VOLUMES DA SÉRIE
TÓPICOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA

1 – Números Naturais
2 – Geometria I
3 – O Conceito de Fração
4 – Operações com Números Fracionários
5 – O Problema da Medida
6 – Números Decimais
7 – Geometria II
8 – Números Inteiros
9 – Cálculo Literal
10 – Equações de 1º Grau
11 – Sistemas de Equações de 1º Grau
12 – Proporcionalidade
13 – Geometria III
14 – Áreas e Perímetros
15 – Números Irracionais
16 – Equações de 2º Grau

δx DELTA XIS
EDITORA LTDA

Rua: Maria Luiza Missio Mingone, 184
13100 - Campinas - SP.

Tópicos de Ensino de
MATEMÁTICA

15 – Números Irracionais

ADAIR MENDES NACARATO
ANTONIO MIGUEL
MANOEL AMARAL FUNCIA
MARIA ÂNGELA MIORIM

Delta Xis Editora Ltda

APRESENTAÇÃO

Desde 1982, um grupo de professores de Matemática de Campinas, insatisfeitos com os resultados obtidos na sua prática pedagógica, vem se reunindo com o objetivo de elaborar projetos de ensino-aprendizagem que possam, aos poucos, alterar a situação existente.

Esses projetos são aplicados em escolas das redes pública e particular e avaliados periodicamente. A avaliação dos resultados obtidos na prática levanta críticas e sugestões que impõem, frequentemente, aprofundamento teórico e reformulações dos projetos já produzidos, além da produção de novos projetos. Essa é a principal característica desse material: o fato de estar sendo continuamente refeito. Outra característica dele é que, embora englobe o conteúdo de 5ª a 8ª séries, é apresentado em fascículos, permitindo ao professor escolher o momento mais adequado para trabalhar um certo tema junto a seus alunos.

Contamos atualmente com 16 projetos que compõem os volumes da série "Tópicos de Ensino de Matemática". Esses fascículos representam a mais recente versão do trabalho mas, certamente, não a última.

Um trabalho dessa natureza, só foi e continua sendo possível, graças à participação contínua de professores que aplicam os projetos. Queremos registrar, portanto, o nosso agradecimento aos seguintes professores que, durante esses anos, têm contribuído na elaboração e reformulação dos projetos, trazendo críticas e sugestões, participando de reuniões e encontros com o propósito de repensar e aprofundar questões referentes ao ensino da Matemática:

Ana Maria C.Coimbra, Ana Regina P.B.Angi, Aurora S. Santana, Beatriz V.B.de Carvalho, Carmem Lúcia B.Passos, Cláudia V.C.Miguel, Divina A. de Aquino, Eliza A.Mukai, Elizabeth A.Carrara, Gelson J.Jacobucci, Heloisa de Carvalho M.Debiazzi, Jane M.da Silva Vidal, José Amaury Alves, Margali A.de Nadai, Maria Aparecida B.Pinheiro, Maria Clélia F. Jacobucci, Maria Lúcia Negri, Marília B.Pereira, Marisa S.Pinheiro Travaini, Marta I. de Almeida, Neusa B.Ferraz, Regina Celi Ayres, Ronaldo Nicolai, Rosana Fávero, Rosemeire M.R.Silva, Sandra T.Cardoso, Suely M.Gimenis, Susy M.Fadel, Teresa Neide G.Guimarães, Vilma M. M. Silva, Yara P.P.Bueno e Zuleide G. Paulino.

Campinas, fevereiro de 1990

ÍNDICE

I N T R O D U Ç Ã O

O objetivo desta unidade é fazer com que você compreenda as razões históricas e lógicas que levaram à necessidade de uma nova ampliação do conceito de número na Matemática através do surgimento dos números irracionais.

Como você observará no desenvolvimento deste tema, o teorema de Pitágoras está intimamente relacionado com a necessidade dessa ampliação.

Ao longo desta unidade aparecem textos que procuram explicitar e esclarecer as questões filosóficas e lógicas que estão na base dessa ampliação e a função que esses novos números cumprem na ciência comtemporânea. A esperança é que eles possam motivar o seu estudo.

ATIVIDADE Nº 1. Cada número racional abaixo é dado em sua representação fracionária. Determine a representação decimal de cada um deles.

a) $\frac{1}{2}$ = e) $\frac{1}{100}$ = i) $\frac{2}{3}$ = n) $\frac{401}{2}$ =

b) $\frac{1}{5}$ = f) $\frac{2}{200}$ = j) $\frac{4}{6}$ = o) $\frac{229}{99}$ =

c) $\frac{2}{10}$ = g) $\frac{5}{2}$ = l) $\frac{1}{6}$ = p) $\frac{228}{900}$ =

d) $\frac{3}{15}$ = h) $\frac{10}{4}$ = m) $\frac{164}{5}$ = q) $\frac{1}{1000}$ =

ATIVIDADE Nº 2. Cada número racional abaixo é dado em sua representação decimal. Represente cada um deles na forma de fração pelo menos de 3 maneiras diferentes sendo uma delas uma fração irredutível.

a) 0,1 = e) 1,6 =
b) 0,8 = f) 15,32 =
c) 0,15 = g) 5,018 =
d) 0,235 = h) 0,12 =

TEXTO Nº 1: Formas de Representação de um número racional

Ao executar as atividades 1 e 2 você percebeu que: só existe uma única maneira de representar um número racional na forma decimal. Por outro lado, existem infinitas maneiras de se representar um número racional na forma fracionária. Assim, as representações fracionárias do número racional 1/2 são todas as infinitas frações que são equivalentes a 1/2 : 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, ... ao passo que a representação decimal desta mesma fração é 0,5. Dizemos que o,5 é um número decimal finito para diferenciá-lo de outros números decimais que possuem infinitas casas decimais, como, por exemplo, 0,666... Números como 0,666...; 2,3131...; 0,25333..., etc... que possuem infinitas casas decimais e uma parte periódica (parte que se repete infinitamente) são também chamadas de DÍZIMAS PERIÓDICAS. Entretanto, poderíamos eliminar esta distinção considerando todos os números racionais na forma decimal como dízimas periódicas. Basta, para isso, repetir infinitamente o algarismo zero nas "casas vazias" dos"números decimais finitos", como mostram os seguintes exemplos:

0,5 = 0,5000... 1,437 = 1,437000...
0,18 = 0,18000... 18,0501 = 18,0501000...

Podemos, ainda, fazer o mesmo para os números naturais (pois são também racionais). O exemplo seguinte nos mostra as infinitas representações fracionárias do número 2 e também a sua representação decimal infinita:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \ldots = 2,0000\ldots$$

ATIVIDADE Nº 3: 1) Escreva a representação decimal infinita de cada número racional abaixo:

a) 5,3 =

b) 5, 805 =

c) 5 =

d) 1 =

e) 0 =

f) $\frac{5}{8}$ =

2) Escreva a representação fracionária irredutível dos números racionais:

a) 0,7000... =

b) 1,53000... =

c) 1,8000... =

d) 0,333... =

TEXTO Nº 2: Representação Fracionária das Dízimas Periódicas

Talvez, você tenha tido alguma dificuldade para fazer o último ítem da atividade anterior.

Essa dificuldade pode ser traduzida pela seguinte pergunta: será que para encontrarmos a representação fracionária de uma dízima periódica, com período diferente de zero, devemos agir por tentativas ou existe um método mais prático que funciona bem para todos os casos ? Felizmente podemos responder a esta pergunta dizendo que existe um tal método. A forma de utilizar este método é ilustrada pelos exemplos seguintes:

1º Exemplo: Determinar a representação fracionária do número racional 0,333...

1º Passo : Chamemos de x este número, isto é, x = 0,333...

2º Passo : Multiplicando por 10 ambos os membros desta igualdade, vem: 10X = 3,333...

3º Passo : Subtraindo a primeira igualdade da segunda temos:
10X - X = 3,333... - 0,333... ou
9X = 3

4º Passo : Determinando o valor de X na última equação vem:
$X = \frac{3}{9}$ ou $X = \frac{1}{3}$

Conclusão: $0,333... = \frac{1}{3}$

2º Exemplo: Determinar a representação fracionária do número racional 2,3131...

$X = 2,3131...$

$100X = 231,3131...$ (multiplicamos por 100 ambos os membros da igualdade anterior)

$99X = 229$ (subtraímos membro a membro a igualdade 1 da igualdade 2)

Logo, $X = \frac{229}{99}$

Conclusão: $2,3131... = \frac{229}{99}$

ATIVIDADE Nº 4: Determine a representação fracionária de cada número racional abaixo:

a) 0,111... =	e) 0,1212... =	i) 1,25333... =
b) 0,222... =	f) 1,7373... =	j) 0,999... =
c) 5,333... =	g) 0,821821... =	l) 0,1999... =
d) 12, 777... =	h) 0,2555... =	m) 1,3299... =

ATIVIDADE Nº 5: Responda:

a) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número zero ?

b) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número 1 ?

c) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número 14 ?

d) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número 100 ?

e) Quais são os números que multiplicados 3 vezes por si mesmos dá como produto o número 64 ?

f) Quais são os números que multiplicados 3 vezes por si mesmos dá como produto o número 1000 ?

g) Quais são os números que multiplicados 3 vezes por si mesmos dá como produto o número (-1) ?

h) Quais os números que multiplicados 100 vezes por si mesmos dá como produto o número 1 ?

i) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número (-9) ?

j) Quando se multiplica um número por si mesmo é possível que o produto seja um número negativo ? Por quê ?

l) Quando se multiplica um número 3 vezes por si mesmo é possível que o produto seja um número negativo ?

m) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número $\frac{9}{16}$?

n) Quais são os números que multiplicados por si mesmos dá como produto o número 0,25 ?

o) Quais são os números que elevados ao quadrado dá $\frac{64}{81}$?

p) Quais são os números que elevados ao cubo dá $\frac{27}{125}$?

<u>ATIVIDADE Nº 6</u>: Determine os valores de x em cada uma das equações:

a) $x^2 = 25$

b) $x^2 = 49$

c) $x^2 = -16$

d) $x^2 = 0$

e) $x^2 = 1$

f) $x^2 = 400$

g) $x^3 = 1$

h) $x^3 = 0$

i) $x^3 = -1$

j) $x^3 = -27$

l) $x^2 - 1 = 15$

m) $2x^3 - 16 = 0$

n) $2x^2 - 15 = 185$

o) $\frac{x^2}{3} = 3$

<u>TEXTO Nº 3</u>: <u>TRIÂNGULOS RETÂNGULOS</u>

Podemos definir o retângulo como sendo um polígono que possui 4 lados, 2 a 2 paralelos e congruentes e 4 ângulos retos e, o quadrado, como sendo um retângulo que possui os 4 lados congruentes.

Qualquer retângulo possui 2 diagonais e se você pegar um retângulo, traçar uma dessas diagonais e cortá-lo com uma tesoura "em cima" dessa diagonal você obterá 2 <u>figuras idênticas</u>, isto é, 2 <u>triângulos idênticos</u>. Esses triângulos são especiais, pelo fato de possuírem <u>um ângulo reto</u>.

Todo triângulo que pode ser obtido a partir de um retângulo, e que portanto, possui 1 ângulo reto, será chamado de <u>TRIÂNGULO RETÂNGULO</u>.

