UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Compacidade e equicontinuidade

Matheus Pimenta Carracelas

Florianópolis
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Compacidade e equicontinuidade

Matheus Pimenta Carracelas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Danilo Royer

Florianópolis
2020

Sumário

Agradecimentos

Gostaria de agradecer minha família em primeiro lugar. A minha amada mãe Teresa, por ser um exemplo de mulher, pelos incessantes incentivos, acadêmicos ou não, por todo o carinho materno diário e por sempre compartilhar suas experiências junto a "beija-flores"e "manacás". Ao meu amado pai Miguel, por ser meu primeiro e mais importante exemplo masculino, por ser tornar modelo de organização na minha vida, pelos diversos "papo-cabeça"e por me convencer que "Visa"sempre será melhor que "Elo". Ao meu querido irmão Rafael, pelos diversos aprendizados durante a vida, pelas brigas e principalmente pelas reconciliações. A minha querida irmã Flávia, por todos as vivências e por me proporcionar a oportunidade de me tornar tio com a chegada do Bruno Antônio.

Sempre serei eternamente grato a meus professores. Agradeço em especial meu mentor e amigo Paulo Perez, por todos os ensinamentos, puxões de orelha, oportunidades e especialmente por nossa amizade. Agradeço meu orientador Danilo Royer, pela paciência e compreensão sempre presentes em todas as conversas e correções.

Agradeço aos meus companheiros de apartamento, por todas as partidas de sinuca em mesa de procedência duvidosa. Aos moradores do Edifício Bernardo, por todas as vezes que acendemos uma vela após uma queda de energia. Aos ouvintes das playlists do MasBah, por todas as vezes que ao ouvir Sweet Child O'Mine da janela, pedimos um Fronteira sem salada. Aos consumidores de Pop Pizza, por todas as vezes que, preocupados com a minha alimentação, perguntavam se seriam duas grandes ou uma gigante. Aos meus amigos do coração: Gabriel Gracini, Mateus Patricio e Pedro Mendes.

Agradecimentos especiais para aqueles que tiveram suas primeiras experiências no curso de matemática da UFSC junto a mim: Paulo Afonso; Beli Thomaz; Karen Tonini; Mateus Patrício; Leonardo Goulart. Uma mistura de saudade e satisfação. Saudade de sentir aflição antes de uma do resultado de uma avaliação e satisfação em fazer parte do conjunto formado pelos calouros de 2016.1.

Agradeço também aos amigos de PET: Carlos de Castro; Carlos Caldeira; Helena Koch; João Ruiz; Ana Altomani; Letícia Carvalho; André Borges; Jean Gengnagel; Bruna Donadel; Gabriel Simon; Ben Hur; Beatriz Key. Se cada bolo remete a um contexto, com certeza os bolos do Gab remetem a uma circunstância. Agracio também o nosso tutor José Pinho. O melhor que já presenciei ao se tratar de geometria.

Reconheço da mesma forma minhas professoras companheiras de Lemat. Silvia de Holanda; Luciane Schuh e Flávia Giordani. Agradeço também o colega bolsista Luiz Guilherme. Reuniões remotas se tornaram mais produtivas e interessantes quando divididas com vocês.

Agradeço ao grupo de amigous que me acolheu no meu ano de formatura da melhor maneira possível. Amanda de Araújo, Lara Miranda, Isabella Miranda e Felipe Sampaio.

Com certeza

Abro um espaço especial destinado as pessoas que me ajudaram na execução da apresentação do presente trabalho. Isabella Miranda. Lara Miranda, Gabriela Muller, Amanda de Araújo, Lara Fischer, Mateus Patricio e Gabriel Graciani. Por fim, gostaria de agradecer todos aqueles que me ajudaram e torceram por mim durante toda a minha graduação.

Introdução

O presente trabalho é um estudo sobre conjuntos compactos. Esta pesquisa está restrita a espaços vetoriais normados. Inicialmente, o estudo se dará em espaços normados de dimensão finita, ambiente em que conjuntos compactos têm uma caracterização bem simples. Posteriormente trabalharemos com espaços vetoriais normados de dimensão infinita.

Iniciaremos o Capítulo 1 apresentando ao leitor conceitos como os de norma vetorial e espaços normados. Logo em seguida, iremos exibir e definir um dos temas centrais de todo o trabalho, conjuntos compactos. Neste momento a definição será feita por meio de coberturas. Por fim, com o auxílio do Teorema de Bolzano Weierstrass e de uma generalização do Teorema de Heine-Borel será exposta uma caracterização para conjuntos compactos em dimensão finita. Mostraremos que, em um espaço normado de dimensão finita, um conjunto é compacto se e somente se é fechado e limitado.

O Capítulo 2 se inicia com uma seção destinada ao estudo acerca de sequências de funções. Aspectos como convergência pontual e uniforme serão abordados e posteriormente utilizados como ferramenta na produção de um caso particular de conjunto fechado e limitado. Tal caso particular será gerado em um espaço normado de dimensão infinita. Assim, uma vez que não temos mais a restrição relativa a finitude da dimensão do espaço normado em questão, se torna falsa a afirmação de que conjuntos fechados e limitados são sempre compactos. O resultado acima nos leva a pergunta natural: se não podemos afirmar que conjuntos fechados e limitados são os conjuntos compactos em dimensão infinita, existe alguma caracterização para os conjuntos compactos, similar ao que acontece em espaços normados de dimensão finita?

O estudo acerca de equicontinuidade faz-se necessário para responder o questionamento acima no espaço de funções contínuas. O Teorema de Arzela-Ascoli, que elabora a caracterização que estamos buscando para conjuntos compactos em espaços de funções contínuas, será demonstrado.

1 Dimensão Finita

O primeiro capítulo se iniciará com conceitos teóricos relacionados a espaços vetoriais normados e conjuntos compactos em dimensão finita. Em um segundo momento, serão apresentados e demonstrados o Teorema de Bolzano-Weierstrass e uma generalização do Teorema de Heine-Borel. Dando seguimento, a definição de continuidade será apresentada e também como funções contínuas se comportam quando se encontram em um domínio compacto. Por fim, trabalharemos com continuidade uniforme.

1.1 Espaços normados

Neste capítulo iremos trabalhar com espaços normados. Começaremos relembrando o conceito de norma.

Definição 1. Uma norma num espaço vetorial X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes postulados:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

em que x e y são vetores arbitrários em X e α é um escalar qualquer.

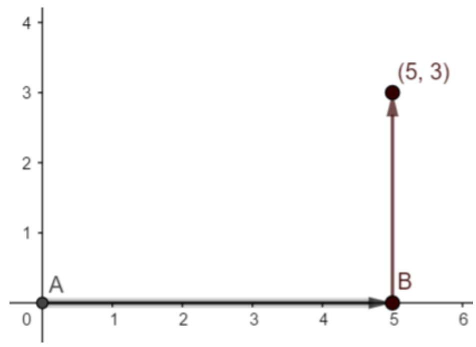
As condições 1 e 2 estão relacionadas com a noção de comprimento não negativo usual, isto é, o tamanho do vetor sendo maior ou igual a zero. Enquanto isso, o requisito 3 se atenta com uma ideia de dilatação vetorial. Por fim, a exigência de número 4 se trata da conhecida desigualdade triangular.
Um espaço vetorial normado é um par ordenado $(X, \| \ \|)$ em que X é um espaço vetorial e $\| \ \|$ é uma norma em X.

Exemplo 1. O conjunto dos números reais podem ser entendidos como um espaço normado com a norma $\|x\| = |x|$. O conjunto dos números complexos também podem ser vistos como um espaço normado de dimensão finita em que $\|z\| = |z|$.

Exemplo 2. Considere agora o espaço $\mathbb{R}^2$ munido da seguinte norma.

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

A chamada norma-um ou ainda"norma do taxista"é a soma das magnitudes das coordenadas dos vetores em um espaço. Nessa norma, todos os componentes do vetor são igualmente ponderados. Veja o exemplo do vetor $(5, 3)$.



Nesse caso, temos

$$\|(5,3)\|_1 = |5| + |3| = 8$$

Como podemos observar pela figura, a norma-um é a distância da origem até o ponto de coordenadas $(5, 3)$ de uma forma que se assemelha com a maneira que um taxista dirige entre os edifícios de uma cidade.

Exemplo 3. Seja X o espaço dos polinômios de qualquer grau, isto é,

$$X = \{p = p(t) : p \text{ é um polinômio de qualquer grau}\}.$$

Agora, podemos definir uma norma em X da seguinte forma.

$$\|p\| = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

Perceba que, neste caso, X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita.

Observação 1. É importante ressaltar que a norma do supremo foi utilizada no exemplo acima. A demonstração de que realmente se trata de uma norma será realizada mais adiante em **Teorema 7**

Definição 2. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço normado X são chamadas de **equivalentes** se existem duas constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

para qualquer $x \in X$.

