maldição do vencedor.

3.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Após modelar uma situação de interação estratégica corretamente, é necessário saber como encontrar rapidamente quais estratégias maximizam as possíveis recompensas do jogador.

Para isso, serão apresentados métodos de resolução de jogos na forma normal, iniciando pela eliminação iterativa de estratégias dominadas e a busca pelo equilíbrio de Nash. Em alguns casos, é possível encontrar a melhor resposta pelos dois métodos, porém, isso depende da situação relacionada.

3.3.1 Eliminação Iterativa de Estratégias Dominadas

O cerne deste método é bem expresso por uma reflexão feita por Fiani (2009): considere uma situação de interação estratégica, onde uma opção sempre lhe fornece um resultado melhor do que as demais. Seria racional escolhê-la?

Trata-se da maneira mais simples de se encontrar o resultado de um jogo estático na forma normal, ou seja, aplicar o método da eliminação iterativa. Ele consiste no processo de exclusão das estratégias dominadas de cada jogador e, por consequência, na redução do tamanho do jogo.

Exemplo 8 (O Dilema do Prisioneiro)**.** *Retomando a situação desse exemplo, relembre a sua matriz de recompensas:*

Suspeito 1 \ Suspeito 2	Confessar	Não Confessar
Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
Não Confessar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

Tabela 5: Matriz de *payoffs* do "Dilema do Prisioneiro".

Note que, independente da estratégia que o Suspeito 1 escolher, o Suspeito 2 escolherá {Confessar}. Isto ocorre porque essa estratégia é estritamente dominante em relação à {Não Confessar}.

Da mesma forma, independente do que o Suspeito 2 escolher, o Suspeito 1 escolherá {Confessar}. Então, temos aqui uma estratégia estritamente dominante para cada jogador, destacadas pelas cores azul e vermelho (referente à estratégia de cada um) na tabela a seguir:

Suspeito 1 \ Suspeito 2	Confessar	Não Confessar
Confessar	$(\underline{-5},\underline{-5})$	$(\underline{0},-10)$
Não Confessar	$(-10,\underline{0})$	$(-1,-1)$

Tabela 6: Estratégias dominantes do "Dilema do Prisioneiro".

Assim, como {Confessar} é a melhor opção para ambos os jogadores, pela eliminação de estratégias estritamente dominadas, tem-se a seguinte redução do jogo:

Suspeito 2 / Suspeito 1	Confessar
Confessar	$(\underline{-5}, \underline{-5})$

Tabela 7: Eliminação iterativa do "Dilema do Prisioneiro".

Exemplo 9 (O Monopólio da Banana)**.** *Os reinos de Avilan e Salsaparrilha competem pelo monopólio da venda de bananas no mercado europeu. Como a exportação de Avilan já é um sucesso, Salsaparrilha está hesitante em declarar uma concorrência mais agressiva. Nesta situação, as alternativas são:*

- *Avilan: manter ou reduzir o preço da banana ou, ainda, investir na exportação de laranjas;*
- *Salsaparrilha: importar ou fabricar o maquinário necessário para a produção/colheita em larga escala de banana ou não declarar concorrência.*

A tabela, a seguir, apresenta a estimativa de lucro (em milhões) em cada caso:

Salsaparrilha / Avilan	Importar	Fabricar	Não Concorrer
Manter Preço	$(1,3)$	$(1,3)$	$(5,2)$
Novo Produto	$(4,2)$	$(6,1)$	$(4,1)$
Reduzir Preço	$(5,2)$	$(5,0)$	$(3,0)$

Tabela 8: Matriz de *payoffs* do "Monopólio da Banana".

Analisando as recompensas de Avilan, percebe-se que ele não possui uma estratégia estritamente dominante. De fato,

- Se Salsaparrilha decidir importar o maquinário, a melhor opção para Avilan é {Reduzir Preço};
- Se Salsaparrilha decidir fabricar o próprio maquinário, a melhor opção para Avilan é {Novo Produto};
- Se Salsaparrilha decidir não declarar uma concorrência direta, a melhor opção para Avilan é {Manter Preço}.

Analisando as recompensas de Salsaparrilha, percebe-se que {Não Concorrer} é estritamente dominada em relação à {Importar} (representado pelo destaque em vermelho):

Avilan \ Salsaparrilha	Importar	Fabricar	Não Concorrer
Manter Preço	$(1,3)$	$(1,3)$	$(5,2)$
Novo Produto	$(4,2)$	$(6,1)$	$(4,1)$
Reduzir Preço	$(5,2)$	$(5,0)$	$(3,0)$

Tabela 9: Estratégia Estritamente Dominada de Salsaparrilha.

Então, elimina-se a estratégia {Não Concorrer} de Salsaparrilha, deixando a tabela da seguinte forma:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar	Fabricar
Manter Preço	$(1,3)$	$(1,3)$
Novo Produto	$(4,2)$	$(6,1)$
Reduzir Preço	$(5,2)$	$(5,0)$

Tabela 10: Eliminação Iterativa da Estratégia Dominada (1ª Rodada).

Pela tabela acima, nota-se que a estratégia {Manter Preço} de Avilan é estritamente dominada pelas outras duas, ou seja, é a pior das suas escolhas, pouco importando o que Salsaparrilha escolhe. Assim:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar	Fabricar
Manter Preço	$(1,3)$	$(1,3)$
Novo Produto	$(4,2)$	$(6,1)$
Reduzir Preço	$(5,2)$	$(5,0)$

Tabela 11: Estratégia Estritamente Dominada de Avilan.

Eliminando (novamente) a estratégia estritamente dominada, a tabela é reduzida para:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar	Fabricar
Novo Produto	$(4, 2)$	$(6, 1)$
Reduzir Preço	$(5, 2)$	$(5, 0)$

Tabela 12: Eliminação Iterativa da Estratégia Dominada (2ª Rodada).

Seguindo, Salsaparrilha ainda possui a opção {Fabricar} que é estritamente dominada por {Importar}. É o que se destaca na tabela:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar	Fabricar
Novo Produto	$(4, 2)$	$(6, 1)$
Reduzir Preço	$(5, 2)$	$(5, 0)$

Tabela 13: Estratégia Estritamente Dominada de Salsaparrilha.

Eliminando essa estratégia, obtém-se:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar
Novo Produto	$(4, 2)$
Reduzir Preço	$(5, 2)$

Tabela 14: Eliminação Iterativa da Estratégia Dominada (3ª Rodada).

E, como a estratégia {Novo Produto} é estritamente dominada por {Reduzir Preço}, então:

Avilan \ Salsaparrilha	Importar
Novo Produto	$(4, 2)$
Reduzir Preço	$(5, 2)$

Tabela 15: Estratégia Estritamente Dominada de Avilan.

Avilan \ Salsaparrilha	Importar
Reduzir Preço	$(5,2)$

Tabela 16: Eliminação Iterativa da Estratégia Dominada (4ª Rodada).

Portanto, o resultado desse jogo, por eliminação iterativa de estratégias dominadas, é o perfil de estratégias puras ({Reduzir Preço}, {Importar}) com recompensas $(5,2)$ para os reinos de Avilan e Salsaparrilha, respectivamente.

3.3.2 Equilíbrio de Nash

Existem situações em que não é possível encontrar uma solução racional para o jogo pelo método de eliminação das estratégias dominadas, por estas não existirem (DUTTA, 1999).

Para estes casos, outro método de resolução é a busca pelo chamado equilíbrio de Nash. Como definido por Sartini et al. (2004):

Definição 13 (Equilíbrio de Nash)**.** *Dada a função utilidade U_i (correspondente ao jogador i) e um perfil de estratégias puras $e^* = (e_1^*, \ldots, e_{i-1}^*, e_i^*, e_{i+1}^*, \ldots, e_n^*)$, esse perfil é dito um **equilíbrio de Nash** se:*

$$U_i(e_i^*, e_{-i}^*) \geq U_i(e_{ij_i}, e_{-i}^*), \ \forall i \in J, \ \forall j_i \in \{1, \ldots, m_i\}.$$

Em outras palavras, há um equilíbrio de Nash quando a melhor resposta de cada jogador, fixadas as estratégias dos demais, coincide em um mesmo perfil de estratégias puras.

Vale ressaltar que, se a combinação de estratégias escolhida for um equilíbrio de Nash, nenhum dos jogadores terá motivação para trocar de estratégia.

Uma maneira prática de se obter os possíveis equilíbrios de um jogo (com dois jogadores) é fixar cada uma das estratégias do primeiro jogador e verificar quais são as melhores respostas do segundo à elas. Em seguida, o mesmo é feito com o segundo e verificadas as melhores respostas do primeiro.

Exemplo 10 (Dilema do Prisioneiro)**.** *Investigando novamente esse exemplo, agora em busca dos equilíbrios de Nash desse jogo:*

Suspeito 1 \ Suspeito 2	Confessar	Não Confessar
Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
Não Confessar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

Tabela 17: Matriz de *payoffs* do "Dilema do Prisioneiro".

Note que se um dos suspeitos escolher {Confessar}, então a melhor escolha para o outro também será essa. De fato, nesse caso, não confessar significa pegar dez anos de prisão, ao invés de cinco, caso confessasse.

Do mesmo modo, se um deles escolher {Não Confessar}, a melhor resposta para o outro ainda é {Confessar}. É isso que está ressaltado pelas cores azul e vermelha (referentes a cada jogador) na tabela a seguir:

Suspeito 1 \ Suspeito 2	Confessar	Não Confessar
Confessar	$(\underline{-5}, \underline{-5})$	$(\underline{0}, -10)$
Não Confessar	$(-10, \underline{0})$	$(-1, -1)$

Tabela 18: Matriz de *payoffs* do “Dilema do Prisioneiro”.

Logo, os dois tendem a confessar o crime e o perfil de estratégias ({Confessar},{Confessar}) é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Exemplo 11. *Em uma determinada situação estratégica, os jogadores* 1 *e* 2 *dispõem, respectivamente, dos conjuntos de estratégias* $\{A, B\}$ *e* $\{C, D, E\}$*. As recompensas desse jogo são dadas pela tabela abaixo:*

Jogador 1 \ Jogador 2	C	D	E
A	$(5, 4)$	$(11, 1)$	$(0, 0)$
B	$(6, -1)$	$(0, 1)$	$(2, 2)$

Tabela 19: Matriz de *payoffs* da situação estratégica.

Analisando essa tabela, percebe-se que nenhum dos jogadores possui estratégia estrita/fracamente dominante. Então, não é possível resolver o jogo por eliminação iterativa de estratégias dominadas.

Sendo assim, o próximo passo é verificar a existência de possíveis equilíbros de Nash.

Fixando cada estratégia do Jogador 1:

- Se ele escolher a estratégia {A}, a melhor escolha para o Jogador 2 é {C}, pois a recompensa é maior do que se escolher {D} ou {E};
- Se ele escolher a estratégia {B}, a melhor escolha para o Jogador 2 é {E}, pois a recompensa é maior do que se escolher {C} ou {D}.

É o que se destaca na tabela a seguir:

Jogador 1 \ Jogador 2	C	D	E
A	$(5, \underline{4})$	$(11, 1)$	$(0, 0)$
B	$(6, -1)$	$(0, 1)$	$(2, \underline{2})$

Tabela 20: Matriz com as melhores decisões para o Jogador 2.

E, agora, fixando as do Jogador 2:

- Se ele escolher a estratégia {C}, a melhor escolha para o Jogador 1 é {B}, pois a recompensa é maior do que se escolher {A};
- Se ele escolher a estratégia {D}, a melhor escolha para o Jogador 1 é {A}, pois a recompensa é maior do que se escolher {B};
- Se ele escolher a estratégia {E}, a melhor escolha para o Jogador 1 é {B}, pois a recompensa é maior do que se escolher {A}.

A tabela, a seguir, destaca esses resultados:

Jogador 1 \ Jogador 2	C	D	E
A	$(5, 4)$	$(\underline{11}, 1)$	$(0, 0)$
B	$(\underline{6}, -1)$	$(0, 1)$	$(\underline{2}, 2)$

Tabela 21: Matriz com as melhores decisões para o Jogador 1.

Finalmente, sabendo quais são as melhores escolhas dos jogadores em cada caso, pode-se escrever:

Jogador 1 \ Jogador 2	C	D	E
A	$(5, \underline{4})$	$(\underline{11}, 1)$	$(0, 0)$
B	$(\underline{6}, -1)$	$(0, 1)$	$(\underline{2}, \underline{2})$

Tabela 22: Matriz de *payoffs* com equilíbrio de Nash.

Logo, como pode ser visto na tabela acima, o perfil de estratégias puras ({B},{E}) é o único equilíbrio de Nash do jogo.

3.3.3 Ótimo de Pareto

Como já visto, quando existe em estratégias puras, um equilíbrio de Nash pode não ser único. Nesse caso, o conceito seguinte pode servir de auxílio. Com base na definição de Fiani (2009):

Definição 14. *Uma situação é dita um **ótimo de Pareto** do jogo quando não é mais possível melhorar a recompensa de um jogador sem piorar a de outro.*

Essa situação é esclarecida no exemplo adaptado a seguir, mencionado por Gianturco (2018).