Pelo fato de os triângulos retângulos formarem uma classe especial de triângulos, os seus lados também recebem nomes especiais. Os lados que formam o ângulo reto, isto é, os lados do retângulo, são chamados <u>CATETOS</u> e o <u>lado maior</u> do triângulo, isto é, a diagonal do retângulo, é chamada de <u>HIPOTENUSA</u>.

Mas, por que razão seriam esses triângulos retângulos tão especiais ?

É que existe uma propriedade notável e de grande aplicação que relaciona os 3 lados desse triângulo, isto é, os catetos com a hipotenusa . É essa propriedade que você deverá verificar, ao executar a atividade seguinte.

ATIVIDADE Nº 7: Utilizando 3 folhas de papel milimetrado, construa os 3 triângulos retângulos abaixo:

na 1ª folha, o Δ ABC, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ meçam respectivamente 3 cm e 4 cm.

na 2ª folha, o Δ DEF, cujos catetos meçam respectivamente 6cm e 8 cm.

na 3ª folha, o Δ PQR, cujos catetos meçam respectivamente 4 cm e 5 cm.

Após isso, construa, em cada um dos lados de cada triângulo, um quadrado cuja medida dos lados seja igual à medida de cada um dos lados de caia triângulo.

Feito isso, responda:

a) Qual é a área de cada um dos quadrados que você construiu em cada triângulo ?

b) Se você recortar os quadrados construídos sobre os catetos de cada triângulo, é possível, utilizando 2 desses quadrados, cobrir exatamente a superfície dos quadrados construídos sobre a hipotenusa desses triângulos ?

c) Que relação existe entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e a área do quadrado construído sobre a hipotenusa em cada triângulo ?

d) Verifique se essa relação continua válida para outros triângulos retângulos de sua livre escolha.

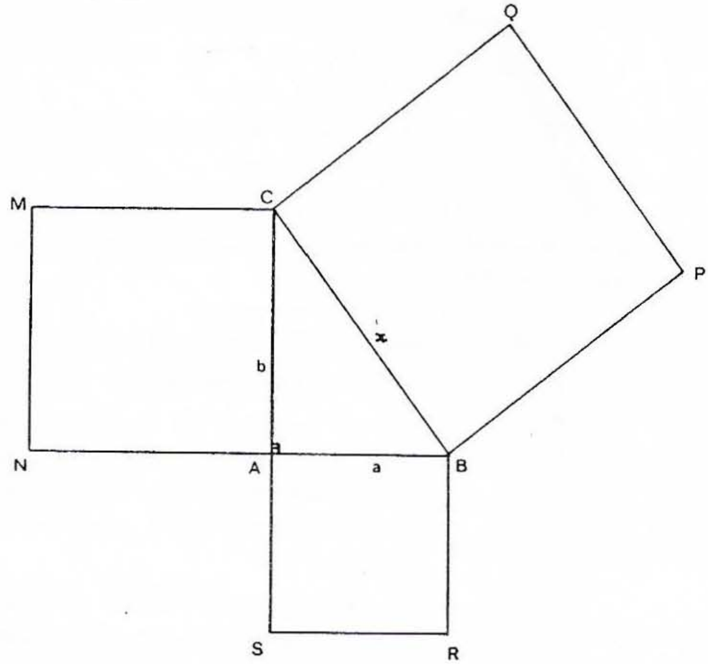
e) Verifique se essa relação continua válida para triângulos que não sejam retângulos. Faça pelo menos uma tentativa.

TEXTO Nº 4:

As tentativas de cobrimento do quadrado construído sobre a hipotenusa, que você fez na atividade anterior para o triângulo PQR não foram,com certeza, nada fáceis. Talvez você ainda não tenha se convencido de que esse cobrimento é possível como aconteceu para os dois primeiros triângulos.

Acontece que os dois primeiros casos constituem exceções e, na maioria das vezes, ao escolhermos triângulos retângulos ao acaso, iremos nos deparar com casos semelhantes ao terceiro, que exigem uma técnica especial de cobrimento. Acompanhando o exemplo abaixo você aprenderá a dominar essa técnica e, através desse domínio visualizar a possibilidade de cobrimento da superfície do quadrado construído sobre a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo.

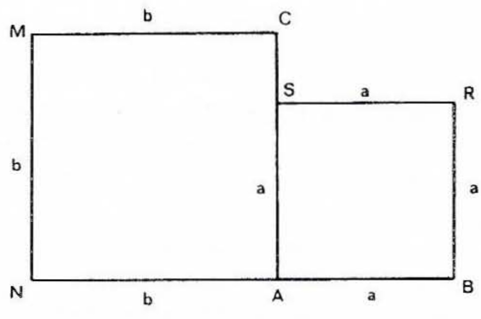
Consideremos um Δ ABC qualquer, cujos catetos meçam a e b e a hipotenusa meça x.



A técnica de cobrimento consiste no seguinte:

1º Passo:

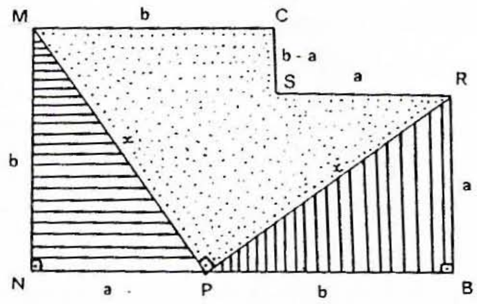
Desenhe, um ao lado do outro, os 2 quadrados construídos sobre os catetos do triângulo, isto é, os quadrados ACMN e ABRS como mostra a figura abaixo



2º Passo:

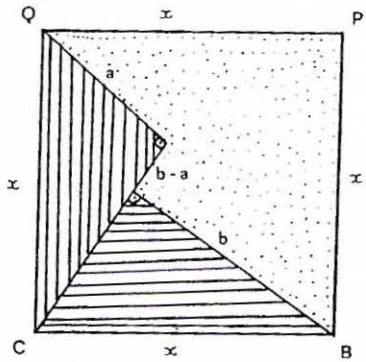
Apague o lado $\overline{AS}$ do quadrado menor. Coloque no lado $\overline{NB}$ dessa figura, a partir do vértice N, a medida do lado do quadrado menor. Dessa forma, a medida do segmento $\overline{NP}$ será a e, consequentemente, a medida do segmento $\overline{PB}$ será b.

Ligue o ponto P aos vértices M e R da figura, formando os segmentos $\overline{PM}$ e $\overline{PR}$ cujas medidas sãoiguais a x, isto é, $\overline{PM}$ e $\overline{PR}$ são as hipotenusas dos triângulos retângulos NPM e PBR respectivamente, cujos catetos medem a e b e que estão hachurados no desenho seguinte.



3º Passo

A figura acima ficou, dessa forma, dividida em 3 partes e possui área igual ao quadrado BCQP construído sobre a hipotenusa. Para provar isso, basta que você recorte as 3 peças da figura acima e cubra o quadrado como num quebra-cabeça. A figura abaixo mostra a maneira como as 3 peças devem ser dispostas.



Podemos agora expressar em palavras o fato que está contido nessa brilhante técnica de cobrimento:

> "Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

Lancelot Hogben, em seu livro "Maravilhas da Matemática" nos diz que "todo o mundo antigo - segundo nos revelam os documentos encontrados - conhecia um método muito simples de traçar ângulos retos, baseado no fato de todo triângulo de lados iguais a 3, 4 e 5 unidades de comprimento ser necessariamente retângulo. Uma velha lenda nos diz que os arquitetos sacerdotais do Egito traçaram ângulos retos emendando 3 segmentos de corda de comprimentos iguais a 3, 4 e 5 unidades. Bastava dobrar a corda emendada pelos nós para obter um perfeito triângulo retângulo".

Esse fato famoso, entretanto, recebeu o nome de Teorema de Pitágoras. Isto porque a demonstração da validade desse teorema para qualquer triângulo retângulo se deveu a uma escola de filósofos gregos chamada escola pitagórica que existiu por volta de 600 anos antes de Jesus Cristo. Essa escola possuía objetivos religiosos e científicos e parece ter sido Pitágoras o seu fundador. A grande influência exercida por ela na Grécia antiga se deveu ao fato, entre outros, dela ter dado uma resposta bastante original a duas questões fundamentais que preocupavam os pensadores da época. O curioso, entretanto, é que essas questões continuem ainda, nos nossos tempos, século XX, a preocupar os cientistas .. O seguinte texto adaptado de Jorge Dias de Deus, doutor em Física de Altas Energias pela Universidade de Londres, procura colocar em palavras simples essas questões. Vamos tentar compreendê-las e, em seguida, retornarmos aos tempos antigos.

UMA QUESTÃO

"Hoje, uma das questões mais fascinantes na ciência é a origem do universo. A questão não é nova para a humanidade. Pelo contrário, desde tempos antigos ela se manifesta nos mitos da criação. A Bíblia nos fornece mesmo quase que uma receita utilizada pelo criador para fabricar o universo e os seres que haveriam de povoá-lo e uma receita especial para a criação do Homem-Adão e daquela sua costela milagrosa Dona Eva-Mulher. Para além da beleza poética e do engenho explicatico dos mitos, hoje em dia o que é realmente fascinante é o fato da ciência se atrever a abordar o estudo do universo como um todo e chegando,por isso, ao problema do começo. Essa ciência atrevida chama-se cosmologia (estudo do Cosmos). A cosmologia olha para os fósseis físicos (estrelas, cometas, gases interestelares, radiação cósmica) que contêm os sinais do passado. Através da análise desses dados levantou uma resposta, de grande aceitação atual: o começo do Universo foi uma grande explosão. Nos anos 80 de nosso século, a cosmologia tem tentado encontrar resposta para a origem da explosão inicial e a idéia especulativa mais interessante é a que propõe que o universo vem do nada, do vazio. Em vez do criador, o nada, em vez da receita da criação, o acaso e a flutuação".

A OUTRA QUESTÃO

"As coisas são como são ou terão uma estrutura interior que, de algum modo, as explica ?

Imagine uma experiência. Parta de uma banheira cheia de água.Tire um balde dessa água. Encha um jarro com a água do balde. Passe a água do jarro para um copo. Do copo para um cálice. Retire do cálice uma colher de chá com água. Com um conta-gotas extraia uma gota de água. E continue por aí. Podemos fazer isso indefinidamente ? A água continuará sempre a ser água ? Por menor que seja a parcela que se tome, a água será sempre água ? A resposta a esta questão reduzem-se a duas:

1ª resposta: A água será sempre água, por mais que se divida (no fundo pensa-se a água como uma coisa contínua, sempre igual até ao infinitamente pequeno).

2ª resposta: A água deixa de ser a água que se conhece quando se vai para escalas menores. (Pensa-se que há descontinuidade na estrutura da matéria,a aparência escondendo uma realidade diferente).