Teorema 1. Se X é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então todas as normas em X são equivalentes. ■

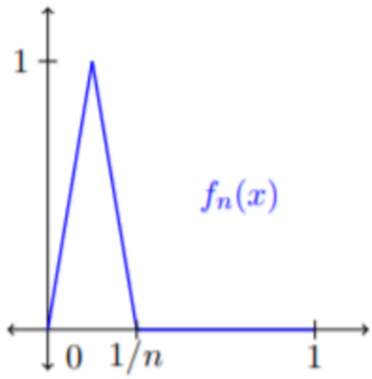
Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência de número 6.

O enunciado do Teorema 1 tem como hipótese que o espaço vetorial normado tenha dimensão finita para que todas as normas sejam equivalentes. Mostraremos com o auxílio do próximo exemplo que se retirarmos a finitude dimensional, o Teorema 1 se torna inválido.

Exemplo 4. Seja $C([0,1])$ o conjunto de todas as funções contínuas. Defina duas normas em $C([0,1])$ por

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad\qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Perceba que não existe $k > 0$ tal que $\|f\| \leq k \cdot \|f\|_1$ para qualquer f. De fato, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções como mostra a figura abaixo abaixo.



Assim, $\|f_n\| = 1$ e $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2n}$. Veja que não existe nenhum $k > 0$ tal que $1 \leq \dfrac{k}{2n}$, para todo $n \geq 1$. Portanto, fica comprovado que essas duas normas não são equivalentes em $C[0,1]$.

Observação 2. É importante ressaltar que tanto a norma do supremo quanto a norma de integral foram utilizadas no exemplo acima. As demonstrações de que realmente se tratam de normas serão realizadas mais adiante em **Teorema 7** e **Exemplo 14**, respectivamente.

Observação 3. Outra maneira de pensar o **Exemplo 4** seria entendendo a norma

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\, \mathrm{d}x$$

como a área abaixo do gráfico das funções f_n. Perceba que a medida que n cresce, a base do triângulo diminui, fazendo com que a área do triângulo tenda a zero. Ao mesmo tempo, o valor máximo atingido pelas funções permanece igual a 1. Dessa forma, fica perceptível que não existe constante $k > 0$ que satisfaça a seguinte desigualdade.

$$1 \leq k \cdot 0$$

1.2 Compacidade

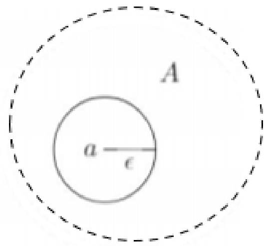
Nesta seção daremos início a um dos assuntos com maior relevância para o presente trabalho. O estudo de conjuntos compactos conta com alguns pré-requisitos que serão abordados de maneira rápida com o intuito de alcançar os objetivos propostos.

Definição 3. Seja X um espaço normado. Para cada $x \in X$ fixo e $\epsilon > 0$, o conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \mid \|y - x\| < \epsilon\}$$

é chamado de **bola aberta** centrada em x de raio ϵ.

Definição 4. Seja X um espaço normado e $A \subset X$. Dizemos que A é **aberto** se todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola inteiramente contida em A.



Definição 5. Seja X um espaço normado e $A \subset X$. Dizemos que A é **fechado** se o seu complementar é aberto.

Exemplo 5. Considere um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, digamos $(0, 1)$. De fato, $(0, 1)$ é um conjunto aberto. Contudo, se considerarmos esse mesmo intervalo em $\mathbb{R}^2$, como um subconjunto do eixo x, esse mesmo conjunto não gozará mais da propriedade de ser aberto. Tendo esse exemplo em vista, fica evidente a importância de um especificação acerca de qual espaço normado será selecionado para somente depois disso podermos afirmar se um subconjunto será aberto ou não.

Neste momento traremos novas terminologias com o propósito de chegar na definição formal de conjuntos compactos.

Definição 6. Seja X um espaço normado. Uma **cobertura** de X é uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de conjuntos cuja união contém X, isto é,

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Se cada conjunto U_i for aberto, teremos uma **cobertura aberta**.

Definição 7. Seja X um espaço normado. Uma **subcobertura** de X é uma subfamília de $\{U_i\}_{i \in I}$ cuja união ainda contém X, isto é, que "cobre" X.

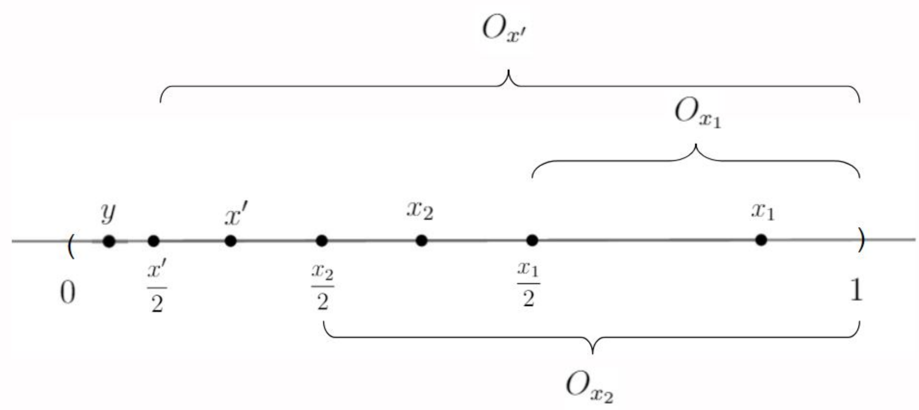
$$X \subset \bigcup_{j \in J} U_j \qquad\qquad J \subset I$$

No caso em que J é finito a subcobertura é chamada de **subcobertura finita**.

Exemplo 6. Considere o intervalo aberto $(0, 1)$ em $\mathbb{R}$. Para cada ponto $x \in (0, 1)$, seja O_x o intervalo aberto $(x/2, 1)$. Pegaremos agora a união das infinitas famílias $\{O_x \mid x \in (0, 1)\}$. Essa união é uma cobertura aberta para o intervalo aberto $(0, 1)$. Note que não conseguiremos encontrar uma subcobertura finita. De fato, tome uma subfamília finita arbitrária

$$\{O_{x_1}, O_{x_2}, ..., O_{x_n}\}$$

seja $x' = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e observe que qualquer número real y que satisfaça $0 < y \leq x'/2$ não está contido na união $\displaystyle\bigcup_{i \in I}^{n} O_{x_i}$. Observe a figura abaixo.



E com isso, essa subfamília finita não irá cobrir todo o intervalo $(0, 1)$.

Exemplo 7. Considere o intervalo fechado $[0, 1]$. Vamos usar uma cobertura similar a usada no exemplo anterior. Lembremos que para $x \in (0, 1)$, os conjuntos $O_x = (x/2, 1)$ foram suficientes para cobrir o intervalo aberto $(0, 1)$. Se quisermos que essa cobertura seja suficiente para $[0, 1]$, devemos cobrir os extremos.

Para isso, fixe $\epsilon > 0$ e defina

$$O_0 = (-\epsilon, \epsilon) \qquad e \qquad O_1 = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon).$$

Deste modo, a família $\{O_0, O_1, O_x \mid x \in (0, 1)\}$ é uma cobertura aberta para $[0, 1]$. Perceba que desta vez existe uma subcobertura finita. Com efeito, ao adicionar o conjunto O_0 podemos escolher x' de tal modo que $x'/2 < \epsilon$, fazendo com que

$$\{O_0, O_{x'} O_1\}$$

é uma subcobertura finita para $[0, 1]$.

A definição que formaliza o conceito de conjuntos compactos em espaços normados será apresentada a seguir.

Definição 8. Um subconjunto A de um espaço normado X é dito **compacto** se toda cobertura aberta de A possuir alguma subcobertura finita.

Observação 4. Perceba que o **Exemplo 7** não demonstra de que o intervalo fechado $[0, 1]$ é compacto. Teríamos que mostrar que *toda* cobertura aberta possui alguma subcobertura finita.

1.3 O teorema de Bolzano-Weierstrass

Nesta seção vamos mostrar uma equivalência entre conjuntos compactos e sequencialmente compactos para espaços normados. Para tal, será demonstrado o teorema que da nome a seção.

Proposição 1. Todo conjunto compacto A contido em um espaço normado X é fechado.