Exemplo 12 (A Caça ao Javali)**.** *Dois caçadores, A e B, combinam de se encontrar em determinado horário e local para caçar. Eles sabem que sozinhos, cada um pode caçar um coelho; se estiverem juntos, podem caçar um javali (que rende mais alimento para cada do que apenas um coelho). Além disso, possuem também as informações e a noção da tabela dadas a seguir:*

- *Se os dois aparecerem, caçarão o javali;*
- *Se nenhum dos dois aparecer, cada um caçará um coelho;*
- *Se um aparece e o outro não, quem não apareceu vai caçar o coelho e quem foi para a área do javali (com o equipamento específico) não poderá caçar nada.*

Caçador B / Caçador A	Comparecer	Não Comparecer
Comparecer	$(100, 100)$	$(0, 1)$
Não Comparecer	$(1, 0)$	$(1, 1)$

Tabela 23: Matriz de *payoffs* da "Caça ao Javali".

Nessa situação, a possibilidade de caçar o javali está estritamente ligada aos dois comparecerem ao encontro. Se apenas um dos dois aparecer, o esforço deste será em vão e acabará não ganhando nada.

Verificando a tabela, constata-se que não existem estratégias dominantes/dominadas, mas possui os seguintes equilíbrios de Nash:

Caçador A \ Caçador B	Comparecer	Não Comparecer
Comparecer	$(\underline{100}, \underline{100})$	$(0, 1)$
Não Comparecer	$(1, 0)$	$(\underline{1}, \underline{1})$

Tabela 24: Equilíbrios de Nash da "Caça ao Javali".

Sabendo disso, qual a probabilidade de que haja cooperação entre os dois?

Levando em consideração que o resultado de caçar juntos é muito mais proveitoso para os dois do que cada um caçar isoladamente, um ótimo de Pareto é encontrado em ({Comparecer},{Comparecer}) e a união é quase certa.

Mais exemplos quanto à aplicação desse conceito podem ser vistos no livre mercado. Com a especialização, a divisão do trabalho e o comércio, cada um pode produzir algo e depois negociar (de forma justa) com os demais. Assim, todos acabam obtendo mais bens/serviços do que se tivessem que produzi-los sozinhos (GIANTURCO, 2018).

3.3.4 Estratégias Maximin

A motivação por trás da análise desse tipo de estratégias gira em torno da noção de que, embora os jogadores procurem sempre um maior ganho, racionalmente também evitam a possibilidade de uma grande perda: maximizando um ganho mínimo (DUTTA, 1999).

Em alguns casos, inclusive, a solução não pertence sequer aos equilíbrios de Nash do jogo. Um exemplo disso é fornecido por Fernandez e Berni (2014), sendo adaptado a seguir:

Exemplo 13 (O Jogo do Covarde)**.** *Na década de 1950, nos EUA, eram comuns as apostas de corrida de carros (rachas) até um penhasco ou de um em direção ao outro, onde:*

- *Aquele que freava ou desviava antes era o perdedor (ou covarde);*
- *Se ambos desviassem, ninguém perderia a aposta;*
- *Se ninguém desviasse, provavelmente sofreriam um acidente fatal.*

É o que representa a tabela a seguir:

Rachador A \ Rachador B	Desviar	Não Desviar
Desviar	$(0, 0)$	$(-1, 2)$
Não Desviar	$(2, -1)$	$(-100, -100)$

Tabela 25: Matriz de *payoffs* do "Jogo do Covarde".

É difícil mensurar os efeitos psicológicos sobre os jogadores da possibilidade de um resultado fatal, mas, as recompensas buscam representar essas preferências.

A situação descrita aqui também é um pouco mais complexa do que a dos jogos vistos anteriormente. Isso porque a recompensa mais desejada não é vencer o jogo, mas sobreviver.

Como não existem estratégias dominantes, a tabela seguinte apresenta diretamente os resultados da procura pelos equilíbrios de Nash:

Rachador A \ Rachador B	Desviar	Não Desviar
Desviar	$(0, 0)$	$(\underline{-1}, \underline{2})$
Não Desviar	$(\underline{2}, \underline{-1})$	$(-100, -100)$

Tabela 26: Matriz de *payoffs* com os equilíbrios de Nash.

Apesar disso, estando em risco a própria vida, a ideia é que os jogadores acabariam por cooperar entre si. Logo, a solução mais racional seria ({Desviar},{Desviar}) — que não é um equilíbrio de Nash desse jogo.

Observe ainda que nessa interação, até a cooperação unilateral é vantajosa: afinal, em todo caso, sobrevive-se. Então, constatado o prejuízo da escolha, o jogador opta por outra (menos danosa) e acaba se utilizando, portanto, de uma estratégia maximin.

Entretanto, ainda existem situações que não são bem compreendidas quando modeladas na forma normal. Isso ocorre pelos pressupostos assumidos ao se modelar nessa forma, que partem do desconhecimento de cada jogador em relação à escolha dos demais.

É o que será revisado no capítulo seguinte, incluindo uma nova informação relevante à modelagem: de que um jogador pode saber quais foram as escolhas dos demais.

4 A FORMA ESTENDIDA

Neste capítulo, são tratadas situações de interação estratégica em que a solução não é encontrada em um único momento, mas, após um número considerável de momentos sucessivos: os jogos dinâmicos.

Em seguida, será visto como é realizada a sua representação na forma estendida, alguns exemplos básicos e, por último, a sua resolução por indução reversa.

Definição 15. *Um jogo é dito* ***sequencial*** *ou* ***dinâmico*** *quando os jogadores fazem suas escolhas em uma ordem previamente estabelecida e ao menos um deles sabe o que algum dos anteriores escolheu.*

Em jogos dinâmicos, os jogadores fazem suas escolhas com base nas anteriores e, consequentemente, nas futuras. Portanto, dependendo de como os outros se comportam e da intenção que tem para com eles, o jogador pode mudar a sua estratégia (FIANI, 2009).

Para representar esse tipo de jogo utiliza-se a forma estendida, que consiste em uma árvore de possibilidades, na qual se descreve a evolução no tempo das possíveis ações adotadas por cada jogador.

Porém, antes de prosseguir nesse estudo, convém distinguir esses jogos em duas classes quanto à informação: perfeita ou imperfeita. Pela definição de Fiani (2009):

Definição 16. *Um jogo é dito de* ***informação perfeita*** *se cada jogador sabe a ordem das escolhas do jogo e quais foram as decisões tomadas pelos jogadores precedentes à sua.*

Definição 17. *Um jogo é dito de* ***informação imperfeita*** *se algum dos jogadores desconhece a ordem das escolhas do jogo ou alguma das decisões tomadas pelos jogadores precedentes à sua.*

Devido aos objetivos deste trabalho, apenas jogos de informação perfeita serão abordados. As definições e exemplos seguintes foram baseados nos trabalhos de Fiani (2009), Shoham e Leyton-Brown (2010).

4.1 A ÁRVORE DO JOGO

Em um jogo dinâmico, a representação das interações estratégicas é feita por meio da árvore do jogo. Ela é composta, basicamente, por nós e ramos. Pela definição de Fiani (2009):

Definição 18. *Qualquer momento do jogo em que algum jogador deve fazer uma escolha é chamado de* ***nó*** *e cada ação desses jogadores, a partir dos seus nós, é dita um* ***ramo*** *da árvore.*

Uma árvore começa pela escolha do primeiro jogador, o seu nó inicial. A partir dessa primeira ação, um próximo nó de decisão (com seus ramos) se torna possível e, com isso, também os nós e ramos seguintes dos demais jogadores ligados a ele. Assim, no decorrer do jogo, os nós e ramos tornam-se possíveis ou não através das decisões tomadas pelos jogadores anteriores.

Definição 19. *Um nó é dito* ***sucessor*** *se, dado um nó qualquer na árvore, ele é uma escolha futura possível, caso o nó original seja alcançado no jogo. Um nó* ***predecessor*** *é aquele que tem de ser alcançado para que o original se torne possível.*

Portanto, um **nó inicial** pode ser caracterizado como aquele que não possui predecessor e um **nó final** como aquele que não possui um sucessor.

Os nós finais da árvore apresentam as recompensas dos jogadores, expressas em números e na ordem da entrada deles no jogo.

Com todos os elementos da árvore bem definidos, algumas regras devem ser estabelecidas para que a modelagem do jogo nesta forma seja coerente e represente corretamente a situação analisada.

Para Dutta (1999), a árvore do jogo necessita satisfazer os seguintes axiomas:

I. **Ponto de partida único:** conter apenas um nó inicial é fundamental para saber onde o jogo, de fato, começa;

II. **Sem ciclos:** os ramos não podem criar ciclos ou retornarem para nós anteriores, pois o jogo nunca deve acabar num impasse;

III. **Uma maneira de proceder:** é importante que não haja ambiguidade sobre o prosseguimento do jogo e, assim, dois ou mais ramos não devem levar a um único nó;

IV. **Um nó não pode ser predecessor de si mesmo**;

V. **O predecessor de um predecessor também é um predecessor:** se um nó β for um predecessor de γ e um nó α é, por sua vez, um predecessor de β, então α também é predecessor de γ;

VI. **Predecessores podem ser classificados:** se α e β são ambos predecessores de γ, então α é um predecessor de β ou vice-versa;

VII. **Existe um predecessor comum:** considere dois nós quaisquer, α e β, tais que um não precede o outro, então, existe um nó γ que é predecessor de α e β.

Exemplo 14 (O Jogo da Entrada). *Uma empresa (Desafiante) pretende entrar em determinado mercado onde uma outra empresa (Dominante) já está estabelecida. A árvore de jogo a seguir, com recompensas dadas em milhões de reais, representa esta situação:*

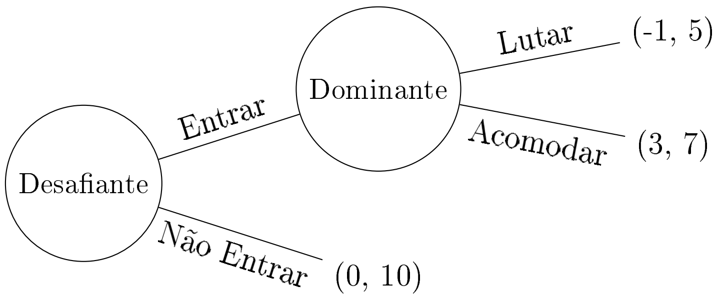

Figura 1: Árvore do "Jogo da Entrada".

Pela análise dos dados, pecebe-se que as escolhas possíveis para cada empresa são:

- Desafiante: {Entrar, Não Entrar};
- Dominante: {Lutar, Acomodar}.

Note que, se a empresa Desafiante optar por {Não Entrar} nesse mercado, não há motivo para qualquer ação da empresa Dominante.

A ação {Lutar}, da empresa Dominante, refere-se à adotar uma estratégia de guerra de preços, campanhas agressivas de marketing ou qualquer outra que evite uma redução significativa dos seus lucros.

Por outro lado, escolhendo {Acomodar}, ela decide diminuir sua produção e abrir espaço para a empresa Desafiante entrar no mercado e não afetar sua produção total por uma guerra de ofertas.

As recompensas previstas das empresas Desafiante e Dominante (em cada caso), respectivamente, são:

- Caso ({Entrar},{Lutar}): $(-1, 5)$;
- Caso ({Entrar},{Acomodar}): $(3, 7)$;
- Caso ({Não Entrar},{}): $(0, 10)$.

Como já dito, as recompensas são quantificadas em milhões de reais, onde os resultados negativos representam quanto a empresa pode perder e os positivos, quanto pode ganhar.

4.1.1 Refinamento da Árvore

Uma descrição matemática mais precisa de jogos na forma estendida é dada por Shoham e Leyton-Brown (2010). Eles definem um jogo de informação perfeita dado nessa forma como uma árvore (no sentido da Teoria dos Grafos), onde:

- Cada nó representa a escolha de um dos jogadores;
- Cada ramo (aresta) representa uma ação possível;
- As folhas (nós terminais) representam o resultado final, onde é mostrada a função utilidade de cada jogador.

É o que se define, a seguir, mais rigorosamente:

Definição 20. *Um jogo finito de informação perfeita na forma estendida é uma 8-upla* $G = (N, \Lambda, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$*, onde:*

- N *é um conjunto de* n *jogadores;*
- Λ *é um conjunto (único) de ações;*
- H *é um conjunto de nós de decisão não-terminais;*
- Z *é um conjunto de nós terminais (disjunto de* H*);*
- $\chi : H \to 2^{\Lambda}$ *é a função escolha, que atribui a cada nó de decisão um conjunto de ações possíveis;*
- $\rho : H \to N$ *é a função jogador, que atribui um jogador* $i \in N$ *a cada nó não-terminal (que faz a escolha desse nó);*
- $\sigma : H \times \Lambda \to H \cup Z$ *é a função sucessora, que mapeia um nó de decisão e uma ação para um novo nó de decisão ou nó terminal de forma que,* $\forall h_1, h_2 \in H$ *e* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$*, se* $\sigma(h_1, \lambda_1) = \sigma(h_2, \lambda_2)$*, então* $h_1 = h_2$ *e* $\lambda_1 = \lambda_2$*;*
- $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$*, onde* $u_i : Z \to \mathbb{R}$ *é uma função real que representa as recompensas para o jogador* i *nos nós terminais do conjunto* Z*.*

Exemplo 15 (O Jogo Televisivo)**.** *Duas emissoras de televisão, Canal 09 e Canal 12, fazem parte da indústria da informação e entretenimento. O Canal 09 especula se é vantajoso lançar um novo programa em sua grade. Sabendo disso, o Canal 12 também pondera se mantém a sua grade atual ou a modifica. A representação dessa situação é dada a seguir, onde as recompensas são as projeções dos pontos de IBOPE em cada caso:*

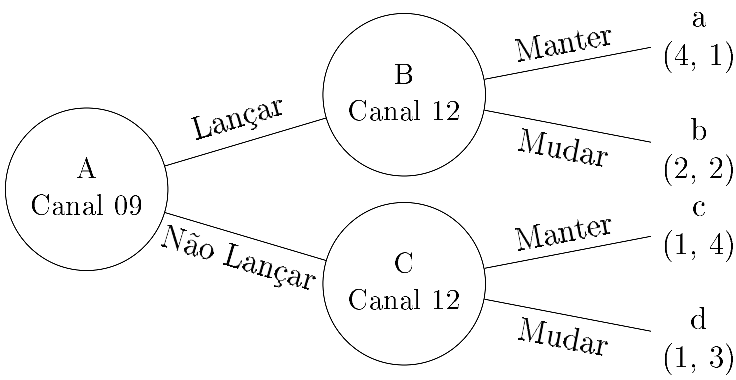

Figura 2: Árvore do "Jogo Televisivo".

