UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Gabriel Pedro Pederssetti Graciani

Álgebra na BNCC: um olhar para uma coleção de livros didáticos

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Grando

Florianópolis
2020

Gabriel Pedro Pederssetti Graciani

Álgebra na BNCC: um olhar para uma coleção de livros didáticos

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Graciani, Gabriel Pedro Pederssetti
Álgebra na BNCC : um olhar para uma coleção de livros didáticos / Gabriel Pedro Pederssetti Graciani ; orientadora, Regina Célia Grando, 2020.
97 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Educação matemática. 3. Pensamento algébrico. 4. BNCC. 5. Livros didáticos. I. Grando, Regina Célia. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Ao meu avô Celso.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa apenas uma etapa da minha formação, mas aproveito este espaço para agradecer à todos que de alguma forma contribuíram para a elaboração do presente trabalho e também estiveram comigo durante o percurso pelo curso de Licenciatura em Matemática.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Cleomar e Vania, por todo o amor e dedicação que têm por mim, que se demonstram em cada gesto, cada palavra e cada atitude. Vocês sempre serão inspiração e exemplo pra mim. Aos meus avós, Lucia, Waldir, Gema e Celso (que não está mais conosco), por todo o cuidado, carinho e incentivo de sempre. À toda a minha família, em especial meus priminhos Miguel e Francisco por toda a alegria que nos trouxeram nesses últimos anos.

Aos meus amigos de infância e adolescência, Emely, Mateus, Ana, Jean e Érika. No momento estamos distantes, mas vocês são pessoas que sempre levarei comigo e sei que poderei contar, onde quer que estejamos.

Ao Artur, que veio comigo para Florianópolis e ao pessoal da Química que me acolheu por aqui, Evelyn, Greg, Duda e Ricardo. Foi muito bom ter a companhia e a amizade de vocês nesses anos.

Aos membros e ex-membros do PET Matemática que pude conviver durante boa parte da graduação cito aqui alguns nomes: Yuri (que me puxou pelo braço e me levou ao maravilhoso mundo da Educação Matemática), Carlinhos, João, Jean (que também dividiu o mesmo teto comigo por um tempo), Lara, Kendji, Bruno, Vini, Léo, Gustavo, Lívia. O PET sempre foi um ambiente de muito trabalho, acolhimento, aprendizado, desenvolvemos muita coisa juntos. Deixo minha gratidão especial aos alunos, professores e coordenadores do Cursinho Gauss, projeto que tenho muito carinho, onde tive a primeira oportunidade de entrar em sala de aula. Deixo também um agradecimento especial ao professor Pinho, que com sua sabedoria, experiência e simpatia sempre conduziu muito bem o grupo do PET.

Aos membros do grupo de estudos e pesquisa ICEM (Insubordinações Criativas em Educação Matemática), onde convivi com pessoas de diversas formações, que atuavam em diferentes áreas da educação (Anos Iniciais, Anos Finais, Ensino Médio e Graduação) e pudemos sempre ter discussões muito ricas e qualificadas, as quais foram de grande contribuição para minha formação como professor e pesquisador em Educação Matemática.

Ao Patrício e ao Pimenta, provavelmente as pessoas que mais convivi nesses anos, com quem morei (e ainda moro) a maior parte do tempo de graduação, foi um prazer receber o convite de fazer parte do apartamento 103 do lendário Edifício Bernardo. Os momentos compartilhados foram sempre de alegria, amizade, discussões por futebol e apoio nos momentos de aperto do trabalho ou da graduação.

Aos membros e ex-membros do CALMA (Centro Acadêmico Live de Matemática), local onde pude atuar de forma mais ativa nesses últimos anos de graduação, onde tive a oportunidade de aprender sobre o movimento estudantil e atuar em diversas lutas por uma educação melhor.

Também gostaria de citar algumas pessoas que conheci e estiveram comigo nesses últimos anos, algumas desde o ensino médio, outras da graduação e são amizades que pretendo levar para o resto da vida: Leonardo, Matheus, Lucas, Malu, Osvaldo, Sofia, Victor, Lucca, Carine, Emanuel entre outros.

Aos professores da UFSC, em especial aos que tive oportunidade de conviver, trabalhar em projetos e ter aula, deixo o nome de alguns aqui: Alda, Fernando, Rosilene, Eliezer, Virgínia, Silvia, Morgado, entre outros. Deixo um agradecimento especial à minha orientadora neste trabalho, a professora Regina, por toda sua alegria e entusiasmo sempre demonstrados em nossas conversas. Você tornou a elaboração desse trabalho uma experiência muito prazerosa e de muito aprendizado. Sempre saía de nossos encontros de energias renovadas e com confiança de que estava no caminho certo. Estendo os agradecimentos a todos os profissionais da UFSC, técnicos e terceirizados, que tornam possível o bom funcionamento da Universidade.

RESUMO

Este trabalho consiste em uma análise de uma coleção de livros didáticos com vistas a investigar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. Para tanto, considerou-se como referência de análise os objetos de conhecimento e habilidades presentes na unidade temática de Álgebra da Base Nacional Comum Curricular e também das pesquisas no campo da Educação Algébrica, principalmente as voltadas para o ensino de álgebra no Ensino Fundamental II. Primeiramente abordamos uma discussão sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, a sua inserção nos programas curriculares brasileiros e citamos algumas pesquisas recentes sobre o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no Ensino Fundamental II. Posteriormente desenvolvemos a análise das atividades dos livros didáticos de uma coleção que dizem respeito ao ensino de Álgebra. A investigação nos possibilitou reconhecer que a coleção, embora traga algumas reduzidas possibilidades de conexões do conteúdo algébrico com problemas e ações cotidianas, sua abordagem esteve, na maioria das vezes, restrita a exploração operatória e técnica da álgebra. Há pouca preocupação em desenvolver o pensamento e a linguagem algébricos, sendo a linguagem tratada como algo pronto, com reduzida exploração de uma articulação entre a língua materna e a linguagem matemática. Finalmente, algumas situações que nos pareceram “forçadas” para a abordagem restrita de determinados conteúdos presentes na BNCC.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. BNCC. Livro didático.

ABSTRACT

This work consists in an analysis of a textbook collection in order to investigate the development of algebraic thinking and language. To this end, we considered as a reference for analysis the objects of knowledge and abilities present in the thematic unit of Algebra of the National Common Curricular Base and also the research in the field of Algebraic Education, mainly those focused on teaching algebra in Elementary School II. Firstly, we discuss the historical development of Algebra, its insertion in Brazilian curricular programs and mention some recent research on the development of algebraic thinking and language in Elementary School II. Later we developed the analysis of the activities of the textbooks in a collection that relate to the teaching of Algebra. The investigation allowed us to recognize that the collection, although it brings some reduced possibilities of connections of algebraic content with problems and everyday actions, its approach was, in most cases, restricted to the operative and technical exploration of algebra. There is little concern with developing algebraic thinking and language, with language being treated as something ready, with little exploration of an articulation between mother language and mathematical language. Finally, some situations that seemed "forced" to the restricted approach of certain contents present in the BNCC.

Keywords: Algebraic thinking and language. BNCC. Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

EFII Ensino Fundamental II

PET Programa de Educação Tutorial

MMM Movimento da Matemática Moderna

PNLD Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como estudante da Educação Básica, sobretudo no Ensino Fundamental, feito em uma escola pública, o livro didático era usado de forma muito diferente por cada professor. Alguns o seguiam com bastante fidelidade ao seu conteúdo e sua forma de organização, outros eventualmente usavam para algumas atividades, outros ainda, raramente tiravam os livros do armário; entre estes últimos, inclusive, estavam, pelo que me recordo, os professores de Matemática.

Ainda sobre minhas experiências no Ensino Fundamental, a primeira vez que tive contato com a palavra "Álgebra" foi com referência, principalmente, à resolução de equações. Eu costumava associar Álgebra ao uso de letras do alfabeto como incógnitas de alguma equação. Em minhas experiências nas aulas de Matemática lembro que o foco estava sempre na forma de *executar* as operações, com reduzido foco no *sentido* das operações.

O curso de licenciatura em matemática me trouxe uma abordagem diferente da Matemática. Logo nas primeiras fases, deparei-me com uma Matemática extremamente formal, baseada no rigor das definições, das demonstrações e da lógica, quesitos essenciais na formação de um matemático. No entanto, algumas experiências, como o PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), em que tive contato com alunos do ensino básico, mostraram-me que o conhecimento da matemática do ensino superior não era suficiente para a formação de um professor de matemática. Daí veio o interesse pela pesquisa em educação matemática.

Pelo interesse em educação matemática e, também, pelo incentivo de outros colegas, ingressei no grupo de estudos ICEM[1](Insubordinações Criativas em Educação Matemática), em que discutimos o pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A princípio pode parecer estranho um estudante de graduação de Matemática que irá atuar no Ensino Fundamental II e Ensino Médio se debruçar sobre as discussões no campo do pensamento algébrico nos anos iniciais. Entretanto, esse conteúdo é recente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nesse nível de ensino e constituiu um grande desafio pensar, coletivamente, junto a professores da educação básica e pedagogos como esse pensamento pode ser desenvolvido numa perspectiva de *early algebra* e que possibilita a continuidade para os outros

[1] ICEM – Grupo de estudos e de pesquisas em Insubordinações Criativas em Educação Matemática. Institucionalizado e certificado pelo CNPq. Projeto de Extensão. MEN/CED/UFSC. Coordenação: Prof. Dr. Everaldo Silveira e Profa. Dra. Regina Célia Grando.

anos de ensino. Pelos conhecimentos que adquiri junto ao grupo e com as pesquisas já realizadas no âmbito do pensamento algébrico, apresentei um trabalho na 1ª Feira de Matemática da UFSC, organizada pelo PET (Programa de Educação Tutorial) Matemática — grupo que fiz parte por três semestres — em que tratei do pensamento algébrico no estudo de sequências recursivas e repetitivas nos anos finais do Ensino Fundamental. Todas essas experiências foram fundamentais para a minha formação e culminaram no interesse pelos temas tratados neste trabalho. Paralelo ao meu movimento formativo, a educação brasileira passava por significativas mudanças curriculares.

Homologada em dezembro de 2017, a BNCC é um documento de caráter normativo que estabelece conteúdos, competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes de todo o território brasileiro da Educação Básica, que compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. A implementação da Base tem sido amplamente debatida por educadores Brasil afora. Na área de Matemática, a Álgebra é um dos 5 eixos que compõe o ensino de matemática – junto com Aritmética, Geometria, Estatística e Probabilidade, Grandezas e Medidas – sendo um campo de conhecimento essencial para a trajetória do estudante pela Educação Básica. O campo da Álgebra (desenvolvimento do pensamento algébrico) surge como novidade no currículo nacional, quando se propõe a ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse aspecto gerou muita tensão e insegurança por parte dos professores que ensinam matemática nesse nível de ensino (JUNGBLUTH, 2020) e, ao mesmo tempo, gera um grande desafio aos professores do Ensino Fundamental II a darem continuidade às discussões abordadas nos anos iniciais que avançam da simples concepção de Álgebra como a manipulação de letras e símbolos.

A estudo da Álgebra, como citado inicialmente, é frequentemente ligado à manipulação simbólica e à resolução de equações. Os alunos precisam entender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. De acordo com Vale et al. (2008), "muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados". A partir disso vem a necessidade de compreender quais são as ferramentas que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para Schliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 12 *apud* CANAVARRO, 2009), "a generalização está no coração do pensamento algébrico", no entanto, a ideia de generalização não precisa necessariamente ser expressa através da simbologia algébrica, com letras, equações e funções. A linguagem natural e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos podem também ser usadas para expressar a generalização.

O trabalho está estruturado em capítulos, em um primeiro momento, abordamos o desenvolvimento histórico da Álgebra, com enfoque na Linguagem Algébrica, sendo este um dos aspectos a serem investigados na análise. Em seguida, traçamos um histórico da Álgebra na educação brasileira, até a chegada da BNCC, em que discutimos também o processo de implementação e aspectos gerais do documento. Posteriormente, apresentamos, a partir de pesquisas na área da educação algébrica, alguns aspectos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental II. Antes de iniciar a análise, apresentamos a metodologia da pesquisa. Terminada a análise, fazemos nossas considerações finais e apontamos novas discussões e pesquisas que podem ser geradas pelo trabalho.

Tendo em vista as experiências e motivações pessoais, assim como as discussões recentes no âmbito das novas orientações curriculares e reformulações nos manuais, livros didáticos e de formação docente, o presente trabalho se propõe a investigar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos propostos em uma coleção de livros didáticos aprovados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), usando como referência de análise as habilidades e as competências apontadas no eixo Álgebra para o Ensino Fundamental II na BNCC. Para tanto, nos propomos a analisar como uma coleção de livros didáticos de matemática dialoga com a BNCC e as pesquisas desenvolvidas na área de educação algébrica, a partir das tarefas e atividades que esta propõe. De acordo com Bush (1987), o livro didático é uma fonte de informação que alivia algumas inseguranças, sobretudo de professores com pouca experiência, trazendo essa situação para a realidade atual. Com a emergência da implementação da BNCC, é possível que os professores recorram à esta suposta segurança dos livros didáticos como alternativa para trabalhar os conteúdos propostos pelo documento.

1.1 OBJETIVOS

Nas seções abaixo estão descritos o objetivo geral e os objetivos específicos deste TCC.

1.1.1 Objetivo Geral

Investigar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos propostos em uma coleção de livros didáticos aprovada pelo PNLD.

1.1.2 Objetivos Específicos

Compreender os pressupostos teóricos do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos historicamente e pedagogicamente;

Identificar os conteúdos e a linguagem algébricos nas atividades propostas em uma coleção de livros didáticos;

Analisar o desenvolvimento do conteúdo e da linguagem algébricos a partir dos pressupostos teóricos e metodológicos apontados em pesquisas na área, bem como nas prescrições da BNCC (objetos de conhecimento e habilidades).

2 ÁLGEBRA E EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Nesse capítulo apresentaremos os pressupostos teóricos que fundamentam a pesquisa, começando pelo desenvolvimento da Álgebra e da Linguagem Algébrica ao longo da história, a Álgebra nos programas curriculares do Brasil, culminando com a Álgebra na BNCC e, finalmente, apresentamos algumas das pesquisas atuais na Educação Algébrica.

.

2.1 O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA ÁLGEBRA E DA LINGUAGEM ALGÉBRICA

Atualmente a Álgebra se caracteriza pelo ramo da Matemática que trata da resolução de equações, do estudo de estruturas e enfoque no uso de símbolos como forma de traduzir ideias matemáticas e resolver problemas. Esses tipos de problemas estiveram presentes ao longo da história e os que se dedicaram ao estudo da matemática nem sempre tiveram acesso à linguagem simbólica moderna, o que não os impediu de contribuir para o avanço da matemática, em outras palavras, não os impediu de fazerem Álgebra.

Eves (2009) cita que no período de 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma *álgebra retórica* (sem o uso de símbolos, apenas feita com palavras) avançada, em que se resolviam equações de segundo grau, além de algumas equações cúbicas (grau 3) e biquadradas (grau 4). Num período próximo, os egípcios também tratavam da resolução de equações e fontes indicam que eles se utilizavam de sinais para a adição, subtração e igualdades, além de usarem símbolos para indicar incógnitas.

Boyer (1974 p. 12) aponta que os egípcios usavam a palavra "*aha*" para a incógnita e traz um exemplo de problema algébrico presente no *papiro de Ahmes*, datado de cerca de 1650 a. C., em que se pede o valor de aha, sabendo que aha mais um sétimo de *aha* dá 19. O método usado para solução era chamado de "falsa posição". Assume-se um valor para *aha* e soma-se o os valores do primeiro membro da equação, a partir do valor encontrado, usa-se proporções para chegar no valor desejado. No exemplo acima, a resolução encontrada no papiro assume para *aha* o valor de 7. Escrevendo com uma notação atual, temos:

$$aha + \frac{aha}{7} = 19$$

Assumindo $aha = 7$, temos que

$$7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$$

Para chegar em 19 (valor do segundo membro da equação), precisamos multiplicar esse valor por $\frac{19}{8}$, para resolver a equação, basta multiplicar o valor inicial de aha pelo mesmo $\frac{19}{8}$.

Os gregos pitagóricos, com uma abordagem geométrica, também trataram da resolução de equações do segundo grau bem como, usando a concepção de número como o comprimento de um segmento de reta, desenvolveram identidades algébricas, como comenta Eves (2009, p. 107): "carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada, os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas." Posteriormente, Diofanto de Alexandria, desvinculado da álgebra geométrica, em sua obra *Aritmética*, introduz, de acordo com Boyer (1974, p. 133), "um uso sistemático de abreviações para potências, números e para operações e relações". Lançando mão, assim, de uma *álgebra sincopada*, que alterna entre o uso de símbolos e linguagem retórica na resolução de problemas.

De acordo com Eves (2009), os hindus também deram importantes contribuições para a álgebra e, assim como Diofanto, adotaram a sincopação. Além disso, também aceitavam os números negativos e irracionais, desta forma, sabiam que uma equação quadrática com solução real admitia duas respostas.

A palavra Álgebra tem sua origem, de acordo com Boyer (1974), na obra de Al-Khowarizmi, de título *Al-jabr wa'l muqabalah*, daí vem *Al-jabr*, que dá origem ao termo. A obra de Al-Khowarizmi tratava da resolução de equações, principalmente do segundo grau e Boyer (1974 p. 167) acrescenta que "foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome." A linguagem presente no livro é totalmente retórica, não há uso de símbolos, nem mesmo para a representação de numerais, mas se aproxima muito do que hoje é considerada a Álgebra elementar. A importância da obra de Al-Khowarizmi não se dá pela complexidade, nem por inovações no campo da Álgebra, mas pela forma direta e sistemática que os métodos de resolução de equações do primeiro e segundo grau são apresentadas, tornando sua compreensão mais facilitada. Um exemplo da linguagem retórica de Al-Khowarizmi está na resolução da equação, que na escrita moderna é dada por 6x + 4x + 2x = 36: preciso, em primeiro lugar, que se somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes. Como doze raízes valem o mesmo que trinta e seis unidades, então o valor de uma raiz é três unidades.

O período do final da idade média, foi quando, de acordo com Eves (2009), a *álgebra simbólica* começou a ser desenvolvida. Destaca-se o trabalho de François Viète, matemático francês do século XVI, que utilizava os símbolos de “+” e “-” como conhecemos hoje, além de introduzir a prática do uso de vogais para representar incógnitas e de consoantes para representar constantes. Foi nesse período que matemáticos como Cardano, Tartaglia, entre outros, encontraram a solução geral para as equações cúbicas e quárticas.

Eves (2009), Boyer (1974), além de outros estudiosos da história da matemática, concordam que três tipos de linguagem foram, cada qual em um determinado determinado período, hegemônicas no desenvolvimento da Álgebra, a saber: A *linguagem retórica*, (pré Diofanto) em que a resolução dos problemas se dava em prosa, sem abreviações ou uso de símbolos; a *linguagem sincopada*, (de Diofanto) em que abreviações eram utilizadas para termos e quantidades que costumavam se repetir; e a *linguagem simbólica*, (pós Viete) em que símbolos são utilizados para denotar quantidades e operações. Esta última contempla a linguagem da Álgebra nos dias de hoje.

O percurso traçado pelo desenvolvimento da álgebra demonstra que ela não se resume apenas à manipulação e à operação de símbolos, caso contrário, esta só poderia ser considerada um ramo da matemática a partir da modernidade. A seguir estudaremos os conceitos fundamentais que moldam o fazer algébrico e como a história da Álgebra pode contribuir para a educação algébrica.

2.2 A ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste trabalho utilizaremos uma concepção pedagógica que caracteriza Álgebra como

> um tipo específico de "fazer matemático" ou por certo modo de pensar os problemas da Matemática, pensar este que veio a ser chamado "pensamento algébrico", distinto, por exemplo, de um "pensamento geométrico", de um "pensamento aritmético". É também caracterizada por um conjunto de assuntos da Matemática e modos de abordar estes assuntos. (GRANDO; PENHA 2010)

Para tanto é necessário entender quais são as ideias que historicamente fundamentaram o pensamento algébrico e também se colocam como alternativas para abordagens na sala de aula. Sousa (2004) aponta como elementos historicamente constituintes do Pensamento Algébrico “os conceitos de fluência; de variável e de campo de variação, pois definimos a álgebra enquanto escrita de movimentos da realidade.” O conceito de fluência se relaciona com o pensamento do filósofo Heráclito de Efeso “O mundo está em permanente evolução; todas as coisas a todo o momento se transformam, tudo flui, tudo devém” (CARAÇA, 1984, p. 110). Sousa (2004) ainda adiciona que “o rio que flui cuja substância nunca é a mesma, é a matemática. Nela pode-se ver um padrão sempre "cambiante" nas diversas álgebras, que de tempos em tempos são abstraídas do movimento fluente, surgindo e desaparecendo no processo total do fluxo."

Desta forma entendemos que para poder pensar algebricamente os estudantes devem estar familiarizados com a mudança, com a noção de que em nosso universo nada é estático, que assim como na Matemática e na Álgebra, nada está pronto e acabado.

Em seguida, temos o conceito de variável, no entanto, não é possível trabalhar a ideia de variável sem definirmos um *campo de variação,* um conjunto que delimite os valores que a variável pode assumir, por exemplo, o conjunto dos números reais. Portanto estes dois conceitos, estão fortemente interligados. Para Caraça (*apud* Scarlassari, 2007), em um dado conjunto numérico, a variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos, no entanto, não coincide com nenhum deles.

Scarlassari (2007) comenta que o trabalho de tais conceitos em sala de aula pode contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, bem como ajudá-los a compreender os conceitos e as suas representações, além de permitir que os estudantes criem suas próprias estratégias e possam traçar um caminho parecido com o do desenvolvimento histórico da Álgebra. A autora ainda ressalta que pelo desconhecimento do conceito de variável, Platão, Sócrates e seus seguidores não se dedicaram tanto ao estudo da Álgebra, detendo-se apenas ao estudo da álgebra geométrica.

2.2.1 A Álgebra na Educação Brasileira

A introdução da Álgebra na educação brasileira deu-se em 1799, como apontado por (Miguel, Fiorentini e Miorim, 1992), tornando-se mais um dos componentes curriculares do ensino secundário, juntando-se à Geometria, Aritmética e Trigonometria. Mais tarde em 1931, com a Reforma Francisco Campos, estes conteúdos foram unificados na disciplina de "Matemática". Ao menos de acordo com a legislação da época, o estudo da Álgebra sucedia o estudo da Aritmética e antecedia o estudo da Geometria. Esta lógica se sucedeu até a Reforma de 1931, apesar de indicarem um certo "equilíbrio enciclopédico" entre esses 4 campos da educação matemática escolar, Álgebra, Geometria, Aritmética e Trigonometria, os autores comentam que na prática, o panorama era outro, uma vez que não havia, por parte dos professores e elaboradores de programas, uma consciência da importância de cada um desses conteúdos na formação dos estudantes. A álgebra, em especial, lá estava apenas pelo fato de ser considerada importante em outras nações “mais avançadas”.

A reforma de 1931 introduziu o currículo seriado, no entanto, não houve significativa mudança nos conteúdos e na abordagem da Álgebra, continuando a ser ensinada com base em processos mecânicos e regras sem justificativas. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 43) , ao compará-la com a geometria, um campo da matemática já bem consolidado no século III a. C., observam que

> Para o estudante a Matemática devia assemelhar-se a um monstro de duas cabeças: uma estritamente racional, que seria desenvolvida pela geometria, demonstrando-lhe todas as afirmações com o objetivo de elevar seu espírito — ainda que tudo isso lhe fosse de difícil entendimento — e a outra, estritamente pragmática, que seria desenvolvida pela Aritmética e pela Álgebra, desfiando regras e fórmulas — geralmente aceitas sem justificativas com o objetivo de resolver problemas, em sua maior parte artificiais.

Na Figura 1 podemos ter uma noção do tratamento da Álgebra pelos livros didáticos da época

Figura 1 – Exemplo da abordagem da Matemática no início do século XX

1.º caso. ***Para multiplicar um monomio por outro, multiplicam-se os coefficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, affectando cada uma de um expoente egual á somma dos expoentes que a mesma letra tem nos monomios, e ao producto obtido dá-se o signal que lhe corresponde, segundo a regra dos signaes.***

EXEMPLOS:

$$(3a^2b)(4ab^2c)=12a^3b^3c;\ (-7xy)(5x^2z)=-35x^3yz;$$
$$(5m^2n^4p^6)(-5mn^3p^5r^4s)=-25m^3n^7p^{11}r^4s;$$
$$(-3a^3b^4c)(-2a^4b^2c^2d)=6a^7b^6c^3d.$$

34.* 2.º caso. Regra.** — ***Para multiplicar um polynomio por um monomio, multiplica-se, pela regra do primeiro caso, cada um dos termos do polynomio pelo monomio, e sommam-se os productos parciaes.

E’ a mesma regra da multiplicação de uma somma e de uma differença indicada por um numero, já demonstrada em arithmetica.

EXEMPLOS:

$$(3a^3-4a^2b-6ab^2+2b^3)\,2a^2b=6a^5b-8a^4b^2-12a^3b^3+4a^2b^4.$$
$$(5x^3y-2x^2y^2+9xy^3-4y^4)(-3xy^2)=-15x^4y^3+6x^3y^4-$$
$$-27x^2y^5+12xy^6.$$

Fonte: Perez e Marin (1928, p. 35 *apud* Miguel, Fiorentini e Miorim, p. 43, 1992)

A partir da década de 1960, acompanhando uma tendência mundial, uma nova proposta para o ensino da matemática ganha força no Brasil, o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Essa nova proposta tem como um de seus objetivos unificar o ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria a partir de elementos tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e relações consideradas fundamentais para construção da lógica matemática, como descrito por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992).

De acordo com os autores supracitados, a Álgebra nesse momento assume uma posição de destaque em relação às outras áreas, uma vez que, em sua concepção moderna, esta foi responsável, durante os séculos XIX e XX por tornar a matemática mais rigorosa, abstrata e precisa. Segue a definição de equação presente em um livro da época:

> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um conjunto universo. (ZAMBUZZI, 1965, p. 14, *apud* MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM, p. 47, 1992)

O trecho acima ilustra a preocupação com o rigor matemático e com a abstração, com o emprego de termos como "sentença aberta" e "conjunto universo". Percebe-se uma diferença de abordagem do período anterior, ao introduzir o conceito, não há uma menção ao seu caráter prático na resolução de problemas reais, apenas a definição abstrata.

Apesar do enfoque recebido no período, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 52) concluem que o ensino da Álgebra saiu prejudicado, "uma vez que o projeto fundamentalista, ao tentar superar o algebrismo presente nesse ensino, acabaria imprimindo-lhe um caráter austero, formal e estéril aos olhos dos alunos. Perderia, inclusive, o que tinha de positivo: seu valor instrumental para a resolução de problemas."

Os mesmos autores ainda argumentam, que após o MMM, a Geometria, que, de certa forma ocupou um lugar de pouco destaque no movimento, volta aos holofotes da pesquisa em Educação Matemática, com uma abordagem que une os conceitos da geometria euclidiana, mas com uma abordagem inicialmente mais intuitiva. Enquanto isso o ensino da Álgebra parece ser deixado de lado no âmbito das produções acadêmicas.