No começo do nosso século houve uma discussão célebre sobre esta questão que colocou frente a frente dois famosos cientistas. De um lado Ernet Mach (1838-1916), que defendia a primeira resposta, isto é, que não haveria lugar para estruturas e explicações profundas. Do outro lado, Ludvic Boltzmann (1844-1906), que acreditava fervorosamente na explicação das coisas por estruturas materiais internas: os átomos e as moléculas. Mach, físico e filósofo, e com uma boa dose de arrogância, ganhou a dicussão. Boltzmann, o gênio visionário, suicidou-se desiludido , incapaz de convencer os seus colegas cientistas da realidade dos átomos e das moléculas. Os átomos e as moléculas, porém,existem. Se reduzirmos suficientemente as dimensões com que olhamos a água - até a milésima parte da milionésima parte do centímetro -, deixamos de ter o fluído água e entramos no mundo dos átomos e moléculas, um mundo de percursos desordenados e choques caóticos. E acabamos nos átomos e nas moléculas ? A Física do nosso século passou dos átomos e das moléculas aos núcleos dos Átomos, extraindo deles as partículas elementares (os prótons, os nêutrons, os mésons). E hoje tenta-se extrair de dentro das próprias partículas elementares as sub-partículas que as constituem: os quarks.

As coisas não são infinitamente iguais a si próprias quando se desce dentro delas em profundidade. Há uma estrutura. Melhor, há muitas estruturas, umas dentro de outras, justificando-se umas pelas outras. Uma infinidade de estruturas ? Uma infinidade de descontinuidades?"

O Retorno

Por volta do século V antes de nossa era, nas regiões da Jônia (sul da costa ocidental da Ásia menor) e da "Grande Grécia" (Sul da península italiana e Sicília) vários pensadores tentaram dar respostas às duas questões que colocamos anteriormente - Tales de Mileto foi o primeiro pensador a ter a audácia de propor uma visão de conjunto da na tureza. Imaginou ele que a água fosse a estrutura e a força geradora de todas as coisas. Justificava essa visão mostrando o papel da água na vida das plantas e dos animais e sobre a importância fundamental dos rios nas civilizações que conhecia. A água, segundo ele, é vida e princípio de vida, todas as coisas dela provêm e a ela voltam.

Anaximandro aprofunda mais a visão de Tales. Ele se recusa a reconhecer que a origem e estrutura das coisas estivesse em algo que pudesse ser observado. O princípio deve estar além de tudo o que podemos observar: será chamado, pois, o indeterminado.

Anaxímenes propõe ser o ar o princípio de tudo e a estrutura explicativa de todos as coisas. Dizia ele ser o ar, elemento invisível e imponderável, quase inobservável, a própria vida, a força vital, a divindade que anima o mundo, aquilo que prova a existência da respiração. E o sopro da respiração significa vida.

Entre outras respostas, a dos pitagóricos distinguia-se por sua originalidade. Diziam eles que a explicação racional de todas as coisas baseava-se no arranjo das partes que as constituíam (forma) e nas relações quantitativas que governavam esses arranjos. Em outras palavras, as coisas se explicam pela harmonia e pelo número.

Pela primeira vez na história do pensamento humano aparecia a ousada concepção de que a compreensão e a explicação dos fenômenos da natureza reduziam-se a relações numéricas, a expressões e leis matemáticas.

É claro que os pitagóricos não chegaram a essa conclusão através de simples especulações. Tinham razões para acreditar nisso. Chegaram a mostrar, entre outras coisas, como triângulos equiláteros podem ser obtidos uns a partir dos outros partindo-se de uma figura geométrica e que essa geração é governada pela lei matemática: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Até mesmo no domínio da música Pitágoras realizou grande descoberta. Através de experiências feitas com um instrumento musical com uma só corda e um cavalete, que ao ser deslocado divide a corda em dois segmentos na razão que se quiser, verificou que: "os comprimentos dos segmentos formados na corda a fim de que ela emita sons em intervalos de oitava, estão entre si na razão de 2 para 1; para que emita sons em intervalos de quinta, os comprimentos deverão estar na razão de 3 para 2 em intervalos de quarta, na razão de 4 para 3. Como Pitágoras deve ter vibrado de entusiasmo ao verificar como até o próprio som - que significava a própria harmonia - podia se reduzir a relações numéricas simples !

Mas a verificação mais simples e mais bela era, sem dúvida, aquela fornecida pelo célebre teorema que para sempre ficou conhecido com o nome de teorema de Pitágoras."

8

ATIVIDADE Nº 8

a) Um triângulo que possua os lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm é ou não um triângulo retângulo ? Por quê ?

b) Um triângulo que possua os lados medindo 0,8 cm, 0,6 cm e 1 cm é ou não um triângulo retângulo ? Por quê ?

c) Um triângulo que possua os lados medindo 2 cm, 2 cm, e 3 cm é ou não um triângulo retângulo ? Por quê ?

d) Quanto deve medir o lado de um quadrado cuja área é de 64 cm^2 ?

e) Quanto deve medir a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 8 cm ?

f) Quanto deve medir um dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que o outro cateto mede 9 cm e a hipotenusa 15 cm ?

g) Quanto deve medir um dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que o outro cateto mede 20 cm e a hipotenusa 25 cm ?

h) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados perpendiculares medem 30 cm e 40 cm ?

i) Quanto deve medir a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm ?

j) Quanto deve medir a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e 1 cm ?

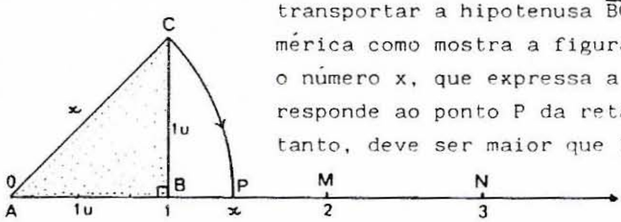
TEXTO Nº 5: A ENCRUZILHADA

Parece que ao tentar resolver o ítem j da atividade anterior você se deparou com problema sério ! Vamos retomá-lo agora: Qual é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1cm e 1 cm ?

É lógico que não podemos duvidar da existência de um tal triângulo uma vez que podemos construí-lo com régua e compasso. E se esse triângulo existe, deve também existir algum número que represente a medida da hipotenusa $\overline{BC}$.

Que número é esse ? Vamos chamá-lo de x.

É claro que, com o auxílio de um compasso, podemos transportar a hipotenusa $\overline{BC}$ do Δ ABC para a reta numérica como mostra a figura. Percebemos, então, que o número x, que expressa a medida da hipotenusa, corresponde ao ponto P da reta numérica. O número x, portanto, deve ser maior que 1 e menor que 2 ou melhor, maior que 1 e menor que 1,5 uma vez que P está si



tuado à esquerda do ponto médio do segmento $\overline{BM}$.

Podemos compreender esse mesmo fato sob um outro aspecto. Sabemos que, como o triângulo ABC é retângulo, então, as medidas dos seus lados estão relacionadas de acordo com o Teorema de Pitágoras. Logo, $x^2 = 1^2 + 1^2$ ou $x^2 = 2$

Como determinar o valor de x nessa equação ?

Para determiná-lo devemos perguntar qual é o número que multiplicado por si mesmo dá 2. E aí a dificuldade geométrica se transforma numa dificuldade aritmética. Já sabemos que esse número existe ! Entretanto, esse número não pode ser inteiro. Por quê ? Simplesmente, porque se $x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1 \neq 2$ e se $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4 \neq 2$. Isto significa que x deve ser um número maior do que 1 e menor do que 2.

Deve ser, portanto, um número racional maior que 1 e menor que 1,5 como nos informa a figura.

Tomemos o número 1,4 que está entre ambos e o multipliquemos por si próprio. Temos: 1,4 . 1,4 = 1,96. Então, o número procurado deve ser maior que 1,4 e menor que 1,5.

Seguindo esse mesmo processo iremos encontrando números que elevados ao quadrado estão cada vez mais próximos de 2 mas nunca chegaremos a encontrar o próprio 2. Obteríamos para x, por aproximações sucessivas, um número com infinitas casas decimais. Damos abaixo algumas aproximações.

$x = 1,41...$	pois	$x^2 \cong 1,9881$
$x = 1,414...$	pois	$x^2 \cong 1,999396$
$x = 1,4142...$	pois	$x^2 \cong 1,9999616$
$x = 1,41421...$	pois	$x^2 \cong 1,9999899$
$x = 1,414213...$	pois	$x^2 \cong 1,9999984$
$x = 1,4142135...$	pois	$x^2 \cong 1,9999998$

Você deve estar pensando que se continuássemos esse processo com máquinas calculadoras mais potentes, talvez até com computadores, poderíamos chegar a uma conclusão: ou o processo terá um limite e x seria um número racional finito ou então o processo não teria um limite e x seria um número racional periódico. Acontece, entretanto, que as mais potentes máquinas de que dispomos atualmente não poderia chegar a nenhuma dessas duas conclusões. E nem precisariam. Isso porque, os próprios pitagóricos, muito tempo antes de Jesus Cristo nascer, já tinham a certeza de que nenhuma dessas duas conclusões era correta. O número x não poderia ser nem um racional finito e nem um racional infinito. Isto é, não poderia ser um número racional.

E não precisaram utilizar nenhuma máquina, nenhum outro instrumento de cálculo para chegar a essa conclusão. Utilizaram somente o poder do pensamento e da imaginação. O método que utilizaram pa ra chegar a essa conclusão foi o método dedutivo e dentro deste método um tipo especial de demonstração chamada redução ao absurdo ou método indireto de demonstração.

O texto e as atividades que se seguem serão um desafio para você. O objetivo delas é fazer com que você compreenda como os nossos antepassados demonstraram que x (a hipotenusa de triângulo ABC) não pode ser um número racional. Grande parte dos exemplos em que nos baseamos para a elaboração dessas atividades foram extraídos do Livro Geometria Moderna, parte I de Edwin E. Moise e Floyd L. Downs.

TEXTO Nº 6: DEMONSTRAÇÕES DIRETAS E INDIRETAS

Ao estudar anteriormente alguns tópicos de geometria você já teve oportunidade de fazer algumas demonstrações diretas que lhe deram base para compreender como funciona um sistema didutivo. Uma dedução sempre se baseia em cadeias de silogismos. Estes, por sua vez, são compostos de duas premissas (também chamadas de hipóteses ou fatos) admitidas como verdadeiras e da conclusão baseada nestas premissas ou fatos. Exemplo:

Fato 1: Todos os homens são mortais

Fato 2: Sócrates é homem

Conclusão: Sócrates é mortal

COmo nos diz Bento de Jesus Caraça, a Matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos e de afirmações feitas sobre esses conceitos. Em momento algum dessa construção se pode tolerar contradições. Não se pode admitir que no nosso raciocínio existam ao mesmo tempo duas afirmações que se contradizem. Em toda demonstração deve-se, portanto, evitar as contradições. Isto é, deve-se obedecer ao Princípio da Compatibilidade Lógica que nas ciências em geral recebe o nome de princípio do acordo da razão consigo própria.

Nas demonstrações indiretas parte-se de uma hipótese que nega o fato que se quer provar (tese). Em seguida coloca-se um fato conhecido e já aceito que contradiz a hipótese justamente para provar a verdade da Tese inicial que havia sido negada. Exemplo:

Tese: Não está chovendo lá fora.

Hipótese: Está chovendo lá fora

Conclusão resultante da hipótese: Se estivesse chovendo, essas pessoas entrando pela porta estariam molhadas

Fato conhecido que contradiz a conclusão anterior:

Mas as pessoas não estão molhadas.

Conclusão: Não está chovendo lá fora.

ATIVIDADE Nº 9: Assinale com um X quais dos seguintes argumentos são exemplos de raciocínio indireto.

1) ( ) Todos os meninos gostam de jogar futebol. Meu irmão tem 11 anos. Logo, meu irmão gosta de jogar futebol.

