



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

DAIANE DA SILVA MENDES

ESTUDO DA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD NA  
ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA DA CAMADA LIMITE SOBRE PLACAS PLANAS

Joinville  
2020

DAIANE DA SILVA MENDES

ESTUDO DA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD NA  
ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA DA CAMADA LIMITE SOBRE PLACAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de bacharel em Engenharia Aeroespacial .

Orientador: Prof. Dr. Diogo Nardelli Siebert

Coorientador: Prof. Dr. Vinicius Malatesta

Joinville

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mendes, Daiane da Silva

Estudo da Aplicação da Equação de Orr-Sommerfeld na Estabilidade Hidrodinâmica da Camada Limite sobre Placas Planas / Daiane da Silva Mendes ; orientador, Diogo Nardelli Siebert , coorientador, Vinicius Malatesta , 2020.  
64 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Joinville,  
Graduação em Engenharia Aeroespacial, Joinville, 2020.

Inclui referências.

1. Engenharia Aeroespacial. 2. Engenharia Aeroespacial.  
3. Mecânica dos Fluidos Computacional. 4. Orr-Sommerfeld.  
5. Camada Limite. I. , Diogo Nardelli Siebert. II. ,  
Vinicius Malatesta. III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Graduação em Engenharia Aeroespacial. IV. Título.

DAIANE DA SILVA MENDES

**Estudo da Aplicação da Equação de Orr-Sommerfeld na Estabilidade  
Hidrodinâmica da Camada Limite sobre Placas Planas**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de bacharel em Engenharia Aeroespacial e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial.

Joinville, 4 de dezembro de 2020.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Diogo Nardelli Siebert  
Orientador

---

Prof. Dr. Filipe Dutra da Silva  
Avaliador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Juan Pablo de Lima Costa Salazar  
Avaliador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Luis Orlando Emerich dos Santos  
Avaliador (Suplente)  
Universidade Federal de Santa Catarina

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus orientadores Prof. Dr. Diogo Nardelli Siebert e Prof. Dr. Vinicius Malatesta por todo o apoio e orientação neste trabalho.

Agradeço ao meu namorado, Adenauer Gabriel, por me motivar durante toda essa trajetória e por todo auxílio prestado.

Agradeço ao LCC e à FEESC pela oportunidade de realizar uma iniciação científica de tamanha importância durante a graduação.

Agradeço à organização o X ERMAC-RS 2020 por aceitar que este trabalho fosse apresentado no evento.

Agradeço também à todos que contribuíram de forma direta ou indireta na realização deste trabalho.

## RESUMO

O estudo sobre os tipos de escoamentos iniciou-se em 1883, através do experimento em tubos, por Osborne Reynolds, no qual, duas regiões foram claramente identificadas: laminar e turbulenta. Entre estas, há uma região conhecida como transição, que é caracterizada pelo surgimento das primeiras perturbações. Algumas destas podem assumir perfis definidos na natureza, por exemplo, a instabilidade de Tollmien-Schlichting, que é o modo mais instável da equação de Orr-Sommerfeld e comumente surge na transição da camada limite em asas de aeronaves. A permanência na região de transição pode trazer benefícios, como redução do arrasto total em superfícies aeronáuticas e aumento da performance de combustão em aeronaves supersônicas. Neste trabalho, apresentar-se-á, a solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld aplicada à camada limite de um escoamento sobre placa plana, através de um código desenvolvido em linguagem Python. Como resultados, obteve-se as curvas de estabilidade que permitiram identificar o número de Reynolds em que a transição inicia, bem como, os parâmetros e autovalor da equação de Orr-Sommerfeld ( $Re_{\delta_1}$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{c}$ ) que tornam o escoamento estável, instável ou em estabilidade neutra.

**Palavras-chave:** Transição. Equação de Orr-Sommerfeld. Camada limite. Ondas de Tollmien-Schlichting.

## ABSTRACT

The study on flow regimes began in 1883, through the experiment in tubes by Osborne Reynolds which identified two regions: laminar and turbulent. Between both regimes, there is a region known as transition, where the first disturbances arise. Some disturbances can assume defined profiles in the nature, for example, Tollmien-Schlichting instability which is an unstable mode of the Orr-Sommerfeld equation and commonly appears in the transition from the boundary layer on aircraft wings. The transition region can generate benefits, such as reducing total drag on aeronautical surfaces and increasing combustion performance in supersonic aircraft. In this project, a numerical solution of the Orr-Sommerfeld equation using Python on the boundary layer over a flat plate with  $0^\circ$  of attack angle will be applied. As results, the stability curves were obtained and the Reynolds number of transition was defined, as well as the parameters and eigenvalue of the Orr-Sommerfeld equation ( $Re_{\delta_1}$ ,  $\bar{\alpha}$  and  $\bar{c}$ ) that make the flow stable, unstable or in neutral stability.

**Keywords:** Transition. Orr-Sommerfeld equation. Boundary Layer. Tollmien-Schlichting waves.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Experimento com tubos realizado por Osborne Reynolds. (a) Escoamento Laminar. (b) Escoamento turbulento. . . . .	15
Figura 2 – Experimento de Reynolds mostrando a região de transição. . . . .	15
Figura 3 – Regimes de escoamento em um jato subsônico. . . . .	16
Figura 4 – Transição em fumaça de cigarro. . . . .	17
Figura 5 – Instabilidade capilar de um jato líquido. . . . .	18
Figura 6 – Padrões de instabilidades hidrodinâmicas. . . . .	18
Figura 7 – Outros padrões de instabilidades hidrodinâmicas. . . . .	19
Figura 8 – Representação do coeficiente de atrito ( $C_f$ ) em diferentes regimes do escoamento. . . . .	20
Figura 9 – Forças agindo sobre um elemento de fluido. . . . .	21
Figura 10 – Esquematização da camada limite sobre placas planas. . . . .	23
Figura 11 – Evolução do perfil de velocidade do escoamento sobre uma placa plana. . . . .	32
Figura 12 – Transição na camada limite sobre uma placa plana. . . . .	33
Figura 13 – Ondas de Tollmien-Schlichting na camada limite. . . . .	34
Figura 14 – Perfil de velocidade de Blasius obtida pela integração numérica. . . . .	36
Figura 15 – Erro absoluto de $\bar{c}$ com a variação do número de passos de integração ( $N$ ). . . . .	44
Figura 16 – Erro absoluto de $\bar{c}$ com a variação de $\bar{y}_m$ . . . . .	45
Figura 17 – Erro absoluto de $\bar{c}$ com a variação de $N_B$ da equação de Blasius. . . . .	46
Figura 18 – Curvas de estabilidade para diferentes valores de $\bar{c}_i$ . . . . .	47
Figura 19 – Curvas de estabilidade neutra para o escoamento sobre uma placa plana com $0^\circ$ de incidência. . . . .	49
Figura 20 – Curvas de estabilidade de ondas de Tollmien-Schlichting com $\bar{c}_i \geq 0$ . . . . .	50
Figura 21 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para $\bar{c}_i = 0$ . . . . .	51
Figura 22 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para $\bar{c}_i = 1,5 \times 10^{-2}$ . . . . .	52
Figura 23 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para $\bar{c}_i = 1,95 \times 10^{-2}$ . . . . .	52
Figura 24 – Taxa de amplificação da onda de perturbação. . . . .	53

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de $\bar{c}$ variando o número de passos ( $N$ ). . . . .	44
Quadro 2 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de $\bar{c}$ variando $\bar{y}_m$ . . . . .	45
Quadro 3 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de $\bar{c}$ variando $N_B$ da equação de Blasius. . . . .	46
Quadro 4 – Comprimento de onda $\bar{k}$ da perturbação em relação à $\bar{c}_i$ . . . . .	51

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias
EDPs	Equações Diferenciais Parciais
O-S	Equação de Orr-Sommerfeld
PVI	Problema de Valor Inicial

## LISTA DE SÍMBOLOS

$C_f$	Coeficiente de atrito
$Re$	Número de Reynolds
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido [ $m^2/s$ ]
$\mu$	Viscosidade do fluido [ $kg/m.s$ ]
$\rho$	Densidade do fluido [ $kg/m^3$ ]
$u$	Velocidade do escoamento na camada limite na direção $x$ [ $m/s$ ]
$\tau$	Tensão de cisalhamento [ $kg/m.s^2$ ]
$\delta(x)$	Espessura da camada limite [ $m$ ]
$U_\infty$	Velocidade do escoamento livre na direção $x$
$\delta_{laminar}$	Espessura da camada limite laminar [ $m$ ]
$Re_x$	Número de Reynolds calculado em relação ao comprimento da placa plana
$\delta_{turbulenta}$	Espessura da camada limite no regime turbulento [ $m$ ]
$\delta_1$	Espessura de deslocamento da camada limite
$l$	Comprimento da placa plana [ $m$ ]
$p$	Pressão no escoamento da camada limite [ $Pa$ ]
$\xi$	Variável de similaridade em relação à $x$
$\eta$	Variável de similaridade em relação à $y$
$\psi$	Função corrente
$Re_{ind}$	Número de Reynolds da indiferença
$u'$	Componente de velocidade da perturbação na direção $x$ [ $m/s$ ]
$v'$	Componente de velocidade da perturbação na direção $y$ [ $m/s$ ]
$\bar{\varphi}$	Amplitude da onda de perturbação
$Re_{\delta_1}$	Número de Reynolds calculado em $\delta_1$
$\bar{\alpha}$	Número de onda da perturbação
$\bar{\omega}$	Frequência da onda de perturbação
$\bar{c}$	Velocidade de onda da perturbação
$\bar{\alpha}_i$	Taxa de amplificação espacial da onda de perturbação
$\bar{\Phi}_I$	Solução não-viscosa da equação de Orr-Sommerfeld
$\bar{\Phi}_{II}$	Solução viscosa da equação de Orr-Sommerfeld
$\bar{y}_m$	Comprimento entre a superfície da placa plana até um ponto fora da camada limite
$N$	Número de passos de integração da equação de Orr-Sommerfeld
$N_B$	Número de passos de integração da equação de Blasius
$\bar{c}_r$	Parte real da velocidade de onda da perturbação
$\bar{c}_i$	Parte imaginária da velocidade de onda da perturbação
$\bar{\omega}_i$	Taxa de amplificação temporal da onda de perturbação

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	<b>Objetivo Geral</b>	<b>14</b>
1.1.2	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
2.1	REGIMES DE ESCOAMENTO	15
2.1.1	<b>Região de transição</b>	<b>16</b>
2.1.2	<b>Aplicações da transição</b>	<b>19</b>
2.1.3	<b>Número de Reynolds</b>	<b>21</b>
2.1.4	<b>Camada limite hidrodinâmica</b>	<b>22</b>
2.1.4.1	Equações da camada limite	24
2.1.5	<b>Solução de Blasius para a camada limite laminar</b>	<b>25</b>
2.1.6	<b>Teoria da estabilidade hidrodinâmica</b>	<b>27</b>
2.1.6.1	Teoria da estabilidade hidrodinâmica linear na camada limite sobre uma placa plana	28
2.1.6.2	Estabilidade hidrodinâmica da camada limite	32
2.1.7	<b>Classificação das instabilidades</b>	<b>33</b>
2.1.7.1	Ondas de Tollmien-Schlichting	34
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>36</b>
3.1	MODELO ADOTADO	36
3.2	SOLUÇÃO DE BLASIUS	36
3.3	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD	37
3.3.0.1	Método de Runge-Kutta de 4ª ordem	41
3.3.0.2	Ortogonalização de Gram-Schmidt	41
3.3.1	<b>Solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld</b>	<b>42</b>
3.3.1.1	Definição de parâmetros numéricos	43
3.4	CONSTRUÇÃO DA CURVA DE ESTABILIDADE	47
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>49</b>
4.1	CURVA DE ESTABILIDADE NEUTRA	49
4.2	CURVAS DE ESTABILIDADE PARA DIFERENTES VALORES DE $\bar{c}_i$	50
4.3	AUTOFUNÇÕES DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD	53
4.4	TAXA DE AMPLIFICAÇÃO DAS INSTABILIDADES	54
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>
	<b>APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD</b>	<b>59</b>
A.1	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM	60
A.2	SOLUÇÃO DE BLASIUS	63

A.3	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD E CURVA DE ESTABILIDADE . . . . .	65
-----	--	----

## 1 INTRODUÇÃO

O escoamento sobre aeronaves inicia no regime laminar e se transforma em turbulento ao longo do tempo. Entre estes dois regimes, existe a região de transição, caracterizada pela formação de vórtices em pequenas escalas de perfil definido e periódico. Apesar de que a zona de transição seja pequena em espaço e no tempo, é fundamental conhecê-la, pois nela ocorrem efeitos importantes, por exemplo, a diminuição do arrasto e do aquecimento de superfícies em relação ao regime de turbulência.

Esta pequena região no escoamento pode ser identificada através do ponto de transição, que pode ser obtido através do número de Reynolds crítico ou da indiferença, como será utilizado neste trabalho. Durante o processo de transição, ocorre a amplificação das perturbações no espaço e no tempo, podendo gerar instabilidades primárias e secundárias, como a instabilidade de Kelvin-Helmholtz, os vórtices de Görtler e a instabilidade de Tollmien-Schlichting, que por sua vez, podem levar o escoamento ao regime turbulento.

Em diversas aplicações de mecânica dos fluidos, o controle da região de transição impacta diretamente na eficiência aerodinâmica em projetos de engenharia, como o arrasto em aeronaves e carros. Nestes tipos de aplicação, a permanência da região de transição costuma ser o estado desejado (MCMURTRY, 2000). Em aplicações aeroespaciais, o regime turbulento costuma ser evitado, pois ocorrem influências durante o voo, como perda de sustentação, aumento do arrasto, aquecimento na estrutura e maior consumo de combustível.

No entanto, a região de transição ainda não é totalmente compreendida, pois esta possui ao mesmo tempo propriedades relacionadas ao regime laminar e turbulento, tornando a modelagem e a análise complexas. Portanto, o seu estudo pode contribuir de forma direta tanto na compreensão desta região, quanto na melhoria de projetos de engenharia e de métodos de controle já existentes.

Diante disso, o presente trabalho tem como principal objetivo o estudo da região de transição do regime laminar para o turbulento de um escoamento paralelo sobre uma placa plana, utilizando a abordagem numérica da teoria de instabilidade hidrodinâmica. A idealização da placa plana foi escolhida por conta da sua abrangência, simplicidade e conhecimento sobre o perfil de velocidades do escoamento na região próxima à superfície da placa.

Basicamente, a análise será realizada através da solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld que, por sua vez, é considerada como a equação fundamental que descreve a evolução temporal das perturbações, a qual, forma o ponto de partida para a teoria da estabilidade de escoamentos laminares (SCHLICHTING, 1979), podendo ser aplicada em escoamentos invíscidos e viscosos, tendo assim diversas aplicações aeroespaciais.

Para descrever a solução no regime laminar, utilizar-se-á a solução da camada limite de Blasius, partindo da região fora da camada limite (invíscida) até a superfície da placa plana (viscosa). A avaliação da evolução das perturbações que surgirão no escoamento ao longo do tempo serão analisadas através da teoria da estabilidade hidrodinâmica linear.

Além disso, um dos principais objetivos é traçar as curvas de estabilidade, que por sua vez, permitem observar os parâmetros que poderão levar à formação de instabilidades. Segundo Baines, Majumdar e Mitsudera (1996), o mecanismo físico para a instabilidade bidimensional da camada limite de Blasius e escoamentos similares, onde há o crescimento da perturbação é conhecido como ondas de Tollmien-Schlichting. Esta instabilidade é a parte inicial do processo de transição para a turbulência na camada limite de situações comuns, como em asas de aeronaves.

## 1.1 OBJETIVOS

Para estudar a estabilidade hidrodinâmica de escoamentos sobre placas planas, propõe-se os seguintes objetivos.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Compreender e descrever numericamente o escoamento em regime de transição para a turbulência sobre placas planas.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- Estudar e compreender os conceitos básicos de estabilidade hidrodinâmica;
- Implementar um código computacional para a solução da equação de Orr-Sommerfeld aplicada à placa plana;
- Obter os valores críticos para o surgimento de instabilidades hidrodinâmicas;
- Compreender o desenvolvimento das flutuações no escoamento;
- Interpretar os resultados associando-os com possíveis aplicações no setor aeroespacial.

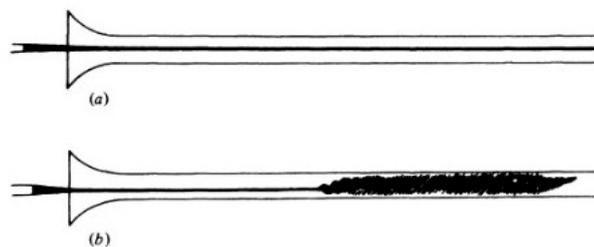
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será apresentada uma revisão dos conceitos fundamentais sobre o estudo da estabilidade hidrodinâmica, como número de Reynolds crítico, propriedades do escoamento durante a transição, fatores que influenciam a transição de escoamentos e aplicações da transição.

### 2.1 REGIMES DE ESCOAMENTO

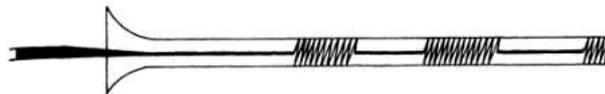
O primeiro experimento para a identificação dos regimes de escoamento foi realizado por Osborne Reynolds em 1883, onde utilizou-se tubos de vidro de mesmo diâmetro com o objetivo de avaliar o comportamento da água sob diferentes velocidades. Para isso, Reynolds adicionou um filamento de tinta no escoamento e introduziu a água de forma a não causar perturbações nas entradas dos tubos (DRAZIN; REID, 2004).

