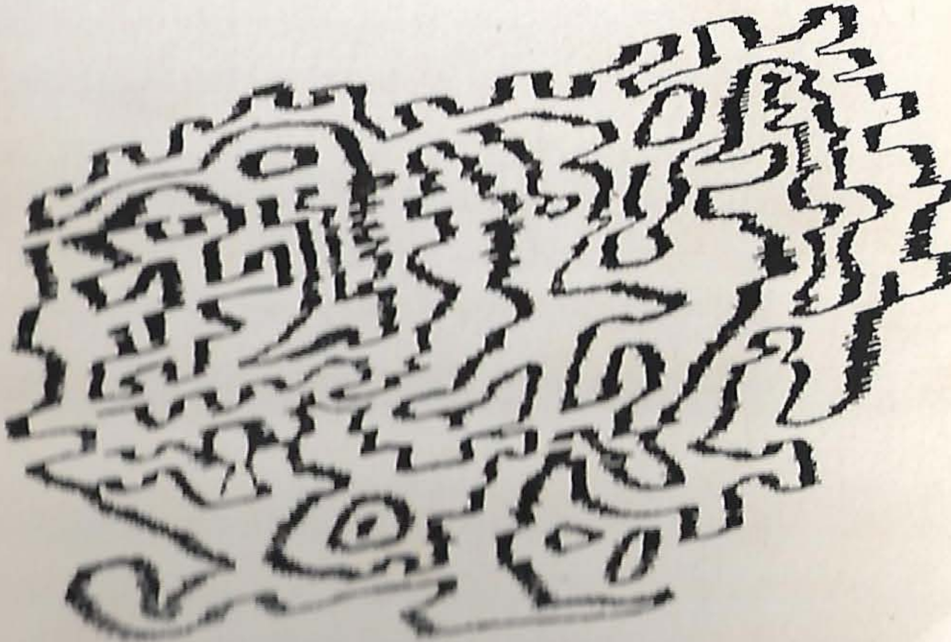
VOLUMES DA SÉRIE
TÓPICOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA

δx DELTA XIS
EDITORA LTDA

Rua: Maria Luiza Missio Mingone, 184
13100 - Campinas - SP

Tópicos de Ensino de
MATEMÁTICA

13 – Geometria III



ADAIR MENDES NACARATO
ANTONIO MIGUEL
MANOEL AMARAL FUNCIA
MARIA ÂNGELA MIORIM

Delta Xis Editora Ltda

APRESENTAÇÃO

Desde 1982, um grupo de professores de Matemática de Campinas, insatisfeitos com os resultados obtidos na sua prática pedagógica, vem se reunindo com o objetivo de elaborar projetos de ensino-aprendizagem que possam, aos poucos, alterar a situação existente.

Esses projetos são aplicados em escolas das redes pública e particular e avaliados periodicamente. A avaliação dos resultados obtidos na prática levanta críticas e sugestões que impõem, frequentemente, aprofundamento teórico e reformulações dos projetos já produzidos, além da produção de novos projetos. Essa é a principal característica desse material: o fato de estar sendo continuamente refeito. Outra característica dele é que, embora englobe o conteúdo de 5ª a 8ª séries, é apresentado em fascículos, permitindo ao professor escolher o momento mais adequado para trabalhar um certo tema junto a seus alunos.

Contamos atualmente com 16 projetos que compõem os volumes da série "Tópicos de Ensino de Matemática". Esses fascículos representam a mais recente versão do trabalho mas, certamente, não a última.