Nesse sentido, a BNCC traz uma novidade para a Educação Algébrica na Educação Básica, com uma concepção que antecipa a Álgebra desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A seguir estudaremos conceitos e concepções de pesquisas recentes da Educação Matemática no campo da Álgebra.

2.3 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A estrutura e texto final da BNCC é resultado de um processo político. Para compreendê-la é necessário não só analisar os conteúdos propostos, as habilidades a serem desenvolvidas, mas também o contexto político do MEC e do Brasil no momento de sua elaboração e homologação, afinal, a sua redação reflete as concepções ideológicas e os interesses das forças que geriram a sua elaboração, como observa Silva (2005, p. 15) “Afinal, um currículo busca precisamente modificar as pessoas que vão “seguir” aquele currículo”. Aqui vale ressaltar que a BNCC e os programas curriculares são coisas distintas, no entanto a primeira norteia a elaboração do segundo em cada rede de ensino.

Como aponta Bigode (2019, p. 123) em 2012 o MEC, motivado por discussões acerca de uma Base Comum Nacional que atendesse às demandas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, criou um grupo de trabalho para produzir um documento sobre Direitos à Aprendizagem. O documento produzido por este grupo foi publicado em 2014 e apresentado oficialmente em 2015. Entretanto, sem explicação, o documento foi engavetado pelo MEC logo depois. O autor afirma que esse documento não mais estava de acordo com as concepções do MEC à época, que passava por uma reorganização, angariando novos parceiros, principalmente grupos financiados por grandes empresários que ganhavam influência no ministério à medida que avançava o projeto de retirada do então governo do poder.

Bigode, (2019, p. 127) expõe uma série de problemas na elaboração do documento, relatando que sua primeira versão foi feita em apenas 3 meses! A explicação? Notaram-se várias semelhanças com as bases australiana (ACARA) e estadunidense (*Common Core*), com partes descaradamente copiadas e coladas. Tais bases estão de acordo com as necessidades desses países, ainda que existam problemas apontados por educadores desses países. O problema reside no fato de que esses documentos não estão de acordo com a realidade da educação brasileira. Bigode (2019, p. 128) ainda completa: “Em comum, nem o ACARA nem o *Common Core* se apresentam como solução miraculosa que vai salvar a educação de seus respectivos países e aumentar os índices nas avaliações internacionais.” como é amplamente divulgado pelos idealizadores da BNCC.

O curto período de elaboração do documento teve como marca a falta de discussões com os professores e pesquisadores da educação, no entanto, não foi essa a impressão passada pelas considerações do MEC a respeito do processo, desde a primeira versão do documento, de

2015. Cássio (2017) questiona a celebração por parte do MEC a respeito de um suposto processo democrático, que teria se dado através de uma consulta pública feita pelo Ministério.

Bigode (2019, p. 133) continua sua análise olhando para a área da matemática,

> o tratamento estanque e fragmentado dos conteúdos é uma das principais marcas dessa base, que vai na contramão dos avanços da Educação Matemática dos últimos 30 anos por romper com algumas conquistas obtidas no PCN de Matemática, engessar e as práticas pedagógicas pasteurizar os materiais institucionais.

A Unidade de Álgebra da BNCC, de acordo com o próprio documento, tem o objetivo de desenvolver o Pensamento Algébrico e o considera "essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos." (BRASIL, 2017, p. 270). Para tanto

> é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270)

O documento ainda indica "equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade" como as ideias essenciais da unidade e sintetiza que essa "deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, 2017, p. 270).

Especificamente para o EFII a BNCC estabelece que

> os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 270)

Há ainda uma menção ao pensamento computacional, em que se sugere a decomposição de algoritmos em fluxogramas e o uso de diferentes linguagens para expressar situações problema no entanto "Nenhuma palavra sobre a sintaxe dos aplicativos que poderia ser relacionada às linguagens utilizadas na matemática, como no caso da álgebra" (BIGODE, 2019, p. 136). O autor ainda conclui, baseado em especialistas da área de tecnologia na Educação Matemática, que não há, de fato um compromisso com a tecnologia na BNCC.

A organização do documento se dá através de um conjunto de conteúdos separados por ano, cada qual associado a uma habilidade, que por sua vez, carrega um código. No caso da matemática os conteúdos se dividem em 5 grandes áreas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Tais divisões estão presentes tanto no EFI, EFII como no Ensino Médio. Mais adiante iremos detalhar a estrutura dos códigos.

A organização através de habilidades e códigos não é à toa

> a estrutura rígida que dá todo poder aos códigos alfanuméricos visa controlar o trabalho dos professores e está a serviço de avaliações em larga escala, das indústrias dos testes, de materiais instrucionais e de cursos para a formação ligeira de professores. (BIGODE, 2019, p. 140)

Entre os defensores da atual BNCC e o MEC existe a argumentação de que esta representa apenas 60% do currículo, ficando os outros 40% a cargo dos estados. No entanto, a tendência é que a fatia da BNCC será a mais privilegiada nos currículos a fim de angariar boas posições nos testes nacionais, deixando os professores reféns do documento.

No que tange a questão dos livros didáticos, a BNCC também impacta na sua elaboração, como consta no Decreto 9.099, de 18 de julho de 2017, que expõe como objetivos do PNLD a implementação da BNCC. O que segundo (BIGODE, 2019, p. 142) “obrigou os editores a desconstruir livros e a descaracterizar projetos pedagógicos de muitas obras que já vinham editando.”

Mesmo com as problemáticas apontadas, a versão final da BNCC referente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental foi homologada em 20 de dezembro de 2017, dando início ao seu processo de implementação, que gera uma movimentação de professores e gestores educacionais para se adequar ao documento.

2.4 O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Neste tópico discutiremos algumas abordagens do pensamento algébrico provenientes de pesquisas recentes na área.

O pensamento algébrico se caracteriza como o processo em que os estudantes, a partir de um conjunto de circunstâncias particulares, são capazes de generalizar tais circunstâncias e são capazes de expressar essa generalização, em linguagem natural, ou até mesmo simbólica, dependendo da situação e da etapa de ensino. Por exemplo,

> estudantes estão envolvidos no pensamento algébrico quando eles primeiro descrevem o número total de apertos de mão para um grupo específico de pessoas, em que cada pessoa no grupo aperta a mão de outra apenas uma vez, e depois avança para desenvolver e expressar uma generalização que descreve o número total de apertos de mão para um grupo de tamanho arbitrário. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

É possível também pensar em outros contextos em que o pensamento algébrico opera, como, no reconhecimento de termos arbitrários de uma sequência (numérica ou não), na descoberta de propriedades da adição de números pares e ímpares. De forma geral podemos dizer que o pensamento algébrico ocorre nas seguintes situações:

> a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) a modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; d) a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações.(BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

2.4.1 O significado do sinal de igualdade

O sinal da igualdade é um dos símbolos mais elementares da matemática e seu significado em uma expressão parece, em princípio, bem simples: "o mesmo que" ou então "o que está de um lado deve ter o mesmo valor do que está do outro". No entanto, algumas pesquisas indicam que o sinal "=" não é bem compreendido. Por experiência própria, como estudante, já me vi, tanto no ensino fundamental como no médio, usando o sinal de igual apenas para conectar os passos de uma conta em que a igualdade não se preservava. De acordo com Trivilin e Ribeiro (2015, p. 44),

> No Ensino Fundamental, há uma preocupação quanto ao ensino das operações básicas e ao significado dos símbolos operatórios (+, -, x e :), os quais são abordados e comumente discutidos nas salas de aula. Entretanto, em relação ao sinal de igualdade, aponta-se [...] que é dada uma importância secundária de tal sinal para os alunos, os quais o reconhecem *apenas* como um sinal que indica o *lugar* no qual devem colocar o resultado das operações realizadas.

A concepção acima é definida por Ponte, Branco e Matos (2009) como o significado operacional do sinal de igual, em atividades como as do Quadro 1, espera-se que o aluno coloque o resultado das operações.

Quadro 1 – Sentenças que desenvolvem o significado *operacional*

Calcule:	
a) 61+79=	c) 8×49 =
b) 83-19=	d) 535÷5=

Van de Walle (2009) argumenta que nesse contexto, a compreensão do sinal de igual é próxima à da tecla [=] da calculadora. Ponte, Branco e Matos (2009) comentam que pesquisas feitas na área indicam que alunos acostumados apenas com o significado *operacional*, ao serem solicitados para preencher no quadrado o valor que torna a expressão “8 + 4 = □ + 5” verdadeira, dão, na maioria dos casos, a resposta “12” (8 + 4) ou até mesmo “17” (8 + 4 + 5). Van de Walle (2009) adiciona que é essencial que os alunos compreendam corretamente o sinal de igual, uma vez que este contribui no entendimento do nosso sistema numérico, em relações como por exemplo “$6 \times 7 = 5 \times 7 + 7$”, das propriedades da adição e da multiplicação, como a distributividade: $(5 + 3) \times 7 = (5 \times 7) + (3 \times 7)$, além das equações e das relações de proporcionalidade, que trataremos adiante.

No caso de expressões como “8 + 4 = 7 + 5”, ou na relação “$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$”, Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que o sinal de igualdade adquire o sentido de equivalência. Outro sentido possível se dá quando temos uma relação funcional, do tipo “$y = 2x + 7$”, nesse caso o sinal define uma dependência entre variáveis.

Um bom entendimento da relação de igualdade é importante para o desenvolvimento do chamado *pensamento relacional*. Van de Walle (2009) utiliza a expressão “534 + 175 = 174 + [ ]” como exemplo: como é possível descobrir qual número deve preencher a lacuna para que a sentença seja verdadeira? Uma forma é realizar a soma no primeiro membro e “completar” o valor do segundo membro até que ambos os lados sejam igualados, podemos dizer que este é um método “computacional”. No entanto, é possível pensar que 174 é um a menos que 175, dessa forma, para preservar a relação de igualdade, deve-se adicionar um à outra parcela, ou seja, a resposta é 535. No segundo caso, o *pensamento relacional* está em uso. Outras estratégias de cálculo envolvem o *pensamento relacional*, como na soma “8 + 9”, se sabemos que “8 + 8 = 16”, basta adicionar um e teremos o resultado.

Van de Walle (2009, p. 290) adiciona que

> o pensamento relacional desse tipo é um primeiro passo em direção à generalização de relações encontradas na aritmética de modo que essas mesmas relações podem ser usadas quando variáveis estiverem envolvidas e não apenas números.

Como alternativa para o exercício do *pensamento relacional* dos estudantes, o autor sugere o uso de sentenças de verdadeiro e falso em que a verificação de forma computacional seja cada vez mais difícil, além de sentenças abertas como a citada acima.

2.4.2 Razões e proporções

De acordo com Van de Walle (2009), independentemente das habilidades propostas pelos programas curriculares, o estudo de Razões e Proporções sempre terá como objetivo o desenvolvimento do raciocínio proporcional, isto envolve, entre outras coisas, ter uma boa ideia do que constitui uma razão uma proporção e o contexto em que essas ideias aprecem na matemática.

O autor define uma *razão* como "um número que relaciona duas quantidades ou medidas dentro de uma dada situação através de uma relação multiplicativa" (WALLE, 2009, p. 383). Adiante, o mesmo exemplifica diferentes situações em que o conceito aparece. Nas razões parte-todo, pode-se relacionar o número de meninas comparado com o total de alunos numa sala de aula. Frações e porcentagens também são razões, bem como a probabilidade, que é uma razão entre uma parte do espaço amostral e todo ele. Existem razões parte-parte, em que quantidades distintas de um mesmo todo podem ser comparadas, como a quantidade de empregados e desempregados de uma população. Outro tipo de razão são as taxas em que duas quantidades de naturezas distintas são comparadas, como a medida de velocidade, que é uma comparação da distância com o tempo. Na geometria, a razão entre lados correspondentes de triângulos é usada para verificar se há semelhança entre triângulos. Na natureza, temos a razão áurea, conceito que aparece também nas artes visuais. A tela retangular do computador que escrevo tem uma razão de 16:9.

Uma *proporção* é constituída de uma igualdade entre relações. Se em 2 minutos uma impressora imprime 10 folhas, em 4 minutos ela será capaz de imprimir 20. Esta é uma situação de proporção. Van de Walle (2009. p. 383) ainda comenta que resolver uma proporção "envolve aplicar uma razão conhecida a uma situação que seja proporcional (medidas relevantes estão na mesma razão) e encontrar uma dessas medidas quando a outra é conhecida."

Para um bom desenvolvimento do raciocínio proporcional é necessário que o estudante compreenda a diferença entre situações *aditivas* e situações *multiplicativas*, Van de Walle (2009) sugere um problema interessante para ser discutido em sala de aula que pode ser enunciado da seguinte forma: Há duas semanas, duas flores foram medidas e tinham 8 centímetros e 12 centímetros, respectivamente. Hoje estão com 11 centímetros e 15 centímetros de altura. Qual cresceu mais, flor de 8 ou a de 12? Uma resposta imediata pode ser que ambas tiveram o mesmo crescimento, de 3 centímetros, essa resposta indica uma relação *aditiva*. No entanto, numa situação *multiplicativa*, a interpretação muda, uma vez que *proporcionalmente*, a flor de 8 centímetros cresceu mais. As duas respostas são válidas e compreender as diferenças entre elas é um exercício do pensamento proporcional.

2.4.3 Equações, incógnitas e variáveis

A Álgebra em seu desenvolvimento histórico, como já exposto anteriormente, sempre se preocupou com a resolução de equações, o uso de símbolos, principalmente letras, para representar quantidades desconhecidas tornou-se uma ferramenta poderosa. As letras costumam aparecer tanto como quantidades desconhecidas, as chamadas incógnitas, como também em quantidades que variam, as variáveis (WALLE, 2009).

Uma primeira noção de equação e quantidade desconhecida já foi apresentada quando falamos sobre pensamento relacional. Na expressão “534 + 175 = 174 + [ ]” o espaço vazio entre os colchetes pode ser substituído por uma letra. Para o início do trabalho com incógnitas, Van de Walle (2009) sugere que as equações apresentadas sejam possíveis de serem resolvidas através do pensamento relacional, posteriormente, serão trabalhadas técnicas de resolução mais gerais.

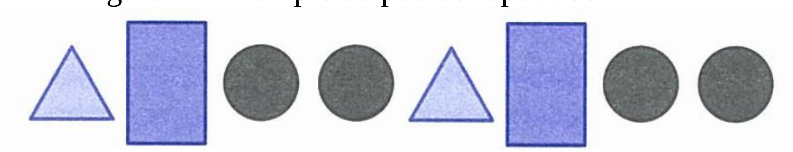
No caso de equações como “a + 6 = 10 – b” as letras *a* e *b* podem assumir mais de um valor, segundo Van de Walle (2009), apresentar e discutir sentenças pode ser um precursor para o uso de variáveis na hora de escrever funções como “y = 3x + 5”.

2.4.4 Padrões, sequências e funções

Padrões podem se manifestar de diversas formas, identificar e descrever padrões é uma forma de exercitar o pensamento algébrico. Há vários tipos de padrões, aqui apresentaremos alguns deles, relacionando também com o conceito de sequência.

Um dos tipos de padrão mais simples são os repetitivos, estes, como define Van de Walle (2009), possuem um *núcleo*, sendo este a menor cadeia de elementos que se repete. No caso da Figura 2, os quatro primeiros elementos formam o *núcleo*.

Figura 2 – Exemplo de padrão repetitivo



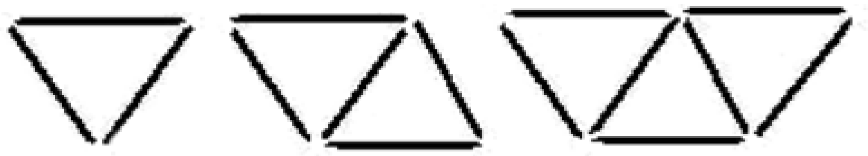
Fonte: Walle (2009)

Associar cada elemento diferente a uma letra pode ser uma estratégia de generalização interessante, por exemplo, na sequência acima, podemos associá-la à sequência A-B-C-C-A-B-

C-C. Indagar os alunos sobre os próximos termos, sem que seja viável desenhar toda a sequência até o termo dado pode ser uma forma de incentivá-los a encontrar uma generalização.

Outro tipo são os padrões crescentes, que podem ser chamados também de sequências recursivas, em que o termo seguinte depende do termo anterior, observe a sequência a seguir:

Figura 3 – Exemplo de padrão crescente



Radford (2010)

As Tabelas 1 e 2 indicam duas formas de pensar na quantidade de palitos que compõe a sequência:

Tabela 1 – Uma possibilidade de generalização

Figura	Nº de palitos
1	3
2	$3+2$
3	$3+4$
...	...
n	$3+2(n-1)$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2 – Outra possibilidade de generalização

Figura	Nº de palitos
1	3×1
2	$3\times 2-1$
3	$3\times 3-2$
...	...
n	$3n-(n-1)$

Fonte: Elaborada pelo autor

O uso da tabela nesse caso auxilia na observação de como varia o número de palitos em cada termo da sequência, possibilitando que seja encontrada uma fórmula que, dado um número *n* qualquer, permita calcular qual o número de palitos do termo *n*. Ainda é possível verificar com uma breve manipulação algébrica que ambas as fórmulas encontradas são equivalentes a "2*n*+1". As sequências representadas na tabela são exemplos de sequências numéricas, este tipo de padrão explora o conceito de variável e pode ser um precursor do estudo das funções.

Ainda no contexto do reconhecimento de padrões e regularidades nas sequências recursivas ou não recursivas, a generalização, de acordo com Radford (2010) pode ocorrer de duas formas:

- *Generalização aritmética*: ocorre quando o aluno é capaz de determinar os próximos termos de uma sequência, mas não consegue ainda determinar um termo qualquer;
- *Generalização algébrica*: ocorre quando o aluno é capaz de determinar qualquer termo da sequência, sem necessariamente precisar construir a sequência até o termo dado;

Uma função pode ser definida como uma regra que associa cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto. No entanto, como aponta Van de Walle (2009), tal definição pode ser um pouco formal demais num primeiro momento, por isso o autor sugere que se inicie o estudo das funções através de situações contextualizadas, em que a mudança em uma coisa (variável independente) acarreta a mudança em outra (variável dependente). A quantidade de gasolina no tanque por quilômetro rodado, crescimento de uma pessoa ao longo dos anos são alguns exemplos.

Aproveitando o exemplo dos palitos, citado anteriormente, temos duas formas possíveis de representação de uma função, a primeira, como aponta Van de Walle (2009), é a *pictórica*, através das imagens, a segunda é através da construção de uma *tabela* com os valores de cada variável. Proveniente da tabela, ainda temos uma *fórmula* que representa a relação funcional. Podemos também, a partir da tabela, construir, no plano cartesiano um gráfico, que nos permite uma representação *visual* em que é possível observar, por exemplo, a velocidade com que o padrão cresce. A *linguagem natural* também pode ser uma representação: "o número de palitos é sempre o dobro da posição do termo mais um". Cada uma das representações nos permite uma visão diferente da mesma função.

As funções também permitem trabalhar com *modelagem matemática*, que de acordo com Kaput (1999), consiste em observar um fenômeno e interpretá-lo matematicamente. O autor ainda propõe que tecnologias sejam usadas no processo de modelagem. Recentemente, softwares gratuitos, como o GeoGebra, para além da geometria, permitem a plotagem de gráficos de funções.

Van de Walle (2009) ressalta a importância de relacionar as funções à outros conteúdos trabalhados. Na geometria, a área da circunferência é dada e função do raio. Uma função linear pode representar uma situação de proporcionalidade. No estudo das funções do segundo grau, temos as situações de máximos e mínimos, por exemplo: “qual a área máxima de um retângulo supondo que o perímetro deve se manter constante?”

Considerando os pressupostos teóricos apontados até aqui, formulamos nossa pesquisa. No próximo capítulo apresentamos a metodologia de pesquisa.

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo apresentamos os pressupostos teórico-metodológicos que sustentam a pesquisa: abordagem da investigação, proposta de análise, categorização, estrutura dos documentos a serem investigados, questão de investigação e objetivos.

O trabalho consistiu em uma análise documental. Estruturamos os conteúdos da BNCC em categorias, de acordo com os princípios citados por Fiorentini e Lorenzatto (2006, p. 135), "o conjunto de categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias" além de que "é altamente desejável que essas categorias sejam disjuntas, isto é, de modo que cada elemento esteja relacionado a apenas uma categoria. Por fim, as categorias devem abranger todas as informações obtidas." Nesse sentido, propusemos uma divisão dos conteúdos presentes na BNCC em categorias mistas, pensadas a partir do nosso objeto de estudo e também da literatura acerca do tema (FIORENTINI; LORENZATTO, 2006), são elas: Razão e proporção, Expressões e equações e Padrões e funções. Esta divisão serviu apenas como uma alternativa para estruturar os conteúdos, não se pode descartar que os conteúdos podem e devem se relacionar.

A estrutura da BNCC está dividida em cinco unidades temáticas já citadas, no nosso caso, nos debruçamos na unidade de Álgebra. Dentro de cada unidade, temos um conjunto de "Objetos de Conhecimento", que são os conteúdos a serem trabalhados, para cada um desses conteúdos, estão associadas uma ou mais habilidades a serem desenvolvidas. A seguir apresentamos os conteúdos e habilidades da unidade temática de Álgebra para o 6° ano.

Quadro 2 – Unidade temática de Álgebra no 6º ano

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Álgebra	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: Brasil (2017)

Cada habilidade possui um código. Por exemplo, o código EF06MA14 indica que a habilidade é do Ensino Fundamental "EF", do 6º ano "06", do componente curricular de matemática "MA" e a numeração sequencial do conteúdo no ano "14".

Realizamos a análise da coleção de livros didáticos tanto do ponto de vista dos conteúdos abordados quanto da linguagem utilizada, tendo como referência os pressupostos da BNCC e as orientações das pesquisas atuais no campo do desenvolvimento do pensamento algébrico. Foram identificadas a abordagem de apresentação dos conteúdos, as propostas de atividades, bem como as tarefas e exercícios da coleção. Tecemos alguns aspectos conclusivos e sínteses a partir do trabalho de análise.

A coleção escolhida para o trabalho chama-se "A Conquista da Matemática", aprovada no PNLD/2020. Esta possui quatro volumes (do 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental), com autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci. A coleção está na 4ª edição e foi publicada pela editora FTD. Dentre as motivações destacamos que esta coleção foi selecionada para ser usada no município de Cordilheira Alta/SC, cidade de origem do autor do trabalho. A versão analisada foi a do Manual do Professor, que conta com observações e orientações de uso direcionadas aos docentes, bem como, em cada capítulo há uma indicação de quais habilidades da BNCC são trabalhadas ali.

Por meio da leitura sistemática dos livros que compõem a coleção, articulados com os pressupostos da BNCC, definimos três categorias de análise, a saber: Razão e proporção, Padrões e funções e Expressões e equações.

No próximo capítulo apresentamos uma análise descritiva e interpretativa desse material.

4 ANÁLISE DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesse capítulo, partindo dos pressupostos teóricos e metodológicos apresentados até aqui, vamos apresentar uma análise da coleção de livros didáticos escolhida, o capítulo está estruturado em seções, em que cada seção abordará uma das categorias previamente definidas.

O Guia Digital do PNLD disponibiliza informações e análises a respeito das obras selecionadas. No caso da coleção selecionada para essa pesquisa, destacam-se alguns pontos. De acordo com a resenha do Guia Digital do PNLD 2020, na coleção há bastante conexão entre a matemática e os temas sociais além de uma forte conexão da matemática com a realidade dos estudantes, o que pode ser observado por meio de exemplos. Além disso, a obra traz um dinamismo que “acontece a partir da exploração das distintas linguagens: verbal, gráfica, corporal, plástica e matemática, que são utilizadas para interpretar e questionar a realidade por meio dos conhecimentos matemáticos construídos.” (FNDE, 2019).

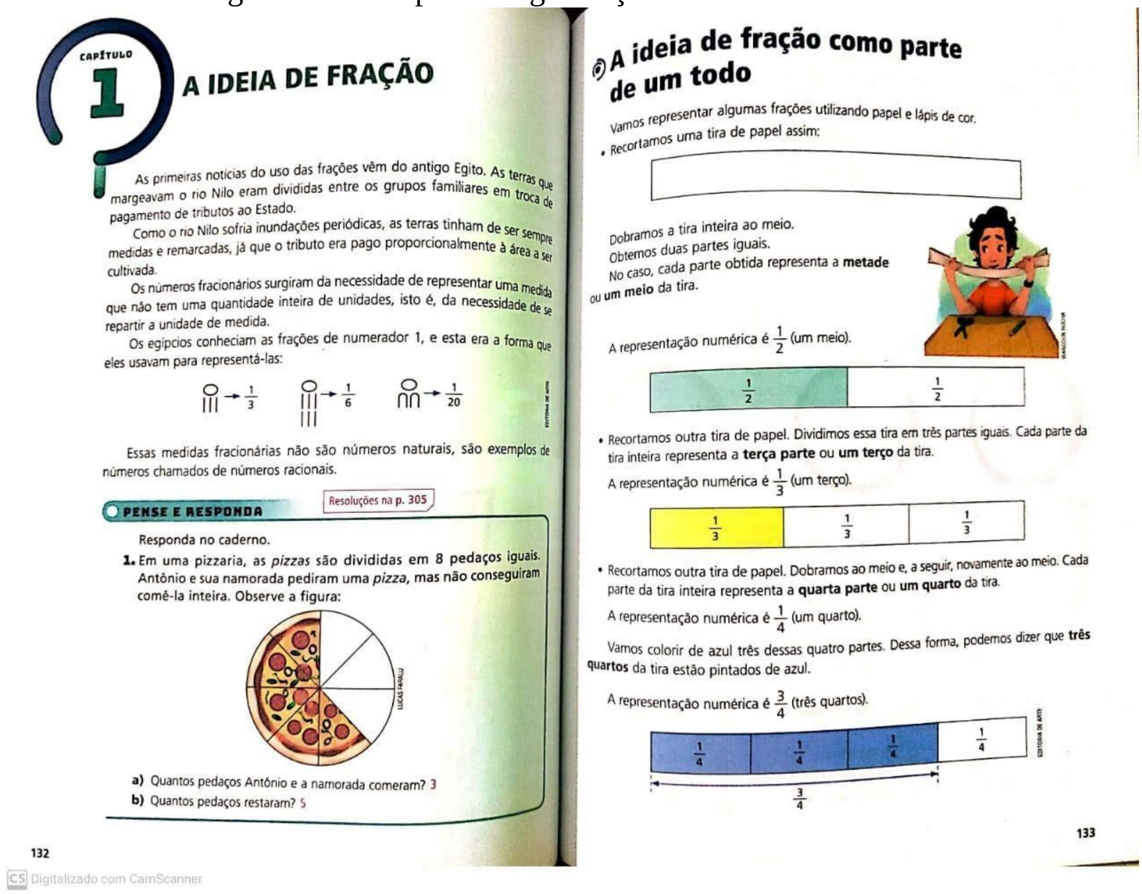
No caso da unidade temática de Álgebra há um breve comentário, enfatizando que:

> Ao tratar da álgebra, a obra o faz de forma ilustrativa e convidativa, introduzindo o trabalho da exploração das funções. Além de apresentar situações reais de uso das funções, há também um cuidado em interligar a geometria para os elementos da construção algébrica e distintas estratégias para resolução dos problemas.