Figura 1 – Experimento com tubos realizado por Osborne Reynolds. (a) Escoamento Laminar. (b) Escoamento turbulento.



Fonte – Adaptado de Drazin e Reid (2004).

Figura 2 – Experimento de Reynolds mostrando a região de transição.



Fonte – Drazin e Reid (2004).

A representação do estudo de Reynolds é mostrada nas figuras 1 e 2. No primeiro tubo, o pesquisador concluiu que o escoamento sob baixa velocidade fazia com que o filamento se mantivesse organizado ao longo de todo o comprimento. Já o segundo tubo da figura 1 mostra que o escoamento sob altas velocidades pode formar estruturas sinuosas e a formação de estruturas turbilhonares (DRAZIN; REID,

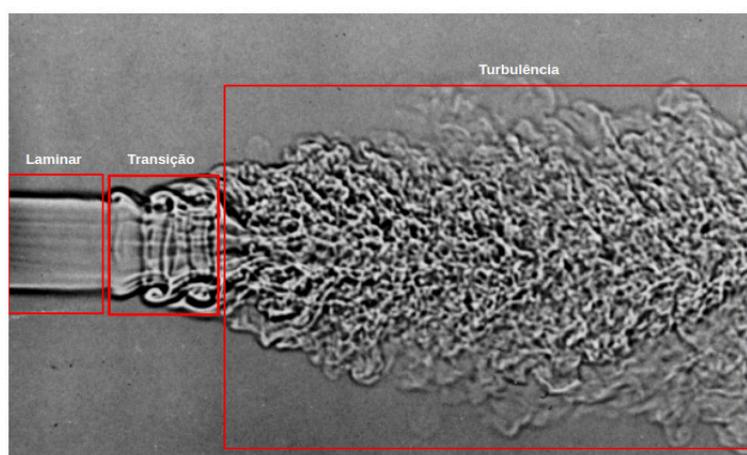
2004). Na figura 2, tem-se o surgimento das primeiras perturbações no escoamento, onde nota-se que estas causavam desvios no filamento de tinta de forma periódica, caracterizando a região de transição.

Mesmo ao identificar a presença de três fases diferentes, Osborne Reynolds classificou que o escoamento apresentava dois regimes básicos: laminar e turbulento. Basicamente, o regime laminar pode ser entendido como um escoamento organizado e em camadas, as quais, cisalham umas sobre as outras, mantendo uma mesma direção. Desta forma, não há muitos movimentos perpendiculares à direção do escoamento por parte das partículas de fluido.

O escoamento no regime turbulento é caracterizado pelas flutuações de grande amplitude, irregulares e aleatórias, uma vez que há movimentos das partículas de fluido em todas as direções. Assim, um escoamento turbulento pode ser dividido entre escoamento médio e flutuações. O escoamento médio pode ser entendido como a maior parte do fluxo, onde é possível identificar a sua direção. Já as flutuações englobam as componentes de velocidade das perturbações, que se amplificam através de misturas entre as camadas de fluido, formando estruturas turbilhonares e vórtices. Estes últimos costumam se dissipar no escoamento médio através da formação de novas estruturas de igual ou maior complexidade e na forma de energia (aquecimento) (KUETHE; CHOW, 1998).

### 2.1.1 Região de transição

Figura 3 – Regimes de escoamento em um jato subsônico.



Fonte – Adaptado de Van Dyke e White (1982).

Conforme mostrado no experimento de Osborne Reynolds, entre os regimes laminar e turbulento, existe uma região intermediária conhecida como transição (Figura

3). Basicamente, o escoamento laminar está sujeito à ação de agentes internos ou externos, por exemplo, velocidade na entrada de um tubo, vibrações, gradientes de pressão ou de temperatura. Estes agentes podem causar o surgimento de perturbações no escoamento laminar. Assim, as camadas de fluido que, inicialmente, eram bem definidas e organizadas passam a apresentar pequenas misturas perpendiculares, que por sua vez, costumam formar padrões definidos.

Segundo Drazin e Reid (2004), Reynolds observou durante o seu experimento, o surgimento periódico de perturbações, que se dissipavam e ressurgiam ao longo do escoamento. Após determinada velocidade crítica, estas perturbações se transformaram em estruturas caóticas e aleatórias, denotando o início do regime turbulento. A partir destas observações da velocidade crítica, surgiu o conceito do número de Reynolds  $Re$ , que será abordado nas próximas seções.

Na figura 3, é possível observar a pequena região de transição quando comparada aos regimes laminar e turbulento. De acordo com Kuethe e Chow (1998), a extensão da região de transição depende das características das perturbações inseridas no escoamento, por exemplo, vibrações de grande amplitude podem acelerar a formação de turbulências.

Figura 4 – Transição em fumaça de cigarro.

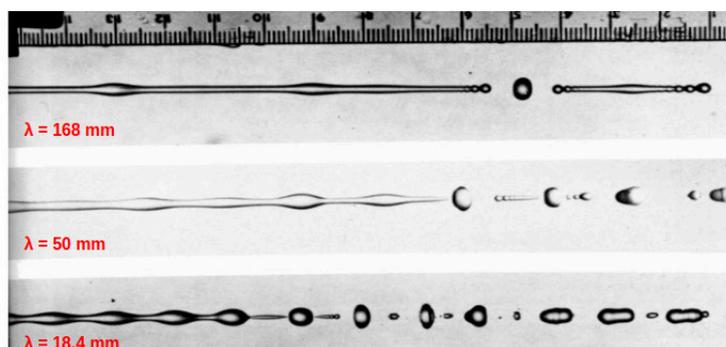


Fonte – Van Dyke e White (1982).

Na figura 4, a principal influência é o gradiente de temperatura (diferença entre a temperatura da fumaça e do ambiente). Para o autor Zuccher (2001), próximo do cigarro, a velocidade da fumaça é pequena, ou seja, o escoamento possui número de Reynolds baixo, tornando o fluxo laminar. À medida em que a fumaça se afasta do cigarro, por conta da sua temperatura, a densidade tende a diminuir, acelerando-a. Desta forma, o aumento de  $Re$ , leva à turbulência. Enquanto que o padrão tridimensional da transição se deve, principalmente, ao gradiente de temperatura entre o escoamento livre e a fumaça. Portanto, tem-se que a diferença de temperaturas influencia diretamente na transição do escoamento.

A região de transição também pode ser marcada pelo surgimento de instabili-

Figura 5 – Instabilidade capilar de um jato líquido.



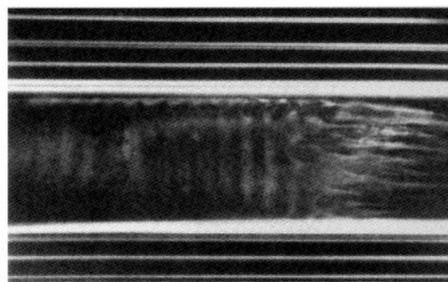
Fonte – Adaptado de Van Dyke e White (1982).

dades de forma periódica. Na figura 5, a água foi forçada a passar por um tubo de 4 mm de diâmetro sob perturbações de frequências diferentes (168 mm, 50 mm e 18,4 mm de comprimento de onda, respectivamente). Nota-se que a frequência da onda influencia diretamente no surgimento e comprimento das estruturas de instabilidade.

Figura 6 – Padrões de instabilidades hidrodinâmicas.



(a) Instabilidade de Kelvin-Helmholtz em nuvens.



(b) Ondas de Tollmien-Schlichting em camada limite.

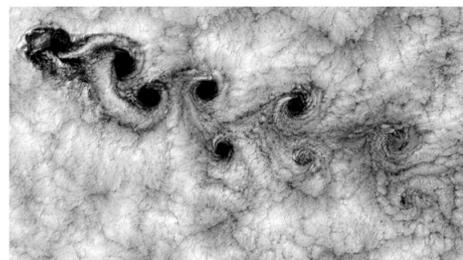
Fonte – Brandt *et al.* (2003); Schlichting (1979).

Desta forma, as figuras 3, 4 e 5 mostram que o desenvolvimento das perturbações pode assumir formas distintas. Por isso, há padrões já conhecidos de estruturas de transição, como por exemplo, a instabilidade de Kelvin-Helmholtz (Figura 7(a)), as ondas de Tollmien Schlichting (Figura 7(b)), as ondas gravitacionais de água rasa (Figura 8(a)) e as esteiras de von-Karman (Figura 8(b)). Basicamente, o formato da estrutura de uma instabilidade depende de fatores relacionados ao escoamento, como densidade, viscosidade e velocidade. As propriedades das perturbações, por exemplo, frequência e amplitude também influenciam no perfil da instabilidade formada, conforme será mostrado nos próximos capítulos deste trabalho.

Figura 7 – Outros padrões de instabilidades hidrodinâmicas.



(a) Ondas de água rasa.



(b) Esteiras de von Kármán.

Fonte – Mendonça e Medeiros (2009); Brandt *et al.* (2003).

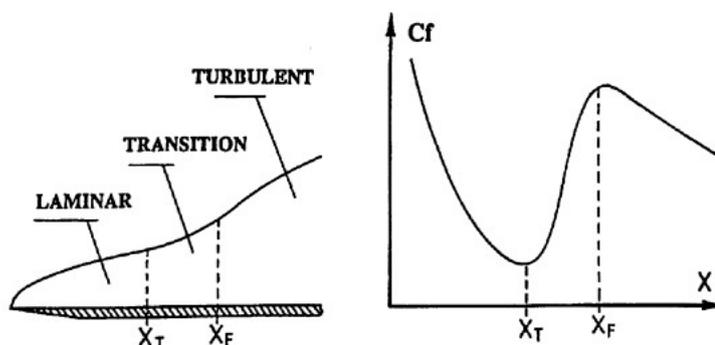
### 2.1.2 Aplicações da transição

De acordo com Kuethe e Chow (1998), independente do comprimento e da periodicidade da região de transição, a passagem para o regime turbulento ocorrerá em algum momento. Assim, as aplicações industriais que lidam com escoamentos buscam analisar a estabilidade hidrodinâmica com objetivo de controlar a região de transição de acordo com os benefícios e necessidades que dado regime pode oferecer.

Segundo Freire (2012), o controle e a previsão da região de transição são de grande importância para as indústrias aeronáutica, química e mecânica, pois o ponto de transição comumente influencia no rendimento de equipamentos e artefatos. No contexto da engenharia aeroespacial, a performance da combustão em dispositivos utilizados em aeronaves supersônicas depende da região de transição, uma vez que esta influencia diretamente na mistura entre o combustível e o comburente (MCMURTRY, 2000). Em Arnal (1999), tem-se que o controle da região de transição influencia diretamente nas propriedades aerodinâmicas de superfícies e estruturas, como o arrasto e aquecimento. Um dos exemplos é a definição da espessura do revestimento de isolamento térmico de espaçonaves e cápsulas que são submetidas à reentrada na atmosfera. A aviação comercial também deve controlar a região de transição.

Na figura 8, tem-se a representação do coeficiente de atrito ( $C_f$ ) de um escoamento sobre uma placa plana, onde pode-se notar que a passagem do regime laminar para o turbulento é acompanhado pelo aumento do coeficiente de atrito, que também é conhecido como coeficiente de arrasto parasita. No contexto da aviação comercial, a analogia da placa plana pode ser aplicada à uma asa ou aerofólio. Assim, existem estudos para a predição do arrasto nas asas de aeronaves com o objetivo de permanecer na região laminar para reduzir o consumo de combustível. Além disso, a geração de vórtices, seja no regime de transição ou na turbulência traz ruídos, o que é indesejável em aeronaves comerciais (ARNAL, 1999).

Figura 8 – Representação do coeficiente de atrito ( $C_f$ ) em diferentes regimes do escoamento.



Fonte – Arnal (1999).

O controle da transição também é utilizado com o intuito acelerar a passagem para o regime turbulento, como é o caso de aplicações na área farmacêutica, onde a turbulência é benéfica para a mistura e distribuição de nutrientes ou medicamentos na corrente sanguínea de pacientes (TRUZZOLILLO; CIPELLETTI, 2018). Para Zuccher (2001), este tipo de abordagem, onde o controle da transição consiste em acelerar a turbulência, é comumente utilizado em reações químicas para diminuir o tempo de reação e em processos que lidam com aquecimento ou resfriamento, um exemplo do cotidiano é mexer o café dentro de uma xícara para resfriá-lo.

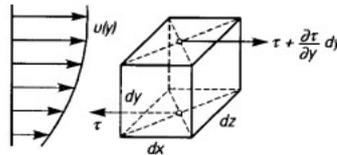
De acordo com Arnal (1999), o método  $e^N$  é um dos mais utilizados na predição da transição na indústria. Basicamente, o método considera um escoamento bidimensional, estável com camada limite fina e perturbações de pequena amplitude. Assim, resolve-se a equação de Orr-Sommerfeld para os perfis de velocidade do escoamento dentro da camada limite e calcula-se a taxa de amplificação das ondas mais instáveis para cada um destes perfis. A taxa de amplificação total consiste na integral destas taxas individuais. A transição ocorre no ponto em que a taxa de amplificação total ( $N$ ) excede um determinado valor limiar. No geral, para escoamentos paralelos  $N$  é cerca de 9.

Com o avanço da computação, novos métodos para controle e predição da transição tem sido desenvolvidos. Porém, esta região ainda não é totalmente compreendida, pois há diversos fatores que a influenciam, como o gradiente de pressão, imperfeições na superfície e vibrações. Na natureza e em aplicações reais, geralmente, estes fatores atuam em conjunto, o que torna a análise da transição ainda mais complexa. Portanto, torna-se importante realizar o estudo da estabilidade hidrodinâmica como forma de contribuir para a produção de conhecimento nas áreas de mecânica dos fluidos e aeroespacial.

### 2.1.3 Número de Reynolds

Conforme mostrado na seção 2.1, Osborne Reynolds observou que o escoamento se tornava totalmente caótico após exceder determinado valor crítico de  $Vd/\nu$ , no qual,  $V$  é a velocidade do escoamento,  $d$  corresponde ao diâmetro do tubo e  $\nu$  é a viscosidade cinemática da água, que por sua vez, depende da temperatura. Reynolds mostrou que o valor desta relação entre as propriedades do escoamento e o diâmetro do tubo condiciona o surgimento de instabilidades no escoamento. Mais tarde, essa passou a ser conhecida como número de Reynolds ( $Re$ ) e é utilizada para determinar a região, na qual, um escoamento se encontra (DRAZIN; REID, 2004).

Figura 9 – Forças agindo sobre um elemento de fluido.



Fonte – Schlichting e Gersten (2017).

Apesar de parecer uma relação simples, o número de Reynolds é proveniente de quatro tipos de forças que agem sobre o volume de um elemento de fluido pertencente ao escoamento. Basicamente, existem as forças de atrito, que são proporcionais à viscosidade ( $\mu$ ). Tem-se as forças inerciais, que por sua vez, são proporcionais à densidade ( $\rho$ ). E as forças de pressão e volume, que podem ser consideradas como forças gravitacionais. Para um escoamento na direção  $x$ , as forças gravitacionais são pequenas, então, podem ser desprezadas. Assim, a força inercial por unidade de volume é dada por  $\rho(du/dt)$ , onde  $u$  corresponde à componente da velocidade em  $x$ . Para um escoamento permanente, a força inercial pode ser escrita como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Na equação (1),  $\partial u / \partial x$  corresponde ao gradiente de velocidade do elemento de fluido com a sua mudança de posição na direção  $x$ . A força de atrito para este mesmo elemento de fluido é representada pela figura 9, na qual, nota-se que este tipo de força é proveniente do cisalhamento que age sobre o elemento. De acordo com Schlichting (1979), as forças de cisalhamento podem ser escritas através da seguinte expressão:

$$\left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz. \quad (2)$$

Em (2), a variável  $\tau$  é a tensão de cisalhamento para um fluido newtoniano, que é dada por  $\tau = \mu du/dy$ . Portanto, essa equação mostra que a diferença entre a força de cisalhamento atuante na face superior do volume de elemento de fluido pela que está atuando na face inferior é igual à força inercial atuando em todo o volume deste elemento. Assim chega-se na seguinte relação:

$$\frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = cte. \quad (3)$$

Na equação (3), o numerador corresponde às forças inerciais e o denominador às forças viscosas, obedecendo à condição de similaridade mecânica. Como mostrado em Schlichting (1979), pode-se considerar, tendo em vista o experimento em tubos de Reynolds mostrado no início deste capítulo, que  $x$  é o comprimento característico dado pelo diâmetro  $d$  do tubo e que  $u$  é proporcional à velocidade do escoamento livre. Assim, chega-se em  $Re$ , que é a razão entre as forças inerciais e as viscosas. Utilizando o princípio da similaridade mecânica, pode-se considerar que todos os pontos do escoamento têm essa mesma razão de forças. Portanto, aplicando-o para o escoamento no interior de tubos, como no experimento mostrado na figura 1, chega-se em:

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}. \quad (4)$$

Na equação (4), tem-se o número de Reynolds ( $Re$ ), que permite identificar as distintas regiões em um escoamento. Geralmente, grandes números de Reynolds acarretam na dominância das forças inerciais sobre as forças viscosas, levando à turbulência. Enquanto que a região laminar é caracterizada por baixos valores do número de Reynolds, onde há a predominância das forças viscosas.