Um trabalho dessa natureza, só foi e continua sendo possível, graças à participação contínua de professores que aplicam os projetos. Queremos registrar, portanto, o nosso agradecimento aos seguintes professores que, durante esses anos, têm contribuído na elaboração e reformulação dos projetos, trazendo críticas e sugestões, participando de reuniões e encontros com o propósito de repensar e aprofundar questões referentes ao ensino da Matemática:

Ana Maria C.Coimbra, Ana Regina P.B.Angi, Aurora S. Santana, Beatriz V.B.de Carvalho, Carmem Lúcia B.Passos, Cláudia V.C.Miguel,Divina A. de Aquino, Eliza A.Mukai, Elizabeth A.Carrara, Gelson J.Jacobucci,Heloisa de Carvalho M.Debiazzi, Jane M.da Silva Vidal, José Amaury Alves, Margali A.de Nadai, Maria Aparecida B.Pinheiro, Maria Clélia F. Jacobucci, Maria Lúcia Negri, Marília B.Pereira, Marisa S.Pinheiro Travaini, Marta I. de Almeida, Neusa B.Ferraz, Regina Celi Ayres, Ronaldo Nicolai, Rosana Fávero, Rosemeire M.R.Silva, Sandra T.Cardoso, Suely M.Gimenis, Susy M.Fadel, Teresa Neide G.Guimarães, Vilma M. M. Silva, Yara P.P.Bueno e Zuleide G. Paulino.

Campinas, fevereiro de 1990

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O tema básico dessa apostila é a noção de congruência de figuras planas e, mais particularmente, a de congruência de triângulos. Essa noção é de grande importância, pois nela se baseiam algumas construções fundamentais com régua e compasso como, por exemplo, o traçado de alturas, mediatrizes e medianas de triângulos e também, de bissetrizes de ângulos. Além disso, muitas propriedades dos triângulos, quadriláteros e de configurações espaciais e planas em geral, baseiam-se também, nessa noção.

Espera-se, pois, que ao final dessa unidade, você não apenas possa compreender a noção de congruência, mas também demonstrar algumas propriedades dos triângulos e quadriláteros que fundamentam as primeiras construções com régua e compasso.

1a. Atividade: Recorte todas as figuras do anexo 1. Em seguida, encontre as figuras que podem ser sobrepostas exatamente a cada uma das figuras abaixo. Registre as correspondências no quadro que se segue.

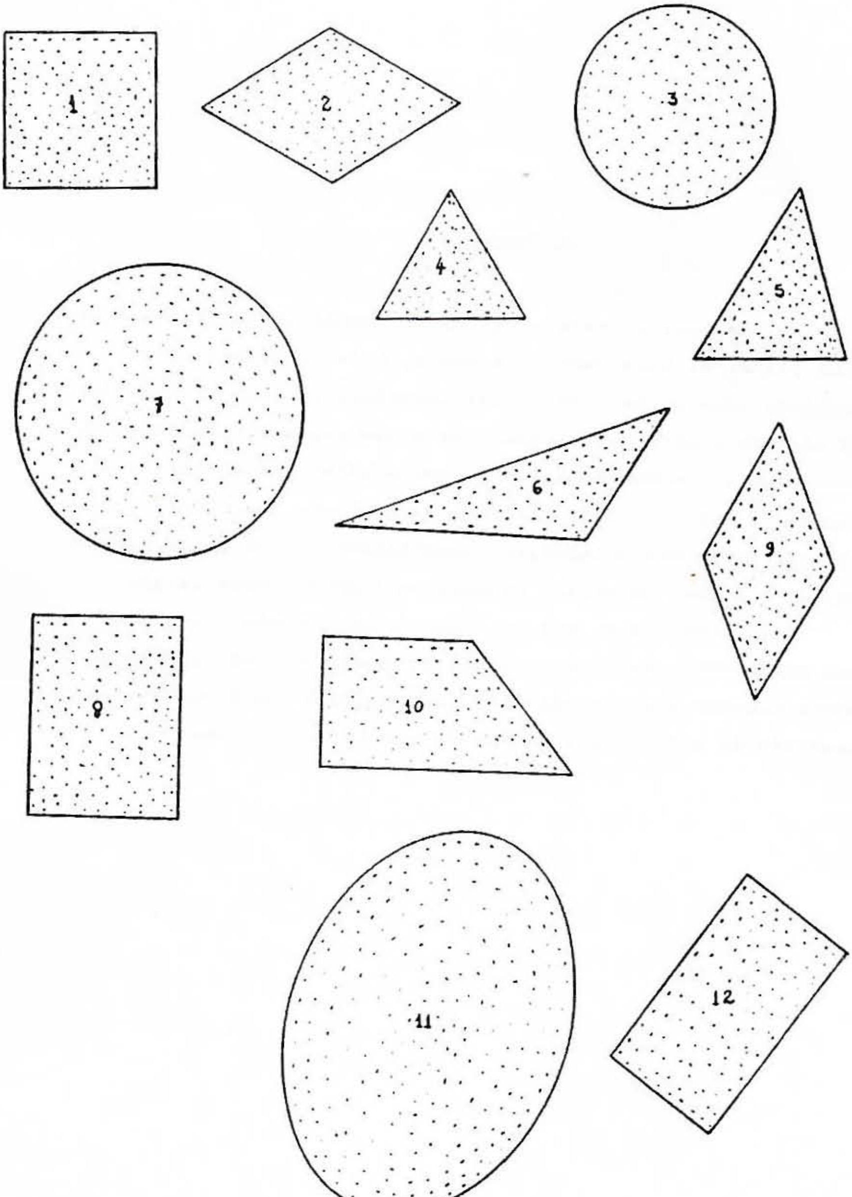
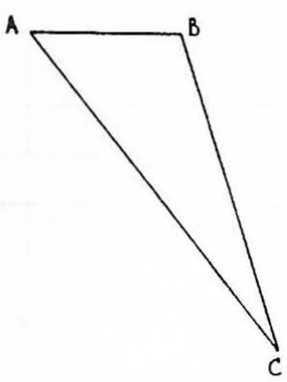