Assim, pelo que foi definido anteriormente, pode-se verificar que:

- **Conjunto de jogadores:**

  N = {Canal 09, Canal 12};

- **Conjunto de ações:**

  A = {Lançar, Não Lançar, Manter, Mudar};

- **Conjunto de nós não-terminais:**

  H = {A, B, C};

- **Conjunto de nós terminais:**

  Z = {a, b, c, d};

- **Função escolha χ:**

  A $\mapsto$ {Lançar, Não Lançar};
  B $\mapsto$ {Manter, Mudar};
  C $\mapsto$ {Manter, Mudar}.

- **Função jogador ρ:**

  A $\mapsto$ Canal 09;
  B $\mapsto$ Canal 12;
  C $\mapsto$ Canal 12.

- **Função sucessora $\boldsymbol{\sigma}$:**

  (A, Lançar) $\mapsto$ B;
  (A, Não Lançar) $\mapsto$ C;
  (B, Manter) $\mapsto$ a;
  (B, Mudar) $\mapsto$ b;
  (C, Manter) $\mapsto$ c;
  (C, Mudar) $\mapsto$ d.

- **Função utilidade $\boldsymbol{u = (u_9, u_{12})}$:**

u_9	u_{12}
$u_9(a) = 4$	$u_{12}(a) = 1$
$u_9(b) = 2$	$u_{12}(b) = 2$
$u_9(c) = 1$	$u_{12}(c) = 4$
$u_9(d) = 1$	$u_{12}(d) = 3$

Importante se notar que, em jogos dados na forma estendida, a estratégia de um jogador é um plano de ações que especifica qual escolha fazer em cada nó de decisão que lhe pertence.

Dessa observação, segue a nossa próxima definição:

Definição 21. *Seja $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ um jogo de informação perfeita, dado na forma estendida. Então, as **estratégias puras do jogador i** consistem no produto cartesiano:*

$$E_i = \prod_{\substack{h \in H \\ \rho(h) = i}} \chi(h), \text{ onde } \chi \text{ é a função escolha do jogo.}$$

Exemplo 16 (O Jogo Televisivo)**.** *Considere novamente a situação anterior, envolvendo as emissoras de televisão:*

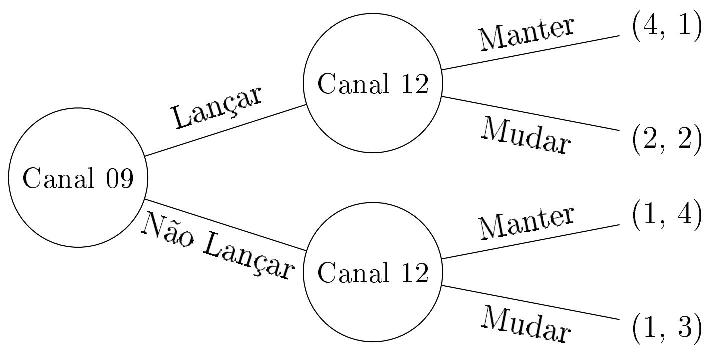

Figura 3: Árvore do “Jogo Televisivo”.

Note que a estratégia de um jogador requer que uma escolha seja feita em cada nó de decisão, independente desse nó ser ou não alcançado durante o jogo.

Sendo assim, neste jogo, o Canal 09 tem duas estratégias puras e o Canal 12 possui quatro, como mostrado a seguir:

- Estratégias do Canal 09:

$$E_9 = \{\text{Lançar, Não Lançar}\};$$

- Estratégias do Canal 12:

$$\begin{aligned} E_{12} = \{&(\{\text{Manter}\},\{\text{Manter}\}),\\ &(\{\text{Manter}\},\{\text{Mudar}\}),\\ &(\{\text{Mudar}\},\{\text{Manter}\}),\\ &(\{\text{Mudar}\},\{\text{Mudar}\})\}. \end{aligned}$$

4.2 REPRESENTAÇÃO NORMAL *VERSUS* ESTENDIDA

Até agora, foi visto como uma interação estratégica pode ser analisada através da forma normal ou da forma estendida. Porém, essa representação não é única.

Logo mais, será discutido como é possível que jogos dinâmicos sejam representados na forma normal. Também pode-se representar jogos estáticos na forma estendida, entretanto, como essa conversão envolve jogos de informação imperfeita, não será abordado neste trabalho.

Exemplo 17 (O Jogo Televisivo)**.** *Retome o exemplo anterior, cuja árvore é dada a seguir:*

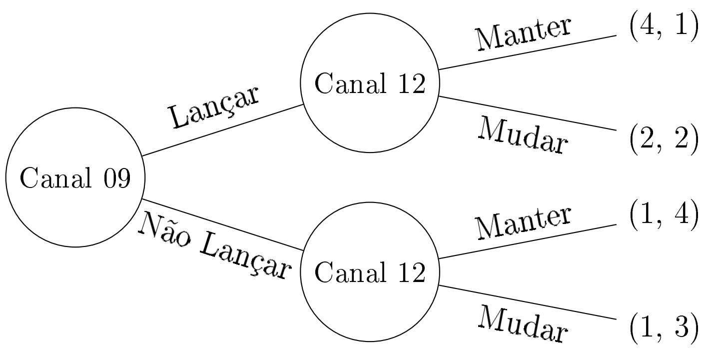

Figura 4: Árvore do "Jogo Televisivo".

Para converter essa árvore em uma matriz de recompensas, é necessário notar (com atenção) como cada elemento está definido nessa primeira forma.

Como já se sabe quais são as estratégias de cada emissora, a conversão desse jogo para a forma normal resulta na seguinte tabela:

Canal 09 \ Canal 12	Manter, Manter	Manter, Mudar	Mudar, Manter	Mudar, Mudar
Lançar	$(4,1)$	$(4,1)$	$(2,2)$	$(2,2)$
Não Lançar	$(1,4)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,3)$

Tabela 27: Matriz de *payoffs* do "Jogo Televisivo".

Repare que a diferença entre uma matriz que representa um jogo estático e essa é o fato de não haver apenas uma ação por coluna.

Com efeito, em um jogo dinâmico, a estratégia se dá por um plano de ação do jogador especificando o que ele irá escolher em cada momento do jogo que exija alguma decisão sua.

Assim, o primeiro elemento do plano de ação que compõe a estratégia do Canal 12 corresponde à ação da primeira linha do Canal 09 e o segundo elemendo corresponde à ação da segunda linha.

Apesar de ser possível, vale ressaltar que a forma normal não é a representação ideal para este tipo de jogo, pois não se pode identificar a sequência de movimentos dos jogadores por essa tabela.

Logo, representá-lo nessa forma pode acarretar na perda da informação dos desdobramentos das escolhas dos jogadores e da noção de tempo entre as jogadas: a solução é dada como se tivesse apenas um momento de decisão.

Por fim, vale ainda o seguinte questionamento: será que essa matriz (mesmo com todos os seus contrapontos) possibilita encontrar os possíveis equilíbrios de Nash, assim como em um jogo estático?

4.3 EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS DINÂMICOS

Considere um jogo dinâmico representado na forma normal. Para uma análise aprofundada das suas características, é necessário saber antes se, de fato, existem equilíbrios de Nash nesse tipo de interação.

Com esse intuito, é enunciado o teorema que garante a existência desses equilíbrios para a classe de problemas abordados neste trabalho e cuja demonstração é fornecida por Shoham e Leyton-Brown (2010).

Teorema 1. *Todo jogo finito de informação perfeita na forma estendida tem um equilíbrio de Nash em estratégias puras.*

Porém, mesmo com esse resultado, há casos em que os equilíbrios de Nash encontrados não representam as melhores decisões dos nós correspondentes. É o que será visto a seguir.

Exemplo 18 (O Jogo da Entrada)**.** *Considerando novamente essa situação, é observada a sua árvore e a matriz de recompensas a seguir:*

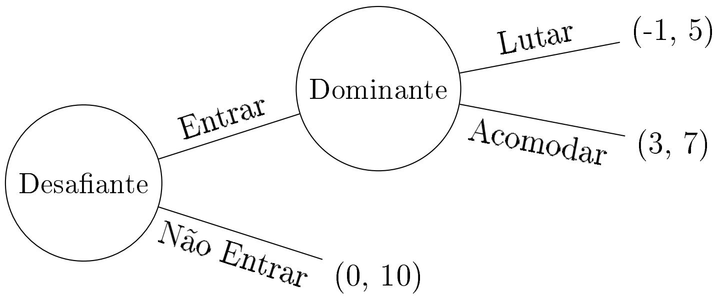

Figura 5: Árvore do "Jogo da Entrada".

Dominante Desafiante	Lutar	Acomodar
Entrar	$(-1, 5)$	$(3, 7)$
Não Entrar	$(0, 10)$	$(0, 10)$

Tabela 28: Matriz de *payoffs* do "Jogo da Entrada".

Note que, nesta matriz, as combinações de estratégias ({Não Entrar},{Lutar}) e ({Não Entrar},{Acomodar}) possuem a mesma recompensa $(0, 10)$: se {Não Entrar} for escolhida, a empresa Dominante não terá necessidade de reação, portanto, a recompensa é igual nesse caso.

Da mesma maneira feita para jogos estáticos, pode-se agora encontrar os equilíbrios de Nash desse jogo:

Dominante Desafiante	Lutar	Acomodar
Entrar	$(-1, 5)$	$(\underline{3}, \underline{7})$
Não Entrar	$(\underline{0}, \underline{10})$	$(0, 10)$

Tabela 29: Equilíbrios de Nash do "Jogo da Entrada".

Logo, temos dois equilíbrios de Nash nesse jogo. Contudo, a combinação ({Não Entrar},{Lutar}) supõe a escolha da opção {Lutar}, o que não faz muito sentido, pois trata-se de uma estratégia fracamente dominada desta empresa.

Portanto, já temos o exemplo de que um equilíbrio de Nash em estratégias puras que não faz sentido — inclusive, quando se pensa na situação concreta.

De fato, como dito por Fiani (2009), isso ocorre naturalmente. Em jogos dinâmicos de informação perfeita, a conversão tende a gerar um número excessivo de equilíbrios de Nash.

Consequentemente, é preciso refinar a noção de equilíbrio de Nash para que forneça apenas os perfis de estratégias com as melhores escolhas para ambos os jogadores, independente da ordem em que foram feitas.

Esse refinamento é dado pelo conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, como será visto logo mais; antes, é necessário introduzir alguns conceitos intermediários.

4.4 SUBJOGOS

Dada uma árvore de jogo qualquer, existem algumas partes que podem ser vistas como jogos reduzidos, ou seja, partes que satisfazem as mesmas condições necessárias de uma árvore. Com base nisso, é dada a seguinte definição por Dutta (1999):

Definição 22. *Uma parte da árvore do jogo, formada por uma coleção de nós e ramos, é dita um* ***subjogo*** *se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) inicia em um único nó de decisão;

(ii) contém cada sucessor deste nó;

(iii) se contiver qualquer parte de um conjunto de informação, ele contém todos os nós desse conjunto.

O conceito de conjunto de informação está mais relacionado a jogos de informação imperfeita. Como serão trabalhados apenas jogos de informação perfeita, os conjuntos serão unitários e, portanto, conterão todos os nós necessários.

4.4.1 Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

Agora, com a noção do que é um subjogo, é possível construir um conceito (em jogos dinâmicos) que corresponda apenas aos perfis que, de fato, são as melhores escolhas dos jogadores em qualquer contexto.

Esse refinamento é trazido por Fiani (2009):

Definição 23. *Uma combinação de estratégias é dita um* ***equilíbrio de Nash perfeito em subjogos*** *se:*

(i) é um equilíbrio de Nash para o jogo;

(ii) é um equilíbrio de Nash para cada subjogo.

Disto segue que todo equilíbrio perfeito em subjogos é um equilíbrio de Nash, pois todo jogo também é um subjogo de si mesmo. Entretanto, em jogos dinâmicos, nem todo equilíbrio de Nash é, necessariamente, um equilíbrio perfeito em subjogos.

