



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Luiz Guilherme Luttke Gonçalves da Silva

Cálculo de forças magnéticas e tensões mecânicas por elementos finitos em estruturas com ímãs permanentes: aplicação à máquina de fluxo axial

Florianópolis
2020

Luiz Guilherme Luttke Gonçalves da Silva

Cálculo de forças magnéticas e tensões mecânicas por elementos finitos em estruturas com ímãs permanentes: aplicação à máquina de fluxo axial

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Laurent Didier Bernard, Dr.

Coorientador: Prof. Nelson Sadowski, Dr.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Luiz Guilherme Luttke Gonçalves da
Cálculo de forças magnéticas e tensões mecânicas por
elementos finitos em estruturas com ímãs permanentes:
aplicação à máquina de fluxo axial / Luiz Guilherme Luttke
Gonçalves da Silva ; orientador, Laurent Didier Bernard,
coorientador, Nelson Sadowski, 2020.
85 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Acoplamento magnetoelástico.
3. Tensor de Maxwell. 4. Máquina de fluxo axial. I. Didier
Bernard, Laurent. II. Sadowski, Nelson. III. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica. IV. Título.

Luiz Guilherme Luttke Gonçalves da Silva

Cálculo de forças magnéticas e tensões mecânicas por elementos finitos em estruturas com ímãs permanentes: aplicação à máquina de fluxo axial

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Laurent Daniel, Dr.
CentraleSupélec

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Laurent Didier Bernard, Dr.
Orientador

Florianópolis, 30 de setembro de 2020.

Este trabalho é dedicado aos meus pais Celso e Bernadete, meu irmão Andrey e minha querida Paula.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Laurent Bernard por todo apoio no desenvolvimento deste trabalho e por sempre ser solícito para auxiliar na resolução de minhas dúvidas, especialmente nesse período de pandemia, e ao professor Nelson Sadowski por aceitar ser coorientador.

Aos professores João Pedro Assumpção Bastos e Laurent Daniel, por aceitarem participar da banca examinadora desse trabalho.

Aos professores do GRUCAD, por todo conhecimento passado nas disciplinas.

Aos colegas de laboratório, pela amizade e convivência harmoniosa.

À minha família, Celso, Bernadete e Andrey por todo apoio e suporte em todas as minhas fases educacionais. Não posso expressar em palavras minhas gratidão por tê-los em minha vida.

À minha namorada Paula, por toda resiliência, paciência e apoio nesse período de mestrado.

E por fim, à todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

*“... e até mesmo objetos perdidos há muito tempo
apareciam onde mais tinham sido procurados
e se arrastavam em debandada turbulenta atrás dos ferros mágicos de Melquíades.
“As coisas têm vida própria” - apregoava o cigano com sotaque áspero -
“é só questão de despertar suas almas.”
José Arcádio Buendía, cuja desaforada imaginação
ia sempre mais longe que o engenho da natureza,
e muito além do milagre e da magia,
pensou que era possível servir-se daquela invenção inútil
para desentranhar ouro da terra.
Melquíades, que era um homem honrando, avisou: “Para isso, não serve.” ... ”
(Gabriel García Márquez, Cem anos de solidão, 1967)*

RESUMO

As propriedades magnéticas e elásticas são, geralmente, fortemente relacionadas em materiais magnéticos. Esse comportamento acoplado tem consequências sobre a modelagem e o cálculo de forças e tensões mecânicas de origem magnética em dispositivos eletromagnéticos. Por meio da aplicação do princípio das potências virtuais e conceitos de mecânica dos meios contínuos, diversas expressões do tensor de Maxwell são obtidas baseadas em simples modelos matemáticos do comportamento da magnetização em relação à deformação. Em particular, a modelagem de ímãs permanentes, que não se tem um consenso na literatura, é analisada em detalhe. Uma máquina de fluxo axial com ímãs permanentes é simulada em um *software* de elementos finitos por meio de uma formulação magnetostática, de forma que os campos resultantes são utilizados para o cálculo de forças locais, aplicando os modelos de tensor de Maxwell, considerando um acoplamento magnetoelástico parcial, ou seja, o efeito das tensões mecânicas sobre o comportamento magnético é desprezado. A metodologia e as análises apresentadas podem ser úteis para o cálculo de grandezas mecânicas, como tensões mecânicas induzidas por forças magnéticas, de forma a auxiliar no projeto de dispositivos eletromagnéticos.

Palavras-chave: Acoplamento magnetoelástico. Tensor de Maxwell. Máquina de fluxo axial.

ABSTRACT

Magnetic and elastic properties are, generally, strongly related in magnetic materials. This coupled behavior has consequences on the modeling and calculation of magnetic forces and resulting stress in electromagnetic devices. Through the application of the virtual power principle and concepts of continuum mechanics, several expressions of Maxwell stress tensor are obtained based on mathematical models that describe the relation between magnetization and deformation. In particular, the modeling of permanent magnets, which does not have a consensus in the literature, is analyzed in detail. An axial flux permanent magnet machine is simulated in a finite element software by application of a magnetostatics formulation, so that the resulting magnetic fields are used to calculate local forces, applying Maxwell stress tensor models, considering a partial magnetoelastic coupling, that is, the effects of stresses on magnetic behavior are ignored. The methodology and analyses presented can be useful to the calculation of mechanical quantities, such as stresses induced by magnetic forces, in order to help the design of electromagnetic devices.

Keywords: Magnetoelastic coupling. Maxwell stress tensor. Axial flux machine.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Movimento de um meio contínuo.	24
Figura 2 – Deformação na vizinhança de uma partícula.	25
Figura 3 – Decomposição polar em elemento circular.	26
Figura 4 – Evento caracterizado por dois observadores.	32
Figura 5 – Componentes do tensor de tensões em coordenadas cilíndricas. . .	33
Figura 6 – Máquina AFPM.	47
Figura 7 – Fluxo magnético na máquina AFPM.	48
Figura 8 – Corte no raio médio da máquina.	48
Figura 9 – Cálculo da força total em uma máquina sem ranhuras.	49
Figura 10 – Superfície S_e na máquina AFPM.	50
Figura 11 – Superfície S_{pm} nos ímãs máquina AFPM.	51
Figura 12 – Curva de desmagnetização de um ímã permanente.	54
Figura 13 – Indução magnética para o caso de dois ímãs.	59
Figura 14 – Forças nodais nos dois ímãs.	60
Figura 15 – Corte 2D no raio médio da máquina.	61
Figura 16 – Mapa de indução no caso 2D.	62
Figura 17 – Geometria 3D da máquina AFPM TORUS.	62
Figura 18 – Mapa de indução no caso 3D para uma vista a partir do raio médio. .	63
Figura 19 – $ \vec{B} $ no caso 2D (simulação).	63
Figura 20 – $ \vec{B} $ no caso 2D (referência).	63
Figura 21 – $ \vec{B} $ no entreferro para o caso 3D.	63
Figura 22 – Geometria e indução remanente do ímã permanente.	64
Figura 23 – Forças nodais no ímã da máquina para uma vista a partir do raio médio.	64
Figura 24 – Forças nodais no rotor para uma vista a partir do raio médio.	65
Figura 25 – Componente σ_{zz} do tensor de tensões no rotor.	66
Figura 26 – Componente σ_{rr} do tensor de tensões no rotor.	67
Figura 27 – Componente $\sigma_{\theta z}$ do tensor de tensões no rotor.	67
Figura 28 – \vec{F}^N (setas) e componente z (cor) para σ_M^0 no aço elétrico do estator. .	68
Figura 29 – Componente σ_{zz} do tensor de tensões no estator.	68
Figura 30 – Componente σ_{rr} do tensor de tensões no aço elétrico do estator. . .	69
Figura 31 – Componente $\sigma_{\theta z}$ do tensor de tensões no estator.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da máquina.	49
Tabela 2 – Força global para diferentes densidades de malha.	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SMC	<i>Soft magnetic compound</i> ou Compósito magnético mole
2D	Duas dimensões
TORUS	<i>Toroidally wound internal stator</i> ou Enrolamento toroidal com estator interno
AFPM	<i>Axial flux permanent magnet</i> ou Fluxo axial com ímãs permanentes
MEF	Método dos elementos finitos
3D	Três dimensões

LISTA DE SÍMBOLOS

S_{pm}	Área do ímã permanente [m ²]
\vec{E}	Campo elétrico [V/m]
\vec{H}	Campo magnético [A/m]
\vec{H}_c	Campo magnético coercitivo [A/m]
λ e μ_{sh}	Coefficientes de Lamé [Pa]
ν_p	Coefficiente de Poisson
σ_c	Condutividade elétrica [S/m]
ϕ	Densidade de coenergia magnética [J/m ³]
\vec{J}	Densidade de corrente [A/m ²]
\vec{J}_s	Densidade de corrente imposta [A/m ²]
ψ	Densidade de energia magnética [J/m ³]
ψ^{me}	Densidade de energia magnetoelástica [J/m ³]
\vec{f}_{mag}	Densidade de força magnética [N/m ³]
\vec{f}_{int}	Densidade de forças internas [N/m ³]
J	Determinante do Jacobiano
$\vec{\sigma}_n$	Densidade superficial de força [N/m ²]
D_o	Diâmetro externo da máquina [m]
D_i	Diâmetro interno da máquina [m]
$d\vec{x}$ e $d\vec{x}_t$	Elemento infinitesimal de linha na configuração de referência e atual [m]
$d\vec{A}$ e $d\vec{A}_t$	Elemento infinitesimal de área na configuração de referência e atual [m ²]
$d\Omega$ e $d\Omega_t$	Elemento infinitesimal de volume na configuração de referência e atual [m ³]
Ψ^e	Energia elástica [J]
Ψ	Energia magnética [J]

Ψ^{me}	Energia magneto-elástica [J]
\vec{F}	Força global ou total [N]
\vec{F}^N	Força local ou nodal [N]
χ e χ^{-1}	Função deformação do corpo e função inversa
\vec{u}'	Função teste para o deslocamento
v	Função teste para o potencial escalar elétrico
\vec{a}	Função teste para o potencial vetor magnético
\vec{B}	Indução magnética [T]
\vec{B}_{mg}	Indução magnética de pico no entreferro [T]
\vec{B}_r	Indução magnética remanente [T]
t	Instante de tempo [s]
\vec{M}	Magnetização [A/m]
E	Módulo de Young [Pa]
μ	Permeabilidade magnética [H/m]
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo [H/m]
μ_{rec}	Permeabilidade magnética de recuo [H/m]
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
μ_{rrec}	Permeabilidade magnética relativa de recuo
P e p	Ponto material na configuração de referência e configuração atual
\vec{A}	Potencial vetor magnético [Wb/m]
α_i	Relação entre passo polar e passo do ímã
ν	Relutividade magnética [m/H]
ν_0	Relutividade magnética no vácuo [m/H]
\vec{R}	Resíduo vetorial
χ	Susceptibilidade magnética
$\partial\Omega$ e $\partial\Omega_t$	Superfície material na configuração de referência e configuração atual [m ²]

σ_M	Tensor de Maxwell [Pa]
C	Tensor de rigidez [Pa]
R e U	Tensor de rotação e de alongamento
σ	Tensor de tensões mecânicas [Pa]
H	Tensor gradiente de deslocamento
F	Tensor gradiente de deformação
L	Tensor gradiente de velocidade
\mathbb{I}	Tensor identidade
ϵ e r	Tensor infinitesimal de deformação e de rotação
d e w	Tensor infinitesimal de taxa de deformação e de rotação [s ⁻¹]
δW	Trabalho virtual [J]
δ	Varição infinitesimal de um vetor ou tensor
$\vec{\omega}$	Velocidade angular [rad/s]
\vec{v}	Velocidade de deslocamento ponto material [m/s]
\vec{u}	Deslocamento do ponto material [m]
\vec{x} e \vec{x}_t	Vetor posição na configuração de referência e configuração atual [m]
Ω e Ω_t	Volume material na configuração de referência e configuração atual [m ³]
$\det A$	Operador determinante da matriz A
div	Operador divergente
$\nabla_s \vec{a}$	Operador gradiente simétrico do vetor \vec{a}
A^{-T}	Operador inversa da transposta da matriz A
$\ A\ $	Operador norma de um tensor A
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Operador produto escalar entre os vetores \vec{a} e \vec{b}
$A : B$	Operador produto bi-contráido entre os tensores A e B
$\vec{a} \times \vec{b}$	Operador produto vetorial entre os vetores \vec{a} e \vec{b}

$\vec{a} \otimes \vec{b}$	Operador produto tensorial entre os vetores \vec{a} e \vec{b}
rot	Operador rotacional
$tr A$	Operador traço da matriz A
A^T	Operador transposto da matriz A

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	OBJETIVO GERAL	19
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2	TEORIA MAGNÉTICA NOS MEIOS CONTÍNUOS	22
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE O CÁLCULO DE FORÇAS	22
2.2	NOÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS	23
2.2.1	Movimento e deformação	23
2.2.2	Tensor gradiente de deformação	24
2.2.2.1	Transformação de área	25
2.2.2.2	Transformação de volume	25
2.2.3	Decomposição polar	25
2.2.4	Deformações infinitesimais	26
2.2.5	Taxas de deformação	27
2.2.6	Derivadas materiais	29
2.2.7	Indiferença de referencial	31
2.2.8	Elasticidade linear isotrópica	32
2.2.9	Equilíbrio	34
2.3	TENSOR DE MAXWELL	35
2.3.1	Expressão geral do tensor de Maxwell	35
2.3.2	Sobre o termo magnetostritivo	39
2.3.3	Tensor de Maxwell para ímãs permanentes	40
2.3.3.1	Modelo de \vec{M} independente da deformação	41
2.3.3.2	Modelo de circulação constante de \vec{M}	41
2.3.3.3	Modelo de fluxo constante de \vec{M}	42
2.3.3.4	Modelo de momento magnético constante	42
2.3.4	Densidade de força a partir do tensor de Maxwell	43
3	MÁQUINA DE FLUXO AXIAL COM ÍMÃS PERMANENTES	47
3.1	MÁQUINA AFPM TORUS	47
3.2	TOPOLOGIA SIMULADA	48
3.3	TENSÕES MECÂNICAS E FORÇAS EM MÁQUINAS AFPM	49
4	FORMULAÇÕES	53
4.1	PROBLEMA MAGNETOSTÁTICO COM FORMULAÇÃO EM POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO	53
4.2	PROBLEMA ELETRODINÂMICO COM FORMULAÇÃO EM POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO	55
4.3	PROBLEMA ELÁSTICO COM FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTO	57

4.4	FORÇAS NODAIS E TENSOR DE MAXWELL	58
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	59
5.1	FORÇAS NODAIS EM ÍMÃS PERMANENTES	59
5.2	SIMULAÇÃO MAGNÉTICA DA MÁQUINA AFPM	61
5.3	FORÇAS NODAIS NO ÍMÃ DA MÁQUINA AFPM	64
5.4	FORÇAS NODAIS E TENSÕES MECÂNICAS NA MÁQUINA AFPM	65
5.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
6	CONCLUSÕES	71
	REFERÊNCIAS	72
	ANEXO A – CÁLCULO DE FORÇAS MAGNÉTICAS	77
A.1	RELAÇÃO LINEAR E RELUTIVIDADE ANISOTRÓPICA	79
A.2	RELAÇÃO NÃO-LINEAR E NÃO HISTERÉTICA	81
A.3	FORÇA EM ÍMÃS PERMANENTES	82
A.4	DENSIDADE DE FORÇA CONSIDERANDO A MAGNETOSTRIÇÃO NA MAGNETIZAÇÃO	84

1 INTRODUÇÃO

As propriedades magnéticas e elásticas de um material ferromagnético são dependentes, de forma que o acoplamento entre ambas é chamado de magnetoelástico. Quando um material ferromagnético é submetido a um campo magnético, ele se deforma. Essa deformação é associada a dois fenômenos distintos: às forças de origem magnética, que são diretamente relacionadas à geometria da amostra, de onde vem o nome efeito de forma, e a deformação de Joule, que depende do estado magnético local do material, de maneira que a deformação e magnetização podem ser relacionadas por uma lei de comportamento. O segundo fenômeno é chamado de magnetostricção (DANIEL, 2003).

A deformação por magnetostricção é relacionada com o processo de magnetização em um material ferromagnético (movimento das paredes dos domínios magnéticos e rotação), dessa maneira, possui um comportamento não-linear. O fenômeno simétrico, ou seja, os efeitos das tensões mecânicas em propriedades magnéticas é chamado efeito Villari (ou magnetostricção inversa), que resulta em alterações na permeabilidade e no formato do laço de histerese (CULLITY; GRAHAM, 2008).

Para se determinar as tensões mecânicas em estruturas magnéticas, onde podem existir o efeito de forma e magnetostricção, uma opção é primeiramente realizar o cálculo das forças locais de origem magnética. As principais abordagens utilizadas para o cálculo da força são o princípio dos trabalhos virtuais e o tensor de Maxwell, de modo que ambos os métodos podem ser aplicados para o caso de forças globais ou locais. Em Ren e Razek (1992) se tem a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais na malha de elementos finitos para o cálculo de forças nodais, de forma que a equivalência com o cálculo utilizando o tensor de Maxwell é observada em Kameari (1993).

Quando se considera uma estrutura com ímãs permanentes, diversos modelos matemáticos a respeito do comportamento da magnetização em relação à deformação são utilizados, conforme Ren e Razek (1994), Henrotte e Hameyer (2004) e Bossavit (2004), de modo que se observam valores próximos de força global para os diferentes modelos, mas diferentes distribuições de força local. Contudo, resultados experimentais são escassos.

O acoplamento magnetoelástico parcial consiste em considerar as forças magnéticas locais como forças externas em um cálculo de elasticidade, de maneira que resulta em tensões mecânicas. Nesse caso, não são consideradas as influências das tensões mecânicas no comportamento magnético.

O interesse no cálculo de forças magnéticas em máquinas elétricas pode ser dividido em forças globais, para se obter o torque agindo em partes móveis, por exemplo, e forças locais, para análise de tensões mecânicas e vibrações nos materiais

magnéticos.

A máquina de fluxo axial com ímãs permanentes tornou-se uma alternativa para aplicações como veículos elétricos e geradores de pequeno e médio porte devido à vantagens como maior densidade de torque, maior eficiência de operação e construção compacta, em comparação com a máquina de fluxo radial com ímãs permanentes. Dentre os materiais utilizados para a fabricação dos núcleos magnéticos da máquina, se tem as lâminas de aço silício de grão não-orientado e material compósito magnético mole (SMC). As principais vantagens na utilização do SMC são maior facilidade na construção de núcleos magnéticos com formatos complicados e comportamento magnético isotrópico 3D. Contudo, o SMC possui menor permeabilidade quando comparado ao aço laminado e baixa resistência mecânica, especialmente quando utilizado em uma aplicação de baixa densidade de massa (GIERAS; WANG; KAMPER, 2008), (LIU *et al.*, 2017).

Outro método de fabricação em desenvolvimento é a fabricação aditiva, que permite a impressão de materiais para núcleos magnéticos, o que facilita a produção de geometrias complexas sem a necessidade de utilização de moldes, contudo, ainda se tem poucas informações na literatura sobre o projeto de componentes e análise estrutural (HAYES *et al.*, 2018). Esse é o foco do projeto Capes-COFECUB Fanopro entre os laboratórios GRUCAD, LAPLACE e GEEPS, cujo objetivo é o projeto e construção de motores de fluxo axial utilizando materiais não convencionais, como o SMC, e processos de fabricação aditiva, analisando aspectos magnéticos e mecânicos.

Além da análise de tensões mecânicas nos materiais magnéticos da máquina de fluxo axial com ímãs permanentes, o cálculo mecânico é importante na determinação das forças axiais de atração entre partes da máquina, na influência das forças centrífugas na resistência mecânica de ímãs permanentes para aplicações de alta velocidade e na análise de vibração (GIERAS; WANG; KAMPER, 2008), (KUMAR; LIPO; KWON, 2016), (PARK; KIM; KIM, 2014).

1.1 OBJETIVO GERAL

Avaliar as forças e tensões mecânicas de origem magnética em estruturas com ímãs permanentes e em particular em máquinas de fluxo axial. Como não existe um consenso sobre a modelagem magnetoelástica dos ímãs permanentes, diferentes opções são consideradas e formuladas de maneira a facilitar comparações.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar os principais métodos de cálculo de forças magnéticas locais.
- Sintetizar os conceitos de mecânica dos meios contínuos necessários para a formulação do problema magnetoelástico.

- Obter expressões do tensor de Maxwell para diferentes modelos matemáticos de comportamento da magnetização em relação à deformação.
- Implementar o cálculo de forças nodais a partir do tensor de Maxwell em ferramentas de simulação por elementos finitos.
- Calcular as forças nodais sobre uma geometria simples e comparar os diferentes modelos.
- Calcular as forças nodais e tensões mecânicas induzidas em uma máquina de fluxo axial com ímãs permanentes.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Os principais métodos utilizados para o cálculo de forças magnéticas locais são o princípio dos trabalhos virtuais e o tensor de Maxwell, de forma que ambas as abordagens são teoricamente equivalentes. A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais pode resultar de forma direta em expressões de densidade de força, como em Bossavit (2004) e Bossavit (2014), ou no tensor de Maxwell, como em Henrotte e Hameyer (2007), de modo que em comum nos cálculos, se tem a utilização de conceitos de mecânica dos meios contínuos.

Dessa maneira, no capítulo 2 são apresentados conceitos de mecânica dos meios contínuos que são utilizados para o cálculo do tensor de Maxwell por meio da aplicação do princípio das potências virtuais, em uma abordagem que combina definições empregadas em Bossavit (2016), como o princípio de indiferença de referencial, e Henrotte e Hameyer (2007), as derivadas materiais, para se ter um tratamento vetorial. Para a utilização de derivadas materiais, é necessário definir o comportamento da magnetização em relação à deformação, assim, diferentes expressões do tensor de Maxwell são obtidas e comparadas com expressões da literatura.

No capítulo 3 é apresentado um breve resumo sobre as máquinas de fluxo axial com ímãs permanentes (AFPM), com principal foco na topologia de enrolamento toroidal e estator interno (TORUS), e são abordados aspectos da influência da tensão mecânica na máquina. A simulação magnética pode ser aproximada em 2D utilizando o raio médio da máquina, contudo, devido às condições de contorno para a simulação mecânica, é necessário a simulação da geometria em 3D. Dessa maneira, no capítulo 4 são apresentadas as formulações na forma fraca para serem aplicadas em um *software* de elementos finitos. Como na abordagem utilizada se faz um acoplamento parcial, inicialmente é realizada a simulação magnética, cujos campos resultantes são empregados para o cálculo das forças nodais por meio do tensor de Maxwell, as quais são inseridas como termo fonte no cálculo de elasticidade isotrópica linear.