Figura 1	
Figura 2	
Figura 3	
Figura 4	
Figura 5	
Figura 6	
Figura 7	
Figura 8	
Figura 9	
Figura 10	
Figura 11	
Figura 12	

Texto 1 - Congruência de Figuras Planas.

Dizemos que duas figuras planas são congruentes quando puderem ser sobrepostas exatamente. Não basta, portanto, que as figuras tenham a mesma forma para serem congruentes. É necessário também, que tenham o mesmo tamanho. Assim, dois quadrados nem sempre são congruentes. É preciso que tenham lados congruentes. É preciso que tenham lados congruentes. O mesmo acontece para dois círculos. É preciso que tenham raios congruentes, para serem congruentes. - Nesta série, você estudará mais detalhadamente a congruência de triângulos. Vamos, pois, fazer um estudo mais pormenorizado dos - triângulos.

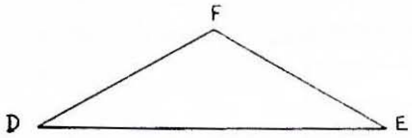
2a. Atividade: Observe os triângulos abaixo. Utilizando uma régua, complete:



$m(\overline{AB}) =$ ____________________

$m(\overline{BC}) =$ ____________________

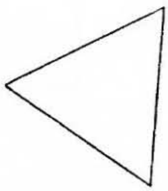
$m(\overline{AC}) =$ ____________________



$m(\overline{DE}) =$ ____________________

$m(\overline{EF}) =$ ____________________

$m(\overline{DF}) =$ ____________________



$m(\overline{GH}) =$ ____________________

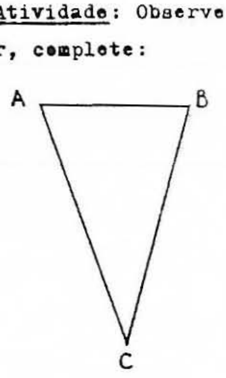
$m(\overline{HI}) =$ ____________________

$m(\overline{GI}) =$ ____________________

<u>Texto 2</u> - <u>Classificação dos Triângulos quanto à Medida dos Lados.</u>

Chamamos de triângulo todo polígono que possui apenas 3 lados. Na atividade anterior você notou que as medidas dos 3 lados - de um triângulo podem ser todas diferentes entre si. Todo triângulo desse tipo será chamado de <u>triângulo escaleno</u>. As medidas dos lados de um triângulo podem, também, ser todas iguais entre si. Todo triângulo desse tipo será chamado de <u>triângulo equilátero</u>. Finalmente, pode ainda ocorrer que um triângulo possua apenas dois - lados congruentes. Nesse caso, receberá o nome de <u>triângulo isósceles</u>.