2) ( ) Já deve ter passado das 16 horas. Se ainda não fosse 16 horas, eu estaria ouvindo o barulho da construção. Eu não ouço nenhum barulho.

3) ( ) A temperatura lá fora deve estar abaixo de zero. Se não estivesse abaixo de zero não haveria gelo nas vidraças. Mas há gelo, logo a temperatura lá fora está abaixo de zero.

4) ( ) Somente pessoas negligentes cometem erros. Eu nunca sou negligente. Portanto, eu nunca cometo erros.

5) ( ) Deve estar na hora do almoço. Se não estivesse, eu não estaria com fome. Portanto, deve estar na hora do almoço.

6) ( ) O número p deve ser par. Se ele não fosse par, então, ele não seria divisível por 2. Entretanto, o número p é divisível por 2. Logo, p é par

ATIVIDADE Nº 10: Para cada raciocínio indireto assinalado na atividade anterior identifique:

a) a tese (a afirmação a ser demonstrada)
b) a hipótese feita (a negação da tese)
c) a conclusão resultante da hipótese feita
d) o fato conhecido que contradiz a hipótese feita

ATIVIDADE Nº 11:

1. Escreva o conjunto dos números primos até 20.
2. Decomponha em fatores primos os seguinte números: 36, 50, 64, 82, 100
3. Os números p e q foram decompostos em fatores primos e obteve-se as seguintes fatorações:

$p = 2.3^2.5$

$q = 5^2.7$

a) Coloque V ou F nas afirmaçoes abaixo:

( ) O número p é divisível por 2
( ) O número p é divisível por 3
( ) 5 é divisor do número p
( ) O número p é par
( ) 10 é divisor do número p
( ) 7 é divisor do número p
( ) 2 é divisor do número q
( ) 5 é divisor do número q
( ) 25 é divisor do número q
( ) o número q é divisível por 35
( ) o número q é par

b) Determine o conjunto de todos os divisores de p.
c) Determine o conjunto de todos os divisores de q.
d) Diga qual é o número p e qual é o número q

ATIVIDADE Nº 12

Complete as sentenças abaixo com as palavras par ou ímpar :

1. O produto de 2 números pares é um número ________________
2. O produto de 2 números ímpares é um número ________________
3. O produto de um número par por um ímpar á um número ____________
4. O quadrado de um número par é um número ________________
5. O quadrado de um número ímpar é um número ________________
6. Se o quadrado de um número p é um número par, então, o número p é ________________
7. Se o quadrado de um número a é um número ímpar, então, o número a é ________________

ATIVIDADE Nº 13

Dois números p e q foram decompostos em fatores e obteve-se as seguintes fatorações:

$p = 2.r$ onde r não é primo

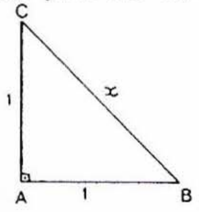
$q = 2.3.s$ onde s não é primo

Diga se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

1. O número p é um número par
2. O número q é um número ímpar
3. Não existe nenhum divisor comum entre p e q
4. A fração $\frac{p}{q}$ está na forma irredutível

TEXTO Nº 7 : A demonstração sutil

Você agora está em condições de compreender porque a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e 1 cm não pode ser um número racional.



Demonstração

TESE: x não é um número racional

HIPÓTESE| Vamos supor que x é um número racional

Fato 1.: Existe, necessariamente, uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ que é igual ao número x (consequência da hipótese)

Fato 2. : $x^2 = 2$ (Aplicando o teorema de Pitágoras no Δ ABC)

Fato 3. : $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ (Fato 1 e Fato 2)

Fato 4. : $p^2 = 2q^2$ (Multiplicando ambos os membros da equação do fato 3 por q^2)

Fato 5. : p^2 é um número par pois na decomposição em fatores de p^2 aparece o fator 2 (veja fato 4)

Fato 6. : p é um número par pois o seu quadrado é par (veja fato 5)

Fato 7. : q é um número ímpar pois se p é par (fato 6) e a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível (fato 1), então, q não pode ser par.

Fato 8. : Como p é par (fato6), então, o fator 2 deve aparecer em sua decomposição em fatores. Se chamarmos de r o produto dos demais fatores primos que aparecem na decomposição de p, então, $p = 2r$.

Fato 9. : Como, pelo fato 4, $p^2 = 2q^2$ e, pelo fato 8, $p = 2r$, então, se substituirmos na primeira dessas equações p por 2r vem:
$(2r)^2 = 2q^2$ $4r^2 = 2q^2$ $q^2 = 2r^2$

Fato 10 : q^2 é um número par pois na sua decomposição em fatores aparece o fator 2 (veja fato 9)

Fato 11 : q é par pois, pelo fato 10, o seu quadrado é par.

Fato 12: os fatos 7 e 11 são contraditórios pois o primeiro afirma que q é um número ímpar e o segundo afirma que q é um número par.

A contradição existe porque um mesmo número não pode ser, ao mesmo tempo, par e ímpar.

Conclusão: O número x não pode ser racional pois essa hipótese nos levou a essa contradição.

TEXTO Nº 8: A Queda de uma Crença e a Reação Silenciosa

A demonstração anterior não tem apenas importância matemática. Ela tem consequências no plano filosófico pois significou um desmentido brutal à crença pitagórica da ordenação matemática do cosmos. A natureza das coisas quiz que fosse precisamente através da mais bela das suas conquistas - o teorema de Pitágoras - que esse desmentido houvesse de ser pronunciado. Como você viu, não existe um número que represente a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários. Que valor teria, então, a afirmação de que os "princípios dos números são os elementos de todos os seres", que "o céu inteiro é harmonia e número" ? Que valor tem ela, se os números não podem dar conta, sequer, desta coisa simples e elementar que é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo ?

A demonstração anterior tem também um significado geométrico que é o seguinte: não existe número racional algum que possa expressar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários quando utilizamos comounidade de medida um dos catetos desse triângulo. Em outras palavras, por mais que dividíssemos em partes iguais um dos catetos do Δ ABC, jamais poderíamos cobrir exatamente a hipotenusa deste triângulo, mesmo que o processo de subdivisão fosse infinito. Em matemática, dizemos que dois segmentos que se comportem desta maneira, isto é, quando não existe uma fração que aplicado a um deles resulta o outro, se chamam SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS.

No dia em que foi descoberto o fenômeno da incomensurabilidade de segmentos, a escola pitagórica estava ferida de morte.

Como conciliar a teoria com o fenômeno da incomensurabilidade imposto por considerações de compatibilidade lógica ?

Como reagiram os pitagóricos ?

"Certa noite, 500 anos antes do nascimento de Cristo , um viajante chegava a uma estalagem grega, para ali pernoitar. Durante a noite foi acometido por violento mal. O viajante era pobre e miserável, mas seu hospedeiro, compadecido, tratou-o com desvelo e fez o possível para ajudá-lo a restabelecer-se. Em vão: o estado do doente piorava, e ao perceber ele que iria morrer sem possibilidades de indenizar o estalajadeiro pelos seus esforços, pediu uma lousa, na qual traçou tão somente, com mão trêmula, uma figura geométrica - um pentágono estrelado. Em seguida mandou que o hospedeiro afixasse a lousa à porta de seu estabelecimento; mais dia menos dia haveria de ser recompensado. Logo depois o homem morria. Escoou-se longo espaço de tempo. Certo dia um viajante que passava descobriu o sinal na estalagem, entrou, indagou do hospedeiro a origem do desenho e recompensou--o, então, poodigamente pela sua caridade. Assim conta Jâmblico, filósofo, matemático e historiador romano, acrescentando que tanto o viajante como o que dera a recompensa haviam pertencido à escola do grande sábio Pitágoras... Os pitagóricos, geralmente provenientes da aristocracia, formavamuma sociedade esotérica, cujo emblema era o pentágono estrelado. As pessoas que participavam dessa sociedade fechada comprometiam-se a severa obediência e proferiam o sagrado juramento de jamais revelar um segredo.

Um dos mais precisos indícios de que isso era verdade é a seguinte passagem transcrita da obra de Plutarco, escritor grego nascido por volta do ano 50 da nossa era:

"...diz-se que os pitagóricos não queriam pôr as suas obras por escrito, nem as suas intenções, mas imprimiam a ciência na memória daqueles que eles reconheciam dignos disso. E como algumas vezes comunicaram alguns dos seus mais íntimos segredos e das mais escondidas sutilezas da geometria a algum personagem que não o merecia, eles diziam que os deuses por presságios evidentes, ameaçavam vingar este sacrilégio e esta impiedade, com alguma grande e pública calamidade".

Por estranha coincidência, o caráter fechado e aristocrático da escola pitagórica deu margem a uma revolta popular na cidade de Crotona contra a escola e originou a sua destruição; nela parece ter perdido a vida o próprio Pitágoras.

Dito isto, não seria de se estranhar que a primeira reação dos pitagóricos diante do fenômeno da incomensurabilidade fosse a de esconder o caso. Onde só havia a ganhar com o debate público, os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo e o silêncio.

(Esse texto é uma adaptação para fins didáticos de trechos da obra citada de Bento de Jesus Caraça e do livro A Magia dos Números de Paul Karlson)

TEXTO Nº 9: UM NOVO CAMINHO NA ENCRUZILHADA

A demonstração da existência de segmentos incomensuráveis atestada pelo fato da hipotenusa do nosso triângulo ABC não ser um número racional nos levou a uma encruzilhada. Quais os caminhos existentes ?

O primerio caminho seria contentarmo-nos em abandonar a possibilidade de exprimir a medida de um segmento através de um número.

O segundo caminho seria duvidar da validade do Teorema de Pitágoras.

Esses dois primeiros caminhos mostram-se, entretanto , pouco viáveis pois, em Matemática, só abandonamos fatos já estabelecidos quando se reconhece um vício de raciocínio. Como o primeiro caminho deu provas da sua eficácia quando construímos os números racionais e como o teorema de Pitágoras é uma verdade geométrica que permanece válida mesmo quando os segmentos são incomensuráveis seria um tanto quanto temeroso renunciar a estas conquistas.

O terceiro caminho seria,então, conservar essas duas conquistas mas abandonar a exigência de compatibilidade lógica. Isso entretanto, nos obrigaria a aceitar a contradição pondo por terra o ideal da racionalidade da própria matemática.

A saída histórica encontrada pelos matemáticos foi a de conservar tudo: a possibilidade de sempre exprimir numericamente a medida de um segmento, o Teorema de Pitágoras e o princípio de compatibilidade lógica e CRIAR NOVOS NÚMEROS mais gerais que os racionais.