De maneira geral, o Guia não aponta problemas na Coleção, tampouco falta de adequação com a BNCC.

Os livros são organizados através de Unidades, dentro de cada Unidade, existe um número de capítulos, que subdividem o conteúdo. Normalmente na abertura da unidade é apresentada uma situação-problema relacionada ao conteúdo e se propõe discussões a respeito. Há uma seção de Atividades dentro dos capítulos. Ainda em capítulos aparecem algumas seções como “Pense e Responda” (que faz os alunos refletirem sobre o conteúdo), “Fórum”, “Descubra mais”, “Um novo olhar”, “Por toda a parte”, “Educação financeira” (estas costumam tratar de temas sociais ou cotidianos relacionados ao conteúdo, há também uma seção chamada “Tecnologia” (que traz propostas de uso de softwares) e “Retomando o que aprendeu” (em que se faz uma sistematização do conteúdo visto na Unidade).

Figura 4 – Exemplo da organização dos livros


CAPÍTULO 1 A IDEIA DE FRAÇÃO

As primeiras notícias do uso das frações vêm do antigo Egito. As terras que margeavam o rio Nilo eram divididas entre os grupos familiares em troca de pagamento de tributos ao Estado.

Como o rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de ser sempre medidas e remarcadas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada.

Os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida.

Os egípcios conheciam as frações de numerador 1, e esta era a forma que eles usavam para representá-las:

$\rightarrow \frac{1}{3}$ $\rightarrow \frac{1}{6}$ $\rightarrow \frac{1}{20}$

Essas medidas fracionárias não são números naturais, são exemplos de números chamados de números racionais.

PENSE E RESPONDA — Resoluções na p. 305

Responda no caderno.

1. Em uma pizzaria, as *pizzas* são divididas em 8 pedaços iguais. Antônio e sua namorada pediram uma *pizza*, mas não conseguiram comê-la inteira. Observe a figura:

a) Quantos pedaços Antônio e a namorada comeram? 3

b) Quantos pedaços restaram? 5

132

A ideia de fração como parte de um todo

Vamos representar algumas frações utilizando papel e lápis de cor.

- Recortamos uma tira de papel assim:

Dobramos a tira inteira ao meio. Obtemos duas partes iguais. No caso, cada parte obtida representa a **metade** ou **um meio** da tira.

A representação numérica é $\frac{1}{2}$ (um meio).

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Recortamos outra tira de papel. Dividimos essa tira em três partes iguais. Cada parte da tira inteira representa a **terça parte** ou **um terço** da tira.

A representação numérica é $\frac{1}{3}$ (um terço).

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- Recortamos outra tira de papel. Dobramos ao meio e, a seguir, novamente ao meio. Cada parte da tira inteira representa a **quarta parte** ou **um quarto** da tira.

A representação numérica é $\frac{1}{4}$ (um quarto).

Vamos colorir de azul três dessas quatro partes. Dessa forma, podemos dizer que **três quartos** da tira estão pintados de azul.

A representação numérica é $\frac{3}{4}$ (três quartos).

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}$

133

Digitalizado com CamScanner

Fonte: Acervo pessoal do autor

Como comentado anteriormente, realizamos uma categorização dos conteúdos, para fins de análise, dividindo-os em 3 categorias, que descrevemos e analisar a seguir.

4.1 RAZÃO E PROPORÇÃO

Neste tópico analisamos a abordagem da coleção com respeito aos conteúdos envolvendo razões e proporções. No 6º ano a BNCC traz apenas um objeto de conhecimento associado à uma habilidade nesse quesito:

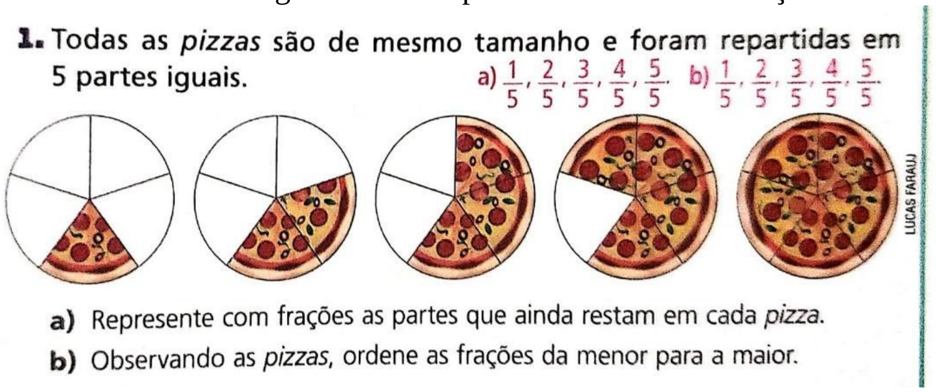
Quadro 3 – Razão e proporção na BNCC do 6º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: Brasil (2017)

De acordo com o Manual da Professor, tal habilidade é trabalhada na Unidade 5 do livro do sexto ano, chamada “A forma fracionária dos números racionais”. O tema principal da Unidade não está diretamente relacionado às razões, mas sim ao desenvolvimento da ideia de número racional representado na forma de fração, bem como suas operações. Por esse motivo, não há definição do conceito de razão, no entanto, a ideia do que posteriormente virá a ser chamado de razão aparece logo na abertura, em que são citados mosaicos geométricos e aparece a noção de dividir um todo em partes. A divisão de um todo em duas partes desiguais é bastante recorrente na Unidade, como na atividade a seguir (Figura 5), sobre comparação de frações

Figura 5 – Exemplo de atividade com frações



Fonte: Acervo pessoal do autor

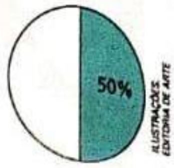
Nas Atividades, há mais problemas desse tipo. Outro momento em que a habilidade pode ser explorada é no capítulo “As frações e a porcentagem”, com bastante enfoque na representação das porcentagens na divisão em setores circulares, como na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo da representação em setores circulares

- 50% do círculo corresponde à metade do círculo:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

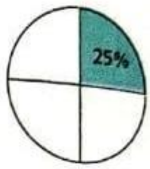
Para encontrar 50% ou $\frac{1}{2}$ de um todo, basta dividi-lo por 2.



- 25% do círculo corresponde à quarta parte do círculo:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

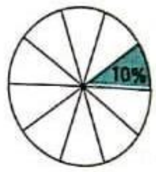
Para encontrar 25% ou $\frac{1}{4}$ de um todo, basta dividi-lo por 4.



- 10% do círculo corresponde à décima parte do círculo:

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

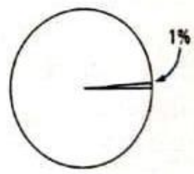
Para encontrar 10% ou $\frac{1}{10}$ de um todo, basta dividi-lo por 10.



- 1% do círculo corresponde à centésima parte do círculo:

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Para encontrar 1% ou $\frac{1}{100}$ de um todo, basta dividi-lo por 100.



Observe a seguinte situação:

1 O comércio Hora da Esfirra, em Alegrete, faz muito sucesso. Em um sábado foram vendidas 500 esfirras. Sabe-se que 27% dessa quantidade era de queijo. Quantas esfirras de queijo foram vendidas nesse sábado?

27% de 500 = 27 × 1% de 500

→ 500 : 100 = 5

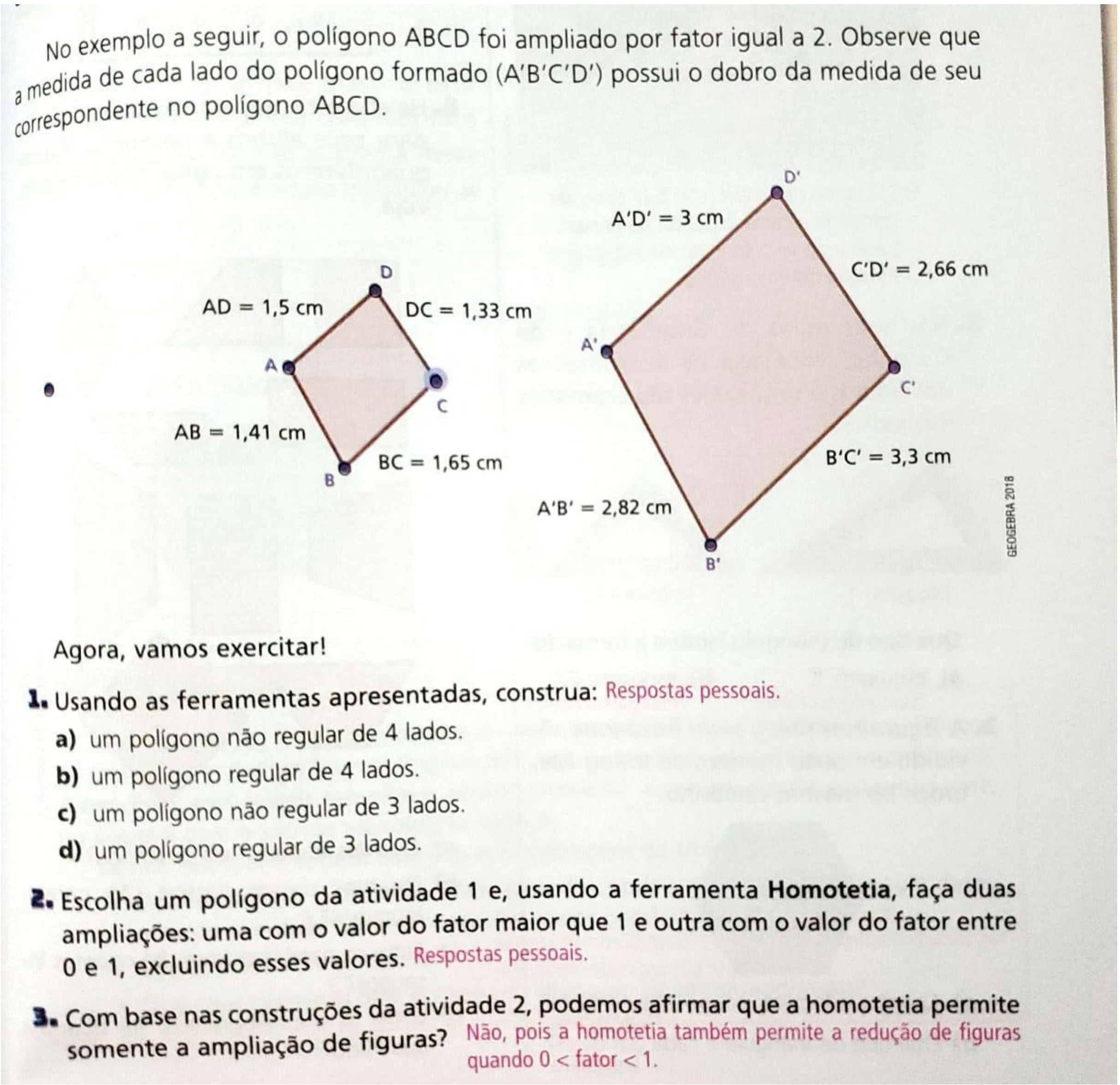
27% de 500 = 27 × 5 = 135

Foram vendidas 135 esfirras de queijo.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Na Unidade 7, denominada “Ângulos e Polígonos” há, também, um primeiro contato com uma relação de proporcionalidade, especificamente no capítulo 6 da unidade: “Construção e ampliação de figuras planas”. A abordagem do tema se dá pela utilização da ferramenta *homotetia*, do *software GeoGebra*. Ali, os alunos são convidados a construir figuras e usar a ferramenta para ampliá-las, multiplicando o comprimento dos lados por um fator específico. Veja na Figura 7.

Figura 7 – Exemplo do uso do *GeoGebra*



No exemplo a seguir, o polígono ABCD foi ampliado por fator igual a 2. Observe que a medida de cada lado do polígono formado (A’B’C’D’) possui o dobro da medida de seu correspondente no polígono ABCD.

Agora, vamos exercitar!

1. Usando as ferramentas apresentadas, construa: Respostas pessoais.

a) um polígono não regular de 4 lados.

b) um polígono regular de 4 lados.

c) um polígono não regular de 3 lados.

d) um polígono regular de 3 lados.

2. Escolha um polígono da atividade 1 e, usando a ferramenta **Homotetia**, faça duas ampliações: uma com o valor do fator maior que 1 e outra com o valor do fator entre 0 e 1, excluindo esses valores. Respostas pessoais.

3. Com base nas construções da atividade 2, podemos afirmar que a homotetia permite somente a ampliação de figuras? Não, pois a homotetia também permite a redução de figuras quando 0 < fator < 1.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No livro do 6º ano a coleção preferiu abordar o respectivo objeto de conhecimento de uma maneira indireta e diluída em outros conceitos, uma vez que nem mesmo trouxe uma definição de razão.

É no 7º ano que ocorre um estudo mais direcionado à proporcionalidade. Sobre esse conteúdo, a BNCC indica o seguinte:

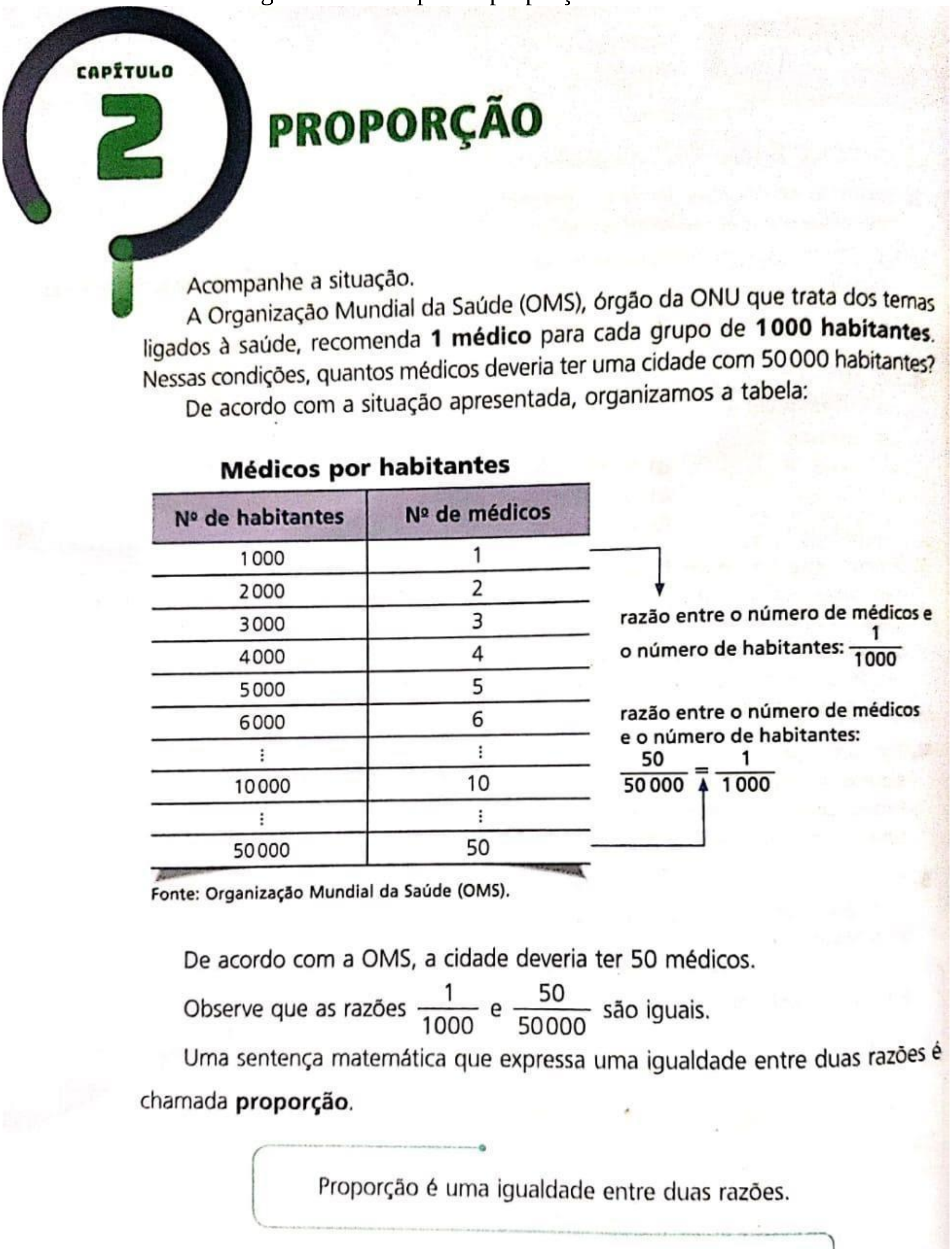
Quadro 4 – Razão e proporção na BNCC do 7º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Fonte: Brasil (2017)

No livro, o assunto é tratado na Unidade 7 “Grandezas proporcionais”. Logo no primeiro capítulo da Unidade o conceito de Razão é definido e explorado. A definição é dada apenas para números racionais. Neste capítulo são apresentadas razões em diferentes contextos, sejam relacionados às práticas sociais, sejam contextos internos à própria matemática e há um enfoque nas diferentes formas de se representá-las, principalmente através de frações, números decimais e porcentagem. Logo em seguida há um capítulo intitulado “Proporção”, em que a ideia de proporção é apresentada através de um exemplo, usando uma tabela para explicitar a variação das quantidades, a partir de um dado real da OMS (Figura 8).

Figura 8 – Exemplo de proporção com dados reais



CAPÍTULO 2

PROPORÇÃO

Acompanhe a situação.

A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda **1 médico** para cada grupo de **1 000 habitantes**. Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 50 000 habitantes?

De acordo com a situação apresentada, organizamos a tabela:

Médicos por habitantes

Nº de habitantes	Nº de médicos
1 000	1
2 000	2
3 000	3
4 000	4
5 000	5
6 000	6
⋮	⋮
10 000	10
⋮	⋮
50 000	50

Fonte: Organização Mundial da Saúde (OMS).

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{1000}$

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{50}{50\,000} = \frac{1}{1\,000}$

De acordo com a OMS, a cidade deveria ter 50 médicos.

Observe que as razões $\frac{1}{1000}$ e $\frac{50}{50000}$ são iguais.

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Como é possível observar na imagem, uma *proporção* é definida como uma igualdade de razões. O capítulo traz em seguida vários tópicos, a começar por um chamado “Propriedade fundamental das proporções", a partir desse momento, o enfoque do capítulo se volta muito mais para as propriedades algébricas das razões e das proporções, já usando tais propriedades algébricas como ferramenta na resolução de problemas de proporcionalidade mais complexos, como se observa na Figura 9:

Figura 9 – Problemas de proporcionalidade

Veja algumas situações em que podemos aplicar a propriedade fundamental das proporções.

1 Usando a propriedade fundamental, verificar se os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.

Se considerarmos o primeiro e o quarto dos números (3 e 28) como extremos e o segundo e o terceiro números (7 e 12) como meios, temos:

- produto dos extremos: $3 \cdot 28 = 84$
- produto dos meios: $7 \cdot 12 = 84$

$$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12 \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{12}{28}$$

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.

2 Sabendo que os números 6, 24, 5 e *x* formam, nessa ordem, uma proporção, determinar o valor de *x*.

$\frac{6}{24} = \frac{5}{x}$ → os números 6, 24, 5 e *x*, nessa ordem, formam uma proporção

$6x = 5 \cdot 24$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$6x = 120$

$x = \frac{120}{6}$

O valor de *x* é 20.

3 Qual é o valor de *x* na igualdade $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{2}$, com $x \neq 2$?

Na igualdade, temos:

- extremos: $x + 1$ e 2
- meios: $x - 2$ e 1

$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{2}$

$2 \cdot (x + 1) = 1 \cdot (x - 2)$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$2x + 2 = x - 2$

$2x - x = -2 - 2$

$x = -4$

O valor de *x* (raiz da equação) é -4.

4 Na Escola do Bairro, para cada 4 meninas há 5 meninos estudando. Se há 580 meninos matriculados, quantos alunos estudam na Escola do Bairro?

Se representarmos por *x* o número de meninas, podemos formar a proporção:

$\frac{4}{5} = \frac{x}{580}$

$5 \cdot x = 4 \cdot 580$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$5x = 2\,320$

$x = \frac{2\,320}{5}$

$x = 464$ → número de meninas que estudam na Escola do Bairro

$464 + 580 = 1\,044$ → total de alunos

Na Escola do Bairro, estudam 1 044 alunos.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Van de Walle (2009 p. 389), ancorado em pesquisas na área, recomenda aos docentes no processo de desenvolvimento do *pensamento proporcional* dos estudantes:

> Reconheça que os métodos simbólicos ou mecânicos, como o algoritmo do produto cruzado usado para resolver proporções não desenvolvem o raciocínio proporcional e não devem ser introduzidos até os alunos não terem muitas experiências com métodos intuitivos e conceituais.

Dessa forma, entendemos que a antecipação de práticas algébricas na Unidade da coleção investigada vai de encontro com as orientações e pesquisas na área. Há um predomínio precoce das técnicas operatórias, sem o cuidado em inserir os estudantes em experiências e discussões mais intuitivas e conceituais sobre proporcionalidade.

Nos tópicos seguintes do capítulo, apresentam-se os conceitos de números diretamente e inversamente proporcionais, bem como o de grandezas direta e inversamente proporcionais, seguindo a mesma linha de apresentar um enfoque maior nas relações algébricas do que nos métodos intuitivos.

Figura 10 – Abertura do capítulo sobre grandezas inversamente proporcionais

Números inversamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

Uma bolinha deve se deslocar de um ponto *A* até um ponto *B*. A velocidade da bolinha e o tempo correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão indicados na tabela seguinte:

Deslocamento

Velocidade (em m/s)	Tempo (em s)
2	60
4	30
6	20
8	15

Fonte: Dados fictícios.

Pela tabela, vemos, por exemplo, que, dobrando a velocidade, o tempo se reduz à metade.

Observe o que ocorre quando consideramos o produto de um número da 1ª coluna pelo seu correspondente na 2ª coluna da tabela:

$\boxed{2 \cdot 60 = 120}$ $\boxed{6 \cdot 20 = 120}$

$\boxed{4 \cdot 30 = 120}$ $\boxed{8 \cdot 15 = 120}$

Note que todos os produtos são iguais: $2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 120$.

> Os números racionais *x*, *y* e *z* são **inversamente proporcionais** aos números racionais *a*, *b* e *c*, quando se tem: $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$.

Veja o exemplo a seguir.

Os números *x*, *y*, 2 e *z* são inversamente proporcionais aos números 6, 10, 15 e 60. Quais são os números *x*, *y* e *z*?

$x \cdot 6 = y \cdot 10 = 2 \cdot 15 = z \cdot 60$

$6x = 10y = 30 = 60z$

Daí, obtemos:

$$6x = 30 \qquad 10y = 30 \qquad 60z = 30$$

$$x = \frac{30}{6} \qquad y = \frac{30}{10} \qquad z = \frac{30}{60}$$

$$x = 5 \qquad y = 3 \qquad z = \frac{1}{2}$$

Portanto, $x = 5$, $y = 3$ e $z = \frac{1}{2}$.

218

Fonte: Acervo pessoal do autor

Ainda de acordo com Walle (2009), um dos aspectos importantes no desenvolvimento do *pensamento proporcional* é a capacidade de diferenciar relações proporcionais de não proporcionais, nesse ponto, o livro nem mesmo exemplifica situações que não são de proporcionalidade, o que representa uma lacuna na compreensão dos estudantes, segundo as pesquisas na área.

Por fim, a Unidade traz um capítulo dedicado à *regra de três*, apresentando inclusive, a *regra de três composta.* No caso da *regra de três simples*, apresentam-se os exemplos e primeiro verifica-se se a situação é de proporcionalidade direta ou inversa. A partir disso, usa-se a propriedade algébrica trabalhada anteriormente para equacionar a situação.

Figura 11 - Exemplo de uso da *regra de três simples*

2 Em um treino de automobilismo, um piloto fez parte do percurso em 18 segundos, registrados pelo cronômetro, com uma velocidade média de 200 km/h. Se a velocidade média fosse de 240 km/h, qual seria o tempo gasto nessa parte do percurso?

Vamos representar por *x* o tempo procurado.

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto no percurso cairá pela metade, e assim por diante. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e *x*.

Para isso, organizamos o quadro a seguir.

Velocidade	Tempo
200 km/h	18 s
240 km/h	x

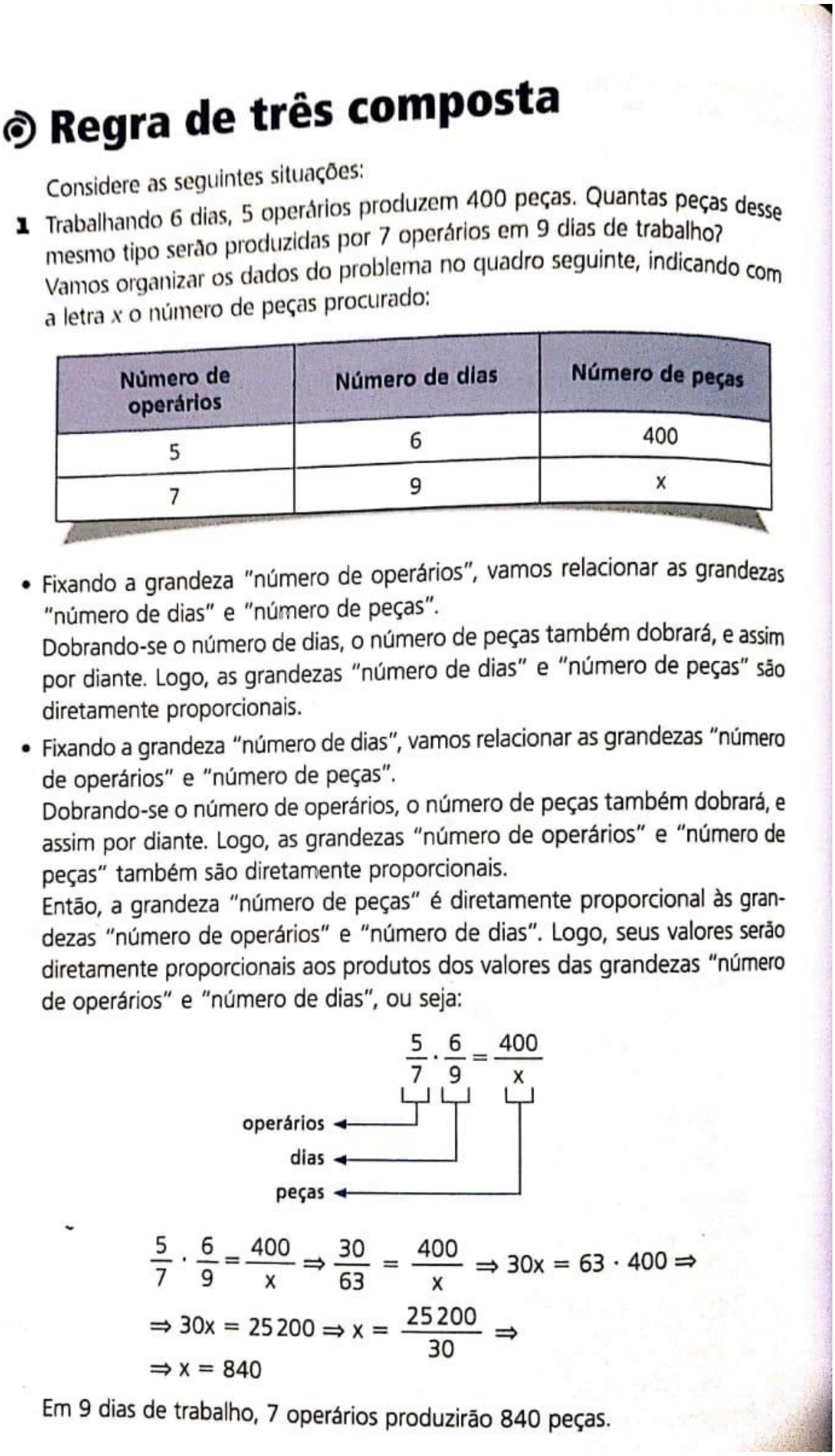
Daí, temos:

$$\frac{200}{240} = \frac{x}{18} \Rightarrow 200 \cdot 18 = 240 \cdot x \Rightarrow 3\,600 = 240x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 240x = 3\,600 \Rightarrow x = \frac{3\,600}{240} \Rightarrow x = 15$$

Fonte: Acervo pessoal do autor

No caso da *regra de três composta*, não parece haver anteriormente na Unidade uma relação algébrica que dê conta da complexidade das situações, o que deixa o processo de modelagem do problema bem mais "mecânico". Isso vai contra as orientações de pesquisas na área já citadas, considerando que este é o primeiro contato dos estudantes com o assunto no EFII. Além disso, nem mesmo a BNCC sugere o uso dessa ferramenta nesta etapa.