No capítulo 5 são realizadas as simulações numéricas por elementos finitos. Um caso inicial consiste de uma configuração com dois ímãs permanentes com entorno de ar, no qual é realizado o cálculo magnético e de forças nodais para as diferentes expressões de tensor de Maxwell obtidas no capítulo 2. Na sequência, é realizada a simulação magnética de uma máquina AFPM TORUS com parâmetros descritos em Moradi e Darabi (2012), e a simulação mecânica, de modo que se obtém as forças nodais e a tensão mecânica de origem magnética.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 TEORIA MAGNÉTICA NOS MEIOS CONTÍNUOS

Inicialmente é realizada a revisão bibliográfica sobre os métodos de cálculo de forças nodais. Como na maioria dos trabalhos se tem a aplicação de conceitos de mecânica dos meios contínuos, na sequência são abordados esses conceitos, os quais são utilizados para o cálculo de expressões de tensores de Maxwell por meio da aplicação do princípio das potências virtuais.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE O CÁLCULO DE FORÇAS

A modelagem matemática das forças magnéticas locais pode ser feita principalmente por meio do princípio dos trabalhos virtuais ou do tensor de Maxwell. Em Ren e Razek (1992), a força é calculada em nível local por meio da derivada da energia (ou coenergia) magnética em relação a um parâmetro de configuração, mantendo o fluxo de indução (ou circulação de campo magnético) constante em elementos de face (ou aresta) e a derivada local do Jacobiano, considerando que algum campo vetorial (campo magnético, indução ou potencial vetor magnético) que descreva a situação magnética é calculado previamente, para uma relação constitutiva linear do material magnético. Em Bossavit (1992), o campo de forças é calculado utilizando o princípio dos trabalhos virtuais em elementos de aresta e conceitos de geometria diferencial.

Para o caso de ímãs permanentes, em Ren e Razek (1994) a modelagem é feita utilizando duas formulações: considerando a magnetização em termos de sua circulação ao longo da aresta, e a indução remanente em termos do fluxo através da face. A força local é calculada pela derivada da energia (ou coenergia) para os fluxos de indução e indução remanente constantes (ou as circulações de magnetização e campo magnético constantes). A simulação numérica compara os dois modelos, os quais resultam em orientações diferentes de força local, mas em valores próximos de força global. A influência da escolha de referência de energia, que pode resultar em diferentes distribuições de forças locais em ímãs permanentes, é observada em Ren e Razek (1994), De Medeiros, Reyne, Meunier e Yonnet (1998) e Fu *et al.* (2004).

Em Bossavit (2004), utilizando geometria diferencial e o princípio das potências virtuais, a densidade de força em ímãs permanentes é calculada considerando o campo coercitivo em termos de sua circulação e a indução remanente em termos do fluxo. Para a mesma relação constitutiva magnética, os dois casos considerados resultam em diferentes expressões de densidade de força. Uma abordagem vetorial é utilizada em Bossavit (2014) em conjunto com o princípio das potências virtuais, de forma que o vetor de magnetização do ímã é considerado como independente da deformação mas que rotaciona em conjunto com o material.

A relação entre força nodal e tensor de Maxwell é descrita em Kameari (1993), para uma situação em que se tem materiais condutores e materiais magnéticos com

relação constitutiva linear ou não-linear. A densidade de força é o divergente do tensor de Maxwell, dessa forma, quando se tem interfaces onde há descontinuidades nas grandezas magnéticas, a aplicação direta do tensor de Maxwell é mais útil por ser mais regular que a densidade de força.

Em Bossavit (2016) e Bossavit (2019) o tensor de Maxwell é calculado a partir da expressão da densidade de força para o ímã permanente obtida em Bossavit (2014), de forma que são aplicados diversos conceitos de mecânica dos meios contínuos, especialmente o princípio de indiferença de referencial.

A condição de circulação ou fluxo de magnetização constante é calculada por meio das derivadas materiais em um meio contínuo em Henrotte, Vande Sande *et al.* (2004) e Henrotte e Hameyer (2007), de forma que na abordagem utilizada, o tensor de Maxwell é calculado diretamente. Em Henrotte e Hameyer (2004) uma abordagem geométrica com a utilização de vetores e identidades tensoriais resulta no tensor de Maxwell. São apresentadas expressões para relação magnética linear, e para o ímã permanente, considerando a circulação ou o fluxo de magnetização constante.

2.2 NOÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

A mecânica dos meios contínuos é um ramo das ciências físicas relacionada com as deformações e movimentos de materiais contínuos devido a ação de agentes externos. Corpos físicos podem ser descritos por um conjunto de pontos materiais (ou partículas) interconectadas por alguma força interna. Contudo, em física dos meios contínuos, a matéria é relacionada com fenômenos macroscópicos nos quais o menor comprimento característico é muito maior que o tamanho de um átomo ou distância atômica (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

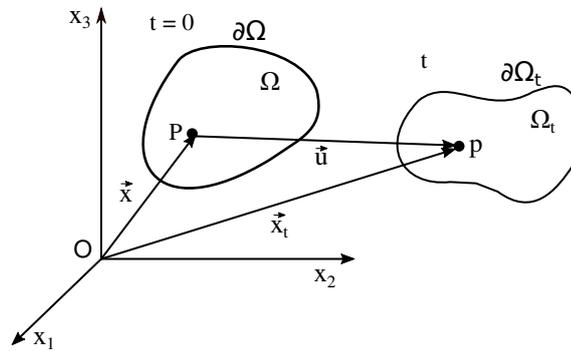
2.2.1 Movimento e deformação

Os pontos materiais de um meio contínuo ocupam no tempo $t = 0$ uma região no espaço que consiste de um volume material¹ Ω e contorno $\partial\Omega$. A posição de um ponto particular P nessa região pode ser descrita por um vetor posição \vec{x} que parte da origem O , conforme a Figura 1.

O conjunto de posicionamentos dos pontos materiais do corpo, para qualquer tempo, é chamado de configuração do corpo. A configuração de referência é definida para o tempo inicial $t = 0$. Após o movimento e deformação, no tempo t , a partícula localizada inicialmente em P se encontra no ponto p , cuja posição é descrita por $\vec{x}_t = \chi(\vec{x}, t)$, com χ sendo a função deformação do corpo de Ω para o novo volume Ω_t . As partículas das duas regiões possuem correspondência de um para um.

¹ Os termos volume material, superfície material e contorno material se referem a grandezas geométricas às quais consistem do mesmo número de partículas para todos os tempos t

Figura 1 – Movimento de um meio contínuo.



Fonte – Adaptado de Eringen e Maugin (1990).

O deslocamento $\vec{u}(\vec{x}, t)$ é definido como $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x}_t - \vec{x} = \chi(\vec{x}, t) - \vec{x}$ e nulo para $t = 0$. As coordenadas descritas por \vec{x} são chamadas de materiais ou Lagrangeanas, enquanto que as coordenadas descritas por \vec{x}_t são referidas como espaciais ou Eulerianas (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

2.2.2 Tensor gradiente de deformação

O tensor gradiente de deformação F é definido conforme a equação (1a) ou em componentes equação (1b) (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$F = \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}_t}{\partial \vec{x}} \quad (1a)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_{ti}}{\partial x_j} \quad (1b)$$

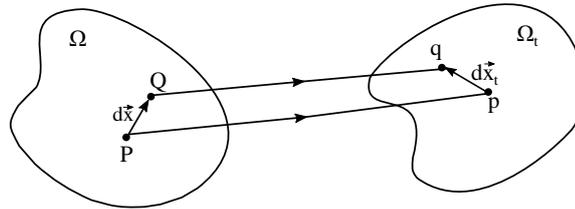
Considerando a configuração de referência para $t = 0$, uma partícula é descrita pelo vetor posição \vec{x} e uma partícula adjacente possui posição definida por $\vec{x} + d\vec{x}$. No tempo t , ambas as partículas movem-se para novas posições descritas pelos vetores \vec{x}_t e $\vec{x}_t + d\vec{x}_t$, conforme a Figura 2.

Para elementos de linha infinitesimais nas configurações de referência e atual, F é descrito conforme a equação (2a) considerando que as duas partículas estão próximas e há uma correspondência de um para um entre $d\vec{x}$ e $d\vec{x}_t$. O determinante de F também é chamado de Jacobiano J (ou determinante da matriz Jacobiana), conforme equação (2b) (ABEYARATNE, 2012).

$$d\vec{x}_t = F d\vec{x} \quad (2a)$$

$$J = \det F \quad (2b)$$

Figura 2 – Deformação na vizinhança de uma partícula.



Fonte – Adaptado de Abeyaratne (2012).

2.2.2.1 Transformação de área

Considerando um elemento de área $d\vec{A}$ formado pelos vetores infinitesimais ortogonais $d\vec{x}_1$ e $d\vec{x}_2$ na configuração de referência. Para o elemento de área $d\vec{A}_t$ na configuração deformada, a relação entre ambos é descrita pela equação (3) com F^{-T} sendo a inversa da transposta de F (ABEYARATNE, 2012).

$$d\vec{A}_t = JF^{-T}d\vec{A} \quad (3)$$

2.2.2.2 Transformação de volume

Considerando um conjunto de três vetores infinitesimais $(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3)$ os quais formam um tetraedro, a relação entre volumes na configuração de referência $d\Omega$ e deformada $d\Omega_t$ é descrita pela equação (4) (ABEYARATNE, 2012).

$$d\Omega_t = Jd\Omega \quad (4)$$

2.2.3 Decomposição polar

Seja um tensor de segunda ordem U , a transposta U^T em componentes pode ser escrita como $(U^T)_{ij} = U_{ji}$. O tensor U é chamado de simétrico se $U = U^T$ e anti-simétrico se $U = -U^T$. Seja um vetor \vec{v} , U é dito como positivo-definido se $(\vec{v} \cdot U\vec{v}) > 0$ para todos os vetores $\vec{v} \neq 0$. Um tensor de segunda ordem R ortogonal é uma transformação linear que quando aplicada a vetores, esses mantêm seus comprimentos e ângulos entre si, ou seja, para dois vetores \vec{u} e \vec{v} , se tem que $R\vec{u} \cdot R\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Dessa forma, resulta que $RR^T = R^T R = \mathbb{I}$ com \mathbb{I} sendo o tensor identidade. Para o determinante $\det R = 1$, o tensor R é chamado de rotação. Para $\det R = -1$ se tem R como reflexão.

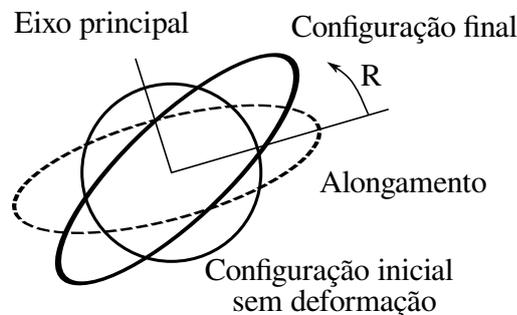
O tensor gradiente de deformação F pode ser escrito de maneira alternativa utilizando o teorema da decomposição polar, conforme equação (5), com R sendo um

tensor ortogonal, e U um tensor simétrico e positivo-definido (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$F = RU \quad (5)$$

A decomposição polar mostra que F pode ser representado por um alongamento seguido por uma rotação rígida. U é dito tensor de alongamento (*stretch tensor*, do inglês). Uma representação da decomposição polar é apresentada na Figura 3, inicialmente o elemento circular sofre um alongamento descrito por U e então é rotacionado conforme R (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

Figura 3 – Decomposição polar em elemento circular.



Fonte – Adaptado de Kelly (2016).

2.2.4 Deformações infinitesimais

Considerando dois tensores de segunda ordem A e B , o produto bi-contráido entre ambos é a operação $A : B$ ou utilizando a convenção de Einstein $A_{ij}B_{ij}$ e resulta em um escalar. A norma (ou magnitude) de um tensor A é definida por $\|A\| = \sqrt{A : A} = \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$.

Utilizando (1a) em termos do deslocamento \vec{u} resulta na equação (6a) e se define o tensor gradiente de deslocamento H descrito em componentes na equação (6b). Para aplicações em pequenas deformações, se tem que $\|H\| \ll 1$ e, nesse caso, as relações descritas nas equações (6c) e (6d) são válidas (IRGENS, 2008),

(ABEYARATNE, 2012).

$$F = \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} + \mathbb{I} = H + \mathbb{I} \quad (6a)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6b)$$

$$U = \mathbb{I} + \frac{1}{2} (H + H^T) \quad (6c)$$

$$R = \mathbb{I} + \frac{1}{2} (H - H^T) \quad (6d)$$

Os tensores de segunda ordem infinitesimais de deformação ϵ (simétrico) e rotação r (antissimétrico) são definidos conforme as equações (7a) e (7b), ou em componentes nas equações (7c) e (7d) (ABEYARATNE, 2012).

$$\epsilon = \frac{1}{2} (H + H^T) \quad (7a)$$

$$r = \frac{1}{2} (H - H^T) \quad (7b)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7c)$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7d)$$

2.2.5 Taxas de deformação

O campo de velocidade de um corpo material que é sujeito a uma transformação χ da configuração de referência para a configuração atual pode ser definido pela equação (8) considerando uma descrição Lagrangeana (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \partial_t \chi(\vec{x}, t) \quad (8)$$

Seja a função inversa χ^{-1} que relaciona os vetores posição definidos anteriormente com $\vec{x} = \chi^{-1}(\vec{x}_t, t)$. A velocidade \vec{v}_t para uma descrição Euleriana pode ser escrita conforme a equação (9) (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$\vec{v}_t(\vec{x}_t, t) = \vec{v}(\chi^{-1}(\vec{x}_t, t), t) = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (9)$$

No estudo da taxa de variação de várias grandezas geométricas, se define o tensor gradiente de velocidade L conforme a equação (10a) e em componentes equação (10b). O operador traço tr de uma matriz T resulta na soma dos termos

diagonais e pode ser escrita como $trT = T : \mathbb{I} = T_{ij}\mathbb{I}_{ij}$, dessa forma, se tem a relação descrita na equação (10c) (ERINGEN; MAUGIN, 1990), (ABEYARATNE, 2012).

$$L = \nabla \vec{v} \quad (10a)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_{t_j}} \quad (10b)$$

$$trL = div \vec{v} \quad (10c)$$

O tensor L pode ser decomposto em parte simétrica d e antissimétrica w com $L = d + w$. O tensor d é chamado de taxa de deformação e w o tensor de taxa de rotação, e são descritos pelas equações (11a) e (11b), com ∇_s sendo o operador gradiente simétrico (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$d = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) = \nabla_s \vec{v} \quad (11a)$$

$$w = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T) \quad (11b)$$

Considerando deformações infinitesimais, se tem as aproximações descritas nas equações (12a) e (12b) (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$d \approx \dot{\epsilon} \quad (12a)$$

$$w \approx \dot{r} \quad (12b)$$

Seja o movimento virtual de uma pequena parte de material de \vec{x} para $\vec{x} + t\vec{v}$, no qual ocorre uma deformação e rotação. A rotação de um vetor local \vec{b} definido em \vec{x} pode ser aproximada pela função linear da relação (13a), com o operador de rotação expresso por (13b) e o vetor de velocidade angular $\vec{\omega}$ dado pela equação (13c). A parte simétrica de F pode ser aproximada pela equação (13d) (BOSSAVIT, 2016).

$$\vec{b} \rightarrow \vec{b} + t\vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{b} \quad (13a)$$

$$R \approx \mathbb{I} + t\vec{\omega}(\vec{x}) \times \quad (13b)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{v} \quad (13c)$$

$$U \approx \mathbb{I} + t\nabla_s \vec{v} \quad (13d)$$

O tensor antissimétrico \dot{r} é relacionado com $\vec{\omega}$, de forma que para qualquer vetor \vec{p} se tem a equação (14a). As componentes de $\vec{\omega}$ podem ser escritas em termos das

componentes de $\dot{\vec{r}}$ com $\vec{\omega} = [\dot{r}_{32}, \dot{r}_{13}, \dot{r}_{21}]$ (ABEYARATNE, 2012). Dessa maneira, R pode ser escrito conforme a equação (14b).

$$\dot{\vec{r}}\vec{p} = \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (14a)$$

$$R \approx \mathbb{I} + t\dot{\vec{r}} \quad (14b)$$

2.2.6 Derivadas materiais

Para uma grandeza física descrita por um tensor $T(\vec{x}, t)$ (descrição Lagrangeana) ou $T(\vec{x}_t, t)$ (descrição Euleriana), a derivada parcial com relação ao tempo $\partial_t T(\vec{x}, t)$ ou a derivada total com relação ao tempo $d_t T(\vec{x}_t, t)$ descrevem a taxa de variação da grandeza física em um determinado ponto material e é chamada de derivada material, denotada por \dot{T} . Um exemplo de derivada material é o campo de velocidade \vec{v} , que descreve a derivada material da posição (HASHIGUCHI, 2009).

Seja C_t uma linha material no tempo t e C na configuração de referência. A derivada material da circulação do campo vetorial \vec{b} pode ser escrita conforme a equação (15), utilizando a relação $d\vec{x}_t = F d\vec{x}$ e escrevendo o produto escalar entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} como $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a}$ (ABEYARATNE, 2012).

$$\begin{aligned} \overbrace{\int_{C_t} \vec{b}(\vec{x}_t, t) \cdot d\vec{x}_t}^{\dot{\quad}} &= \partial_t \int_C \vec{b}(\vec{x}, t) \cdot F d\vec{x} \\ &= \partial_t \int_C (F d\vec{x})^T \vec{b}(\vec{x}, t) \\ &= \int_C \left((\dot{F} d\vec{x})^T \vec{b}(\vec{x}, t) + (F d\vec{x})^T \dot{\vec{b}}(\vec{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Se tem a relação $\dot{F} = \nabla \vec{v} F$, substituindo $\dot{F}^T = \nabla \vec{v}^T F^T$ em (15) resulta na equação (16) (ABEYARATNE, 2012).

$$\begin{aligned} \overbrace{\int_{C_t} \vec{b}(\vec{x}_t, t) \cdot d\vec{x}_t}^{\dot{\quad}} &= \int_C \left(\nabla \vec{v}^T \vec{F}^T d\vec{x}^T \vec{b}(\vec{x}, t) + (\vec{F} d\vec{x})^T \dot{\vec{b}}(\vec{x}, t) \right) \\ &= \int_C \left(\nabla \vec{v}^T \vec{b}(\vec{x}, t) + \dot{\vec{b}}(\vec{x}, t) \right) \cdot \vec{F} d\vec{x} \\ &= \int_{C_t} \left(\nabla \vec{v}^T \vec{b}(\vec{x}_t, t) + \dot{\vec{b}}(\vec{x}_t, t) \right) \cdot d\vec{x}_t \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando o caso da derivada material do fluxo de \vec{b} através das superfícies materiais $\partial\Omega$ (configuração de referência) e $\partial\Omega_t$ (no tempo t), utilizando $d\vec{A}_t = JF^{-T} d\vec{A}$

resulta na equação (17).

$$\begin{aligned}
\overbrace{\int_{\partial\Omega_t} \vec{b}(\vec{x}_t, t) \cdot d\vec{A}_t}^{\dot{}} &= \partial_t \int_{\partial\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) \cdot JF^{-T} d\vec{A} \\
&= \partial_t \int_{\partial\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t)^T JF^{-T} d\vec{A} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\dot{\vec{b}}(\vec{x}, t)^T JF^{-T} + \vec{b}(\vec{x}, t)^T \dot{J}F^{-T} + \vec{b}(\vec{x}, t)^T JF^{-T} \dot{F}^{-T} \right) d\vec{A}
\end{aligned} \tag{17}$$

Derivando no tempo a propriedade $F^{-T}F^T = \mathbb{I}$, se obtém a equação (18).

$$\begin{aligned}
\partial_t(F^{-T}F^T) &= \dot{F}^{-T}F^T + F^{-T}\dot{F}^T = 0 \\
\dot{F}^{-T} &= -F^{-T}\dot{F}^T F^{-T}
\end{aligned} \tag{18}$$

A derivada no tempo de J é calculada utilizando a relação $J = \det F$ e a identidade da derivada do determinante, conforme equação (19a). Substituindo $\nabla\vec{v} = \dot{F}F^{-1}$ em (19a) e como $\text{tr}\nabla\vec{v} = \text{div}\vec{v}$, resulta na equação (19b) (ABEYARATNE, 2012).

$$\dot{J} = \det F = \det F \text{tr}(\dot{F}F^{-1}) \tag{19a}$$

$$= \det F \text{tr}(\dot{F}F^{-1}) = \det F \text{tr}(\nabla\vec{v}) = J \text{div}\vec{v} \tag{19b}$$

Inserindo (18) e (19b) em (17), resulta na equação (20).

$$\begin{aligned}
\overbrace{\int_{\partial\Omega_t} \vec{b} \cdot d\vec{A}_t}^{\dot{}} &= \int_{\partial\Omega} \left(\dot{\vec{b}}^T JF^{-T} + \vec{b}^T J \text{div}\vec{v} F^{-T} - \vec{b}^T JF^{-T} \dot{F}^T F^{-T} \right) d\vec{A} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\dot{\vec{b}}^T + \vec{b}^T \text{div}\vec{v} - \vec{b}^T \dot{F}^T F^{-T} \right) JF^{-T} d\vec{A} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\dot{\vec{b}}^T + \vec{b}^T \text{div}\vec{v} - \vec{b}^T \nabla\vec{v}^T \right) JF^{-T} d\vec{A} \\
&= \int_{\partial\Omega_t} \left(\dot{\vec{b}} + \vec{b} \text{div}\vec{v} - \vec{b} \nabla\vec{v} \right) \cdot d\vec{A}_t
\end{aligned} \tag{20}$$

Para o caso da derivada material da integral de volume de \vec{b} sobre os volumes

materiais Ω e Ω_t , como $d\Omega_t = Jd\Omega$ e utilizando (19b), resulta na equação (21).

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\int_{\Omega_t} \vec{b}(\vec{x}_t, t) d\Omega_t}^{\bullet} &= \partial_t \int_{\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) J d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\vec{b}}(\vec{x}, t) J + \vec{b}(\vec{x}, t) \dot{J} \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\vec{b}}(\vec{x}, t) J + \vec{b}(\vec{x}, t) J \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_t} \left(\dot{\vec{b}}(\vec{x}_t, t) + \vec{b}(\vec{x}_t, t) \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_t
 \end{aligned} \tag{21}$$

Para a taxa de variação no tempo de uma grandeza escalar β sobre os volumes Ω e Ω_t , resulta na equação (22).

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\int_{\Omega_t} \beta(\vec{x}_t, t) d\Omega_t}^{\bullet} &= \partial_t \int_{\Omega} \beta(\vec{x}, t) J d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\beta}(\vec{x}, t) J + \beta(\vec{x}, t) \dot{J} \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\beta}(\vec{x}, t) J + \beta(\vec{x}, t) J \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_t} \left(\dot{\beta}(\vec{x}_t, t) + \beta(\vec{x}_t, t) \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_t
 \end{aligned} \tag{22}$$

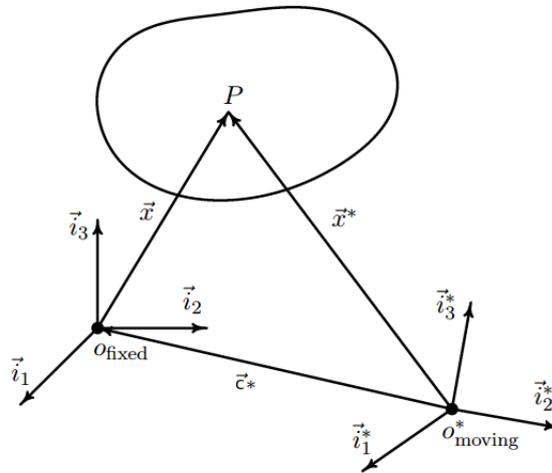
2.2.7 Indiferença de referencial

No campo de estudo da mecânica clássica, por observador entende-se um corpo rígido portando um relógio, e o par (\vec{x}, t) é chamado de evento. Sejam dois observadores O e O^* os quais caracterizam o mesmo evento por (\vec{x}, t) e (\vec{x}^*, t^*) conforme a Figura 4, os dois observadores são ditos como equivalentes se as relações da equação (23) são válidas, com a sendo uma constante, $\vec{c}(t)$ um vetor dependente do tempo que corresponde a uma translação e $Q(t)$ um tensor ortogonal de segunda ordem dependente do tempo (com determinante positivo). Alternativamente, a equação (23) pode ser descrita como uma transformação de observador de O para um observador equivalente O^* (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

$$\begin{aligned}
 \vec{x}^* &= Q(t)\vec{x} + \vec{c}(t) \\
 t^* &= t + a
 \end{aligned} \tag{23}$$

Em geral, a caracterização de uma grandeza física associada com movimento depende do observador. Uma grandeza física é dita como independente do observador (ou objetiva ou indiferente de referencial) se é invariante sob todas as transformações de observador (ABEYARATNE, 2012), (ERINGEN; MAUGIN, 1990).