Na região de transição, ocorre alternância entre as forças inerciais e viscosas a depender das características das perturbações existentes no escoamento. Desta forma, o principal objetivo de calcular  $Re$  é identificar o ponto de início desta região, por exemplo, no escoamento sobre uma placa plana, o ponto sobre esta, no qual, haverá o surgimento das primeiras perturbações. Nas próximas seções, será mostrado que o número de Reynolds, onde a transição inicia, é denominado de número de Reynolds da indiferença.

#### 2.1.4 Camada limite hidrodinâmica

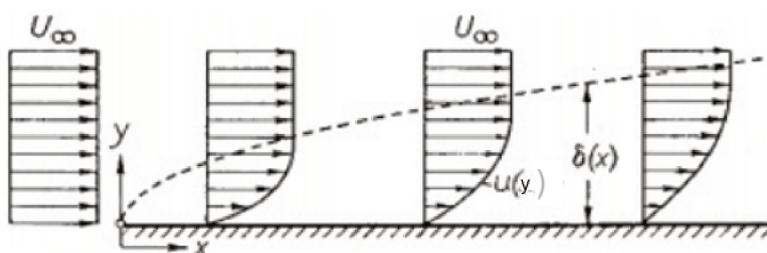
No presente trabalho, o foco será a região da camada limite em um escoamento sobre uma placa plana. Assim, o entendimento sobre o que é esta região e como ela se comporta é de suma importância para a compreensão deste estudo.

Basicamente, quando um fluido escoar sobre uma superfície sólida, por exemplo, uma bola de futebol, uma asa de uma aeronave ou o casco de um navio, há a formação da camada limite, que possui espessura bastante fina, tornando-a imperceptível a olho nu.

Segundo Anderson (2012), o conceito de camada limite foi introduzido pela primeira vez em 1904, em um artigo de Ludwig Prandtl apresentado no Terceiro Congresso de Matemáticos em Heidelberg, na Alemanha.

Para Schlichting (1979), a definição de camada limite, em um escoamento com alto número de Reynolds pode ser dividido em duas regiões distintas. Na primeira, que compreende a maior parte do fluxo, a viscosidade pode ser desprezada, correspondendo à região não-viscosa. Já a segunda, se localiza próxima à parede e possui pequena espessura, onde os efeitos viscosos devem ser considerados, sendo então, denominada de camada limite. Ressalta-se que mesmo para escoamentos sob baixos números de Reynolds há a formação da camada limite, porém, com a dominância das forças viscosas sobre as inerciais, esta divisão do escoamento em duas regiões não será tão clara. Portanto, a definição utilizada serve para facilitar a visualização.

Figura 10 – Esquemática da camada limite sobre placas planas.



Fonte – Adaptado de Schlichting (1979).

Os efeitos viscosos no interior da camada limite são provenientes das forças de atrito entre as camadas de fluido que desaceleram às partículas até a velocidade zero sobre a superfície sólida. Desta forma, à medida que as partículas são desaceleradas ao longo de uma superfície plana, há o aumento da espessura da camada limite, que é denominada como  $\delta(x)$  e mudança no perfil de velocidade no interior da camada limite, como pode ser visto na figura 10, onde  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento livre e  $u(y)$  corresponde à velocidade do escoamento na camada limite na direção  $y$ . Nota-se ao se aproximar da borda da camada limite,  $u(y)$  tende assintoticamente à  $U_\infty$ . Assim, uma das definições de espessura de camada limite ( $\delta(x)$ ) comumente utilizada consiste no ponto em que  $u(y)$  é 99% de  $U_\infty$ , que pode ser escrita como:

$$\delta_{99} = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (5)$$

Na equação (5), a variável  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $x$  corresponde ao comprimento entre um ponto na superfície desde o bordo de ataque. Ressalta-

se que, de acordo com a aplicação, essa distância é diferente, por exemplo, em um aerofólio, considera-se a corda. Além disso, essa equação só é válida para a camada limite no regime laminar, que para uma placa plana com zero de ângulo de ataque, pode ser aproximada em:

$$\delta_{laminar} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}. \quad (6)$$

Em (6), a variável  $\delta_{laminar}$  é a espessura da camada limite laminar. A constante 5 surgiu a partir da consideração de que o ponto em que a velocidade no interior da camada limite atinge 99% da velocidade do escoamento livre corresponde à  $\eta = 3,6$ , como mostrado na referência Schlichting (1979). Essa variável  $\eta$  foi utilizada por Blasius para resolver as equações da camada limite de Prandtl e será devidamente definida nas próximas seções. Voltando à equação (6), tem-se  $Re_x$ , que corresponde ao número de Reynolds calculado em um ponto sobre o comprimento da placa plana.

Para a camada limite no regime turbulento, uma das formas de calcular  $\delta(x)$ , com base em resultados experimentais é dada por:

$$\delta_{turbulenta} = \frac{0,37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}}. \quad (7)$$

Na equação (7),  $\delta_{turbulenta}$  é a espessura da camada limite no regime turbulento. Ao comparar essa equação com 6, nota-se que a espessura da camada limite turbulenta cresce na proporção de  $x^{4/5}$ . Enquanto que a espessura da camada limite laminar é proporcional à  $x^{1/2}$ . Considerando uma placa plana, a espessura da camada limite laminar crescerá de forma mais lenta do que a espessura da camada limite turbulenta.

A camada limite hidrodinâmica laminar também possui uma outra definição arbitrária conhecida como espessura de deslocamento ( $\delta_1$ ), que pode ser definida como a distância em que as linhas de corrente próximas à superfície da placa são afastadas pela desaceleração do escoamento na camada limite (FREIRE, 1990). Assim, pode-se escrever  $\delta_1$  como:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u(y)}{U_{\infty}}\right) dy. \quad (8)$$

Comparando as definições de espessura da camada limite no regime laminar mostradas nas equações (5) e (6) com (8), nota-se que a definição de  $\delta_1$  compreende em todos os pontos entre  $y = 0$  até a borda da camada limite ( $y \rightarrow \infty$ ) e nas outras duas equações, tem-se o resultado aproximado da espessura da camada limite. Desta forma, será utilizada a definição apresentada na equação (8) nos cálculos apresentados neste trabalho.

#### 2.1.4.1 Equações da camada limite

O comportamento do escoamento laminar no interior da camada limite pode obtido através das equações da camada limite de Prandtl, que posteriormente, foram

resolvidas por Blasius para o caso de uma placa plana com  $0^\circ$  de incidência considerando um escoamento bidimensional em regime permanente.

Basicamente, a dedução das equações da camada limite inicia com a divisão do escoamento bidimensional e de um fluido newtoniano em duas regiões análogas à mostrada nas seções anteriores. Assim, tem-se que próximo à superfície da placa, o gradiente de velocidade ( $\partial u/\partial y$ ) é grande, e na região distante da superfície, esse gradiente é pequeno.

Outra hipótese adotada é que a espessura da camada limite laminar ( $\delta$ ) é muito menor que o comprimento ( $l$ ) da placa plana. Assim, com essa hipótese e as considerações das regiões do escoamento sobre a placa plana, adimensionaliza-se as equações de Navier-Stokes, como mostrado na referência Anderson (2012). Este processo de adimensionalização permite que seja feita a análise da ordem de magnitude dos termos das equações de balanço. Após essa análise, as equações de balanço podem ser escritas na forma dimensional, como mostrado a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

A equação (9) é a equação da continuidade, na qual,  $v$  é a componente de velocidade do escoamento na camada limite na direção  $y$ . As equações (10) e (11) são as de quantidade de movimento em  $x$  e em  $y$ , respectivamente. E a variável  $p$  é a pressão no escoamento na camada limite. A equação (11) traz uma conclusão importante: a pressão é constante na direção normal à superfície da placa, ou seja, a pressão do escoamento na direção  $y$  da camada limite é a mesma que a do escoamento livre. Este conjunto de equações possuem as seguintes condições de contorno:

$$\text{Em } y = 0: u = 0, v = 0, \quad (12)$$

$$\text{Em } y \rightarrow \infty, u \rightarrow U_\infty. \quad (13)$$

Na condição de contorno (12), tem-se que as componentes de velocidade do escoamento na camada limite são nulas na superfície da placa plana. Já em (13), a componente  $u$  tende a se igualar à velocidade do escoamento fora da camada limite.

### 2.1.5 Solução de Blasius para a camada limite laminar

Uma das aplicações mais simples e convencionais da teoria da camada limite é em um escoamento sobre uma placa plana de comprimento infinito. Segundo Anderson (2012), H. Blasius obteve a solução para este tipo de problema na sua tese

de doutorado em 1908. Blasius foi um dos estudantes de Prandtl e esta foi a primeira aplicação da teoria da camada limite desenvolvida por Prandtl desde 1904.

Basicamente, Blasius partiu de um escoamento bidimensional e incompressível sobre uma placa plana com  $0^\circ$  de ângulo de ataque, considerando que o fluido possuía  $\rho$  e  $\mu$  constantes e que  $dp/dx = 0$ . A última hipótese advém do fato que a pressão de um escoamento não-viscoso é constante sobre uma placa plana com ângulo de ataque  $0^\circ$ . Desta forma, Blasius utilizou as equações de balanço (9) - (11) e transformou as variáveis independentes  $x$  e  $y$  em  $\xi$  e  $\eta$ . Portanto:

$$\xi = x, \quad (14)$$

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}. \quad (15)$$

O principal objetivo desta transformação é fazer com que se obtenha uma única função com  $\eta$  como variável independente. Além disso, Blasius considerou que o perfil de velocidade no interior da camada limite  $u/U_\infty$  como auto-similar em relação à  $x$ , ou seja, o perfil de velocidade varia em função de  $\eta$  na forma de  $f'(\eta) = u/U_\infty$  até a borda da camada limite.

A solução de Blasius também utiliza a definição de função corrente ( $\psi$ ) com intuito de satisfazer a equação de balanço (9). Desta forma, denotando  $u$  e  $v$  em termos de  $\psi$ , tem-se:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (16)$$

Em (16),  $\psi$  é dada por:

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta). \quad (17)$$

Desta forma, as componentes  $u$  e  $v$  de (16) são reescritas como:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta), \quad (18)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (19)$$

A partir das equações (18) e (19), as componentes da velocidade do escoamento passaram a ser definidas em função de  $\eta$ . Substituindo-se estas na equação da quantidade de movimento em  $x$  (10), chega-se na equação de Blasius:

$$f''' + f f'' = 0. \quad (20)$$

Com as condições de contorno:

$$\eta = 0: \quad f = 0 \quad f' = 0, \quad (21)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1. \quad (22)$$

A equação (20) é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) significativamente mais simples do que as equações da camada limite de Prandtl, da qual se origina. A condição de contorno (21) mostra que em  $\eta = 0$ , a função  $f$  e sua primeira derivada são nulas. Como  $f'$  é a razão de velocidades  $u/U_\infty$ , tem-se que em  $\eta = 0$ , a componente  $u$  é nula. Na condição (22), à medida em que  $\eta$  tende à borda da camada limite,  $f'$  deverá se igualar à 1, ou seja,  $u$  tende à  $U_\infty$ .

A transformação das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de Prandtl em EDOs de Blasius faz com que essa nova solução para a camada limite seja do tipo auto-similar, o que permite mapear os perfis de velocidade ao longo do comprimento característico da placa a partir de uma única função de uma variável.

Além disso, a equação (20) permite que a espessura de deslocamento da camada limite definida na equação (8) seja calculada de forma mais simples substituindo-se a definição de  $u$  em relação à  $\eta$  mostrada em (18), que resultará em:

$$\delta_1 = \frac{1,72x}{\sqrt{Re_x}}. \quad (23)$$

Neste trabalho, a equação de Blasius será utilizada na solução da Equação de Orr-Sommerfeld (O-S) na solução laminar. E a definição de  $\delta_1$  apresentada em (23) será empregada para o cálculo de  $Re$  durante toda a solução de O-S, como será mostrado nas próximas seções.

### 2.1.6 Teoria da estabilidade hidrodinâmica

A estabilidade hidrodinâmica estuda a evolução das perturbações presentes no escoamento que deverão levá-lo do regime laminar para o turbulento (FREIRE, 2012).

Para Malatesta (2014), o estudo da estabilidade hidrodinâmica também permite entender os mecanismos de transição para a turbulência em estruturas complexas da natureza. Sobre estas estruturas, Truzzolillo e Cipelletti (2018), mostram que há padrões na natureza resultantes de instabilidades hidrodinâmicas, como o formato de flocos de neve, estruturas geológicas e meteorológicas, principalmente em relação às misturas entre fluidos miscíveis e imiscíveis.

Em aplicações de mecânica dos fluidos, a teoria da estabilidade hidrodinâmica estuda o comportamento de pequenas perturbações impostas no escoamento, surgidas a partir de rugosidade na parede, gradientes de pressão, gradientes de temperatura e afins. Desta forma, o principal objetivo é analisar se estas perturbações são amplificadas ou não ao longo do tempo.

Basicamente, se uma perturbação é atenuada com o tempo, o escoamento é estável. Do contrário, ou seja, se há a amplificação da perturbação no tempo, considera-se que o escoamento é instável e que logo ocorrerá a passagem do regime laminar para o turbulento. Em relação aos motivos, pelo quais, uma perturbação pode levar à transição de um fluxo, tem-se:

Em termos gerais, podemos dizer que um escoamento é estável quando existir um certo equilíbrio entre as forças externas, de inércia e viscosas que agem sobre ele. Quando pequenas perturbações quebram este equilíbrio, elas podem eventualmente se amplificar dando origem a instabilidades. As forças externas de principal interesse são aquelas provocadas por variação da massa específica do fluido, por tensões específicas, por forças magnetohidrodinâmicas, etc. (FREIRE, 2012, p.1).

Outro ponto importante da teoria da estabilidade hidrodinâmica é a determinação do número de Reynolds da indiferença ( $Re_{ind}$ ), que é o valor abaixo do qual todas as perturbações são atenuadas. Enquanto que, acima de  $Re_{ind}$ , as perturbações podem ser amplificadas, dando origem à turbulência. Logo,  $Re_{ind}$  é denominado como o ponto de transição do escoamento. Como a região de interesse neste estudo é a camada limite, então, o cálculo de  $Re_{ind}$  será em função da espessura de deslocamento (23). Logo:

$$Re_{ind} = \left( \frac{U_{\infty} \delta_1}{\nu} \right)_{ind}. \quad (24)$$

Utilizando a equação (24) para o caso de uma placa plana com  $0^\circ$  de incidência,  $Re_{ind}$  será aproximadamente 520 de acordo com Schlichting (1979). Assim, um dos objetivos deste trabalho, é obter  $Re_{ind}$  próximo do valor mencionado acima através da solução da equação de Orr-Sommerfeld.

#### 2.1.6.1 Teoria da estabilidade hidrodinâmica linear na camada limite sobre uma placa plana

A teoria da estabilidade hidrodinâmica linear para o escoamento sobre uma placa plana é comumente aplicada através da abordagem por modos normais, que conforme mostrado na seção anterior, busca-se avaliar se as perturbações impostas no escoamento serão amortecidas ou amplificadas ao longo do tempo ou espaço.

Desta forma, pode-se considerar um escoamento bidimensional, incompressível e paralelo na direção  $x$ , que por sua vez, é separado em duas regiões: escoamento média e as componentes de perturbação. Assim, as componentes de velocidade do escoamento são escritas como:

$$u(x, y, t) = U(y) + u'(x, y, t), \quad (25)$$

$$v(x, y, t) = v'(x, y, t), \quad (26)$$

$$p(x, y, t) = P(x, y) + p'(x, y, t). \quad (27)$$

A equação (25) representa a componente de velocidade do escoamento na direção  $x$ , que é a soma entre a componente do escoamento livre ( $U(y)$ ) mais a da perturbação ( $u'(x, y, t)$ ). Na equação (26), tem-se a componente de velocidade do escoamento à direção  $y$ , que como trata-se de um escoamento paralelo, só há a componente de velocidade da perturbação ( $v'(x, y, t)$ ). E (27) corresponde à pressão

do escoamento, que depende da pressão do escoamento livre ( $P(x, y)$ ) mais a da perturbação ( $p'(x, y, t)$ ). Assim, as equações de Navier-Stokes para esse escoamento sobre a placa plana são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (30)$$

A equação (28) é a continuidade. Em (29), tem-se a quantidade de movimento em  $x$  e a equação (30) corresponde à quantidade de movimento em  $y$ . Essas equações podem ser adimensionalizadas, como mostrado na referência Mendonça e Medeiros (2009), a partir dos seguintes parâmetros e variáveis adimensionais:

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta_1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta_1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad \bar{t} = \frac{t U_\infty}{\delta_1}, \quad Re_{\delta_1} = \frac{U_\infty \delta_1}{\nu}. \quad (31)$$

Assim, substituindo-se esses parâmetros nas equações (28) - (30) e considerando que na análise por modos normais, o escoamento médio é laminar, acarretando que não há gradientes de pressão e variações das suas componentes no tempo. Desta forma, pode-se desprezar os termos de pressão e os que variam no tempo relacionados ao escoamento médio. A partir da substituição destas considerações nas equações (28) - (30), chega-se nas equações de balanço para o escoamento perturbado:

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v}' \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \left[ \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{y}} \right] = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_{\delta_1}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{x}} + \left[ \bar{u}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{y}} \right] = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_{\delta_1}} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial \bar{y}^2} \right). \quad (34)$$

A equação (32) é a continuidade. Em (33) tem-se o balanço da quantidade de movimento em  $x$ . A terceira equação (34) é o balanço do momento em  $y$ . Como as componentes de velocidade das perturbações são pequenas, os termos não lineares entre colchetes das equações (33) e (34) podem ser desprezados. Desta forma, estas as equações de balanço podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v}' \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_{\delta_1}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (36)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_{\delta_1}} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial \bar{y}^2} \right). \quad (37)$$

Com condições de contorno:

$$\text{Em } \bar{y} = 0: \quad \bar{u}' = \bar{v}' = 0, \quad (38)$$

$$\text{Em } \bar{y} \rightarrow \infty: \quad \bar{u}', \bar{v}', \bar{p}' \rightarrow 0. \quad (39)$$

Na condição de contorno (38), tem-se que na superfície da placa plana, as componentes de velocidade das perturbações são nulas. E a condição de contorno (39) mostra que as componentes de velocidade e pressão da perturbação são atenuadas à medida em que se afasta da superfície da placa plana.