Figura 12 – Exemplo de regra de três composta



Regra de três composta

Considere as seguintes situações:

1 Trabalhando 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo serão produzidas por 7 operários em 9 dias de trabalho?

Vamos organizar os dados do problema no quadro seguinte, indicando com a letra *x* o número de peças procurado:

Número de operários	Número de dias	Número de peças
5	6	400
7	9	x

- Fixando a grandeza "número de operários", vamos relacionar as grandezas "número de dias" e "número de peças".
  Dobrando-se o número de dias, o número de peças também dobrará, e assim por diante. Logo, as grandezas "número de dias" e "número de peças" são diretamente proporcionais.
- Fixando a grandeza "número de dias", vamos relacionar as grandezas "número de operários" e "número de peças".
  Dobrando-se o número de operários, o número de peças também dobrará, e assim por diante. Logo, as grandezas "número de operários" e "número de peças" também são diretamente proporcionais.
  Então, a grandeza "número de peças" é diretamente proporcional às grandezas "número de operários" e "número de dias". Logo, seus valores serão diretamente proporcionais aos produtos dos valores das grandezas "número de operários" e "número de dias", ou seja:

$$\underbrace{\frac{5}{7}}_{\text{operários}} \cdot \underbrace{\frac{6}{9}}_{\text{dias}} = \underbrace{\frac{400}{x}}_{\text{peças}}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{400}{x} \Rightarrow \frac{30}{63} = \frac{400}{x} \Rightarrow 30x = 63 \cdot 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x = 25\,200 \Rightarrow x = \frac{25\,200}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 840$$

Em 9 dias de trabalho, 7 operários produzirão 840 peças.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Para uma primeira abordagem das proporções, a coleção parece não dar um enfoque suficiente nas noções mais intuitivas de proporcionalidade, também não há situações de estímulo do pensamento multiplicativo e sua comparação com o pensamento aditivo. No entanto, este problema parece ser um descompasso tanto da BNCC quanto da própria coleção com as pesquisas na área, uma vez que o documento não especifica essas situações como uma das habilidades a serem desenvolvidas por este objeto de conhecimento.

No 8º ano temos o seguinte objeto de conhecimento associado a duas habilidades:

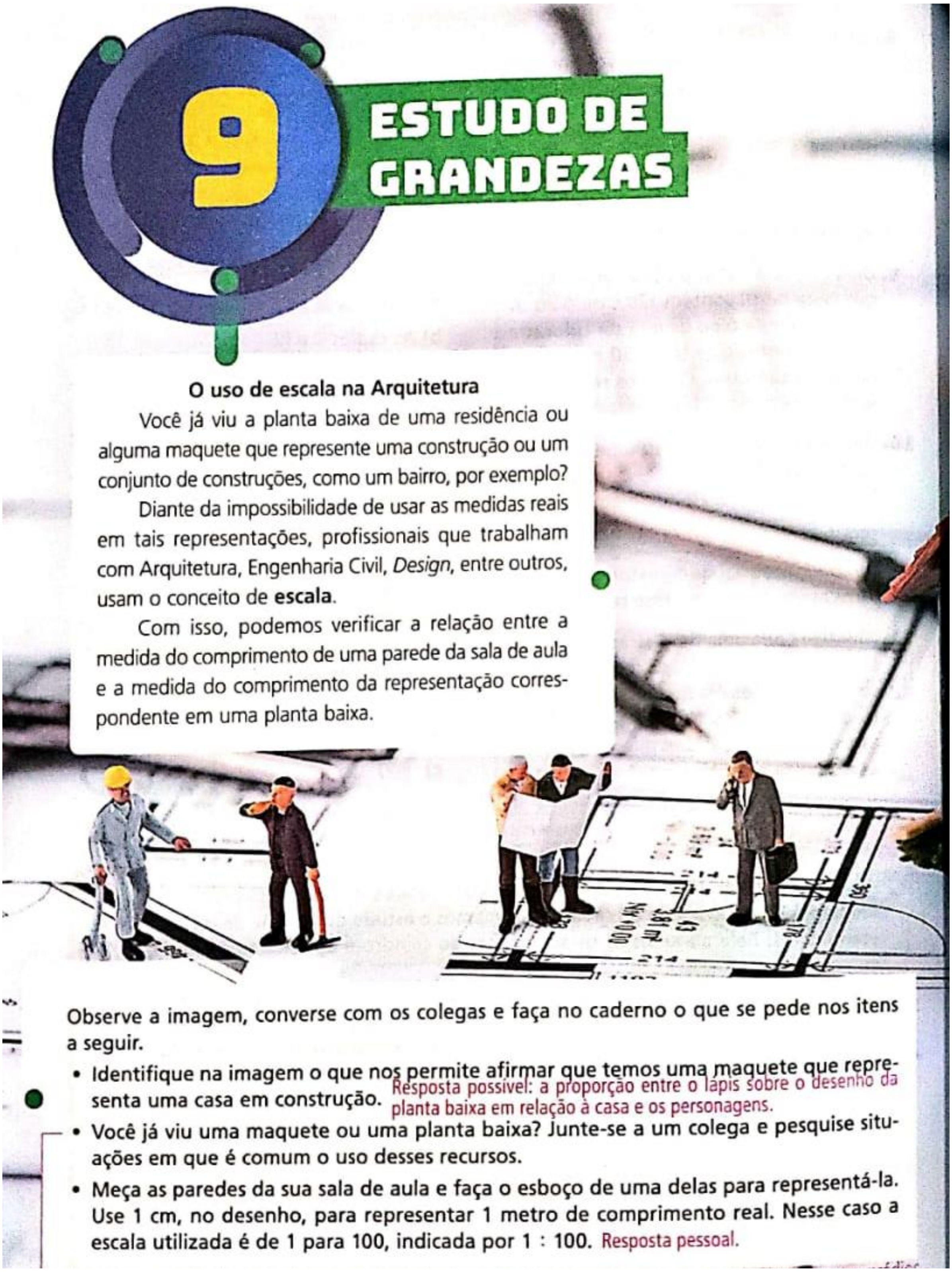
Quadro 5 - Razão e proporção na BNCC do 8º ano

Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: Brasil (2017)

De acordo com o Manual do professor da coleção, o assunto é tratado na Unidade 9 do livro do 8° ano, intitulada “Estudo de grandezas”. A abertura da unidade, como de costume, traz uma situação-problema. Nesse caso, a situação envolve o uso de escalas na arquitetura, usando como exemplo as plantas baixas. (Figura 13)

Figura 13 – Exemplo de escala com planatas baixas



9 ESTUDO DE GRANDEZAS

O uso de escala na Arquitetura

Você já viu a planta baixa de uma residência ou alguma maquete que represente uma construção ou um conjunto de construções, como um bairro, por exemplo?

Diante da impossibilidade de usar as medidas reais em tais representações, profissionais que trabalham com Arquitetura, Engenharia Civil, *Design*, entre outros, usam o conceito de **escala**.

Com isso, podemos verificar a relação entre a medida do comprimento de uma parede da sala de aula e a medida do comprimento da representação correspondente em uma planta baixa.

Observe a imagem, converse com os colegas e faça no caderno o que se pede nos itens a seguir.

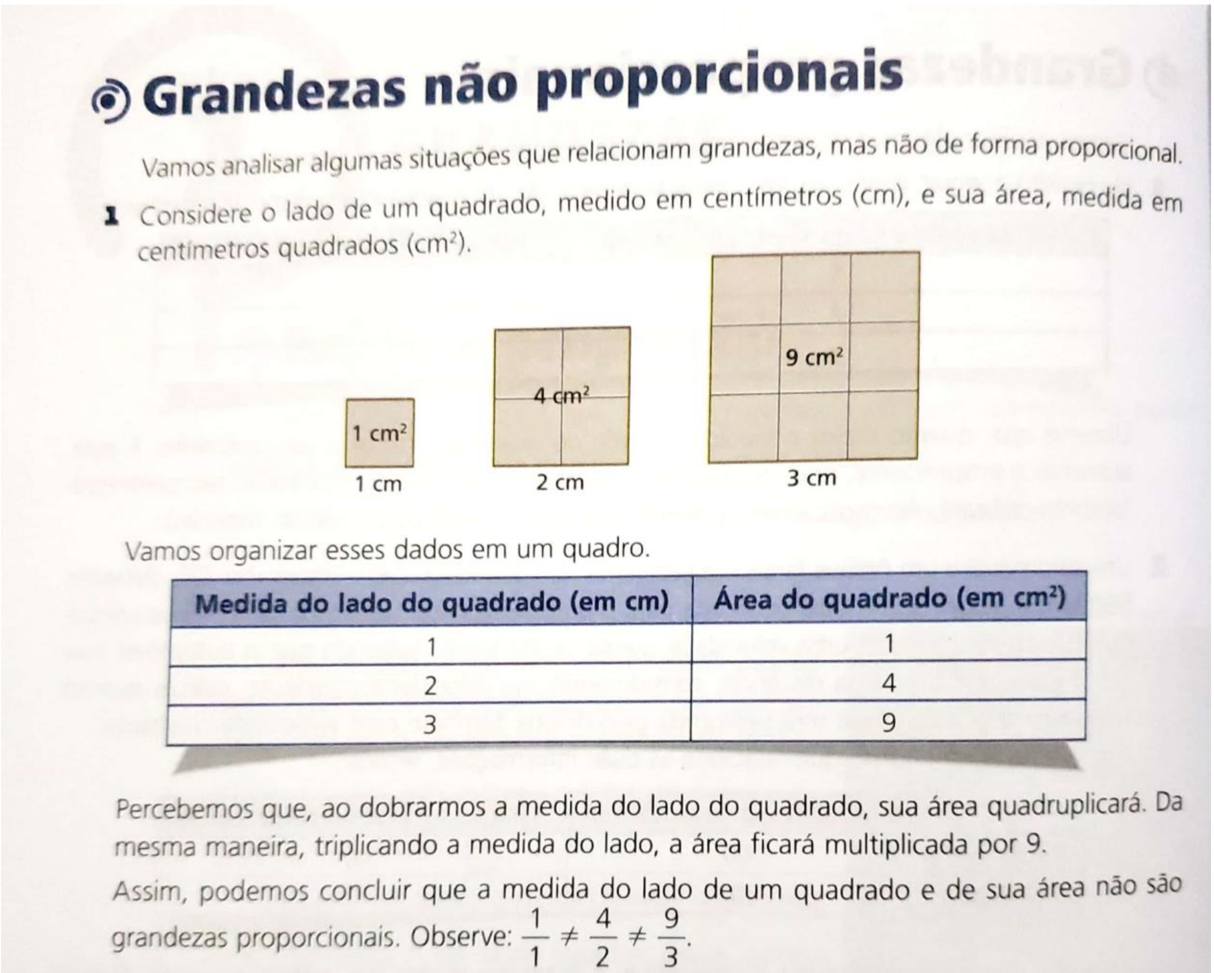
- **Identifique na imagem o que nos permite afirmar que temos uma maquete que representa uma casa em construção.** Resposta possível: a proporção entre o lápis sobre o desenho da planta baixa em relação à casa e os personagens.
- **Você já viu uma maquete ou uma planta baixa? Junte-se a um colega e pesquise situações em que é comum o uso desses recursos.**
- **Meça as paredes da sua sala de aula e faça o esboço de uma delas para representá-la. Use 1 cm, no desenho, para representar 1 metro de comprimento real. Nesse caso a escala utilizada é de 1 para 100, indicada por 1 : 100.** Resposta pessoal.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Em seguida, no capítulo 1 da unidade, retomam-se alguns conceitos vistos no ano anterior, como a definição de razão como o quociente de dois números racionais, ainda que, nessa etapa, os alunos já devam ter conhecimento da existência de números irracionais e também a definição de proporção como igualdade de razões, com alguns exemplos.

A novidade, ainda no mesmo capítulo, é que finalmente são dados exemplos de grandezas não proporcionais, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Exemplo de não proporcionalidade



Grandezas não proporcionais

Vamos analisar algumas situações que relacionam grandezas, mas não de forma proporcional.

1 Considere o lado de um quadrado, medido em centímetros (cm), e sua área, medida em centímetros quadrados (cm^2).

Vamos organizar esses dados em um quadro.

Medida do lado do quadrado (em cm)	Área do quadrado (em cm^2)
1	1
2	4
3	9

Percebemos que, ao dobrarmos a medida do lado do quadrado, sua área quadruplicará. Da mesma maneira, triplicando a medida do lado, a área ficará multiplicada por 9.

Assim, podemos concluir que a medida do lado de um quadrado e de sua área não são grandezas proporcionais. Observe: $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3}$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Por fim, o capítulo ainda traz a possibilidade da representação gráfica das situações de proporção, alternando entre diferentes formas de representação, começando pela construção de uma tabela, em seguida representando no plano cartesiano e finalmente estabelecendo uma relação algébrica entre as grandezas. Apesar de os alunos não terem ainda visto o conceito de função do primeiro grau, essa abordagem é uma boa introdução para as relações funcionais.

Figura 15 – Representação de proporções no gráfico

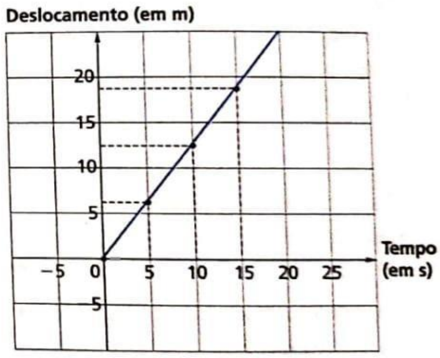
Representação gráfica

As situações que apresentam grandezas proporcionais podem ser representadas por meio de gráficos.

Acompanhe as situações a seguir.

1 Considere um automóvel que, partindo de uma situação de repouso, começa a se deslocar 6 metros a cada 5 segundos. Observe no quadro a seguir os dados desse deslocamento.

Tempo (em s)	Deslocamento (em m)
0	0
5	6
10	12
15	18



Observe que, em todos os pontos, o deslocamento é igual a 1,2 vezes o tempo, pois $\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{18}{15} = 1,2$.

Considerando o deslocamento como *y* e o tempo, como *x*, matematicamente, temos: $y = 1,2 \cdot x$.

Observe que os pontos estão alinhados, o que nos permite traçar uma semirreta, começando pela origem do sistema cartesiano.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No capítulo 2 da Unidade, chamado “Algumas razões especiais”, são trabalhados exemplos de razão, a saber: velocidade média, escala, densidade de um corpo e densidade demográfica. Nos dois capítulos seguintes, trata-se de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, no entanto, o enfoque é dado à representação gráfica dessas proporções.

Figura 16 – Exemplo de escala

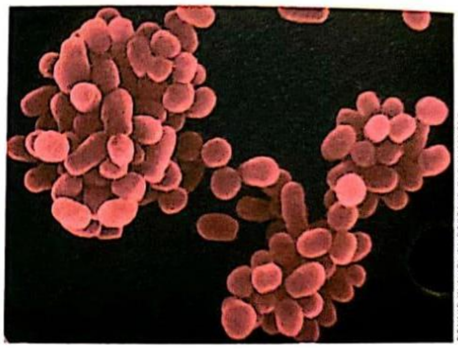
Escala

Uma das aplicações da ideia de razão entre duas grandezas encontra-se na **escala de redução** e **na escala de ampliação**, conhecidas simplesmente como **escala**.

Profissionais de diversas áreas usam uma determinada escala de redução, por exemplo, ao construir a maquete de um prédio, fazer a planta de um imóvel ou desenhar um novo modelo de carro.

Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado nele e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade. Em geral, utilizamos as medidas em centímetro para determinar uma escala.

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento de um desenho}}{\text{comprimento real}}$$


DENNIS KUNKEL/PHOTOTAKE/GLOW IMAGES

A escala de ampliação é um dado importante em análises científicas. Na foto, a bactéria *Brucella abortus*. Aumento aproximado de 14 160 vezes e colorido artificial.

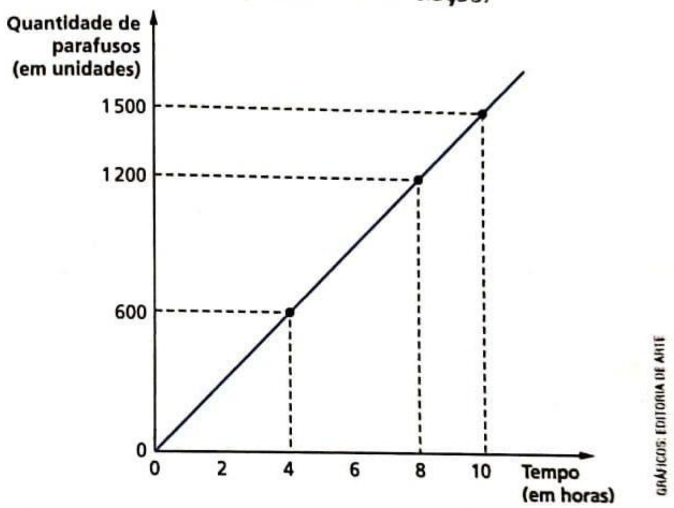
Fonte: Acervo pessoal do autor

O capítulo 5, último da unidade, é sobre regra de três. No entanto parece apenas uma revisão do que já havia sido visto no ano anterior, são dados exemplos de regra de três simples e composta.

No que diz respeito à BNCC, o livro do 8° ano aborda as habilidades propostas, mas vai muito além disso. O capítulo parece muito mais convidativo ao estudo de razões e proporções do que o do livro do 7° ano. Há menos enfoque nas relações algébricas, priorizando as diferentes formas de representação das proporções, bem como uma variedade maior de exemplos.

Figura 17 – Exemplo de proporcionalidade representada no gráfico

2 Uma empresa que fabrica parafusos decidiu verificar a relação entre a quantidade de parafusos produzida (em unidades) e o tempo de funcionamento da máquina que produz essa quantidade. Observe o gráfico que representa essa relação.



Analisando o gráfico, percebemos que essas grandezas são diretamente proporcionais, pois as duas aumentam na mesma razão. Observe:

- quando a produção de parafusos passa de 600 unidades para 1 200 unidades, varia na razão de $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$.
- quando o tempo passa de 4 horas (produção de 600 unidades) para 8 horas (produção de 1 200 unidades), varia na razão de $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Assim, conseguimos determinar, por exemplo, o tempo para a produção de 4 200 unidades de parafusos:

$$\frac{600}{4200} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 28 \rightarrow 28 \text{ horas}$$

Fonte: Acervo pessoal do autor

No 9º ano, a BNCC propõe os seguintes objetos de conhecimento e habilidades:

Quadro 6 – Razão e proporção na BNCC do 9º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: Brasil (2017)

De acordo com o Manual do Professor da coleção, tais habilidades são trabalhadas na unidade 5, chamada “Proporção e semelhança”. No entanto, ao ler a unidade, observa-se que não há um compromisso em seguir à risca a estrutura da BNCC, uma vez que os conteúdos associados às habilidades do 9° ano são trabalhados no livro do 8° ano. O que a presente unidade faz é relacionar razões e proporções com a ideia de semelhança em geometria. Dessa vez, expandindo a definição de razão para números reais.

Considerando que a coleção aborda os temas das habilidades no ano anterior, não há uma defasagem na questão dos conteúdos, a opção de relacionar as razões com a geometria em uma unidade inteira nos parece ser uma abordagem interessante.

4.2 PADRÕES E FUNÇÕES

No 7° ano, temos os seguintes objetos de conhecimento e habilidades que optamos por alocar nesta categoria:

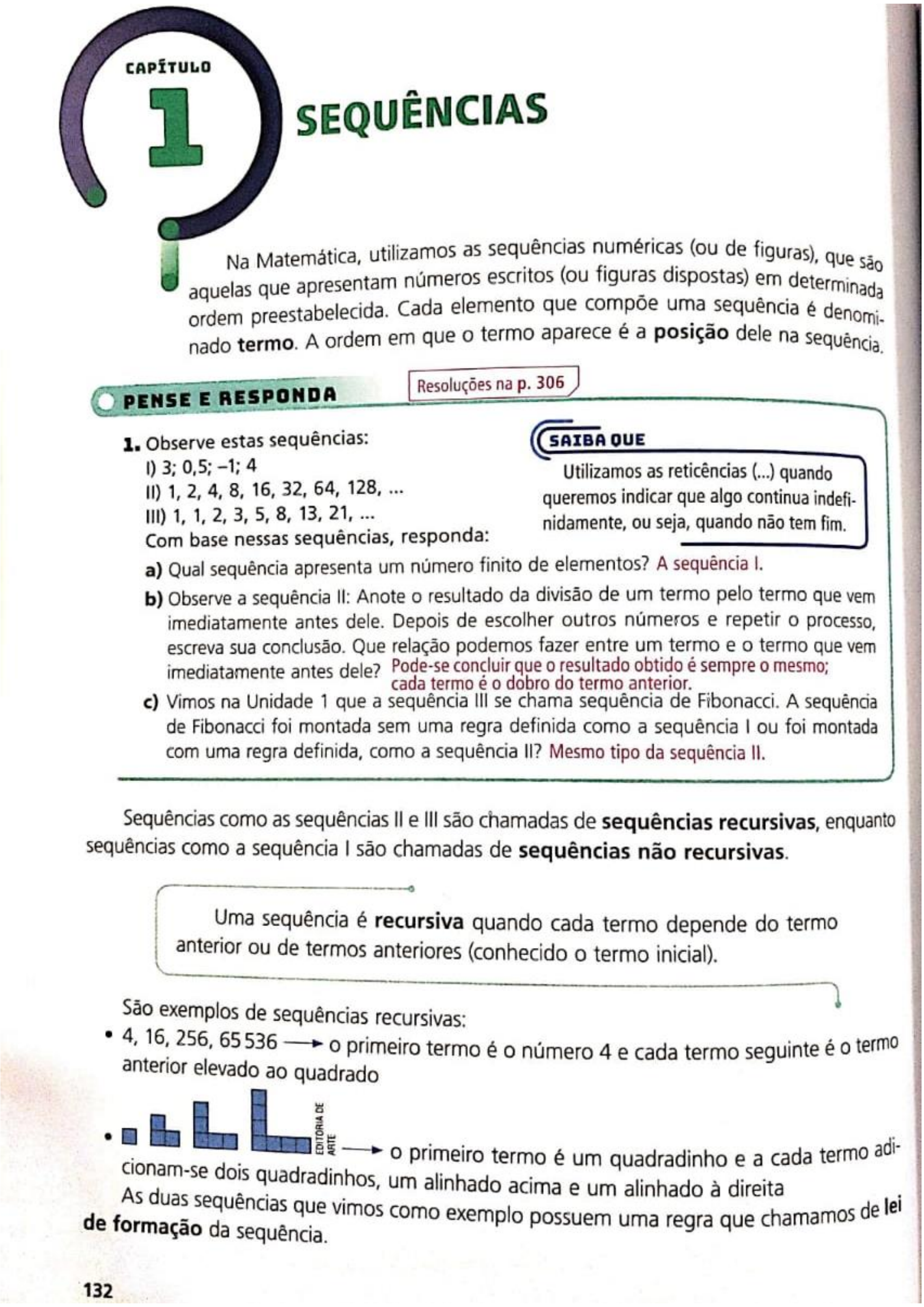
Quadro 7 – Padrões e funções na BNCC do 7º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
Linguagem algébrica: variável e incógnita	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

Fonte: Brasil (2017)

Logo no início da Unidade 5, chamada “Linguagem algébrica e funções”, temos um capítulo chamado “Sequências”. Ali é definido o que é sequência e é feita uma classificação entre sequências recursivas e não recursivas.

Figura 18 – Abertura do capítulo sobre sequências



CAPÍTULO 1

SEQUÊNCIAS

Na Matemática, utilizamos as sequências numéricas (ou de figuras), que são aquelas que apresentam números escritos (ou figuras dispostas) em determinada ordem preestabelecida. Cada elemento que compõe uma sequência é denominado **termo**. A ordem em que o termo aparece é a **posição** dele na sequência.

PENSE E RESPONDA Resoluções na **p. 306**

1. Observe estas sequências:

I) 3; 0,5; −1; 4

II) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

III) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Com base nessas sequências, responda:

SAIBA QUE

Utilizamos as reticências (...) quando queremos indicar que algo continua indefinidamente, ou seja, quando não tem fim.

a) Qual sequência apresenta um número finito de elementos? A sequência I.

b) Observe a sequência II: Anote o resultado da divisão de um termo pelo termo que vem imediatamente antes dele. Depois de escolher outros números e repetir o processo, escreva sua conclusão. Que relação podemos fazer entre um termo e o termo que vem imediatamente antes dele? Pode-se concluir que o resultado obtido é sempre o mesmo; cada termo é o dobro do termo anterior.

c) Vimos na Unidade 1 que a sequência III se chama sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci foi montada sem uma regra definida como a sequência I ou foi montada com uma regra definida, como a sequência II? Mesmo tipo da sequência II.

Sequências como as sequências II e III são chamadas de **sequências recursivas**, enquanto sequências como a sequência I são chamadas de **sequências não recursivas**.

Uma sequência é **recursiva** quando cada termo depende do termo anterior ou de termos anteriores (conhecido o termo inicial).