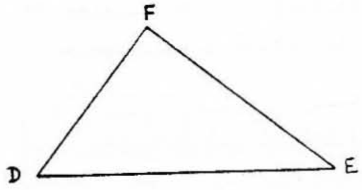
<u>3a. Atividade</u>: Observe os triângulos abaixo. Utilizando um transferidor, complete:

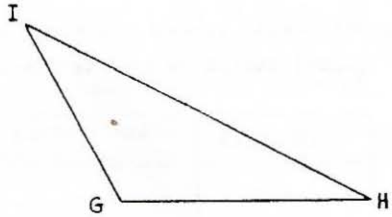


$m(C\hat{A}B) =$ ____________________

$m(B\hat{C}A) =$ ____________________

$m(A\hat{B}C) =$ ____________________





$m\,(E\hat{D}F) =$ ____________________ $m\,(H\hat{G}I) =$ ____________________

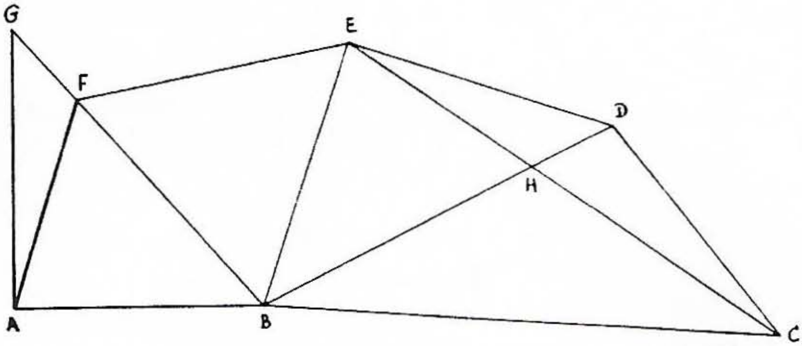
$m\,(F\hat{E}D) =$ ____________________ $m\,(I\hat{H}G) =$ ____________________

$m\,(D\hat{F}E) =$ ____________________ $m\,(G\hat{I}H) =$ ____________________

<u>Texto 3</u>: <u>Classificação dos Triângulos quanto à Medida dos Ângulos</u>

Na atividade anterior você observou que os ângulos internos de um triângulo podem ser todos agudos, isto é, menores que 90°. Todo triângulo desse tipo será chamado de <u>triângulo acutângulo</u>. Um triângulo pode possuir apenas um ângulo interno reto, isto é, medindo 90° (Por quê?). Todo triângulo que possui um ângulo interno reto será chamado de <u>triângulo retângulo</u>. Finalmente, um triângulo pode possuir apenas um ângulo interno obtuso, isto é, medindo mais que 90° (Por quê?). Nesse caso, recebe o nome de <u>triângulo obtusângulo</u>.

<u>4a. Atividade</u>: Observe as configurações planas abaixo:



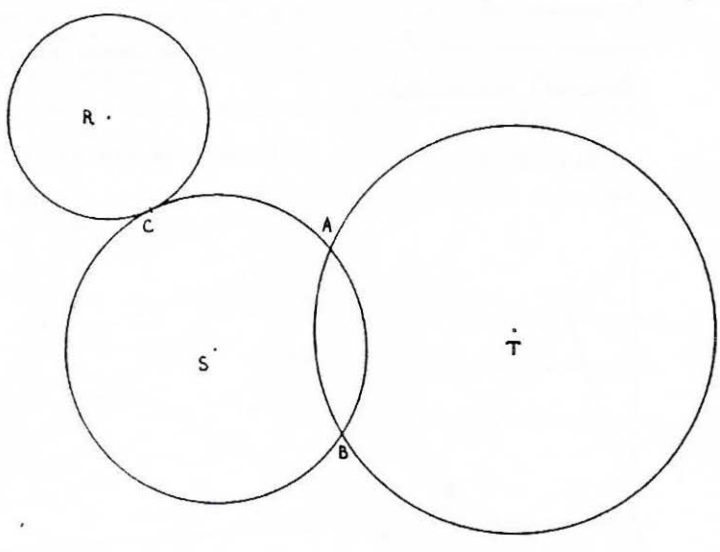
a) Quantos triângulos são determinados por esta configuração?