Um procedimento para encontrar esses equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos (ENPS) é feito da seguinte maneira:

I. Reescrever o jogo dinâmico da forma estendida para a normal;

II. Tendo a matriz de recompensas, localizar todos os seus equilíbrios de Nash;

III. Voltando à árvore do jogo, identificar todos os subjogos que existem nele;

IV. Testar todos os equilíbrios de Nash em cada subjogo correspondente.

Exemplo 19 (O Jogo da Entrada)**.** *Retomando este exemplo, a última questão levantada já pode ser resolvida. Acompanhe a árvore e a matriz desse jogo a seguir, com seus subjogos e equilíbrios já detalhados:*

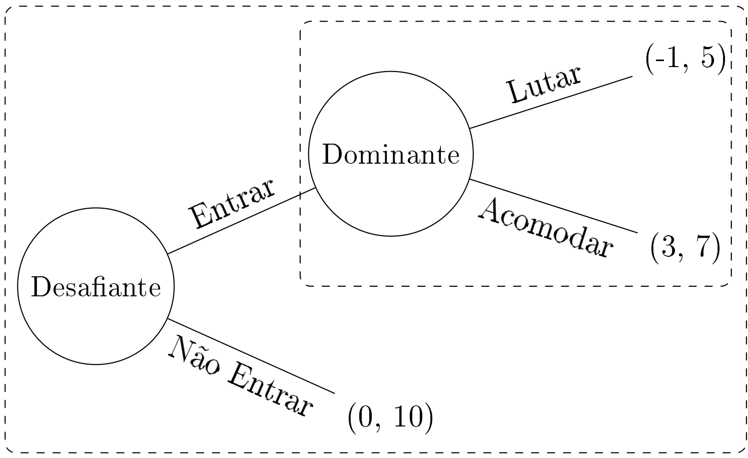

Figura 6: Árvore (com subjogos) do "Jogo da Entrada".

Dominante / Desafiante	Lutar	Acomodar
Entrar	$(-1, 5)$	$(\underline{3}, \underline{7})$
Não Entrar	$(\underline{0}, \underline{10})$	$(0, 10)$

Tabela 30: Matriz (com equilíbrios de Nash) do "Jogo da Entrada".

A partir disso, observa-se a existência de dois subjogos e dois equilíbrios de Nash para esse jogo.

Testando os equilíbrios em cada subjogo, se verifica que a estratégia ({Não Entrar},{Lutar}) não é um equilíbrio do subjogo menor. Por consequência, não pode ser um ENPS.

Por outro lado, a estratégia ({Entrar},{Acomodar}) é um equilíbrio tanto em um quanto em outro e, portanto, é o único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos desse jogo.

Note que esse processo de transformar uma árvore de jogo em uma matriz de recompensas, encontrar os seus equilíbrios de Nash e os seus subjogos e, ainda, verificar quais equilíbrios satisfazem as condições para ser um ENPS pode se tornar uma tarefa demorada, a depender do tamanho do jogo.

Essa é a motivação para a busca de um método mais prático para resolução de jogos maiores, o qual será visto na próxima seção.

4.5 O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA

Este método é aplicado em jogos dinâmicos como uma maneira mais eficiente para encontrar os seus ENPS.

A ideia é analisar a árvore do jogo de "trás para frente", partindo dos nós finais (com as recompensas de cada jogador) até o primeiro nó de decisão, tentando identificar em cada momento quais são as melhores escolhas para cada jogador.

Com base no que foi dito por Prisner (2014), o algoritmo desse método pode ser descrito da seguinte maneira:

I. Tome qualquer nó que seja imediatamente anterior aos nós terminais, isto é, qualquer um que o jogo acabe após um movimento decorrente dele;

II. Como, por hipótese, essa escolha é feita de forma racional, selecione o ramo que oferece a maior recompensa ao jogador da vez;

III. Exclua todos os ramos cuja recompensa não foi a selecionada;

IV. Atribua essa recompensa para o nó em questão e desconsidere todos os ramos a partir deste nó (reduzindo o jogo);

V. Perceba que, neste novo jogo, este nó também comporta-se como um nó terminal;

VI. Repita esse procedimento até que o nó inicial seja o único restante.

Note que o resultado produzido por esse algoritmo será um perfil de estratégias puras constituído pelos movimentos que estão no caminho percorrido até o nó inicial da árvore.

Pode ocorrer de, ao analisar dois ramos que representam movimentos distintos, algum jogador ter o mesmo valor de recompensa em ambos. Nesse caso, é necessário observar mais alguns procedimentos:

I. Tome um desses nós;

II. Suponha que esse é o nó escolhido e verifique as conclusões ao aplicar o algoritmo;

III. Repita esse processo para os demais ramos cuja recompensa é a mesma.

Diante disso, segue que um jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Nesse contexto, destaca-se um importante resultado cuja demonstração é feita por Ebbinghaus, Kanamori e Fraser (2010):

Teorema 2 (Teorema de Zermelo). *Todo jogo dinâmico finito de informação perfeita possui um equilíbrio de Nash em estratégias puras que pode ser encontrado por indução reversa. Ainda, se nenhum jogador tiver a mesma recompensa em quaisquer dois nós terminais, esse equilíbrio é único.*

Esse teorema garante a existência de equilíbrios de Nash, que podem ser localizados por indução reversa.

Em contrapartida, o teorema seguinte, demonstrado por Dutta (1999), estabelecerá que eles também são equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos:

Teorema 3. *Em um jogo dinâmico de informação perfeita, uma combinação de estratégias é um ENPS se, e somente se, essa combinação é um equilíbrio de Nash que pode ser encontrado pelo método de indução reversa.*

Graças às garantias desses dois teoremas, fica assegurado um bom caminho para a procura de ENPS em situações como a do exemplo a seguir.

Exemplo 20 (O Jogo Televisivo)**.** *Relembre esse exemplo, cuja árvore é dada a seguir:*

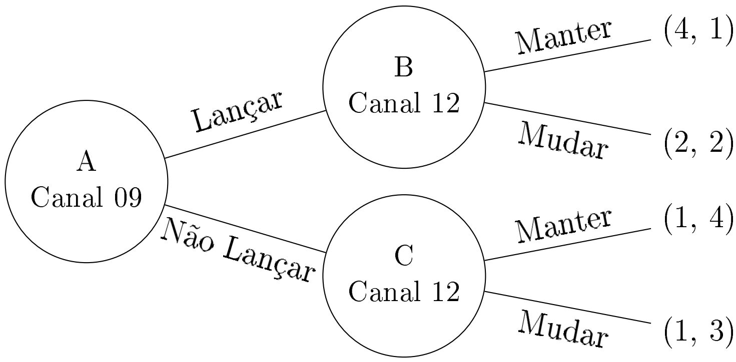

Figura 7: Árvore do "Jogo Televisivo".

Seguindo os passos do algoritmo, sem perda de generalidade, a resolução é iniciada pelo nó B. Como esse é um nó de decisão do Canal 12, serão consideradas as recompensas referentes a esse jogador.

Se o Canal 12 escolher {Mudar}, a recompensa será maior do que se {Manter} $(2 > 1)$. Assim, supondo que ele age de forma racional, a árvore do jogo fica da seguinte maneira:

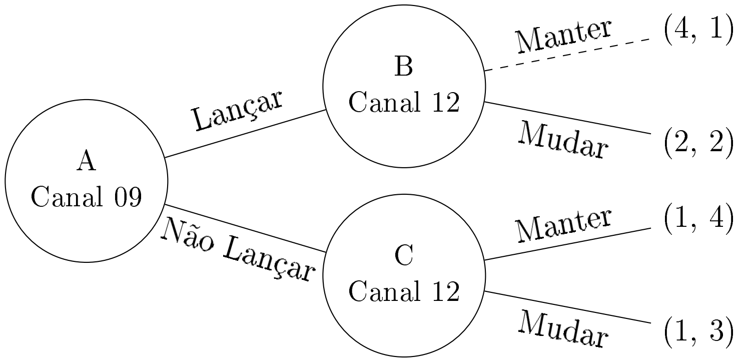

Figura 8: Eliminação de ramos (1º nó) do "Jogo Televisivo".

De forma análoga, em relação ao nó C, se o Canal 12 escolher {Manter}, ele ganhará mais do que se {Mudar} $(4 > 3)$. Assim, a árvore do jogo se torna:

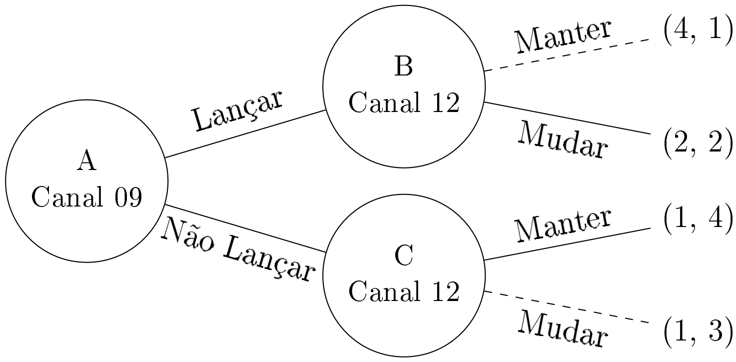

Figura 9: Eliminação de ramos ($2^{\underline{o}}$ nó) do "Jogo Televisivo".

Por último, resta o nó A, onde serão consideradas as recompensas do Canal 09, já que é um nó de decisão dele. Para saber qual é a melhor escolha, o Canal 09 precisa considerar ainda as conclusões obtidas nas duas etapas anteriores (supondo a racionalidade do Canal 12).

Note que se o Canal 09 escolher {Lançar}, pela escolha do Canal 12, sua recompensa será 2; se escolher {Não Lançar}, pela escolha do Canal 12, sua recompensa será 1.

Logo, agindo racionalmente, o Canal 09 optará por {Lançar} e a árvore do jogo com as melhores escolhas destacadas é:

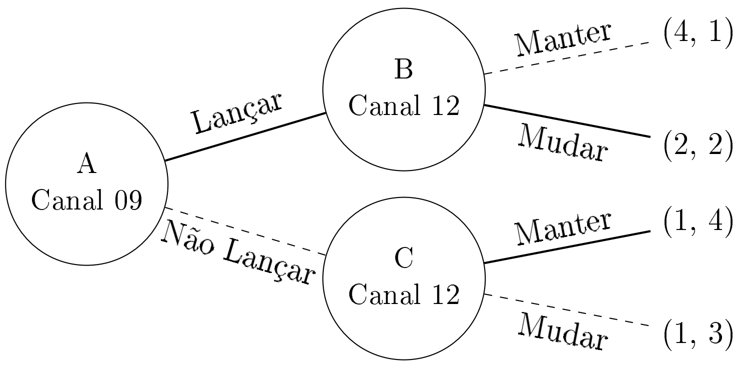

Figura 10: Árvore com ENPS encontrado por Indução Reversa.

Portanto, o perfil de estratégias puras {{Lançar},(Mudar, Manter)}, que corresponde aos valores $(2, 2)$, é o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos encontrado pelo método de indução reversa.

Contudo, as garantias fornecidas pelos dois teoremas anteriores não se estende aos jogos estáticos (vistos no Cap. 2) e tampouco aos jogos de informação imperfeita, citados no início deste capítulo. É o que motiva o próximo estudo.

5 ESTRATÉGIAS MISTAS E JOGOS REPETIDOS

Neste capítulo, em sua primeira parte, são considerados os jogos onde qualquer estratégia pura dos jogadores não é suficiente para indicar o melhor caminho a ser tomado — é o que motiva a conceituação das estratégias mistas.

Em seguida, são formalizados os jogos onde ocorre uma mesma interação estratégica mais de uma vez. A principal diferença desses jogos é que, além da análise das recompensas, para se poder tomar uma decisão mais racional, a história do jogo ao longo do tempo também é algo importante a ser considerado.

5.1 ESTRATÉGIAS MISTAS

Uma estratégia é chamada mista quando o jogador atribui uma probabilidade à escolha de cada ação disponível (SARTINI et al., 2004). Esse tipo de estratégia é útil em determinadas situações, como a mostrada no exemplo a seguir.

Exemplo 21 (A Cobrança de Pênaltis)**.** *Em uma partida de futebol, uma equipe precisa traçar um plano para bater seus pênaltis de modo a converter no maior número de gols. Os jogadores podem escolher cobrar o pênalti do lado esquerdo ou direito do goleiro ou, ainda, no centro do gol. Qual seria a melhor escolha?*

Nesta situação, é intuitivo que se os jogadores escolherem chutar sempre no mesmo lado, o goleiro acabará defendendo várias cobranças, pois saberá onde cada jogador vai chutar.

Dessa forma, é interessante que os jogadores deixem o goleiro da outra equipe 'na dúvida' — por uma distribuição de probabilidade sobre a direção do chute.

Tendo, por hipótese, apenas um número finito de estratégias disponíveis para cada jogador, adiante é apresentada a definição formal de estratégia mista.

Definição 24. *Uma **estratégia mista** p_i para o jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre o seu conjunto $E_i = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m_i}\}$ de estratégias puras, ou seja, $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, \ldots, p_{im_i})$, com $p_{ik} \geq 0$, $k \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$.*

Veja que uma estratégia pura é um caso particular de estratégia mista, onde $p_{ij} = 1$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$ e $p_{ik} = 0, \ \forall k \neq j$.

Quando os jogadores optam por estratégias mistas, calcula-se o valor esperado das recompensas em função das distribuições de probabilidade escolhidas. Mais detalhes sobre a esperança em uma distribuição de probabilidade são fornecidas por Ross (2010).

Um equilíbrio de Nash em estratégias mistas ocorre quando existe um perfil, onde cada jogador escolheu uma distribuição de probabilidade que maximiza a sua recompensa esperada dadas às dos demais.

Com essas noções, pode ser enunciado o Teorema de Nash: um forte teorema que garante a existência do equilíbrio de Nash, sob certas condições, e cuja demonstração é feita por Shoham e Leyton-Brown (2010).