São exemplos de sequências recursivas:

- 4, 16, 256, 65 536 ⟶ o primeiro termo é o número 4 e cada termo seguinte é o termo anterior elevado ao quadrado
- EDITORIA DE ARTE ⟶ o primeiro termo é um quadradinho e a cada termo adicionam-se dois quadradinhos, um alinhado acima e um alinhado à direita

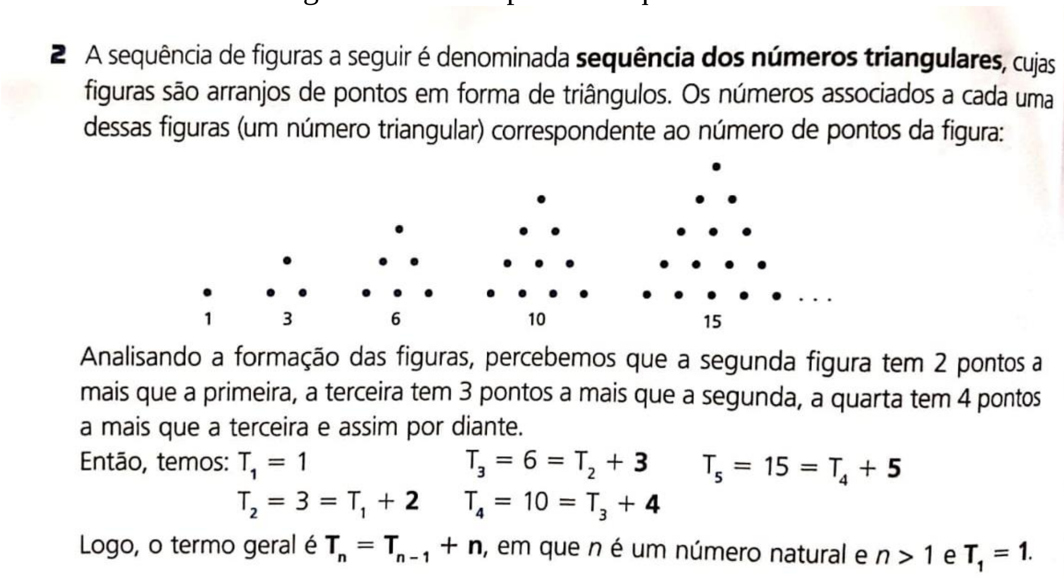
As duas sequências que vimos como exemplo possuem uma regra que chamamos de **lei de formação** da sequência.

132

Fonte: Acervo pessoal do autor

Há exemplos de padrões crescentes com uso de imagens e, também, sequências numéricas. No entanto, é perceptível uma falta de articulação entre as formas de linguagem, uma vez que o pensamento algébrico pode “expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica” (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, p. 88, 1993). Na Figura 19 evidenciamos que a linguagem é dada pelo livro e não estimulada a ser produzida pelos alunos. Também não há uma apresentação do conceito de recursão em outros contextos, como citado na habilidade **(EF07MA14)**.

Figura 19 – Exemplos de sequências



2 A sequência de figuras a seguir é denominada **sequência dos números triangulares**, cujas figuras são arranjos de pontos em forma de triângulos. Os números associados a cada uma dessas figuras (um número triangular) correspondente ao número de pontos da figura:

Analisando a formação das figuras, percebemos que a segunda figura tem 2 pontos a mais que a primeira, a terceira tem 3 pontos a mais que a segunda, a quarta tem 4 pontos a mais que a terceira e assim por diante.

Então, temos: $T_1 = 1$ $\quad T_3 = 6 = T_2 + \mathbf{3}$ $\quad T_5 = 15 = T_4 + \mathbf{5}$

$T_2 = 3 = T_1 + \mathbf{2}$ $\quad T_4 = 10 = T_3 + \mathbf{4}$

Logo, o termo geral é $\mathbf{T_n} = \mathbf{T_{n-1}} + \mathbf{n}$, em que n é um número natural e $n > 1$ e $\mathbf{T_1} = \mathbf{1}$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

A ideia de variável é apresentada no capítulo 2 da unidade, a partir de um exemplo com uma sequência, mas, ainda assim, sem explorar diferentes formas de representação, como as tabelas, por exemplo. A ideia de equivalência entre as expressões que representam a regularidade de uma mesma sequência também não é explorada. A única menção às sequências ocorre nos dois primeiros capítulos da unidade, o quais já foram citados anteriormente.

De uma maneira geral, as sequências, que como já vimos, podem ser um objeto de estudo adequado a esse nível de ensino, aparecem no livro de uma maneira abreviada e aligeirada, o que nos possibilita inferir que parecem estar ali apenas para fazer uma adequação da coleção ao documento da BNCC, sem uma preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No 8° ano, temos os seguintes objetos de conhecimento e habilidades:

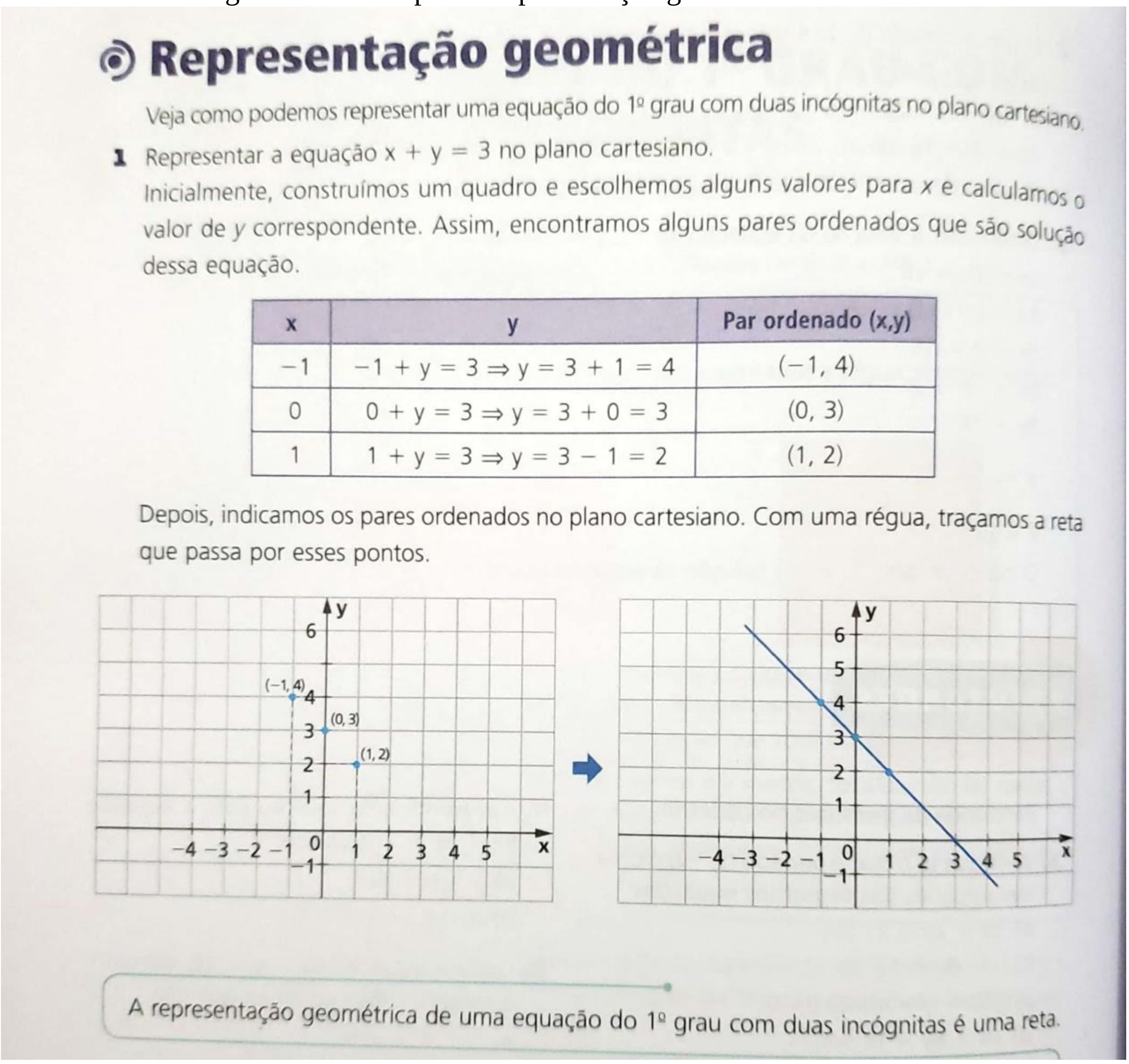
Quadro 8 – Padrões e funções na BNCC do 8º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Fonte: Brasil (2017)

No que diz respeito à representação de equações do primeiro grau de duas incógnitas, há um tópico no capítulo 4 “Equações do 1º grau com duas incógnitas” da Unidade 5 “Equações”, em que se mostra um exemplo de como fazer a representação. Não há muita exploração do conceito em si, mas das técnicas operatórias. Uma boa alternativa, seria, por exemplo, relacionar o assunto com a representação dos termos de uma sequência. Entretanto, a coleção não optou por essa abordagem.

Figura 20 – Exemplo de representação gráfica



Representação geométrica

Veja como podemos representar uma equação do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano.

1 Representar a equação $x + y = 3$ no plano cartesiano.

Inicialmente, construímos um quadro e escolhemos alguns valores para *x* e calculamos o valor de *y* correspondente. Assim, encontramos alguns pares ordenados que são solução dessa equação.

x	y	Par ordenado (x,y)
-1	$-1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$	$(-1, 4)$
0	$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 0 = 3$	$(0, 3)$
1	$1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$	$(1, 2)$

Depois, indicamos os pares ordenados no plano cartesiano. Com uma régua, traçamos a reta que passa por esses pontos.

A representação geométrica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é uma reta.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No que diz respeito às sequências, não há no material impresso nenhuma menção ao assunto, fica apenas para o material digital (atividades complementares), em que é apresentada uma única proposta de trabalho com sequências.

No 9° ano, temos o seguinte objeto de conhecimento e habilidade:

Quadro 9 – Padrões e funções na BNCC do 9º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**

Funções: representações numéricas, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Fonte: Brasil (2017)

Na última unidade do livro do 9° ano, chamada “Função”, é apresentado o conceito de função (Figura 21) no capítulo 1, intitulado “A noção de função”.

Figura 21 – Abertura do capítulo sobre funções

CAPÍTULO 1

A NOÇÃO DE FUNÇÃO

Com bastante frequência, nos deparamos com situações que envolvem relações entre duas grandezas variáveis. Acompanhe algumas dessas situações:

1 Uma peteca custa 30 reais. Se representarmos por x a quantidade de petecas iguais a essa que Rui, o professor de Educação Física, quer comprar e por y o preço, em reais, que ele vai pagar, podemos organizar o quadro abaixo.

Peteca.

Quantidade de petecas (x)	Preço a pagar (y)
1	$1 \cdot 30 = 30$
2	$2 \cdot 30 = 60$
3	$3 \cdot 30 = 90$
4	$4 \cdot 30 = 120$
⋮	⋮
10	$10 \cdot 30 = 300$
11	$11 \cdot 30 = 330$
⋮	⋮

Observando o quadro, você percebe que o preço y a pagar depende da quantidade x de petecas que forem compradas. Entre as grandezas y e x existe uma relação expressa pela sentença matemática $y = x \cdot 30$ ou $y = 30x$.

Você também pode notar que:

- A quantidade x de petecas é uma grandeza que varia de forma independente.
- O preço y a pagar é uma grandeza que varia de acordo com a grandeza quantidade de petecas.
- A todos os valores de x estão associados valores de y.
- Para cada valor de x está associado um único valor de y.

Nessas condições, podemos dizer:

O preço y a pagar é dado em função da quantidade x de petecas adquiridas, e a sentença $y = 30x$ é chamada **lei de formação** dessa função.

Neste caso, a variável x é chamada **variável independente**, e a variável y é **dependente da variável x**. Uma vez estabelecida a relação entre as grandezas **quantidade de petecas** e **preço a pagar**, podemos responder a questões como:

a) Quanto o professor vai pagar por 50 petecas iguais a essa?

$y = 30x \Rightarrow y = 30 \cdot 50 \Rightarrow y = 1\,500$

Logo, o professor vai pagar R$ 1 500,00 por 50 petecas.

b) Se ele tiver R$ 780,00, quantas dessas petecas poderão ser compradas?

$y = 30x \Rightarrow 780 = 30x \Rightarrow x = \frac{780}{30} = 26$

Portanto, ele poderá comprar 26 petecas.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Em seguida, há um capítulo sobre função afim e outro sobre função quadrática, ambos compartilham a estrutura de: primeiro ser apresentada a definição com exemplos, a representação gráfica e posteriormente os zeros das funções. No caso da função quadrática, há também um tópico sobre máximos e mínimos de funções. No caso das funções afim, há algumas propostas de uso da modelagem, como podemos observar na Figura 22. No entanto, no caso da função quadrática, não há propostas do tipo.

Figura 22 – Tarefa sobre rendas de bilro

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Confecção de renda de bilro, Florianópolis, SC.

POR TODA PARTE

A renda de bilro

O artesanato brasileiro surgiu com os índios, na pintura com pigmentos naturais, na cestaria, na cerâmica, na arte plumária, quando confeccionavam peças de vestuário e ornamentos feitos com plumas de aves.

Um dos mais ricos do mundo, o artesanato brasileiro revela não só usos, costumes, tradições e características de cada região do Brasil, mas também mostra influências sofridas por outros povos, como a confecção da renda de bilro, que teve origem na Bélgica, espalhou-se pela Europa e foi trazida ao Brasil pelos portugueses açorianos, quando se instalaram no litoral de Santa Catarina, principalmente na região de Florianópolis.

As artesãs e os artesãos são bastante criativos e habilidosos ao utilizarem materiais diversificados para produzir peças artísticas, quando o artesanato se confunde com a arte, ou utilitárias, muitas vezes visando ao sustento de sua família.

JUVENAL PEREIRA/PULSAR IMAGENS

Tapete artesanal de sisal, feito em Cachoeira do Brumado, MG.

A tapeçaria artesanal

Dos motivos geométricos aos florais, os tapetes artesanais exibem uma variedade imensa de cores, motivos, pontos, artigos e tamanhos, de acordo com as funções a que estão destinados.

Responda às questões no caderno.

1. Em maio de 2014, uma empresa de Alagoas publicou na internet a oferta ao lado. Naquela data, um comerciante de Manaus encomendou várias peças do anúncio, que foram enviadas por correio, que cobrou R$ 50,00 pelo envio da encomenda. Chamando de *x* a quantidade de toalhas encomendadas e de *y* a despesa que esse comerciante teve ao adquirir essa encomenda, determine:

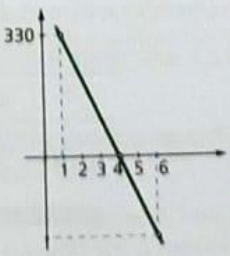
a) a lei de formação da função que descreve a dependência da despesa total com o número de toalhas encomendadas.
$y = 50 + 275x$

b) o número de toalhas encomendadas, sabendo que o comerciante de Manaus gastou R$ 3350,00 nessa transação.
12 toalhas.

ROGÉRIO REIS/TYBA

Toalha bordada na Ilha do Ferro, AL.

2. A venda dos tapetes produzidos por um artesão no primeiro semestre deste ano teve o desempenho representado no gráfico ao lado. Se no final do 1º mês o artesão teve um lucro de 330 reais, responda de acordo com o gráfico:



EDITORIA DE ARTE

a) Em que período esse artesão não teve lucro nem prejuízo?
Ao final do 4º mês.

b) A sentença matemática que relaciona a variação do lucro/prejuízo com o número de meses decorridos é dada por $y = -110x + 440$. Ao final do 6º mês do semestre, o artesão teve lucro ou prejuízo? De quanto?
O artesão teve prejuízo de 220 reais.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Pelas abordagens apresentadas, pode-se concluir que a coleção deixa a desejar o estudo dos padrões e perde a oportunidade de fazer uma relação destes como um primeiro olhar para as funções, uma vez que, como discutido anteriormente, Van de Walle (2009) afirma que o estudo de padrões permite explorar cinco formas de representá-lo, através de imagens, tabelas, fórmulas, gráficos ou linguagem natural.

As funções na coleção aparecem de fato apenas no 9º ano. No entanto, baseados em estudos anteriores no campo da Educação Algébrica defendemos que é um conceito que pode ser construído ao longo de todo o Ensino Fundamental.

4.3 EXPRESSÕES E EQUAÇÕES

No 6° ano temos um objeto de conhecimento e uma habilidade nessa categoria, associadas ao sinal de igualdade.

Quadro 10 – Expressões e equações na BNCC do 6º ano

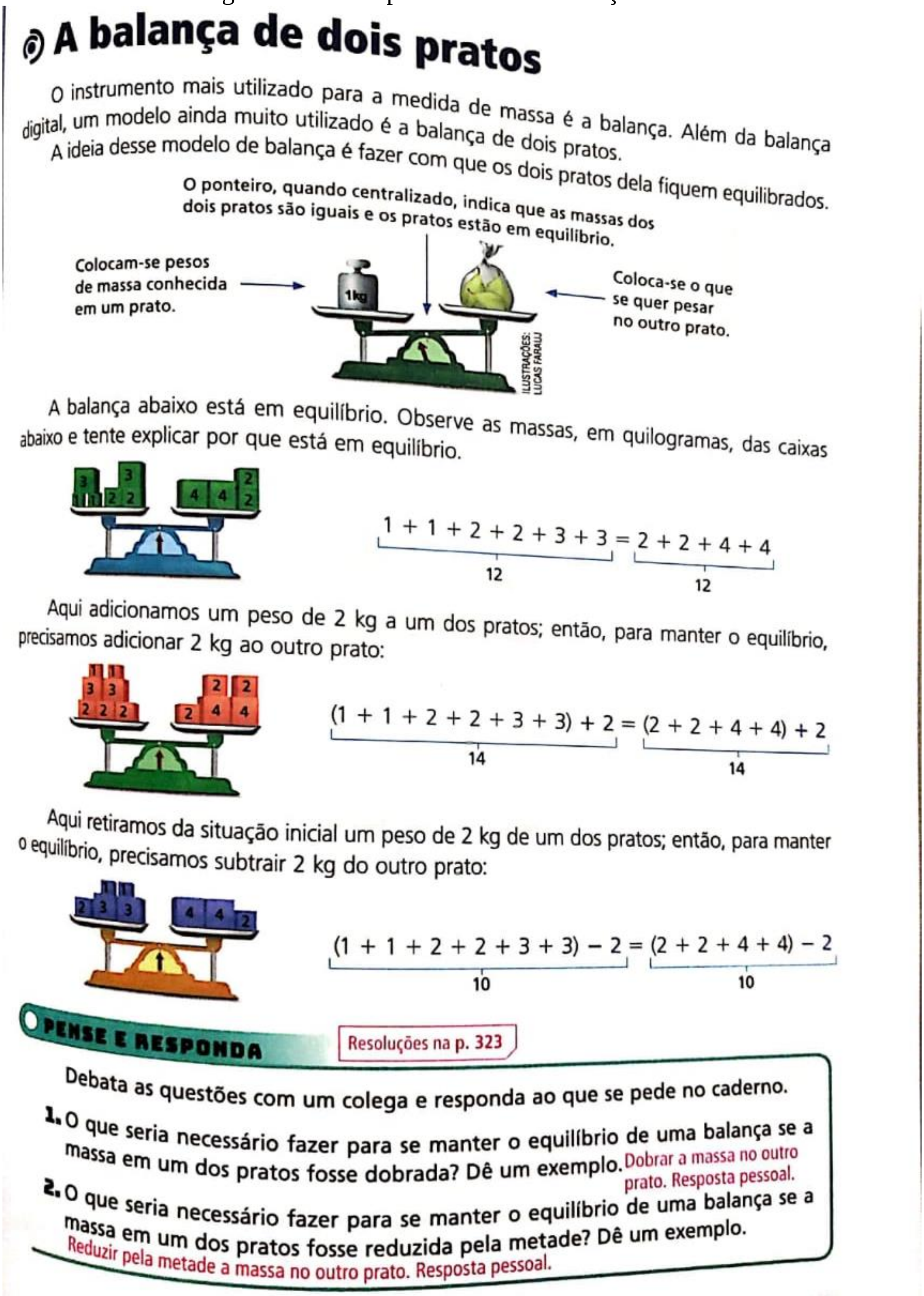
Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Fonte: Brasil (2017)

Como já mencionamos anteriormente, o conhecimento das propriedades do sinal da igualdade é uma habilidade fundamental para o estudo de equações e funções no decorrer dos anos do ensino fundamental e, muitas vezes, os alunos conhecem apenas o sentido *operacional* do símbolo (PONTE, BRANCO, MATOS 2009).

De acordo com o Manual do Professor da coleção, tal habilidade é trabalhada na Unidade 9 do livro do 6° ano, chamada “Massa, volume e capacidade”. Pelo título da unidade, já é possível perceber que tal habilidade é desenvolvida em um contexto de igualdade entre grandezas. O foco da Unidade é introduzir os conceitos de massa e volume, bem como suas unidades de medida. O contexto em que se pode perceber o sinal de igual sendo usado de uma forma que não seja *operacional* é quando se usa a analogia da balança, em que se evidencia o sentido de *equivalência* (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009) entre duas expressões.

Figura 23 – Exemplo com uso da balança



A balança de dois pratos

O instrumento mais utilizado para a medida de massa é a balança. Além da balança digital, um modelo ainda muito utilizado é a balança de dois pratos.

A ideia desse modelo de balança é fazer com que os dois pratos dela fiquem equilibrados.

A balança abaixo está em equilíbrio. Observe as massas, em quilogramas, das caixas abaixo e tente explicar por que está em equilíbrio.

$$\underbrace{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3}_{12} = \underbrace{2 + 2 + 4 + 4}_{12}$$

Aqui adicionamos um peso de 2 kg a um dos pratos; então, para manter o equilíbrio, precisamos adicionar 2 kg ao outro prato:

$$\underbrace{(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3) + 2}_{14} = \underbrace{(2 + 2 + 4 + 4) + 2}_{14}$$

Aqui retiramos da situação inicial um peso de 2 kg de um dos pratos; então, para manter o equilíbrio, precisamos subtrair 2 kg do outro prato:

$$\underbrace{(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3) - 2}_{10} = \underbrace{(2 + 2 + 4 + 4) - 2}_{10}$$

PENSE E RESPONDA Resoluções na p. 323

Debata as questões com um colega e responda ao que se pede no caderno.

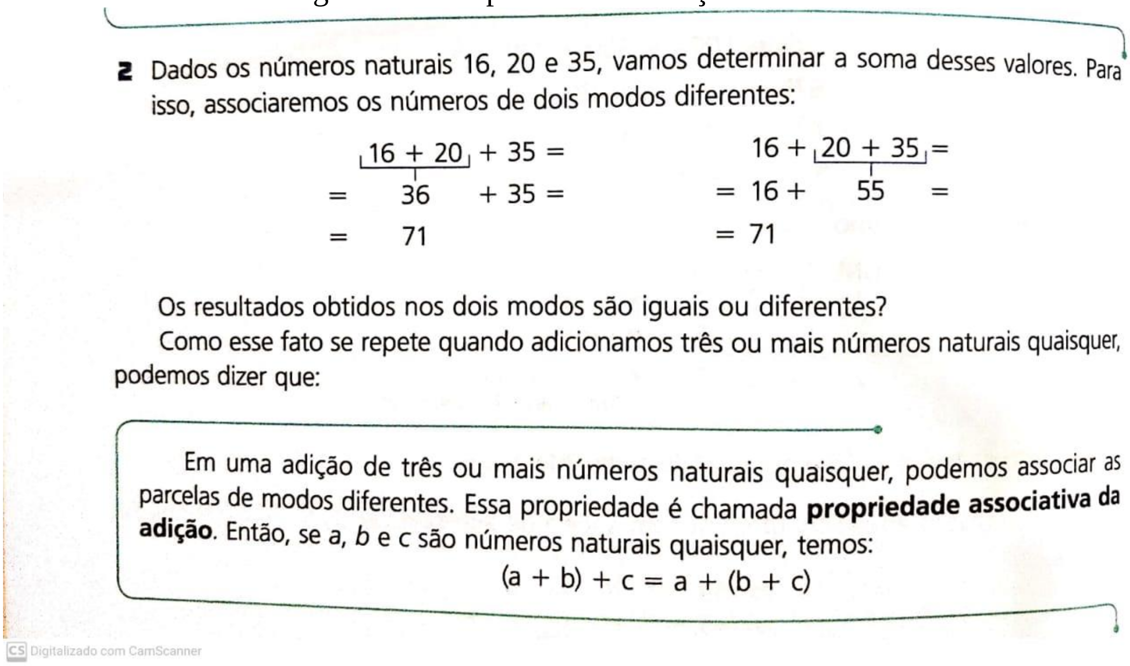
1. O que seria necessário fazer para se manter o equilíbrio de uma balança se a massa em um dos pratos fosse dobrada? Dê um exemplo. Dobrar a massa no outro prato. Resposta pessoal.

2. O que seria necessário fazer para se manter o equilíbrio de uma balança se a massa em um dos pratos fosse reduzida pela metade? Dê um exemplo. Reduzir pela metade a massa no outro prato. Resposta pessoal.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Tal abordagem do sinal de igualdade também aparece no contexto das operações entre números naturais, ao tratar de propriedades como a comutatividade e o elemento neutro.

Figura 24 – Propriedades da adição



2 Dados os números naturais 16, 20 e 35, vamos determinar a soma desses valores. Para isso, associaremos os números de dois modos diferentes:

$$(16 + 20) + 35 = \quad 16 + (20 + 35) =$$
$$= 36 + 35 = \quad = 16 + 55 =$$
$$= 71 \quad = 71$$

Os resultados obtidos nos dois modos são iguais ou diferentes?