Como as equações de balanço (35), (36) e (37) são lineares, assumiu-se a função corrente como uma possível solução, pois esta última satisfaz a equação (35):

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}. \quad (40)$$

A equação (40) é a função corrente para um modo da perturbação presente no escoamento. Assim, modelando a perturbação como uma onda,  $\varphi$  é a amplitude em  $y$ ,  $x$  é a posição na placa e  $t$  é tempo. A variável  $\alpha$  é o número de onda da perturbação. Na abordagem temporal, conforme será mostrado nas próximas seções, considera-se  $\alpha$  um número real e a frequência ( $\omega$ ) como complexa, que por sua vez, é definida como:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i. \quad (41)$$

Na equação (41), a parte imaginária da frequência ( $\omega$ ) corresponde ao fator de amplificação da onda, que por sua vez, determina se haverá amplificação ( $\omega_i > 0$ ) ou amortecimento ( $\omega_i < 0$ ) da onda de perturbação no tempo. A partir das variáveis  $\alpha$  e  $\omega$ , obtém-se a velocidade da onda de perturbação:

$$c = \frac{\omega}{\alpha} = c_r + ic_i. \quad (42)$$

Na equação 42,  $c_r$  é a parte real da velocidade da onda de perturbação e seu significado consiste na velocidade de fase dessa onda e  $c_i$  determina se haverá estabilidade ou não no escoamento em relação ao tempo. Se  $c_i < 0$ , o escoamento será estável. Caso  $c_i = 0$ , o fluxo atingirá a estabilidade neutra. Já se  $c_i > 0$ , o escoamento será instável e, conseqüentemente, haverá a transição para a turbulência ao longo do tempo (SCHLICHTING, 1979).

Antes de dar continuidade à análise do escoamento por modos normais, é necessário adimensionalizar os parâmetros relacionados à onda de perturbação. Assim, pode-se definir as seguintes variáveis e parâmetros adimensionais:

$$\bar{U} = \frac{U}{U_\infty} \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{U_\infty \delta_1} \quad \bar{c} = \frac{c}{U_\infty} \quad (43)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha \delta_1 \quad \bar{\omega} = \omega \delta_1. \quad (44)$$

Retornando à análise do escoamento por modos normais, tem-se que a partir da definição da função corrente, a equação (40) pode ser derivada em relação à  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , resultando nas componentes de velocidade das perturbações:

$$\bar{u}' = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \bar{\varphi}'(\bar{y})e^{i(\bar{\alpha}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})}, \quad (45)$$

$$\bar{v}' = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -i\bar{\alpha}\bar{\varphi}(\bar{y})e^{i(\bar{\alpha}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})}. \quad (46)$$

Em (45), tem-se que a componente da velocidade da perturbação na direção  $x$  ( $u'$ ) é função da primeira derivada da amplitude ( $\bar{\varphi}'(\bar{y})$ ). Enquanto que em (46), nota-se que a componente  $v'$  depende da amplitude da onda na direção  $y$ .

Substituindo as equações (45) e (46) nas equações de balanço das perturbações (35) - (37), tem-se:

$$-i\bar{\omega}\bar{u}' + \bar{U}i\bar{\alpha}\bar{u}' + \bar{v}'\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} - \nu\left[-\bar{\alpha}^2\bar{u}' + \frac{\partial^2\bar{u}'}{\partial\bar{y}^2}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}'}{\partial\bar{x}}, \quad (47)$$

$$-i\bar{\omega}\bar{v}' + \bar{U}i\bar{\alpha}\bar{v}' - \nu\left[-\bar{\alpha}^2\bar{v}' + \frac{\partial^2\bar{v}'}{\partial\bar{y}^2}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}'}{\partial\bar{y}}. \quad (48)$$

Derivando-se a equação (47) em relação à  $\bar{y}$  e a equação (48) em relação à  $\bar{x}$ , por fim, subtraindo-se ambas:

$$\begin{aligned} (\bar{U}\bar{\alpha} - \bar{\omega})\left(i\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{y}} + \bar{\alpha}\bar{v}'\right) + \left(i\bar{\alpha}\bar{u}' + \frac{\partial\bar{v}'}{\partial\bar{y}}\right)\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} + \bar{v}'\frac{d^2\bar{U}}{d\bar{y}^2} - \frac{i}{\bar{\alpha}Re_{\delta_1}}\bar{\alpha}^2\left[i\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{y}} + \bar{\alpha}\bar{v}'\right] \\ \frac{i}{\bar{\alpha}Re_{\delta_1}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}\left[i\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{y}} + \bar{\alpha}\bar{v}'\right] = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Ao analisar a equação (49), percebe-se que os passos realizados permitiram eliminar o termo de pressão mostrado em (47) e (48). Assim, utilizando as definições das equações (45), (46) e lembrando que  $\bar{c} = \bar{\omega}/\bar{\alpha}$ , a equação (49) pode ser reescrita em:

$$(\bar{U} - \bar{c})(\bar{\varphi}'' - \bar{\alpha}\bar{\varphi}) - \bar{\varphi}\bar{U}'' + \frac{i}{\bar{\alpha}Re_{\delta_1}}[\bar{\varphi}^{IV} - 2\bar{\alpha}]^2\bar{\varphi}'' + \bar{\alpha}^4\bar{\varphi} = 0. \quad (50)$$

Em (50), tem-se a equação de Orr-Sommerfeld na sua forma adimensional. Assim, reorganizando os termos, chega-se na forma final desta equação:

$$(\bar{U} - \bar{c})(\bar{\varphi}'' - \bar{\alpha}\bar{\varphi}) - \bar{U}''\bar{\varphi} + \frac{i}{\bar{\alpha}Re_{\delta_1}}(\bar{\varphi}^{IV} - 2\bar{\alpha}^2\bar{\varphi}'' + \bar{\alpha}^4\bar{\varphi}) = 0. \quad (51)$$

A equação (51) é uma EDO linear, homogênea e de 4ª ordem, que quando aplicada à camada limite, possui as seguintes condições de contorno:

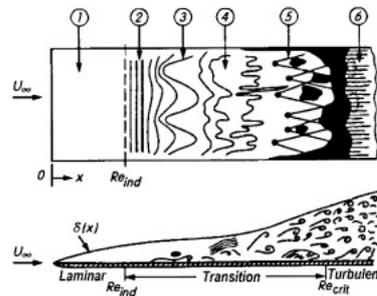
$$\bar{y} = 0: \quad \bar{u}' = \bar{v}' = 0, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}' = 0, \quad (52)$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty: \quad \bar{u}' = \bar{v}' = 0, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}' = 0. \quad (53)$$

A condição (52) mostra que na superfície da placa plana ( $\bar{y} = 0$ ), as componentes de velocidade da perturbação, a amplitude e sua derivada são nulas, ou seja, há



Figura 12 – Transição na camada limite sobre uma placa plana.



Fonte – Schlichting (1979).

que são originadas pelas ondas de Tollmien-Schlichting. Em ④, há o decaimento das estruturas formadas em ③. Por fim, ⑤ denota o início da turbulência com o surgimento de estruturas grampo de cabelo. E em ⑥, o escoamento está totalmente turbulento.

Neste trabalho, a transição da camada limite compreenderá apenas até a formação das ondas de Tollmien-Schlichting, pois as instabilidades secundárias são estudadas pela teoria da estabilidade hidrodinâmica não-linear.

### 2.1.7 Classificação das instabilidades

Antes de resolver a equação de Orr-Sommerfeld (51), é preciso definir uma formulação, que por sua vez, consiste em assumir o modo como as perturbações serão propagadas no escoamento. A partir da formulação assumida, é possível adotar hipóteses simplificativas.

Na formulação temporal, considera-se que a perturbação será amplificada no escoamento ao longo do tempo. Assim,  $\bar{\alpha}$  é um número real e  $\bar{\omega}$  será um complexo, que por sua vez, determinará se a perturbação será amortecida ou amplificada no tempo. Como  $\bar{c}$  é função de  $\bar{\omega}$ , pode-se utilizar essa variável para analisar a estabilidade hidrodinâmica do escoamento.

Já na formulação espacial, assume-se que a perturbação será amplificada no espaço. Desta forma,  $\bar{\omega}$  será um número real e  $\bar{\alpha}$  um complexo que determinará o comportamento da perturbação no escoamento, de forma que em  $\bar{\alpha}_i > 0$ , a onda de perturbação será amortecida à jusante do escoamento e  $\bar{\alpha}_i < 0$  indica que haverá a amplificação da onda ao longo deste.

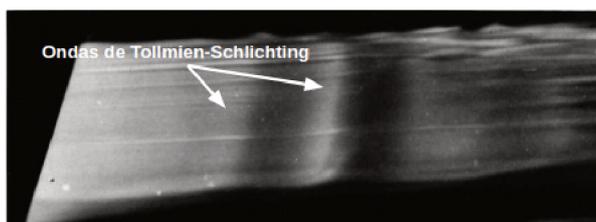
Há também a formulação temporal-espacial, a qual, considera que há amplificação da perturbação no espaço e no tempo no escoamento, ou seja, aproxima-se do escoamento real.

Considerando as abordagens apresentadas, será utilizada neste trabalho, a

formulação temporal, pois trata-se de uma abordagem mais simples, uma vez que  $\bar{c}$  é um termo linear da equação de Orr-Sommerfeld (51). Além disso, ainda pode-se classificar as instabilidades presentes no escoamento de acordo com a direção de propagação destas em: convectivo, absoluto e global. No primeiro, as perturbações se propagarão na mesma direção do escoamento. A instabilidade absoluta considera que as perturbações se propagarão em todas as direções do escoamento, tendendo a ocupar todo o domínio, porém, sem interferir na região à montante. E a instabilidade global consiste na propagação das instabilidades em todas as direções do escoamento, inclusive na direção à montante (MENDONÇA; MEDEIROS, 2009). Neste trabalho, considerar-se-á que as perturbações se propagam convectivamente no escoamento.

#### 2.1.7.1 Ondas de Tollmien-Schlichting

Figura 13 – Ondas de Tollmien-Schlichting na camada limite.



Fonte – Adaptado de Van Dyke e White (1982).

Por volta da década de 20, os pesquisadores Tollmien e Schlichting resolveram de forma independente a equação de Orr-Sommerfeld (51) para o caso da camada limite sobre uma placa plana com  $0^\circ$  de incidência. Assim, ambos perceberam que a equação tinha como resultados perturbações instáveis bidimensionais e que surgiam no escoamento de forma periódica. Mais tarde, estas instabilidades foram denominadas como ondas de Tollmien-Schlichting.

Na figura 13, tem-se as ondas de Tollmien Schlichting sobre uma placa plana, conforme destacado. Pode-se notar que à direita da imagem, essas ondas assumem perfis tridimensionais e mais complexos, semelhantes aos mostrados na figura 12. Essas estruturas complexas são provenientes do crescimento linear das ondas de Tollmien-Schlichting.

Em relação à amplificação destas instabilidades primárias Duck, Ruban e Zhikharev (1996) afirmam que a extensão da região de amplificação e a localização do ponto de transição para instabilidades secundárias depende da natureza física destas,

por exemplo, a facilidade de penetração das ondas de Tollmien-Schlichting na camada limite, da amplitude e do espectro destas.

Portanto, no presente trabalho, espera-se obter diversos modos das ondas de Tollmien-Schlichting até a máxima amplificação destas através da construção de curvas de estabilidade, que por sua vez, são resultados da solução de (51) para determinados valores de  $\bar{c}_i \geq 0,0$ .

### 3 METODOLOGIA

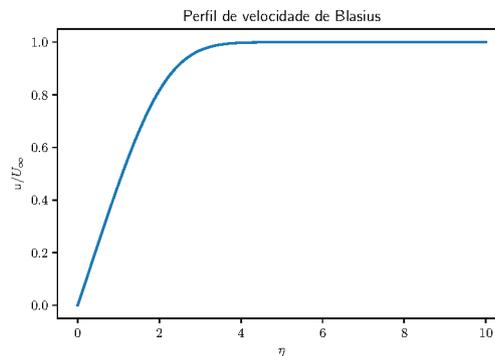
Neste capítulo, serão apresentados os métodos numéricos e aproximações utilizadas para o estudo da estabilidade hidrodinâmica da camada limite através da solução da equação de Orr-Sommerfeld, que foi implementada em linguagem Python.

#### 3.1 MODELO ADOTADO

O presente estudo adotará um escoamento bidimensional, incompressível e paralelo sobre uma placa plana de comprimento  $l$ , de modo que a espessura da camada limite ( $\delta$ ) seja muito pequena quando comparada à  $l$ . Considerar-se-á que a placa possui  $0^\circ$  ângulo de ataque em relação ao escoamento.

#### 3.2 SOLUÇÃO DE BLASIUS

Figura 14 – Perfil de velocidade de Blasius obtida pela integração numérica.



Fonte – Autora (2020).

O termo  $\bar{U}(y)$  da equação de Orr-Sommerfeld (51), quando aplicada a condição de contorno (52), corresponde ao perfil de velocidade da solução de Blasius. Uma das formas de resolver a equação (20) numericamente é através da integração por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Esse método foi escolhido, pois a equação de Blasius é um Problema de Valor Inicial (PVI) e também por oferecer menor erro em relação à solução exata. Como mencionado no capítulo anterior, (20) é uma EDO não-linear de terceira ordem. Então, para aplicar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, escreveu-se (20) na forma de um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{bmatrix} f(\eta) \\ f'(\eta) \\ f''(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(\eta) \\ f''(\eta) \\ -ff''(\eta) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$f(\eta = 0) = 0, \quad (55)$$

$$f'(\eta = 0) = 0. \quad (56)$$

Para resolver o sistema de equações (54), é necessário encontrar a condição inicial  $f''(\eta = 0)$ . Desta forma, utilizou-se o método de Newton-Raphson disponível no pacote Scipy. Esse método foi escolhido, pois é preciso encontrar o valor de  $f''(\eta = 0)$  que satisfaça a condição de contorno (22) e tem-se a derivada da equação de Blasius. Portanto, utilizou-se 0,30 como estimativa inicial de  $f''(\eta = 0)$  e integrou-se a equação (54). Como resultado, chegou-se em  $f''(\eta = 0) = 0,332$  e a equação (20) foi novamente integrada para obtenção do perfil de velocidade do escoamento, como mostra a figura 14, onde nota-se que a partir de  $\eta = 3,5$ ,  $f'(\eta) = u/U_\infty$  se aproxima assintoticamente de 1,0.

### 3.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD

Conforme explicado no capítulo anterior, neste estudo, escolheu-se a formulação temporal para resolver a equação de Orr-Sommerfeld (51). A decisão foi tomada com base no menor nível de complexidade da solução e na disponibilidade de dados em bibliografias para a validação e comparações dos resultados obtidos neste trabalho.

Assim, o método utilizado para resolver a equação (51) é proveniente da referência Mendonça e Medeiros (2009), em que divide-se a solução entre a região do escoamento livre e a da camada limite. Iniciando pela solução fora da camada limite, tem-se que em  $\bar{y} \gg 1$ , que por sua vez, também corresponde à  $y \gg \delta_1$ , o perfil de velocidade de Blasius ( $\bar{U}$ ) tende à  $U_\infty$ , lembrando que  $U_\infty$  possui valor unitário de acordo com a definição de  $\bar{U}$ , portanto  $\bar{U}' \simeq \bar{U}'' \simeq 0$ , tornando (51) em:

$$(U_\infty - \bar{c})(\bar{\varphi}'' - \bar{\alpha}\bar{\varphi}) + \frac{i}{\bar{\alpha}Re_{\delta_1}}(\bar{\varphi}^{IV} - 2\bar{\alpha}^2\bar{\varphi}'' + \bar{\alpha}^4\bar{\varphi}) = 0. \quad (57)$$

A equação (57) é de quarta ordem, linear, homogênea e possui coeficientes constantes. Assim, é possível obter uma solução analítica ( $\tilde{\varphi}$ ) válida para a região fora da camada limite, onde tem-se  $\bar{y} \gg \delta_1$ , através da combinação de quatro soluções linearmente independentes:

$$\tilde{\varphi} = A_1 e^{-\bar{\alpha}\bar{y}} + B_1 e^{\bar{\alpha}\bar{y}} + C_1 e^{-\bar{\lambda}\bar{y}} + D_1 e^{\bar{\lambda}\bar{y}}. \quad (58)$$

Onde, a variável  $\bar{\lambda} = \sqrt{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} + iRe_{\delta_1}(1 - \bar{c}))}$ . Para que essa equação satisfaça à condição de contorno (53), os coeficientes  $B_1$  e  $D_1$  devem ser nulos. Assim, reescrevendo (58), tem-se:

$$\tilde{\varphi} = A_1 e^{-\bar{\alpha}\bar{y}} + C_1 e^{-\bar{\lambda}\bar{y}}. \quad (59)$$

Em (59), a solução  $e^{-\bar{\alpha}\bar{y}}$  depende apenas do número de onda da perturbação, sendo assim, esta é denominada de solução não-viscosa. Já a solução  $e^{-\bar{\lambda}\bar{y}}$  é função de  $Re_{\delta_1}$ , portanto, é denominada de solução viscosa.