Demonstração. Vamos mostrar que $X \setminus A$ é aberto. Seja $x \in X \setminus A$ e considere a seguinte família de conjuntos abertos

$$U_n = \{y \in X \mid \|y - x\| > 1/n\}.$$

Considerando que $y \in A$ sempre teremos $\|y - x\| > 0$. Consequentemente, y está em algum U_n. Segue que U_n é cobertura aberta para A. Por hipótese, A possui subcobertura finita.
Dessas subcoberturas, escolha a de maior índice, digamos, U_N. Por construção temos

$$B(x, 1/N) \subset X \setminus A. \tag{1.3.1}$$

Logo, $X \setminus A$ é aberto e por consequência A é fechado. ■

Observação 5. Uma ideia intuitiva para a passagem (1.3.1) é pensar que os conjuntos $B(x, 1/N)$ estão todos "encaixados".

Definição 9. Um subconjunto A de um espaço normado X é dito **sequencialmente compacto** se toda sequência em A possuir uma subsequência que converge para um ponto de A.

Exemplo 8. Perceba que intervalo $(0, 1)$ não é sequencialmente compacto. A sequência

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

não possui subsequência que converge em $(0, 1)$, e como a definição apresentada acima pede que toda sequência possua subsequência convergente, esse conjunto não é sequencialmente compacto.

Teorema 2. (Bolzano-Weierstrass) Um subconjunto A de um espaço normado X é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que A é compacto e que A não é sequencialmente compacto. Nessas condições, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que não possui subsequência convergente. Segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve conter um número infinito de termos distintos, isto é,

$$\#\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \infty.$$

Caso contrário, a sequência poderia admitir subsequência constante e então convergente. Seja $x \in A$. Se para todo $\epsilon > 0$, a bola aberta $B(x, \epsilon)$ contém um ponto que pertence à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, distinto de x, então x é limite de uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O que não pode ocorrer. Desse modo, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x)$ não contém nenhum ponto de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, exceto possivelmente x. A família dessas bolas abertas

$$\{B(x, \epsilon_x) | x \in A\}$$

é uma cobertura aberta para A. Perceba que qualquer união finita dessas bolas contém no máximo uma quantidade finita de termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, essa união nunca irá cobrir todos os termos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e então não existe subcobertura finita para A, o que é um absurdo.

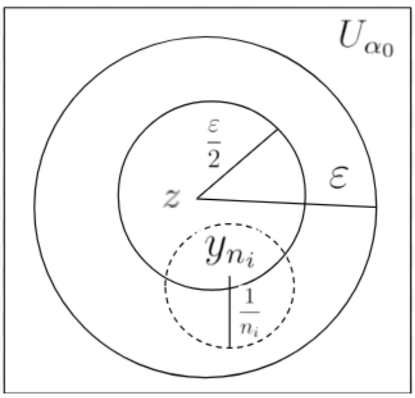
Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, além disso, usando a Proposição 1 podemos garantir que este limite pertence a A.

$\Leftarrow$) Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma cobertura aberta para A. Vamos mostrar que essa cobertura tem subcobertura finita. Primeiramente vamos mostrar que existe $r > 0$ tal que para cada $y \in A$ a bola aberta $B(y, r) \subset U_\alpha$, para algum $\alpha \in I$.

Caso não existisse, teríamos para cada natural n, algum y_n tal que $B(y_n, 1/n)$ não está contida em nenhum U_α. Por hipótese $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, digamos $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, em que

$$y_{ni} \to z \in A.$$

Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ cobre A, $z \in U_{\alpha_0}$ para algum α_0. Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subset U_{\alpha_0}$ e i suficientemente grande de modo que $\|y_{n_i} - z\| < \epsilon/2$ e $\dfrac{1}{n_i} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Observe a figura abaixo.



Seguindo essas instruções, $B(y_{n_i}, 1/n_i) \subset U_{\alpha_0}$, o que é uma contradição. Logo existe $r > 0$ tal que para cada $y \in A$ e bola $B(y, r) \subset U_\alpha$, para algum α.
Agora vamos supor que exista $\epsilon > 0$ tal que A não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Vamos construir a seguinte sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Escolha um elemento qualquer $y_1 \in A$
2. $y_2 \in A - B(y_1, \epsilon)$
3. $y_3 \in A - (B(y_1, \epsilon) \cup B(y_2, \epsilon))$

Seguindo esse processo sucessivamente vamos construir uma sequência com a propriedade de $\|y_n - y_m\| > \epsilon$ para todo $m \neq n$. Com isso, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, o que é um absurdo, visto que contraria a hipótese de A ser sequencialmente compacto. Assim, usando a afirmação anterior de que existe $r > 0$ tal que para cada $y \in A$ a bola aberta $B(y, r) \subset U_\alpha$, para algum $\alpha \in I$, podemos afirmar que existe uma cobertura finita formada por essas bolas de raio r. Sabendo que cada bola está contida em algum U_α, o conjunto formados pelos U_α correspondentes forma uma subcobertura finita para A. ■

Observação 6. É importante ressaltar que o resultado que acabamos de demonstrar possui a mesma nomenclatura do teorema que garante que toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui subsequência convergente.

1.4 Uma generalização do teorema de Heine-Borel

Em análise real, o Teorema de Heine-Borel ou também chamado de Teorema de Borel-Lebesgue, estabelece uma caracterização para conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$. Nesta seção, mostraremos que essa mesma caracterização se estende não só para $\mathbb{R}^n$ mas também para qualquer espaço normado de dimensão finita.

Proposição 2. Um conjunto compacto A de um espaço normado X é limitado.

Demonstração. Suponha por absurdo que A é ilimitado. Nessas condições, A conteria uma sequência ilimitada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|y_n\| > n$. Essa sequência não teria subsequência convergente. Logo A é limitado. ■

Teorema 3. Em um espaço normado de dimensão finita X, um subconjunto $A \subset X$ é compacto se e somente se A for fechado e limitado.

Demonstração. $\Rightarrow$) As Proposições 1 e 2 provam esta implicação.
$\Leftarrow$) Seja $A \subset X$ um conjunto fechado e limitado. Além disso, seja $dim X = n$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base para X. Consideremos uma sequência qualquer $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em A. Cada termo x_m, possui a seguinte representação

$$x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Como A é limitado, a sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ também é, digamos $\|x_m\| \leq k$ para todo m. Vamos definir em X a norma $\|\cdot\|_1$ da seguinte forma. Para cada $x \in X$ escreva

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

e defina

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|. \tag{1.4.1}$$

Prova-se que a norma $\|\cdot\|_1$ é de fato uma norma. Usando o **Teorema 1**, que garante que em um espaço vetorial X de dimensão finita todas as normas em X são equivalentes, temos

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} e_j \right\|_1 = c \cdot \left(|\alpha_1^{(m)}| + |\alpha_2^{(m)}| + ... + |\alpha_n^{(m)}| \right).$$

em que $c > 0$.
Desse modo, a sequência dos números

$$\left(\alpha_j^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

com j fixado, é limitada. Invocando o Teorema de Bolzano Weierstrass (repetidas vezes, se necessário), existe uma subsequência $(m_L)_{L\in\mathbb{N}}$, de índices, de forma que

$$\left(\alpha_j^{(m_L)}\right)_{L\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para} \quad \alpha_j$$

para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Segue daí que $\alpha_1^{m_L} e_1 + ... + \alpha_m^{m_L} e_n$ converge para

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = z.$$

Logo, a sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para z.
Como A é fechado, $z \in A$. Isso nos mostra que a sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in A$ escolhida de maneira arbitrária possui uma subsequência que converge também em A. Portanto, A é compacto. ■

Observação 7. Veremos mais adiante que não vale um resultado semelhante em dimensão infinita.

Observação 8. Prova-se que a norma definida em (1.4.1), é de fato uma norma.

1.5 Continuidade

Com o objetivo de se obter resultados interessantes, eventualmente se torna necessário a utilização de algum tipo de restrição nos objetos matemáticos estudados. A continuidade pode ser indicada como uma das mais significativas restrições, matematicamente falando. Em um dos capítulos de seu famoso livro de análise real, Elon Lages Lima afirma que a ideia de função contínua é o tema central da topologia.

Definição 10. Sejam X e Y espaços normados, $A \subset X$, $f : A \to Y$ uma função e c um elemento do conjunto A. A função f é **contínua em** c se para cada $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tais que

$$x \in A \ , \|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| < \epsilon$$

A função f é **descontínua em** c se não for contínua em c. Nesse caso, podemos dizer que f possui uma **descontinuidade em** c.

Observação 9. Uma função $f : A \to \mathbb{R}^n$ é chamada contínua no conjunto $B \subset A$ se f for contínua em todos os pontos de B. Se dissermos apenas que f é contínua, estaremos dizendo que f é contínua no domínio A.

Exemplo 9. A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $[0, \infty)$. Para mostrar que f é contínua em $c > 0$ basta notar que, para $0 \leq x < \infty$,

$$|f(x) - f(c)| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot |x - c|,$$

então, dado ϵ, podemos escolher $\delta = \sqrt{c \cdot \epsilon} > 0$ na definição de continuidade. Agora, para mostrar que f é continua no ponto 0, note que se $0 \leq x < \delta$, em que $\delta = \epsilon^2 > 0$, então

$$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \epsilon.$$

Exemplo 10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para x racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Então todo número real é ponto de descontinuidade de f, uma vez que o limite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

não existe, seja qual for $a \in X$.