Como esse fato se repete quando adicionamos três ou mais números naturais quaisquer, podemos dizer que:

Em uma adição de três ou mais números naturais quaisquer, podemos associar as parcelas de modos diferentes. Essa propriedade é chamada **propriedade associativa da adição**. Então, se *a*, *b* e *c* são números naturais quaisquer, temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Fonte: Acervo pessoal do autor

Não há, no livro, uma abordagem clara das propriedades propostas na habilidade, tampouco é desenvolvida a ideia do pensamento relacional, como o uso de sentenças abertas propostas por Van de Walle (2009, p. 290)

No 7° ano, a BNCC orienta que sejam trabalhados os seguintes objetos de conhecimento e habilidades:

Quadro 11 – Expressões e equações na BNCC do 7º ano

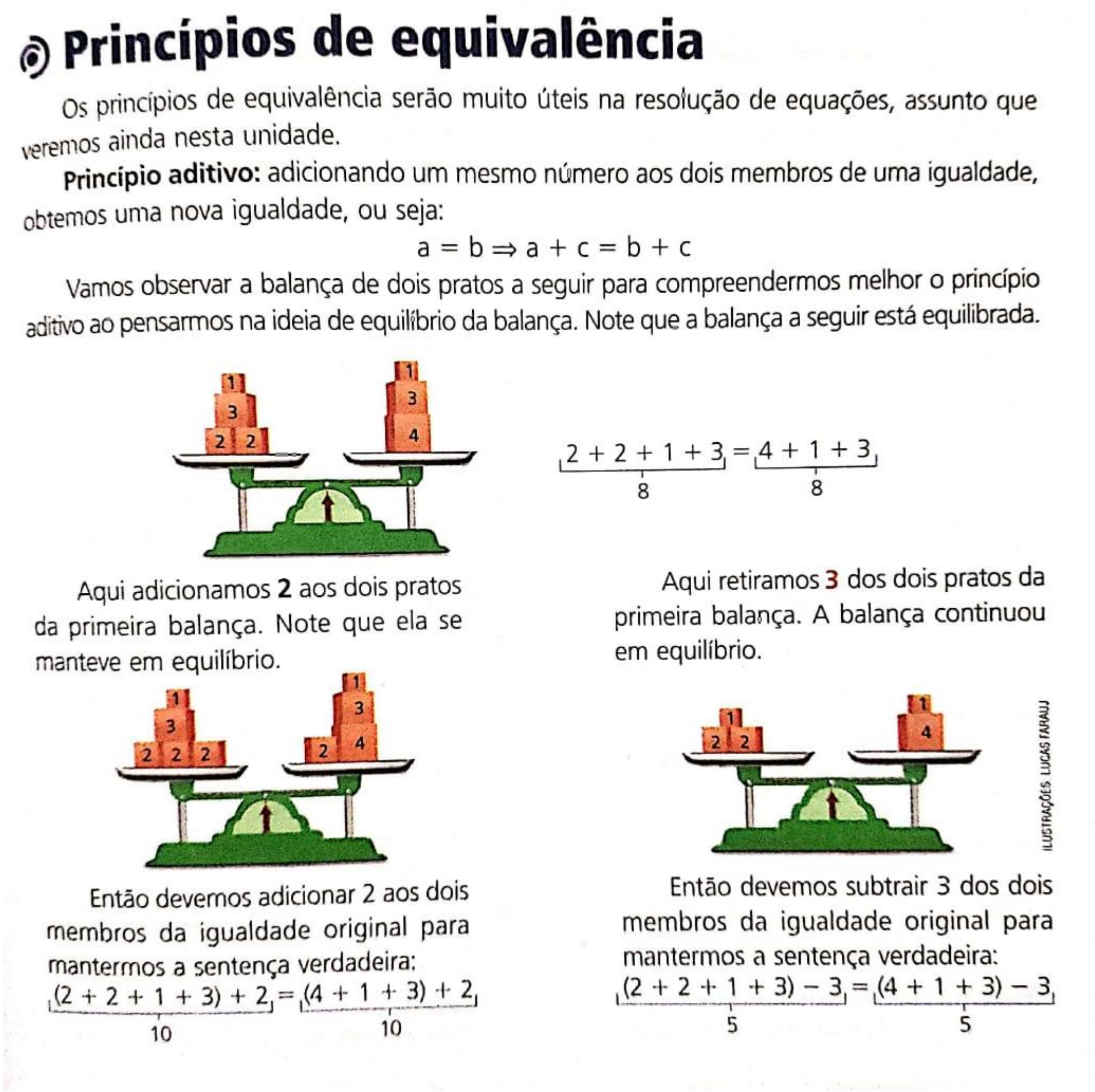
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: Brasil (2017)

Segundo o Manual do Professor, a Unidade 5, denominada “Linguagem algébrica e equações” indica que tais habilidades serão desenvolvidas. Como já mencionado anteriormente, a coleção faz uma abordagem superficial de sequências, uma vez que trata delas no início da Unidade apenas. Não há uma abordagem que proponha que o aluno generalize, tampouco crie conjecturas, o que permitiria aos estudantes desenvolver diferentes formas de generalizar (RADFORD, 2010), bem como comparar os seus resultados como forma de desenvolver a habilidade **(EF07MA16)**.

É nessa unidade que as propriedades da igualdade são exploradas com mais detalhes, principalmente o sentido de *equivalência* (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009). No capítulo 3 aborda-se a "Igualdade", com ênfase na analogia com a balança.

Figura 25 - Propriedades da igualdade



Princípios de equivalência

Os princípios de equivalência serão muito úteis na resolução de equações, assunto que veremos ainda nesta unidade.

Princípio aditivo: adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

Vamos observar a balança de dois pratos a seguir para compreendermos melhor o princípio aditivo ao pensarmos na ideia de equilíbrio da balança. Note que a balança a seguir está equilibrada.

$$\underbrace{2 + 2 + 1 + 3}_{8} = \underbrace{4 + 1 + 3}_{8}$$

Aqui adicionamos **2** aos dois pratos da primeira balança. Note que ela se manteve em equilíbrio.

Então devemos adicionar 2 aos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) + 2}_{10} = \underbrace{(4 + 1 + 3) + 2}_{10}$$

Aqui retiramos **3** dos dois pratos da primeira balança. A balança continuou em equilíbrio.

Então devemos subtrair 3 dos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

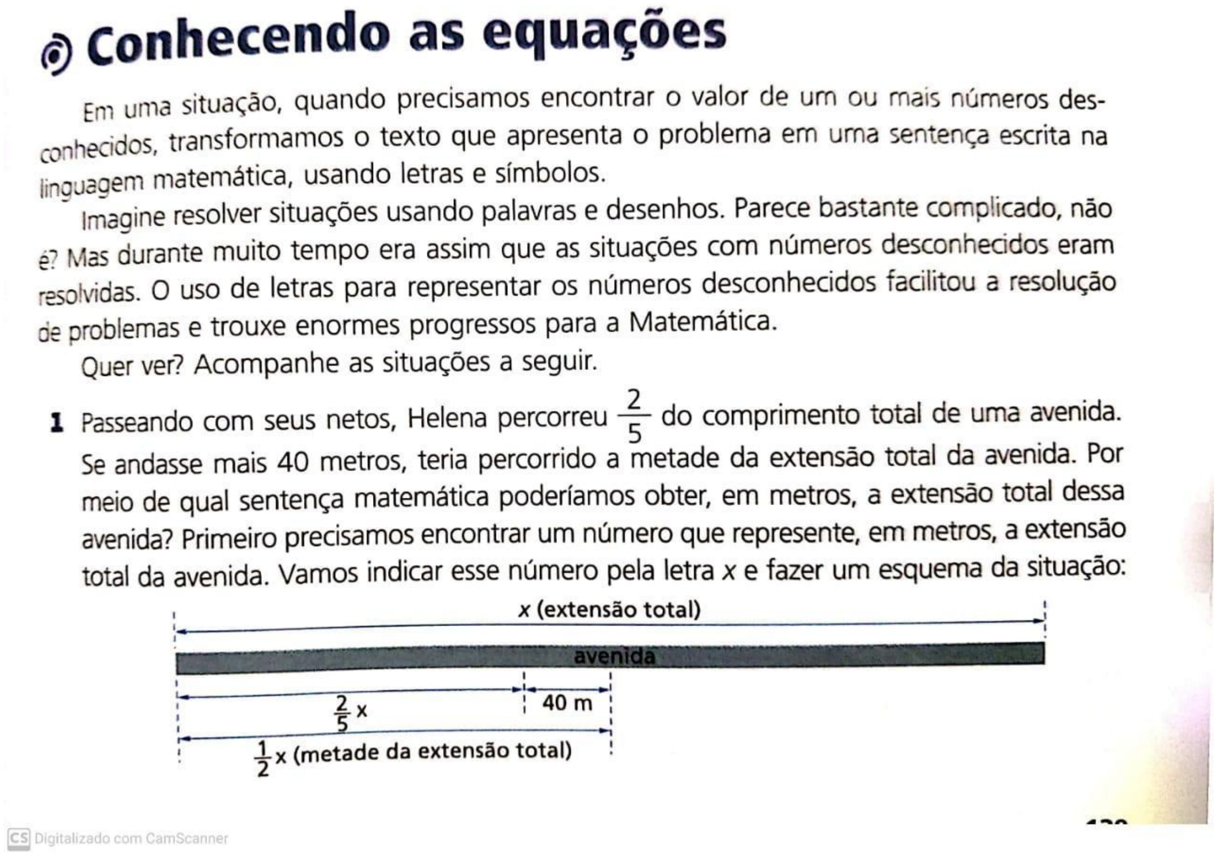
$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) - 3}_{5} = \underbrace{(4 + 1 + 3) - 3}_{5}$$

ILUSTRAÇÕES: LUCAS FARAUJ

Fonte: Acervo pessoal do autor

O restante da unidade se dedica às equações. O capítulo 4 “Equações” apresenta o conceito a partir de situações-problema que podem ser descritas através de equações, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Exemplo inicial de equação



Conhecendo as equações

Em uma situação, quando precisamos encontrar o valor de um ou mais números desconhecidos, transformamos o texto que apresenta o problema em uma sentença escrita na linguagem matemática, usando letras e símbolos.

Imagine resolver situações usando palavras e desenhos. Parece bastante complicado, não é? Mas durante muito tempo era assim que as situações com números desconhecidos eram resolvidas. O uso de letras para representar os números desconhecidos facilitou a resolução de problemas e trouxe enormes progressos para a Matemática.

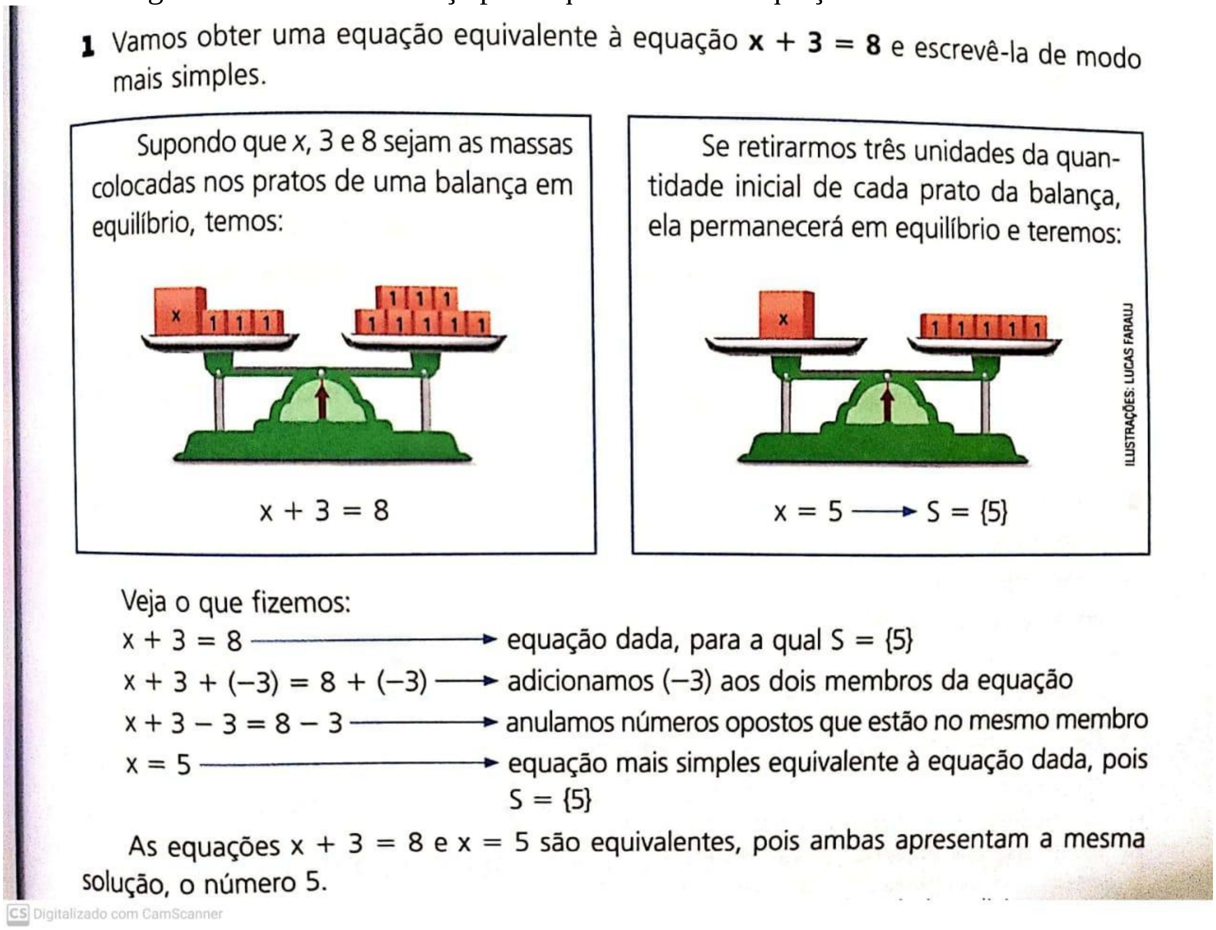
Quer ver? Acompanhe as situações a seguir.

1 Passeando com seus netos, Helena percorreu $\frac{2}{5}$ do comprimento total de uma avenida. Se andasse mais 40 metros, teria percorrido a metade da extensão total da avenida. Por meio de qual sentença matemática poderíamos obter, em metros, a extensão total dessa avenida? Primeiro precisamos encontrar um número que represente, em metros, a extensão total da avenida. Vamos indicar esse número pela letra *x* e fazer um esquema da situação:

Fonte: Acervo pessoal do autor

Em seguida, no capítulo 5, “Conjunto universo e solução de uma equação”, por meio de alguns exemplos, é explicado o que é o conjunto universo e a solução de uma equação, mesmo que sem técnicas de resolução. No capítulo 6 “Equações equivalentes”, são definidas as equações equivalentes, através das propriedades da igualdade. Também são apresentadas algumas formas de se obter equações equivalentes a partir de uma dada equação. Nessa parte, novamente aparece a analogia da balança, como mostra a Figura 27. No entanto, é importante destacar que o uso de tal analogia tem suas limitações, como apontam Lins e Gimenez (2001): “não é possível, por exemplo, produzir significado para "3x + 100 = 10" em relação a um núcleo de balança de dois pratos.” No caso citado pelos autores, a limitação se dá pelo fato de não ser possível “tirar” 100 de 10 numa balança.

Figura 27 – Uso da balança para equivalência de equações



1 Vamos obter uma equação equivalente à equação $\mathbf{x + 3 = 8}$ e escrevê-la de modo mais simples.

Supondo que *x*, 3 e 8 sejam as massas colocadas nos pratos de uma balança em equilíbrio, temos:

$x + 3 = 8$

Se retirarmos três unidades da quantidade inicial de cada prato da balança, ela permanecerá em equilíbrio e teremos:

$x = 5 \longrightarrow S = \{5\}$

Veja o que fizemos:

$x + 3 = 8 \longrightarrow$ equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + (-3) = 8 + (-3) \longrightarrow$ adicionamos (-3) aos dois membros da equação

$x + 3 - 3 = 8 - 3 \longrightarrow$ anulamos números opostos que estão no mesmo membro

$x = 5 \longrightarrow$ equação mais simples equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

As equações $x + 3 = 8$ e $x = 5$ são equivalentes, pois ambas apresentam a mesma solução, o número 5.

Fonte: Acervo pessoal do autor

A partir da construção feita nos capítulos anteriores, com ênfase no que a coleção chama de *princípio aditivo* e *princípio multiplicativo* para obter equações equivalentes, são apresentadas, no capítulo 7, as equações de 1º grau com uma incógnita. Em seguida, no capítulo 8 da unidade, “Equações na resolução de problemas” são apresentadas algumas aplicações em que problemas em linguagem natural são “traduzidos” para a linguagem simbólica, como mostra a Figura 28.

Figura 28 – Exemplos de problemas resolvidos com equações

2 No Colégio do Bairro há turmas de 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Nesse colégio um terço dos alunos cursa o 6º ano; um quarto cursa o 7º ano; três décimos dos alunos estudam no 8º ano; e 140 alunos estão no 9º ano. Quantos alunos estudam nas turmas de 6º ao 9º ano dessa escola?

1º passo: O problema pede que descubra o número de alunos que estudam no 6º, 7º, 8º e 9º anos da escola, informando dados de cada ano.

2º passo: Vamos representar esse número pela letra *x* e escrever a equação correspondente.

$$\underbrace{\frac{1}{3}x}_{\text{estuda no 6º ano}} + \underbrace{\frac{1}{4}x}_{\text{estuda no 7º ano}} + \underbrace{\frac{3}{10}x}_{\text{estudam no 8º ano}} + \underbrace{140}_{\text{estudam no 9º ano}} = \underbrace{x}_{\text{total de alunos}}$$

3º passo: Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{10}x + 140 = x$$

$$\frac{20}{60}x + \frac{15}{60}x + \frac{18}{60}x + \frac{8\,400}{60}x = \frac{60}{60}x$$

$$20x + 15x + 18x + 8\,400 = 60x$$

$$20x + 15x + 18x - 60x = -8\,400$$

$$(-1) \cdot -7x = -8\,400 \cdot (-1) \longrightarrow \text{usando o princípio multiplicativo, multiplicamos ambos os membros por } -1$$

$$7x = 8\,400$$

$$x = \frac{8\,400}{7} \Rightarrow x = 1\,200$$

4º passo: Estudam 1 200 alunos nas turmas do 6º ao 9º ano nessa escola.

Fonte: Acervo pessoal do autor

A partir da abordagem do livro do 7º ano, percebemos uma preocupação em trabalhar as propriedades da igualdade antes de introduzir as equações, deixadas um pouco de lado pelo livro do ano anterior e também existe uma articulação entre linguagem natural e linguagem algébrica no trato das equações. No entanto, esta deixa de explorar algumas ferramentas que podem contribuir para a articulação entre a linguagem algébrica e a linguagem natural, como é o caso das sequências e também das sentenças abertas, que, segundo Van de Walle (2009) representam uma boa ferramenta para introduzir o conceito de incógnita.

O Quadro 12 mostra os objetos de conteúdo e as habilidades para o 8º ano:

Quadro 12 – Expressões e equações na BNCC do 8º ano

Objetos de conteúdo	**Habilidades**
Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2= b$	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Fonte: Brasil (2017)

Tais objetos de conteúdo e habilidades aparecem nas unidades 4 e 5 do livro do 8º ano, denominadas “Expressões e cálculo algébrico” e “Equações”. O capítulo 1, intitulado “O uso de letras para representar números” da unidade 4 apresenta uma pequena introdução do desenvolvimento histórico da álgebra, citando nomes como Euclides e Viète.

O assunto geral do capítulo são as expressões algébricas. A parte inicial da unidade se dedica a articular a linguagem natural com a linguagem algébrica e, também, a geometria, como podemos ver na Figura 29.

Figura 29 – Exemplos de linguagem natural, algébrica e geométrica

O objetivo de representar números desconhecidos por meio de letras era indicar as operações matemáticas de forma mais simples e sintética.

Assim:

x^2 → indica o quadrado de um número

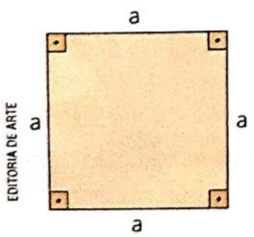
$4y$ → indica o quádruplo de um número

$\frac{c}{2}$ → indica a metade de um número

Da mesma forma, se *a* e *b* representam dois números reais quaisquer, temos que:

- $a + b$ ou $b + a$ representa a soma desses dois números;
- $a - b$ representa a diferença entre esses dois números;
- $a \cdot b$ ou $b \cdot a$ representa o produto desses dois números;
- $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, representa a divisão de *a* por *b*.

Na Geometria, se *a* representa a medida do lado de um quadrado qualquer, temos que:

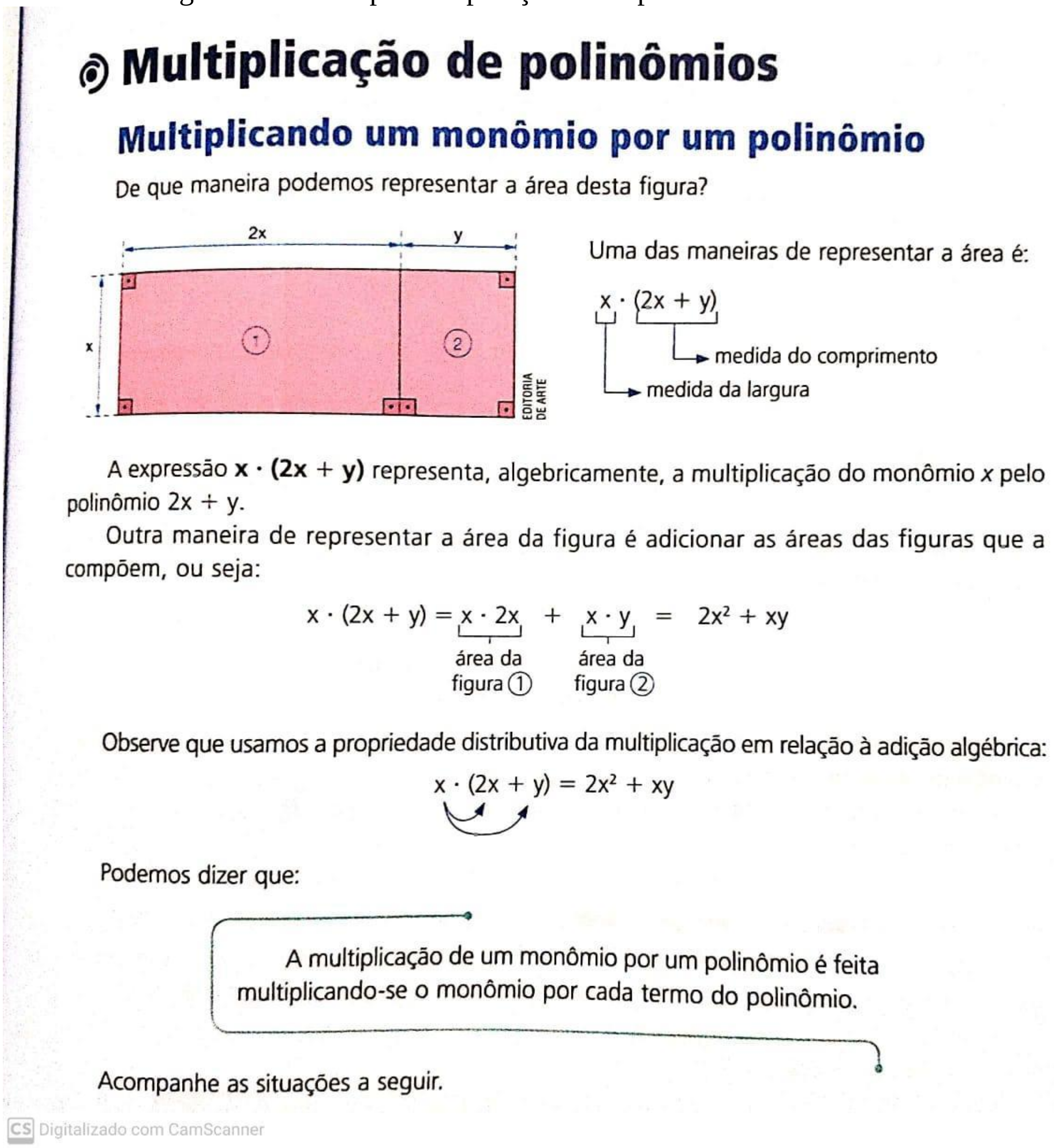


- $4 \cdot a$ ou $4a$ indica o perímetro desse quadrado;
- a^2 indica a área desse quadrado.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No capítulo são definidos monômios, polinômios, bem como as propriedades operatórias destes. Uma constante da unidade são as analogias com figuras geométricas, explorando a perspectiva da álgebra geométrica grega, principalmente ao abordar as operações entre polinômios, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Exemplo de operações com polinômios



Multiplicação de polinômios

Multiplicando um monômio por um polinômio

De que maneira podemos representar a área desta figura?

Uma das maneiras de representar a área é:

$\underbrace{x}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(2x + y)}_{\text{medida do comprimento}}$

A expressão **x · (2x + y)** representa, algebricamente, a multiplicação do monômio *x* pelo polinômio 2x + y.

Outra maneira de representar a área da figura é adicionar as áreas das figuras que a compõem, ou seja:

$$x \cdot (2x + y) = \underbrace{x \cdot 2x}_{\text{área da figura 1}} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{área da figura 2}} = 2x^2 + xy$$

Observe que usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica:

$$x \cdot (2x + y) = 2x^2 + xy$$

Podemos dizer que:

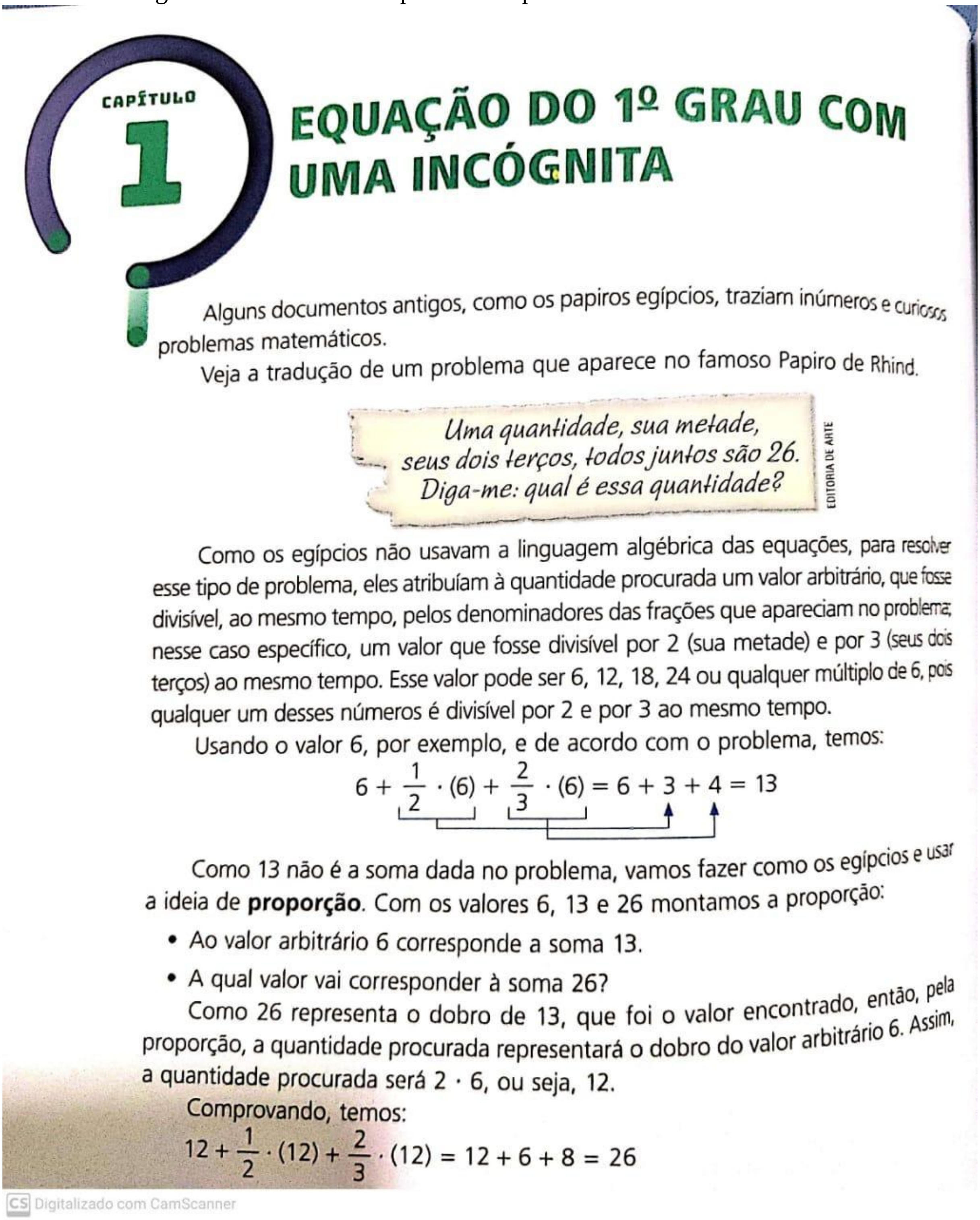
A multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

Acompanhe as situações a seguir.