Após resolver (51) para a região do escoamento livre, pode-se então, encontrar as suas soluções para as regiões nas imediações e no interior da camada limite. Portanto, organizando os termos de (51), tem-se:

$$\bar{\varphi}^{IV} - [2\bar{\alpha}^2 + iRe_{\delta_1}\bar{\alpha}(\bar{U} - \bar{c})] \bar{\varphi}'' + [\bar{\alpha}^4 + iRe_{\delta_1}\bar{\alpha}^3(\bar{U} - \bar{c}) + \bar{U}'''] \bar{\varphi} = 0. \quad (60)$$

A equação (60) é de quarta ordem, linear e homogênea. Os termos no interior dos colchetes são coeficientes variáveis. Assim, (60) pode ser escrita de forma mais compacta definindo esses coeficientes como funções:

$$C_3(\bar{y}) = -2\bar{\alpha}^2 + iRe_{\delta_1}\bar{\alpha}(\bar{U} - \bar{c}), \quad (61)$$

$$D_3(\bar{y}) = \bar{\alpha}^4 + iRe_{\delta_1}\bar{\alpha}^3(\bar{U} - \bar{c}) + \bar{U}'''. \quad (62)$$

Logo, (60) pode ser reescrita como:

$$\bar{\varphi}^{IV} + C_3(\bar{y})\bar{\varphi}'' + D_3(\bar{y})\bar{\varphi} = 0. \quad (63)$$

A equação (63) também pode ser escrita na forma de um sistema de equações de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\bar{y}} \begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}' \\ \bar{\varphi}'' \\ \bar{\varphi}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -D_3 & 0 & -C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}' \\ \bar{\varphi}'' \\ \bar{\varphi}''' \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Denotando o vetor-solução do sistema de equações (64) como  $\bar{\Phi}$  e a matriz que contém os coeficientes variáveis  $C_3$  e  $D_3$  como  $M$ , tem-se o sistema de equações na forma compacta:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{d\bar{y}} = M\bar{\Phi}. \quad (65)$$

De acordo com Milicic (1989), o sistema de equações (65) é homogêneo, sobre o qual, pode-se afirmar o seguinte teorema:

**Teorema 1** *Seja  $\Omega$  uma região simples conectada em  $C$ ,  $z_0 \in \Omega$  e  $A: \Omega \rightarrow M_n(C)$  um mapa holomórfico. Então, para qualquer  $Y_0 \in C$  existe uma única função holomórfica  $Y: \Omega \rightarrow C^n$  tal que:*

$$\frac{dY}{dz} = AY,$$

Em  $\Omega$  e

$$Y(z_0) = Y_0.$$

O teorema 1 garante que existe solução para o sistema de equações (65) dada as condições iniciais, que por sua vez, devem fazer parte do domínio de  $M$ . Assim, o sistema (65) terá solução única. Desta forma, para obter a solução geral dentro da camada limite, é necessário obter quatro soluções linearmente independentes. Assim, utilizando a base canônica do  $\mathbb{R}^4$ , que possui vetores linearmente independentes, como condição inicial de (65), tem-se:

$$V_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Utilizando (66) e considerando a condição de contorno (52), pode-se escrever a solução geral da equação de Orr-Sommerfeld (65) como:

$$\bar{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\varphi}''(0) \\ \bar{\varphi}'''(0) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Na equação (67),  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$  são coeficientes arbitrários. Nota-se que para satisfazer essa condição (52), é necessário que  $r = s = 0$ . Logo, a equação (67) se torna:

$$\bar{\Phi}_-(\bar{y}) = t\bar{\Phi}_3(\bar{y}) + u\bar{\Phi}_4(\bar{y}). \quad (68)$$

A solução geral (68) também precisa satisfazer a condição de contorno (53) e como mostrado no início dessa seção, a equação (59) é a solução da equação de Orr-Sommerfeld (51) quando  $\bar{y} \gg \delta_1$ , onde tal condição já é satisfeita. Escrevendo, então, (59) na forma vetorial e denotando-a como  $\bar{\Phi}$ , tem-se:

$$\bar{\Phi}(\bar{y}) = A_1 e^{-\bar{\alpha}\bar{y}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}^2 \\ \bar{\alpha}^3 \end{bmatrix} + C_1 e^{-\bar{\lambda}\bar{y}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{\lambda} \\ \bar{\lambda}^2 \\ \bar{\lambda}^3 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

A integração numérica da equação de Orr-Sommerfeld inicia em um ponto fora da camada limite ( $\bar{y} \gg \delta_1$ ), onde a solução mostrada em (69) é válida. Esse ponto é conhecido como  $\bar{y}_m$ . Desta forma, pode-se obter uma condição inicial em  $\bar{y}_m$ , assumindo  $A_1 = e^{\bar{\alpha}\bar{y}_m}$  e  $C_1 = 0$ . Desta forma, a solução da equação (69) será:

$$\bar{\Phi}_I(\bar{y}_m) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}^2 \\ \bar{\alpha}^3 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Em (70), tem-se a condição inicial da solução não-viscosa da equação de Orr-Sommerfeld.

Outra condição inicial para (65) em  $\bar{y}_m$  pode ser obtida é assumindo que  $C = e^{\bar{\lambda}\bar{y}_m}$  e  $A = 0$ , tem-se:

$$\bar{\Phi}_{II}(\bar{y}_m) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{\lambda} \\ \bar{\lambda}^2 \\ \bar{\lambda}^3 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

A solução  $\bar{\Phi}_{II}(\bar{y}_m)$  é a solução viscosa da equação de Orr-Sommerfeld. Escrevendo, então, a solução geral da equação de Orr-Sommerfeld que satisfaz as condições de contorno em  $\bar{y}_m$ :

$$\bar{\Phi}_+(\bar{y}) = C_4\bar{\Phi}_I(y) + D_4\bar{\Phi}_{II}(y). \quad (72)$$

Relembrando que  $\bar{\Phi}_-(\bar{y})$  satisfaz apenas as condições de contorno na parede (52) e a solução geral  $\bar{\Phi}_+(\bar{y})$  atende somente as condições em  $\bar{y}_m$ , então impondo-se que  $\bar{\Phi}_+(\bar{y})$  satisfaça as condições de contorno em  $\bar{y} = 0$ :

$$\bar{\Phi}_+(0) = \bar{\Phi}_-(0), \quad (73)$$

$$C_4\bar{\Phi}_I(0) + D_4\bar{\Phi}_{II}(0) = t\bar{\Phi}_3(0) + u\bar{\Phi}_4(0). \quad (74)$$

Reescrevendo (74) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_I(0) & \bar{\Phi}_{II}(0) & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}'_I(0) & \bar{\Phi}'_{II}(0) & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}''_I(0) & \bar{\Phi}''_{II}(0) & -1 & 0 \\ \bar{\Phi}'''_I(0) & \bar{\Phi}'''_{II}(0) & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \\ t \\ u \end{bmatrix} = 0. \quad (75)$$

Em (75), tem-se que  $C_4$  e  $D_4$  são dois coeficientes quaisquer. Portanto, nota-se que uma solução trivial do sistema (75) ocorre se  $C_4 = D_4 = t = u = 0$ . A solução trivial também será a única solução de (75) caso a matriz de coeficientes for não-singular. Desta forma, para obter as soluções não-triviais da equação de Orr-Sommerfeld, é necessário que a matriz de coeficientes seja singular, que resultará no determinante:

$$\begin{vmatrix} \bar{\Phi}_I(0) & \bar{\Phi}_{II}(0) & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}'_I(0) & \bar{\Phi}'_{II}(0) & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}''_I(0) & \bar{\Phi}''_{II}(0) & -1 & 0 \\ \bar{\Phi}'''_I(0) & \bar{\Phi}'''_{II}(0) & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (76)$$

Com isso, o principal objetivo deste trabalho, que é o estudo da estabilidade hidrodinâmica de um escoamento sobre uma placa plana, é obter as soluções não-triviais da equação de Orr-Sommerfeld a partir dos parâmetros  $\bar{\alpha}$ ,  $Re_{\delta_1}$  e  $\bar{c}$ . Desta forma, busca-se que esse conjunto de parâmetros gere soluções  $\bar{\Phi}_I$  e  $\bar{\Phi}_{II}$  que obedeçam à condição do determinante (76).

### 3.3.0.1 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

No início deste capítulo, mostrou-se que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem foi utilizado na integração da solução de Blasius (20). Esse método também será usado na solução da equação (51) para obter-se as soluções não-triviais do determinante (76) pelos mesmos motivos já explicados.

Apesar de que no pacote Scipy existe implementação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, optou-se por implementação própria tanto para facilitar a depuração do código, como para adicionar o método de Gram-Schmidt, conforme será explicado na próxima seção. Assim, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem foi implementado a partir da referência Dias (2013) utilizando as seguintes equações:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (77)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{k_1 e}{2}, y_n + \frac{e}{2}\right), \quad (78)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{e}{2}, y_n + \frac{k_2 e}{2}\right), \quad (79)$$

$$k_4 = f(x_n + e, y_n + k_3 e), \quad (80)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4. \quad (81)$$

O método Runge-Kutta de 4ª ordem, como mostram as equações (77) - (80), integra uma EDO no passo  $n$  em estágios, segmentando o intervalo de integração  $e$  para obter o resultado da função no próximo passo ( $y_{n+1}$ ). Por conta dessa segmentação, o erro de truncamento do método é na ordem de  $e^5$ , enquanto que no método de Euler, esse erro é de  $e^2$  e no de Euler modificado, é na ordem de  $e^3$ .

### 3.3.0.2 Ortogonalização de Gram-Schmidt

Em (70) e (71), mostrou-se que as soluções  $\bar{\Phi}_I$  e  $\bar{\Phi}_{II}$  são linearmente independentes. Entretanto, ao longo da integração da equação de Orr-Sommerfeld,  $\bar{\Phi}_I$  interfere em  $\bar{\Phi}_{II}$ , fazendo com que essa última cresça de forma indesejada, tornando-as linearmente dependentes. Para garantir que as duas soluções se mantenham linearmente independentes, utiliza-se o método de ortogonalização de Gram-Schmidt (MENDONÇA; MEDEIROS, 2009).

Esse processo faz com que dois vetores linearmente dependentes gerem dois novos vetores ortogonais entre si, que são, então, linearmente independentes. Neste trabalho, o processo de ortogonalização foi implementado dentro do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Assim, ao final de cada passo de integração, retira-se a parte proporcional de  $\bar{\Phi}_I$  presente em  $\bar{\Phi}_{II}$ , garantindo que as soluções obtidas sejam linearmente independentes. Portanto, o processo de Gram-Schmidt realizado pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Normaliza-se a solução não-viscosa ( $\bar{\Phi}_I$ ) através de:

$$\hat{\Phi}_I(\bar{y}_n) = \frac{\bar{\Phi}_I(\bar{y}_n)}{\|\bar{\Phi}_I(\bar{y}_n)\|}. \quad (82)$$

Na equação (82), a variável  $\bar{y}_n$  corresponde ao valor de  $\bar{y}$  no n-ésimo passo de integração.

2. Calcula-se o valor  $\beta_{GS}$ , que é dado por:

$$\beta_{GS} = \bar{\Phi}_{II}(\bar{y}_n) \cdot \hat{\Phi}_I(\bar{y}_n). \quad (83)$$

3. Assim, orthogonaliza-se a solução viscosa ( $\bar{\Phi}_{II}(\bar{y}_n)$ ) através de:

$$\hat{\Phi}_{II}(\bar{y}_n) = \bar{\Phi}_{II}(\bar{y}_n) - \beta_{GS} \cdot \hat{\Phi}_I(\bar{y}_n). \quad (84)$$

Na equação (72), mostrou-se que a combinação de  $\bar{\Phi}_I(\bar{y})$  e  $\bar{\Phi}_{II}(\bar{y})$  é solução de (51). Então, combinando as soluções orthogonalizadas  $\hat{\Phi}_I(\bar{y}_n)$  e  $\hat{\Phi}_{II}(\bar{y}_n)$ , tem-se também uma solução da equação de Orr-Sommerfeld (51) com a garantia de que ambas são linearmente independentes para todo o intervalo de integração entre  $\bar{y} = \bar{y}_m$  a  $\bar{y} = 0$ .

### 3.3.1 Solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld

A solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld é obtida a partir de estimativas iniciais de uma dada perturbação para os parâmetros  $Re_{\delta_1}$ ,  $\bar{\alpha}$ . Assim, define-se também uma estimativa para  $\bar{c}_i$ , que como mostrado no capítulo anterior, determina a estabilidade hidrodinâmica do escoamento.

Assim, integra-se (51) entre  $\bar{y} = \bar{y}_m$  (fora da camada limite) até a  $\bar{y} = 0$  (na superfície da placa) através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem com Gram-Schmidt, como explicado na seção anterior. Após a integração, calcula-se o determinante (76). Se a condição deste é atendida, obtém-se a solução da equação de Orr-Sommerfeld. Do contrário, é necessário estimar novos valores para  $Re_{\delta_1}$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{c}_r$ , pois os que foram estimados anteriormente não atendem à condição de contorno de (51) em  $\bar{y} = 0$ .

Neste trabalho, a geração dessas estimativas foi realizada através do método da secante, que assim como nos métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem e Gram-Schmidt, optou-se por implementação própria. Basicamente, o código desenvolvido realiza os seguintes passos:

1. Escolhe-se os valores de um par de parâmetros da equação de Orr-Sommerfeld a ser resolvida em dado  $\bar{c}_i$ , por exemplo,  $\bar{\alpha}$  e  $Re_{\delta_1}$ . Desta forma, deseja-se calcular o terceiro parâmetro, que neste exemplo, é o valor de  $\bar{c}$ . Então, como  $\bar{c}_i$  já está definido, oferece-se duas estimativas para  $\bar{c}_r$ , que são  $\bar{x}_0$  e  $\bar{x}_1$ ;

2. Define-se um valor de tolerância para o método da secante que depende o parâmetro a ser calculado. No código desenvolvido, a condição padrão da tolerância é  $10^{-5}$ ;
3. Calcula-se a diferença  $|\bar{x}_0 - \bar{x}_1|$ . Se esta for maior que a tolerância, calcula-se  $\bar{x}_2$ , que é o valor do parâmetro que se deseja calcular para obter solução não-trivial da equação de Orr-Sommerfeld, como no exemplo do passo 1, em que o objetivo foi obter o valor de  $\bar{c}$  para um dado par de  $\bar{\alpha}$  e  $Re_{\delta_1}$ . Assim,  $\bar{x}_2$  é calculado por:

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)} \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_0). \quad (85)$$

Em (85),  $f(\bar{x}_0)$  é a equação de Orr-Sommerfeld calculada em  $\bar{x}_0$ . De forma análoga,  $f(\bar{x}_1)$  é a equação (51) em  $\bar{x}_1$ .

4. Calcula-se novamente a condição  $|\bar{x}_0 - \bar{x}_1|$ . Se esta for maior que a tolerância, repete-se o passo 3. Caso satisfeita essa condição, obtém-se o valor de  $\bar{x}_2$  do parâmetro escolhido, por exemplo o de  $\bar{c}_r$  do passo 1, que juntamente com o valor de  $\bar{c}_i$  escolhido, é solução da equação de Orr-Sommerfeld.

Como pode ser visto no processo descrito, ao aplicar o método da secante, obtém-se os valores de  $\bar{\alpha}$ ,  $Re_{\delta_1}$  e  $\bar{c}$  que atendem à condição dada pelo determinante (76) em  $\bar{y} = 0$ . E como explicado, o método da secante pode ser aplicado para obter qualquer um dos três parâmetros de (51), desde que dois destes sejam fixados.

Além disso, ressalta-se que a escolha pelo método da secante foi devido à sua simplicidade e possibilidade de aplicação em funções complexas, como a de Orr-Sommerfeld. Além disso, esse método não necessita da derivada da função, como é o caso do método de Newton-Raphson.

### 3.3.1.1 Definição de parâmetros numéricos

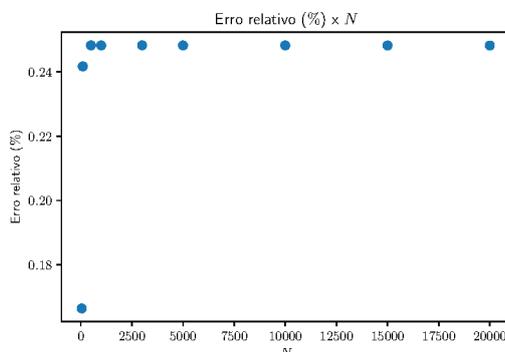
Para resolver a equação (51) e obter resultados consistentes, é preciso definir os parâmetros numéricos  $N$ , que é número de passos de integração da equação de Orr-Sommerfeld,  $\bar{y}_m$  e  $N_B$ , que corresponde ao número de passos de integração utilizado na solução de Blasius.