Teorema 4 (Teorema de Nash)**.** *Seja G um jogo com número finito de jogadores e de estratégias. Então, em estratégias mistas, sempre existe um equilíbrio de Nash para G.*

Para ilustrar esses cálculos em uma situação de interesse da Ciência Política, é apresentado o exemplo a seguir:

Exemplo 22 (Uma Doação Duvidosa)**.** *Em uma eleição, os candidatos A e B recebem a oferta de uma doação financeira (um tanto suspeita) para suas campanhas. Embora saibam que a oferta é feita a ambos, um desconhece a resposta do outro. Nesse contexto, ainda sabem que:*

- *Aceitar esse dinheiro pode não ser bem visto por alguns eleitores durante a campanha;*
- *Se ambos aceitarem, esse efeito negativo diminuirá;*
- *Se apenas um aceitar, o alcance da campanha deste ficará muito maior que o do outro;*
- *Uma doação financeira generosa para uma campanha nunca é desinteressada.*

A tabela seguinte representa as estimativas do resultado final da eleição em cada caso:

Candidato A \ Candidato B	Aceitar	Recusar
Aceitar	$(49, 51)$	$(55, 45)$
Recusar	$(60, 40)$	$(45, 55)$

Tabela 31: Matriz de *payoffs* em Estratégias Puras.

Ao analisar essa tabela, note que:

- Se o Candidato B escolhe {Aceitar}, a escolha racional do Candidato A é {Recusar};
- Se o Candidato B escolhe {Recusar}, a escolha racional do Candidato A é {Aceitar}.

Candidato A \ Candidato B	Aceitar	Recusar
Aceitar	$(49, 51)$	$(\underline{55}, 45)$
Recusar	$(\underline{60}, 40)$	$(45, 55)$

Tabela 32: Melhores escolhas do Candidato A.

Analogamente,

- Se o Candidato A escolhe {Aceitar}, a escolha racional do Candidato B é {Aceitar};
- Se o Candidato A escolhe {Recusar}, a escolha racional do Candidato B é {Recusar}.

Candidato B / Candidato A	Aceitar	Recusar
Aceitar	$(49, \underline{51})$	$(\underline{55}, 45)$
Recusar	$(\underline{60}, 40)$	$(45, \underline{55})$

Tabela 33: Melhores escolhas dos dois candidatos.

Logo, pela verificação das melhores decisões dos jogadores em cada caso, nenhum dos dois candidatos possui uma estratégia dominante ou equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Como o Teorema de Nash garante a existência de, ao menos, um equilíbrio em estratégias mistas, as distribuições de probabilidade que proporcionam esse equilíbrio podem ser encontradas.

Sejam $p_A = (p_1, p_2)$ e $p_B = (q_1, q_2)$ as distribuições de probabilidade relativas às estratégias dos candidatos A e B, respectivamente. Assim, tem-se a seguinte atualização da tabela original:

		q_1	q_2
	Candidato B / Candidato A	Aceitar	Recusar
p_1	Aceitar	$(49, 51)$	$(55, 45)$
p_2	Recusar	$(60, 40)$	$(45, 55)$

Tabela 34: Matriz de *payoffs* em Estratégias Mistas.

O primeiro fato a se notar é que, como são distribuições de probabilidade, $p_1 + p_2 = 1$ e $q_1 + q_2 = 1$.

Para encontrar um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, é necessário que nenhum dos jogadores tenha incentivo em modificar sua escolha.

Dessa forma, assumindo a distribuição $p_A = (p_1, p_2)$ do Candidato A, deve ser indiferente para o Candidato B escolher entre $\{$Aceitar$\}$ ou $\{$Recusar$\}$ a doação. Por tal argumento, consegue-se estimar os valores de p_1 e p_2 pelo procedimento a seguir.

Inicialmente, veja que a valor esperado pelo Candidato B (ao fazer alguma de suas possíveis escolhas) é:

Candidato B escolhe $\{$Aceitar$\}$	Candidato B escolhe $\{$Recusar$\}$
$51 \cdot p_1 + 40 \cdot p_2$	$45 \cdot p_1 + 55 \cdot p_2$

Tabela 35: Escolhas do Candidato B.

Igualando esses valores esperados (pois não se quer que o Candidato B tenha interesse em mudar de escolha), segue que:

$$\begin{aligned}51 \cdot p_1 + 40 \cdot p_2 &= 45 \cdot p_1 + 55 \cdot p_2\\(51 - 45) \cdot p_1 &= (55 - 40) \cdot p_2\\6 \cdot p_1 &= 15 \cdot p_2\\2 \cdot p_1 &= 5 \cdot p_2\end{aligned}$$

E, assim, obtemos nosso primeiro sistema de equações:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 & (1)\\ 2p_1 - 5p_2 = 0 & (2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(1)\quad p_1 + p_2 = 1 &\implies p_2 = 1 - p_1\\(2)\ 2p_1 - 5p_2 = 0 &\implies 2p_1 - 5(1 - p_1) = 0\\&\implies 2p_1 - 5 + 5p_1 = 0\\&\implies 7p_1 = 5\\&\implies p_1 = \frac{5}{7}\\(1)\quad p_2 = 1 - p_1 &\implies p_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Com isso, a esperança de ganho para o Candidato B é obtida:

$$51 \cdot \frac{5}{7} + 40 \cdot \frac{2}{7} = 45 \cdot \frac{5}{7} + 55 \cdot \frac{2}{7} = \frac{335}{7} \approx 47,86.$$

Analogamente, assumindo a distribuição de probabilidade $p_B = (q_1, q_2)$ do Candidato B, o valor esperado pelo Candidato A é dado por:

Candidato A escolhe {Aceitar}	Candidato A escolhe {Recusar}
$49 \cdot q_1 + 55 \cdot q_2$	$60 \cdot q_1 + 45 \cdot q_2$

Tabela 36: Escolhas do Candidato A.

E, mais uma vez igualando esses valores esperados, segue que:

$$\begin{aligned}49 \cdot q_1 + 55 \cdot q_2 &= 60 \cdot q_1 + 45 \cdot q_2\\(55 - 45) \cdot q_2 &= (60 - 49) \cdot q_1\\10 \cdot q_2 &= 11 \cdot q_1\end{aligned}$$

O que gera o nosso segundo sistema de equações:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 & (1)\\ 11q_1 - 10q_2 = 0 & (2)\end{cases}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & q_1 + q_2 = 1 & \Longrightarrow & q_2 = 1 - q_1 \\
(2) & 11q_1 - 10q_2 = 0 & \Longrightarrow & 11q_1 - 10(1 - q_1) = 0 \\
 & & \Longrightarrow & 11q_1 - 10 + 10q_1 = 0 \\
 & & \Longrightarrow & 21q_1 = 10 \\
 & & \Longrightarrow & q_1 = \dfrac{10}{21} \\
(1) & q_2 = 1 - q_1 & \Longrightarrow & q_2 = 1 - \dfrac{10}{21} = \dfrac{11}{21}
\end{array}
$$

E, assim, obtemos a seguinte esperança de ganho para o Candidato A:

$$49 \cdot \frac{10}{21} + 55 \cdot \frac{11}{21} = 60 \cdot \frac{10}{21} + 45 \cdot \frac{11}{21} = \frac{1095}{21} \approx 52,14.$$

Portanto, segue que, se ambos os candidatos adotarem essas estratégias (cujo perfil está em equilíbrio de Nash), haverá o valor esperado de $52,14$ e $47,86$ para os candidatos A e B, respectivamente.

5.2 JOGOS REPETIDOS

Como abordado por Fiani (2009), existem processos de interação estratégica que se desenrolam no tempo e, desse modo, possuem uma história que é de conhecimento comum dos jogadores.

Por exemplo, entre políticos, especialmente congressistas que devem realizar, com frequência, acordos para que suas plataformas políticas se transformem efetivamente em leis, a consideração da história dos acordos que são fechados e da forma com que são ou não respeitados, serve como indicador de quais congressistas são "confiáveis" na hora de fechar um acordo ou não.

Uma modelagem com base na estrutura de jogos repetidos pode ser útil na análise desse tipo de situação.

Definição 25. *Um jogo é dito* ***repetido*** *quando caracteriza-se pela repetição do mesmo jogo-base alterando apenas a forma como os jogadores interagem em cada etapa.*

Definição 26. *Um jogo é dito* ***repetido finito*** *quando o número de etapas for finito. Se o número é infinito ou não se sabe quando acaba, diz-se que é* ***repetido infinito****.*

O jogo-base é denotado por Γ e o número total de vezes que ele se repete por T. Além disso, denota-se por $t \in \{1, \ldots, T\}$ cada período que ele se repete — chamado etapa ou estágio do jogo. Assim, o jogo resultante é expresso por Γ^T ou, ainda, por Γ^∞, quando é infinito.

Definição 27. *É chamado de* ***história do jogo*** *ao registro da forma como os jogadores interagem em cada etapa até a presente.*

As interações podem mudar a cada repetição, mas as estratégias do jogo permanecem as mesmas. Essas ações tomadas entre os jogadores em cada etapa são feitas com base na história do jogo até ali.

Logo, em um jogo repetido, não se deve considerar apenas a melhor resposta em cada etapa. Assume-se que os jogadores também tomam suas decisões pensando nas consequências futuras dessa escolha no desenrolar do jogo.

O estudo desses jogos é de grande interesse quando se discute como induzir à cooperação, supondo que os jogadores possuem ganhos significativos ao agir de forma não-cooperativa em cada etapa.

Por exemplo, Axelrod (1984) usou esse conceito para tentar explicar o que antes tinha sido uma tormenta na Teoria da Evolução: como pode evoluir um comportamento altruísta a partir de mecanismos puramente egoístas na seleção natural?

Note que determinadas ações podem trazer ao jogador benefícios maiores e mais rapidamente do que outras. A longo prazo, porém, a escolha por esses benefícios pode se reverter em um grande prejuízo.

5.2.1 A Cooperação em Jogos Repetidos Infinitos

Em um jogo finito, a solução por indução reversa exclui a possibilidade de que a cooperação possa emergir espontaneamente da interação entre os jogadores. No caso de jogos infinitos, esse método não é aplicável.

Deste modo, algo mais apropriado, é pensar que os jogadores atribuem uma probabilidade de que o jogo continue numa próxima etapa — lembre que a qualificação de infinito aqui não deve ser assumida em sentido estrito.

Antes de prosseguir nessa discussão, é importante que se saiba também como mensurar essas recompensas a longo prazo. Para isso, segue as definições abaixo:

Definição 28. *Dada uma sequência infinita de recompensas $r_1, r_2, \ldots$ para o jogador i, a **recompensa média de i** é definida por:*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{t=1}^{k} \frac{r_t}{k}.$$

Definição 29. *Dada uma sequência infinita de recompensas $r_1, r_2, \ldots$ para o jogador i e um fator de desconto δ, $0 < \delta < 1$, a **recompensa com desconto futuro de i** é definida por:*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t r_t.$$

Uma maneira para se entender melhor essas consequências futuras de cada ação (e o que se pode esperar dela), baseada no que diz Fiani (2009), é trabalhada no exemplo a seguir:

Exemplo 23 (O Caso Chaviniano). *Um garoto receberá amanhã, como recompensa, um sanduíche de presunto. Em todo caso, ele valoriza mais o recebimento desse sanduíche hoje do que recebê-lo amanhã. Assim, amanhã, esse sanduíche vale um pouco menos do que vale hoje.*

Nesse exemplo, para atualizar a recompensa futura é necessário aplicar um fator de desconto. Seja δ, $0 < \delta < 1$, esse fator a ser aplicado às recompensas ao longo do tempo.

Note que esse fator pode estar associado tanto a uma taxa de desconto (que exprime a "paciência" do garoto em receber o sanduíche) quanto à probabilidade de que o jogo continue em uma próxima etapa.

Suponha que, num jogo infinitamente repetido, esse garoto obtém uma sucessão infinita de idênticos sanduíches de presunto.

O fator de desconto δ deve ser aplicado a esses valores da seguinte forma: ao sanduíche recebido no período inicial não se aplica fator de desconto algum, pois é recebido no presente.

A esse sanduíche soma-se $1 \cdot \delta = \delta$, que é o sanduíche recebido no segundo período, e também $(1 \cdot \delta) \cdot \delta = \delta^2$, que é o recebido no terceiro período.

Da mesma forma, aplica-se o fator de desconto sempre que um sanduíche for recebido no período seguinte ao anterior. Logo, é obtida a série:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots$$

Do estudo de séries, para $|\delta| < 1$, sabe-se que a expressão anterior é uma progressão geométrica decrescente que converge para a soma:

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}.$$

Essa expressão, chamada de S, é o valor presente (descontado) da série infinita de recompensas do garoto — supondo que ele recebe a mesma quantidade de sanduíches em todas as etapas.

5.2.2 Subjogos em Jogos Repetidos Infinitos

Definição 30. *Em um jogo infinitamente repetido, um* ***subjogo*** *é também um jogo que é jogado de uma etapa t em diante.*

A próxima definição, dada por Fiani (2009), é baseada na noção de ENPS — vista em jogos dinâmicos:

Definição 31. *Uma combinação de estratégias constitui um* ***equilíbrio de Nash perfeito em subjogos de jogos infinitamente repetidos*** *quando, para qualquer que seja a história do jogo até uma dada etapa, essas estratégias maximizam o valor presente das recompensas para os jogadores, daquela etapa em diante.*

Portanto, basicamente, um ENPS de jogos infinitamente repetidos ocorre quando os equilíbrios de Nash do jogo-base podem ser jogados em cada etapa.