Fonte: Acervo pessoal do autor

A unidade 5 “Equações” também apresenta uma abordagem que envolve a história da matemática, trazendo um problema adaptado do Papiro de Rhind, com uma resolução que não envolve o uso de incógnitas, como mostrado na Figura 31.

Figura 31 – Problema adaptado do Papiro de Rhind



CAPÍTULO 1

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Alguns documentos antigos, como os papiros egípcios, traziam inúmeros e curiosos problemas matemáticos.

Veja a tradução de um problema que aparece no famoso Papiro de Rhind.

Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: qual é essa quantidade?

EDITORIA DE ARTE

Como os egípcios não usavam a linguagem algébrica das equações, para resolver esse tipo de problema, eles atribuíam à quantidade procurada um valor arbitrário, que fosse divisível, ao mesmo tempo, pelos denominadores das frações que apareciam no problema; nesse caso específico, um valor que fosse divisível por 2 (sua metade) e por 3 (seus dois terços) ao mesmo tempo. Esse valor pode ser 6, 12, 18, 24 ou qualquer múltiplo de 6, pois qualquer um desses números é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

Usando o valor 6, por exemplo, e de acordo com o problema, temos:

$$6 + \frac{1}{2} \cdot (6) + \frac{2}{3} \cdot (6) = 6 + 3 + 4 = 13$$

Como 13 não é a soma dada no problema, vamos fazer como os egípcios e usar a ideia de **proporção**. Com os valores 6, 13 e 26 montamos a proporção:

- Ao valor arbitrário 6 corresponde a soma 13.
- A qual valor vai corresponder à soma 26?

Como 26 representa o dobro de 13, que foi o valor encontrado, então, pela proporção, a quantidade procurada representará o dobro do valor arbitrário 6. Assim, a quantidade procurada será $2 \cdot 6$, ou seja, 12.

Comprovando, temos:

$$12 + \frac{1}{2} \cdot (12) + \frac{2}{3} \cdot (12) = 12 + 6 + 8 = 26$$

Fonte: Acervo pessoal do autor

Posteriormente é desenvolvida uma revisão das técnicas de resolução de equações de primeiro grau, além de alguns exemplos que não foram abordados, como é o denominado na coleção por equações fracionárias e equações literais.

As equações com duas incógnitas são brevemente introduzidas (Figura 32), novamente há uma oportunidade de abordar o pensamento relacional, as propriedades da igualdade e até mesmo uma noção a respeito da dependência entre variáveis, mas a coleção não opta por esse caminho. Na seção 4.1, a Figura 20 mostra que a coleção apenas apresenta um passo a passo de como representar tais equações no plano, sem avançar na discussão do que seria uma ideia inicial para funções.

Figura 32 – Equações com duas incógnitas

2 O par ordenado (5, 2) é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$3x + 2y = 16$

$3 \cdot (5) + 2 \cdot (2) = 16$

$15 + 4 = 16$ (falsa)

O par ordenado (5, 2) não é solução da equação $3x + 2y = 16$.

3 Determinar a solução da equação $3x + 2y = 16$ quando $y = -1$.

$3x + 2y = 16$

$3x + 2 \cdot (-1) = 16$

$3x - 2 = 16$

$3x = 16 + 2$

$3x = 18$

$x = \dfrac{18}{3}$

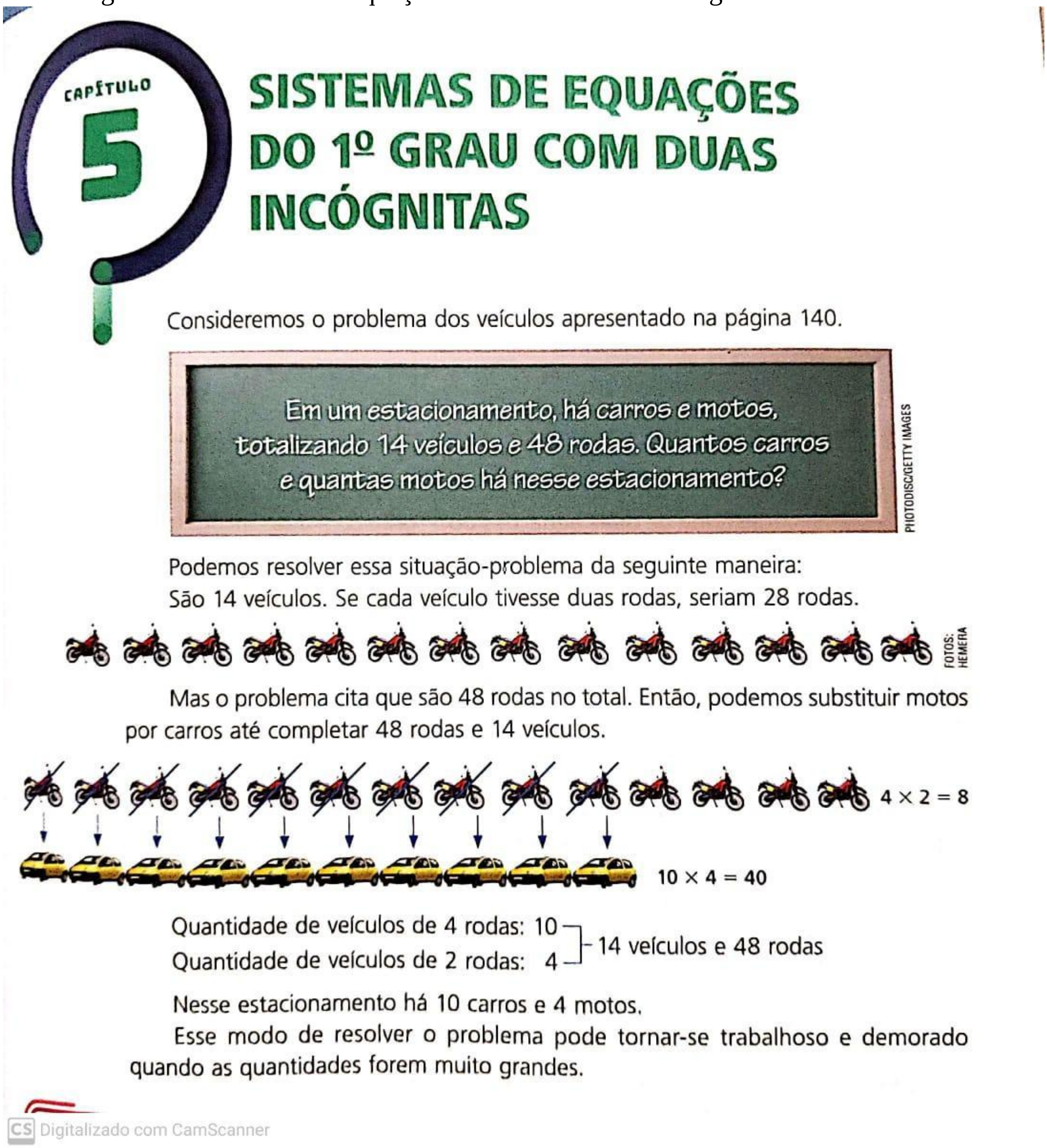
$x = 6$

O par ordenado (6, −1) é solução da equação quando $y = -1$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Os sistemas de equações com duas incógnitas aparecem no capítulo 5 da unidade 5, trazendo uma situação-problema, como mostra a Figura 33.

Figura 33 – Sistemas de equações lineares com duas incógnitas



CAPÍTULO 5

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Consideremos o problema dos veículos apresentado na página 140.

Em um estacionamento, há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

PHOTODISC/GETTY IMAGES

Podemos resolver essa situação-problema da seguinte maneira:
São 14 veículos. Se cada veículo tivesse duas rodas, seriam 28 rodas.

FOTOS: HEMERA

Mas o problema cita que são 48 rodas no total. Então, podemos substituir motos por carros até completar 48 rodas e 14 veículos.

$4 \times 2 = 8$

$10 \times 4 = 40$

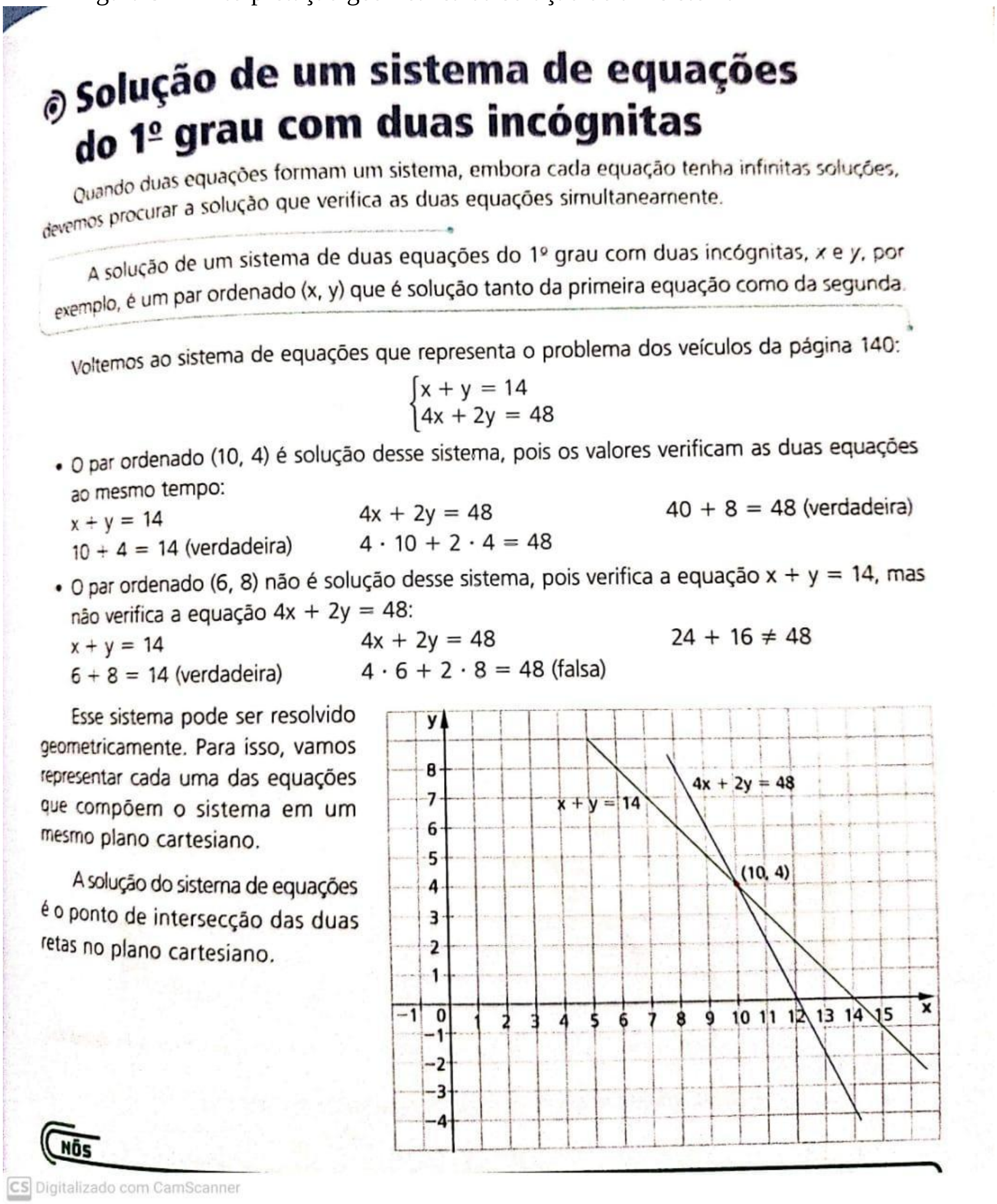
Quantidade de veículos de 4 rodas: 10
Quantidade de veículos de 2 rodas: 4
14 veículos e 48 rodas

Nesse estacionamento há 10 carros e 4 motos.

Esse modo de resolver o problema pode tornar-se trabalhoso e demorado quando as quantidades forem muito grandes.

Na sequência explora-se o conceito de solução de um sistema de equações e, também, há uma interpretação geométrica da solução (Figura 34).

Figura 34 – Interpretação geométrica da solução de um sistema



Solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Quando duas equações formam um sistema, embora cada equação tenha infinitas soluções, devemos procurar a solução que verifica as duas equações simultaneamente.

A solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, *x* e *y*, por exemplo, é um par ordenado (x, y) que é solução tanto da primeira equação como da segunda.

Voltemos ao sistema de equações que representa o problema dos veículos da página 140:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

- O par ordenado (10, 4) é solução desse sistema, pois os valores verificam as duas equações ao mesmo tempo:

$x + y = 14$ $\quad$ $4x + 2y = 48$ $\quad$ $40 + 8 = 48$ (verdadeira)

$10 + 4 = 14$ (verdadeira) $\quad$ $4 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 48$

- O par ordenado (6, 8) não é solução desse sistema, pois verifica a equação $x + y = 14$, mas não verifica a equação $4x + 2y = 48$:

$x + y = 14$ $\quad$ $4x + 2y = 48$ $\quad$ $24 + 16 \neq 48$

$6 + 8 = 14$ (verdadeira) $\quad$ $4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 48$ (falsa)

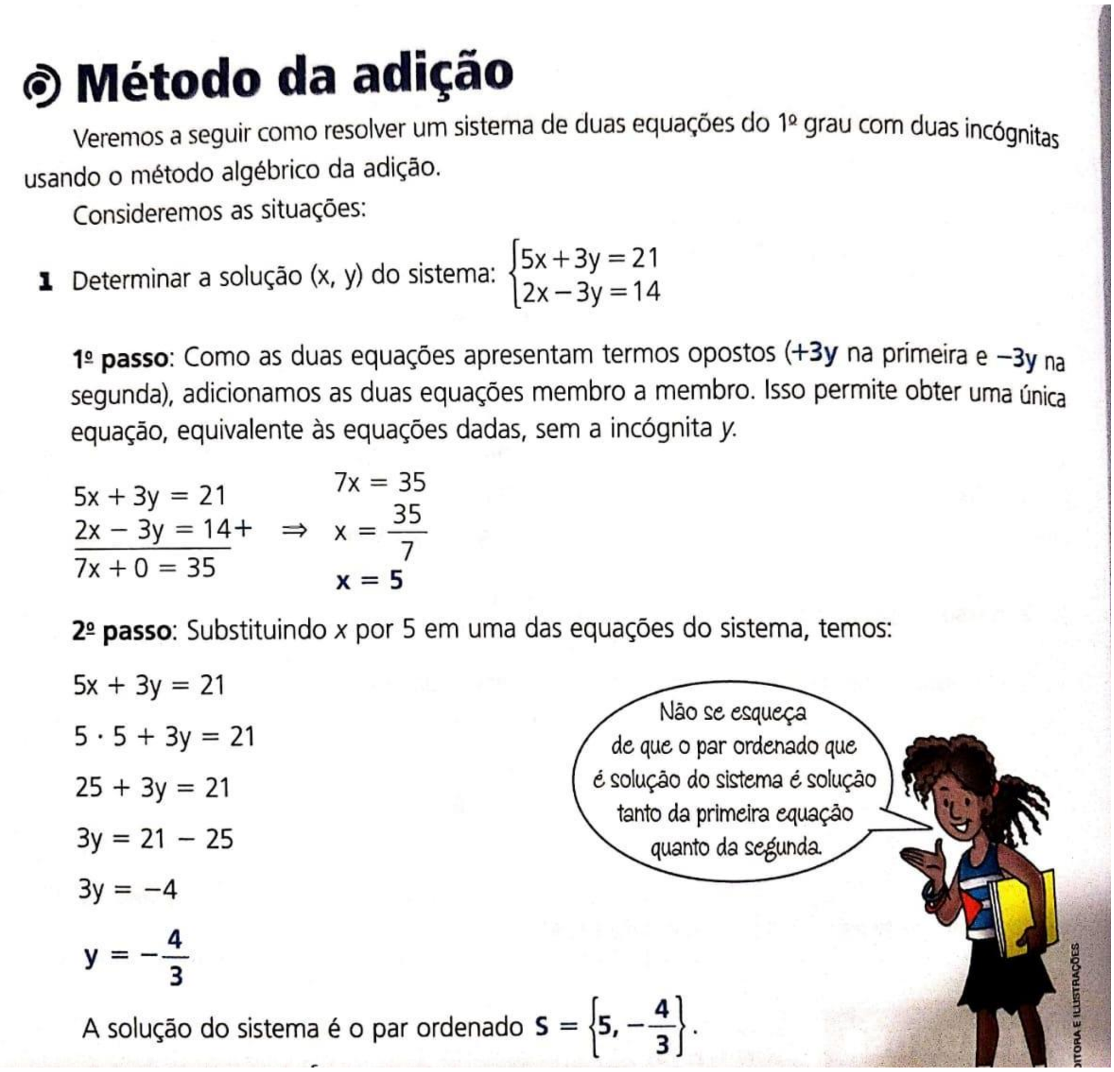
Esse sistema pode ser resolvido geometricamente. Para isso, vamos representar cada uma das equações que compõem o sistema em um mesmo plano cartesiano.

A solução do sistema de equações é o ponto de intersecção das duas retas no plano cartesiano.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No capítulo 6 da unidade 5 são apresentados métodos de resolução, especificamente, o método da substituição e o da adição. Não é realizada nenhuma nova menção à interpretação geométrica, por exemplo, focando-se estritamente nos métodos de resolução de sistema de equações. A exploração geométrica fica restrita a uma abordagem ilustrativa, sem a exploração posteriormente via resolução de exercícios e problemas. A Figura 35 traz um exemplo da abordagem do capítulo.

Figura 35 – Método para resolver um sistema



Método da adição

Veremos a seguir como resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas usando o método algébrico da adição.

Consideremos as situações:

1 Determinar a solução (x, y) do sistema: $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$

1º passo: Como as duas equações apresentam termos opostos (**+3y** na primeira e **−3y** na segunda), adicionamos as duas equações membro a membro. Isso permite obter uma única equação, equivalente às equações dadas, sem a incógnita *y*.

$$\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ \underline{2x - 3y = 14+} \\ 7x + 0 = 35 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 7x = 35 \\ x = \dfrac{35}{7} \\ \mathbf{x = 5} \end{array}$$

2º passo: Substituindo *x* por 5 em uma das equações do sistema, temos:

$$5x + 3y = 21$$
$$5 \cdot 5 + 3y = 21$$
$$25 + 3y = 21$$
$$3y = 21 - 25$$
$$3y = -4$$
$$\mathbf{y = -\frac{4}{3}}$$

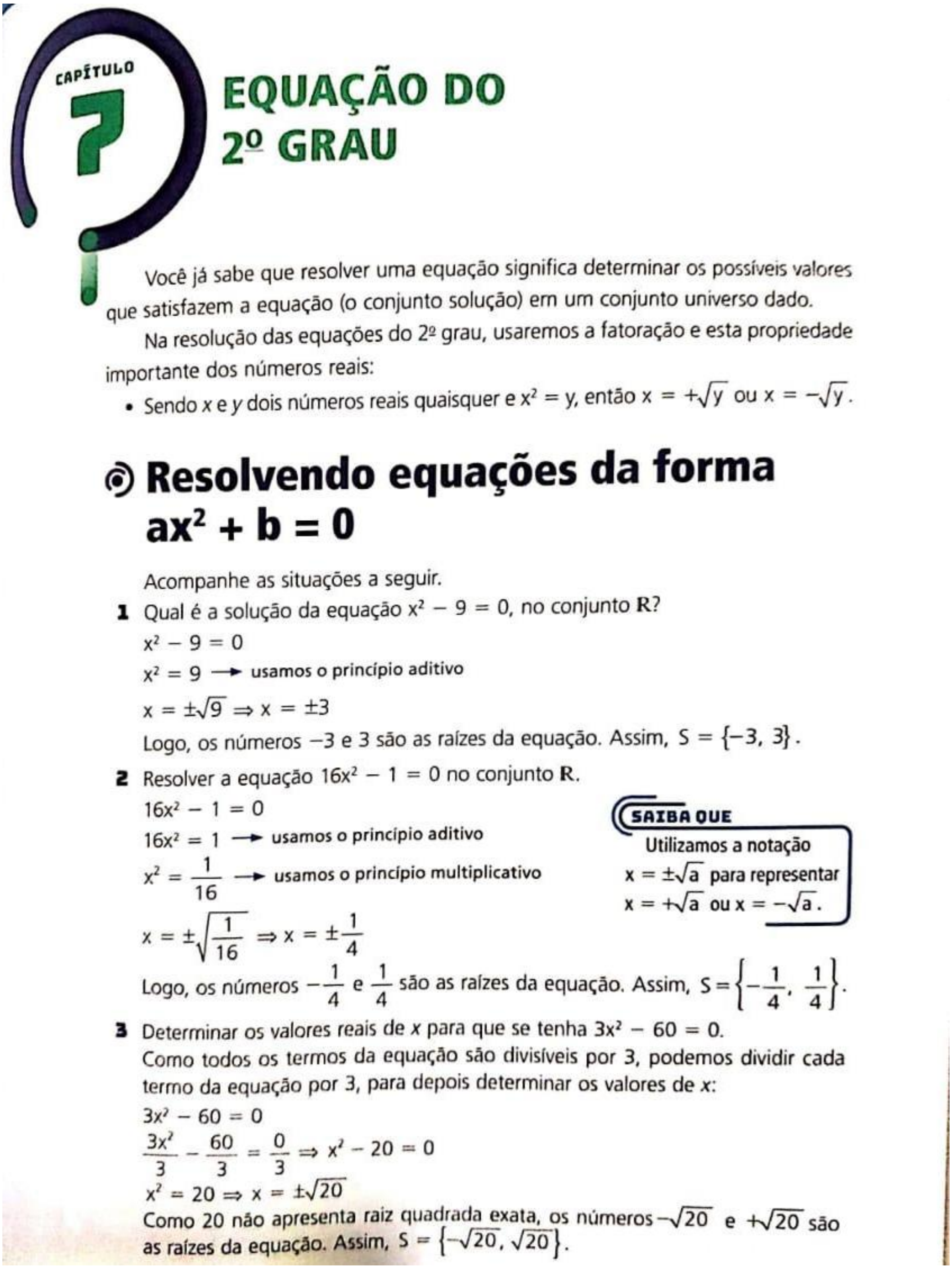
Não se esqueça de que o par ordenado que é solução do sistema é solução tanto da primeira equação quanto da segunda.

A solução do sistema é o par ordenado $\mathbf{S = \left\{5, -\frac{4}{3}\right\}}$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

A unidade 5 se encerra com o capítulo 7, “Equação do segundo grau”. O que é apresentado é apenas o método de resolução das equações na forma ax²+b=0. Não há contextualização alguma, tampouco a relação com figuras geométricas, algo que estava bastante presente na abordagem da coleção na unidade 4. A Figura 36 mostra a abertura do capítulo.

Figura 36 – Equações da forma ax²+b=0



CAPÍTULO 7

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Você já sabe que resolver uma equação significa determinar os possíveis valores que satisfazem a equação (o conjunto solução) em um conjunto universo dado.

Na resolução das equações do 2º grau, usaremos a fatoração e esta propriedade importante dos números reais:

- Sendo *x* e *y* dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações da forma $ax^2 + b = 0$

Acompanhe as situações a seguir.

1 Qual é a solução da equação $x^2 - 9 = 0$, no conjunto **R**?

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \longrightarrow$ usamos o princípio aditivo

$x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

Logo, os números -3 e 3 são as raízes da equação. Assim, $S = \{-3, 3\}$.

2 Resolver a equação $16x^2 - 1 = 0$ no conjunto **R**.

$16x^2 - 1 = 0$

$16x^2 = 1 \longrightarrow$ usamos o princípio aditivo

$x^2 = \frac{1}{16} \longrightarrow$ usamos o princípio multiplicativo

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$

Logo, os números $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$.

SAIBA QUE

Utilizamos a notação $x = \pm\sqrt{a}$ para representar $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

3 Determinar os valores reais de *x* para que se tenha $3x^2 - 60 = 0$.

Como todos os termos da equação são divisíveis por 3, podemos dividir cada termo da equação por 3, para depois determinar os valores de *x*:

$3x^2 - 60 = 0$

$\frac{3x^2}{3} - \frac{60}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 20 = 0$

$x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\sqrt{20}$

Como 20 não apresenta raiz quadrada exata, os números $-\sqrt{20}$ e $+\sqrt{20}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\}$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

No livro do 8º ano a coleção mostra, em alguns momentos, uma preocupação maior em articular diferentes linguagens e representações, utilizando-se da relação com figuras geométricas e também, mesmo que brevemente, apresentando uma abordagem que leva em conta o desenvolvimento da história da matemática. No entanto, em outros momentos, ela deixa de lado algumas dessas abordagens e parte diretamente para a linguagem simbólica e para um formalismo por vezes excessivo e desnecessário.

O Quadro 13 exibe o que diz a BNCC para o 9º ano na categoria de Expressões e equações

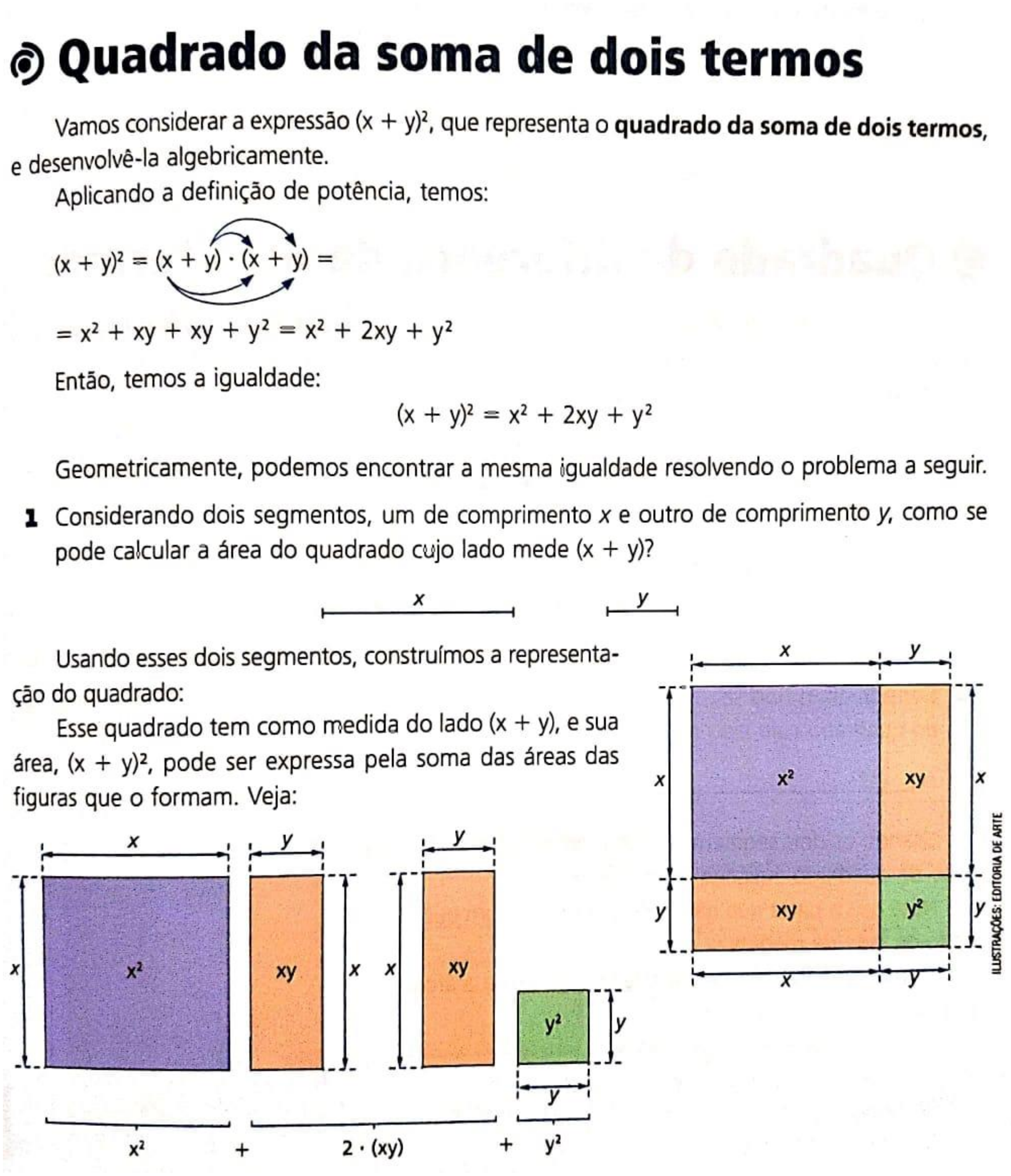
Quadro 13 – Expressões e equações na BNCC do 9º ano

Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: Brasil (2017)

A unidade 2 do livro do 9º ano, denominada "Produtos notáveis e fatoração", se dedica a apresentar produtos notáveis e algumas técnicas de fatoração, no entanto, como já feito no livro do 8º ano, a coleção novamente apresenta uma abordagem que busca relacionar os conceitos com a área de figuras geométricas, principalmente a área de retângulos, em uma perspectiva da álgebra geométrica grega, como mostra as Figuras 37 e 38.