Figura 4 – Evento caracterizado por dois observadores.



Fonte – Adaptado de Martinec (2007).

Uma grandeza física descrita pelo escalar $f(\vec{x}, t)$ por um observador O e $f^*(\vec{x}^*, t^*)$ por O^* , é indiferente de referencial se a equação (24a) é válida. Uma grandeza vetorial denotada por $\vec{b}(\vec{x}, t)$ e $\vec{b}^*(\vec{x}^*, t^*)$, é indiferente de referencial se a equação (24b) é válida. Para uma grandeza tensorial B , a equação (24c) deve ser obedecida (ABEYARATNE, 2012).

$$f^*(\vec{x}^*, t^*) = f(\vec{x}, t) \quad (24a)$$

$$\vec{b}^*(\vec{x}^*, t^*) = Q(t)\vec{b}(\vec{x}, t) \quad (24b)$$

$$B^*(\vec{x}^*, t^*) = Q(t)B(\vec{x}, t)Q^T \quad (24c)$$

2.2.8 Elasticidade linear isotrópica

Considerando a hipótese de pequenas perturbações, ou seja, o estado final é muito próximo do estado inicial, de forma que a norma do tensor gradiente de deslocamentos H e o deslocamento \vec{u} são pequenos. O comportamento mecânico do material elástico é considerado isotrópico. O tensor de deformações para o caso de pequenas perturbações é descrito pela equação (7c), ou pode ser escrito como $\epsilon = \nabla_s \vec{u}$. O tensor de tensões mecânicas σ , ou σ_{ij} em componentes, é definido como a componente i da densidade superficial de força em uma superfície infinitesimal perpendicular ao eixo j , conforme a Figura 5, sendo σ um tensor simétrico (MOËS, 2011).

O comportamento elástico isotrópico é completamente descrito por dois parâmetros escalares do material, os coeficientes de Lamé λ e μ_{sh} , os quais são relacionados

Utilizando a notação matricial, os tensores de segunda ordem podem ser escritos como matrizes 9×1 e os tensores de quarta ordem como matrizes 9×9 . Considerando a simetria dos tensores, se pode escrever (28) como a equação (29).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & Sim. & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Os componentes de C em termos de E e ν_p são descritos pela equação (30).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_p & \nu_p & \nu_p & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu_p & \nu_p & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu_p & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 - 2\nu_p & 0 & 0 \\ & Sim. & & & 1 - 2\nu_p & 0 \\ & & & & & 1 - 2\nu_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Por meio da notação de Voigt se utilizam índices relacionados com uma operação matricial, ou seja, (29) é escrita como a equação (31).

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (31)$$

No caso linear, os coeficientes E , ν_p , λ e μ_{sh} e as componentes de C são constantes (independentes de tensões mecânicas).

2.2.9 Equilíbrio

Seja uma pequena parte de material com volume Ω e superfície $\partial\Omega$. Caso o corpo esteja em equilíbrio, a força total que age sobre ele deve ser zero. Separando as forças em duas partes, uma componente relacionada com forças externas, como as forças magnéticas, descritas pela densidade volumétrica de força \vec{f}_{mag} , e a componente de densidade de forças internas \vec{f}_{int} relacionada com o tensor de tensões σ por meio

de $\vec{f}_{int} = div\sigma$, em equilíbrio há a relação entre ambas conforme a equação (32) (FEYNMAN, 1965).

$$div\sigma + \vec{f}_{mag} = \vec{0} \quad (32)$$

2.3 TENSOR DE MAXWELL

Baseado em conceitos de mecânica dos meios contínuos e nas metodologias para o cálculo de forças de Bossavit e Henrotte, o tensor de Maxwell é calculado considerando quatro modelos matemáticos que descrevem o comportamento da magnetização em relação à deformação. Na sequência, os tensores obtidos são comparados com resultados da literatura.

2.3.1 Expressão geral do tensor de Maxwell

As equações de Maxwell na forma quase-estática são descritas por (33a) e (33b), relacionando o campo magnético \vec{H} , indução magnética \vec{B} e densidade de corrente \vec{J} , que pode ser decomposta em densidade de corrente imposta \vec{J}_s e induzida. A densidade de corrente induzida pode ser escrita conforme a equação (33c) para uma região em que não se tem corrente imposta, com \vec{E} sendo o campo elétrico e σ_c a condutividade (BASTOS; SADOWSKI, 2013).

$$rot\vec{H} = \vec{J} \quad (33a)$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (33b)$$

$$\vec{J} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (33c)$$

Considerando um problema acoplado magnetoelástico (com materiais de comportamento anisterético) no qual a energia magnetoelástica total $\Psi^{me}(\epsilon, \vec{B})$ depende dos valores locais de indução \vec{B} e da deformação ϵ , de forma que se pode definir as relações constitutivas associadas à derivada de Fréchet de Ψ^{me} , equações (34a) e (34b), onde σ representa o tensor de tensões de segunda ordem (BOSSAVIT, 2011).

$$\vec{H} = \partial_{\vec{B}}\Psi^{me} \quad (34a)$$

$$\sigma = \partial_{\epsilon}\Psi^{me} \quad (34b)$$

A energia magnetoelástica total Ψ^{me} pode ser dividida em termos das energias magnética Ψ e elástica Ψ^e , equação (35a), considerando que para $\vec{B} = \vec{0}$ se tem somente a contribuição da energia elástica Ψ^e , ou seja, $\Psi^{me}(\epsilon, \vec{0}) = \Psi^e(\epsilon)$ (BOSSAVIT,

2011). A densidade de energia magnética ψ pode ser escrita conforme a equação (35b).

$$\Psi^{me}(\epsilon, \vec{B}) = \Psi(\epsilon, \vec{B}) + \Psi^{me}(\epsilon, \vec{0}) \quad (35a)$$

$$\Psi(\epsilon, \vec{B}) = \int_{\Omega} \psi(\epsilon, \vec{B}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\psi^{me}(\epsilon, \vec{B}) - \psi^{me}(\epsilon, \vec{0}) \right] d\Omega \quad (35b)$$

Considerando um deslocamento virtual definido por $\vec{x} + t\vec{v}$, a potência magneto-elástica virtual associada com o movimento pode ser descrita como a derivada parcial em t de Ψ^{me} para $t = 0$ (BOSSAVIT, 2014), dessa maneira, utilizando a derivada material para $t = 0$ de (22), resulta na equação (36).

$$\dot{\Psi}^{me} = \overbrace{\int_{\Omega_t} \psi^{me} d\Omega_t}^{\bullet} = \int_{\Omega} \left(\dot{\psi}^{me} + \psi^{me} \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \quad (36)$$

A variação total da energia para variações infinitesimais nos campos $\delta\epsilon$ e $\delta\vec{B}$ pode ser escrita conforme a equação (37), de forma que $\partial_{\epsilon}\Psi^{me}$ e $\partial_{\vec{B}}\Psi^{me}$ são as derivadas parciais de Fréchet.

$$\begin{aligned} \delta\Psi^{me}(\epsilon, \vec{B}) &= \int_{\Omega} \left(\partial_{\epsilon}\Psi^{me} : \delta\epsilon + \partial_{\vec{B}}\Psi^{me} \cdot \delta\vec{B} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\sigma : \delta\epsilon + \vec{H} \cdot \delta\vec{B} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (37)$$

Considerando que a variação de energia de (37) ocorre durante um intervalo de tempo δt , se obtém a potência virtual magneto-elástica, equação (38).

$$\dot{\Psi}^{me} = \int_{\Omega} \left(\sigma : \dot{\epsilon} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} \right) d\Omega \quad (38)$$

Derivando ψ^{me} em t , resulta na equação (39).

$$\dot{\psi}^{me} = \partial_{\epsilon}\psi^{me} : \dot{\epsilon} + \partial_{\vec{B}}\psi^{me} \cdot \dot{\vec{B}} \quad (39)$$

Substituindo a identidade da equação (40a) e (39) em (36), resulta na equação (40b).

$$\psi^{me} \operatorname{div} \vec{v} = \psi^{me} \mathbb{I} : \nabla \vec{v} = \psi^{me} \mathbb{I} : \dot{\epsilon} \quad (40a)$$

$$\dot{\Psi}^{me} = \int_{\Omega} \left((\partial_{\epsilon}\psi^{me} + \psi^{me} \mathbb{I}) : \dot{\epsilon} + \partial_{\vec{B}}\psi^{me} \cdot \dot{\vec{B}} \right) d\Omega \quad (40b)$$

Comparando (38) com (40b), se obtém as relações das equações (41a) e (41b).

$$\sigma = \partial_{\epsilon}\psi^{me} + \psi^{me} \mathbb{I} \quad (41a)$$

$$\vec{H} = \partial_{\vec{B}}\psi^{me} \quad (41b)$$

A densidade de força magnética é diretamente relacionada com a derivada parcial da energia magnética em relação a um parâmetro de deslocamento, mantendo constante o fluxo de indução através de uma superfície material, equação (42) (BOSSAVIT, 2004).

$$\overbrace{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}} = 0 \quad (42)$$

Considerando a taxa de variação do fluxo de \vec{B} nulo, a potência mecânica realizada por forças magnéticas pode ser calculada a partir do tensor de Maxwell σ_M , conforme equação (43), de forma que o índice $|_{\vec{B}_{flux}}$ indica a condição de fluxo magnético constante. Dessa maneira, o tensor de Maxwell é determinado diretamente, sem necessidade de se obter a expressão da densidade de força (HENROTTE; HAMEYER, 2007).

$$-\dot{\Psi}|_{\vec{B}_{flux}} = - \int_{\Omega} (\sigma_M : \nabla \vec{v}) d\Omega \quad (43)$$

Para um tensor de segunda ordem simétrico, (43) pode ser escrita conforme a equação (44a) utilizando a integração por partes. O termo $div \sigma_M$ representa a densidade volumétrica de força e $\sigma_M \cdot \vec{n}$ a densidade superficial de força (HENROTTE; HAMEYER, 2007).

$$\int_{\Omega} \sigma_M : \nabla \vec{v} d\Omega = - \int_{\Omega} (div \sigma_M) \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma_M \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} d\partial\Omega \quad (44a)$$

Sejam ψ e ψ_t as densidades de energia magnética na configuração de referência e no tempo t . Durante um deslocamento virtual $t\vec{v}$, uma pequena parte de material, que estava localizada em \vec{x} para $t = 0$, é submetida à uma deformação e rotação $R = \mathbb{I} + t\dot{\vec{r}}$. Por meio do princípio de indiferença de referencial, equação (45), a densidade de energia ψ_t na configuração deformada é a mesma que em ψ caso aplique uma rotação inversa $(\mathbb{I} - t\dot{\vec{r}})$ em \vec{B}_t e uma deformação ϵ_t , ou seja, a densidade de energia magnética depende da deformação, mas não da rotação (BOSSAVIT, 2016).

$$\psi_t(\epsilon_t, \vec{B}_t) = \psi(\epsilon_t, (\mathbb{I} - t\dot{\vec{r}})\vec{B}_t) \quad (45)$$

Fazendo a derivada em t para $t = 0$ de ψ utilizando a regra da cadeia, de (45) e (41b), se obtém a equação (46).

$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= \dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) = \partial_{\epsilon} \psi : \dot{\epsilon} + \partial_{\vec{B}} \psi \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \\ &= \partial_{\epsilon} \psi : \dot{\epsilon} + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \end{aligned} \quad (46)$$

A derivada material do fluxo de \vec{B} através da superfície material é descrita pela equação (20). Utilizando a condição de fluxo constante de (42), se tem a relação da equação (47a), ou em componentes conforme a equação (47b).

$$\dot{\vec{B}} = -\vec{B} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{B} \nabla \vec{v} \quad (47a)$$

$$\dot{B}_i = -B_i \partial_j v_j + B_j \partial_j v_i \quad (47b)$$

Substituindo (47a) em (46), e como $\nabla \vec{v} = \dot{\vec{r}} + \dot{\epsilon}$, se tem a equação (48).

$$\begin{aligned} \dot{\psi}|_{\vec{B}_{flux}} &= \partial_\epsilon \psi : \dot{\epsilon} + \vec{H} \cdot (-\vec{B} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{B} \nabla \vec{v} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \\ &= \partial_\epsilon \psi : \dot{\epsilon} + \vec{H} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{B}) - \vec{H} \cdot \vec{B} \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (48)$$

A taxa de variação da energia magnética pode ser escrita em termos da derivada da densidade de energia, que foi calculada na equação (22). Utilizando a condição descrita por (43), se tem a equação (49a). Substituindo (48) em (49a) resulta na equação (49b).

$$\dot{\Psi}|_{\vec{B}_{flux}} = \left(\int_{\Omega} \dot{\psi} d\Omega \right)|_{\vec{B}_{flux}} = \int_{\Omega} \left(\dot{\psi}|_{\vec{B}_{flux}} + \psi \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \quad (49a)$$

$$\dot{\Psi}|_{\vec{B}_{flux}} = \int_{\Omega} \left(\partial_\epsilon \psi : \dot{\epsilon} + \vec{H} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{B}) - \vec{H} \cdot \vec{B} \operatorname{div} \vec{v} + \psi \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \quad (49b)$$

Como ϵ é simétrico, o tensor $\partial_\epsilon \psi$ é simétrico. De $\nabla \vec{v} - \dot{\vec{r}} = \dot{\epsilon}$, se tem que $\partial_\epsilon \psi : \dot{\vec{r}} = 0$, logo, o termo $\partial_\epsilon \psi : \dot{\epsilon}$ pode ser escrito como $\partial_\epsilon \psi : \nabla \vec{v}$. A parte simétrica do tensor $\vec{H} \otimes \vec{B}$ pode ser escrita como $\frac{1}{2} (\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H})$, utilizando a propriedade do produto entre tensor de segunda ordem e vetores se tem que $\vec{H} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{B}) = \dot{\epsilon} : (\vec{H} \otimes \vec{B}) = \nabla \vec{v} : \frac{1}{2} (\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H})$. Dessa forma, utilizando as fatorações dos termos de (49b) em relação a $\nabla \vec{v}$ e como $\operatorname{div} \vec{v} = (\nabla \vec{v}) : \mathbb{I}$, (49b) pode ser escrita conforme a equação (50).

$$\dot{\Psi}|_{\vec{B}_{flux}} = \int_{\Omega} \left(\partial_\epsilon \psi + \frac{1}{2} (\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H}) + (\psi - \vec{H} \cdot \vec{B}) \mathbb{I} \right) : \nabla \vec{v} d\Omega \quad (50)$$

Comparando (50) com (43), o tensor de Maxwell é definido conforme a equação (51a). Seja ϕ a densidade de co-energia magnética, se tem a relação da equação (51b). Substituindo (51b) em (51a), resulta na representação alternativa do tensor de

Maxwell, equação (51c), o mesmo tensor apresentando em Bossavit (2016).

$$\sigma_M = \partial_\epsilon \psi + \frac{1}{2} \left(\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H} \right) + (\psi - \vec{H} \cdot \vec{B})\mathbb{I} \quad (51a)$$

$$\psi + \phi = \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (51b)$$

$$\sigma_M = \partial_\epsilon \psi + \frac{1}{2} \left(\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H} \right) - \phi\mathbb{I} \quad (51c)$$

O primeiro termo à direita de (51c) é nulo quando a energia magnética não depende da deformação, ou seja, quando não há magnetostricção. O termo relacionado com a co-energia representa uma tensão mecânica de pressão e depende da referência de energia considerada (KAMEARI, 1993).

2.3.2 Sobre o termo magnetostritivo

O termo ψ em termos da variação de \vec{B} pode ser escrito conforme a equação (52a), na qual $\psi(\epsilon, \vec{0})$ representa uma condição inicial, que para a abordagem utilizada é nula, respeitando a condição de densidade de energia magnética nula para indução nula. Derivando (52a) em termos de ϵ , resulta na equação (52b).

$$\psi(\epsilon, \vec{B}) = \psi(\epsilon, \vec{0}) + \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \partial_{\vec{b}} \psi(\epsilon, \vec{b}) \cdot d\vec{b} = \psi(\epsilon, \vec{0}) + \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \frac{\partial \psi(\epsilon, \vec{b})}{\partial B_k} db_k \quad (52a)$$

$$\frac{\partial \psi(\epsilon, \vec{B})}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \psi(\epsilon, \vec{B})}{\partial \epsilon_{ij}} = \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \vec{b})}{\partial B_k \partial \epsilon_{ij}} db_k \quad (52b)$$

Utilizando o teorema de Schwarz, o qual diz que a ordem dos índices das derivadas parciais não faz diferença na operação (PLAUT, 2019), resulta na equação (53a). De (41b) em (53a), se obtém a relação da equação (53b). Substituindo (53b) em (52b), resulta na equação (53c).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial B_k \partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial B_k} = \frac{\partial^2 \psi^{me}}{\partial \epsilon_{ij} \partial B_k} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{\partial \psi^{me}}{\partial B_k} \right) \quad (53a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial B_k \partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial H_k}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (53b)$$

$$\frac{\partial \psi(\epsilon, \vec{B})}{\partial \epsilon_{ij}} = \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \frac{\partial H_k}{\partial \epsilon_{ij}} db_k \quad (53c)$$

Fazendo o produto bi-contraindo de (53c) em relação à $\dot{\epsilon}$, resulta na equação (54a). Substituindo (54a) em (46), resulta na equação (54b), a variação total da densi-

dade de energia magnética.

$$\partial_\epsilon \psi : \dot{\epsilon} = \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \left(\partial_\epsilon \vec{H}(\epsilon, \vec{b}) : \dot{\epsilon} \right) \cdot d\vec{b} \quad (54a)$$

$$\dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \left(\partial_\epsilon \vec{H}(\epsilon, \vec{b}) : \dot{\epsilon} \right) \cdot d\vec{b} + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{r}\vec{B}) \quad (54b)$$

2.3.3 Tensor de Maxwell para ímãs permanentes

Os ímãs permanentes são materiais nos quais a relação constitutiva pode ser descrita pela equação (55a), no qual ν_0 é a relutividade magnética no vácuo e constante, de forma que \vec{M} não depende de \vec{B} e \vec{H} , e na configuração de referência \vec{M} depende somente de ϵ , logo, se tem a relação da equação (55b).

$$\vec{H}(\epsilon, \vec{B}) = \nu_0 \vec{B} - \vec{M}(\epsilon) \quad (55a)$$

$$\partial_\epsilon \vec{H} = -\partial_\epsilon \vec{M} \quad (55b)$$

Considerando que no tempo t , \vec{M} depende, além da deformação, da rotação $r(t) = t\dot{r}$ durante o movimento virtual, a derivada material de \vec{M}_t é descrita pela equação (56).

$$\dot{\vec{M}} = \partial_\epsilon \vec{M} : \dot{\epsilon} + \partial_r \vec{M} : \dot{r} \quad (56)$$

Seja o movimento rígido de uma parte de material de forma que a magnetização deve seguir a rotação. Por meio do princípio de indiferença de referencial, se tem a relação da equação (57a). Diferenciando (57a) em t resulta na equação (57b). Substituindo (57b) em (56) e utilizando (55b), se obtém a equação (57c) (BOSSAVIT, 2019).

$$\vec{M}_t = (\mathbb{I} + t\dot{r})\vec{M} \quad (57a)$$

$$\partial_r \vec{M} : \dot{r} = \dot{r}\vec{M} \quad (57b)$$

$$\partial_\epsilon \vec{M} : \dot{\epsilon} = \dot{\vec{M}} - \dot{r}\vec{M} = -\partial_\epsilon \vec{H} : \dot{\epsilon} \quad (57c)$$

Finalmente, utilizando (57c) em (54b), se obtém a equação (58a). Como \vec{M} não depende de \vec{B} , (58a) pode ser escrita conforme equação (58b).

$$\dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) = - \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \left(\dot{\vec{M}} - \dot{r}\vec{M} \right) \cdot d\vec{b} + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{r}\vec{B}) \quad (58a)$$

$$\dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \left(\dot{\vec{M}} - \dot{r}\vec{M} \right) + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{r}\vec{B}) \quad (58b)$$

Dessa forma, o tensor de Maxwell para ímãs permanentes é calculado utilizando as equações (43) e (58b), e depende da escolha de comportamento da variável $\dot{\vec{M}}$.