Assim, o primeiro estudo realizado foi em relação à variação do número de passos de integração ( $N$ ) da equação (77). Para isso, utilizou-se os valores do caso padrão presente na referência Van Stijn e Van De Vooren (1980), onde tem-se  $Re_{\delta_1} = 998$  e  $\bar{\alpha} = 0,308$  e  $\bar{c} = 0,3641 + 7,9 \times 10^{-3}i$ .

Portanto, a equação (51) foi resolvida adotando  $\bar{y}_m$  de 4,5 e variando-se  $N$  entre 50 até 20.000 passos. O valor de  $\bar{c}$  obtido foi comparado ao da referência através do erro relativo, que por sua vez, é calculado por:

$$Erro_{relativo}(\%) = \left| \frac{\bar{c}_{ref} - \bar{c}_{atual}}{\bar{c}_{ref}} \right| \times 100\%. \quad (86)$$

Figura 15 – Erro absoluto de  $\bar{c}$  com a variação do número de passos de integração ( $N$ ).



Fonte – Autora (2020).

Quadro 1 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de  $\bar{c}$  variando o número de passos ( $N$ ).

Número de passos	Erro relativo(%)	Variação relativa (%)
50	0,16642	
100	0,24172	7,30 × 10 <sup>-4</sup>
500	0,24827	5,02 × 10 <sup>-5</sup>
1.000	0,24826	6,40 × 10 <sup>-7</sup>
3.000	0,24827	1,65 × 10 <sup>-7</sup>
5.000	0,24825	4,16 × 10 <sup>-7</sup>
10.000	0,24825	3,07 × 10 <sup>-7</sup>
15.000	0,24824	1,01 × 10 <sup>-6</sup>
20.000	0,24822	1,51 × 10 <sup>-6</sup>

Fonte – Autora (2020).

Em (86), a variável  $\bar{c}_{atual}$  corresponde ao valor de  $\bar{c}$  obtido pelo código desenvolvido e  $\bar{c}_{ref}$  é valor  $\bar{c}$  de referência. Calculou-se também a variação relativa através de:

$$Variacao_{relativa}(\%) = \left| \frac{\bar{c}_{atual} - \bar{c}_{anterior}}{\bar{c}_{anterior}} \right| \times 100\%. \quad (87)$$

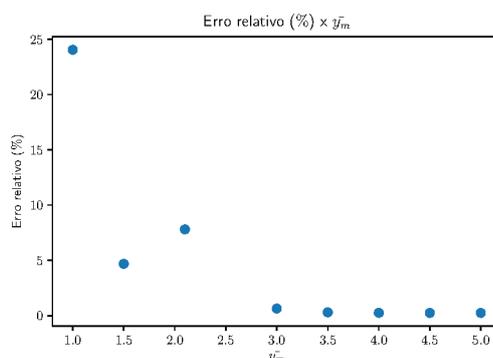
Na equação (87),  $\bar{c}_{atual}$  corresponde ao valor de  $\bar{c}$  calculado para um dado valor de  $N$  passos e  $\bar{c}_{anterior}$  é o valor  $\bar{c}$  obtido no caso anterior com  $N$  mais baixo. No quadro 1, e na figura 15, tem-se os resultados desse estudo.

No quadro 1, nota-se que o aumento de  $N$  promove leve aumento no erro relativo. Porém, os valores estão próximos de 0,24% em relação ao caso de referência e se estabilizam a partir de  $N = 500$ . Esse aumento pode ser proveniente do próprio caso de referência utilizado, que por sua vez, data de um artigo do final da década de 70, época em que os recursos computacionais existentes eram escassos.

Quadro 2 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de  $\bar{c}$  variando  $\bar{y}_m$ .

$\bar{y}_m$	Erro relativo(%)	Varição relativa (%)
1,0	24,0370	
1,5	4,68948	$ 2,74 \times 10^{-1} $
2,0	7,80599	$ 2,89 \times 10^{-2} $
2,5	0,64200	$ 7,11 \times 10^{-2} $
3,0	0,30175	$ 5,45 \times 10^{-3} $
3,5	0,25302	$ 3,33 \times 10^{-3} $
4,0	0,24826	$ 4,86 \times 10^{-4} $
4,5	0,24794	$ 4,86 \times 10^{-5} $
5,0	0,24759	$ 3,33 \times 10^{-6} $

Fonte – Autora (2020).

Figura 16 – Erro absoluto de  $\bar{c}$  com a variação de  $\bar{y}_m$ .

Fonte – Fonte: Autora (2020).

Em relação à variação relativa, pode-se perceber que até  $N = 10.000$ , esta diminuiu com o aumento de número de passos de integração, ou seja, os resultados obtidos tiveram maior convergência. Porém, a solução numérica necessita de maior intervalo de tempo para ser concluída.

Na figura 15, tem-se que as variações mostradas na quadro 1 são praticamente estáveis a partir de  $N = 500$ . Desta forma, optou-se por utilizar 1.000 passos de integração, pois não há grande variação no resultado obtido, bem como, nesta quantidade de passos tem-se menor custo computacional.

Como mostrado neste capítulo,  $\bar{y}_m$  é ponto de início da integração da equação (51). Portanto, para ter resultados que, de fato, representem a evolução das perturbações no escoamento, é preciso utilizar um valor suficientemente distante da camada limite. Assim, foi realizado o estudo de  $\bar{y}_m$  variando-o entre 1,0 até 5,0, mantendo  $N = 1.000$ . Os resultados são mostrados no quadro 2 e na figura 16.

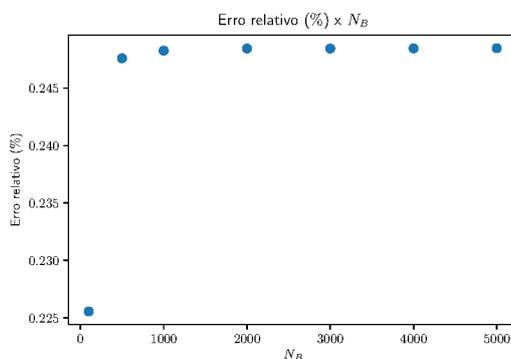
Na quadro 2, é possível notar que  $\bar{y}_m$  influencia de forma significativa no re-

Quadro 3 – Comparação entre caso padrão e código para o valor de  $\bar{c}$  variando  $N_B$  da equação de Blasius.

Número de passos	Erro relativo(%)	Variação relativa (%)
100	0,2255	
500	0,2475	$ 2,91 \times 10^{-4} $
1.000	0,2482	$ 6,63 \times 10^{-6} $
2.000	0,2484	$ 1,79 \times 10^{-6} $
3.000	0,2484	$ 7,47 \times 10^{-7} $
4.000	0,2485	$ 1,59 \times 10^{-7} $
5.000	0,2484	$ 1,31 \times 10^{-7} $

Fonte – Autora (2020).

Figura 17 – Erro absoluto de  $\bar{c}$  com a variação de  $N_B$  da equação de Blasius.



Fonte – Autora (2020).

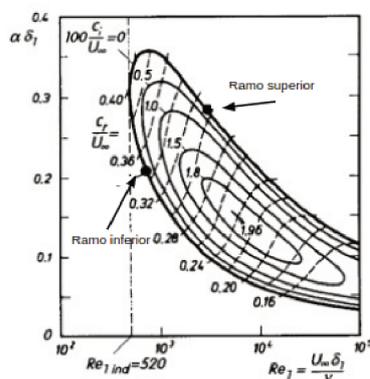
sultado da equação de Orr-Sommerfeld. Além disso, à medida em que  $\bar{y}_m$  aumenta, a variação relativa entre os valores de  $\bar{c}$  diminui, mostrando maior convergência. Na figura 16, percebe-se que a partir de  $\bar{y}_m = 3,5$ , o erro relativo é praticamente estável. Portanto,  $\bar{y}_m$  foi definido em 4,5.

Além das definições de parâmetros numéricos para a equação de Orr-Sommerfeld, estudou-se também o efeito da variação do número de passos de integração ( $N_B$ ) na solução de Blasius. Para isso, manteve-se  $N$  em 1.000 passos e  $\bar{y}_m$  em 4,5, variando-se  $N_B$  entre 100 até 5.000 passos. Os resultados são mostrados no quadro 3 e na figura 17.

A partir do quadro 3, nota-se que a variação número de passos ( $N_B$ ) utilizados em (20) influencia de maneira pouco significativa na solução da equação de Orr-Sommerfeld. Porém, avaliando a variação relativa, tem-se que a partir de  $N_B = 1.000$ , obtém-se maior convergência entre os resultados. E a figura 17 confirma essa tendência com  $N_B \geq 1.000$ . Desta forma, foi escolhido  $N_B = 1.000$  para a solução de Blasius no código desenvolvido para resolver os casos que serão mostrados na próxima seção.

### 3.4 CONSTRUÇÃO DA CURVA DE ESTABILIDADE

Figura 18 – Curvas de estabilidade para diferentes valores de  $\bar{c}_i$



Fonte – Fonte: Adaptado de Schlichting (1979)

A partir dos procedimentos adotados nas seções anteriores, pode-se obter o valor de  $\bar{c}$  para diversos pares de  $\bar{\alpha}$  e  $Re_{\delta_1}$ . Ao mesmo tempo, sabe-se que a variável  $\bar{c}_i$  é o critério de estabilidade hidrodinâmica. Então, o principal objetivo de construir a curva de estabilidade é obter o comportamento de  $\bar{\alpha}$  e  $Re_{\delta_1}$  para um dado valor de  $\bar{c}_i$ , como mostra a figura 18, na qual, a curva mais externa corresponde à  $\bar{c}_i = 0$  e de acordo com a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica, tem-se estabilidade neutra. As demais curvas possuem  $\bar{c}_i > 0$ , representando modos mais instáveis de uma onda de perturbação que deverá se amplificar ao longo do tempo. Portanto, na região externa às curvas de estabilidade, a onda de perturbação será amortecida no tempo, uma vez que  $\bar{c}_i < 0$ .

Na curva de estabilidade neutra da figura 18, como destacado, há os ramos inferior e superior, que correspondem aos extremos da banda instável ou de amplificação de uma onda de perturbação, por exemplo, ao fixar  $Re_{\delta_1} = 10^3$ , nota-se que a onda será amplificada entre  $\bar{\alpha} \approx 0,15$  até  $\bar{\alpha} \approx 0,35$ . Além disso, a curva de estabilidade neutra ainda permite identificar facilmente o ponto de  $Re_{ind}$ , que marca o início da transição do escoamento, que nesta figura ocorre em 520.

Diante disso, para a obtenção da curva de estabilidade para um dado  $\bar{c}_i$ , o código desenvolvido realiza um *looping*, que possui o valor de  $Re_{\delta_1}$  como condição de parada. No ramo superior da curva, que foi destacado na figura 18, fixa-se  $Re_{\delta_1}$  e  $\bar{c}$ . Assim, calcula-se o valor de  $\bar{\alpha}$  através do método da secante, conforme explicado neste capítulo. Após isso, calcula-se a diferença entre  $\bar{\alpha}$  da iteração anterior com o da atual, pois observa-se que no ramo superior, partindo-se da direita da figura 18, que  $\bar{\alpha}$  aumenta com o decréscimo de  $Re_{\delta_1}$  a cada iteração. Então, se essa diferença for positiva, significa que a próxima iteração será no ramo superior. Assim, reinicia-

se o *looping* incrementando o valor de  $Re_{\delta_1}$  em relação ao da iteração anterior e extrapolando-se  $\bar{c}$ .

Desta forma, ao obter diferença negativa, o cálculo passará para o ramo inferior. Assim, fixa-se  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{c}$ , calculando-se  $Re_{\delta_1}$  através do método da secante. Neste caso, ao final do *looping*, calcula-se a diferença entre  $Re_{\delta_1}$  da iteração anterior com o da atual. Se positiva, continua-se no ramo inferior. Do contrário, calcula-se novamente a equação de Orr-Sommerfeld no ramo superior. Esse processo é realizado até que a condição de parada seja atendida, resultando na curva de estabilidade, que representa os modos instáveis das ondas de Tollmien-Schlichting no escoamento sobre a placa plana.

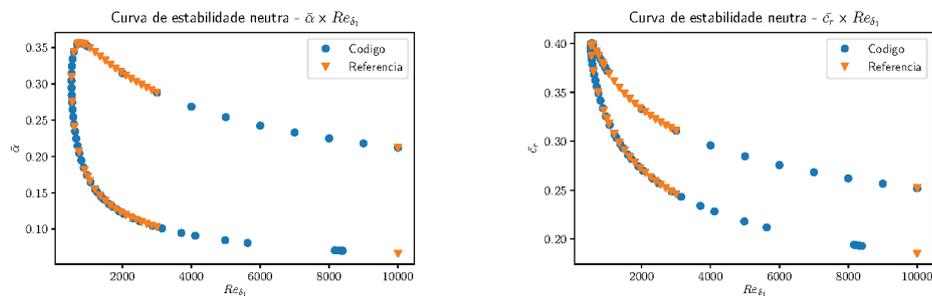
Ressalta-se também que o código desenvolvido para calcular a equação de Orr-Sommerfeld, bem como, para construção da curva de estabilidade neutra foi disponibilizado no Apêndice A, de forma a auxiliar o leitor a entender os procedimentos adotados. Além disso, este código também foi disponibilizado no repositório Orr-Sommerfeld servindo de base para trabalhos futuros.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos através solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld resultante dos procedimentos discutidos no capítulo anterior. Portanto, o objetivo será analisar a estabilidade hidrodinâmica para os casos simulados.

### 4.1 CURVA DE ESTABILIDADE NEUTRA

Figura 19 – Curvas de estabilidade neutra para o escoamento sobre uma placa plana com  $0^\circ$  de incidência.



(a) Curva de estabilidade neutra em relação à  $\bar{\alpha}$ .

(b) Curva de estabilidade neutra em relação à  $\bar{c}_r$ .

Fonte – Autora (2020).

A solução da equação (51) para  $\bar{c}_i = 0$  resultou nas curvas de estabilidade neutra mostradas na figuras 20(a) e 20(b) que foram comparadas com a referência Van Stijn e Van De Vooren (1980), onde percebe-se que os resultados obtidos através do código desenvolvido neste trabalho ficaram bastante próximos aos da referência. Porém, não foi possível comparar os resultados de  $Re_{\delta_1}$  no intervalo entre 10.000 e 3.000 devido à ausência de dados na referência adotada.

Além disso, tem-se que o comprimento médio da banda instável de  $\bar{\alpha}$  é de aproximadamente 0,15 e para  $\bar{c}_r$ , esse comprimento é próximo de 0,10. Essa diferença ocorre, pois o parâmetro  $\bar{\alpha}$  é não-linear, diferentemente de  $\bar{c}_r$ , que como mostrado na equação (51) é um termo linear. Fisicamente, tem-se que na banda instável, uma onda de Tollmien-Schlichting sofrerá maior amplificação do seu número de onda ( $\bar{\alpha}$ ) do que da parte real da sua velocidade ( $\bar{c}_r$ ). Considerando o comprimento de onda ( $\lambda$ ), que será denotado em  $\bar{k} = 2\pi/\bar{\alpha}$  para não gerar ambiguidade com  $\bar{\lambda}$  da solução viscosa, tem-se que este é inversamente proporcional ao número de onda, então, nota-se que no ramo superior, a perturbação possui menor comprimento. Enquanto que no ramo inferior, essa assume comprimento maior. Na velocidade da onda, ocorre o oposto. Desta forma, no ramo superior, tem-se uma onda de menor comprimento e maior

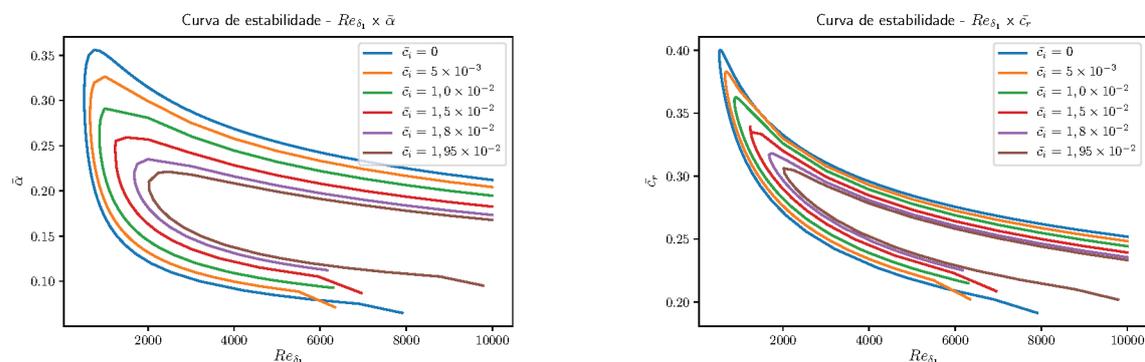
velocidade, sendo que essa última varia de forma mais sutil. Já no ramo inferior, essa perturbação terá maior  $\bar{k}$  e menor velocidade.