____

b) Utilizando apenas régua e esquadro, classifique os triângulos do quadro abaixo de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos.

Triângulos	Classificação quanto à medida dos lados	Classificação quanto à medida dos ângulos
ABF		
AGF		
ABG		
FBE		
BHE		
BHC		
CHD		
DEH		
BDE		
BCD		
CDE		
BCE		

5a. Atividade: Considere as Circunferências abaixo.



a) Quantos pontos desta folha de papel distam 4 cm. do ponto T?

___

b) Quantos pontos desta folha de papel distam 3 cm. do ponto S?

____

c) Quantos pontos desta folha de papel distam 2 cm. do ponto R?

____

d) Quantos pontos desta folha de papel distam, ao mesmo tempo, 4 cm do ponto T e 3 cm. do ponto S?

________________ Quais são eles? ________________

e) Quantos pontos desta folha de papel distam, ao mesmo tempo, 3 cm do ponto S e 2 cm. do ponto R?

________________ Quais são eles? ________________

f) Quantos pontos desta folha de papel distam, ao mesmo tempo, 4 cm do ponto T e 2 cm. do ponto R?

________________ Quais são eles? ________________

Texto 4 - Posições Relativas de Duas Circunferências num Plano.

Como você observou na atividade anterior, quando traçamos duas circunferências num mesmo plano, podem ocorrer 3 situações:

1) Elas podem se cruzar em 2 pontos distintos, isto é, podem possuir exatamente 2 pontos comuns. Nesse caso, recebem o nome de circunferências secantes.

2) Elas podem se tocar em apenas 1 ponto, isto é, podem possuir apenas 1 ponto comum. Nesse caso, recebem o nome de circunferências tangentes.

3) Elas podem não se cruzar, isto é, não possuírem nenhum ponto comum. Nesse caso, recebem o nome de circunferências exteriores.

6a. Atividade - Considere os pontos A e B abaixo.

a) Com centro no ponto A, trace uma circunferência de raio 3 cm.

b) Com centro no ponto B, trace uma circunferência de raio 5 cm.

c) Chame de C e D os pontos de interseção dessas duas circunferências.

d) Qual é a distância do ponto C ao ponto A?

____

e) Qual é a distância do ponto C ao ponto B?

____

f) Utilizando uma régua, ligue os pontos A, B e C dois a dois. - Que figura você obtém?

____

g) Utilizando uma régua, ligue os pontos A, B e D dois a dois. Que figura você obtém?

____

h) Compare as medidas dos lados das figuras obtidas nos ítens f e g. Que você pode concluir a respeito delas?

____

____

<u>Texto 5</u> - <u>Construção de Triângulos conhecendo-se a medida dos 3 lados</u>.

Com base na atividade anterior, é possível obter uma técnica para construção de triângulos conhecendo-se as medidas de seus 3 lados.

<u>1º Passo</u>. Traça-se um segmento de reta cuja medida seja igual à medida de um dos lados do triângulo que se quer construir.

<u>2º Passo</u>. Centralizando o compasso em uma das extremidades do segmento traçado no passo anterior, traça-se uma circunferência cujo raio seja igual à medida de um dos outros - dois lados do triângulo.

<u>3º Passo</u>. Centralizando o compasso na outra extremidade do segmento, traça-se uma outra circunferência, cujo raio seja - igual à medida do último lado do triângulo.

Observe que, os pontos de interseção das duas circunferências são os únicos pontos do plano que satisfazem as condições de distâncias exigidas pelo problema.