2.3.3.1 Modelo de \vec{M} independente da deformação

Para o modelo considerando \vec{M} independente da deformação, $\partial_\epsilon \psi$ é nulo, e o tensor de Maxwell σ_M^0 é igual ao de (51c) desconsiderando o termo magnetostritivo, e resulta na equação (59), o mesmo tensor de Maxwell apresentado em **bossavit2019**.

$$\sigma_M^0 = \frac{1}{2} \left(\vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes \vec{H} \right) - \phi \mathbb{I} \quad (59)$$

2.3.3.2 Modelo de circulação constante de \vec{M}

Considerando que a circulação de \vec{M} é constante em relação à deformação de uma linha C e utilizando a derivada material de (16), se tem a relação da equação (60a).

$$\dot{\vec{M}} = -(\nabla \vec{v})^T \vec{M} \quad (60a)$$

Substituindo (60a) em (58b), a variação da densidade de energia magnética resulta na equação (61). Assim, o tensor de Maxwell σ_M^1 para esse caso será dado pela soma de σ_M^0 com o tensor resultante do termo $\vec{B} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{M})$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \left(\nabla \vec{v} \cdot \vec{M} - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{M} \right) + \vec{H} \cdot \left(\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B} \right) \\ &= \vec{B} \cdot \left(\nabla \vec{v} - \dot{\vec{r}} \right) \cdot \vec{M} + \vec{H} \cdot \left(\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B} \right) \\ &= \vec{B} \cdot \left(\dot{\epsilon} \vec{M} \right) + \vec{H} \cdot \left(\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

Como $\vec{B} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{M}) = \dot{\epsilon} : (\vec{B} \otimes \vec{M}) = \nabla \vec{v} : \frac{1}{2} \left(\vec{B} \otimes \vec{M} + \vec{M} \otimes \vec{B} \right)$, o tensor σ_M^1 resulta na equação (62).

$$\sigma_M^1 = \sigma_M^0 + \frac{1}{2} \left(\vec{B} \otimes \vec{M} + \vec{M} \otimes \vec{B} \right) \quad (62)$$

Substituindo σ_M^0 em (62) e considerando a co-energia conforme a equação (63a), σ_M^1 resulta na equação (63b), o mesmo tensor de Maxwell obtido em Henrotte e Hameyer (2004) e Henrotte, Vande Sande *et al.* (2004).

$$\phi = \frac{\nu_0}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \quad (63a)$$

$$\sigma_M^1 = \nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{\nu_0}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \mathbb{I} \quad (63b)$$

2.3.3.3 Modelo de fluxo constante de \vec{M}

Nesse modelo o fluxo de \vec{M} é considerado constante em relação à deformação de uma superfície S . Utilizando a derivada material da equação (20), se tem a relação da equação (64a).

$$\dot{\vec{M}} = \vec{M} \nabla \vec{v} - \vec{M} \operatorname{div} \vec{v} \quad (64a)$$

Substituindo (64a) em (58b), a variação da densidade de energia magnética resulta na equação (65). O tensor de Maxwell σ_M^2 para esse caso será dado pela soma de σ_M^0 com o tensor resultante do termo $\vec{B} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{M}) - \vec{B} \cdot \vec{M} \operatorname{div} \vec{v}$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) &= -\vec{B} \cdot (\vec{M} \nabla \vec{v} - \vec{M} \operatorname{div} \vec{v} - \dot{\vec{r}} \vec{M}) + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \\ &= -\vec{B} \cdot (\nabla \vec{v} - \dot{\vec{r}}) \vec{M} + \vec{B} \cdot \vec{M} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \\ &= -\vec{B} \cdot (\dot{\epsilon} \vec{M}) + \vec{B} \cdot \vec{M} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{r}} \vec{B}) \end{aligned} \quad (65)$$

Utilizando $\operatorname{div} \vec{v} = (\nabla \vec{v}) : \mathbb{I}$ e as identidades para o modelo anterior, σ_M^2 é dado na equação (66).

$$\sigma_M^2 = \sigma_M^0 - \frac{1}{2} (\vec{B} \otimes \vec{M} + \vec{M} \otimes \vec{B}) + (\vec{M} \cdot \vec{B}) \mathbb{I} \quad (66)$$

Novamente, substituindo σ_M^0 e (63a) em (66) resulta na equação (67), o mesmo tensor de Maxwell obtido em Henrotte e Hameyer (2004) e Henrotte, Vande Sande *et al.* (2004).

$$\sigma_M^2 = \nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B} - \vec{M} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{M} - \mathbb{I} \left(\frac{\nu_0}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{M} \cdot \vec{B} \right) \quad (67)$$

2.3.3.4 Modelo de momento magnético constante

O momento magnético (integral de volume da magnetização \vec{M}) é considerado constante em relação à deformação de um volume material Ω e rotaciona junto com o material. Seja \vec{M}_t a magnetização no volume Ω_t na configuração deformada e \vec{M} na configuração de referência, fazendo a derivada em ambos os lados e de (21), resulta na equação (68).

$$\begin{aligned} \overbrace{\int_{\Omega_t} \vec{M}_t d\Omega_t}^{\dot{\quad}} &= \overbrace{\int_{\Omega} (\mathbb{I} + t\dot{\vec{r}}) \vec{M} d\Omega}^{\dot{\quad}} \\ \int_{\Omega} \left(\dot{\vec{M}} + \vec{M} \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \dot{\vec{r}} \vec{M} d\Omega \end{aligned} \quad (68)$$

A condição de \vec{M} constante em relação a deformação de um volume material é obtida pela relação da equação (69).

$$\dot{\vec{M}} = -\vec{M} \operatorname{div} \vec{v} + \dot{r} \vec{M} \quad (69)$$

Substituindo (69) em (58b), a variação da densidade de energia magnética resulta na equação (70).

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\epsilon, \vec{B}) &= -\vec{B} \cdot \left(-\vec{M} \operatorname{div} \vec{v} + \dot{r} \vec{M} - \dot{r} \vec{M} \right) + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{r} \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot \left(\vec{M} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{r} \vec{B}) \end{aligned} \quad (70)$$

O tensor de Maxwell σ_M^3 para esse caso será dado pela soma de σ_M^0 com o tensor resultante do termo $\vec{B} \cdot (\vec{M} \operatorname{div} \vec{v})$, que foi calculado no caso anterior. Assim, resulta na equação (71).

$$\sigma_M^3 = \sigma_M^0 + (\vec{M} \cdot \vec{B}) \mathbb{I} \quad (71)$$

2.3.4 Densidade de força a partir do tensor de Maxwell

A partir dos tensores de Maxwell calculados, por meio da aplicação de identidades de análise vetorial e tensorial, se obtém as densidades de força magnética, as quais são comparadas com resultados da literatura. No Anexo A são apresentados os cálculos de densidade de força magnética aplicando o princípio das potências virtuais para os modelos de magnetização utilizados anteriormente, de acordo, principalmente, com os trabalhos de Bossavit.

Calculando o divergente de σ_M^0 e utilizando a relação constitutiva $\vec{H} = \nu_0 \vec{B} - \vec{M}$, se obtém a equação (72).

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma_M^0) &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \left((\nu_0 \vec{B} - \vec{M}) \otimes \vec{B} + \vec{B} \otimes (\nu_0 \vec{B} - \vec{M}) \right) - \phi \mathbb{I} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \left(\nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B} - \vec{M} \otimes \vec{B} + \nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{M} \right) - \phi \mathbb{I} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \vec{M} \otimes \vec{B} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \otimes \vec{M} \right) - \operatorname{div}(\phi \mathbb{I}) \end{aligned} \quad (72)$$

Utilizando a igualdade $\operatorname{div}(\vec{H} \otimes \vec{B}) = \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} + \vec{B} \nabla \vec{H}$ e $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ para os termos

de (72) nos quais se tem o produto tensorial, resulta nas equações (73a), (73b) e (73c).

$$\operatorname{div}(\nu_0 \vec{B} \otimes \vec{B}) = \nu_0 \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + \nu_0 \vec{B} \nabla \vec{B} = \nu_0 \vec{B} \nabla \vec{B} \quad (73a)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\vec{M} \otimes \vec{B}) = \frac{1}{2} (\vec{M} \operatorname{div} \vec{B} + \vec{B} \nabla \vec{M}) = \frac{1}{2} \vec{B} \nabla \vec{M} \quad (73b)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\vec{B} \otimes \vec{M}) = \frac{1}{2} (\vec{B} \operatorname{div} \vec{M} + \vec{M} \nabla \vec{B}) \quad (73c)$$

O divergente de um tensor T de segunda ordem é um campo vetorial com componentes $\partial_j T^{ij}$. Como $\operatorname{div}(\mathbb{I}) = 0$, para qualquer campo escalar g se tem a identidade $\operatorname{div}(g\mathbb{I}) = \nabla g$. Dados dois campos vetoriais \vec{X} e \vec{Y} , se tem a identidade $\nabla(\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (\nabla \vec{X}) \cdot \vec{Y} + (\nabla \vec{Y}) \cdot \vec{X}$, ou em componentes $\partial_i(X_j Y_j) = (\partial_i X_j) Y_j + (\partial_i Y_j) X_j$. Dessa forma, o divergente do termo relacionado com a co-energia em (72) é calculado conforme a equação (74).

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi \mathbb{I}) &= \operatorname{div} \left((-\psi + \vec{B} \cdot \vec{H}) \mathbb{I} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(-\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0} \mathbb{I} + \vec{M} \cdot \vec{B} \mathbb{I} + \vec{B} \cdot (\nu_0 \vec{B} - \vec{M}) \mathbb{I} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\nu_0}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \mathbb{I} \right) = \frac{\nu_0}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) \\ &= \nu_0 (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (74)$$

Por meio da identidade $\vec{X} \times \operatorname{rot} \vec{Y} = (\nabla \vec{Y}) \cdot \vec{X} - \vec{X} \nabla \vec{Y}$ em (74), resulta na equação (75).

$$\begin{aligned} \nu_0 (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{B} &= \nu_0 \vec{B} \nabla \vec{B} + \nu_0 \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} \\ &= \nu_0 \vec{B} \nabla \vec{B} + \nu_0 \vec{B} \times \operatorname{rot} (\mu_0 (\vec{H} + \vec{M})) \\ &= \nu_0 \vec{B} \nabla \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{M} \end{aligned} \quad (75)$$

Utilizando (73a), (73b), (73c) e (75) em (72), resulta na equação (76).

$$\operatorname{div}(\sigma_M^0) = -\frac{1}{2} \vec{B} \nabla \vec{M} - \frac{1}{2} \vec{B} \operatorname{div} \vec{M} - \frac{1}{2} \vec{M} \nabla \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{M} \quad (76)$$

Inserindo a relação (77a) em (76) se obtém a equação (77b).

$$\vec{M} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{M} - \vec{M} \nabla \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{M} \times \vec{B}) - \vec{B} \nabla \vec{M} \quad (77a)$$

$$\operatorname{div}(\sigma_M^0) = -\vec{B} \nabla \vec{M} + \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\vec{M} \times \vec{B}) - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{M} \quad (77b)$$

O termo $\vec{B} \nabla \vec{M}$ de (77b) pode ser escrito como $(\nabla \vec{M}) \cdot \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{M}$. Inserindo essa igualdade em (77b), se obtém a densidade de força f_{mag}^0 , equação (78), ou seja,

a divergência de σ_M^0 resulta na mesma densidade de força obtida por meio do princípio das potências virtuais, equação (146), de Bossavit (2014).

$$\vec{f}_{mag}^0 = \text{div}(\sigma_M^0) = -(\nabla \vec{M}) \vec{B} + \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{M} \times \vec{B}) + (\text{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \quad (78)$$

A divergência do tensor σ_M^1 , descrita na equação (79), resulta na soma da densidade de força \vec{f}_{mag}^0 com os termos adicionais que foram calculados para o caso anterior.

$$\begin{aligned} \text{div}(\sigma_M^1) &= \text{div}(\sigma_M^0) + \text{div}\left(\frac{1}{2}(\vec{B} \otimes \vec{M} + \vec{M} \otimes \vec{B})\right) \\ &= \text{div}(\sigma_M^0) + \frac{1}{2} \text{div}(\vec{B} \otimes \vec{M}) + \frac{1}{2} \text{div}(\vec{M} \otimes \vec{B}) \end{aligned} \quad (79)$$

Inserindo (73b), (73c) e (76) em (79), a densidade de força \vec{f}_{mag}^1 resultante é apresentada na equação (80), sendo a mesma obtida por Bossavit (2004) e descrita na equação (148b). Logo, \vec{f}_{mag}^1 resulta na soma da corrente de condução, descrita pelo termo $\text{rot} \vec{H}$, com a corrente amperiana, definida pelo termo $\text{rot} \vec{M}$.

$$\vec{f}_{mag}^1 = \text{div}(\sigma_M^1) = (\text{rot} \vec{H}) \times \vec{B} + (\text{rot} \vec{M}) \times \vec{B} \quad (80)$$

A divergência do tensor σ_M^2 , descrita na equação (81), resulta na soma da densidade de força \vec{f}_{mag}^0 com os termos adicionais que foram calculados para o caso de magnetização independente da deformação.

$$\text{div}(\sigma_M^2) = \text{div}(\sigma_M^0) - \text{div}\left(\frac{1}{2}(\vec{B} \otimes \vec{M} + \vec{M} \otimes \vec{B})\right) + \text{div}\left(\left(\vec{M} \cdot \vec{B}\right) \mathbb{I}\right) \quad (81)$$

O cálculo do terceiro termo à direita de (81), utilizando as identidades anteriores, é descrito na equação (82).

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\left(\vec{M} \cdot \vec{B}\right) \mathbb{I}\right) &= \nabla\left(\vec{M} \cdot \vec{B}\right) = (\nabla \vec{M}) \vec{B} + (\nabla \vec{B}) \vec{M} \\ &= \vec{B} \times \text{rot} \vec{M} + \vec{B} \nabla \vec{M} + \vec{M} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{M} \nabla \vec{B} \end{aligned} \quad (82)$$

De (73b), (73c), (76) e (82) em (81), a densidade de força \vec{f}_{mag}^2 resultante é apresentada na equação (83), sendo a mesma obtida por Bossavit (2004) e descrita na equação (149b).

$$\vec{f}_{mag}^2 = \text{div}(\sigma_M^2) = (\text{rot} \vec{H}) \times \vec{B} + \vec{M} \times \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{M} \quad (83)$$

A divergência do tensor σ_M^3 , descrita na equação (84a), resulta na soma da densidade de força \vec{f}_{mag}^0 com o termo calculado em (82). De (76) e (82) em (84a), a

densidade de força \vec{f}_{mag}^3 para o caso de magnetização constante no volume é descrita na equação (84b).

$$div(\sigma_M^3) = div(\sigma_M^0) + div\left(\left(\vec{M} \cdot \vec{B}\right)\mathbb{I}\right) \quad (84a)$$

$$\vec{f}_{mag}^3 = div(\sigma_M^3) = \frac{1}{2}\left(\vec{B}\nabla\vec{M} + \vec{M}\nabla\vec{B} - \vec{B}div\vec{M}\right) + (rot\vec{H}) \times \vec{B} + \vec{M} \times rot\vec{B} \quad (84b)$$

3 MÁQUINA DE FLUXO AXIAL COM ÍMÃS PERMANENTES

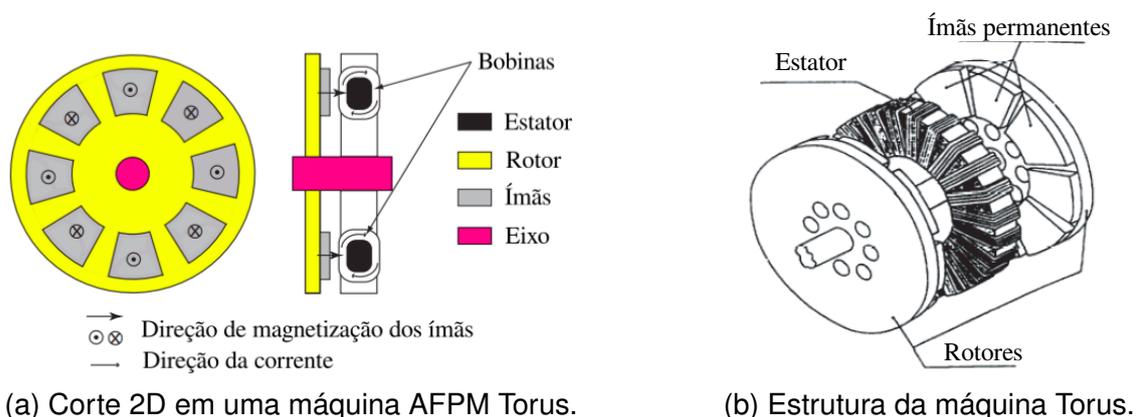
Neste capítulo são apresentados os principais conceitos relacionados com as máquinas de fluxo axial com ímãs permanentes (AFPM), especificamente o comportamento magnético, as possibilidades de simulação em elementos finitos e as influências de forças e tensões na máquina.

3.1 MÁQUINA AFPM TORUS

Máquinas de fluxo axial com ímãs permanentes possuem formato em disco, de forma que o fluxo magnético no entreferro flui paralelamente ao eixo de rotação. Entre as principais vantagens em relação às máquinas de fluxo radial se tem a possibilidade de maior relação potência-peso, o que resulta em menos material para o núcleo e maior eficiência. Devido ao menor tamanho, em relação à máquina de fluxo radial, e o formato em disco do rotor e estator, pode ser uma vantagem para aplicações em que se tem limitação de espaço, como veículos elétricos, por exemplo. Além disso, a direção do fluxo magnético no entreferro pode ser variada, de forma que diversas topologias podem ser obtidas (GIERAS; WANG; KAMPER, 2008).

Uma topologia típica de máquina AFPM é a máquina TORUS sem ranhuras com configuração de dois rotores e um estator com bobinas toroidais, conforme as Figuras 6a e 6b, em cada rotor se tem ímãs permanentes em formato de arco magnetizados no sentido axial. Essa topologia pode ser utilizada como gerador eólico de pequeno porte, por exemplo.

Figura 6 – Máquina AFPM.

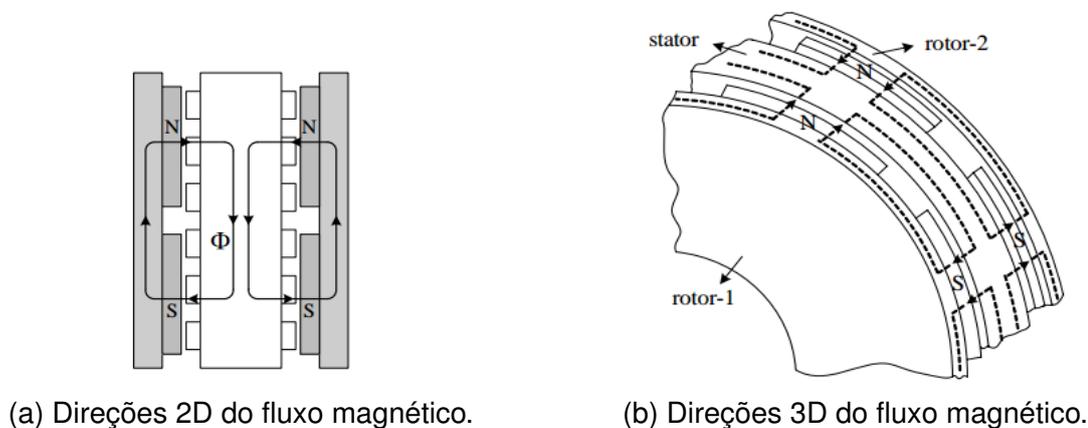


Fonte – Libert (2004).

O caminho do fluxo magnético na máquina no raio médio é apresentado na Figura 7a e em 3D na Figura 7b. O fluxo produzido pelos ímãs atravessa o entreferro na direção axial, atravessa circunferencialmente através do estator, e retorna no rotor

pelo ímã de magnetização oposta. Se observa que a máquina pode ser tratada como duas partes independentes devido à direção do fluxo (AYDIN; HUANG; LIPO, 2004).

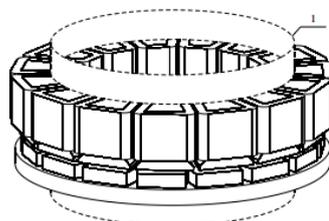
Figura 7 – Fluxo magnético na máquina AFPM.



Fonte – Aydin, Huang e Lipo (2004).

A modelagem da máquina AFPM com ímãs montados superficialmente pode ser feita utilizando modelos analíticos, método dos elementos finitos (MEF) 2D ou MEF 3D. A simulação em 2D geralmente é realizada considerando o raio médio da máquina, de forma que se tem resultados com baixa precisão quando comparados com a simulação 3D. Além disso, também há modelos que consideram uma situação quase-3D, ou seja, a máquina AFPM é considerada como sendo um conjunto de máquinas lineares, de forma que o somatório dos resultados individuais resulta na operação total da máquina simulada, com foco principal em maior velocidade de simulação na etapa de projeto (PARVIAINEN; NIEMELÄ; PYRHÖNEN, 2004).

Figura 8 – Corte no raio médio da máquina.



Fonte – Vansompel (2013).

3.2 TOPOLOGIA SIMULADA

A topologia de máquina AFPM TORUS simulada é baseada no projeto de Moradi e Darabi (2012) para aplicações de baixa velocidade. As principais características são

apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros da máquina.

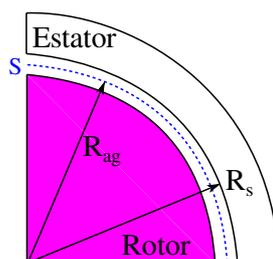
Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade
Potência nominal		5000	W
Fases		3	
Tensão de linha		219,05	V
Tensão de fase		126,47	V
Velocidade nominal		200	rpm
Conexão		Y	
Pares de polos		14	
Densidade de corrente	\vec{J}	7,8	A/mm ²
Indução de pico no entreferro	\vec{B}_{mg}	0,74	T
Indução remanente do ímã	\vec{B}_r	1,17	T
Diâmetro externo	D_o	0,47	m
Diâmetro interno	D_i	0,27	m
Comprimento axial da máquina		0,097	m
Comprimento do entreferro (do ímã à bobina)		0,0015	m
Comprimento axial do núcleo do estator		0,020	m
Comprimento axial do núcleo do rotor		0,0327	m
Comprimento axial das bobinas		0,0044	m
Relação entre passo polar e passo do ímã	α_i	0.72	

Fonte – Moradi e Darabi (2012).

3.3 TENSÕES MECÂNICAS E FORÇAS EM MÁQUINAS AFPM

A maioria dos trabalhos relacionados com o cálculo de forças e tensões mecânicas em máquinas AFPM utiliza o método do tensor de Maxwell aplicado em uma superfície fechada no ar, a qual contém o objeto de interesse do cálculo, de forma similar à Figura 9, para uma máquina de fluxo radial sem ranhuras, que resulta na força magnética total agindo no estator ou no rotor.

Figura 9 – Cálculo da força total em uma máquina sem ranhuras.



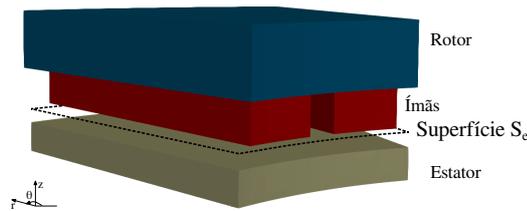
Fonte – Adaptado de Pile *et al.* (2019).

Utilizando o tensor de Maxwell σ_M^0 para um material isotrópico com permeabilidade μ_0 , a força total \vec{F} pode ser escrita conforme a equação (85), por meio da aplicação do teorema da divergência, de forma que S corresponde à uma superfície fechada e \vec{n} o vetor unitário normal à S (MEESSEN; PAULIDES; LOMONOVA, 2013).

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \text{div } \sigma_M^0 d\Omega = \oint_S \sigma_M^0 \cdot \vec{n} dA \quad (85)$$

Para o tensor de Maxwell em coordenadas cilíndricas, para aplicação na máquina AFPM, considerando S uma superfície cilíndrica descrita em termos de uma superfície no entreferro S_e , e uma superfície S_0 onde a indução é de baixa intensidade (e a contribuição à força total pode ser desprezada), com $S = S_e \cup S_0$. Dessa forma, para um par de polos de uma máquina AFPM, S_e é representada conforme a Figura 10 com vetor normal \vec{n} definido na direção paralela à z .

Figura 10 – Superfície S_e na máquina AFPM.



Fonte – Autoria própria.

As componentes da força total nas direções radial r , tangencial θ e axial z são descritas pelas equações (86a), (86b) e (86c).

$$F_r = \frac{1}{\mu_0} \oint_{S_e} B_r B_z ds \quad (86a)$$

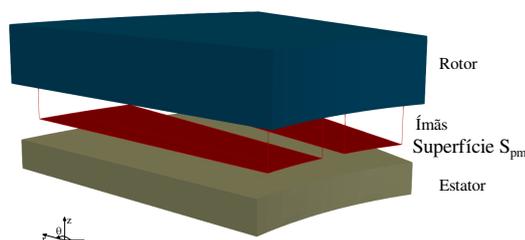
$$F_\theta = \frac{1}{\mu_0} \oint_{S_e} B_\theta B_z ds \quad (86b)$$

$$F_z = \frac{1}{\mu_0} \oint_{S_e} \frac{(B_z^2 - B_r^2 - B_\theta^2)}{2} ds \quad (86c)$$

Em Gieras, Wang e Kamper (2008), a força total de atração na máquina AFPM pode ser calculada por meio da equação (87a) com S_{pm} , representada na Figura 11, sendo a área de todos os ímãs permanentes e calculada por meio da equação (87b). Nesse caso, as componentes B_r e B_θ são desprezadas e $B_z = B_{mg}$.

$$F_z \approx \frac{1}{2} \frac{B_{mg}^2}{\mu_0} S_{pm} \quad (87a)$$

$$S_{pm} = \alpha_i \frac{\pi}{4} (D_o^2 - D_i^2) \quad (87b)$$

Figura 11 – Superfície S_{pm} nos ímãs máquina AFPM.