As figuras 20(a) e 20(b) também mostram que a transição na camada limite inicia em  $Re_{ind}$  de 518,871 com  $\bar{\alpha}$  de 0,36 e  $\bar{c}_r$  em 0,40. Então, a partir deste ponto, haverá a formação de ondas de Tollmien-Schlichting. Em termos de posição sobre a placa plana, esse valor de  $Re_{ind}$  corresponde à  $Re_{x_{ind}} \simeq 91.004$ . Comparando-o à referência adotada, obteve-se um erro relativo de apenas 0,209%.

Ressalta-se que  $Re_{ind}$  é diferente do número de Reynolds que marca o início da turbulência, que é denominado de Reynolds crítico ( $Re_{cr}$ ). De acordo com Schlichting (1979), experimentos realizados para o mesmo caso estudado neste trabalho, obtiveram  $Re_{cr} = 950$ , que corresponde à  $Re_{x_{cr}} \simeq 305.000$ . Porém, esse ponto varia de acordo o crescimento das instabilidades primárias e secundárias no escoamento, como mostrado na figura 12.

#### 4.2 CURVAS DE ESTABILIDADE PARA DIFERENTES VALORES DE $\bar{c}_i$

Figura 20 – Curvas de estabilidade de ondas de Tollmien-Schlichting com  $\bar{c}_i \geq 0$ .



(a) Curvas de estabilidade para diferentes  $\bar{c}_i$  em relação à  $\bar{\alpha}$ .

(b) Curvas de estabilidade para diferentes  $\bar{c}_i$  em relação à  $\bar{c}_r$ .

Fonte – Autora (2020).

A solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld (51) para valores positivos de  $\bar{c}_i$  resultou nas curvas de estabilidade das figuras 21(a) e 21(b), onde nota-se que o aumento de  $\bar{c}_i$ , como esperado, faz com que as ondas de Tollmien-Schlichting assumam modos cada vez mais instáveis até a amplificação máxima em  $\bar{c}_i = 1,95 \times 10^{-2}$ .

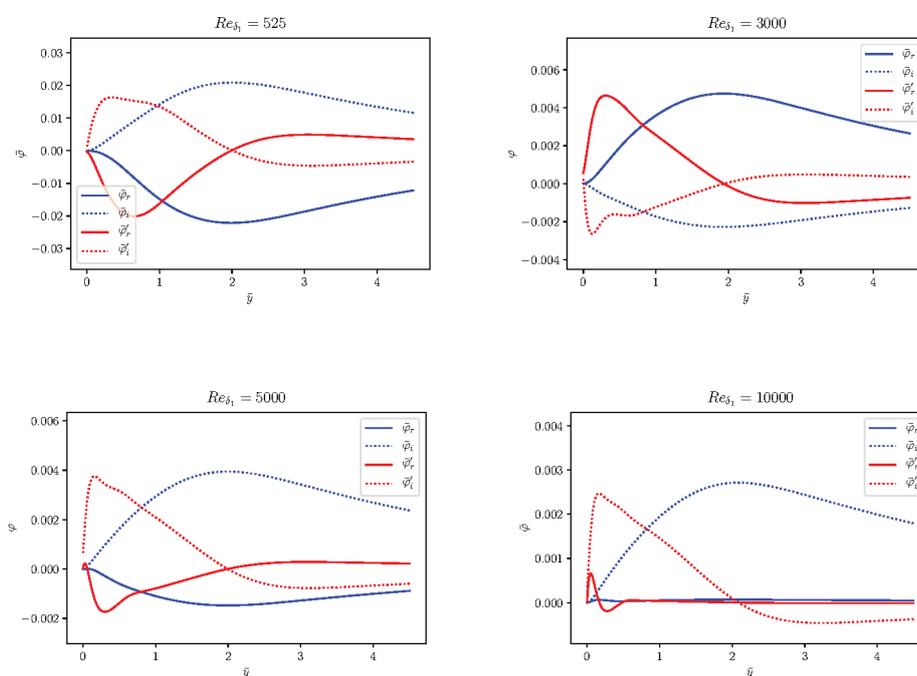
Para compreender como as perturbações se amplificam no escoamento, analisou-se o comprimento de onda ( $\bar{k}$ ) para os valores de  $\bar{c}_i$  utilizados em relação ao valor máximo de  $\bar{\alpha}$  em cada uma das curvas. Assim, o resultado foi sumarizado no quadro 4, onde nota-se que o aumento de  $\bar{c}_i$  provoca o aumento do comprimento

Quadro 4 – Comprimento de onda  $\bar{k}$  da perturbação em relação à  $\bar{c}_i$

$\bar{c}_i$	$\bar{k}$
0	$8,726 \delta_1$
$5,0 \times 10^{-3}$	$9,519 \delta_1$
$1,0 \times 10^{-2}$	$11,220 \delta_1$
$1,5 \times 10^{-2}$	$12,083 \delta_1$
$1,8 \times 10^{-2}$	$13,659 \delta_1$
$1,95 \times 10^{-2}$	$14,960 \delta_1$

Fonte – Autora (2020).

Figura 21 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para  $\bar{c}_i = 0$ .

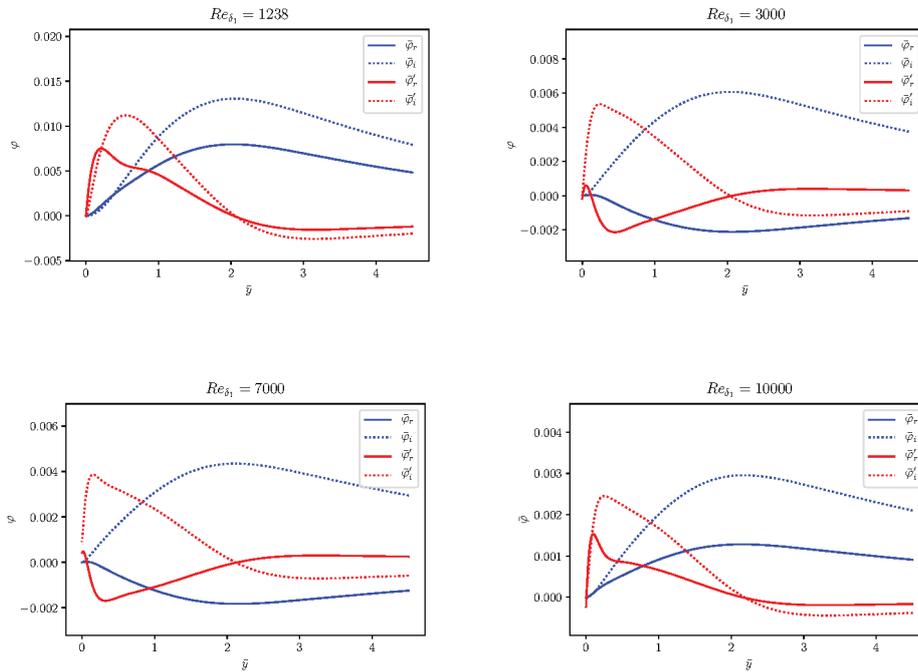


Fonte – Da autora (2020).

de onda da perturbação. Desta forma, conclui-se que o aumento da instabilidade das ondas de Tollmien-Schlichting tornam-as mais longas na direção  $x$ , como mostrado em Lin (1944), o que pode favorecer o surgimento de instabilidades secundárias, uma vez que estas ondas de maior comprimento podem se sobrepor às demais que estão à jusante do escoamento.

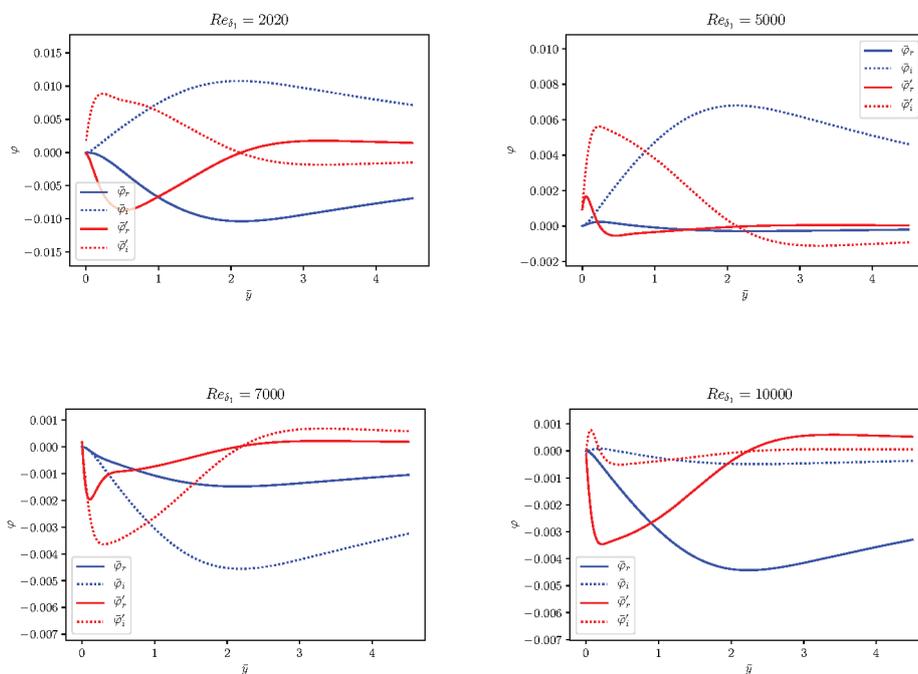
As curvas de estabilidade também mostram que a partir de  $Re_{\delta_1} \approx 2.100$ , haverá a presença de ondas de Tollmien-Schlichting, cada uma com  $\bar{c}_i$  distinto, se amplificando simultaneamente no escoamento, tornando-o ainda mais instável e propenso à transição para a turbulência.

Figura 22 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para  $\bar{c}_i = 1,5 \times 10^{-2}$ .



Fonte – Da autora (2020).

Figura 23 – Autofunções da equação de Orr-Sommerfeld para  $\bar{c}_i = 1,95 \times 10^{-2}$ .



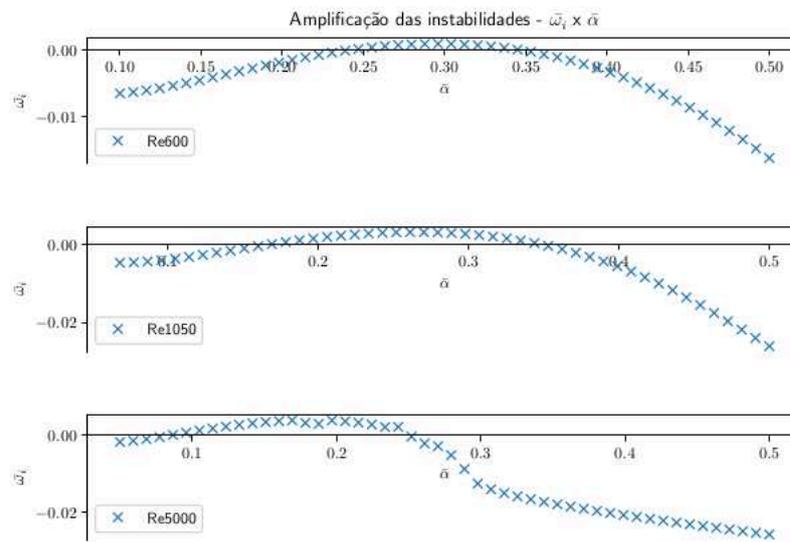
Fonte – Da autora (2020).

### 4.3 AUTOFUNÇÕES DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD

Como mostrado na equação (45), tem-se que a componente da velocidade da perturbação na direção  $x$  é proporcional à amplitude ( $\bar{\varphi}$ ) e em (46), a componente da velocidade na direção  $y$  está diretamente relacionada à derivada da amplitude ( $\bar{\varphi}'$ ). Portanto, ao obter  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\varphi}'$  pode-se analisar a influência da perturbação no perfil de velocidade.

Além disso, a amplitude da onda mostra o crescimento ou decaimento de uma perturbação na direção normal à placa. Desta forma, obteve-se  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\varphi}'$ , a partir da soma entre a solução não-viscosa ( $\bar{\varphi}_I, \bar{\varphi}'_I$ ) e a solução viscosa ( $\bar{\varphi}_{II}, \bar{\varphi}'_{II}$ ) para diferentes valores de  $Re_{\delta_1}$  e  $\bar{c}_i$ , como mostram as figuras 21 - 23, onde pode-se perceber que para todos os casos, a máxima amplitude da onda de perturbação ocorre em  $\bar{y} \simeq 2,0$ , que corresponde à um ponto localizado em cerca de duas vezes a espessura de deslocamento da camada limite. Nas figuras 21 - 23, também nota-se que à medida em que  $\bar{y}$  tende ao escoamento livre, a amplitude da onda ( $\bar{\varphi}$ ) e sua derivada ( $\bar{\varphi}'$ ) decaem exponencialmente, obedecendo à condição de contorno (53), onde as perturbações deverão ser atenuadas quando  $\bar{y} \rightarrow \infty$ .

Figura 24 – Taxa de amplificação da onda de perturbação.



Fonte – Fonte: Autora (2020)

Em relação à influência de  $\bar{c}_i$ , percebe-se que para um mesmo número de Reynolds em  $\bar{y} \simeq 4,5$ , a amplitude sofre um pequeno aumento, ou seja, ondas de Tollmien-Schlichting mais instáveis influenciam maior região do escoamento livre, o que pode favorecer à transição para a turbulência.

#### 4.4 TAXA DE AMPLIFICAÇÃO DAS INSTABILIDADES

Como mostrado em (41),  $\bar{\omega}_i$  é a taxa de amplificação da perturbação na abordagem temporal e assim como  $\bar{c}_i$ , esse parâmetro indica a estabilidade hidrodinâmica do escoamento.

Desta forma, analisou-se a relação entre  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\omega}_i$ , fixando  $Re_{\delta_1}$  e variando  $\bar{\alpha}$  com objetivo de obter o valor de  $\bar{c}$  para formar um conjunto de parâmetros que seja solução da equação de Orr-Sommerfeld. Com isso, pode-se calcular a taxa de amplificação do conjunto uma vez que esta é dada por  $\bar{\omega}_i = \bar{\alpha} \bar{c}_i$ .

Na figura 24, tem-se os resultados da taxa de amplificação, onde nota-se que em  $Re_{\delta_1} = 600$ , a banda instável encontra-se em  $\bar{\alpha}$  entre 0,25 até 0,35. Para  $Re_{\delta_1} = 1050$ , essa banda ocorre em  $\bar{\alpha}$  de 0,18 até 0,34. Já em  $Re_{\delta_1} = 5.000$ , a banda instável está em  $\bar{\alpha} = 0,08$  até  $\bar{\alpha} = 0,25$ . Desta forma, conclui-se o aumento de  $Re_{\delta_1}$  faz com que a onda de perturbação se torne instável sob  $\bar{\alpha}$  menor. Além disso, observa-se que a taxa de amplificação sofre um pequeno aumento à medida em que  $Re_{\delta_1}$  aumenta.

Em relação à máxima taxa de amplificação, para  $Re_{\delta_1} = 600$ , obteve-se  $\bar{\omega}_{i\max}$  próximo  $9 \times 10^{-4}$ . Em  $Re_{\delta_1} = 1050$ , tem-se  $\bar{\omega}_{i\max}$  de aproximadamente  $3,2 \times 10^{-3}$ . E para  $Re_{\delta_1} = 5.000$ , a variável  $\bar{\omega}_{i\max}$  atingiu cerca de  $4 \times 10^{-3}$ . Desta forma, conclui-se que o aumento de  $Re_{\delta_1}$  faz com que a onda obtenha taxa de amplificação mais alta, tornando o escoamento mais instável.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvido um código em linguagem Python com objetivo de obter as soluções não-triviais equação de Orr-Sommerfeld para um escoamento sobre uma placa plana com  $0^\circ$  de incidência. Para isso, considerou-se o perfil de velocidade de Blasius, o qual, foi resolvido pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem e sua condição inicial obtida pelo método de Newton-Raphson. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem também foi empregado na solução de Orr-Sommerfeld juntamente com o método de Gram-Schmidt, este último foi utilizado para garantir soluções linearmente independentes.

Como mostrado, a solução de Orr-Sommerfeld necessita de três parâmetros  $\bar{\alpha}$ ,  $Re_{\delta_1}$  e  $\bar{c}$ , que podem ser gerados a partir de estimativas. Assim, utilizou-se o método da secante para a geração destas, uma vez que este pode ser aplicado à funções complexas.

A partir destas implementações, obteve-se as curvas de estabilidade neutra, que foi comparada com a referência Van Stijn e Van De Vooren (1980). Além da proximidade entre os resultados, o erro relativo entre  $Re_{ind}$  foi de apenas 0,209%. As curvas de estabilidade neutra também mostraram que a transição do regime laminar para o turbulento ocorre em  $Re_{ind} = 518,87$ , que corresponde à Reynolds calculado na posição sobre a placa plana de  $Re_{xind} = 91.004$ .

Além disso, foram construídas as curvas de estabilidade para  $\bar{c}_i$  entre 0 até  $1,95 \times 10^{-2}$ , onde observou-se que o aumento de  $\bar{c}_i$  faz com que as ondas de Tollmien-Schlichting assumam comprimentos de onda ( $\bar{k}$ ) maiores na direção  $x$  até atingir  $\bar{k}_{max}$  de  $28,545\delta_1$  em  $\bar{c}_i = 1,95 \times 10^{-2}$ . Enquanto que a amplitude  $\bar{\varphi}$ , composta pela solução viscosa e pela não-viscosa, influencia cada vez mais o escoamento livre na direção  $y$ , à medida em que a onda se torna mais instável.