Observação 10. É pertinente observar que a notação de limite também será usada para funções contínuas, uma vez que a definição foi dada por "epsilon"e "deltas".

1.6 Funções contínuas em conjuntos compactos

Neste momento gostaríamos de trabalhar com funções contínuas em conjuntos um pouco mais restritos, os conjuntos compactos. Para isso, começaremos pela demonstração de um teorema que nos garante que o conjunto imagem de uma aplicação contínua em um conjunto compacto é compacto. Mais formalmente, temos:

Teorema 4. Sejam Y e Z espaços vetoriais normados, X um subconjunto compacto de Y e f uma função contínua com $f : X \to Z$. Então o conjunto imagem $f(X)$ é compacto.

Demonstração. Seja $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $f(X)$. Nosso objetivo é encontrar uma subsequência convergindo para um ponto da imagem. Primeiramente vamos escolher pontos da forma $x_k \in X$ tais que $y_k = f(x_k)$. Nesse momento, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência no conjunto compacto X. Assim, existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto x em X. Considerando o fato que f é contínua, temos

$$\lim_{i \to \infty} y_{k_i} = \lim_{i \to \infty} f(x_{k_i}) = f(\lim_{i \to \infty} x_{k_i}) = f(x)$$

Desse modo, $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x) \in f(X)$, mostrando assim que $f(X)$ é sequencialmente compacto. Invocando o Teorema de Bolzano-Weierstrass temos que $f(X)$ é compacto. ∎

Uma aplicação direta para o teorema acima se encontra na demonstração do famoso Teorema do Valor Extremo.

Teorema 5. Seja X um subconjunto compacto de um espaço normado Y e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em X atingindo os valores máximo e mínimo de $f \in X$. Isto é,

$$f(\mathbf{a}) \leq f(x) \leq f(\mathbf{b})$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Como X é compacto, o teorema acima nos garante que $f(X)$ é compacto. Consequentemente, é fechado e limitado em $\mathbb{R}$. Assim, denotemos,

$$m = \inf_{x \in X} f(x) \qquad M = \sup_{x \in X} f(x)$$

Da limitação, temos que m e M são finitos. Olhando para a definição de supremo, temos que M é limite de valores em $f(X)$. Mas $f(X)$ é fechado, logo $M \in f(X)$. Isso significa que existe um ponto $\mathbf{b} \in X$ tal que $f(\mathbf{b}) = M$. O caso do ínfimo é análogo. ■

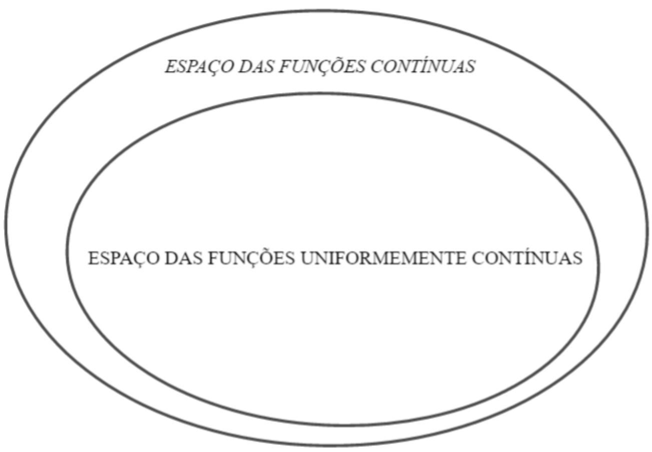
1.7 Continuidade uniforme

Definição 11. Sejam M e N espaços normados e f uma função $f : X \to M$, em que $X \subset N$. Diremos que f é **uniformemente contínua** se para cada $\epsilon > 0$, existir um número real $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(a)\| < \epsilon \text{ sempre que } \|x - a\| < \delta \quad x, a \in X.$$

É importante observar que, diferentemente do que acontece na noção de continuidade, a continuidade uniforme não é um evento pontual, e sim uma noção *global*. Perceba que o conceito "continuidade uniforme no ponto"não faz sentido. Uma vez que a essência da ideia consiste em um mesmo δ funcionando para um dado ϵ em todos os pontos do domínio.

Decorre diretamente das definições de continuidade e continuidade uniforme que toda função uniformemente contínua é por si só, contínua.



Um fato a ser explicitado pelo exemplo abaixo é o de que uma função pode ser contínua, porém não ser uniformemente contínua, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 11. Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Vamos mostrar que essa função não é uniformemente contínua. Primeiramente vamos supor, por absurdo, que f seja uniformemente contínua. Assim, vamos escolher $\epsilon = 1$ e teremos garantida a existência de $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in (0, 1)$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1.$$

Escolhendo $x \in (0, 1)$ munido da propriedade de $x < \delta$ e $y = \frac{x}{2}$ temos

$$|x - y| = \left|x - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right| = \frac{x}{2} < \delta.$$

Agora, vamos analisar a seguinte diferença

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}.$$

O que é uma contradição, já que $\frac{1}{x}$ com $x \in (0, 1)$ é certamente maior que 1. Assim, f mesmo sendo contínua, não é uniformemente contínua.

Exemplo 12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$, com $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\delta = \frac{\epsilon}{|c|}$. Então, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, temos

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |(cx + d) - (ca + d)| = |c||x - a| < |c|\delta = \epsilon.$$

E assim, concluímos que qualquer função afim com domínio nos números reais é uniformemente contínua. No exemplo acima, foi exigido $c \neq 0$. No caso em que $c = 0$ teríamos uma função constante, que por sua vez é uniformemente contínua.

Exemplo 13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Vamos mostrar que f é uniformemente contínua.

Primeiramente seja $\epsilon > 0$ e vamos escolher $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para todo x e y pertencentes aos reais teremos que $|x - y| < \delta$. Aplicando na função f, temos:

$$\left|\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + y^2}\right| = \left|\frac{1 + y^2 - (1 + x^2)}{(1 + x^2) \cdot (1 + y^2)}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{(1 + x^2) \cdot (1 + y^2)}\right|.$$

Usando uma propriedade de normas e a uma propriedade de fatoração, temos:

$$\frac{|x + y| \cdot |x - y|}{|1 + x^2| \cdot |1 + y^2|}.$$

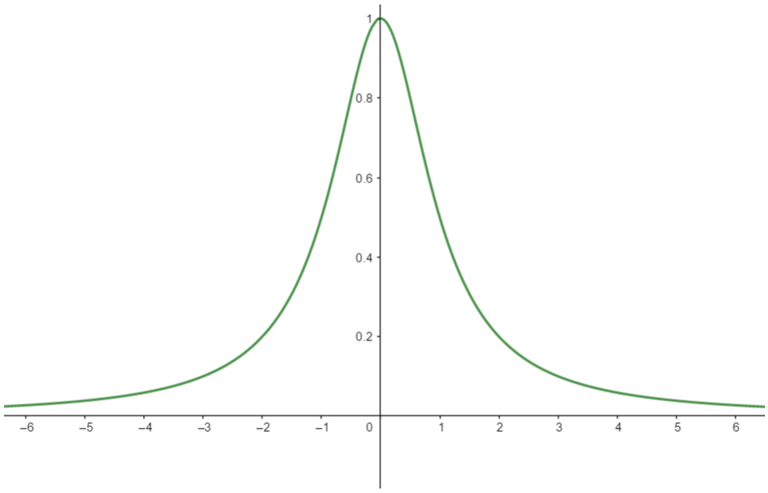
Usando a desigualdade triangular, temos:

$$\leq \left(\frac{|x|}{|1 + x^2| \cdot |1 + y^2|} + \frac{|y|}{|1 + x^2| \cdot |1 + y^2|}\right) \cdot |x - y| \leq \left(\frac{|x|}{|1 + x^2|} + \frac{|y|}{|1 + y^2|}\right) \cdot |x - y|.$$

Assim, podemos afirmar que

$$\leq (1+1) \cdot |x-y| < 2\delta = \epsilon.$$

Dessa forma, fica comprovado que f é uniformemente contínua. Veja seu gráfico na figura abaixo.



Trabalhando no espaço de funções contínuas, percebemos que uma função pode muito bem ser contínua e não ser uniformemente contínua. Pois bem, continuidade pode implicar continuidade uniforme. Veja o teorema a seguir que formaliza essa ideia.

Teorema 6. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma função. Se f é contínua, então f uniformemente contínua.