Fonte – Autoria própria.

A força total pode ser vista como atuando no centro de gravidade do corpo (IDA; BASTOS, 1992). A precisão desse método depende da escolha da superfície para a integração, bem como na precisão no cálculo dos campos \vec{B} e \vec{H} , além disso, a soma das forças locais resulta na força total (REN, 1994).

Em Li, Zhang e Liu (2020), o método do tensor de Maxwell é utilizado para o cálculo de forças eletromagnéticas em uma máquina AFPM com a topologia de um rotor e um estator, observando principalmente a influência da excentricidade. A excentricidade é uma falha mecânica que resulta em não uniformidade no entreferro da máquina, dessa forma, se analisa a influência desse parâmetro sobre a indução \vec{B} no entreferro, de maneira que resulta em uma alteração significativa principalmente na componente axial de \vec{B} .

A componente radial de \vec{B} é desprezada em favor de uma modelagem quase-3D, de forma que as forças magnéticas que agem no estator e rotor são descritas por (86b) e (86c). Os campos são calculados de maneira analítica e por MEF considerando diversas condições de excentricidade, de forma que as respectivas densidades de força são analisadas e comparadas (LI; ZHANG; LIU, 2020).

Em diversos trabalhos há a necessidade de cálculo da força axial de atração entre partes da máquina. Em Cao, Huang e Jin (2012), utilizando uma topologia de máquina AFPM com estator *coreless*, o campo magnético e a resistência mecânica do rotor são estudadas. A configuração *coreless* pode eliminar problemas como correntes induzidas e perdas por histerese, e dessa forma, a máquina pode operar com maior eficiência. Além disso, a não utilização de material magnético resulta em menor peso no estator, aumentando a densidade de potência.

Em Cao, Huang e Jin (2012), a força axial de atração entre ímãs permanentes e rotores é calculada utilizando (86c), considerando somente a componente B_z e a superfície do ímã paralela à direção axial, de forma que o valor calculado é inserido como força nodal para o cálculo de tensões mecânicas no rotor. Uma metodologia similar é utilizada em Pranjic e Vrtic (2017) com o objetivo de projetar a espessura do rotor por meio da simulação de tensões mecânicas de origem magnética, de forma que

o deslocamento \vec{u} é considerado nulo no raio interno do rotor no problema mecânico. Em Marignetti *et al.* (2006), a força axial de atração devido à ímãs permanentes é utilizada para a seleção dos rolamentos necessários para o rotor, e possivelmente calculada de (86c).

Em Park, Kim e Kim (2014), é realizado o cálculo da vibração e ruído devido às forças eletromagnéticas em uma máquina AFPM com ímãs de ferrite para aplicação em veículos elétricos. As forças magnéticas são calculadas utilizando o tensor de Maxwell no entreferro e decompostas utilizando a transformada rápida de Fourier no domínio de frequências de forma a levar em conta o efeito de componentes harmônicas de ordem elevada no comportamento da vibração e ruído do motor.

Em Kumar, Lipo e Kwon (2016), se utiliza uma máquina AFPM para aplicações de alta velocidade com análise da tensão mecânica devido às forças centrífugas no rotor para dois tipos de ímãs permanentes (ferrite e SmCo), considerando deslocamento nulo no eixo do rotor.

Os parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos mostram que a resistência à tração do ímã é menor que a do aço do rotor, logo, é a parte mais sensível à tensão mecânica. Dessa maneira, é utilizada uma parte de material não magnético junto aos ímãs para manter as tensões mecânicas em níveis adequados e não afetar a espessura do entreferro. São simulados em elementos finitos as situações do rotor com e sem a proteção nos ímãs, e se observa que com a proteção há redução na deformação total (KUMAR; LIPO; KWON, 2016).

4 FORMULAÇÕES

A simulação das forças locais e tensões mecânicas é feita após o cálculo de grandezas magnéticas. Neste capítulo são apresentadas as formulações para a simulação magnética e a formulação do problema acoplado magnetoelástico, tendo como termo fonte o tensor de Maxwell.

4.1 PROBLEMA MAGNETOSTÁTICO COM FORMULAÇÃO EM POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

As equações de Maxwell para o caso magnetostático são descritas em (88a) e (88b) com \vec{J} sendo a densidade de corrente imposta. Para um domínio de cálculo Ω cujo contorno total $\partial\Omega$ pode ser decomposto nas partes $\partial\Omega_B$ e $\partial\Omega_H$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_B \cup \partial\Omega_H$), as condições de contorno do problema podem ser definidas conforme as equações (88c) e (88d) (BASTOS; SADOWSKI, 2013).

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (88a)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (88b)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}|_{\partial\Omega_H} = \vec{0} \quad (88c)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}|_{\partial\Omega_B} = 0 \quad (88d)$$

Para materiais isotrópicos nos quais se tem uma relação aproximadamente linear entre \vec{M} e \vec{H} , a relação constitutiva magnética pode ser escrita conforme a equação (89a), com μ representando a permeabilidade magnética e relacionada com as permeabilidades relativa μ_r e no vácuo μ_0 , e a susceptibilidade χ pela equação (89b).

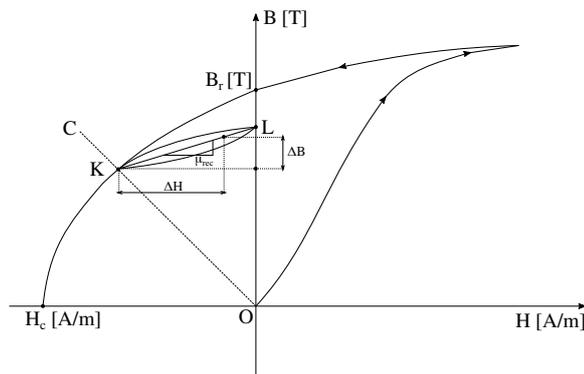
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H} \quad (89a)$$

$$\mu = \mu_r\mu_0 = (1 + \chi)\mu_0 \quad (89b)$$

Após um ímã permanente ser fabricado, um campo \vec{H} de alta intensidade é aplicado e então removido, fazendo com que a indução siga o caminho indicado na Figura 12. O ponto de operação K do ímã é determinado pela intersecção da linha OC (reta de carga) com o segundo quadrante do laço de histerese, chamado de curva de desmagnetização do material. A inclinação da reta de carga é determinada pelo fator de desmagnetização, que depende da geometria do ímã. O campo desmagnetizante age na direção oposta da magnetização \vec{M} do ímã permanente (CULLITY; GRAHAM, 2008).

Caso um campo magnético seja aplicado à um ímã previamente magnetizado, com ponto de operação K , na direção da magnetização do ímã, o campo desmagnetizante é reduzido e o ponto de operação do ímã é alterado para L , conforme a Figura 12. Caso esse campo aplicado seja retirado, o ponto retorna a K , completando um laço menor de histerese, que pode ser aproximado por uma reta chamada reta de recuo, cuja inclinação é chamada de permeabilidade de recuo μ_{rec} (CULLITY; GRAHAM, 2008).

Figura 12 – Curva de desmagnetização de um ímã permanente.



Fonte – Adaptado de Gieras, Wang e Kamper (2008).

A permeabilidade de recuo μ_{rec} pode ser escrita em termos de uma permeabilidade de recuo relativa μ_{rrec} , com $\mu_{rec} = \mu_{rrec}\mu_0$. Para ímãs permanentes de terras raras e NdFeB, μ_{rrec} geralmente possui valor entre 1,0 e 1,1 (GIERAS; WANG; KAMPER, 2008).

A lei constitutiva para um caso envolvendo ímãs permanentes é descrita na equação (90a), fazendo $\mu_{rec} = \mu$, em termos da indução remanente \vec{B}_r . De (88b), \vec{B} é relacionado com o potencial vetor magnético \vec{A} por meio da equação (90b).

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r \quad (90a)$$

$$\vec{B} = rot\vec{A} \quad (90b)$$

De (90b) e (90a) se tem $\vec{H} = \nu rot\vec{A} - \nu\vec{B}_r$, com ν sendo a relutividade magnética, definida por $\nu = 1/\mu$. Substituindo em (88a), se obtém a equação (91), que resulta na solução exata do problema magnetostático (definidas algumas condições de contorno).

$$rot\left(\nu rot\vec{A}\right) - \vec{J} - rot\left(\nu\vec{B}_r\right) = \vec{0} \quad (91)$$

Contudo, a solução obtida por MEF é uma aproximação a qual difere da solução exata do problema. Seja \vec{R} o resíduo vetorial, definido conforme (92a), e \vec{a} a função

teste vetorial, se faz \vec{R} ser zero por meio da operação da equação (92b). Substituindo (92a) em (92b), se obtém a equação (92c) (BASTOS; SADOWSKI, 2013).

$$\text{rot} \left(\nu \text{rot} \vec{A} \right) - \vec{J} - \text{rot} \left(\nu \vec{B}_r \right) = \vec{R} \quad (92a)$$

$$\int_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{R} d\Omega = 0 \quad (92b)$$

$$\int_{\Omega} \vec{a} \cdot \text{rot} \left(\nu \text{rot} \vec{A} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{a} \cdot \text{rot} \left(\nu \vec{B}_r \right) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (92c)$$

Pelo método de Galerkin as funções teste são escolhidas como sendo iguais às funções de aproximação (nodais ou de aresta). Utilizando a fórmula de Green da equação (93a), fazendo $\vec{u} = \nu \text{rot} \vec{A} - \nu \vec{B}_r$ e $\vec{v} = \vec{a}$, (92c) pode ser escrita conforme a equação (93b) (LUZ, 2003).

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{v} d\Omega - \int_{\Omega} \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\vec{u} \times \vec{n}) \cdot \vec{v} dA \quad (93a)$$

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot} \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{a} d\Omega - \int_{\Omega} \nu \vec{B}_r \cdot \text{rot} \vec{a} d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\vec{H} \times \vec{n}) \cdot \vec{a} dA = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{a} d\Omega \quad (93b)$$

A integral de superfície de (93b) pode ser escrita em termos de $\partial\Omega_H$ e $\partial\Omega_B$, conforme a equação (94). Utilizando (88c) e a condição de contorno descrita por $\vec{n} \times \vec{a}|_{\partial\Omega_B} = \vec{0}$, o termo relacionado com o contorno é nulo (LUZ, 2003).

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} (\vec{H} \times \vec{n}) \cdot \vec{a} dA &= \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{a} dA = - \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{H} dA \\ &= \int_{\partial\Omega_H} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{a} dA - \int_{\partial\Omega_B} (\vec{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{H} dA \end{aligned} \quad (94)$$

Dessa forma, aplicando (94) em (93b), a integral resultante, equação (95), possui somente derivadas de primeira ordem, e se diz que resulta na forma fraca do problema magnetostático (BASTOS; SADOWSKI, 2013).

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot} \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{a} d\Omega - \int_{\Omega} \nu \vec{B}_r \cdot \text{rot} \vec{a} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{a} d\Omega \quad (95)$$

4.2 PROBLEMA ELETRODINÂMICO COM FORMULAÇÃO EM POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO

A densidade de corrente fonte é calculada por meio da aplicação da formulação eletrodinâmica nas bobinas, considerando condutores maciços, de forma a respeitar a condição de divergente nulo de maneira fraca (CREUSÉ; DULAR; NICAISE, 2019). As equações de Maxwell no problema eletrodinâmico são descritas por (96a) e (96b)

com a relação constitutiva descrita pela equação (96c), de forma que σ representa a condutividade elétrica.

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (96a)$$

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad (96b)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (96c)$$

Considerando um domínio Ω de contorno $\partial\Omega$ que pode ser decomposto nas partes $\partial\Omega_J$ e $\partial\Omega_E$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_J$), as condições de contorno são descritas pelas equações (97a) e (97b).

$$\vec{n} \times \vec{E}|_{\partial\Omega_E} = 0 \quad (97a)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J}|_{\partial\Omega_J} = 0 \quad (97b)$$

Utilizando o potencial escalar elétrico v definido pela equação (98).

$$\vec{E} = -\text{grad}v \quad (98)$$

Substituindo (98) em (96c) e em (96b), resulta na equação (99).

$$\text{div} \sigma \text{grad}v = 0 \quad (99)$$

A condição de contorno de (97a) pode ser escrita em termos de v , equação (100a), com v_0 sendo um potencial escalar uniforme (MEUNIER, 2010).

$$v|_{\partial\Omega_E} = v_0 \quad (100a)$$

Utilizando a fórmula de Green da equação (101a), fazendo $\vec{u} = \vec{J}$ e $v = v'$, com v' sendo a função teste escalar, resulta na equação (101b).

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{grad}v \, d\Omega + \int_{\Omega} v \text{div} \vec{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v(\vec{n} \cdot \vec{u}) \, dA \quad (101a)$$

$$\int_{\Omega} \vec{J} \cdot \text{grad}v' \, d\Omega + \int_{\Omega} v' \text{div} \vec{J} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v'(\vec{n} \cdot \vec{J}) \, dA \quad (101b)$$

Inserindo as condições de contorno e (96b), resulta na equação (102).

$$\int_{\Omega} \vec{J} \cdot \text{grad}v' \, d\Omega = 0 \quad (102)$$

$$\int_{\Omega} \text{grad}v \cdot \text{grad}v' \, d\Omega = 0$$

4.3 PROBLEMA ELÁSTICO COM FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTO

O cálculo da tensão mecânica devido às forças magnéticas em um material elástico utiliza a relação de equilíbrio, descrita pela equação (103). Como não se considera a magnetostricção inversa (efeitos da tensão mecânica no comportamento magnético), as forças magnéticas locais são consideradas como uma força externa aplicada no corpo.

$$\operatorname{div} \sigma + \vec{f}_{mag} = \vec{0} \quad (103)$$

Considerando um domínio Ω de contorno $\partial\Omega$ que pode ser decomposto nas partes $\partial\Omega_u$ e $\partial\Omega_\sigma$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$), as condições de contorno são descritas pelas equações (104a) e (104b). A equação (104a) fixa o deslocamento nulo na superfície onde é imposta. O termo $\vec{\sigma}_n$ de (104b) corresponde às forças que são aplicadas no contorno externo do corpo (MOËS, 2011).

$$\vec{u}|_{\partial\Omega_u} = \vec{0} \quad (104a)$$

$$\sigma \vec{n}|_{\partial\Omega_\sigma} = \vec{\sigma}_n \quad (104b)$$

Seja \vec{u}' a função teste vetorial, utilizando (92b) em (103), resulta na equação (105).

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma) \cdot \vec{u}' d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{f}_{mag} \cdot \vec{u}' d\Omega \quad (105)$$

O termo à esquerda de (105) pode ser escrito de acordo com a equação (106).

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma) \cdot \vec{u}' d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma : \nabla_s \vec{u}' d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \vec{n}) \cdot \vec{u}' dA \quad (106)$$

O termo \vec{f}_{mag} é relacionado com o tensor de Maxwell por meio da equação (107).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{f}_{mag} \cdot \vec{u}' &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma_M) \cdot \vec{u}' \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_M : \nabla_s \vec{u}' d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma_M \vec{n}) \cdot \vec{u}' dA \end{aligned} \quad (107)$$

Substituindo (106) e (107) em (105), resulta na equação (108).

$$- \int_{\Omega} \sigma : \nabla_s \vec{u}' d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \vec{n}) \cdot \vec{u}' dA = \int_{\Omega} \sigma_M : \nabla_s \vec{u}' d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma_M \vec{n}) \cdot \vec{u}' dA \quad (108)$$

Substituindo $\sigma = C : \epsilon$ em (108) e inserindo as condições de contorno de (104a) e (104b), se tem a forma fraca do problema de elasticidade estática com formulação em deslocamento, equação (109).

$$-\int_{\Omega} (C : \epsilon) : \nabla_s \vec{u}' d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} (\vec{\sigma}_n) \cdot \vec{u}' dA - \int_{\Omega} \sigma_M : \nabla_s \vec{u}' d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma_M \vec{n}) \cdot \vec{u}' dA = 0 \quad (109)$$

4.4 FORÇAS NODAIS E TENSOR DE MAXWELL

A relação entre forças nodais e o tensor de Maxwell é obtida por meio do trabalho virtual δW devido às forças magnéticas para um deslocamento virtual $\delta \vec{u}$ em um nó e descrito conforme a equação (110).

$$\delta W = - \int_{\Omega} (div \sigma_M) \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma_M \cdot \vec{n}) \cdot \delta \vec{u} dA \quad (110)$$

Considerando $\delta \vec{u} = \vec{0}$ na superfície fechada de contorno, (110) pode ser escrito conforme a equação (111).

$$\delta W = \int_{\Omega} (div \sigma_M) \cdot \delta \vec{u} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_M : \nabla \delta \vec{u} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_M^{ik} \partial_k \delta u_i \quad (111)$$

O deslocamento virtual é interpolado utilizando as funções de forma nodais, conforme (112), com i representando a componente x , y ou z , e para elementos tetraédricos n varia de 1 até 4 (KAMEARI, 1993).

$$\delta u_i = \sum_n w_n \delta u_{ni} \quad (112)$$

Dessa forma, a força nodal F_{ni}^N pode ser escrita de acordo com a equação (113), de forma que a integração é realizada sobre todos os elementos que possuem o nó em comum. A força global em um corpo é obtida pelo somatório das forças nodais nos nós da malha do corpo (KAMEARI, 1993).

$$F_{ni}^N = - \int_{\Omega} \sigma_M^{ik} \partial_k w_n d\Omega \quad (113)$$

Considerando uma velocidade virtual, de Henrotte e Hameyer (2007), a força nodal é a mesma que a obtida por Kameari (1993), e descrita por (113).

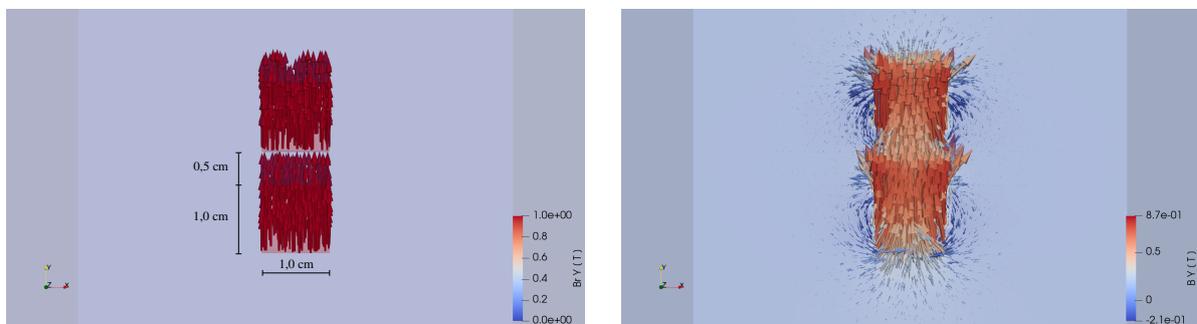
5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As formulações na forma fraca apresentadas no capítulo 4 são utilizadas para simulações numéricas por MEF. A primeira simulação consiste de dois ímãs permanentes com entorno de ar, de forma que a partir do cálculo de grandezas magnéticas, é realizado o cálculo de forças locais e globais. Na sequência, são realizadas diversas simulações magnéticas e mecânicas para a máquina AFPM TORUS. As geometrias são desenhadas no *software* Gmsh (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009), os cálculos numéricos foram realizados no *software* FreeFem++ (HECHT, 2012) e os resultados são visualizados no *software* ParaView (AYACHIT, 2015).

5.1 FORÇAS NODAIS EM ÍMÃS PERMANENTES

A configuração consiste de dois ímãs de 1cm^3 , com indução remanente $\vec{B}_r = 1,0T \vec{j}$, sendo \vec{j} o vetor unitário na direção do eixo y , e entorno de ar, conforme a Figura 13a. Considerando a forma fraca do problema magnetostático de (95) e utilizando elementos de aresta, a componente y da indução \vec{B} resultante é mostrada na Figura 13b.

Figura 13 – Indução magnética para o caso de dois ímãs.



(a) \vec{B}_r (setas) e valor da componente y (cor). (b) \vec{B} (setas) e valor da componente y (cor).

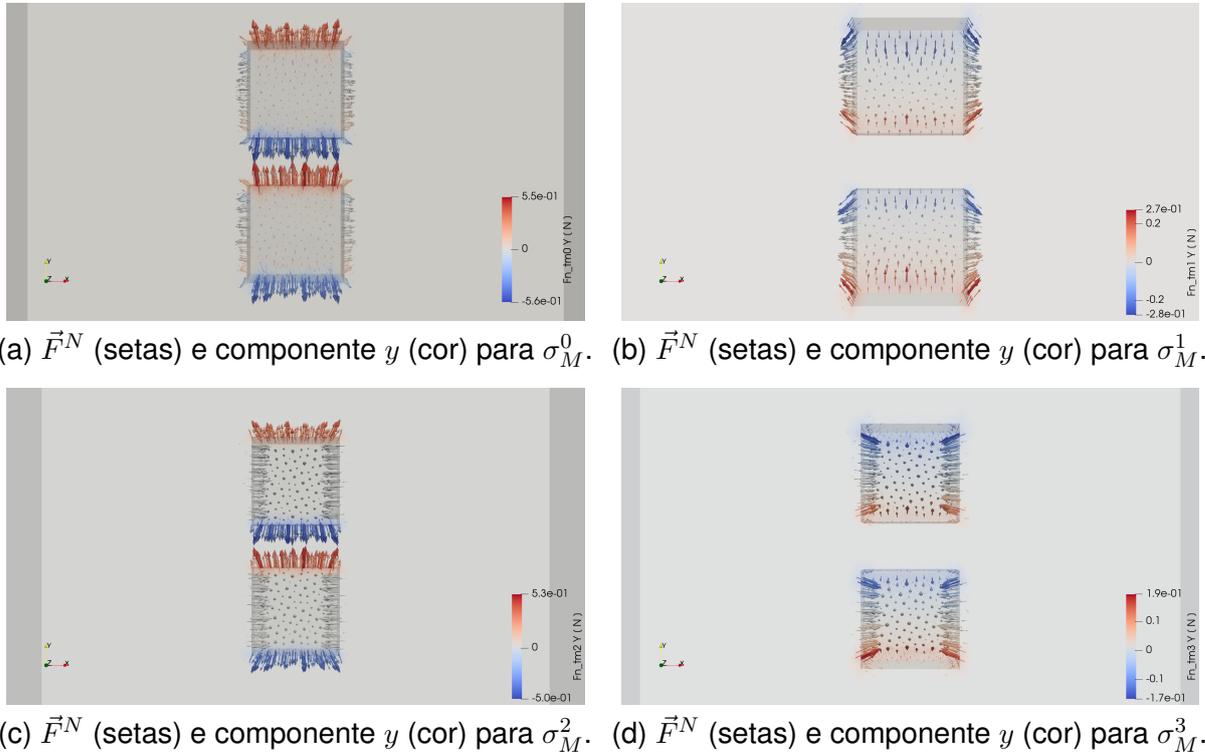
Fonte – Autoria própria.

A permeabilidade dos ímãs é considerada como μ_0 , dessa forma, o campo vetorial \vec{M} é calculado a partir de \vec{B}_r por meio da relação $\vec{M} = \nu_0 \vec{B}_r$, o campo vetorial \vec{H} é calculado utilizando a relação constitutiva do problema $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_r$. A força nodal \vec{F}^N resulta da aplicação da equação (113) para os diferentes modelos de tensor de Maxwell.