Esses novos números são chamados NÚMEROS IRRACIONAIS . Desta forma, dizemos que a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC, de catetos unitários é o número irracional 1,4142135... O matemático, entretanto, prefere usar uma <u>forma abrevida</u> de escrever um tal número irracional:

$1{,}4142135\ldots = \sqrt[2]{2^1}$ ou simplesmente $\sqrt{2}$ (lê-se raiz quadrada de dois)

o símbolo $\sqrt{\ }$ lê-se "radical"

ÍNDICE DO RADICAL ← $\sqrt[2]{2^1}$ → EXPOENTE DO RADICANDO

RADICAL ← → RADICANDO

Dizer, portanto, que um segmento de reta mede $\sqrt{2}$ cm é o mesmo que dizer que a medida desse segmento é um número que elevado ao quadrado produz exatamente 2. Simbolicamente, esse fato é expresso da seguinte maneira:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Afirma-nos Paul Karlson que "jamais o irracional teve na Grécia o valor de um número, e os gregos não possuíam símbolo para esta espécie de grandeza. Junto ao comensurável (aquilo que pode ser medido) estava o incomensurável (o que não pode ser medido), bem adequado para servir de "símbolo da vida" ou "do que não tem imagem", para exprimir o mistério eterno. O fato de haver atacado também este problema é prova de extraordinária intrepidez intelectual de Pitágoras. Haver-se recusado ele, depois, a acolher o irracional no reino dos números - seria de admirar a quem conhece sua filosofia" ?

Como você deve ter notado, a operação de potenciação está intimamente relacionada com a criação dos números racionais e deverá ser necessária à compreensão das propriedade e das operações que se podem efetuar com esses novos números. As duas atividades que se seguem, sobre uma propriedade importante envolvendo expoentes, torna-se um desvio necessário em nosso caminho.

ATIVIDADE Nº 14: Utilizando, se necessário, uma calculadora, para cada potência de potência abaixo faça o seguinte: 1) calcule a potência indicada dentro do parênteses e, em seguida, eleve o resultado encontrado ao novo expoente, fora do parênteses; 2) Expresse o resultado anterior numa nova potência cuja base seja igual à base da potenciação indicada dentro de cada parênteses.

a) $\left(2^2\right)^2 =$

b) $\left(3^2\right)^2 =$

c) $\left(2^2\right)^3 =$

d) $\left(2^3\right)^2 =$

e) $\left(10^3\right)^2 =$

f) $\left(10^3\right)^2 =$

h) $\left(10^4\right)^2 =$

i) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 =$

j) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 =$

l) $\left(-2^3\right)^4 =$

m) $\left(3^4\right)^3 =$

n) $\left[\left(-2\right)^3\right]^5 =$

o) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 =$

p) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 =$

ATIVIDADE Nº 15 : 1) Com base na atividade anterior enuncie uma regra prática para transformar uma potência de potência de uma certa base numa única potência desta mesma base.

2) Aplicando a regra enunciada transforme cada potência abaixo numa única potência da base dada:

a) $\left(5^2\right)^5 =$

b) $\left(3^7\right)^2 =$

c) $\left(5^{10}\right)^{10} =$

d) $\left(10^3\right)^{10} =$

e) $\left[(-5)^7\right]^4 =$

f) $\left[(-7)^7\right]^3 =$

g) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^7\right]^8 =$

h) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]^9 =$

3) Determine o valor de x em cada potência de potência seguinte:

a) $\left(3^2\right)^x = 3^{16}$

b) $\left(5^x\right)^7 = 5^{14}$

c) $\left(10^x\right)^{10} = 10^{100}$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9\right]^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{243}$

e) $\left(2^x\right)^1 = 2$

f) $\left(2^x\right)^2 = 2$

TEXTO Nº 10: Formas de Representação de um número irracional

Você, certamente, deve ter esbarrado em uma dificuldade ao tentar fazer o ítem f da atividade anterior. A razão dessa dificuldade deve-se simplesmente ao hábito de que, numa potenciação, o expoente deva, necessariamente, ser um número natural. Entretanto, isso é apenas um hábito, não uma necessidade. Na igualdade $(2^x)^2 = 2$ não existe para x número natural algum que possa torná-la verdadeira. Poderíamos, entretanto, substituir o valor de x pelo número racional $\frac{1}{2}$. Isto porque $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, tornando, dessa forma, a igualdade verdadeira,

Logo, $\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 = 2$

Qual a importância deste fato ? É que tendo consciência dele conseguimos visualizar uma nova forma de representar o número irracional $\sqrt{2}$. Isto, porque, $2^{1/2}$ é um outro símbolo que elevado ao quadrado produz o número 2.

Isso nos abre uma nova perspectiva: a de representar números irracionais através de potências de expoentes fracionários e a de buscar compreender as propriedades e operações com os novos números tomando como base as propiedades e operações já estabelecidas para os números racionais. A igualdade seguinte nos possibilita visualizar as várias formas de se representar um número que elevado ao quadrado produz 2.

$$2 = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{5}{10}} = \ldots = 2^{0,5} = 1,414235\ldots$$

ATIVIDADE Nº 16: Utilizando o teorema de Pitágoras determine o que se pede em cada ítem seguinte. Sempre que a resposta for um número irracional, expresse-o através de um radical, de uma potência de expoente fracionário e através da representação decimal infinita (utilize uma calculadora).

a) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e 2 cm ?

b) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo lado mede 2 cm ?

c) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e 3 cm ?

d) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos dados perpendiculares medem 2 cm e 3 cm ?

e) Quanto mede a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm ?

ATIVIDADE Nº 17:

1) Escreva na forma de radical as seguintes potências de expoentes racionais:

a) $3^{\frac{1}{2}} =$	d) $1^{\frac{1}{2}} =$	g) $8^{\frac{3}{2}} =$	j) $\left(\frac{3}{5}\right)^{5,5} =$
b) $6^{\frac{1}{2}} =$	e) $0^{0,5} =$	h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$	l) $n^{1,5} =$
c) $5^{0,5} =$	f) $10^{\frac{5}{2}} =$	i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{2}}$	m) $k^{4,5} =$

2) Escreva na forma de potência de <u>expoente</u> <u>racional</u> (fracionário irredutível e decimal os seguintes radicais:

a) $\sqrt{7} =$ d) $\sqrt{3^5} =$ g) $\sqrt{\frac{2}{3}} =$ j) $\sqrt{z} =$

b) $\sqrt{9} =$ e) $\sqrt{2^7} =$ h) $\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^4} =$ l) $\sqrt{p^3} =$

c) $\sqrt{11} =$ f) $\sqrt{5^2} =$ i) $\sqrt{2,5^3} =$ m) $\sqrt{a^2} =$

ATIVIDADE Nº18:

1) Diga entre quais números naturais consecutivos está compreendido cada um dos números irracionais seguintes:

a) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{2,5}$ g) $\sqrt{785}$ j) $\sqrt{623}$

b) $23^{1/2}$ e) $\sqrt{1000}$ h) $\sqrt{450}$ l) $\sqrt{1650}$

c) $\sqrt{87}$ f) $\sqrt{127}$ i) $(0,9)^{0,5}$ m) $\sqrt{833}$

2) Calcule o valor aproximado de cada um dos números irracionais seguintes até a casa dos décimos. Não utilize a calculadora.

a) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{0,5}$

b) $5^{\frac{1}{2}}$ d) $7^{\frac{1}{2}}$ f) $\sqrt{\frac{13}{10}}$

ATIVIDADE Nº 19:

1) Empregando a propriedade da potência de uma potência determine o valor de:

a) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 =$ d) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 =$ g) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^2 =$ e) $\left(\sqrt{7}\right)^2 =$ h) $\left(\sqrt{0,3}\right)^2 =$

c) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 =$ f) $\left(\sqrt{8}\right)^2 =$ i) $\left(\sqrt{b}\right)^2 =$

2) Coloque V ou F nas afirmações seguintes:

a) ( ) Toda vez que uma base de expoente $\frac{1}{2}$ for elevada ao quadrado obtém-se como potência a própria base.

b) ( ) Toda vez que uma base de expoente diferente de $\frac{1}{2}$ for elevada ao quadrado obtém-se como potência a própria base.

c) ( ) Toda vez que uma base de expoente $\frac{1}{2}$ for elevada a um expoente diferente de 2 obtém-se como potência a própria base.

d) ( ) Toda vez que se eleva ao quadrado a raiz quadrada de um número obtém-se como potência o próprio radicando.

ATIVIDADE Nº 20: Utilizando o teorema de Pitágoras responda:

1) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e $\sqrt{2}$ cm ?

2) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e $\sqrt{3}$ cm ?

3) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo lado mede $\sqrt{2}$ cm ?

4) Quanto mede a diagonal de um cubo cuja aresta mede 1 cm ?

5) Quanto mede a diagonal de um paralelepípedo cujo comprimento é 5cm, cuja largura é $\sqrt{2}$ cm e cuja altura é 2 cm ?

6) Quanto mede a altura de uma pirâmide reta de base quadrada sabendo qua a aresta da base mede 2 cm e que uma aresta não pertencente à base mede 5 cm ?

TEXTO Nº 11: O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E A OPERAÇÃO RADICIAÇÃO

Ao executar as atividades anteriores ficou claro que determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo equivale a encontrar a raiz quadrada de um número positivo. Para isso você procurava um número positivo (pois representa a medida de um lado) que elevado ao quadrado produzisse o radicando.

É por essa razão que os matemáticos dizem que a radiciação pode ser encarada como uma das operações inversas da potenciação. A radiciação desfaz aquilo que a potenciação faz.

Mas nem toda forma de se relacionar dois números para produzir outros números em matemática é considerada uma operação. A condição necessária e suficiente para que uma relação entre dois números de determinada espécie seja uma operação é que a combinação de dois números quaisquer sempre produza apenas <u>um único número</u> dessa mesma espécie, isto é, , <u>esse número deve existir e ser único</u>.

A adição de números naturais é uma operação pois a soma de dois números naturais sempre produz um número natural e esse número é único. Por outro lado, a subtração <u>não é</u> uma operação no conjunto dos números naturais pois a diferença entre dois números naturais nem sempre produz um número natural ($3 - 5 = -2$ e -2 não é um número natural)

Seria a radiciação uma operação dentro do conjunto dos números racionais ? De acordo com a discussão feita acima a radiciação não poderá ser uma operação dentro do conjunto dos números racionais pois a <u>raiz quadrada de um número racional nem sempre é um número racional</u>.

Note que a raiz quadrada de certos números naturais pode ser um número natural. Exemplos: $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$, etc... Números naturais cujas raízes são naturais são chamados de <u>QUADRADOS PERFEITOS</u>.

Pode ainda acontecer que a raiz quadrada de certos números racionais produza números racionais.

<u>Exemplo</u>: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ pois $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

<u>O caso mais comum</u>, entretanto, é que raízes quadradas de números racionais produzam números irracionais. Exemplo: $\sqrt{7} = 2,645...$.
Esse fato é o que impossibilita a radiciação de ser uma operação em Q.

Os matemáticos costumam chamar de <u>número real</u> qualquer número que seja racional ou irracional. O conjunto dos números reais indica-se pela letra R. Um outro modo de definir um número real é o seguinte: <u>um número é real se é só se o seu quadrado for um número positivo ou zero</u>.

Assim:

2 é um número real pois: $2^2 = 4$ (positivo)

$-2 \in R$ pois $(-2)^2 = 4$ (positivo)

$\frac{1}{2} \in R$ pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (positivo)

$-\frac{1}{2} \in R$ pois $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (positivo)

$\sqrt{2} \in R$ pois $(\sqrt{2})^2 = 2$ (positivo)

$\sqrt{-2}$ não é um número real pois $(\sqrt{-2})^2 = -2$ (negativo)

Poderíamos ainda colocar a seguinte questão: seria a radiciação uma operação no conjunto dos números reais ? A resposta é negativa pois:

só podemos extrair raízes quadradas de números reais que sejam positivos. Isso porque, se o radicando for um número negativo não podemos encontrar número real algum que elevado ao quadrado produza um número negativo.