<u>7a. Atividade</u>: Utilizando régua e compasso construa:

a) Um $\triangle$ ABC tal que m ($\overline{AB}$) = 4 cm.; m ($\overline{AC}$) = 3 cm. e - m ($\overline{BC}$) = 2 cm.

b) Um $\triangle$ PQR tal que m ($\overline{PQ}$) = 4 cm.; m ($\overline{PR}$) = 3 cm. e m ($\overline{QR}$) = 5 cm.

c) Um $\triangle$ LMN tal que m ($\overline{LM}$) = 2 cm.; m ($\overline{LN}$) = 3 cm. e m ($\overline{MN}$) = 3 cm.

d) Um $\triangle$ DEF tal que m ($\overline{DE}$) = 4 cm.; m ($\overline{EF}$) = 2 cm. e m ($\overline{DF}$) = 2 cm.

e) Construa um $\triangle$ GHI tal que m ($\overline{GH}$) = 6 cm.; m ($\overline{GI}$) = 2 cm. e m ($\overline{HI}$) = 3 cm.

<u>8a. Atividade</u>: Uma pessoa quer construir um triângulo ABC de maneira que o lado $\overline{AB}$ desse triângulo meça 5 cm. e o lado $\overline{AC}$, 3 cm.

1) Quantos triângulos diferentes, que obedeçam essas condições, a pessoa poderá construir?

____

2) Coloque V ou F em cada afirmação abaixo, conforme sejam elas - verdadeiras ou falsas, respectivamente.

a) ( ) A medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo pode ser menor que - 2 cm.

b) ( ) A medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo pode ser igual a 2 cm.

c) ( ) A medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo pode ser igual a 8 cm.

d) ( ) A medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo pode ser maior que - 8 cm.

e) ( ) O lado $\overline{BC}$ do triângulo só pode ter uma das seguintes - medidas: 3 cm.; 4 cm; 5 cm; 6 cm. ou 7 cm.

f) ( ) A medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo deve, necessariamente, ser expressa por um número real que seja, ao mesmo tempo, - maior que 2 cm. e menor que 8 cm.

9a. Atividade: a) No quadro seguinte, a primeira coluna representa as medidas do lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC e a segunda coluna representa as medidas do lado $\overline{AC}$ desse mesmo triângulo. Você deve completar a terceira coluna do quadro, respectivamente, com o menor e maior números que podem expressar a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo para que, em cada caso, a existência e possibilidade de construção dele esteja sempre assegurada.

m ($\overline{AB}$)	m ($\overline{AC}$)	m ($\overline{BC}$)
2 cm.	8 cm.	maior que.....e menor que.......
5 cm.	4 cm.	maior que.....e menor que ......
6 cm.	1 cm.	maior que.....e menor que ......
4 cm.	4 cm.	maior que.....e menor que ......
3 cm.	3 cm.	maior que.....e menor que ......
2,5 cm.	1,7 cm.	maior que.....e menor que ......

b) Quais as condições que devem existir entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer para que ele seja construtível?

____

____

____

Texto 6 - A Propriedade da Desigualdade Triangular.