As Figuras 14a, 14b, 14c e 14d mostram as forças nodais nos ímãs para os quatro modelos de tensor de Maxwell, de forma que se observa que a distribuição das forças locais são diferentes para cada modelo simulado. Para as forças nodais obtidas

por meio de σ_M^1 e σ_M^2 , se tem resultados similares em Journeaux, Bossavit e Bouillault (2013).

Figura 14 – Forças nodais nos dois ímãs.



Fonte – Autoria própria.

A distribuição de forças locais varia de acordo com o modelo escolhido. Para cada ímã, a distribuição de forças parece equilibrada, contudo, existe uma força resultante de atração entre os ímãs. Isso quer dizer que a maior parte dessas forças é relacionada à própria forma (ou deformação) do ímã, e uma pequena parte relacionada à atração entre ímãs.

Para o cálculo da força global, é realizada a soma de cada componente para todos os nós da malha do ímã. Apesar da distribuição de forças locais ser distinta, a força global é a mesma para os quatro modelos, cuja resultante é ao longo da direção y com $\vec{F} = 6,666N \vec{j}$. A solução analítica para o cálculo da força na estrutura de dois ímãs é apresentada em De Medeiros, Reyne e Meunier (1998), com $\vec{F} = 6,568N \vec{j}$. A diferença entre ambos os métodos é de 1,47%.

Como a força local para um nó é calculada a partir da integração dos elementos (tetraedros, nesse caso) que possuem o nó em comum, dessa forma, para todo o domínio de cálculo, uma malha mais refinada conduz a resultados mais próximos do calculado de forma analítica. Isso é apresentado na Tabela 2, de maneira que são comparadas as forças globais em relação ao cálculo analítico para malhas do ímã com

diferentes números de elementos, assim, a escolha da densidade de malha influencia no cálculo de forças.

Tabela 2 – Força global para diferentes densidades de malha.

Tetraedros	\vec{F}	Diferença
24	$8,2924N \vec{j}$	20,8%
114	$7,9124N \vec{j}$	17,0%
1480	$6,7573N \vec{j}$	2,80%
2652	$6,7001N \vec{j}$	1,97%
4432	$6,6666N \vec{j}$	1,47%
6883	$6,6666N \vec{j}$	1,47%

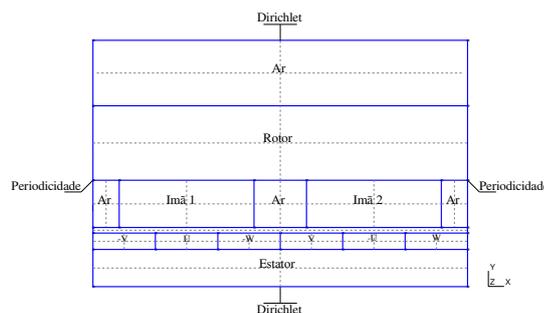
Fonte – Autoria própria.

5.2 SIMULAÇÃO MAGNÉTICA DA MÁQUINA AFPM

A topologia de máquina AFPM TORUS com dois rotores e um estator pode ser simulada como duas partes independentes, ou seja, um rotor e metade do comprimento axial do estator. Uma simulação numérica simplificada consiste de um corte 2D no raio médio da máquina, para um par de polos, conforme realizado em Moradi e Darabi (2012).

A estrutura geométrica é apresentada na Figura 15 com as condições de contorno indicadas e considerando $\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0}$ nas partes superior e inferior. Além disso, nesse caso se simula um instante de operação da máquina, ou seja, se tem corrente imposta somente nas fases *V* e *U* e igual a $7,8 A/mm^2$. A permeabilidade μ é considerada como $1000\mu_0$ para o material ferromagnético do estator e rotor, $1,05\mu_0$ nos ímãs permanentes e μ_0 nos condutores, a indução remanente dos ímãs é definida como $\vec{B}_r = 1,17T \vec{j}$.

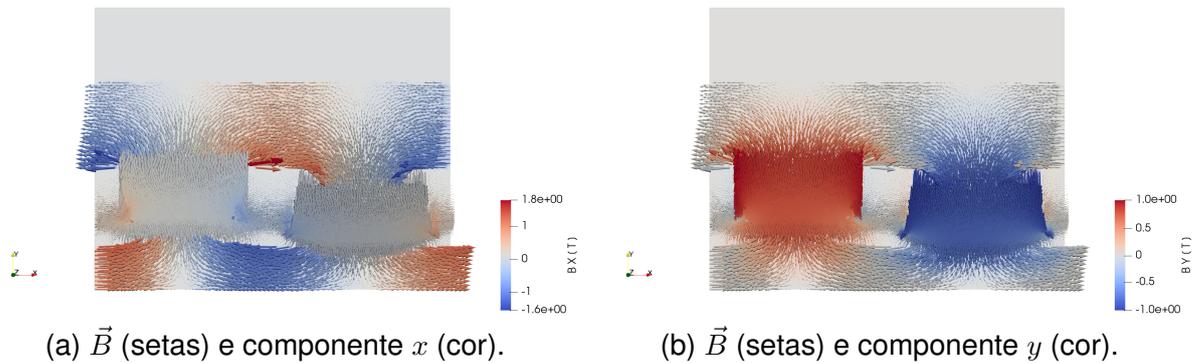
Figura 15 – Corte 2D no raio médio da máquina.



Fonte – Autoria própria.

Por meio da aplicação da forma fraca do problema da magnetostática com formulação em potencial vetor magnético, de (95), e considerando as funções teste como funções nodais, a indução \vec{B} para o caso 2D está apresentada nas Figuras 16a e 16b.

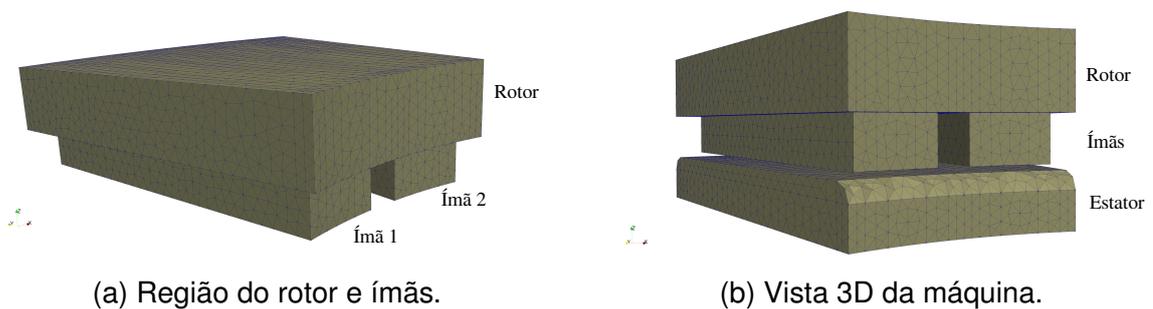
Figura 16 – Mapa de indução no caso 2D.



Fonte – Autoria própria.

Considerando o caso 3D, a geometria simulada é apresentada nas Figuras 17a e 17b. As densidades de corrente são definidas por meio da formulação eletrocinética, equação (102), de forma a respeitar de forma fraca a condição $div\vec{J} = 0$, para o mesmo conjunto de bobinas conduzindo conforme o caso 2D. Nessa simulação, a indução remanente dos ímãs é definida como $\vec{B}_r = 1,17T \vec{k}$, sendo \vec{k} o vetor unitário na direção do eixo z , para as mesmas permeabilidades descritas anteriormente.

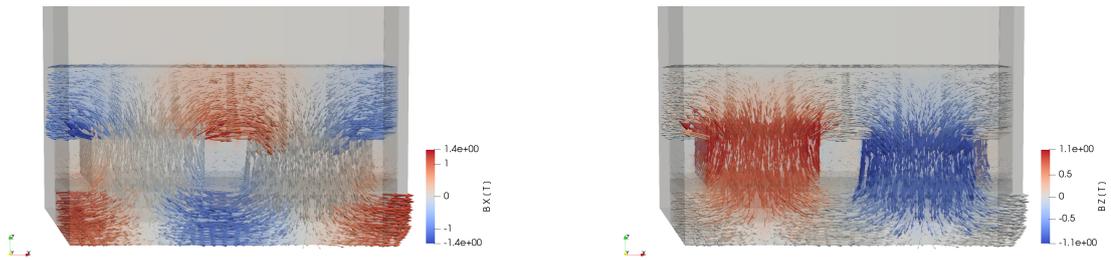
Figura 17 – Geometria 3D da máquina AFPM TORUS.



Fonte – Autoria própria.

O cálculo magnético é realizado utilizando a formulação em \vec{A} de (95), funções teste com elementos de aresta, condições de periodicidade e $\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0}$ aplicado na parte inferior do estator e em uma camada de ar superior ao rotor. A indução resultante é apresentada nas Figuras 18a e 18b, de forma que são mostradas as componentes x e z para uma vista a partir do raio médio da máquina.

Figura 18 – Mapa de indução no caso 3D para uma vista a partir do raio médio.



(a) \vec{B} (setas) e componente x (cor).

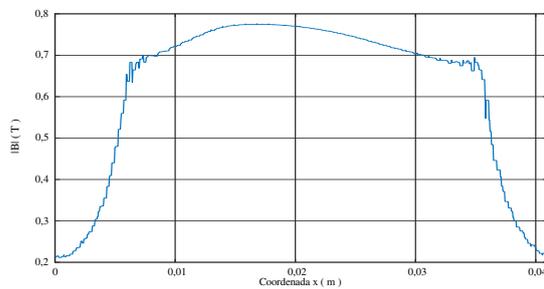
(b) \vec{B} (setas) e componente z (cor).

Fonte – Autoria própria.

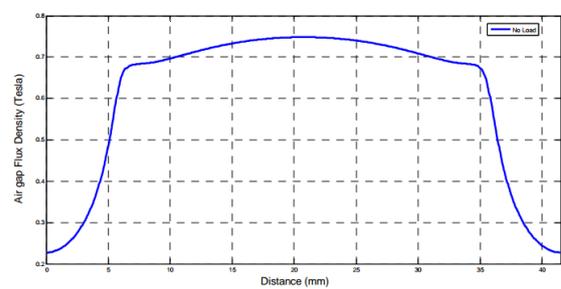
A Figura 19 mostra o módulo de \vec{B} no entreferro para um polo no caso 2D, o qual comparado com o resultado obtido em Moradi e Darabi (2012) na Figura 20, se observam similaridades entre as curvas com diferenças de indução de pico \vec{B}_{mg} . Na simulação apresentada, se tem $\vec{B}_{mg} = 0,775 T$ enquanto que em Moradi e Darabi (2012) $\vec{B}_{mg} = 0,748 T$. Para a simulação 3D, a indução \vec{B} no entreferro para um polo é apresentada na Figura 21.

Figura 19 – $|\vec{B}|$ no caso 2D (simulação).

Figura 20 – $|\vec{B}|$ no caso 2D (referência).

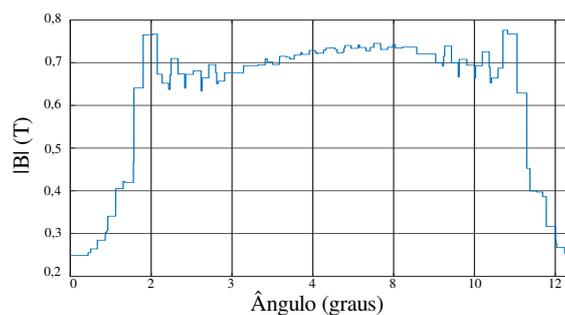


Fonte – Autoria própria.



Fonte – Moradi e Darabi (2012).

Figura 21 – $|\vec{B}|$ no entreferro para o caso 3D.

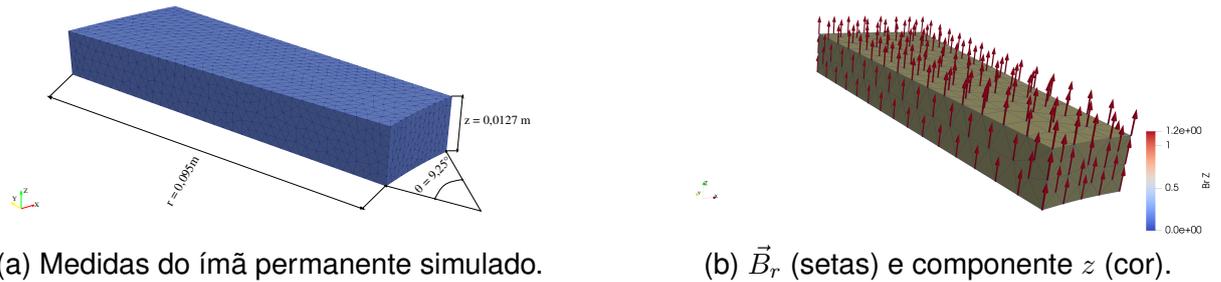


Fonte – Autoria própria.

5.3 FORÇAS NODAIS NO ÍMÃ DA MÁQUINA AFPM

Considerando a geometria 3D de um ímã da máquina AFPM TORUS com entorno de ar, conforme a Figura 22a, com indução remanente $\vec{B}_r = 1,17T \vec{k}$ (um ímã de NdFeB), de acordo com a Figura 22b, e permeabilidade de $1,05\mu_0$.

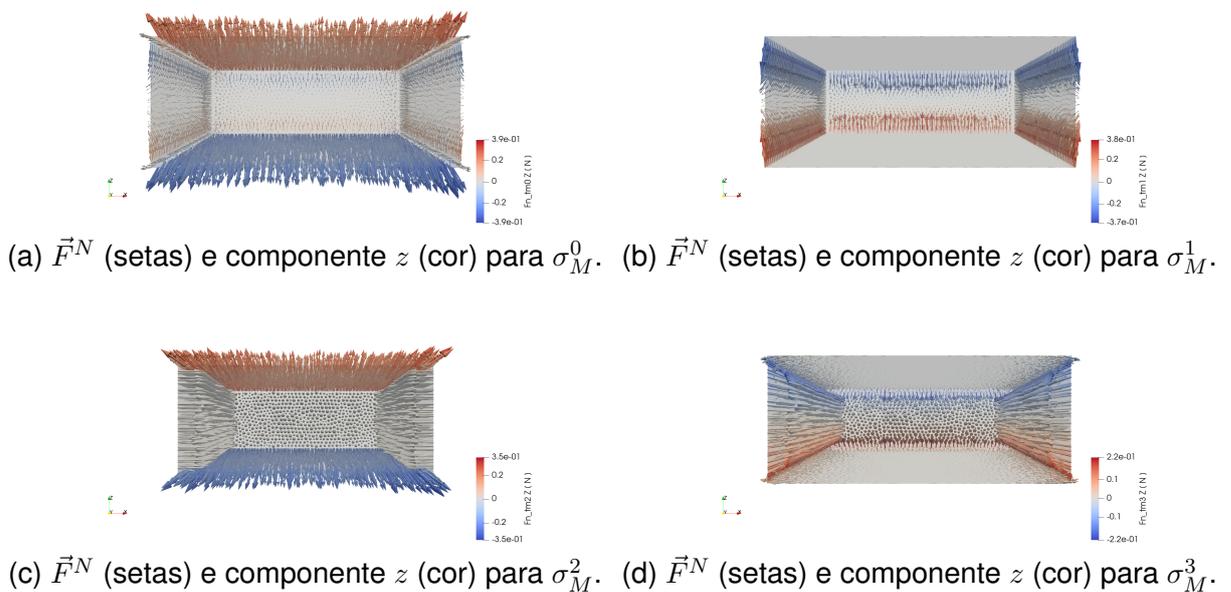
Figura 22 – Geometria e indução remanente do ímã permanente.



Fonte – Autoria própria.

As forças nodais utilizando os diferentes modelos de tensor de Maxwell são apresentadas nas Figuras 23a, 23b, 23c e 23d para uma vista a partir do raio médio do ímã. Novamente se observa que as distribuições das forças nodais são diferentes para cada modelo de tensor de Maxwell. Essas forças podem ser chamadas de forças intrínsecas (DE MEDEIROS; REYNE; MEUNIER; YONNET, 1998), e como se trata de uma situação de um ímã com entorno de ar, nesse caso a força global é nula.

Figura 23 – Forças nodais no ímã da máquina para uma vista a partir do raio médio.



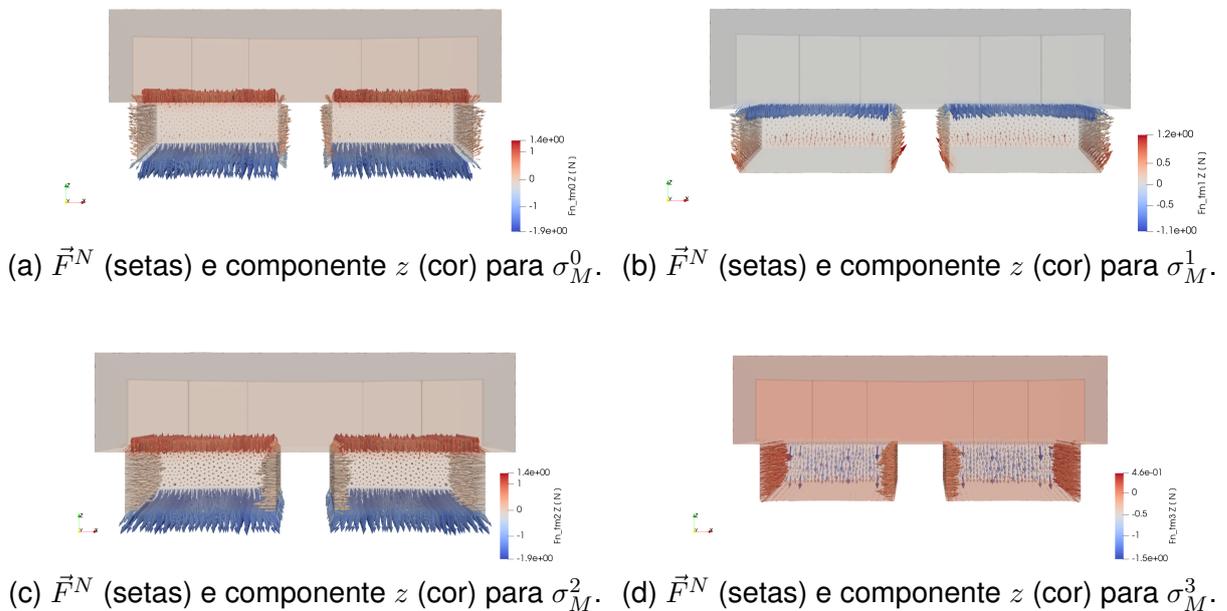
Fonte – Autoria própria.

5.4 FORÇAS NODAIS E TENSÕES MECÂNICAS NA MÁQUINA AFPM

O cálculo de forças e tensões mecânicas na máquina AFPM é feito considerando duas partes independentes, o conjunto formador pelas bobinas e aço elétrico do estator, e o conjunto formado pelos ímãs permanentes e o aço elétrico do rotor. Em cada conjunto, os diferentes materiais são assumidos como perfeitamente colados mecanicamente. A partir de \vec{B} calculado por meio de \vec{A} , o campo magnético é calculado através de $\vec{H} = (1/\mu)(\vec{B} - \vec{B}_r)$ nos ímãs permanentes com $\mu = 1.05\mu_0$ e $\vec{H} = (1/\mu)\vec{B}$ nos materiais magnéticos moles e ar com $\mu = 1000\mu_0$ nos aços elétricos e $\mu = \mu_0$ no ar. O campo de magnetização é calculado por meio da relação $\vec{M} = \nu_0\vec{H}(\mu - \mu_0) + \nu_0\vec{B}_r \approx \nu_0\vec{B}_r$ para ímãs permanentes e $\vec{M} = \nu_0\vec{H}(\mu - \mu_0)$ para materiais magnéticos moles.

A descrição do comportamento magnetoelástico de materiais magnéticos é necessária para representá-los corretamente. Muitos dados experimentais e modelos são disponíveis na literatura para os materiais magnéticos moles. Nesse trabalho, o tensor de Maxwell σ_M^0 é utilizado para esses materiais, e a análise é focada sobre os diferentes tensores de Maxwell para ímãs permanentes. A distribuição das forças nodais no conjunto do rotor é apresentada nas Figuras 24a, 24b, 24c e 24d.

Figura 24 – Forças nodais no rotor para uma vista a partir do raio médio.



Fonte – Autoria própria.

Comparado com o caso do ímã com entorno de ar, se observam diferenças na distribuição de forças nodais quando os ímãs são colados em uma superfície magnética. Nesse caso, devido às interações do ímã com um meio exterior, se tem forças de

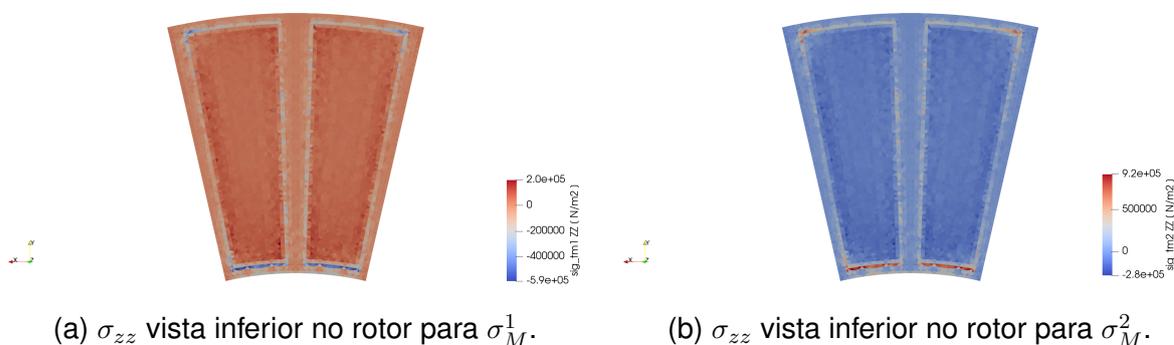
interações somadas às forças intrínsecas (que são calculadas para o ímã com entorno de ar) (DE MEDEIROS; REYNE; MEUNIER; YONNET, 1998).

A soma das forças nodais para o conjunto do rotor resulta no mesmo valor para os quatro modelos, de forma que a componente na direção z é a mais presente e igual a $F_z = -843,37N$, e pode ser relacionada como a força axial de atração entre rotor e estator.

O cálculo de tensão mecânica é realizado utilizando a forma fraca do problema de elasticidade da equação (109), considerando materiais lineares isotrópicos. O tensor de rigidez C é calculado de maneira que para os materiais magnéticos moles e ímãs permanentes se tem $E = 200\text{ GPa}$ e $\nu_p = 0.3$, e para o cobre se tem $E = 140\text{ GPa}$ e $\nu_p = 0.35$. A condição de contorno $\vec{u} = \vec{0}$ é aplicada na superfície de contato do estator e rotor com o eixo da máquina, e são consideradas condições de periodicidade, de modo que as simulações são realizadas para um par de polos.

Utilizando o tensor de tensões em coordenadas cilíndricas, a componente σ_{zz} para o material magnético mole do rotor é apresentada na Figura 25a para uma vista na superfície de contato com os ímãs permanentes e considerando as forças nodais descritas por σ_M^1 , e na Figura 25b para as forças nodais descritas por σ_M^2 .

Figura 25 – Componente σ_{zz} do tensor de tensões no rotor.