Figura 37 – Exemplo de produto notável com soma de áreas



Quadrado da soma de dois termos

Vamos considerar a expressão $(x + y)^2$, que representa o **quadrado da soma de dois termos**, e desenvolvê-la algebricamente.

Aplicando a definição de potência, temos:

$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) =$

$= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Então, temos a igualdade:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade resolvendo o problema a seguir.

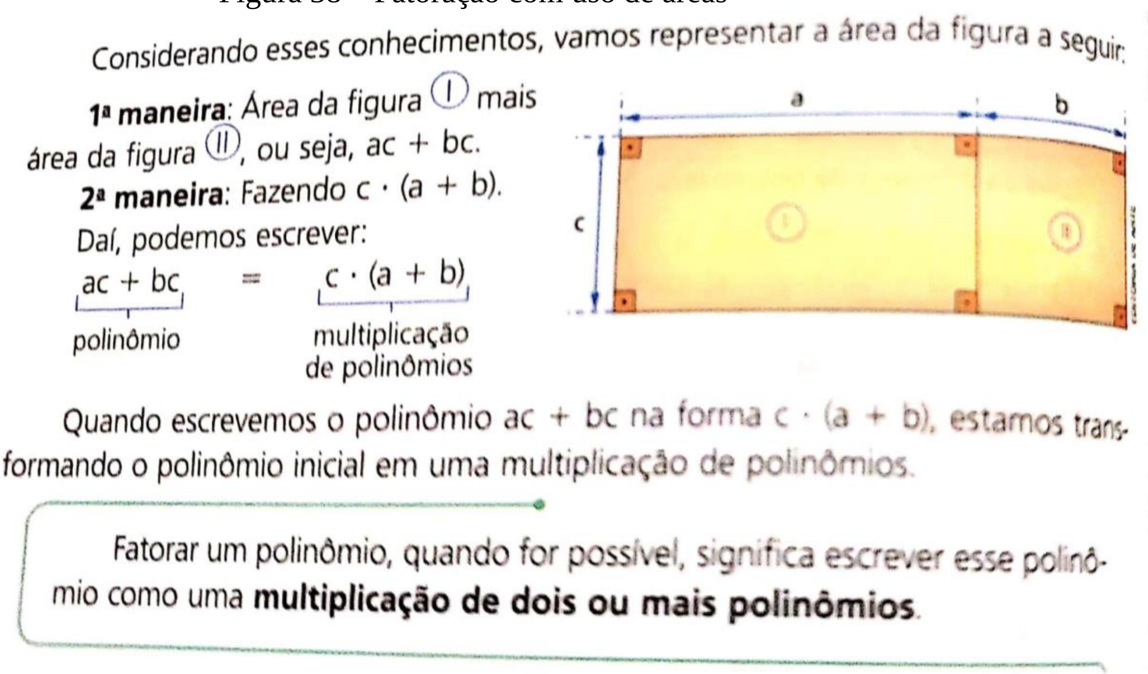
1 Considerando dois segmentos, um de comprimento *x* e outro de comprimento *y*, como se pode calcular a área do quadrado cujo lado mede $(x + y)$?

Usando esses dois segmentos, construímos a representação do quadrado:

Esse quadrado tem como medida do lado $(x + y)$, e sua área, $(x + y)^2$, pode ser expressa pela soma das áreas das figuras que o formam. Veja:

Fonte: Acervo pessoal do autor

Figura 38 – Fatoração com uso de áreas



Considerando esses conhecimentos, vamos representar a área da figura a seguir:

1ª maneira: Área da figura (I) mais área da figura (II), ou seja, $ac + bc$.

2ª maneira: Fazendo $c \cdot (a + b)$.

Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{c \cdot (a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$

Quando escrevemos o polinômio $ac + bc$ na forma $c \cdot (a + b)$, estamos transformando o polinômio inicial em uma multiplicação de polinômios.

Fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma **multiplicação de dois ou mais polinômios**.

Fonte: Acervo pessoal do autor

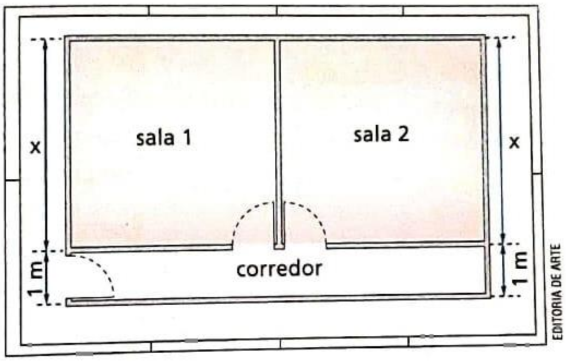
A exploração da álgebra geométrica oferece um recurso visual para a compreensão das técnicas operatórias algébricas. Por outro lado, é possível fazer a crítica em relação ao uso da variável para representar um lado de um retângulo que possui uma medida fixa. Se, por um lado, pode ser um recurso interessante de visualização, por outro, pode-se confundir o estudante ao representar com uma incógnita um lado de medida fixa. O problema é de natureza epistemológica na compreensão da matemática escolar.

A unidade seguinte "Equações do 2º grau" trata da resolução de equações do 2º grau com uma incógnita. Dessa vez há uma preocupação em relacionar os conceitos geométricos apresentados na unidade anterior e também no livro do 8º ano como exemplos de aplicação e também de representação das equações, como é mostrado na Figura 39.

Figura 39 – Apresentação de equações do 2º grau

Conhecendo a equação do 2º grau com uma incógnita

Observe a planta parcial de um escritório.



As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem *x* metros de lado, e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida *x* do lado de cada sala quadrada? De acordo com a figura e os dados do problema, podemos concluir que:

- a área de cada sala é $\mathbf{x^2}$.
- a área do corredor é dada por $\mathbf{1 \cdot 2x}$ ou $\mathbf{2x}$.
- a equação que representa o problema é: $\underbrace{2x^2}_{\text{área das duas salas}} + \underbrace{2x}_{\text{área do corredor}} = 40$

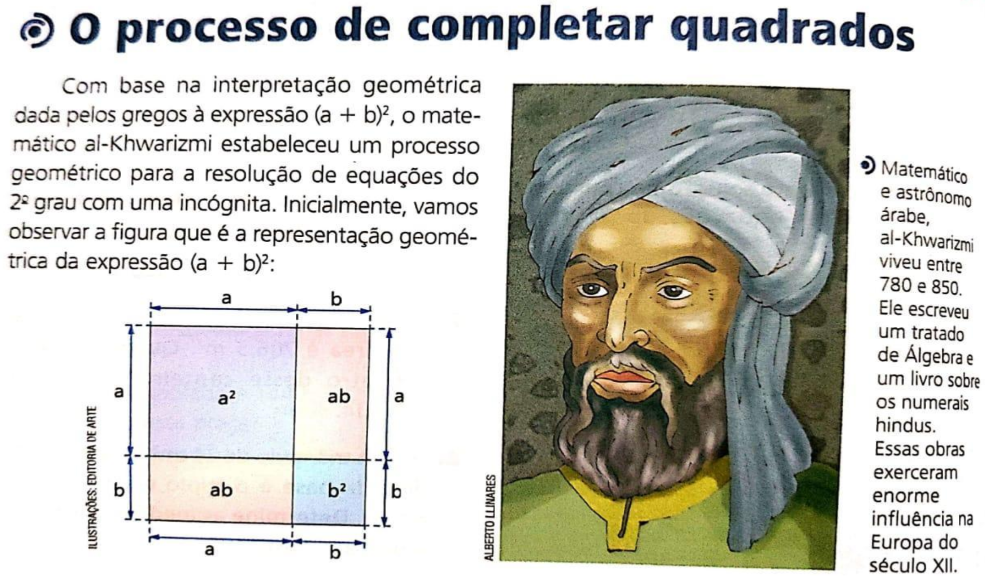
Obtivemos uma equação que não é do 1º grau (que você já sabe resolver), pois existe um termo em que a incógnita *x* se apresenta com expoente 2.

Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita** x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Destaca-se também como a relação com aspectos da história da matemática permeia toda a unidade. As Figuras 40 e 41 mostram dois métodos de resolução, um de *al-Khwarizmi* e outro de *Bhaskara* (que não é a fórmula conhecida por seu nome).

Figura 40 – Processo de *al-Khwarizmi*



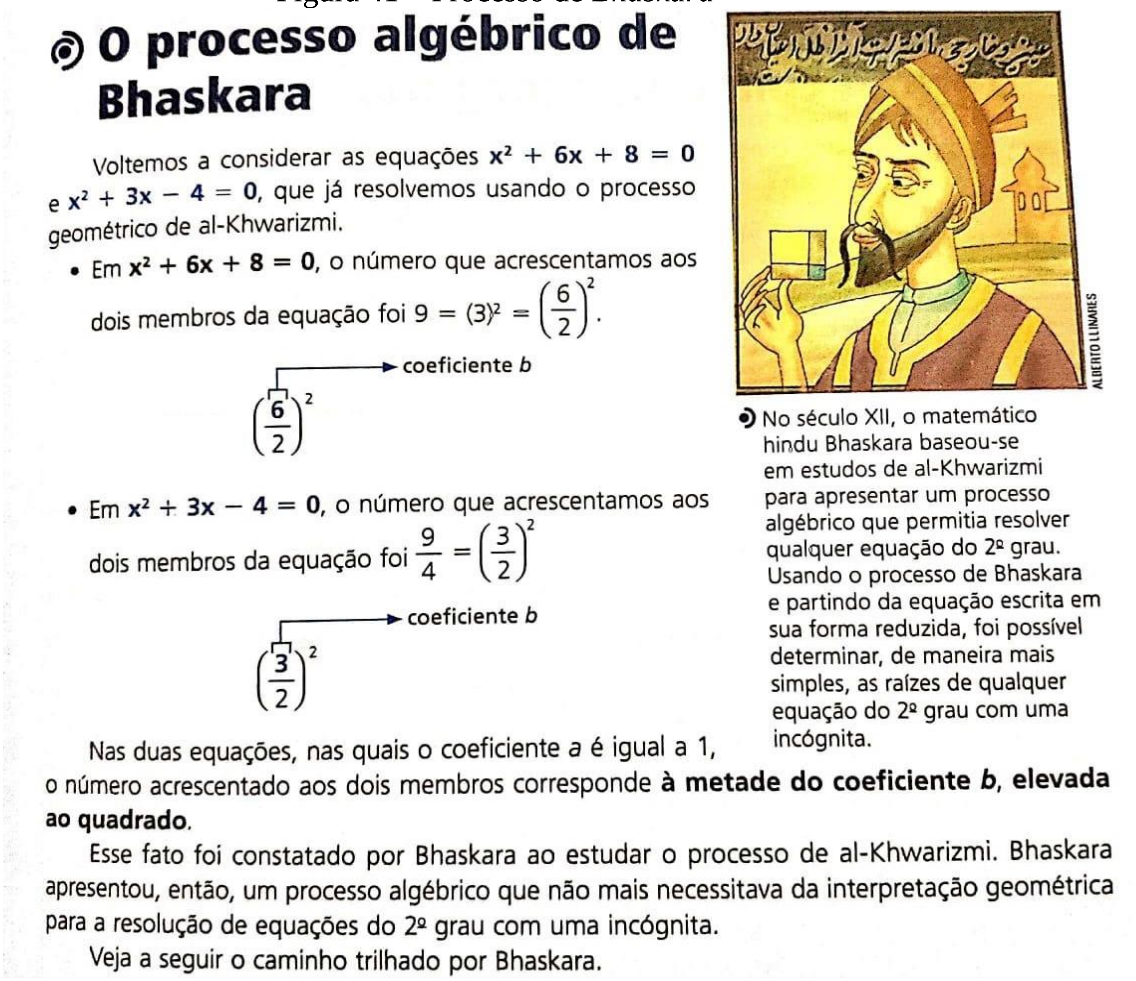
O processo de completar quadrados

Com base na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, o matemático al-Khwarizmi estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita. Inicialmente, vamos observar a figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$:

Matemático e astrônomo árabe, al-Khwarizmi viveu entre 780 e 850. Ele escreveu um tratado de Álgebra e um livro sobre os numerais hindus. Essas obras exerceram enorme influência na Europa do século XII.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Figura 41 – Processo de *Bhaskara*



O processo algébrico de Bhaskara

Voltemos a considerar as equações $\mathbf{x^2 + 6x + 8 = 0}$ e $\mathbf{x^2 + 3x - 4 = 0}$, que já resolvemos usando o processo geométrico de al-Khwarizmi.

- Em $\mathbf{x^2 + 6x + 8 = 0}$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $9 = (3)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{\boxed{6}}{2}\right)^2 \rightarrow \text{coeficiente } b$$

- Em $\mathbf{x^2 + 3x - 4 = 0}$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\boxed{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \text{coeficiente } b$$

No século XII, o matemático hindu Bhaskara baseou-se em estudos de al-Khwarizmi para apresentar um processo algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau. Usando o processo de Bhaskara e partindo da equação escrita em sua forma reduzida, foi possível determinar, de maneira mais simples, as raízes de qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Nas duas equações, nas quais o coeficiente *a* é igual a 1, o número acrescentado aos dois membros corresponde **à metade do coeficiente *b*, elevada ao quadrado**.

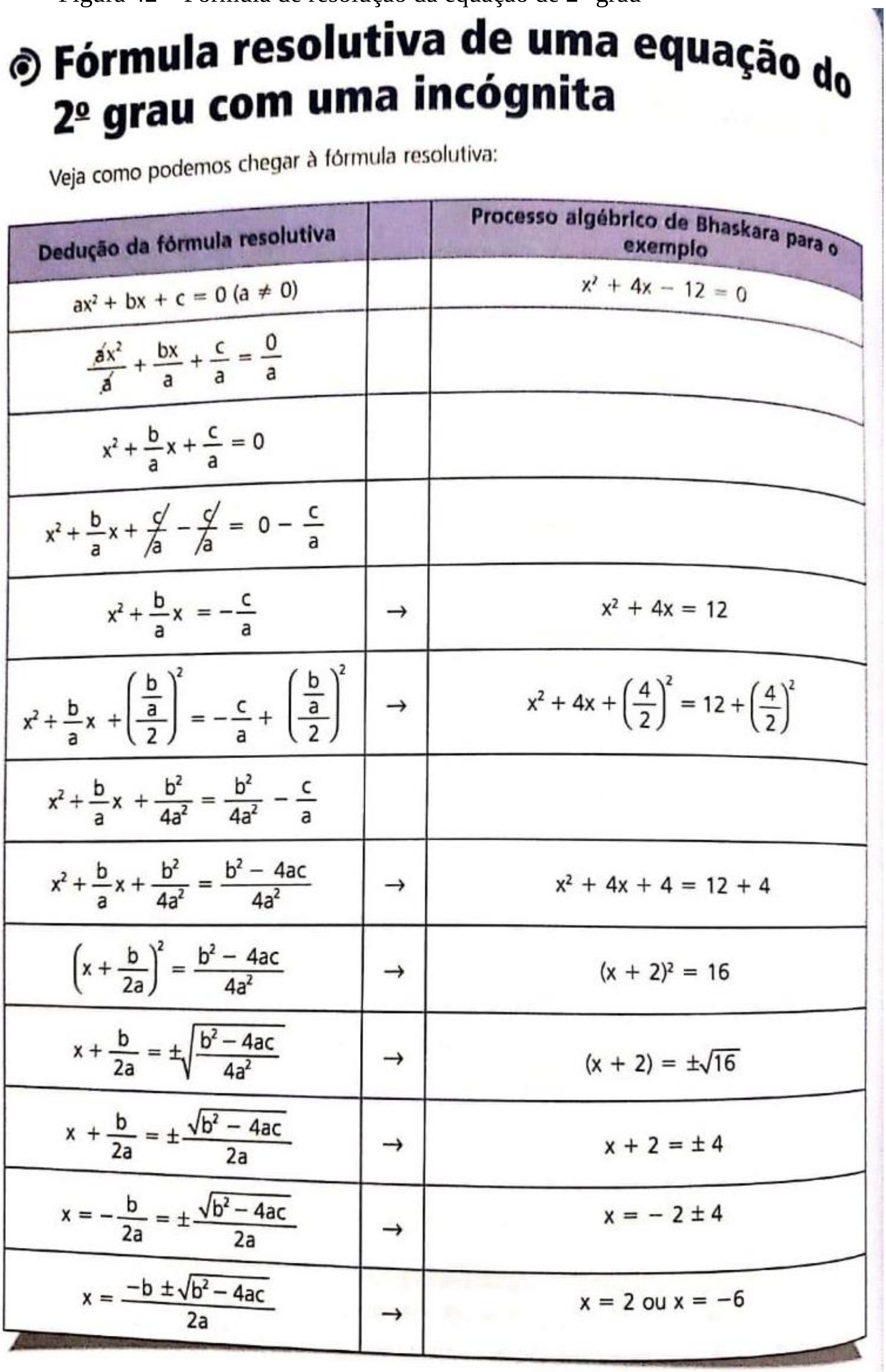
Esse fato foi constatado por Bhaskara ao estudar o processo de al-Khwarizmi. Bhaskara apresentou, então, um processo algébrico que não mais necessitava da interpretação geométrica para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Veja a seguir o caminho trilhado por Bhaskara.

Fonte: Acervo pessoal do autor

Apenas no final da unidade é que a fórmula de resolução da equação de 2º grau é apresentada, esta, inclusive é deduzida a partir de uma generalização do processo usado por *Bhaskara* para a resolução desse tipo de equação, como é possível observar na Figura 42.

Figura 42 – Fórmula de resolução da equação de 2° grau



Fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau com uma incógnita

Veja como podemos chegar à fórmula resolutiva:

Dedução da fórmula resolutiva		Processo algébrico de Bhaskara para o exemplo
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$		$x^2 + 4x - 12 = 0$
$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \cancel{\frac{c}{a}} - \cancel{\frac{c}{a}} = 0 - \frac{c}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$\rightarrow$	$x^2 + 4x = 12$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$	$\rightarrow$	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$\rightarrow$	$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$\rightarrow$	$(x + 2)^2 = 16$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	$\rightarrow$	$(x + 2) = \pm\sqrt{16}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\rightarrow$	$x + 2 = \pm 4$
$x = -\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\rightarrow$	$x = -2 \pm 4$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\rightarrow$	$x = 2$ ou $x = -6$

Fonte: Acervo pessoal do autor

A opção por utilizar figuras geométricas e, também, os métodos usados historicamente, adaptados para uma linguagem simbólica, são alternativas para o trabalho com fatoração e equações do 2º grau, uma vez que permitem uma compreensão dos conceitos de uma forma mais abrangente, diferentemente de escolhas feitas na abordagem de outros conceitos pela coleção.

4.4 ALGUMAS CONCLUSÕES

A partir do trabalho de análise e leitura sistemática das seções da coleção que abordam os objetos de conhecimento presentes na unidade temática de Álgebra da BNCC, podemos extrair algumas conclusões a respeito de escolhas feitas pela coleção, bem como pontuar como algumas dessas escolhas poderiam ser diferentes.

Na categoria de Razões e proporções, principalmente nas partes iniciais, em que seriam os primeiros contatos dos alunos com o tema, há um excesso de enfoque em questões operacionais e técnicas de resolução de proporções, que acabam por não serem boas ferramentas para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Ao longo dos outros livros, a coleção apresenta uma variedade maior de exemplos que podem ser mais significativos no desenvolvimento desse tipo de pensamento, inclusive, dedicando-se bastante em relacionar razões e proporções com a geometria.

Na categoria de Padrões e funções, como mostramos anteriormente, há uma certa negligência no trabalho com padrões e sequências, com poucos exemplos e também com reduzida exploração das potencialidades desses objetos de conhecimento no desenvolvimento de ideias como a de variável, a generalização, a criação de conjecturas e a articulação entre as diversas linguagens possíveis para representação de padrões. Mesmo ao definir o que são funções, no 9º ano, a coleção deixa de usar a sequências como um exemplo, apesar de haver uma variedade de exemplos interessantes em diversos contextos.

Na categoria de Expressões e equações a coleção deixa de apresentar situações que priorizam o desenvolvimento do pensamento relacional que poderiam contribuir para uma primeira abordagem das incógnitas e das equações, bem como desenvolver melhor as propriedades da igualdade. Por alguns momentos também há um excesso de formalidades e pouca articulação entre linguagem algébrica, representação gráfica e linguagem natural, como no caso dos sistemas lineares. No entanto, em outros momentos há uma preocupação em relacionar os conceitos algébricos à geometria e usar a história da matemática como uma forma de desenvolver alguns conceitos, como é feito com as equações do segundo grau no 9º ano. A abordagem histórica possibilita significar os conceitos algébricos do ponto de vista das necessidades históricas que levaram à construção de regras e justificativas para a aplicação dos conceitos algébricos.

Encerrado o trabalho de análise, no capítulo a seguir tecemos nossas considerações finais a respeito da pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa buscamos investigar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos propostos em uma coleção de livros didáticos aprovada pelo PNLD. Para tanto, nos debruçamos na análise de uma coleção de livro didático em todas as suas seções que exploravam o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. O manual do professor, bem como a BNCC e o guia de avaliação do livro didático do PNLD ofereceram o suporte para a nossa análise. Para além disso, o campo de investigação em Educação Algébrica, na Educação Matemática no Ensino Fundamental II, possibilitou-nos reconhecer que a coleção, embora traga algumas possibilidades de conexões do conteúdo algébrico com problemas e ações cotidianas, sua abordagem na coleção esteve, na maioria das vezes, restrita à exploração operatória e técnica da álgebra. Há pouca preocupação em desenvolver o pensamento e a linguagem algébricos, sendo a linguagem tratada como algo pronto, com escassa articulação entre a língua materna e a linguagem matemática. Finalmente, identificamos algumas situações que nos pareceram "forçadas" para a abordagem de determinados conteúdos presentes na BNCC.

A partir deste trabalho de pesquisa pude me aprofundar nas discussões mais atuais a respeito da educação algébrica, bem como melhor compreender como é realizada a pesquisa no campo da Educação Matemática. Tenho certeza que o desenvolvimento desta investigação contribuiu positivamente para minha formação como professor de matemática e pesquisador. Alguns frutos deste trabalho já foram colhidos por mim na prática. Parte da pesquisa foi elaborada concomitantemente com a disciplina de Estágio Supervisionado II, em que por três semanas, estive (no formato de ensino remoto) com as turmas de sétimo ano do Colégio de Aplicação da UFSC trabalhando o conteúdo de Razão e Proporção. Posso afirmar que a experiência em sala de aula deu sentido à vários momentos da graduação, em especial aos momentos em que tive contato com a pesquisa em Educação Matemática.

Esta pesquisa também abre portas para trabalhos futuros a respeito de temas que não foram aprofundados aqui por fugirem um pouco do escopo e dos objetivos do presente trabalho. Comento alguns deles a seguir:

- A utilização do livro didático em sala de aula;
- A BNCC e a elaboração de programas curriculares;
- O desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de uma concepção de Álgebra que comece desde os anos iniciais, a chamada early algebra.

REFERÊNCIAS

BIGODE, Antonio José Lopes. Base, que Base?: o caso da Matemática. In: CÁSSIO, Fernando; CATTELLI JUNIOR, Roberto (org.). *Educação é a Base:* 23 educadores discutem a BNCC. São Paulo: Ação Educativa, 2019. p. 123-267.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal For Research In Mathematics Education*, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Bütcher Ltda, 1974.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BUSH, William S.. Mathematics Textbooks in Teacher Education. *School Science And Mathematics*, [S.L.], v. 87, n. 7, p. 558-564, nov. 1987. Wiley. http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1987.tb11745.x.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 30 dez. 2009.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Portugal - Gradiva, 1984.

CÁSSIO, Fernando. *Participação e participacionismo na construção da Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: <https://www.nexojornal.com.br/ensaio/2017/Participa%C3%A7%C3%A3o-e-participacionismo-na-constru%C3%A7%C3%A3o-da-Base-Nacional-Comum-Curricular#:~:text=Adotado%20como%20estrat%C3%A9gia%20de%20legitima%C3%A7%C3%A3o,fingem%20que%20implementam%20o%20curr%C3%ADculo.>. Acesso em: 06 jun. 2020.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FNDE, 2019. Guia PNLD 2020. Disponível em: < https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/13410-guia-pnld-2020 >. Acesso em: 04/11/2020.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. *A Conquista da Matemática.* São Paulo: FTD, 2020.

GRANDO, Regina Célia; PENHA, Paulo. *Epistemologia e Prática do ensino de Álgebra.* Pós-graduação em ensino de Matemática. FAE: Curitiba, PR, 2010.

JUNGBLUTH, Adriana. *Álgebra no currículo de matemática dos Anos Inciais:* e agora?. 2020. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.

KAPUT, James J. *Teaching and learning a new Algebra with understanding*. (consultado em 10 de Setembro de 2020 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf)

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* 4. ed. Campinas, Sp: Papirus, 2001. 176 p.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo. *Pro-posições,* vol 3, no. 1 [7], p. 39-54, 1992.

PONTE, João Pedro.; BRANCO, Neusa.; MATOS, Ana. *A Álgebra no ensino básico.* Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, Lisboa, 2009.

RADFORD, Luis. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pna*, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, jan. 2010.

SCARLASSARI, Nathalia Tornisiello. *Um estudo de dificuldades ao aprender algebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental.* 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2007.

SILVA, Tomaz Tadeu da. *Documentos de identidade:* uma introdução às teorias do currículo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SOUSA, Maria do Carmo. *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:* um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP/SP, Campinas.

TRIVILIN, Linéia Ruiz; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. *Bolema:* Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 29, n. 51, p. 38-59, abr. 2015. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03.

WALLE, John A. Van de. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009