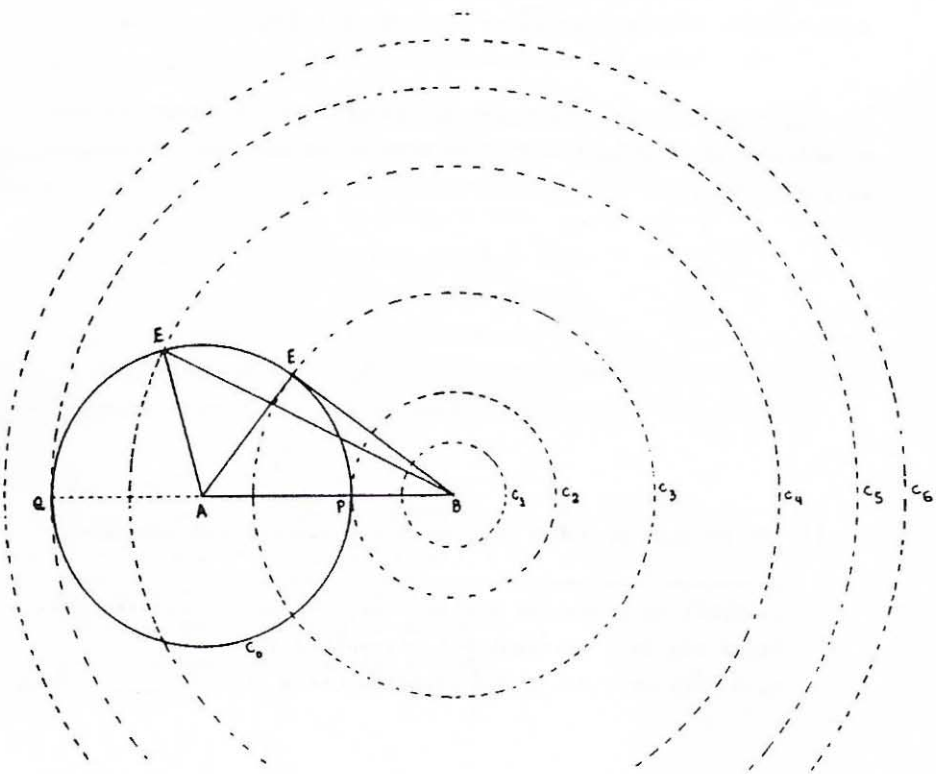
Um triângulo só é construtível se a medida de um de seus lados for, ao mesmo tempo, menor que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros dois lados. Foi a essa conclusão que você, provavelmente, chegou ao executar a atividade anterior. Essa propriedade é chamada "Propriedade da Desigualdade Triangular".

Daqui para frente, não é preciso tentar construir um triângulo, para saber se essa construção será ou não possível. Basta saber as medidas dos 3 lados do triângulo e utilizar essa propriedade.

Observe também, que essa propriedade é uma decorrência das possíveis posições relativas de duas circunferências num plano.

Considere, por exemplo, um triângulo ABE tal que m ($\overline{AB}$) = 5 cm. e m ($\overline{AE}$) = 3 cm. Quais seriam as possíveis medidas do lado $\overline{BE}$ para que o triângulo seja construtível?

Na figura seguinte, observe que $\overline{AB}$ é um dos lados do triângulo ABE e como a circunferência C_0, de centro em A, tem raio medindo 3 cm., então, o vértice E de um possível triângulo ABE deve pertencer a essa circunferência. Logo, o triângulo ABE só será construível se a circunferência de centro no ponto B for secante com a circunferência C_0. Isso acontece apenas quando a medida do raio da circunferência com centro em B for maior que 2 cm. (diferença entre m $(\overline{AB})$ e m $(\overline{AE})$) e menor que 8 cm. (soma entre m $(\overline{AB})$ e m $(\overline{AE})$). É o que acontece com as circunferências C_3 e C_4 em relação a C_0. Isso porque, quando o raio dessa circunferência medir 2 cm. ou 8 cm., ela deverá ser tangente à circunferência C_0, respectivamente, nos pontos P ou Q, que são colineares com os pontos A e B. É o que acontece, por exemplo, com as circunferências C_2 e C_5 em relação a C_0. Por outro lado, quando a medida do raio da circunferência com centro em B for menor que 2 cm. ou maior que 8 cm., ela deverá ser exterior à circunferência C_0, não existindo, portanto, pontos de interseção entre elas. É o que acontece com as circunferências C_1 e C_6 em relação a C_0.



<u>10a. Atividade</u>: Em cada ítem abaixo são dadas as medidas de três - segmentos de reta. Diga, se é possível ou não, construir com eles um triângulo. Caso seja possível, classifique-o quanto à medida - dos lados e, usando o teorema de Pitágoras, classifique-o, também, - quanto à medida dos ângulos.

a) m $(\overline{AB})$ = 5 cm., m $(\overline{BC})$ = 4 cm. e m $(\overline{AC})$ = 3 cm.

b) m $(\overline{DE})$ = 7 cm., m $(\overline{EF})$ = 10 cm. e m $(\overline{DF})$ = 3 cm.