Exemplo: $\sqrt{-4}$ não é um número real pois não existe número real algum que elevado ao quadrado produza -4.

Poderíamos, entretanto, considerar a radiciação como uma operação no conjunto dos números reais positivos (R+) desde que fizéssemos a seguinte restrição:

a raiz quadrada de um número real positivo tem sempre que ser um número positivo. Isto porque poderíamos pensar que a raiz quadrada de 4 pudesse ser 2 ou -2, uma vez que tanto 2 quanto -2, elevados ao quadrado, produzem 4. Como, entretanto, o resultado de uma operação deve sempre ser um único número, convenciona-se ser esse número sempre positivo, uma vez que, geometricamente, o radicando 4 pode sempre representar a área de um quadrado cujo lado mede 2 (não teria sentido aqui uma resposta negativa). Logo, $\sqrt{4} = 2$. Feitos esses esclarecimentos você está em condições de compreender a seguinte definição de raiz quadrada: chamamos de raiz quadrada de um número a, real e positivo, ao número real e positivo b que elevado ao quadrado produz o número a, isto é, $\sqrt{a} = b \Longrightarrow b^2 = a$.

ATIVIDADE Nº 21

Ao tentar extrair as raízes quadradas dos números abaixo, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras inexistentes.

Quando elas forem racionais, escreva o seu valor, quando forem irracionais calcule-as até a 1ª casa decimal e quando forem inexistentes, escreva ($\notin$ R), isto é, não pertence ao conjunto dos números reais.

1) $\sqrt{1} =$	7) $\sqrt{16} =$	13) $\sqrt{32} =$
2) $\sqrt{-1} =$	8) $\sqrt{25} =$	14) $\sqrt{36} =$
3) $\sqrt{0} =$	9) $\sqrt{100} =$	15) $\sqrt{-17} =$
4) $\sqrt{4} =$	10) $\sqrt{125} =$	16) $\sqrt{\frac{1}{4}} =$
5) $\sqrt{9} =$	11) $\sqrt{\frac{4}{81}} =$	17) $\sqrt{-\frac{1}{4}} =$
6) $\sqrt{-4} =$	12) $\sqrt{\frac{49}{64}} =$	18) $\sqrt{22} =$

19) $\sqrt{38} =$ 20) $\sqrt{0{,}01} =$ 21) $\sqrt{144} =$

22) $\sqrt{1{,}69} =$ 23) $\sqrt{0{,}04} =$ 24) $\sqrt{6{,}4} =$

25) $\sqrt{1{,}21} =$ 26) $\sqrt{6{,}4} =$ 27) $\sqrt{0{,}36} =$

28) $\sqrt{0{,}1} =$ 29) $\sqrt{9{,}6} =$ 30) $(-49)^{\frac{1}{2}} =$

TEXTO Nº 12: A NECESSIDADE DE UMA AMPLIAÇÃO

Se calcular a raiz quadrada de um numero positivo a significa encontrar um numero positivo b que elevado ao quadrado produza o número a, então, a operação de radiciação pode ser ampliada, generalizada, com o objetivo de resolver problemas parecidos com o anterior. A atividade que se segue tem por objetivo ilustrar a necessidade dessa ampliação.

ATIVIDADE Nº 22: Utilizando cubinhos iguais feitos de madeira como unidade de volume responda:

1) É possível construir um cubo utilizando exatamente 8 desses cubinhos ? Em caso afirmativo diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.

2) É possível construir um cubo utilizando exatamente 27 desses cubinhos ? Em caso afirmativo diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.

3) Quantos cubinhos são necessários para se construir um cubo cuja aresta meça 4 unidades ?

4) Quanto mede a aresta de um cubo cuja construção foi feita com 1000 cubinhos ?

5) É possível construir um cubo utilizando exatamente 2 desses cubinhos ? Em caso afirmativo, diga quanto mede a aresta desse cubo.

TEXTO Nº 13: A Duplicação do cubo: um problema insolúvel ?

Possivelmente, ao tentar resolver o ítem 5 da atividade anterior você tenha chegado à conclusão de que não é possível construir um cubo cujo volume seja exatamente 2 unidades. Felizmente, você não é e nem foi o único a pensar dessa forma. Um problema semelhante a esse permanecu insolúvel por muitos séculos na história da humanidade. Qual era o problema ?

"No templo de Apolo, na ilha grega de Delos, existia um altar com a forma de um cubo. Quando a peste ameaçou Atenas os habitantes da cidade dirigiram-se ao oráculo de Delos, em busca de auxílio. E a divindade falou: erguei-me um altar igual ao dobro do já existente, também de forma cúbica, e o mal, poderá ser debelado". (Paul Karlson, A Magia dos Números).

Porque um tal problema permaneceu insolúvel por tanto tempo ? Pelo fato de, talvez como você, terem os gregos tentado associar ao problema uma resposta concreta, isto é, a visualização ou a possibilidade de construção de um tal cubo, quer utilizando um número inteiro de unidades de volume, quer recorrendo à tentativa de subdividir a unidade de volume em partes iguais.

Entretanto, com a utilização da nossa moderna linguagem algébrica esse problema pode ser facilmente equacionado e interpretado.

Como queremos construir um cubo com 2 cubinhos, o volume desse cubo deverá ser 2 unidades de volume. Chamemos de x a aresta desse cubo. Logo, $x^3 = 2$.

Em termos aritméticos, isso significa encontrar um número que elevado ao cubo produza 2. Esse número x deve estar compreendido entre 1 e 2 pois $1^3 = 1$ e $2^3 = 8$. Se colocarmos $x = 1,5$ obteremos que $1,5^3 = 3,375$ (valor grande demais).

Para $x = 1,2$ teremos $x^3 = 1,728$

Para $x = 1,3$ teremos $x^3 = 2,197$

Logo, x deverá estar compreendido entre 1,2 e 1,3.

Note que o processo acima é semelhante aquele empregado na busca da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários. É, pois, legítimo que se levante a seguinte suspeita: terá essa busca um limite ou x deverá também ser um número irracional ?

Caso x seja um número irracional deverá ele ser substituído por uma potência de expoente fracionário. Logo, a seguinte pergunta pode ser posta: qual é o número de expoente fracionário que elevado ao cubo produz 2 ? A resposta é simples:

$$x = 2^{\frac{1}{3}} \quad \text{pois} \quad \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^1 = 2$$

Esse número pode também ser escrito sob a forma de radical assim: $\sqrt[3]{2}$ (lê-se: raiz cúbica de 2).

TEXTO Nº 14: A AMPLIAÇÃO DA OPERAÇÃO DE RADICIAÇÃO

Como você observou, a solução do problema de Delos nos conduziu a um número irracional com índice diferente de 2, isto é, a uma raiz cúbica e não quadrada. A imaginação dos matemáticos e a analogia feita com os problemas anteriores permitiu que se ampliasse a operação de radiciação através da consideração de índices superiores a 3 mesmo que nada de concreto se pudesse associar a esses símbolos. É justo falarmos em raízes quartas, raízes quintas,..., raízes n-ésimas (índice n qualquer).

1º exemplo: Calcular a $\sqrt[4]{16}$ é o mesmo que responder: qual é o número que elevado a quarta potência produz 16 ? Logo, $\sqrt[4]{16}=2$ pois $2^4 = 16$

2º exemplo: Calcular a $\sqrt[5]{-32}$ é o mesmo que responder: qual é o número que elevado à quinta potência produz -32 ? Logo. $\sqrt[5]{-32}= -2$ pois $(-2)^5 = -32$.

3º exemplo: Calcular a $\sqrt[3]{5}$ é o mesmo que responder: qual é o número que elevado ao cubo produz 5 ?
Nesse caso, a raiz não é um número natural e sim irracional, isto é, $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ pois $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 5$

ATIVIDADE Nº 23

Transforme os radicais abaixo em potências de expoente fracionário e as potências de expoentes fracionários em radicais:

a) $2^{1/3} =$
b) $3^{3/7} =$
c) $2^{1/10} =$
d) $5^{5/6} =$
e) $3^{2/3} =$

f) $\sqrt[3]{11} =$
g) $\sqrt[3]{2^2} =$
h) $\sqrt[4]{3^5} =$
i) $\sqrt[4]{2^3} =$
j) $\sqrt[5]{3^4} =$

f) $\sqrt[4]{a^3} =$
g) $\sqrt{k^3} =$
h) $\sqrt[n]{a^p} =$
i) $x^{m/n} =$
j) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} =$

ATIVIDADE Nº 24:

Ao tentar extrair as raízes abaixo, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras inexistentes. Quando elas forem racionais escreva o seu valor. Se forem irracionais, diga entre quais números inteiros consecutivos elas se encontram e se forem inexistentes, escreva ($\notin$ R), isto é, não pertence ao conjunto dos números reais.

1) $\sqrt[3]{0} =$

2) $\sqrt[4]{0} =$

3) $\sqrt[5]{0} =$

4) $\sqrt[100]{0} =$

5) $\sqrt[n]{0} =$

6) $\sqrt[3]{1} =$

8) $\sqrt[4]{1} =$

10) $\sqrt[5]{1} =$

11) $\sqrt[5]{-1} =$

12) $\sqrt[n]{1} =$

13) $\sqrt[37]{-1} =$

14) $\sqrt[50]{-1} =$

15) $\sqrt[3]{64} =$

16) $\sqrt[3]{0} =$

17) $\sqrt[3]{-64} =$

18) $\sqrt[4]{81} =$

20) $\sqrt[3]{1000} =$

22) $\sqrt[3]{100} =$

23) $\sqrt[4]{-16} =$

24) $\sqrt[3]{-8} =$

25) $\sqrt[5]{32} =$

26) $\sqrt[5]{-32} =$

27) $\sqrt[5]{30} =$

28) $\sqrt[3]{50} =$

29) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$

30) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$

31) $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}} =$

32) $\sqrt[3]{0{,}001} =$

33) $\sqrt[3]{-0{,}008} =$

34) $\sqrt[3]{2{,}7} =$

25ª ATIVIDADE:

a) Escreva o conjunto A dos quadrados perfeitos até 125.

b) Cite 3 números irracionais que sejam maiores que 5 e menores que 6.

c) Cite 3 números irracionais que sejam maioresque 1 e menores que 2

d) Cite 3 números irracionais que sejam maiores que 0 e menores que 1.

e) Cite 3 números irracionais que sejam maiores que 80 e menores que 81.

f) Quantos números irracionais existem entre dois números naturais concutivos ?

g) Cite pelo menos 5 números irracionais que possam ser expressos na forma de radical de índice 2 e que estejam compreendidos entre 1 e 2.

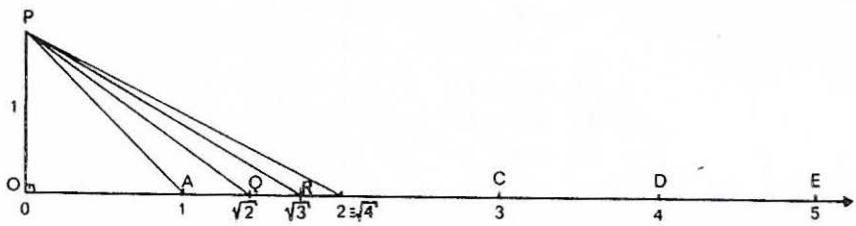
h) Çite pelo menos 5 números irracionais que possam ser expressos na forma de radical de índice 3 e que estejam compreendidos entre 1 e 2

i) Cite pelo menos 5 números irracionais que possam ser expressos na forma de radical de índice 4 e que estejam compreendidos entre 1 e 2.