Demonstração. Suponha por absurdo que f não é uniformemente contínua. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que nenhum $\delta > 0$ satisfaça a definição. Isto é, para cada $\delta = \dfrac{1}{k}$ existem pontos $a_k \in X$ e $x_k \in X$ tais que

$$\|x_k - a_k\| < \frac{1}{k} \quad \text{mas} \quad \|f(x_k) - f(a_k)\| \geq \epsilon.$$

Como X é compacto e $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X, então existe uma subsequência $(a_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $a \in X$. Agora vamos analisar a subsequência $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = \lim_{i\to\infty} a_{k_i} + (x_{k_i} - a_{k_i}).$$

Sabe-se que $(x_{k_i} - a_{k_i}) < \dfrac{1}{k_i}$, dessa forma temos que essa diferença converge para 0. Logo,

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = a + 0 = a.$$

Usando a continuidade da função f

$$\lim_{i\to\infty} f(a_{k_i}) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = f(a).$$

Consequentemente,

$$\lim_{i\to\infty} \|f(a_{k_i}) - f(x_{k_i})\| = 0.$$

O que contraria o fato que $\|f(x_k) - f(a_k)\| \geq \epsilon > 0$ para todo n. Portanto, f é uniformemente contínua. ■

2 Dimensão Infinita

Uma vez que o conceito de compacidade desempenha papel fundamental em toda análise real, a importância de se desenvolver a noção de quais conjuntos são compactos e quais não são é inegável. Em espaços normados de dimensão finita a caracterização de compactos é bem simples: um conjunto é compacto se e somente se é fechado e limitado, como garante a generalização do Teorema de Heine-Borel. Essa afirmação nos leva a uma pergunta natural: podemos caracterizar os compactos em dimensão infinita da mesma forma?

Definição 12. Sejam X e Y espaços normados e $A \subset X$. Considere agora o conjunto V de todas as funções $f : A \to Y$. Definiremos

$$C(A, Y) = \{f \in V \mid \text{f é contínua}\}.$$

Observação 11. É importante ressaltar que a notação $C(X)$ será usada quando o contradomínio das funções contínuas for o conjunto dos número reais, ou seja,

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \text{f é contínua}\}.$$

Uma vez que estamos trabalhando com um espaço vetorial, podemos garantir que esse espaço também possui estrutura de espaço normado se sobre ele definirmos a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X}\{|f(x)|\}$

Teorema 7. Sejam X um espaço normado, Y um espaço normado munido da norma $\|\cdot\|$ e $A \subset X$. Se A é compacto, então $C(A, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\|$.

Demonstração. Se temos um espaço compacto A e uma função f contínua definida nesse espaço, então f é limitada. A compacidade de A nos garante que, para toda f em A

$$\sup_{x \in A} \|f(x)\| < \infty$$

E agora, vamos mostrar que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\|$ é de fato uma norma.

1. Seja $x \in A$
   $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$
   $\|\alpha \cdot f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \|\alpha \cdot f(x)\| = |\alpha| \cdot \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\| = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$

3. Seja $a = \|f\|_\infty$ e $b = \|g\|_\infty$

   $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq a + b, \ \forall x \in A$

   Como vale para todo $x \in A$, podemos aplicar para $\sup\limits_{x \in A} \|f(x) + g(x)\|$.

   $\|f(x) + g(x)\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \|f(x) + g(x)\| \leq a + b = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

■

Apesar de termos garantido que $\|f\|_\infty$ é verdadeiramente uma norma, essa não é única norma que pode ser atribuída a um espaço tão fértil como é o caso de $C[a, b]$, vejamos.

Exemplo 14. Seja $C[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Desse modo é possível conceder a estrutura de espaço normado a esse conjunto quando munido da norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

Perceba que de fato $\| \cdot \|_1$ é uma norma. De fato

- $\displaystyle\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ para todo x, visto que f é contínua.

Além disso,

- $\displaystyle\int_a^b |f(x) + g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)| \, \mathrm{d}x.$

Assim, fica confirmado que de fato $\|f\|_1$ é uma norma em $C[a, b]$.

2.1 Convergência pontual e uniforme

No campo da análise matemática, a convergência uniforme é um tipo de convergência de funções considerado mais forte que a convergência pontual. Nesse momento iremos apresentar primeiramente conceitos atrelados à convergência pontual e logo em seguida conceitos relacionados à convergência uniforme.

2.2 Convergência pontual

Seja A um espaço vetorial normado. Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em A e tomando valores reais. Dizemos que a sequência de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para a função $f : A \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in A$, a sequência de números

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in E$ fixado, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Pode-se chamar a convergência pontual de convergência simples ou ainda convergência ponto a ponto. Vejamos agora a definição formal.

Definição 13. Sejam X e Y espaços normados e E subconjunto de X. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de E em Y. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge pontualmente** para uma função f, se para cada $x \in E$ e $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon.$$

Observação 12. É importante notar que a sutileza da definição está relacionada a N, uma vez que esse número natural depende tanto de x quanto de ϵ. Desse modo, podemos escrever $N = N(\epsilon, x)$.

Exemplo 15. Consideremos a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$.

Note que, fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x_0)^2}{n} = 0$.

Veja a figura abaixo.

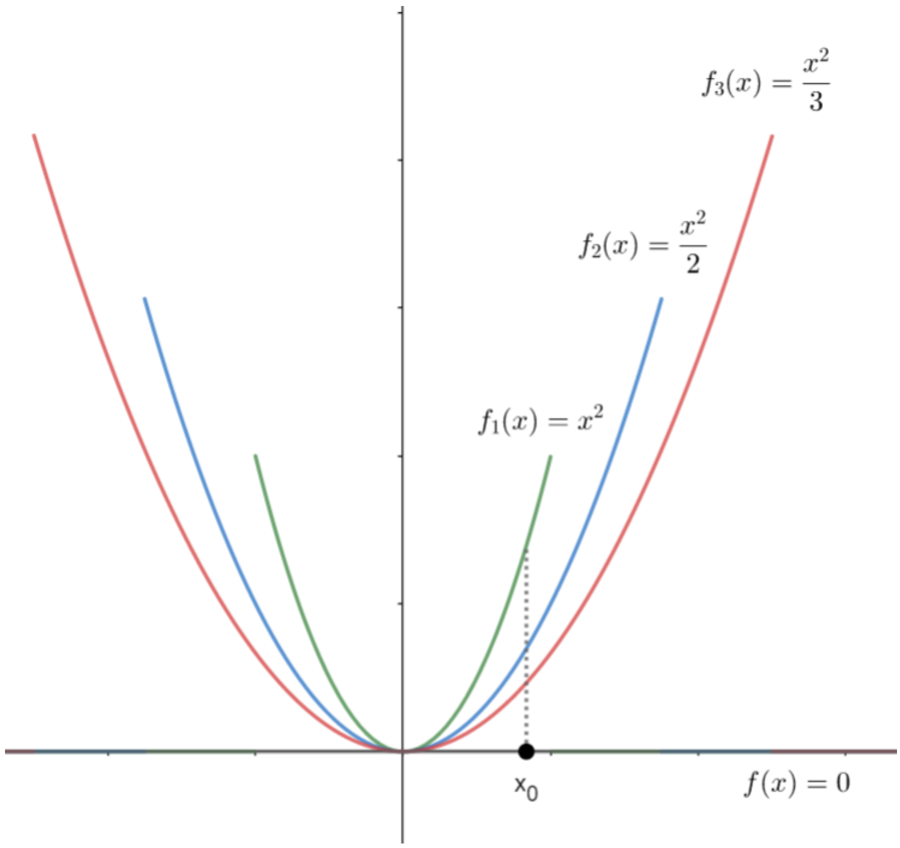


Figura 2.2.1 – .

Observação 13. Observe o segmento de reta pontilhado paralelo ao eixo das ordenadas na **Figura 2.2.1**. Sabendo que a escolha de x_0 é arbitrária, qualquer reta vertical levantada de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ corta esses gráficos numa sequência de pontos cujas coordenadas convergem para zero.

Observação 14. Ainda no âmbito da **Figura 2.2.1**, é interessante notar o movimento de "abertura"que as parábolas estão fazendo. Isto é, a medida que o denominador cresce, o coletivo de gráficos se aproxima da função constante e igual a zero.

Um equívoco que pode ser causado ao se imaginar que o coletivo dos gráficos precisam se aproximar da função limite. Sobre isso, versa Elon Lages. (LIMA, 2011)

> Dizer que $f_n \to f$ pontualmente em E significa que, fixado arbitrariamente um ponto $x_0 \in E$, os gráficos das funções f_n intersectam a vertical levantada pelo ponto $(x_0, 0)$ numa sequência de pontos cujas ordenadas convergem para $f(x_0)$. Coletivamente, porém, os gráficos das f_n podem ser bem diferentes do gráfico de f e mesmo nunca se aproximarem dele.