A análise da taxa de amplificação mostrou que o aumento de  $Re_{\delta_1}$  faz com que uma onda de perturbação tenha menor número de onda e sofra ligeiro aumento de  $\bar{\omega}_i$ , mostrando assim, aumento na instabilidade desta.

Desta forma, conclui-se que os objetivos estabelecidos neste trabalho foram cumpridos, exceto o objetivo específico quanto à associações com aplicações no setor aeroespacial. Porém, o trabalho desenvolvido pode servir de base para estudos futuros sobre a região de transição, uma vez que o código desenvolvido foi disponibilizado no repositório Orr-Sommerfeld.

Por fim, recomenda-se para trabalhos futuros:

- Resolver a equação de Orr-Sommerfeld utilizando o método da falsa posição em substituição ao método da secante;
- Variar o ângulo de ataque da placa plana;

- Utilizar a formulação espacial para resolver a equação de Orr-Sommerfeld aplicada à este mesmo caso;
- Inserir, na forma de condições iniciais da equação de Orr-Sommerfeld, perturbações no escoamento, por exemplo, gradiente de pressão, rugosidade na superfície ou sucção de massa.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, John D. **Fundamentals of Aerodynamics**. 5<sup>a</sup>. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 2012. P. 1131.
- ARNAL, D. Transition Prediction in Industrial Applications. *In*: HANIFI, A. *et al.* (Ed.). **Transition, Turbulence and Combustion Modelling**. Dordrecht: Springer, 1999. cap. 3, p. 105–157.
- BAINES, P. G.; MAJUMDAR, S. J.; MITSUDERA, H. The mechanics of the Tollmien-Schlichting wave. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 312, p. 107–123, 1996.
- BRANDT, Luca *et al.* On the convectively unstable nature of optimal streaks in boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 485, p. 221–242, 2003.
- DIAS, Nelson Luís. **Métodos Numéricos em Matemática Aplicada à Engenharia**. [S.l.]: Notas de aula, 2013. P. 115. Disponível em: <http://www.lemma.ufpr.br/wiki/images/d/d0/Metnum.pdf>.
- DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic Stability**. 2<sup>a</sup>. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 2004. P. 619.
- DUCK, P. W.; RUBAN, A. I.; ZHIKHAREV, C. N. The generation of Tollmien-Schlichting waves by free-stream turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 312, p. 341–371, 1996.
- FREIRE, Atila Pantaleão Silva. **Teoria de Camada Limite**. Rio de Janeiro: Notas de aula, 1990. P. 130.
- \_\_\_\_\_. **Uma Introdução à Teoria de Estabilidade Hidrodinâmica**. Rio de Janeiro: Notas de aula, 2012. P. 36.
- KUETHE, Arnold M.; CHOW, Chuen-Yen. **Foundations of Aerodynamics**. 5<sup>a</sup>. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1998. P. 572.
- LIN, C. C. On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 30, n. 10, p. 316–324, 1944.
- MALATESTA, Vinicius. **Simulação numérica direta de escoamentos sobre superfícies côncavas com transferência de calor**. 2014. F. 104. Tese (Doutorado) – USP.
- MCMURTRY, P. Transição para a turbulência - Notas de aula. *In*: [S.l.: s.n.], 2000. P. 30–40.

- MENDONÇA, Márcio T.; MEDEIROS, Marcello A. F. **Instabilidade Hidrodinâmica e Transição Para Turbulência Com Aplicações em Engenharia e Meteorologia**. [S.l.: s.n.], 2009. P. 1–151.
- MILICIC, Dragan. Lectures on differential equations in complex domains, p. 33, 1989.
- SCHLICHTING, Hermann. **Boundary Layer Theory**. 7<sup>a</sup>. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1979. P. 1–419.
- SCHLICHTING, Hermann; GERSTEN, Klaus. **Boundary-layer theory (Ninth Edition)**. [S.l.: s.n.], 2017. P. 647.
- TRUZZOLILLO, Domenico; CIPELLETTI, Luca. Hydrodynamic instabilities in miscible fluids. **Journal of Physics Condensed Matter**, v. 30, n. 3, 2018.
- VAN DYKE, Milton; WHITE, Frank M. **An Album of Fluid Motion**. v. 104. [S.l.: s.n.], 1982. P. 542–543.
- VAN STIJN, Th L.; VAN DE VOOREN, A. I. An accurate method for solving the Orr-Sommerfeld equation. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 14, n. 1, p. 17–26, 1980.
- ZUCCHER, Simone. Receptivity and Control of Flow Instabilities in a Boundary Layer, 2001.

## **APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD**

Neste apêndice, são apresentados os códigos desenvolvidos neste trabalho. Basicamente, tem-se dois módulos Python e o código principal do projeto. O primeiro módulo mostra o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração da equação de Blasius e esse mesmo método juntamente com Gram-Schmidt para a solução da equação de Orr-Sommerfeld. No segundo módulo, tem-se a solução de Blasius, que conforme explicado neste trabalho, calcula a terceira condição inicial desta equação e em seguida, obtém o perfil de velocidade de Blasius. O código principal consiste na solução da equação de Orr-Sommerfeld e construção das curvas de estabilidade. Como mencionado na Metodologia, estes scripts foram disponibilizados em repositório público que pode ser acessado neste link.

## A.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

```

1 #modulos python
2 import numpy as np
3 import warnings
4 import sys
5 import pandas as pd
6
7 """
8
9 Módulo para a integração das equações de Blasius e Orr-Sommerfeld
10 através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.
11
12 """
13
14 def rk4(funcao, varIndep, varDep, args = ()):
15
16     """Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para integrar a solução de Blasius.
17
18     Parameters
19     -----
20
21     funcao: function
22         Solução de Blasius.
23
24     varIndep: Array of float
25         Vetor com os valores de eta.
26
27     varDep: Array of float
28         Sistema de EDOs de primeira ordem para a solução de Blasius.
29
30     *args:
31         Informações necessárias à função, como a esmativa
32         da CI desconhecida de Blasius.
33
34     Returns
35     -----
36     Array of float
37         Solução do sistema de EDOs de Blasius em cada
38         passo de integração.
39     """
40     numeroPassos = len(varIndep)
41
42     for i in range(1, numeroPassos):
43
44         esp = varIndep[i] - varIndep[i-1] #passo
45
46         #calculo do Runge-Kutta de 4ª ordem
47         k1 = esp*funcao( varIndep[i-1], varDep[i-1] , *args )
48         k2 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5 , varDep[i-1] + k1*0.5 ,
49                         *args )
50         k3 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5 , varDep[i-1] + k2*0.5 ,

```

```

51         *args )
52     k4 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp      , varDep[i-1] + k3      ,
53                    *args )
54
55     #Resultado da integração
56     varDep[i] = varDep[i-1] + ( k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
57
58     return varDep
59
60 #Runge-Kutta com Gram-Schmidt
61 def rk4gs(funcao, varIndep, varDep1, varDep2, args=()):
62
63     """Método de Runge-Kutta de 4ª ordem com Gram-Schmidt para
64     o cálculo de soluções linearmente independentes da
65     equação de Orr-Sommerfeld.
66
67     Parameters
68     -----
69
70     funcao: function
71         Função de Orr-Sommerfeld que será integrada.
72
73     varIndep: Array of float
74         Valores de y desde ym até 0 (sobre a superfície da placa).
75
76     varDep1: Array of complex64
77         Vetor da solução não-viscosa.
78
79     varDep2: Array of complex64
80         Vetor da solução viscosa.
81
82     *args:
83         Informações necessárias à integração, como alfa,
84         Re e c.
85
86     Returns
87     -----
88     Array of complex64, Array of complex64
89     Retorna os vetores das soluções linearmente independentes.
90     """
91     warnings.simplefilter("error", RuntimeWarning)
92
93     numeroPassos = len(varIndep)
94     for i in range(1, numeroPassos):
95
96         esp = varIndep[i] - varIndep[i-1]
97
98         #matriz da solucao não-viscosa
99         k1 = esp*funcao( varIndep[i-1], varDep1[i-1] , *args )
100        k2 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5, varDep1[i-1] + k1*0.5 ,

```

```

101         *args )
102     k3 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5, varDep1[i-1] + k2*0.5 ,
103         *args )
104     k4 = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp, varDep1[i-1] + k3, *args )
105     varDep1[i] = varDep1[i-1] + ( k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
106
107     #matriz da solucao viscosa
108     try:
109         k1a = esp*funcao( varIndep[i-1], varDep2[i-1] , *args )
110         k2a = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5,
111             varDep2[i-1] + k1a*0.5 , *args )
112         k3a = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5,
113             varDep2[i-1] + k2a*0.5 , *args )
114         k4a = esp*funcao( varIndep[i-1] + esp, varDep2[i-1]
115             + k3a, *args )
116
117     #tratamento de exceção para que o código calcule o
118     #próximo passo de integração
119     except:
120         print("k1", k1a, esp, varIndep[i-1], varDep2[i-1], *args)
121         print("func k1", funcao( varIndep[i-1], varDep2[i-1] ,*args ))
122         print("k2", k2a, varIndep[i-1] + esp*0.5,
123             varDep2[i-1] + k1a*0.5, *args )
124         print("func k2", funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5,
125             varDep2[i-1] + k1a*0.5 , *args ))
126         print("k3", k3a, esp, varIndep[i-1] + esp*0.5,
127             varDep2[i-1] + k2a*0.5, *args)
128         print("func k3", funcao( varIndep[i-1] + esp*0.5,
129             varDep2[i-1] + k2a*0.5 , *args ))
130         print("k4", k4a, esp, varIndep[i-1] + esp , varDep2[i-1] + k3,
131             *args)
132         print("func k4", funcao( varIndep[i-1] + esp,
133             varDep2[i-1] + k3a, *args ))
134
135         raise ValueError("except")
136
137     varDep2[i] = varDep2[i-1] + ( k1a + 2 * k2a + 2 * k3a + k4a) / 6
138
139     #calculo do Gram-Schmidt
140     alfaGS = np.linalg.norm(varDep1[i, :]) #normaliza o vetor da solução não-viscosa
141     varDep1[i, :] = varDep1[i, :] / alfaGS #ortogonaliza a solução não-viscosa
142     beta = np.dot(varDep2[i, :], np.conjugate( varDep1[i, :] ) )
143     varDep2[i, :] = varDep2[i, :] - (beta * varDep1[i, :]) #ortogonaliza a solução viscosa
144
145     return varDep1[i, :], varDep2[i, :]

```

## A.2 SOLUÇÃO DE BLASIUS

```

1  #!/usr/bin/env python3
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  """
4  Created on Tue Nov 24 08:15:24 2020
5
6  @author: daiane
7  """
8
9  import numpy as np
10 import tccBiblioteca as tcc
11 from scipy import optimize
12
13 """
14 Módulo para o cálculo da solução de Blasius com base na referência Schlichting 1979.
15
16 """
17
18 #solução de Blasius
19 def blasiusODE(varIndep, varDep):
20
21     """Método para resolver a equação de Blasius através de um
22     sistema de EDOs.
23
24     Parameters
25     -----
26
27     varIndep: Array of float
28         Vetor com os valores de  $\eta$ .
29
30     varDep: Array of float
31         Sistema de EDOs de primeira ordem para a solução de Blasius.
32
33     Returns
34     -----
35     Array of float
36         Solução da equação de Blasius.
37     """
38     return np.array([varDep[1], varDep[2],
39                     - varDep[0]*varDep[2] ])    #sistema de eqs da EDO
40
41 def h(p, varIndep, varDep):
42
43     """Método para encontrar o valor de  $f'(\eta)$  através de uma
44     estimativa inicial.
45
46     Parameters
47     -----
48
49     p: float
50         Estimativa para a condição inicial da Solução de Blasius.

```

```

51
52     varIndep: Array of float
53         Vetor com os valores de  $\eta$ .
54
55     varDep: Array of float
56         Sistema de EDOs de primeira ordem para a solução de Blasius.
57
58     Returns
59     -----
60     float
61         Retorna o resultado de h de acordo com a estimativa dada.
62 """
63     varDep[0] = np.array([0.0, 0.0, p]) #condição inicial
64     resultadoBlasius = tcc.rk4(blasiusODE,
65                               varIndep,
66                               varDep ) #calcula Blasius sob CIs diferentes
67     return resultadoBlasius[-1, 1] - 1
68
69 def blasiusSolution(size, etaInf = 10.0):
70
71     """Método para encontrar o valor de  $f'(\eta)$  a partir de uma estimativa inicial
72     através do método de Newton-Raphson e em seguida,
73     calcular a solução de Blasius por Runge-Kutta de 4ª ordem.
74
75     Parameters
76     -----
77
78     size: int
79         Comprimento de eta.
80
81     etaInf: int
82         Valor de eta na borda da camada limite.
83
84
85     Returns
86     -----
87     Array of float, Array of float
88         Retorna o perfil de velocidades de Blasius no intervalo
89         de eta escolhido.
90 """
91     numeroEquacoes = 3
92
93     etaValor = np.linspace( 0, etaInf, size, dtype = np.float64) #vetor com valores de eta
94     fEta = np.zeros(( size, numeroEquacoes)) #matriz para guardar os resultados da solução de Blasius
95     fPrime2_0 = optimize.newton( h , 0.3, args=(etaValor, fEta)) #método de Newton-Raphson
96     fEta[0] = np.array([0.0, 0.0, fPrime2_0]) #condições iniciais da solução de Blasius
97     etaValor[0] = 0 #inicia a integração na superfície da placa plana
98     tcc.rk4(blasiusODE, etaValor, fEta ) #integra Blasius por Runge-Kutta
99     return etaValor, fEta

```

### A.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD E CURVA DE ESTABILIDADE

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Mon Nov 23 01:01:43 2020
5
6 @author: daiane
7 """
8
9 import numpy as np
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 import tccBiblioteca as tcc
12 import blasiusBiblioteca as bl
13 import warnings
14 from scipy import optimize
15 from scipy.interpolate import interp1d
16 from scipy import linalg
17 import pandas as pd
18 from csv import writer
19 from matplotlib.pyplot import rc
20 rc('text', usetex = True)
21
22
23
24 #calcula da solução de blasius
25 blasiusEtaInf = 10 #comprimento de eta no infinito
26 blasiusSize = 1000 #numero de passos de integração da solução de Blasius
27 aDelta = 1.72 #constante para calcular a espessura de deslocamento
28
29 #resolve a solução de Blasius
30 etaValor, resolveBlasius = bl.blasiusSolution(blasiusSize, blasiusEtaInf)
31
32 #interpolar  $f'(\eta)$  e  $f'''(\eta)$ 
33 fprime1 = interp1d(etaValor, resolveBlasius[:, 1])
34 fprime3 = interp1d(etaValor, -resolveBlasius[:, 0] * resolveBlasius[:, 2])
35
36
37 #orr-sommerfeld
38
39 def c3(yBarra, c, alfa, Re):
40     #Legenda: c =  $\bar{c}$ , alfa =  $\bar{\alpha}$  e Re =  $Re_{\delta_1}$ 
41     # yBarra =  $\bar{y}$ 
42
43     """Calculo do coeficiente C_3
44
45     Parameters
46     -----
47     yBarra: int
48         Posição normal à placa plana.
49     c: np.complex64
50         Velocidade da onda de perturbação.

```

```

51     alfa: float64
52         Número de onda da perturbação.
53     Re: int
54         Número de Reynolds do escoamento.
55
56     Returns
57     -----
58     complex
59     Valor do coeficiente variável C_3(y)
60     """
61     eta = (aDelta * yBarra) / np.sqrt(2.0) #calculo de  $\eta$ 
62     vBarra = fprime1(eta) #calcula  $U(\bar{y})$ 
63     return -2 * alfa**2 + -1j * Re * alfa * (vBarra - c)
64
65
66 def d3(yBarra, c, alfa, Re):
67     #Legenda:  $c = \bar{c}$ ,  $alfa = \bar{\alpha}$  e  $Re = Re_{\delta_1}$ 
68     # yBarra =  $\bar{y}$ 
69
70     """Calculo do coeficiente D_3
71
72     Parameters
73     -----
74     yBarra: int
75         Posição normal à placa plana.
76     c: np.complex64
77         Velocidade da onda de perturbação.
78     alfa: float64
79         Número de onda da perturbação.
80     Re: int
81         Número de Reynolds do escoamento.
82
83     Returns
84     -----
85     complex
86     Valor do coeficiente variável D_3(y).
87     """
88     eta = (aDelta * yBarra) / np.sqrt(2.0) #calcula  $\eta$ 
89     vBarra = fprime1(eta) #calcula  $U(\bar{y})$ 
90     vBarraLinhas = fprime3(eta) * aDelta**2 * 0.5 #calcula  $U''(\bar{y})$ 
91     return alfa**4 + 1j*Re * alfa**3 * (vBarra
92         - c) + 1j*Re * alfa * vBarraLinhas
93
94
95 def orrSommerfeld(varIndep, varDep, c, alfa, Re):
96
97     #Legenda:  $c = \bar{c}$ ,  $alfa = \bar{\alpha}$  e  $Re = Re_{\delta_1}$ 
98     # yBarra =  $\bar{y}$ 
99
100     """Calculo da equação de Orr-Sommerfeld a partir de um

```