5.2.3 Estratégias de Jogo

Em jogos repetidos indefinidamente, por vezes, se torna exaustiva a análise das melhores escolhas em cada etapa. Tanto nos modelos quanto nas situações reais, costuma-se adotar respostas-padrão, de acordo com a história e a expectativa de recompensa do jogador.

Essas respostas-padrão permitem compreender melhor os ganhos de um jogador através do regramento de quando se tomar cada decisão. Com base no que foi feito por Fiani (2009), a seguir, são explicitadas algumas estratégias adotadas comumente no estudo desses casos.

5.2.3.1 Grim Trigger (Gatilho Severo)

Uma estratégia gatilho é a que segue um caminho de ação enquanto uma condição é satisfeita e, caso ela deixe de ser em algum momento, segue outro caminho pelo resto do jogo.

Este caso particular é dito severo porque o jogador que o adota decide cooperar enquanto o outro coopera, mas, se houver a quebra dessa cooperação, nunca mais cooperará no jogo.

5.2.3.2 Tit for tat (Olho por olho)

Uma estratégia olho por olho consiste em cooperar na primeira etapa e, em seguida, reagir do mesmo modo que o oponente agiu na etapa anterior. O jogador que a adota cooperará desde que seu oponente também coopere e não cooperará se o seu oponente tiver feito o mesmo.

Essa é uma estratégia mais branda que a gatilho, pois define o comportamento de quem a pratica de acordo com cada etapa. Portanto, a ação em $t+1$ depende apenas daquela tomada em t.

Exemplo 24 (Uma Velha Rivalidade Americana)**.** *Um conflito entre duas famílias, Hatfield e McCoy, se tornou famoso na história dos EUA. No meio de uma crescente animosidade e de disputas envolvendo terras e patrimônio, resultou em diversas mortes. É conhecido como símbolo de justiça e vingança sendo levadas até as últimas consequências.*

Como pode ser visto nesse caso, um problema prático ao se adotar uma estratégia de olho por olho é a incapacidade de distinguir quando alguém erra involuntariamente.

Se ambos adotam essa estratégia e, por acidente ou engano, um dos jogadores quebra o acordo de cooperação, tem início uma série infinita de não-cooperação mútua que, geralmente, é o pior resultado possível para eles.

Uma análise mais profunda envolvendo a pertinência dessas estratégias de acordo com a situação e os incentivos à cooperação em jogos repetidos é dada no próximo capítulo.

6 A TEORIA NO CONTEXTO POLÍTICO

Neste capítulo, é melhor retratada a importância do processo de modelagem de uma interação estratégica e da análise cuidadosa das características consideradas inerentes à ela. Por último, é apresentado o conceito de Valor de Shapley e a sua aplicação em votações de assembleia, como é o caso da nossa Câmara Legislativa Federal.

6.1 APLICAÇÃO E MODELAGEM

A Teoria dos Jogos apresenta algumas limitações, do ponto de vista prático. Devido às condições, por vezes, impostas aos seus modelos (jogos não continuados, racionalidade perfeita, ausência de comunicação entre os jogadores etc.), pode gerar um considerável afastamento da realidade trabalhada (GIANTURCO, 2018).

Ainda assim, é muito útil para se entender a lógica da ação estratégica e refinar o nosso raciocínio sobre os mecanismos de incentivo e os resultados concretos que poderiam ser obtidos.

Como ferramenta de relacionamento político, essa teoria permite elaborar estratégias de negociação tanto em cenários cooperativos quanto em competitivos.

No cenário internacional, é geralmente aplicada de forma competitiva e excludente, em função de muitas ações ocorrerem através de estratégias de sobrevivência.

Nesses casos, nenhum jogador age de forma independente: cada ação gera uma reação e, portanto, deve considerar as futuras implicações de suas atitudes nos demais.

A análise de qualquer jogo ou situação de conflito deve ser iniciada com a especificação de um modelo que o descreva (FIANI, 2009). Assim, a forma ou estrutura geral dos modelos que são utilizados para descrever os jogos deve ser cuidadosamente considerada.

Uma estrutura que seja simples demais pode nos forçar a ignorar aspectos vitais da interação, enquanto que uma estrutura excessivamente complicada pode impedir a análise e obscurecer as suas questões essenciais.

Com intuito de representar um pouco melhor essas preocupações e mostrar as diversas nuances ao se fazer uma modelagem, é apresentada a próxima seção.

6.2 UMA GUERRA FRIAMENTE CALCULADA

O modelo do "Dilema do Prisioneiro", um dos exemplos básicos, pode ser aplicado a uma infinidade de situações políticas, entre elas, a Guerra Fria e o seu cenário atômico.

A Guerra Fria foi um período de tensão geopolítica, marcado por disputas estratégicas e indiretas, entre os EUA e a URSS — do fim da Segunda Guerra Mundial até a dissolução da União Soviética, em 1991.

Note que o interesse dos dois jogadores envolvidos (governos americano e soviético) é não receber um ataque nuclear do outro. Logo, o equilíbrio ideal seria realizar um acordo de paz (cooperar).

Contudo, pelo receio que cada jogador tem de que o outro ataque, o maior incentivo seria de atacar primeiro. Consequentemente, passa-se a uma escalada de tensão e a uma corrida armamentista entre os dois — culminando numa provável guerra atômica.

A matriz de recompensas, a seguir, representa essas características e a perspectiva de que se um escolhe atacar e o outro não, quem ataca também não ganhará na mesma proporção a que o outro perdeu:

URSS / EUA	Atacar	Não Atacar
Atacar	$(-5, -5)$	$(5, -10)$
Não Atacar	$(-10, 5)$	$(0, 0)$

Tabela 37: Matriz de *payoffs* da "Guerra Fria".

Nessa tabela, claramente, ao comparar as recompensas, verifica-se a existência de uma estratégia estritamente dominante para ambos e que acaba tendo por resultado: ({Atacar},{Atacar}).

Portanto, a previsão estimada por este modelo era de que os dois governos rumariam ao conflito, inevitavelmente. Até 1989, essa leitura da situação foi muito popular, porém, historicamente, ela se mostrou equivocada.

A razão disso parece muito simples: a realidade é sempre mais complexa do que o modelo. É válido lembrar que, no contexto da época, existiam outras variáveis e pressupostos que foram desprezados pela modelagem em questão: afinal, o jogo foi repetido durante quarenta anos e os dois governos tinham liberdade para se comunicar.

Refletindo um pouco mais sobre o problema, também se pode levar em consideração que (no contexto da Guerra Fria) o que estava em jogo não era apenas uma disputa militar, mas a própria sobrevivência de cada país. Logo, talvez uma modelagem mais próxima desse caso seja nos moldes do que foi visto no "Jogo do Covarde".

De fato, em 1962, com a descoberta norte-americana de que mísseis nucleares soviéticos estariam posicionados em Cuba para um ataque, chegou-se muito próximo de um conflito real entre as duas potências.

Nesse episódio, as exigências norte-americanas eram a retirada e envio dessas armas de volta à URSS. Para isso, poderiam estabelecer um bloqueio militar à ilha de Cuba ou executar um ataque atômico. É o que se traduz, a partir da tabela de Colman (1982), a seguir:

URSS / EUA	Retirar	Manter
Bloquear	$(\underline{6}, \underline{6})$	$(4, 2)$
Atacar	$(2, 4)$	$(1, 1)$

Tabela 38: Matriz de *payoffs* da "Crise dos Mísseis".

Assim, embora haja um equilíbrio de Nash, como entrar num conflito nuclear não é uma estratégia racional para nenhum dos dois países, então, a estratégia ({Atacar},{Manter}) não o representa.

Esse caso, com efeito, se mostrou improvável: os EUA impuseram o bloqueio naval à URSS, forçando a retirada dos mísseis soviéticos e o fim da crise, que durou cerca de dezoito dias.

Depois desse evento, criou-se uma linha direta, o famoso "telefone vermelho", entre os líderes desses dois países — sendo que essa linha já quebra a hipótese da não-comunicação entre os jogadores.

Entretanto, até esse momento, pela polarização ideológica que se formou no mundo, pode-se supor a falta de comunicação entre eles. É o que hoje se vê no Brasil, por exemplo, entre esquerda e direita. A polarização é tão forte que a própria comunicação fica limitada e, na prática, inexiste.

Partindo dessa hipótese, pode-se considerar como jogo-base a modelagem inicial desse jogo com uma pequena alteração que representa os ganhos menores que ambos têm por evitar uma aniquilação mútua:

EUA \ URSS	Atacar	Não Atacar
Atacar	$(-5,-5)$	$(5,-10)$
Não Atacar	$(-10,5)$	$(1,1)$

Tabela 39: Matriz de *payoffs* do jogo-base da "Guerra Fria".

Quando se inicia e desenvolve essa tensão mundial ao longo do tempo, nenhum dos jogadores sabia quando esse conflito acabaria. Sendo assim, é razoável pensar nele na forma de um jogo repetido infinito.

Deste modo, também é natural estipular um fator δ, $0 < \delta < 1$, que representa a probabilidade atribuída pelos jogadores de que o jogo continue em uma próxima etapa.

Assim, para um jogador i desse jogo, o valor presente (soma dos sucessivos valores descontados nas repetições) é dado por:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot U_{i,t}(e), \ e \in E.$$

Naturalmente, após duas guerras mundiais, já havia uma comunidade internacional bem mais atenta a eventuais abusos de poder pelas nações. Portanto, é irracional supor que uma estratégia "abusiva" por parte de qualquer jogador seria aceitável por muito tempo.

Devido a essas condições, supõe-se que a estratégia mais racional a ser adotada pelas duas potências, em suas contendas menores, é a de *tit for tat* (olho por olho).

De fato, essa estratégia permite que cooperem à medida que o outro coopera e que retaliem (sem que haja uma reprovação internacional) quando o outro não cooperar.

Obviamente, se essa interação do jogo-base se repetisse apenas poucas vezes e não houvesse consequências futuras relevantes, a não-cooperação (geralmente) é uma atitude bem mais vantajosa.

Utilizar uma estratégia olho por olho assume que os jogadores têm uma expectativa de que o jogo durará por um tempo considerável. Dessa forma, eles também aceitam que há uma grande probabilidade de haver novos encontros no futuro.

Entretanto, em contendas maiores (como um possível ataque nuclear iminente), é plausível que ambos utilizem uma estratégia de *grim trigger* (gatilho severo) e partam para um modo punitivo mútuo até que algum deles "saia do jogo".

Intuitivamente, caso se concretize o embate nuclear, a perspectiva de que esse jogo durará muito mais etapas diminui drasticamente. Assim, mesmo admitindo a existência dessas "interações menores" entre os dois países, elas podem ser analisadas à parte e não interferem de forma efetiva na "situação principal".

A adoção de uma estratégia gatilho severo, com a ameaça das suas retaliações sucessivas e sem opção de perdão, caso não haja cooperação, é o que diminui também a esperança de recompensas melhores ao escolher essa opção.

Deste modo, se ambos atuam numa estratégia gatilho e iniciam cooperando, segue que os valores presentes possíveis são:

1º Caso — em que a cooperação não é quebrada:

- Para ambos os jogadores:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}$$

2º Caso — a cooperação é quebrada em alguma etapa m:

- Para o jogador que não-cooperou:

$$V_{NC} = 5 - 5\delta - 5\delta^2 - 5\delta^3 - \cdots = 5 - \frac{5\delta}{1-\delta}$$

- Para o jogador que cooperou:

$$V_C = -10 - 5\delta - 5\delta^2 - 5\delta^3 - \cdots = -10 - \frac{5\delta}{1-\delta}$$

Supondo que as escolhas são feitas de forma racional, a cooperação está assegurada desde que se mostre mais vantajosa que a não-cooperação, isto é:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\delta} > 5 - \frac{5\delta}{1-\delta} \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\delta} + \frac{5\delta}{1-\delta} > 5 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{1+5\delta}{1-\delta} > 5 \\
& \Longleftrightarrow \quad 1+5\delta > 5(1-\delta) \\
& \Longleftrightarrow \quad 1+5\delta > 5-5\delta \\
& \Longleftrightarrow \quad 10\delta > 4 \\
& \Longleftrightarrow \quad \delta > \frac{4}{10} = 0,4
\end{aligned}
$$

Logo, se $\delta > 0,4$, ou seja, se a expectativa dos jogadores de que o jogo-base se repita numa próxima etapa é maior do que 40%, não há incentivo para que algum deles aja de forma não-cooperativa.

Por outro lado, se esse fator de desconto (que representa a probabilidade do jogo ir para a próxima etapa) for inferior a este valor, não cooperar torna-se a escolha mais vantajosa mesmo em meio a uma estratégia gatilho.

Agora, já estabelecido o valor presente das possíveis sequências de recompensas a partir do jogo-base, supondo a adoção da estratégia de gatilho severo por ambos, é justificável organizar a seguinte matriz:

EUA \ URSS	Atacar	Não Atacar
Atacar	$\left(\frac{-5}{1-\delta}, \frac{-5}{1-\delta}\right)$	$\left(5 - \frac{5\delta}{1-\delta}, -10 - \frac{5\delta}{1-\delta}\right)$
Não Atacar	$\left(-10 - \frac{5\delta}{1-\delta}, 5 - \frac{5\delta}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{1}{1-\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right)$

Tabela 40: Matriz de *payoffs* descontados da “Guerra Fria”.