O próximo exemplo nos expõe um caso em que, coletivamente, os gráficos são bem diferentes da função limite.

Exemplo 16. Notemos agora a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) = x^n$. Aqui precisaremos separar as possíveis escolhas de x_0 em dois casos.

1. $x_0 = 1$
   Neste caso, temos: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.
2. $0 \leq x_0 < 1$
   Neste caso, temos: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} x_0^n = 0$.

Logo, tomando-se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Veja a figura abaixo.

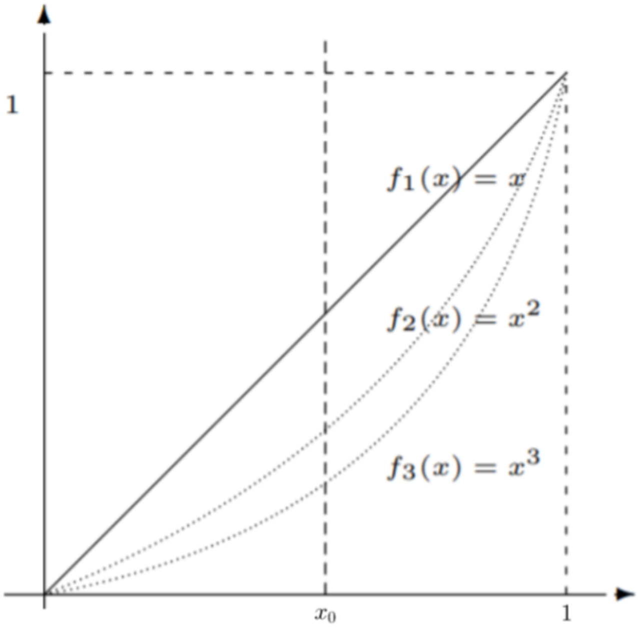


Figura 3.2.2 – .

Observação 15. Observe o segmento de reta pontilhado paralelo ao eixo das ordenadas na **Figura 3.2.2**. Sabendo que a escolha de x_0 é arbitrária, qualquer reta vertical levantada de um ponto $x_0 \in [0, 1)$ corta esses gráficos numa sequência de pontos cujas coordenadas convergem monotonamente para zero. No ponto $x = 1$, temos $f_n(1) = 1$ para todo n.

Observação 16. Perceba que o **Exemplo 16** nos mostra que uma sequência de funções contínuas pode convergir pontualmente para uma função que não seja contínua. Em outras palavras, convergência pontual **não** preserva continuidade.

2.3 Convergência uniforme

Definição 14. Sejam X e Y espaços normados e E subconjunto de X. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de E em Y. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para uma função f, se para cada $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in E$

Observação 17. Se uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir uniformemente pra uma função f, então ela também convergirá pontualmente para a mesma f.

Observação 18. É importante notar que a sutileza da definição está relacionada a N, uma vez que esse número natural depende apenas de ϵ. Desse modo, podemos escrever $N = N(\epsilon)$.

Um método eficaz para se mostrar que uma sequência de funções f_n **não** converge uniformemente para f em X consiste em exibir um $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se pode encontrar $n > n_0$ e $x \in X$ com $\|f_n(x) - f(x)\| \geq \epsilon$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 17. Seja a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ em que $f_n(x) = x^n$. Fixemos $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$$

isto é,

$$x^{n_0} \geq \frac{1}{2}.$$

Quando for viável, para qualquer ϵ dado, obter um número natural n_0 que convenha para todos os pontos $x \in X$ poderemos garantir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em X.

Teorema 8. Sejam X e Y espaços normados e E subconjunto de X. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas de E em Y. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f : E \to Y$ então f é uma função contínua.

Demonstração. Vamos provar a continuidade de f em um ponto $x_0 \in E$. Dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_0}(x) - f(x)\| \leq \epsilon$$

para todo $x \in E$. Agora, vamos usar a continuidade de f_{n_0} para obter $\delta > 0$ tal que

$$\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| \leq \epsilon$$

para $\|x - x_0\| < \delta$. Assim, usando a desigualdade triangular, temos

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\|.$$

Aplicando os resultados apresentados acima, temos

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\epsilon,$$

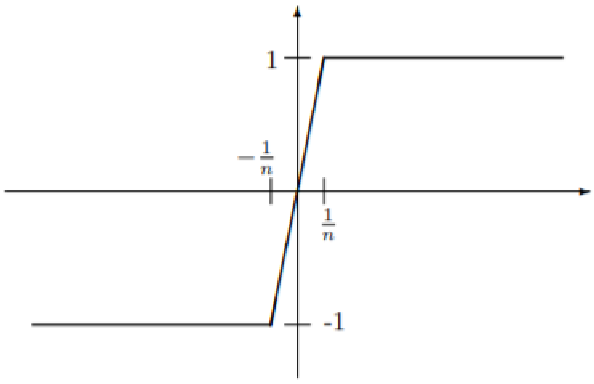
para $\|x - x_0\| < \delta$, o que prova a continuidade de f em x_0. ■

Observação 19. Diferente do que acontece com a convergência pontual, o **Teorema 8** garante que a convergência uniforme preserva continuidade. Essa propriedade nos dá elementos para investigar o modo de convergência de uma sequência de funções contínuas. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 18. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sequência de funções definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq -\dfrac{1}{n} \\ \\ nx, & \text{se } -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \\ 1, & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

Veja a figura abaixo.



Aqui, percebe-se que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função f, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Mas apesar das funções de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serem contínuas, a função limite f não é. Portanto, aplicando o **Teorema 8** podemos concluir que a convergência não é uniforme.

Uma vez que uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas converge pontualmente para uma f que por sua vez não é contínua, temos ferramentas suficientes para garantir que essa não convergirá uniformemente. Essa afirmação nos leva a um questionamento quase que instintivo: podemos garantir convergência uniforme quando a função limite é contínua? A resposta é não. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 19. Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que as funções estão definidas como

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad \text{para } x \in [0,1].$$

Gostaríamos de investigar o comportamento das funções a medida que n tende ao infinito. Para isso, vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n.$$

Primeiramente, veja que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ para todo n, portanto o limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $x = 0$ e $x = 1$ é a função constante e igual a zero. Agora, para $x \in (0,1)$ a situação é outra. Vejamos

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{(1-x)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{-n\cdot ln(1-x)}}.$$

Neste momento, como temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, estamos aptos a usar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^{-n\cdot ln(1-x)} - ln(1-x)} = -x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)^n}{ln(1-x)}.$$

Agora, como $(1-x)^n$ tende a zero quando $x \in (0,1)$, temos

$$-x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)^n}{ln(1-x)} = -x \cdot 0 = 0.$$

Isso significa que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para zero. Porém, ainda não podemos garantir sua convergência uniforme. Vamos supor por absurdo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero. Desse modo, por definição

$$|f_n(x) - 0| < \epsilon \qquad \forall x \in [0,1]$$

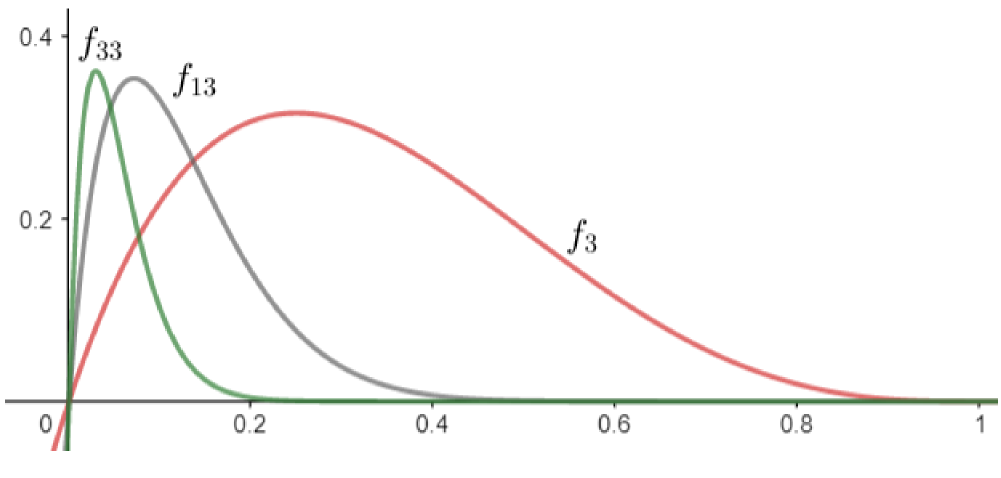
e para todo n a partir de um certo n_0. Calculando $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ teremos

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Como estudamos o comportamento de f_n quando n tende ao infinito, acabamos de nos deparar com um limite fundamental.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}.$$

Como o limite não é igual a zero, a convergência não pode ser uniforme.
A figura abaixo representa a ideia que acabamos de trabalhar.