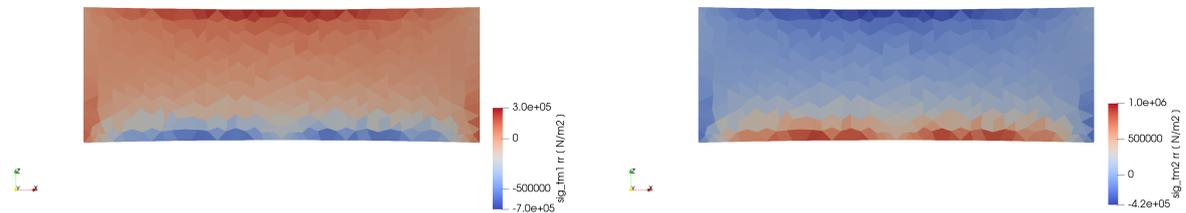


Fonte – Autoria própria.

Para a componente σ_{zz} , as tensões mecânicas devido às forças nodais descritas por σ_M^0 são similares às apresentadas na Figura 25a, enquanto que para as forças nodais descritas por σ_M^3 , se tem tensões mecânicas similares às descritas pela Figura 25b. Apesar de diferentes valores, se observam semelhanças na distribuição de tensões, com diferenças no sentido.

As forças nodais descritas por σ_M^0 e σ_M^1 resultam em tensões similares para a componente σ_{rr} , conforme a Figura 26a para uma vista no raio interno (superfície de contato do rotor com o eixo), enquanto que as forças nodais calculadas por σ_M^2 e σ_M^3 resultam em tensões similares na componente σ_{rr} , de acordo com a Figura 26b.

Figura 26 – Componente σ_{rr} do tensor de tensões no rotor.



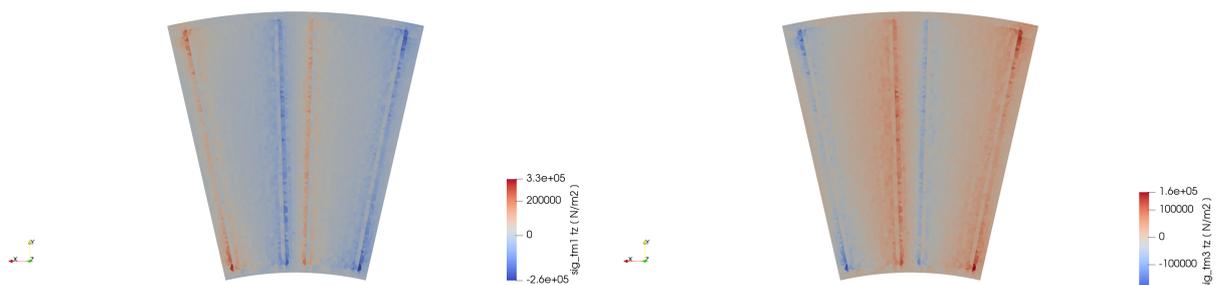
(a) σ_{rr} para uma vista no raio interno para σ_M^1 . (b) σ_{rr} para uma vista no raio interno para σ_M^2 .

Fonte – Autoria própria.

Se observa que para os quatro modelos de tensor de Maxwell se tem valores de tensões similares para a componente σ_{rr} , com diferenças no sentido da tensão mecânica, por exemplo, na Figura 26a se tem uma compressão na parte inferior, enquanto que na Figura 26b se tem tração.

A componente de cisalhamento mais significativa é $\sigma_{\theta z}$, apresentada na Figura 27a em uma vista inferior do rotor para as forças nodais descritas por σ_M^1 e na Figura 27b para σ_M^3 . Novamente, se tem similaridades nos modelos σ_M^0 e σ_M^1 , e σ_M^2 e σ_M^3 , com diferenças no sentido da tensão. A componente $\sigma_{\theta z}$ é mais presente principalmente nas regiões próximas de contato dos ímãs permanentes com o material magnético mole do rotor.

Figura 27 – Componente $\sigma_{\theta z}$ do tensor de tensões no rotor.



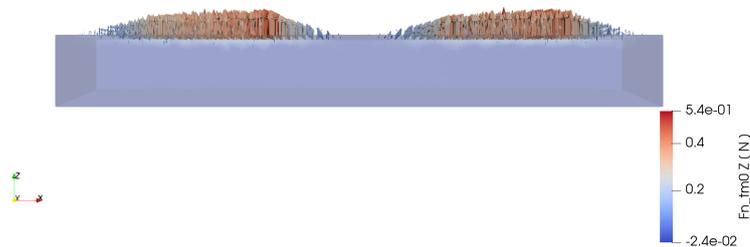
(a) $\sigma_{\theta z}$ vista inferior no rotor para σ_M^1 . (b) $\sigma_{\theta z}$ vista inferior no rotor para σ_M^3 .

Fonte – Autoria própria.

Para o suporte do estator e bobinas, são consideradas apenas as forças nodais descritas pelo tensor σ_M^0 devido à mesma justificativa para o caso do rotor, dessa forma, a distribuição de forças nodais é apresentada na Figura 28 para uma vista a partir do raio médio.

O somatório das forças nodais no estator resulta na componente z sendo a mais presente e igual a $F_z = 844,69 N$.

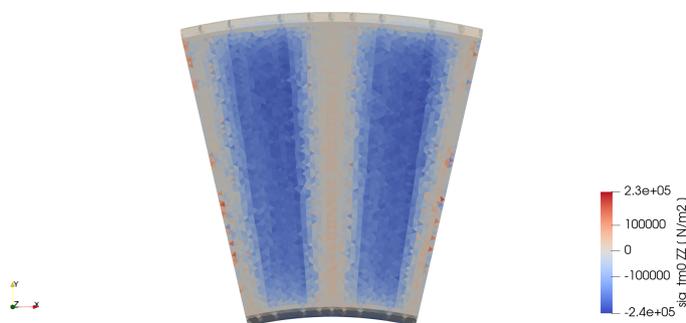
Figura 28 – \vec{F}^N (setas) e componente z (cor) para σ_M^0 no aço elétrico do estator.



Fonte – Autoria própria.

As forças nodais são inseridas como termo fonte no cálculo de elasticidade. A componente σ_{zz} do tensor de tensões é apresentada na Figura 29 nas bobinas do estator, e se observa uma tensão do tipo compressão mais presente em regiões que são mais próximas dos ímãs do rotor.

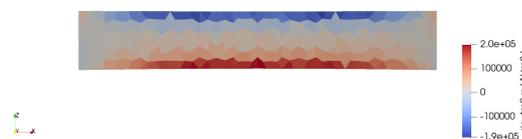
Figura 29 – Componente σ_{zz} do tensor de tensões no estator.



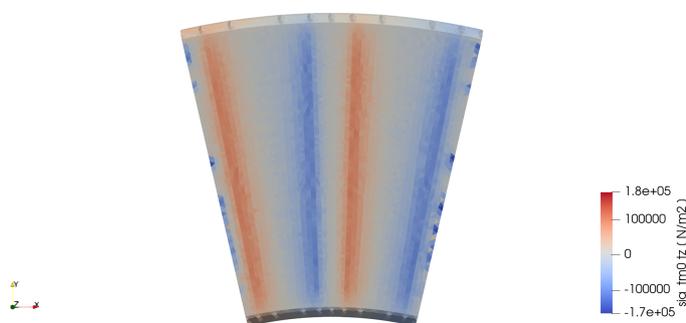
Fonte – Autoria própria.

A componente σ_{rr} é apresentada na Figura 30 para uma vista no raio externo do material magnético mole do estator, sendo mais presente nessa superfície, para as forças nodais descritas por σ_M^0 .

A componente de cisalhamento $\sigma_{\theta z}$ é a mais presente em comparação com as demais, e é apresentada na Figura 31 para uma vista nas bobinas, a qual é mais presente em regiões mais próximas dos ímãs permanentes do rotor.

Figura 30 – Componente σ_{rr} do tensor de tensões no aço elétrico do estator.

Fonte – Autoria própria.

Figura 31 – Componente $\sigma_{\theta z}$ do tensor de tensões no estator.

Fonte – Autoria própria.

5.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de resultarem em diferentes forças locais, as tensões mecânicas de origem magnética são similares para os quatro modelos de tensor de Maxwell. Se observou que a componente σ_{zz} é a mais presente, e se tem uma distribuição de tensões mecânicas similar para todos os modelos. Para a componente σ_{rr} , as tensões mecânicas devido às forças locais descritas por σ_M^0 e σ_M^1 são similares às descritas por σ_M^2 e σ_M^3 , com diferenças principalmente no sentido da tensão.

As diferenças nas tensões podem ser explicadas pois foram consideradas forças de interação e intrínsecas como termo fonte. Uma opção é realizar a diferença entre forças intrínsecas (o caso do ímã com entorno de ar) e as forças intrínsecas e de interação (o caso do ímã e material magnético mole do rotor), de forma que resulta nas forças intrínsecas, e essas são inseridas como termo fonte no cálculo de elasticidade, conforme apresentado em De Medeiros, Reyne, Meunier e Yonnet (1998) para um caso com dois ímãs permanentes.

As simulações mostram que as tensões mecânicas no estator e rotor possuem um valor máximo próximo de 1 MPa. Em Kim *et al.* (2017) são apresentados parâme-

tros mecânicos do aço elétrico 50PN470 para aplicação na máquina AFPM, de forma que a resistência à tração é de 395 MPa , ou seja, as tensões mecânicas de origem magnética simuladas ficam muito distantes dessa condição limite, ressaltando que nas simulações realizadas foi considerado comportamento linear do material magnético e somente um instante de operação.

Comparando as propriedades mecânicas do aço elétrico com o SMC, a resistência à tração do material Somaloy 700 3P é de 65 MPa para $E = 190 \text{ GPa}$ e $\nu_p = 0.23$, dessa forma, sua aplicação em uma máquina AFPM de alta velocidade deve ser analisada com cuidado, pois além das tensões mecânicas de origem magnética, se tem as tensões mecânicas devido às forças centrífugas (KIM *et al.*, 2017), (KUMAR; LIPO; KWON, 2016).

Devido à topologia da máquina de dois rotores e um estator, as forças axiais que agem no estator são compensadas. Dessa forma, as forças axiais agem predominantemente nos discos dos rotores. Se observou que a componente $F_z = -843,37 \text{ N}$ para um par de polos, logo, considerando toda a geometria da máquina, se tem uma força $F_z = 11,8 \text{ kN}$. Analiticamente, de (87a), se obtém $F_z = 18,2 \text{ kN}$, uma diferença de $54,2\%$ entre os métodos.

Apesar da diferença no cálculo, se observa que para esta geometria de máquina AFPM a força axial de atração poderá causar problemas mecânicos. Isso é observado em Caricchi *et al.* (1998), onde é construído um protótipo de uma máquina AFPM com geometria similar à simulada neste trabalho, de maneira que a montagem dos rotores no eixo da máquina é descrita como uma tarefa extremamente complicada devido às forças axiais entre rotor e estator, que também influenciam na dificuldade de posicionar o entreferro com $1,5 \text{ mm}$. Para um segundo protótipo, projetado para operar com menor indução magnética no entreferro e menor dimensão dos ímãs, mas sob as mesmas especificações de potência e velocidade nominais, a força axial é reduzida, de maneira que dificuldades na montagem da máquina são reduzidas. Para esse segundo protótipo, a força de atração $F_z = 5,7 \text{ kN}$ por meio da aplicação de (87a).

Sobre o cálculo de forças locais, se tem a influência de uma maior discretização da malha no resultado final, o que também pode explicar as diferenças no cálculo de forças globais no rotor e estator da máquina AFPM, respectivamente $-843,37 \text{ N}$ e $844,69 \text{ N}$. Além disso, para o caso simulado de dois ímãs permanentes com entorno de ar, como as forças nodais são calculadas a partir de \vec{B} obtido por MEF, se observa a influência da espessura da camada de ar no resultado final, ou seja, quanto maior a camada (até um certo limite), mais próximo do valor de força global calculado analiticamente.

6 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi avaliar forças e tensões mecânicas de origem magnética em estruturas com ímãs permanentes. Na literatura, muitas vezes é utilizada geometria diferencial para o cálculo de forças, de forma que o tensor de Maxwell é obtido posteriormente. Para simplificar a análise, uma abordagem vetorial, por meio de conceitos de mecânica dos meios contínuos e o princípio das potências virtuais, foi utilizada de forma a se ter expressões de tensor de Maxwell baseados em modelos matemáticos sobre o comportamento da magnetização em relação à deformação, de maneira que na abordagem utilizada, o tensor de Maxwell é obtido diretamente.

As forças locais são calculadas a partir do tensor de Maxwell, que é descrito em termos de campos vetoriais magnéticos, calculados por MEF. Se observou que as distribuições de forças locais são diferentes para cada modelo, mas resultam na mesma força global. Para a aplicação em uma máquina AFPM TORUS, se obteve as tensões mecânicas resultantes considerando o acoplamento magnetoelástico na forma parcial, ou seja, as forças locais são utilizadas como uma força externa no problema de elasticidade, para materiais lineares isotrópicos.

Para o caso de materiais magnéticos com permeabilidade constante na máquina AFPM, se observou que as tensões mecânicas de origem magnética não irão exercer influência nas estruturas do rotor e estator, contudo, para a geometria estudada, as forças axiais podem causar problemas no momento da montagem da máquina.

Dessa maneira, as expressões de tensor de Maxwell apresentadas nesse trabalho podem ser uma ferramenta para análise de grandezas mecânicas de maneira a auxiliar no projeto de dispositivos eletromagnéticos com ímãs permanentes.

Como sugestões de trabalhos futuros se tem:

- Realizar a simulação magnética não linear considerando diferentes tipos de materiais magnéticos, como o SMC e fabricação aditiva, para aplicação em máquinas elétricas, simulando-as para um período completo de operação, e aprofundar a análise de tensões mecânicas de origem magnética.
- Como foram aplicados modelos matemáticos para a descrição do comportamento da magnetização em relação à deformação, poderiam ser comparados com modelos físicos de forma a se observar similaridades ou diferenças.
- Estudo da alteração da referência de energia magnética e os efeitos resultantes nas forças nodais, pois todos os modelos de tensor de Maxwell desse trabalho foram determinados a partir da premissa de energia magnética nula para indução nula.
- Realizar ensaios experimentais em ímãs permanentes de forma a validar as distribuições de forças nodais simuladas.

REFERÊNCIAS

ABEYARATNE, Rohan. **Continuum Mechanics - Volume II of Lecture notes on The Mechanics of Elastic Solids**. [S.l.]: Department of mechanical engineering (Massachusetts Institute of Technology), 2012. Disponível em: http://web.mit.edu/abeyaratne/Volumes/RCA_Vol_II.pdf.

AYACHIT, Utkarsh. **The paraview guide: a parallel visualization application**. [S.l.]: Kitware, Inc., 2015.

AYDIN, M; HUANG, S; LIPO, T a. Axial flux permanent magnet disc machines: a review. **Research Report**, 2004.

BASTOS, João Pedro A.; SADOWSKI, Nelson. **Magnetic materials and 3D finite element modeling**. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 9781466592520. DOI: 10.1201/b15558.

BOSSAVIT, Alain. Bulk Forces and Interface Forces in Assemblies of Magnetized Pieces of Matter. *In: IEEE Transactions on Magnetics*. [S.l.: s.n.], 2016. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2481939.

BOSSAVIT, Alain. Edge-element Computation Of The Force Field In Deformable Bodies. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1992. ISSN 19410069. DOI: 10.1109/20.123919.

BOSSAVIT, Alain. Forces inside a magnet. **ICS Newsletter**, v. 11, n. 1, p. 4–12, 2004.

BOSSAVIT, Alain. Magnetic forces in and on a magnet. **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S**, 2019. ISSN 19371179. DOI: 10.3934/dcdss.2019108.

BOSSAVIT, Alain. On forces in magnetized matter. **IEEE Transactions on Magnetics**, 2014. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2277558.

BOSSAVIT, Alain. Virtual power principle and Maxwell's tensor: Which comes first? *In: COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2011. DOI: 10.1108/03321641111168110.

CAO, Yong Juan; HUANG, Yun Kai; JIN, Long. Research on axial magnetic force and rotor mechanical stress of an air-cored axial-flux permanent magnet machine based on 3D FEM. *In: APPLIED Mechanics and Materials*. [S.l.: s.n.], 2012. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.105-107.160.

CARICCHI, F. *et al.* Advances in the design of TORUS machines. *In: PEDES 1998 - 1998 International Conference on Power Electronic Drives and Energy Systems for Industrial Growth*. [S.l.: s.n.], 1998. DOI: 10.1109/PEDES.1998.1330654.

CREUSÉ, Emmanuel; DULAR, Patrick; NICAISE, Serge. About the gauge conditions arising in Finite Element magnetostatic problems. **Computers and Mathematics with Applications**, 2019. ISSN 08981221. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.06.030.

CULLITY, B. D.; GRAHAM, C. D. **Introduction to Magnetic Materials**. [S.l.: s.n.], 2008. DOI: 10.1002/9780470386323.

DANIEL, Laurent. **Modélisation multi-échelle du comportement magnéto-mécanique des matériaux ferromagnétiques texturés**. 2003. Tese (Doutorado).

DE MEDEIROS, L. H.; REYNE, G.; MEUNIER, G. Comparison of global force calculations on permanent magnets. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1998. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/20.717839.

DE MEDEIROS, L. H.; REYNE, G.; MEUNIER, G.; YONNET, J. P. Distribution of electromagnetic force in permanent magnets. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1998. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/20.717703.

ERINGEN, A. C.; MAUGIN, G. A. **Electrodynamics of Continua I**. [S.l.: s.n.], 1990. DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1.

FEYNMAN, Richard P. **The Feynman Lectures on Physics Vol 3**. [S.l.]: Narosa, 1965.

FU, W. N. *et al.* Magnetic force computation in permanent magnets using a local energy coordinate derivative method. *In: IEEE Transactions on Magnetics*. [S.l.: s.n.], 2004. DOI: 10.1109/TMAG.2004.824774.

GEUZAINÉ, Christophe; REMACLE, Jean François. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2009. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.2579.

GIERAS, Jacek F.; WANG, Rong Jie; KAMPER, Maarten J. **Axial flux permanent magnet brushless machines (Second Edition)**. [S.l.: s.n.], 2008. ISBN 9781402069932. DOI: 10.1007/978-1-4020-8227-6.

HASHIGUCHI, Koichi. Elastoplasticity theory. *In: LECTURE Notes in Applied and Computational Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2009. DOI: 10.1007/978-3-642-00273-1_1.

HAYES, Austin C. *et al.* Additive manufacturing: A new paradigm for the next generation of high-power-density direct-drive electric generators. *In: AMERICAN Society of Mechanical Engineers, Power Division (Publication) POWER*. [S.l.: s.n.], 2018. DOI: 10.1115/POWER2018-7140.

HECHT, F. New development in FreeFem++. **J. Numer. Math.**, v. 20, n. 3-4, p. 251–265, 2012. ISSN 1570-2820. Disponível em: <https://freefem.org/>.

HENROTTE, François; HAMEYER, Kay. A theory for electromagnetic force formulas in continuous media, 2007. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2007.892457.

HENROTTE, François; HAMEYER, Kay. Computation of electromagnetic force densities: Maxwell stress tensor vs. virtual work principle. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 2004. ISSN 03770427. DOI: 10.1016/j.cam.2003.06.012.

HENROTTE, François; VANDE SANDE, Hans *et al.* Electromagnetic force density in a ferromagnetic material, 2004. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2004.825150.

IDA, Nathan; BASTOS, João Pedro A. **Electromagnetics and Calculation of Fields**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1992. DOI: 10.1007/978-1-4684-0526-2.

IRGENS, Fridtjov. **Continuum mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.

JOURNEAUX, Antoine Alexandre; BOSSAVIT, Alain; BOUILLAULT, Frédéric. Relevance of magnetic behavior in the modeling of electro-mechanical systems. **EPJ Applied Physics**, 2013. ISSN 12860042. DOI: 10.1051/epjap/2013120419.

KAMEARI, Akihisa. Local force calculation in 3D FEM with edge elements. **International journal of applied electromagnetics in materials**, 1993. ISSN 09252096.

KELLY, Piaras. **Mechanics Lecture Notes Part III: Foundations of Continuum Mechanics**. [S.l.]: The University of Auckland, 2016. Disponível em: http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/.

KIM, Chang Woo *et al.* Comparison of Axial Flux Permanent Magnet Synchronous Machines with Electrical Steel Core and Soft Magnetic Composite Core. **IEEE Transactions on Magnetics**, 2017. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2017.2701792.

KUMAR, Sunil; LIPO, Thomas A.; KWON, Byung Il. A 32 000 r/min Axial Flux Permanent Magnet Machine for Energy Storage with Mechanical Stress Analysis. **IEEE Transactions on Magnetics**, 2016. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2512939.

LI, Qiaoshan; ZHANG, Bingyi; LIU, Aimin. Electromagnetic Force Analysis of Eccentric Axial Flux Permanent Magnet Machines. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2020, 2020.

LIBERT, Florence. **Design, optimization and comparison of permanent magnet motors for a low-speed direct-driven mixer**. 2004. Tese (Doutorado). ISBN 9172839015.

LIU, Chengcheng *et al.* Comparative study of small electrical machines with soft magnetic composite cores. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 2017. ISSN 02780046. DOI: 10.1109/TIE.2016.2583409.

LUZ, Mauricio Valencia Ferreira da. **Desenvolvimento de um software para cálculo de campos eletromagnéticos 3D utilizando elementos de aresta, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação**. 2003. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico.

MARIGNETTI, Fabrizio *et al.* Electromagnetic and mechanical design of a fractional-slot-windings Axial-flux PM synchronous machine with soft magnetic compound stator. *In*: CONFERENCE Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society). [S.l.: s.n.], 2006. DOI: 10.1109/IAS.2006.256521.

MARTINEC, Zdenek. **Moving Spatial Frame**. [S.l.]: Charles University, 2007. Disponível em: <http://geo.mff.cuni.cz/vyuka/Martinec-ContMech-newPart5-MovingSpatialFrame.pdf>.

MEESSEN, K. J.; PAULIDES, J. J.H.; LOMONOVA, E. A. Force calculations in 3-D cylindrical structures using fourier analysis and the maxwell stress tensor. **IEEE Transactions on Magnetics**, 2013. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2012.2206821.

MEUNIER, Gérard. **The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9781848210301. DOI: 10.1002/9780470611173.

MOËS, Nicolas. **Mécanique des milieux continus**. Nantes, France: École d'ingénieur, 2011. Disponível em: <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00612360v2/document>.

MORADI, Hassan; DARABI, Ahmad. Design and Simulation of Low Speed Axial Flux Permanent Magnet (AFPM) Machine. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, 2012. ISSN 2251-8843.

PARK, Sunghyuk; KIM, Wonho; KIM, Sung Il. A numerical prediction model for vibration and noise of axial flux motors. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 2014. ISSN 02780046. DOI: 10.1109/TIE.2014.2300034.

PARVIAINEN, Asko; NIEMELÄ, Markku; PYRHÖNEN, Juha. Modeling of axial flux permanent-magnet machines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, 2004. ISSN 00939994. DOI: 10.1109/TIA.2004.834086.

PILE, Raphaël *et al.* Application limits of the Airgap Maxwell tensor, 2019. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02169268/document>.

PLAUT, Emmanuel. **Le calcul tensoriel et différentiel: outil mathématique pour la physique des milieux continus**. [S.l.]: École des Mines de Nancy (Université de Lorraine), 2019. Disponível em: <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc/polct.pdf>.

POUTALA, Arto; KOVANEN, Tuomas; KETTUNEN, Lauri. Essential measurements for finite element simulations of magnetostrictive materials. **IEEE Transactions on Magnetics**, 2018. ISSN 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2017.2766599.