Portanto, através dessas análises consecutivas, fica evidenciada a cautela e a habilidade de observação necessárias para produzir uma modelagem que, de fato, seja preditiva e se aproxime da realidade que ela busca modelar.

6.3 O VALOR DE SHAPLEY DE UM JOGADOR

Mais uma aplicação da Teoria dos Jogos em Ciência Política é o conceito de valor de Shapley (1951), que permite estimar o poder de um jogador (ou de uma coalizão entre jogadores) em uma assembleia, comitê ou mesmo no Congresso Nacional.

Na literatura, esse tema é conhecido como Teoria dos Jogos de Coalizão e sua aplicação abrange também situações na Economia. Um exemplo pode ser visto em empresas que decidem trabalhar juntas em determinada situação e dividir seus lucros de acordo com um valor ‘justo’, correspondente à contribuição de cada uma para os resultados da coalizão. A esse respeito, veja Shoham e Leyton-Brown (2010).

Nesta primeira seção, o interesse está em modelar uma situação de votação de proposta, onde o voto de cada um dos jogadores pode assumir diferentes pesos — o que, de fato, pode ocorrer ao se considerar os partidos políticos como jogadores.

6.3.1 O Valor de Shapley

Seja $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto dos jogadores. Para cada coalizão $K \subseteq J$, associa-se um valor $v(K) \in \{0, 1\}$, com a seguinte interpretação: se os votos da coalizão K são suficientes para aprovar a proposta, segundo a regra de votação adotada, $v(K) = 1$; caso contrário, $v(K) = 0$.

Em outras palavras, $v : \mathscr{P}(J) \to \{0, 1\}$ é a função que atribui o poder de decisão às coalizões em uma eventual votação.

Nesse contexto, o valor de Shapley de um jogador j está relacionado com a efetiva contribuição que ele traz para cada uma das coalizões. De acordo com Shapley (1951):

Definição 32 (Valor de Shapley). *Nas condições acima, o* ***valor de Shapley para o jogador j*** *associado à função v é dado por:*

$$\psi_j(v) = \sum_{K \in \mathscr{P}(J)} \frac{|K|! \cdot (n - |K| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(K \cup \{j\}) - v(K) \right],$$

onde $\mathscr{P}(J)$ é o conjunto das partes de J e $|K|$ indica o número de jogadores da coalizão K.

Essa fórmula pode ser deduzida diretamente através de uma interpretação probabilística da situação.

Suponha que n jogadores combinem de se reunir em um determinado local. Assumindo que a ordem em que cada um chega pode ocorrer de várias formas diferentes e não há controle sobre isso, a chegada deles se dá de forma aleatória.

Suponha ainda que essas diferentes ordens de chegada (as permutações dos n jogadores) têm a mesma probabilidade, isto é, $\dfrac{1}{n!}$.

Desse modo, se um jogador j encontra os membros da coalizão K ao chegar, a importância dele nesse momento é dada por $v(K \cup \{j\}) - v(K)$, ou seja, depende se ainda não fecharam o quórum mínimo e a reunião pode começar com a chegada dele.

Observe que existem $|K|!$ permutações possíveis dos jogadores em K e, após a chegada de j, $(n - |K| - 1)!$ permutações dos demais jogadores.

Logo, o valor de Shapley pode ser entendido como o ganho esperado fornecido pelo jogador j nessa situação aleatória. Para uma melhor ideia disso, no exemplo a seguir, serão estimados os valores de Shapley de cada jogador.

Exemplo 25 (O Jogo do Poder). *Considere um comitê com três membros: A, B e C. Suponha que seus pesos na votação de uma proposta tenham proporção* $2:2:1$, *respectivamente, e que é necessária a maioria simples dos pesos de votação para aprovar essa proposta.*

Inicialmente, note que as coalizões possíveis são: $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{B,C\}$, $\{A,B,C\}$.

Para simplificar a notação, $v(\{A\})$ será denotado por $v(A)$ e, assim, sucessivamente. Ademais, atribui-se $v(\emptyset) = 0$.

Logo, pelos pesos atribuídos e regras de votação:

- $v(A) = v(B) = v(C) = 0$;
- $v(A,B) = v(A,C) = v(B,C) = v(A,B,C) = 1$.

Particularmente, observe a situação do jogador A. Veja que a sua contribuição decisiva para o resultado da votação ocorre quando A se une à B ou A se une à C.

Nesse sentido, as únicas parcelas em que a expressão $[v(K \cup \{A\}) - v(K)]$ é não nula ocorrem quando $K = \{B\}$ ou $K = \{C\}$. Portanto, se pode escrever:

$$\begin{aligned}
\psi_A(v) &= \sum_{K \in \mathscr{P}(J)} \frac{|K|! \cdot (n - |K| - 1)!}{n!} \cdot [v(K \cup \{A\}) - v(K)] \\
&= \frac{1!\,1!}{3!} \cdot [v(A,B) - v(B)] + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot [v(A,C) - v(C)] \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainda, como o jogador B possui o mesmo peso de votação que o jogador A, por simetria, tem-se $\psi_B(v) = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, o ponto interessante deste exemplo é a importância do jogador C. Apesar do peso atribuído ao voto dele ser menor, veja que a contribuição decisiva de C se equipara à dos demais jogadores.

De fato, temos uma coalizão vencedora quando C se une à A e o mesmo ocorre quando C se une à B. Portanto, aplicando a definição, segue diretamente que o seu valor de Shapley é o mesmo, ou seja, $\psi_C(v) = \frac{1}{3}$.

6.3.2 O Valor a Priori de Shapley e Shubik

Uma forma prática de encontrar o valor de Shapley de um jogador em situações que modelam uma votação foi dada por Shapley e Shubik (1954).

Nesse artigo, os autores definem o valor a priori de um jogador j como o número de vezes, entre todas as sequências possíveis de votação, em que ele ocupa uma posição decisiva (ou pivotal).

Pelo exemplo do “Jogo do Poder”, as possíveis sequências de votação com as respectivas posições pivotais destacadas são:

$$A\underline{B}C\ ,\ A\underline{C}B\ ,\ B\underline{A}C\ ,\ B\underline{C}A\ ,\ C\underline{A}B\ ,\ C\underline{B}A.$$

Nesse contexto, o valor de Shapley de cada jogador é dado pela relação entre o número a priori dele e o total de sequências de votação possíveis — que é $n!$, em um jogo com n jogadores.

Dessa maneira, confirmando os valores encontrados anteriormente, tem-se que:

$$\psi_A(v) = \psi_B(v) = \psi_C(v) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Uma consequência natural dessa abordagem é que, modelando uma votação com n jogadores, onde o voto de cada um possui o mesmo peso, o valor de Shapley atribuído a cada jogador será igual a $\frac{1}{n}$.

Em seguida, é feito o estudo do valor de Shapley em alguns casos mais complexos de possíveis coalizões dentro da Câmara dos Deputados (do Brasil) — basicamente, quanto à sua distribuição de poder por áreas geográficas e partidos políticos.

6.3.3 O Poder de Decisão na Câmara Legislativa Federal

Através dos critérios estabelecidos, será realizada a análise da representatividade e distribuição de poder na Câmara dos Deputados, utilizando os dados populacionais e representativos fornecidos pelo IBGE (2019) e pela CÂMARA DOS DEPUTADOS (2020), respectivamente.

Caso não seja dito nada em contrário, os cálculos do valor de Shapley serão feitos para votações que exijam a **maioria absoluta** (257) dos membros da Câmara.

Como as verificações seguintes se mostram exaustivas, foram utilizados recursos computacionais para o cálculo desses valores nos casos analisados.

Dada a inexistência de um algoritmo que atendesse as necessidades, com base na definição, foi implementado e otimizado um código (pelo próprio autor) que resolvesse todos esses casos. Os cálculos foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-2670QM de 2,20 GHz, 8 GB de memória RAM, Octave 5.1.0 (EATON et al., 2019), sendo que o caso mais complexo teve 24 (vinte e quatro) jogadores e demorou 4 (quatro) horas para concluir.

A avaliação da situação se deu sob três perspectivas distintas, como são vistas adiante:

I. Região Geográfica

Embora os deputados raramente formem tal coalizão, é útil se ter uma noção do poder relativo a cada região do país. É o que se começa a mensurar na tabela a seguir:

	População	Deputados	Habitantes/Deputado
Brasil	210.147.125	513	409.643,52
Sudeste	88.371.433	179	493.695,16
Nordeste	57.071.654	151	377.957,97
Sul	29.975.984	77	389.298,49
Norte	18.430.980	65	283.553,54
Centro-Oeste	16.297.074	41	397.489,61

Tabela 41: Representatividade por Região.

Pela análise feita na tabela, percebe-se que a representatividade não é igual para todas as regiões. Por exemplo, note a discrepância dessa representatividade entre as regiões {Sudeste} e {Norte}.

Definido o número de votos correspondente a cada jogador, os índices de poder resultantes para cada região na Câmara são:

	Deputados	Valor de Shapley	Índice (%)
Sudeste	179	0,3	30
Nordeste	151	0,3	30
Sul	77	0,1333...	13,33
Norte	65	0,1333...	13,33
Centro-Oeste	41	0,1333...	13,33

Tabela 42: Índices de Poder Regional.

Observe que, apesar de haver cinco regiões com um número distinto de deputados, há apenas dois valores de Shapley. Além disso:

(i) Nenhuma região pode decidir algo isoladamente;

(ii) Existe apenas uma coalizão de duas regiões capaz de vencer: {Sudeste, Nordeste};

(iii) A coalizão {Sul, Norte, Centro-Oeste} não tem peso para decidir numa votação. Assim, deve agregar a região {Sudeste} ou {Nordeste} para vencer;

(iv) A coalizão {Sudeste, Sul} possui 256 votos, um a menos do que o necessário para a maioria na Câmara. Logo, ela precisa agregar qualquer outra das regiões que, nesse caso, possuem o mesmo poder de barganha;

(v) Nas sequências (Sul, Centro-Oeste, Norte) e (Norte, Centro-Oeste, Sul), o {Centro-Oeste} ocupa a posição pivotal: totalizando exatamente 257 votos. Perdendo um representante, o Centro-Oeste deixaria de ser pivotal nelas e teria o seu índice de poder diminuído, tornando-se a região mais fraca.

Por esse último item, verifica-se como o balanço de poder é instável e pode ser significativamente alterado através de um único voto.

Para uma análise mais refinada, em relação aos Estados, veja o artigo de Zugman e Telli (2003).

II. Afinidade Ideológica

Este tipo de coalizão é uma suposição mais crível do que a anterior, visto que é mais fácil coligar deputados ou partidos em torno de uma 'bandeira em comum' do que pela região de onde vieram.

Com base nos trabalhos de Tarouco e Madeira (2015), Scheeffer (2018) e informações fornecidas pelos próprios partidos (PASSARELLI; BERALDO, 2019), buscou-se classificar e agrupar os partidos que possuem representantes na Câmara. É o que está proposto na tabela a seguir:

Ideologia	Partidos	Deputados
Direita	PSL	53
	NOVO	8
Direita Moderada	SOLIDARIEDADE	14
	PSD	36
	REPUBLICANOS	32
	PATRIOTA	6
	PODEMOS	11
	AVANTE	7
	DEM	28
	PP	40
	PL	39
	PSC	9
Centro	PTB	12
	PSDB	32
	MDB	34
	PROS	10
	CIDADANIA	8
	REDE	1
Esquerda Moderada	PV	4
	PDT	28
	PSB	30
	PT	53
Esquerda	PCdoB	8
	PSOL	10

Tabela 43: Afinidade Ideológica.

Sendo assim, o valor (dentro da Câmara dos Deputados) de cada ideologia nesse espectro é:

Ideologia	Deputados	Valor de Shapley	Índice (%)
Direita	61	0,1666 . . .	16,67
Direita Moderada	222	0,5	50
Centro	97	0,1666 . . .	16,67
Esquerda Moderada	115	0,1666 . . .	16,67
Esquerda	18	0	0

Tabela 44: Peso Ideológico na Câmara.

Por consequência, com esses dados, conclui-se que:

(i) A ideologia de {Direita Moderada} predomina na Câmara, com 50% do poder de decisão;

(ii) A ideologia de {Esquerda} não tem peso suficiente para barganhar em uma coalizão, pois em nenhuma combinação possível, é capaz de mudar a situação da votação;

(iii) Uma coalizão entre {Centro, Esquerda Moderada, Esquerda} não é capaz de decidir uma votação;

(iv) Uma coalizão entre {Direita Moderada, Direita} é sempre vencedora, pois possui 283 votos. Assim, pelo cálculo do valor de Shapley, teria um índice de poder de 100%.

Logo, devido a esse último item, também perceba que (num jogo) nem sempre a soma dos índices de poder dos jogadores é igual ao poder da coalizão formada pelos mesmos.

Portanto, para determinar corretamente o índice de uma eventual coalizão, antes, é necessário considerar que todos os seus membros atuam como um único jogador na votação.

III. Bancada Partidária

A coalizão entre deputados de um mesmo partido e entre partidos, em assuntos de interesse momentâneo, é muito comum. Sendo assim, é interessante mencionar também algumas definições a cerca disso.