Agora vamos estudar um exemplo de um sequência que converge uniformemente.

Exemplo 20. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em que as funções estejam definidas por

$$g_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \qquad \text{para } x \in [2,\infty).$$

Seja $\epsilon > 0$. Usando a propriedade arquimediana podemos escolher $N > \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}$.

Assim, para todo $n > N$ e para todo $x \in [2,\infty)$. Como sabemos que a sequência converge pontualmente para a função constante e igual a zero, vamos nos atentar na seguinte diferença

$$\left|\frac{1}{1+x^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+x^n}\right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Como estamos trabalhando com $x \in [2,\infty)$ pode-se afirmar que

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Agora, como $n > N$, podemos dizer que

$$n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Sabendo que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ é um número negativo, temos

$$n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\epsilon.$$

Aplicando uma propriedade de logaritmos

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln\epsilon.$$

E assim, temos que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon.$$

O que nos garante que a sequência g_n converge uniformemente para a função constante e igual a zero.

2.4 Conjuntos fechados e limitados são compactos?

Para responder a pergunta acima precisaremos ter cautela. No presente trabalho, foi provado que se estivermos trabalhando em espaços normados de dimensão finita, a resposta é sim, conjuntos fechados e limitados são exatamente os conjuntos compactos. Vejamos o que acontece em um exemplo em que a restrição relacionada a finitude dimensional é dispensada.

Proposição 3. Seja $C[0,1]$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[0,1]$. A bola unitária fechada em $C[0,1]$ não é compacta.

Demonstração. Denotaremos por $\overline{B}(0,1)$ a bola unitária fechada em $C[0,1]$.

$$\overline{B}(0,1) = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos definir $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = x^n$. Assim, temos

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1.$$

Perceba que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\overline{B}(0,1)$. Como visto em **Exemplo 16** essa sequência converge pontualmente para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

E como visto em **Exemplo 17** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente. Em particular, nenhuma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$. Assim, pode-se afirmar que nenhuma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{B}(0,1)$ e portanto pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a bola fechada unitária não é compacta, apesar de ser fechada e limitada. ■

O resultado acima nos leva a pergunta natural: se os conjuntos fechados e limitados não são os conjuntos compactos em $C[0,1]$ existe alguma caracterização para os conjuntos compactos, similar ao que acontece em espaços normados de dimensão finita, no espaço das funções contínuas?

2.5 Equicontinuidade

Neste tópico, trataremos de um dos principais assuntos do trabalho, equicontinuidade.

Definição 15. Seja X um espaço normado. Uma **sequência de Cauchy** é uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural N tal que

$$p, k \geq N \Rightarrow \|x_p - x_k\| < \epsilon.$$

O espaço X é dito **completo** se toda sequência de Cauchy converge para um ponto de X.

Definição 16. Seja $E \subset C(A, Y)$. Dizemos que E é um conjunto **equicontínuo** de funções se para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para $x, y \in A$

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

para toda função $f \in E$.

Observação 20. Perceba a semelhança entre a definição acima e a definição de continuidade uniforme. A diferença entre as duas se encontra justamente no fato de que agora a definição pede que δ seja escolhido independentemente da função f.

Exemplo 21. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definiremos $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$f_n(t) = \begin{cases} t \cdot n & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ \\ 2 - t \cdot n & \dfrac{1}{n} \leq t \leq \dfrac{2}{n} \\ \\ 0 & \dfrac{2}{n} \leq t. \end{cases}$$

Perceba que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é equicontínua. Se tomarmos

$$\epsilon = \frac{1}{2}$$

a propriedade arquimediana nos garante que qualquer que seja $\delta > 0$ sempre vamos conseguir encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \delta$$

fazendo com que a norma

$$\left| x_{n_0}(0) - x_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right) \right| = |0 - 1| = 1 > \epsilon.$$

Assim, podemos afirmar que não se trata de uma sequência equicontínua.

Uma vez estudado um exemplo de sequência que não é equicontínua, vamos agora a um exemplo de conjunto equicontínuo.

Exemplo 22. Seja c uma constante real positiva e E um conjunto de funções deriváveis em um intervalo I de tal forma que

$$|f'(x)| \leq c$$

para toda função $f \in E$ e todo ponto $x \in I$. Com o intuito de mostrar que E é equicontínuo, seja $x_0 \in I$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \frac{\epsilon}{c}.$$

Se $x \in I$ é tal que $|x - x_0| < \delta$ então, aplicando o Teorema do Valor Médio, temos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c \cdot |x - x_0| < \epsilon$$

para toda função $f \in E$. E assim, fica garantido que E é um exemplo de conjunto equicontínuo de funções.

Teorema 9. (O Critério de Cauchy) Seja X um espaço normado com uma norma $\|\cdot\|$ e seja A um conjunto. Suponha que X é completo e seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em que $f_k : A \to X$. Desse modo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A se, e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe número natural N tal que

$$p, k \geq N \Rightarrow \|f_p(x) - f_k(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Demonstração. Primeiramente vamos assumir que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Assim, dado um $\epsilon > 0$ é possível encontrar um número natural N de tal forma que

$$k \geq N \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo x. Então, se $p, k \geq N$ teríamos, usando a desigualdade triangular

$$\|f_p(x) - f_k(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_k(x)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Reciprocamente, se, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número natural N tal que

$$p, k \geq N \Rightarrow \|f_p(x) - f_k(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$. Então, sabemos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para cada ponto x e então, como X é completo, irá convergir pontualmente para alguma função e a denotaremos por $f(x)$. Além disso, é possível encontrar um número natural N tal que

$$p, k \geq N \Rightarrow \|f_p(x) - f_k(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo x.
Sabendo que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \to f(x)$ em cada x, podemos encontrar para cada x um N_x, tal que

$$p \geq N_x \Rightarrow \|f_p(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Agora, fixo x, seja $p \geq \max\{N, N_x\}$. Assim, teremos

$$k \geq N \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| \geq \|f_p(x) - f_k(x)\| + \|f_p(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como o resultado acima é valido para todo x, nós encontramos um número natural N tal que

$$k \geq N \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$$

para todo x. Ou seja, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. ■

2.6 O teorema de Arzela-Ascoli

No presente momento iremos enunciar e demonstrar uma proposição que será usada na demonstração do Teorema de Arzela-Ascoli.

Proposição 4. Sejam X e Y espaços normados, $A \subset X$ compacto e $f_n : A \to Y$ contínua tal que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Então o conjunto

$$E = \{f, f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$$

é equicontínuo.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall n > n_0$$

e para todo $x \in X$. Como cada função f_n é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \epsilon$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n_0\}$.
Como f é uniformemente contínua , existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, dado $n > n_0$ e $\|x - y\| < \min\{\delta, \delta_1\}$, vale que

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - f_n(y)\| < \epsilon.$$

Agora $\delta_j = \min\{\delta, \delta_1\}$. Provamos acima que

$$\|x - y\| < \delta_j \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|f(x) - f(y)\| < \delta_j$. Portanto o conjunto E é equicontínuo.

■

Nesse momento iremos apresentar a definição de um conjunto pontualmente compacto. Essa definição será importante, visto que se trata de uma das hipóteses do Teorema de Arzela-Ascoli.

Definição 17. Seja $E \subset C(A, Y)$. Definiremos o conjunto

$$E_x = \{f(x) \mid f \in E\}$$

para um x fixado. Dizemos que E é **pontualmente compacto** se e somente se E_x é compacto em Y para cada $x \in A$.

Agora chegamos ao teorema principal do trabalho. Para demonstrá-lo, vamos primeiramente mostrar um teorema auxiliar e em seguida usá-lo.

Lema 10. Seja A um conjunto compacto em um espaço normado X. Então, para todo $\delta > 0$ existe um conjunto finito, digamos $C_\delta = \{y_1, \cdots, y_k\}$ tal que para cada $x \in A$ teremos $x \in B(y_i, \delta)$ para algum $y_i \in C_\delta$.

Demonstração. A coleção de bolas $\{B(x, \delta) | \, x \in A\}$ é uma cobertura para o conjunto A. Como A é compacto, existe uma subcobertura finita que também cobre A, digamos $B(y_1, \delta), \cdots B(y_k, \delta)$. Denotando $C_\delta = \{y_1, \cdots, y_k\}$ temos o resultado desejado.

Teorema 10. (Arzela-Ascoli) Sejam M um espaço normado e N espaço normado completo. Seja A é um conjunto compacto com $A \subset M$ e $X \subset C(A, N)$. Desse modo X é compacto se e somente se X é fechado, equicontínuo e pontualmente compacto.