TEXTO Nº 15: LOCALIZAÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA RETA NUMERADA

Ao executar a atividade anterior você percebeu que entre dois números naturais consecutivos sempre existem infinitos números irracionais de índices 2, 3, 4, ... Seria possível localizar exatamente numa reta numerada os pontos correspondentes a cada um desses números? Embora exista um único ponto da reta correspondente a cada número irracional que possamos imaginar nem sempre é possível determinar esses pontos unicamente com régua e compasso. Entretanto isso é possível para todos os radicais de índice 2. Como fazer isso ?

Seja, por exemplo, localizar na reta numerada o número irracional $\sqrt{2}$.



Vamos construir sobre o segmento $\overline{OA}$ desta reta um triângulo retângulo OAP cujos catetos meçam 1 unidade. Como sabemos, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa $\overline{AP}$ do triângulo OAP mede $\sqrt{2}$. Com o auxílio de um compasso transportamos o segmento $\overline{AP}$, a partir do ponto O, sobre a reta numerada determinando o ponto Q. É claro que, $m(\overline{AP}) = m(\overline{OQ}) = \sqrt{2}$.

Para determinarmos o ponto da reta numerada correspondente a $\sqrt{3}$ devemos utilizar agora o triângulo OQP.

Note que esse triângulo é retângulo em O e seus catetos medem 1 e $\sqrt{2}$ unidades. Logo, pelo Teorema de Pitágoras,

Temos:

$$(PQ)^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$(PQ)^2 = 1 + 2 = 3 \Longrightarrow PQ = \sqrt{3}$$

Basta, portanto, transportarmos o segmento $\overline{PQ}$, a partir de O sobre a reta numerada determinando o ponto R que corresponde ao número $\sqrt{3}$.

Procedendo de forma análoga, podemos determinar os pontos correspondentes aos demais números irracionais da forma $\sqrt{n}$.

ATIVIDADE Nº 26:

Utilizando a mesma reta numerada do texto anterior, localize nela os números: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{10}$.

ATIVIDADE Nº 27:

Considere a reta numerada da página seguinte. Utilizando apenas um compasso faça o seguinte:

1º) Transporte para essa nova reta os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{10}$ da reta numerada do texto nº 15.

2º) Determine o ponto correspondente a cada uma das operações indicadas abaixo:

a) $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{9}$ e $-\sqrt{10}$.

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
f) $2.\sqrt{2}$ g) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$
h) $2.\sqrt{3}$ i) $1 + \sqrt{2}$
j) $1 + \sqrt{3}$ l) $1 - \sqrt{2}$
m) $\sqrt{2} - 1$ n) $1 - \sqrt{3}$
o) $\sqrt{3} - 1$ p) $0 + \sqrt{2}$

ATIVIDADE Nº 28: Considerando a reta numerada da atividade anterior, coloque V ou F nas afirmações seguintes:

1) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ 2) ( ) $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{1}$
3) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$ 4) ( ) $\sqrt{2} - 1 = 1$
5) ( ) $0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 6) ( ) $1 + \sqrt{2} = \sqrt{3}$

TEXTO Nº 16: SOMA ALGÉBRICA DE RADICAIS

Na atividade nº 27 você teve a oportunidade de verificar geometricamente o significado da soma algébrica de radicais. Você pode assim constatar que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$. Este mesmo fato poderia ser constata


D' C' B' A' O A B C D
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

do operando-se com esses números irracionais sob a forma de decimal infinito. Com o auxílio de uma calculadora temos: $2 + 3 \neq 5$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$
$$1{,}4142\ldots + 1{,}7320 \neq 2{,}2360\ldots$$
$$3{,}1462\ldots \neq 2{,}2360$$

Não podemos colocar a soma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sob a forma de <u>um único</u> radical. No entanto, $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$ como você pode constatar geometricamente. Dessa forma podemos concluir que só é possível expressar a soma algébrica de dois ou mais radicais sob a forma de <u>um</u> <u>unico</u> radical se eles possuírem radicandos iguais e índices iguais:

<u>Exemplos</u>:

1º) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2.\sqrt{3}$ 2º) $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

3º) $1 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = -1 + 2\sqrt{2}$

4º) $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.\sqrt{2} = 0$

5º) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

6º) $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Como vimos nos exemplos anteriores, para somar algebricamente dois ou mais radicais de índices iguais e mesmo radicando (radicais semelhantes), basta somar algebricamente seus coeficientes e conservar o radical. Todas as observações feitas para os radicais de índice 2 permanecem válidas para radicais com índices maiores que 2.

<u>ATIVIDADE Nº 29</u> : Efetue as somas algébricas indicadas abaixo:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} =$ 2) $\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} =$

3) $5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ 4) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} =$

5) $1 + \sqrt{6} - 3 - 5\sqrt{6} =$ 6) $2 + \sqrt{3} - \sqrt{5} - (3 - \sqrt{3} + \sqrt{5}) =$

7) $-\sqrt{5} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{5} =$ 8) $-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + \sqrt{2} =$

9) $-2\sqrt{13} - 3\sqrt{13} - 8\sqrt{13} =$

10) $8\sqrt{7} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{7} =$

<u>ATIVIDADE Nº 30</u>: Utilizando uma calculadora, para cada par de expressões de cada ítem abaixo faça o seguinte:

1º Calcule o valor de cada uma,

2º Compare os resultados obtidos.

Observação: O objetivo desta atividade é o de testar a validade ou não da propriedade distributiva da potenciação em relação às diversas operações.

1) $(2.5)^2 =$

$2^2 . 5^5 =$

2) $(3.2)^3 =$

$3^3 . 2^3 =$

4) $(10.2)^4 =$

$10^4 . 2^4 =$

5) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$

6) $(4 . 9)^{\frac{1}{2}} =$

$4^{\frac{1}{2}} . 9^{\frac{1}{2}} =$

7) $(2 . 3)^{\frac{1}{2}} =$

$2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} =$

8) $(2 . 5)^{\frac{1}{3}} =$

$2^{\frac{1}{3}} . 5^{\frac{1}{3}} =$

9) $\left(\frac{4}{2}\right)^2 =$

$\frac{4^2}{2^2} =$

10) $\left(\frac{10}{5}\right)^3 =$

$\frac{10^3}{5^3} =$

11) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

$\frac{2^4}{3^4} =$

12) $\left(\frac{1}{5} : \frac{3}{8}\right)^2 =$

$\frac{1}{5}^2 : \frac{3}{8}^2 =$

13) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$\dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} =$

14) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$8^{\frac{1}{3}} : 27^{\frac{1}{3}} =$

15) $(2+3)^2 =$

$2^2 + 3^2 =$

16) $(6-3)^3 =$

$6^3 - 3^3 =$

17) $(5 + 2)^4 =$

$5^4 + 2^4 =$

18) $(1 - 2)^5 =$

$1^5 - 2^5 =$

ATIVIDADE Nº 31: Com base nos resultados obtidos na atividade anterior, responda:

1) É valida a propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação ? Por quê ?

2) É válida a propriedade distributiva da potenciação em relação à di-

visão ? Por quê ?

3) É válida a propriedade distributiva da potenciação em relação à adi ção ? Por quê ?

4) É válida a propriedade distributiva da potenciação em relação à sub tração ? Por quê ?

ATIVIDADE Nº 32:

1) Aplique as propriedades distributivas da potenciação em relação à multiplicação e divisão nas seguintes expressões:

a) $(2 \, . 5)^4 =$

b) $(3 \, . 8)^5 =$

c) $(2. \, 3. \, 8)^{\frac{1}{2}} =$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^3 =$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} =$

g) $(a \, . b)^2 =$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 =$

i) $(a_1 . \, a_2 . \, a_3 . . . a_n)^2 =$

j) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} =$

l) $(x_1 \, . \, x_2 \, . \, x_3 . . . x_n)^n =$

m) $(a. \, b. \, c)^{\frac{1}{2}} =$

2) Faça a volta das propriedades distributivas da potenciação em rela ção à multiplicação e divisão nas seguintes expressões:

a) $3^2 \, . \, 5^2 =$

b) $8^3 : 3^3 =$

c) $1^3 : 2^3 =$

d) $2^{\frac{1}{5}} \, . \, 3^{\frac{1}{5}} \, . \, 7^{\frac{1}{5}} =$

e) $a^8 \, . \, b^8 =$

f) $\dfrac{c^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}$

g) $a^2 \, . \, b^2 \, . \, c^2 \, . \, d^2 =$

h) $x^{\frac{1}{2}} \, . \, y^{\frac{1}{2}} \, . \, z^{\frac{1}{2}} =$

ATIVIDADE Nº 33:

Para efetuar as multiplicações e divisões de radicais se guintes proceda da seguinte maneira: escreva cada radical na forma de potência de expoente fracionário. Aplique a volta de uma das propriedades distributivas da potenciação à expressão obtida e coloque novamente o resultado sob a forma de radical.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} =$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} =$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$

f) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} =$

g) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$

h) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} =$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} =$

ATIVIDADE Nº 34:

1) Com base na atividade anterior escreva duas regras práticas:uma que nos permita determinar diretamente o produto de radicais com mesmo índice e outra que nos permita fazer o mesmo para a divisão de radicais com mesmo índice.

2) \plicando as regras práticas do ítem 1 resolva:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} =$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{18} =$

c) $\sqrt{24} : \sqrt{3} =$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} =$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{4}} =$

f) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{4} =$

g) $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{5} =$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}} =$

i) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} =$

j) $\sqrt{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{30} =$

l) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} =$

m) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,3} =$

TEXTO Nº 17: SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Você já sabe que existem várias maneiras de se representar um número irracional.

Exemplo: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{3}{9}} = 2^{\frac{4}{12}} = \ldots = 2^{0,333\ldots} =$
$= 1,25992\ldots$

ou $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[12]{2^4} = \ldots$

Analisando o exemplo acima vemos que existem infinitas maneiras de se representar um mesmo número irracional sob a forma de radical, sendo que $\sqrt[3]{2}$ é um radical que está na forma irradutível.

Dizemos que $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$ está na forma irradutível pois a base desta potência é um número primo e o seu expoente é uma fração própria e irredutível.

Simplificar um número irracional qualquer, sob a forma de radical, significa encontrar um outro número que lhe seja equivalente que possua o menor índice possível ou então, encontrar um produto de um único radical, com menor índice possível, por um número irracional.

Exemplo: Simplificar os radicais seguintes:

1º) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2$

2º) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^1 = 3$

3º) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2.\sqrt{2}$

4º) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2^{\frac{2}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{4}} =$

$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

ATIVIDADE Nº 35: Simplifique os seguintes radicais:

1) $\sqrt[8]{16} =$

2) $\sqrt[3]{125} =$

3) $\sqrt{12} =$

4) $\sqrt{18} =$

5) $\sqrt[3]{32} =$

6) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} =$

7) $\sqrt{a^2 \cdot b^2} =$

8) $\sqrt{8a^3} =$

9) $\sqrt{216} =$

10) $\sqrt{2k^2} =$

11) $\sqrt[3]{24} =$

12) $\sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2}} =$

ATIVIDADE Nº 36: Resolva os seguintes problemas:

1)

a) Considere um triângulo equilátero de lado l. Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da altura h desse triângulo em função do lado.

b) Com o auxílio da equação encontrada no ítem a, determine a medida da altura de um tirângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

c) Determine a área e o perímetro do triângulo do ítem b.