Mas, antes de se calcular os possíveis efeitos de uma coalizão entre bancadas, verifiquemos qual é a importância representada por cada partido (atualmente) dentro da Câmara:

Partidos	Deputados	Valor de Shapley	Índice (%)
PT	53	0,1079194	10,79
PSL	53	0,1079194	10,79
PP	40	0,0790593	7,91
PL	39	0,0769263	7,69
PSD	36	0,0705617	7,06
MDB	34	0,0663523	6,63
PSDB	32	0,0622008	6,22
REPUBLICANOS	32	0,0622008	6,22
PSB	30	0,0580879	5,8
DEM	28	0,0540009	5,4
PDT	28	0,0540009	5,4
SOLIDARIEDADE	14	0,0262146	2,62
PTB	12	0,0223981	2,24
PODEMOS	11	0,0204997	2,05
PROS	10	0,0186024	1,86
PSOL	10	0,0186024	1,86
PSC	9	0,0167201	1,67
CIDADANIA	8	0,0148307	1,48
PCdoB	8	0,0148307	1,48
NOVO	8	0,0148307	1,48
AVANTE	7	0,0129594	1,3
PATRIOTA	6	0,0110838	1,11
PV	4	0,0073645	0,74
REDE	1	0,0018333	0,18

Tabela 45: Poder Partidário.

Nessa tabela, algumas ocorrências se mostram evidentes e a última é um tanto curiosa:

(i) Uma coalizão vencedora precisa conter, no mínimo, sete partidos;

(ii) Para vencer, qualquer coalizão deve conter algum dos oito partidos mais poderosos da Câmara: PT, PSL, PP, PL, PSD, MDB, PSDB ou REPUBLICANOS;

(iii) Mesmo com apenas um deputado, em determinados casos, a REDE representa a diferença no resultado de uma decisão e também possui (embora seja o menor deles) algum poder de barganha.

Esses são os índices de poder mais 'confiáveis' ao se levar em conta numa eventual votação, devido às suas garantias. Mas, existem outras estruturas que podem se formar, embora não tão 'garantidas'.

Uma aliança (formal) de representações parlamentares de dois ou mais partidos políticos que passam a atuar na Casa Legislativa como uma só bancada, sob uma liderança comum, é chamada de bloco.

O "CENTRÃO" (220), listado na tabela a seguir, é um bloco formado por: PP (40), PL (39), PSD (36), MDB (34), DEM (28), SOLIDARIEDADE (14), PTB (12), PROS (10) e AVANTE (7).

O cálculo de bancada não considera deputados suspensos, assim, existe uma diferença entre o número total de deputados e o das bancadas. Para os fins deste trabalho, será admitido que os doze deputados suspensos na Câmara (todos filiados ao PSL) seguem o partido em seus votos.

Deste modo, o peso de decisão de cada bancada se estabelece da seguinte forma:

Bancadas	Deputados	Valor de Shapley	Índice (%)
CENTRÃO	220	0,6705544	67,05
PT	53	0,0519841	5,2
PSL	53	0,0519841	5,2
PSDB	32	0,0395299	3,95
REPUBLICANOS	32	0,0395299	3,95
PSB	30	0,0376984	3,77
PDT	28	0,0329365	3,29
PODEMOS	11	0,0121573	1,22
PSOL	10	0,0117577	1,18
PSC	9	0,0112249	1,12
CIDADANIA	8	0,0094933	0,95
PCdoB	8	0,0094933	0,95
NOVO	8	0,0094933	0,95
PATRIOTA	6	0,0068182	0,68
PV	4	0,0034549	0,34
REDE	1	0,0018898	0,19

Tabela 46: Bancada em Maioria Absoluta.

Pelos dados da tabela, nota-se que:

(i) O CENTRÃO monopoliza mais de dois terços do poder de decisão;

(ii) O número mínimo de bancadas numa coalizão vencedora é dois;

(iii) Necessariamente, para que uma coalizão vença, deve conter uma das três bancadas: CENTRÃO, PT ou PSL.

E, devido a uma especial formalidade de fidelização de voto ao seu partido ou bloco e à atual instabilidade da política brasileira, cabe considerar ainda outra situação.

A Constituição Federal (1988), em seu Art. 86, prevê que a Câmara dos Deputados pode admitir uma acusação contra o Presidente da República por, no mínimo, dois terços dos membros.

Essa quantidade mínima é a definida como **maioria qualificada** (342) dos membros e, a seguir, a tabela apresenta o poder de decisão de cada bancada numa votação dessas:

Bancadas	Deputados	Valor de Shapley	Índice (%)
CENTRÃO	220	0,5760823	57,61
PT	53	0,0815851	8,16
PSL	53	0,0815851	8,16
PSDB	32	0,0463398	4,63
REPUBLICANOS	32	0,0463398	4,63
PSB	30	0,0433733	4,34
PDT	28	0,0403902	4,04
PODEMOS	11	0,0145133	1,45
PSOL	10	0,0130758	1,31
PSC	9	0,0117327	1,17
CIDADANIA	8	0,0103646	1,04
PCdoB	8	0,0103646	1,04
NOVO	8	0,0103646	1,04
PATRIOTA	6	0,0073038	0,73
PV	4	0,0052087	0,52
REDE	1	0,0013764	0,14

Tabela 47: Bancada em Maioria Qualificada.

Nesse caso, é possível ver que:

(i) Há uma melhor distribuição de poder para a maioria das bancadas. Exceto para os extremos, CENTRÃO e REDE;

(ii) O número mínimo de bancadas numa coalizão vencedora é quatro;

(iii) Necessariamente, para que uma coalizão vença, deve conter o CENTRÃO.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentados conceitos básicos da Teoria dos Jogos e um estudo mais aprofundado sobre os mecanismos de incentivo à cooperação e a sua aplicação na Ciência Política.

Em seu desenvolvimento, discutiu-se modelos clássicos tais como "A Batalha dos Sexos", "O Dilema do Prisioneiro", "O Problema do Coronel Blotto", "A Caça ao Javali", "O Jogo do Covarde", entre outros.

No capítulo "Aspectos Gerais", fez-se uma breve contextualização histórica, citando as principais contribuições para a consistência dessa teoria. Introduziu-se os conceitos de jogo, jogadores, ações, recompensas, entre outros, considerados necessários para que o leitor compreendesse a abordagem dos capítulos seguintes.

No capítulo "A Forma Normal", foram vistas as principais características dos jogos estáticos e sua representação em forma normal ou estratégica, seguindo com a apresentação de alguns métodos para a resolução desse caso: eliminação iterada de estratégias dominadas, busca por equilíbrios de Nash e análise do ótimo de Pareto.

No capítulo "A Forma Estendida", formalizou-se a ideia dos jogos dinâmicos e sua representação em forma estendida ou árvore de jogo. Dentre as definições, destaca-se ainda a noção de estratégia do jogador: um plano de ação, isto é, uma tomada de decisão para cada momento em que ele deve fazer uma escolha.

O conceito de equilíbrio de Nash em jogos dinâmicos também é frisado, com destaque para o teorema garantindo a existência de um equilíbrio em estratégias puras para todo o jogo de informação perfeita. Discutiu-se a ideia de subjogo e a sua influência na busca pelos equilíbrios que fazem sentido quando se pensa no contexto de cada decisão. Ganhou-se, então, um refinamento dessa noção de solução, conhecido por equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Por último, foi apresentado o método de indução reversa, que consiste em uma técnica de investigação dos equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos, por meio da análise da árvore do jogo a partir dos nós terminais.

No capítulo seguinte, formalizou-se o conceito de estratégia mista como uma generalização das estratégias puras dos capítulos anteriores e foi introduzido o conceito de jogo repetido.

No último capítulo, foi feita uma análise mais detalhada da modelagem de uma situação política e de como mensurar o poder de determinado jogador em um comitê de votação, onde utilizou-se o valor de Shapley como principal ferramenta.

Algo que se tornou notável é que não basta querer a paz para consegui-la. É preciso entender como esse desejo afeta os demais. Dizer "eu quero paz" pode não trazer paz, mas a guerra. Portanto, é preciso calcular com muito cuidado como uma ação leva à outra, para minimizar algum possível efeito acidental.

A Teoria dos Jogos trata rigorosamente de conflitos reais, mas, não nos dá garantias de 'sucesso' ao se adotar determinada estratégia; apenas nos garante que ela será 'lógica'. Esses dois conceitos não andam, necessariamente, juntos. Analisar as ações humanas, como elas realmente se dão, implica em não menosprezar também o efeito das emoções em seu julgamento.

O cálculo proporcionado pelo valor de Shapley revela sutilezas da teoria: a conclusão de que nem sempre o número de votos é proporcional ao poder de um jogador, mostra que o processo político é mais complexo e intrincado do que uma análise superficial indicaria.

Ferramentas teóricas, como a citada acima, servem para demonstrar como a Teoria dos Jogos pode ser utilizada para se destacar fatos ignorados pelo senso comum. Ela exemplifica o perigo da implementação de soluções simples e sem base científica, com regras que atendem (não raras vezes) a interesses puramente 'políticos'.

Toda iniciativa no sentido de corrigir as distorções de poder e de representatividade começa pelo conhecimento de como elas, atualmente, se dão. Deste modo, buscou-se trazer uma análise científica (baseada na Teoria dos Jogos) ao mundo político e aprofundar o debate sobre o funcionamento das estruturas de poder no país.

Portanto, por mais desejosos que formos de uma sociedade mais livre, igualitária ou fraternal, pensar e agir de forma 'consciente' se constitui no processo essencial à efetiva reforma para uma sociedade mais justa e equilibrada.

REFERÊNCIAS

AXELROD, R. M. *The Evolution of Cooperation*. Nova York, EUA: Basic Books, 1984. 241 p.

BAERT, P. Algumas limitações das explicações da escolha racional na ciência política e na sociologia. *Revista Brasileira De Ciências Sociais*, n. 35, p. 63–73, 1997.

CÂMARA DOS DEPUTADOS. *Quem são os deputados*. 2020. <https://www.camara.leg.br/deputados/quem-sao>. Acessado em 25/04/2020.

COLMAN, A. *Game Theory and Experimental Games: The Study of Strategic Interaction*. Oxford, Reino Unido: Pergamon Press, 1982. 314 p.

COURNOT, A. A. *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Paris, França: Chez L. Hachette, 1838. 201 p.

DUTTA, P. K. *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge, Reino Unido: The Mit Press, 1999. 476 p.

EATON, J. W. et al. *GNU Octave version 5.1.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. [S.l.], 2019. <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.1.0/>.

EBBINGHAUS, H.-D.; KANAMORI, A.; FRASER, C. G. *Ernst Zermelo - Collected Works / Gesammelte Werke: Volume I / Band I - Set Theory, Miscellanea / Mengenlehre, Varia*. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 654 p.

FERNANDEZ, B. P. M.; BERNI, D. A. *Teoria dos Jogos: Crenças, Desejos e Escolhas*. São Paulo, Brasil: Saraiva, 2014. 386 p.

FIANI, R. *Teoria dos Jogos*. Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier, 2009. 393 p.

GIANTURCO, A. *A Ciência da Política: Uma Introdução*. Rio de Janeiro, Brasil: Forense, 2018. 410 p.

HARDIN, G. The tragedy of the commons. *Science, New Series*, v. 162, n. 3859, p. 1243–1248, 1968.

HARSANYI, J. C. Games with incomplete information played by "bayesian"players, part i-iii. part i. the basic model. *Management Science*, v. 14, n. 3, p. 159–182, 1967.

IBGE. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística*. 2019. <http://www.ibge.gov.br/>. Acessado em 25/04/2020.

NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Princeton University*, p. 48–49, 1950.

NASH, J. F. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics, Second Series*, v. 54, n. 2, p. 286–295, 1951.

NEUMANN, J. von. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Math. Ann. 100*, p. 295–320, 1928.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *The Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, EUA: Princeton University Press, 2007. 774 p.

PASSARELLI, V.; BERALDO, P. *Maioria dos partidos se identifica como de centro*. 2019. <http://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/567881>. Acessado em 01/06/2020.

PRISNER, E. *Game Theory: Through Examples*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2014. 308 p.

RAUPP, W. *Trajetória Humana e Sustentabilidade*. Brasil: Letra 1, 2010. 234 p.

ROSS, S. *A First Course in Probability*. New Jersey, EUA: Pearson, 2010. 530 p.

RTP. *Irã admite abate de avião ucraniano com míssil e reconhece erro*. 2020. <https://agenciabrasil.ebc.com.br/internacional/noticia/2020-01/ira-admite-abate-de-aviao-ucraniano-com-missil-e-reconhece-erro>. Acessado em 10/02/2020.

SARTINI, B. et al. *Uma introdução à teoria dos jogos*. Bahia, Brasil: II Bienal da SBM-Universidade Federal da Bahia, 2004. 62 p.

SCHEEFFER, F. A alocação dos partidos no espectro ideológico a partir da atuação parlamentar. *E-legis*, n. 27, p. 119–142, 2018.

SCHELLING, T. C. *The Strategy of Conflict*. EUA: Harvard University Press, 1960. 309 p.

SELTEN, R. *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*. Bielefeld, Alemanha: Institute of Mathematical Economics, 1974. 46 p.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. *The Rand Corporation*, p. 1–17, 1951.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, v. 48, n. 3, p. 787–792, 1954.

SHOHAM, Y.; LEYTON-BROWN, K. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2010. 513 p.

TAROUCO, G. da S.; MADEIRA, R. M. Os partidos brasileiros segundo seus estudiosos: análise de um expert survey. *Civitas*, v. 15, n. 1, p. 24–39, 2015.

ZUGMAN, F.; TELLI, W. F. de C. Divisão de poder e representatividade na câmara dos deputados: uma aplicação da teoria dos jogos. *Iberoamerican Academy of Management Third International Conference - Management in Iberoamerican Countries: Current Trends and Future Prospects*, 2003.