Demonstração. Primeiramente, vamos supor que X é fechado, equicontínuo e pontualmente compacto e mostrar que X é compacto.
Seja

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{1/n}$$

em que os conjuntos $C_{1/n}$ são como no Lema 10. Sabendo que cada $C_{1/n}$ é finito, podemos concluir que C é enumerável, digamos

$$C = \{x_1, x_2, ...\}.$$

Iremos denotar por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em X. Assim, essa sequência está contida no conjunto pontualmente compacto X, e assim, usando o Teorema de Bolzano Weierstrass, podemos garantir a existência de uma subsequência convergente de $f_n(x_1)$. Vamos denotar essa subsequência da seguinte maneira

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), f_{13}(x_1), ..., f_{1n}(x_1), ...$$

Analogamente, a sequência $f_{1k}(x_2), k = 1, 2, ...,$ possui uma subsequência

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), f_{23}(x_2), ..., f_{2n}(x_2), ...$$

que também é convergente. Continuando o processo, a sequência $f_{2k}(x_3), k = 1, 2, ...,$ possui uma subsequência

$$f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), f_{33}(x_3), ..., f_{3n}(x_3), ...$$

que também é convergente. Avançando nesse raciocínio, iremos definir o conjunto

$$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = f_{nn}$$

em que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa a n-ésima função definida na n-ésima subsequência. Para representar esta ideia de maneira mais esquematizada temos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é obtida a partir da seguinte diagonal

$$\begin{matrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Por construção, é possível perceber que a sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cada ponto de C. De fato, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de cada sequência $(f_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$. Agora vamos mostrar que a sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em cada ponto de A e que a convergência é uniforme. Para tal, seja $\epsilon > 0$ e seja δ como definido na definição de equicontinuidade. Seja $C_\delta = \{y_1, \cdots, y_k\}$ um subconjunto finito de C tal que todo ponto de A está no interior de algum ponto de C_δ, como diz o Lema 10.
Como as seguintes sequências

$$(g_n(y_1))_{n\in\mathbb{N}}, (g_n(y_2))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (g_n(y_k))_{n\in\mathbb{N}}$$

convergem, existe um número natural N tal que se m, $n \geq N$, teremos

$$\|g_n(y_i) - g_m(y_i)\| < \epsilon$$

para $i \in \{1, ..., k\}$.
Agora, para cada $x \in A$, existe um ponto $y_j \in C_\delta$ tal que

$$\|x - y_j\| < \delta.$$

Portanto, como estamos assumindo a equicontinuidade, teremos

$$\|g_n(x) - g_n(y_j)\| < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(y_j)\| + \|g_n(y_j) - g_m(y_j)\| + \|g_m(y_j) - g_m(x)\|$$

e como cada uma das parcelas é menor que ϵ, temos que

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| < 3\epsilon$$

para m, $n \geq N$. E assim, a convergência uniforme da sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A segue do Critério de Cauchy. O limite pertence a X já que X é fechado. Logo, acabamos de mostrar que se X é equicontínuo, fechado e pontualmente compacto, então X é compacto.

Suponha agora que X é compacto, porém não é equicontínuo. Do fato de X não ser equicontínuo, podemos dizer que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall\delta > 0\, \exists\, x, y \in A$ e uma função $f \in X$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \ \text{ mas } \ \|f(x) - f(y)\| > \epsilon.$$

Sem perda de generalidade, vamos criar uma cadeia de δ's indexada por

$$\delta_n = \frac{1}{n}$$

de tal forma que, existam sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ e $f_n \in X$ tais que

$$\|x_n - y_n\| < \delta_n \ \text{ mas } \ \|f_n(x) - f_n(y)\| > \epsilon.$$

Assim, acabamos de definir ao menos uma sequência de funções em X. Escolhendo uma sequência de funções com essa propriedade percebemos que ela não pode ser equicontínua. Além disso, todas as subsequências $(f_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ terão também a propriedade de que para a $n(k)$-ésima função na sequência existem $x_{n(k)}$ e $y_{n(k)} \in A$ tais que

$$\|x_{n(k)} - y_{n(k)}\| < \delta_n \ \text{ mas } \ \|f_{n(k)}(x_{n(k)}) - f_{n(k)}(y_{n(k)})\| > \epsilon.$$

e assim, também é verdade que nenhuma subsequência pode ser equicontínua. Porém, é sabido que toda sequência convergente deve ser equicontínua, vide Proposição 4. E assim, assumindo que X não é equicontínuo, demonstramos a existência de uma sequência em X sem nenhuma subsequência convergente. O que é um absurdo, uma vez que X é compacto. Logo, X é equicontínuo.
Vamos provar que X é pontualmente compacto. Sabendo que X é compacto, toda sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ possui subsequência convergente. Dado $x_0 \in A$, seja

$$B_{x_0} = \{f(x_0) \mid f \in X\}$$

Tome uma sequência em B_{x_0}. Perceba que essa sequência é da forma $(g_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ com $g_n \in X$. Então $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e como X é compacto existe uma subsequência $(g_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para $g \in X$.
Em particular, $g_{nk}(x_0)$ converge uniformemente para $g(x_0) \in B_{x_0}$. Portanto, $(g_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em B_{x_0}. Por fim, a Proposição 1 nos garante que todo conjunto compacto contido em um espaço normado é fechado. ∎

Definição 18. Seja X um espaço normado. Dizemos que X é pontualmente limitado se para cada x no domínio das funções, o conjunto

$$\{f(x) \mid f \in X\}$$

é limitado.

Corolário 1. Seja $A \subset M$ um conjunto compacto. Suponha que $B \subset C(A, \mathbb{R}^m)$ seja equicontínuo, pontualmente limitado e fechado. Nessas condições, toda sequência em B possui uma subsequência uniformemente convergente.

Demonstração. Perceba que o conjunto de valores

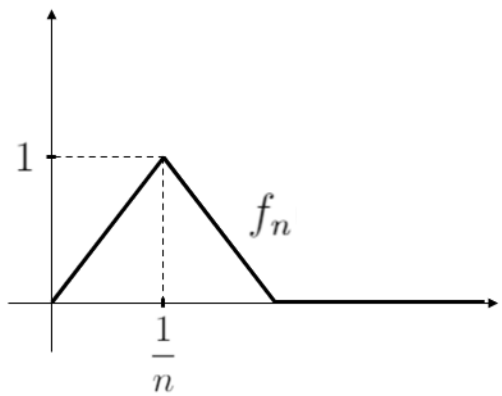
$$\{f(x) \mid f \in B\}$$

para cada $x \in A$ é limitado em $\mathbb{R}^n$. Assim, esse conjunto está contido em no seu fecho, que por sua vez é um conjunto compacto. Dessa forma, aplicando a mesma demonstração do Teorema 12 em uma sequência em B, teremos o resultado.

Exemplo 23. Seja $C[0,1]$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Vamos mostrar, usando o Teorema de Arzela-Ascoli, que a bola unitária fechada em $C[0,1]$ não é compacta. Denotaremos por $\overline{B}(0,1)$ a bola unitária fechada em $C[0,1]$.

$$\overline{B}(0,1) = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Considere as funções f_n como na figura abaixo.



Note que estamos usando a norma do supremo. Dessa forma, temos:

$$\left\| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f_n(1) \right\| = 1$$

para cada n.

Tendo isso em vista, podemos afirmar que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é equicontínua. Note que essa mesma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está na bola unitária fechada. Portanto, a bola unitária fechada não é equicontínua. E assim, por Arzela-Ascoli, podemos afirmar que a bola unitária fechada não é compacta.

3 Conclusões

No presente trabalho, estudamos conjuntos compactos tanto em dimensão finita quanto em dimensão infinita. Em um primeiro momento, quando ainda estávamos restritos à finitude dimensional, se viu muito útil a caracterização de conjuntos compactos como feita na Generalização do Teorema de Heine-Borel (Teorema 3).

Uma vez notado que a mesma caracterização não era válida para espaços normados de dimensão infinita, a busca por uma caracterização semelhante ganhou motivação. Conceitos nunca antes estudados na graduação, como o de equicontinuidade, se fizeram necessários e o engrandecimento matemático veio de maneira natural.

Ao caracterizar os conjuntos compactos no espaço de funções contínuas, ficou nítido que ao se retirar a restrição relacionada a finitude dimensional os problemas demandam uma maior maturidade matemática.

Referências

1 Figueiredo, Djairo Guedes de. Análise I. Rio de Janeiro: Impa, 1975. 253p.

2 Lima, Elon Lages. Curso de Análise vol. 1. 13ed Rio de Janeiro: Impa, 2011. 431p

3 Marsden, Jerrold. Elementary Classical Analysis. Rio de Janeiro: W. H. Freeman, 1993. 738p.

4 Lima, Elon Lages. Algebra Linear. 7.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008. 357p.

5 Lima, Elon Lages. Espaços métricos. 4.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2009. 299p.

6 Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, 1989. 704 p.