PRANJIĆ, Franjo; VIRTIČ, Peter. Rotor Mechanical Stress Analysis Of A Double-Sided Axial Flux Permanent Magnet Machine. **Journal Of Energy Technology**, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Energetiko, v. 10, n. 4, p. 57–70, 2017.

REN, Z. Comparison of Different Force Calculation Methods in 3D Finite Element Modelling. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1994. ISSN 19410069. DOI: 10.1109/20.312686.

REN, Z; RAZEK, A. Local force computation in deformable bodies using edge elements. **IEEE Transactions on Magnetics**, IEEE, v. 28, n. 2, p. 1212–1215, 1992.

REN, Z; RAZEK, A. Permanent magnet modelling by edge element and facet element (discussion on the force distribution in permanent magnet). *In*: IEE Conference Publication. [S.l.: s.n.], 1994. DOI: 10.1049/cp:19940040.

VANSOMPEL, Hendrik. **Design of an energy efficient axial flux permanent magnet machine**. 2013. Tese (Doutorado) – Ghent University.

ANEXO A – CÁLCULO DE FORÇAS MAGNÉTICAS

Considerando as equações de Maxwell na forma quase-estática, se tem as equações (114a), (114b) e (114c), com a densidade de corrente separada em componentes de densidade de corrente induzida \vec{J} e densidade de corrente fonte \vec{J}_s (BASTOS; SADOWSKI, 2013).

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_s \quad (114a)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (114b)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \quad (114c)$$

A densidade de corrente \vec{J} induzida nos condutores é descrita pela equação (115) considerando que a condutividade σ_u se altera conforme o movimento do material, ou seja, é dependente de \vec{u} . A densidade de corrente \vec{J}_s é mantida por uma fonte externa à modelagem considerada (BOSSAVIT, 2014).

$$\vec{J} = \sigma_u(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (115)$$

O potencial vetor magnético \vec{A} é definido conforme a equação (116a). Para o caso da lei \vec{B} - \vec{H} descrita por $\vec{H} = \nu_u\vec{B}$, a relutividade ν_u é considerada como dependente de \vec{u} . Substituindo (116a) em (114c), se obtém a equação (116b) (BOSSAVIT, 2014).

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (116a)$$

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A} \quad (116b)$$

Aplicando (116a) em (114c) e (115) se tem a equação (117a). Substituindo (117a), (116a) e a lei \vec{B} - \vec{H} em (114a) se obtém a equação (117b).

$$\vec{J} = \sigma_u(-\partial_t\vec{A} + \vec{v} \times \text{rot}\vec{A}) \quad (117a)$$

$$\sigma_u(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \text{rot}\vec{A}) + \text{rot}(\nu_u\text{rot}\vec{A}) = \vec{J}_s \quad (117b)$$

A energia magnética $\Psi(\vec{u}, \vec{A})$ é descrita pela equação (118) com Ω representando o volume do sistema considerado, de forma que para $\vec{A} = 0$ se tem $\Psi(\vec{u}, \vec{0}) = 0$ (BOSSAVIT, 2014).

$$\Psi(\vec{u}, \vec{A}) = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\vec{A}} \vec{H}(\text{rot}\vec{A}) \cdot d(\text{rot}\vec{A}) \right) d\Omega \quad (118)$$

Seja $\delta_{\vec{A}}\Psi$ a variação infinitesimal do argumento \vec{A} de Ψ enquanto \vec{u} é mantido fixo, conforme equação (119a). Utilizando a derivada de Fréchet, se tem a relações

das equações (119b) e (119c) (BOSSAVIT, 2004),(POUTALA; KOVANEN; KETTUNEN, 2018).

$$\delta_{\vec{A}}\Psi = \Psi(\vec{u}, \vec{A} + \delta\vec{A}) - \Psi(\vec{u}, \vec{A}) \quad (119a)$$

$$\delta_{\vec{A}}\Psi = \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \delta(\text{rot}\vec{A})d\Omega \quad (119b)$$

$$\delta_{\vec{A}}\Psi = \int_{\Omega} \partial_{\vec{A}}\Psi \cdot \delta\vec{A}d\Omega \quad (119c)$$

De (119c), utilizando a integração por partes e como $(\vec{n} \times \vec{H}) = 0$, se tem a equação (120).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \delta(\text{rot}\vec{A})d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \text{rot}(\delta\vec{A})d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{rot}\vec{H} \cdot \delta\vec{A}d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \delta\vec{A}dA \\ &= \int_{\Omega} \text{rot}\vec{H} \cdot \delta\vec{A}d\Omega \end{aligned} \quad (120)$$

Comparando (119c) e (120), sem tem a equação (121a). Substituindo (121a) em (117b), se tem a equação (121b).

$$\partial_{\vec{A}}\Psi(\vec{u}, \vec{A}) = \text{rot}\vec{H} = \text{rot}(\nu_u \text{rot}\vec{A}) \quad (121a)$$

$$\sigma_u(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \text{rot}\vec{A}) + \partial_{\vec{A}}\Psi(\vec{u}, \vec{A}) = \vec{J}_s \quad (121b)$$

Fazendo o produto escalar por $\partial_t\vec{A}$ em ambos os lados de (121b) e integrando no volume, resulta na equação (122).

$$\int_{\Omega} \sigma_u(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \text{rot}\vec{A}) \cdot \partial_t\vec{A}d\Omega + \int_{\Omega} \partial_{\vec{A}}\Psi(\vec{u}, \vec{A}) \cdot \partial_t\vec{A}d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \partial_t\vec{A}d\Omega \quad (122)$$

De (117a), as perdas Joule podem sem escritas conforme equação (123) (BOSSAVIT, 2014).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \vec{B} \right|^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_u \left(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \left(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \vec{B} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma_u \left(\partial_t\vec{A} - \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \partial_t\vec{A}d\Omega - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\vec{J} \times \vec{B} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (123)$$

A taxa de variação no tempo de $\Psi(\vec{u}, \vec{A})$ é calculada utilizando a regra da cadeia e resulta na equação (124).

$$d_t\Psi(\vec{u}, \vec{A}) = \int_{\Omega} \partial_{\vec{u}}\Psi \cdot \vec{v}d\Omega + \int_{\Omega} \partial_{\vec{A}}\Psi \cdot \partial_t\vec{A}d\Omega \quad (124)$$

Substituindo (116b) (123) e (124) em (122), se obtém a equação (125) (BOSSAVIT, 2014).

$$\int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t \vec{A} d\Omega - \vec{v} \times \vec{B} \right|^2 d\Omega + d_t \Psi(\vec{u}, \vec{A}) + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\vec{J} \times \vec{B} - \partial_{\vec{u}} \Psi \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{E} d\Omega \quad (125)$$

O termo à direita de (125) representa a potência inserida no sistema por meio de uma fonte externa. O primeiro termo à esquerda de (125) representa as perdas Joule. Fazendo $\vec{v} = 0$ em (125), se observa que $d_t \Psi$ representa uma parte da potência que deve estar armazenada no campo magnético, considerando a convenção adotada de que a energia magnética é nula para \vec{A} nulo. Dessa forma, sendo \vec{v} uma velocidade virtual, o terceiro termo à esquerda de (125) representa uma potência virtual, de maneira que a densidade de força total \vec{f}_t pode ser escrita conforme a equação (126) (BOSSAVIT, 2014).

$$\vec{f}_t = \vec{J} \times \vec{B} - \partial_{\vec{u}} \Psi \quad (126)$$

O termo $\vec{J} \times \vec{B}$ representa a força de Laplace e se define a densidade de força adicional como $\vec{f}_{mag} = -\partial_{\vec{u}} \Psi$. Utilizando o princípio das potências virtuais, o termo $\partial_{\vec{u}} \Psi(\vec{u}, \vec{A})$ é calculado na configuração de referência, ou seja, para $\vec{u} = 0$ e $\vec{A} = \vec{A}_0$ (condição inicial de \vec{A}). Seja $\vec{u}(t) = t\vec{v}$ e considerando \vec{A}_0 constante, tomando o limite quando t tende a 0 se obtém a relação da equação (127a) na qual a derivada no tempo é tomada em $t = 0$. De (124), se tem a relação da equação (127b) para $t = 0$ (BOSSAVIT, 2014).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(t\vec{v}, \vec{A}_0) - \Psi(0, \vec{A}_0)}{t} = d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{A}_0)|_{t=0} \quad (127a)$$

$$d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{A}_0)|_{t=0} = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \partial_{\vec{u}} \Psi(\vec{0}, \vec{A}_0) d\Omega \quad (127b)$$

A.1 RELAÇÃO LINEAR E RELUTIVIDADE ANISOTRÓPICA

Supondo ν anisotrópico descrito por um tensor simétrico de segunda ordem o qual depende de \vec{x} mas não da deformação local, e a lei linear $\vec{B} = \nu \vec{H}$. O deslocamento $t\vec{v}$ implica uma rotação da vizinhança do ponto material que estava na posição \vec{x} em $t = 0$, dessa forma, o tensor de relutividade deve seguir essa rotação (BOSSAVIT, 2014).

Considerando a rotação R de uma pequena parte de material em torno do ponto \vec{x} e simultaneamente a rotação do vetor local \vec{B} . Segundo o princípio de indiferença de

referencial, a densidade de energia magnética no ponto \vec{x} , equação (128), não deve ser afetada pela rotação (ABEYARATNE, 2012).

$$\psi(\vec{x}, \vec{B}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{x}) \cdot (\nu(\vec{x}) \vec{B}(\vec{x})) \quad (128)$$

Seja ν_{ref} a relutividade na configuração de referência ($t = 0$) e ν_t a relutividade no tempo t , de (13c) e (24c) se obtém a equação (129) que mostra a relação entre relutividade e o movimento do ponto material desconsiderando termos t^2 (BOSSAVIT, 2014).

$$\begin{aligned} \nu_t(\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x}))R &\approx R\nu_{ref}(\vec{x}) \\ \nu_t(\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x}))(1 + t\vec{\omega}(\vec{x})\times) &\approx (1 + t\vec{\omega}(\vec{x})\times)\nu_{ref}(\vec{x}) \\ \nu_t(\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x})) &\approx \nu_{ref}(\vec{x}) + t[\vec{\omega}(\vec{x})\times\nu_{ref}(\vec{x}) - \nu_{ref}(\vec{x})\vec{\omega}(\vec{x})\times] \end{aligned} \quad (129)$$

Derivando (129) em t resulta na equação (130a) com $\vec{v} \cdot \nabla \nu_t$ escrito como $v_j \partial_j \nu_t$ em componentes. De (128), a energia magnética para o caso considerado é descrita pela equação (130b).

$$\partial_t \nu_t + \vec{v} \cdot \nabla \nu_t = \vec{\omega} \times \nu_{ref} - \nu_{ref} \vec{\omega} \times \quad (130a)$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{B}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{B}) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{x}) \cdot (\nu(\vec{x}) \vec{B}(\vec{x})) d\Omega \quad (130b)$$

Fazendo a derivada em t de (130b) para $t = 0$ e considerando \vec{B} constante na configuração de referência, resulta na equação (131a). Substituindo (130a) em (131a) se obtém a equação (131b).

$$d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{B}_0)|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot (\partial_t \nu(\vec{x})) \vec{B}_0 d\Omega \quad (131a)$$

$$d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{B}_0)|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot ((-\vec{v} \cdot \nabla \nu_t + \vec{\omega} \times \nu_{ref} - \nu_{ref} \vec{\omega} \times) \vec{B}_0) d\Omega \quad (131b)$$

Separando os termos de (131b) e como $\nu_t = \nu_{ref} = \nu$ para $t = 0$, se obtém a equação (132).

$$\begin{aligned} d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{B}_0)|_{t=0} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot (-\vec{v} \cdot \nabla \nu) \vec{B}_0 d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \nu \vec{B}_0) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot (-\nu \vec{\omega} \times \vec{B}_0) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot \nabla \nu \vec{B}_0\right) \cdot \vec{v} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{H}_0) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{H}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{B}_0) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot \nabla \nu \vec{B}_0\right) \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} w \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega \end{aligned} \quad (132)$$

Utilizando (13c) e a integração por partes, o segundo termo à direita de (132) pode ser escrito conforme a equação (133), considerando que $\vec{v} = \vec{0}$ no contorno $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{w} \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega &= \int_{\Omega} \text{rot} \vec{v} \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\vec{v} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) dA \\ &= \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega \end{aligned} \quad (133)$$

Substituindo (132) em (133), resulta na equação (134).

$$d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{B}_0)|_{t=0} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot \nabla \nu \vec{B}_0\right) \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{H}_0 \times \vec{B}_0) d\Omega \quad (134)$$

Finalmente, fazendo $\vec{H}_0 = \vec{H}$ e $\vec{B}_0 = \vec{B}$, e comparando (134) com (127b) e (126), o termo adicional à força de Laplace para o caso de relutividade anisotrópica e lei \vec{B} - \vec{H} linear é descrito na equação (135) (BOSSAVIT, 2014).

$$\vec{f}_{mag} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \nabla \nu \vec{B} - \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{H} \times \vec{B}) \quad (135)$$

A.2 RELAÇÃO NÃO-LINEAR E NÃO HISTERÉTICA

Considerando a lei \vec{B} - \vec{H} não linear, se tem a relação da equação (136a) com $\psi_{ref}(\vec{x}, \vec{B}(\vec{x}))$ sendo a densidade de energia na configuração de referência e o operador $\partial_{\vec{b}}$ representando a derivada parcial de ψ_{ref} em relação ao segundo argumento. Considerando que uma rotação R do material resulta em uma mudança de ψ para ψ^R , de acordo com o princípio de indiferença de referencial, se tem a equação (136b) válida para qualquer vetor \vec{b} (BOSSAVIT, 2014), (ABEYARATNE, 2012).

$$\vec{H}(\vec{x}) = \partial_{\vec{b}} \psi_{ref}(\vec{x}, \vec{B}(\vec{x})) \quad (136a)$$

$$\psi^R(\vec{x}, R\vec{b}) = \psi(\vec{x}, \vec{b}) \quad (136b)$$

Seja ψ_t a densidade de energia no tempo t . De (136b) e (13a), se obtém a equação (137a). Novamente, fazendo a derivada em t de (137a) resulta na equação (137b) com o termo $\nabla \psi_t$ representando a derivada parcial de ψ em relação ao vetor de posição \vec{x} . Fazendo $\vec{b} = \vec{B}(\vec{x})$ e utilizando (136a) e (135), o termo adicional de força

para esse caso é expresso na equação (137c) (BOSSAVIT, 2014).

$$\psi_t(\vec{x} + t\vec{v}, \vec{b} + t\vec{\omega} \times \vec{b}) = \psi_{ref}(\vec{x}, \vec{b}) \quad (137a)$$

$$\partial_t \psi_t + \vec{v} \cdot \nabla \psi_t + \partial_{\vec{b}} \psi_t \cdot \vec{\omega} \times \vec{b} = 0 \quad (137b)$$

$$\vec{f}_{mag} = \nabla \psi - \frac{1}{2} rot(\vec{H} \times \vec{B}) \quad (137c)$$

A.3 FORÇA EM ÍMÃS PERMANENTES

Seja a lei constitutiva $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}(\vec{x}))$ na qual \vec{M} representa a magnetização, cujo valor depende somente de \vec{x} e não depende dos valores locais de \vec{B} ou \vec{H} . Em um cálculo similar a (117b) mas utilizando a lei constitutiva em termos de \vec{M} , se obtém a equação (138) (BOSSAVIT, 2019).

$$\sigma_u(\partial_t \vec{A} - \vec{v} \times rot \vec{A}) + rot(\nu_0 rot \vec{A}) = \vec{J}_s + rot \vec{M}(\vec{x}) \quad (138)$$

Supondo $\vec{v} = \vec{0}$ em (138), fazendo o produto escalar com $\partial_t \vec{A}$ em ambos os lados e integrando sobre todo o espaço, resulta na equação (139).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t \vec{A} \right|^2 d\Omega + \int_{\Omega} rot(\nu_0 rot \vec{A}) \cdot \partial_t \vec{A} d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \partial_t \vec{A} d\Omega + \int_{\Omega} rot \vec{M}(\vec{x}) \cdot \partial_t \vec{A} d\Omega \\ \int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t \vec{A} \right|^2 d\Omega + \int_{\Omega} (\nu_0 rot \vec{A}) \cdot \partial_t (rot \vec{A}) d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \partial_t \vec{A} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{M}(\vec{x}) \cdot \partial_t (rot \vec{A}) d\Omega \\ \int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t \vec{A} \right|^2 d\Omega + d_t \int_{\Omega} \frac{\nu_0}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} d\Omega - d_t \int_{\Omega} \vec{M}(\vec{x}) \cdot \vec{B} d\Omega &= - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{E} d\Omega \\ \int_{\Omega} \sigma_u \left| \partial_t \vec{A} \right|^2 d\Omega + d_t \left[\int_{\Omega} \frac{\nu_0}{2} \left| \vec{B} \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \vec{M}(\vec{x}) \cdot \vec{B} d\Omega \right] &= - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{E} d\Omega \end{aligned} \quad (139)$$

Fazendo a análise de (139), se observa que se trata de uma relação de balanço de potências, dessa forma, o termo no qual é aplicado o operador d_t representa a energia armazenada no campo magnético, ou seja, para a relação constitutiva considerada, a energia magnética é dada pela equação (140) de maneira que para $\vec{A} = \vec{0}$, a energia magnética é nula.

$$\Psi(\vec{x}, \vec{A}) = \int_{\Omega} \frac{\nu_0}{2} \left| rot \vec{A} \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \vec{M}(\vec{x}) \cdot rot \vec{A} d\Omega \quad (140)$$

Seja a densidade de energia magnética ψ na configuração de referência e ψ_t no tempo t e sob deslocamento $t\vec{v}$, conforme equações (141a) e (141b). Fazendo a

derivada em t para $t = 0$ de $\Psi(t\vec{v}, \vec{A}_0)$, resulta na equação (141c).

$$\psi(\vec{x}, \vec{A}) = \frac{\nu_0}{2} \left| \text{rot} \vec{A} \right|^2 - \vec{M}(\vec{x}) \cdot \text{rot} \vec{A} \quad (141a)$$

$$\psi_t(\vec{x} + t\vec{v}, \vec{A}) = \frac{\nu_0}{2} \left| \text{rot} \vec{A} \right|^2 - \vec{M}_t(\vec{x} + t\vec{v}) \cdot \text{rot} \vec{A} \quad (141b)$$

$$d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{A}_0)|_{t=0} = - \int_{\Omega} (\partial_t \vec{M}_t) \cdot \text{rot} \vec{A}_0 d\Omega \quad (141c)$$

Seja uma parte de material localizada em \vec{x} na qual se define o vetor local \vec{M} para $t = 0$. Considerando que após um deslocamento $t\vec{v}$, há uma rotação R do material de forma que \vec{M} segue essa rotação. Pelo princípio de indiferença de referencial, de (13a) e (13b), se tem a relação da equação (142) (BOSSAVIT, 2019), (ABEYARATNE, 2012).

$$\vec{M}_t(\vec{x} + t\vec{v}) = R\vec{M}(\vec{x}) = (1 + t\vec{\omega}(\vec{x}) \times) \vec{M}(\vec{x}) \quad (142)$$

Fazendo a derivada em t para $t = 0$ de (142), resulta na equação (143) com o termo $\nabla \vec{M}_t \cdot \vec{v}$ podendo ser escrito como $v_j \partial_j M_{ti}$ em componentes.

$$\partial_t \vec{M}_t + \nabla \vec{M}_t \cdot \vec{v} = \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{M}(\vec{x}) \quad (143)$$

Como em $t = 0$ se tem $\vec{M}_t = \vec{M}$, substituindo (143) em (141c) e fazendo um cálculo similar a (132) se obtém a equação (144).

$$\begin{aligned} d_t \Psi(t\vec{v}, \vec{B})|_{t=0} &= - \int_{\Omega} (-\nabla \vec{M} \cdot \vec{v} + \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{M}(\vec{x})) \cdot \vec{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\nabla \vec{M} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{M} \times \vec{B}) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (144)$$

Comparando (144) com (127b) se obtém \vec{f}_{mag} , conforme equação (145) (BOSSAVIT, 2014).

$$\begin{aligned} \vec{f}_{mag} &= -\nabla \vec{M} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{M} \times \vec{B}) \\ &= -\nabla \vec{M} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{H} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (145)$$

Seja \vec{f}_{mag}^0 a densidade de força total para o caso da lei de comportamento $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}(\vec{x}))$, na qual $\vec{M}(\vec{x})$ não depende da deformação, de (145), resulta na equação (146). Em relação a cada termo, $\vec{J} \times \vec{B}$ se refere à força de Laplace, o termo $-\nabla \vec{M} \cdot \vec{B}$ é chamado de força de não-homogeneidade devido ao fato que seria nula caso \vec{M} fosse espacialmente uniforme. O termo $\text{rot}(\vec{H} \times \vec{B})$ é chamado de força de anisotropia pois caso \vec{B} e \vec{H} fossem isotrópicos, seria nulo (BOSSAVIT, 2019).

$$\vec{f}_{mag}^0 = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla \vec{M} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{H} \times \vec{B}) \quad (146)$$

A.4 DENSIDADE DE FORÇA CONSIDERANDO A MAGNETOSTRIÇÃO NA MAGNETIZAÇÃO

Um ímã permanente pode ser descrito como um material cuja curva $\vec{B}-\vec{H}$ é aproximadamente linear seguindo a lei $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Utilizando a abordagem Lagrangeana e formas diferenciais, Bossavit (2004) calculou a densidade de força em ímãs permanentes considerando dois modelos para a magnetização, o primeiro considera a circulação de \vec{M} , definida pela equação (147a), como constante em relação à deformação de uma curva. O segundo modelo considera o fluxo de \vec{M} , equação (147b), como constante em relação à deformação de uma superfície.

$$\int_C \vec{M} \cdot d\vec{x} \quad (147a)$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{M} \cdot d\vec{A} \quad (147b)$$

Considerando a circulação de \vec{M} constante em relação à deformação de uma curva, a densidade de força total \vec{f}_{mag}^1 é descrita na equação (148a) com \vec{H}^c sendo o campo coercitivo, de forma que a relação constitutiva para ímãs pode ser escrita como $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{H}^c)$. Dessa forma, (148a) em termos de \vec{M} é dada pela equação (148b).

$$\vec{f}_{mag}^1 = rot(\vec{H} + \vec{H}^c) \times \vec{B} \quad (148a)$$

$$= \vec{J} \times \vec{B} + (rot\vec{M}) \times \vec{B} \quad (148b)$$

Para o modelo de fluxo de \vec{M} constante em relação à deformação de uma superfície, a densidade de força total \vec{f}_{mag}^2 é apresentada na equação (149a), sendo \vec{B}^r a indução remanente e \vec{J}^c as correntes amperianas, definidas como $\vec{J}^c \equiv rot\vec{H}^c$. A relação constitutiva pode ser rescrita como $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{B}^r$, assim, (149a) pode ser escrita conforme a equação (149b) em termos de \vec{M} (BOSSAVIT, 2004).

$$\vec{f}_{mag}^2 = \vec{J} \times \vec{B} - (\vec{H} + \vec{H}^c)div\vec{B}^r - (\vec{J} + \vec{J}^c) \times \vec{B}^r \quad (149a)$$

$$= \vec{J} \times \vec{B} - (\vec{B}div\vec{M}) + \vec{M} \times (rot\vec{B}) \quad (149b)$$