2) As diagonais de um losango medem 10 cm e 24 cm. Determine o perímetro do losango.

3) Calcule a altura de um triângulo isósceles sabendo que os lados congruentes medem 25 cm cada um e a base do triângulo tem 14 cm.

4) O lado de um losango mede 17 cm e uma das diagonais tem 30 cm. Determine a medida da outra diagonal.

5) Um trapézio retângulo de 15 cm de altura tem as bases medindo 10cm e 18 cm. Determine a medida do lado oblíquo às bases.

6) a) Considere um triângulo equilátero de lado l. Determine uma equação que lhe permita calcular a área desse triângulo em função do lado apenas.

b) Com o auxílio da equação encontrada no ítem a determine a área de um triângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

7) Chamamos de geratriz de um cone reto a qualquer segmento de reta que tem uma extremidade no vértice do cone e a outra num ponto qualquer da circunferência da base.

a) Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da geratriz de um cone reto em função da altura h do cone e do raio r da circunferência da base.

b) Com o auxílio da equação encontrada no ítem a determine a medida da geratriz de um cone reto cujo raio da base é 2 cm e cuja altura é 5 cm.

8) Determine uma equação que lhe permita calcular a aresta a não pertencente a base, de uma pirâmide reta de base quadrada em função da aresta l da base e da altura h da pirâmide.

TEXTO Nº 18: PENSAMENTO IRRACIONAL

Sempre sobra a pergunta: para que servem os números irracionais ? Por que estudá-los ? Jamais nos depararemos na nossa vida diária com uma situação onde precisaremos expressar os resultados das medições com números possuindo infinitas casas decimais. Bastarão algumas casas apenas. É claro que em problemas de caráter geométrico eles deverão aparecer, como vimos, para expressar as medidas de diagonais de quadrados, de alturas de pirâmides, o quociente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, etc... Mas, na práti ca, sempre que precisarmos efetuar esses cálculos precisaremos apenas de respostas aproximadas.

É sempre possível, entretanto, tentar uma resposta...

Quando perguntaram a Faraday - físico inglês do século passado que descobriu, entre outras coisas, as leis da indução eletromagnética que estão na base dos geradores de energia elétrica-para que servia a ciência que ele fazia, Faraday respondeu, inteligentemente, com outra pergunta. Para que serve uma criança acabada de nascer ?

O matemático inglês Hardy estava convencido de que a teoria dos números em que trabalhava, para grande satisfação sua, não servia para nada. Entretanto, hoje, a inútil teoria dos números está na base da atual teoria dos códigos, secretos e não secretos . O puríssimo Hardy encontra-se assim - coisa que o teria chocado imensamente - envolvido na muito pouco limpa ciência militar, com os seus segredos e suas espionagens.

O físico Rutherford troçava dos que sonhavam, usando a teoria da relatividade, extrair a poderosa energia aramzenada nos núcleos atômicos. Entretanto a engenhosa teoria dos átomos está na base da descoberta de mais espetacular fonte de energia até hoje conhecidà: a energia nuclear, com as centrais nucleares, o lixo atômico e as bombas... os acidentes (?)... Hiroxima nunca mais ?

Não há ciência verdadeiramente inútil. Muitas vezes , descobertas aparentemente inúteis preparam, intelectualmente, o caminho de onde as aplicações irão surgir de forma inevitável.

Assim aconteceu com muitos campos aparentemente inúteis da matemática.

E os números irracionais ? Há para eles alguma perspectiva de aplicação ?

Existe uma velha questão, que até os nossos dias a Ciência busca resolver, a de saber se o tempo flui de modo contínuo (sem interrupções) ou se o faz descontinuadamente, isto é, por instantes separados. Os relógios digitais da atualidade apoiam a segunda hipótese, mas a verdade é que estamos tão perto de resolver a questão como o estavam os velhos gregos, quando a grande moda em matéria de relógios era a clepsidra, um relógio de água que apoiava a primeira hipótese, isto é, a idéia do fluxo contínuo do tempo.

Poderia a matemática auxiliar os cientistas nesta questão ? A principal razão que obriga os cientistas a saber o que os matemáticos têm a dizer sobre isso é que o modelo quantitativo da continuidade é umalinha reta numerada.

É uma linha vulgar ao longo da qual os matemáticos dispõem os números, seus conhecidos do estudo da Aritmética. Deste modo, todo e qualquer ponto é rotulado com um número, de modo que não há qualquer intervalo não rotulado.

A mais primitiva linha numerada não é contínua. Nela figuram só os números inteiros 1, 2, 3, 4, etc., que, colocados a intervalos regulares, deixam obviamente falhas não rotuladas. A primeira linha numerada contínua foi a dos Gregos Antigos, na qual os intervalos entre os números inteiros eram interminavelmente subdivididos e postos em correspondência com os números fracionários, aparentemente sem deixar nenhum ponto por rotular. Essa linha foi chamada "linha numerada racional" porque ao conjunto dos números inteiros e fracionários chamavam os gregos "números racionais", por serem números que podiam ser expressos pela razão (ou quociente) de números inteiros.

Para Pitágoras, a linha numerada racional representava o modelo ideal da continuidade até que no século VI A.C. os próprios pitagóricos acabaram por descobrir buracos no seu modelo e isso você já sabe porque.

A descoberta dos números irracionais, que os prórpios pitagóricos acabaram por ocultar, implicava que a linha numerada racional não era, afinal de contas, o modelo da continuidade.

Nos séculos que se seguiram, os números irracionais foram aceitos pelos matemáticos como um mal necessário: necessário porque a sua aplicação nas descontinuidades da linha numérica racional permitiu criar outra reta numerada "mais contínua"; e um mal porque era ainda pouco claro como aplicar os números irracionais à linha numerada racional.

Havia muitos exemplos de números irracionais, mas não se dispunha, para esses números, de uma definição matemáticamente aceitável. Pareciam não se relacionar logicamente com os números racionais, isto é, não se conhecia nenhuma receita para se obter números irracionais a partir dos racionais.

Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind encontrou umprocesso aceitável para relacionar os irracionais com os racionais, dando o nome de "linha numerada real" ao novo modelo de continuidade, por alusão ao hábito que os matemáticos traziam desde o século XVI de chamar "números reais" ao conjunto de racionais e irracionais.

Algumas décadas depois, outro matemático alemão, Georg Cantor, fez uma descoberta que iria acabar de vez com os preconcei tos em relação à aceitação da linha numerada real. Com essa descoberta confirmou-se que, embora haja uma infinidade de números racionais, como os gregos suspeitavam, há ainda mais números reais. Confirmou-se ser a linha numerada real, de algum modo, "mais contínua" do que a racional. Veja só o que isto significa !

Na linha numerada racional, os números vizinhos encontram-se infinitamente juntos, mas na linha real os números vizinhos encontram-se mais do que infinitamente juntos. Mesmo com espelhos, isso será para nós uma ilusão impossível de criar. Considere dois espelhos um em frente do outro. Ao olhar para um deles vemos uma imagem refletida da outra. Imagine que cada imagem é um ponto na reta numerada.

Aproxime agora um pouco os dois espelhos. As imagens repetidas serão comprimidas e o espaço entre elas diminuirá. A distância dos pontos numa linha numerada racional corresponderá à distância entre as imagens quando os dois espelhos estiverem infinitamente próximos, ou, em outras palavras, quando os espelhos se tocam. Mas a distância entre os pontos numa reta numerada real deverá corresponder à distância entre as imagens quando os dois espelhos estiverem mais próximos do que quando se tocam, o que só pode acontecer se os dois espelhos se interpenetrarem, como Alice, que entrou no espelho.

Voltando à questão do tempo, já não basta saber se o tempo é contínuo mas, se o for, temos de apurar se é "racionalmente contínuo" ou "realmente contínuo".

Caso seja o tempo algo descontínuo, isto deverá significar que o que quer que seja no universo se desenrola como nas fitas de cinema, imagem por imagem. E significa também que a existência temporal é uma sucessão de tiquetaques momentâneos, cuja aparência de continuidade é mera ilusão, como a criada pelo cinema.

Se o tempo é contínuo, então,coloca-se a questão de a sua continuidade ser a de uma linha numerada racional ou real. Qualquer dessas hipóteses é impossível de ser verificada por medição direta. Mas já é possível apurar algumas coisas por experiências indiretas. Uma maneira bem simples é o de verificar se números racionais sozinhos bastam para descrever quantativamente os vários fenômenos naturais.

Há muitos fenômenos temporais conhecidos que podem ser descritos exclusivamente em termos de números racionais.

Exemplo disso é o movimento das cargas elétricas num fio condutor. Pelas experiências do físico americano Robert Milikan, sabemos hoje que as cargas elétricas são sempre múltiplos inteiros de uma carga indivisível. Nos nossos dias há alguma especulação em torno das cargas elementares, admitindo-se a existência de partículas subnucleares chamadas "quarks", dotadas de carga elétrica que valem $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ da carga elementar, mas não há qualquer indício da existência de cargas elétricas relacionadas com a carga elementar através de um número irracional. Também em Biologia e em Química , muitos fenômenos são descritos em termos de números racionais. Cada espécie de planta ou animal, por exemplo, pode ser caracterizado por um número único de cromossomas na sua célula individual e este número, assim como o número atômico de um elemento químico, é sempre inteiro.

Apesar disso, a ciência necessita dos números irracionais. Durante mais de um século, os cientistas têm tomado nota, numa lista cada vez mais crescente, de grandezas que dentro de teorias científicas comprovam a sua importancia na descrição do espaço-tempo. Essas grandezas passam a ser encaradas como se fossem números irracionais. Por exemplo, uma dessas grandezas, a velocidade da luz, já foi medida até a nona casa decimal e ainda está por aparecer qualquer estrutura no arranjo dos algarismos. Quando expressa em milhões de metros por segundo, a melhor determinação da velocidade da luz é 0,299792458. Só na Física há mais de uma dúzia de tais constantes , medidas com certo número de casas decimais, no máximo 11, e nem uma delas revelou ter qualquer estrutura na sucessão dos dígitos.

Esses fatos, que sugerem a existência de números irracionais em fenômenos naturais relacionados pelo tempo, deparam-se no entanto com uma dificuldade, porque em qualquer tentativa para medir um número irracional acontece que ele não pode ser medido. Ao determinar um tal número, nunca poderemos ter a certeza de que na sucessão dos seus dígitos não exista uma estrutura, um qualquer segmento de algarismos que se repita indefinidamente.

De tudo o que ficou dito conclui-se que ao descobrir os números irracionais, os matemáticos criaram uma possibilidade que não pode ser comprovada por qualquer imaginável medição ou série de medições. No entanto, eles existem...

Convém estudá-los ? Ou isto seria uma atitude irracional ?

(Esse texto foi montado através da composição, para fins didáticos , de trechos dos seguintes livros: "Ciência: Curiosidade e Maldição " de Jorge Dias de Deus e "Pontes Para o Infinito" de Michel Guillen)