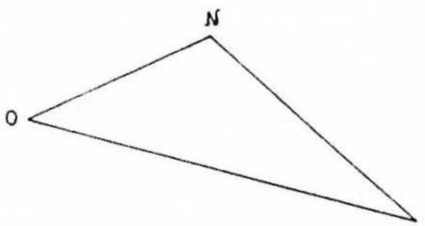
c) m $(\overline{GH})$ = 8 cm., m $(\overline{HI})$ = 8 cm. e m $(\overline{GI})$ = 5 cm.

d) m $(\overline{JK})$ = 5 cm., m $(\overline{KL})$ = 8 cm. e m $(\overline{JL})$ = 5 cm.

e) m $(\overline{MN})$ = 7 cm., m $(\overline{NO})$ = 20 cm. e m $(\overline{MO})$ = 2 cm.

f) m $(\overline{PQ})$ = 3 cm., m $(\overline{QR})$ = 3 cm. e m $(\overline{PR})$ = 3 cm.

<u>11a. Atividade</u>: Observe o triângulo MNO abaixo. No anexo II você encontrará um triângulo PQR. Recorte-o e, em seguida, responda - os ítens abaixo.



1) Os triângulos PQR e MNO podem ser sobrepostos exatamente?

____

2) Complete as sentenças abaixo. Para que haja perfeita superposição dos dois triângulos é necessário que:

a) O vértice P do $\triangle$ PQR coincida com o vértice ______ do $\triangle$ MNO.

b) O vértice Q do $\triangle$ PQR coincida com o vértice ______ do -- $\triangle$ MNO.

c) O vértice R do $\triangle$ PQR coincida com o vértice ______ do - $\triangle$ MNO.

d) O lado $\overline{PQ}$ do $\triangle$ PQR coincida com o lado ______ do $\triangle$ MNO.

e) O lado $\overline{QR}$ do $\triangle$ PQR coincida com o lado ______ do $\triangle$ MNO.

f) O lado $\overline{PR}$ do $\triangle$ PQR coincida com o lado ______ do $\triangle$ MNO.

g) O ângulo $P\hat{Q}R$ do $\triangle$ PQR coincida com o ângulo ______ do - $\triangle$ MNO.

h) O ângulo $P\hat{R}Q$ do $\triangle$ PQR coincida com o ângulo ______ do - $\triangle$ MNO.

i) O ângulo $R\hat{P}Q$ do $\triangle$ PQR coincida com o ângulo ______ do - $\triangle$ MNO.

3) Existe alguma outra maneira, diferente da anterior, de sobrepor, exatamente, os triângulos MNO e PQR?

<u>Texto 7</u> - <u>Congruência de Triângulos</u>.

Você já sabe que duas figuras planas quaisquer são congruentes quando puderem ser sobrepostas exatamente. Na atividade anterior, você notou que os triângulos MNO e PQR podem ser sobrepostos, exatamente, de <u>uma única maneira</u>. Eles são, portanto, congruentes. Entretanto, a superposição perfeita dos dois triângulos só é possível se as seguintes correspondências entre seus vértices se verificar:

vértice M do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ vértice R do $\triangle$ PQR;
vértice N do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ vértice P do $\triangle$ PQR;
vértice O do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ vértice Q do $\triangle$ PQR.

Como consequência dessas correspondências temos outras correspondências necessárias entre lados e ângulos dos dois triângulos:

lado $\overline{MN}$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ RP do $\triangle$ PQR
lado $\overline{NO}$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ PQ do $\triangle$ PQR
lado $\overline{MO}$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ RQ do $\triangle$ PQR
$M\hat{N}O$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ $R\hat{P}Q$ do $\triangle$ PQR
$N\hat{M}O$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ $P\hat{R}Q$ do $\triangle$ PQR
$M\hat{O}N$ do $\triangle$ MNO $\longleftrightarrow$ $R\hat{Q}P$ do $\triangle$ PQR

Como, obedecendo as condições de correspondências acima, a superposição dos dois triângulos é perfeita, é claro que as duas - afirmações abaixo são verdadeiras:

1) Os lados correspondentes dos dois triângulos são congruentes.

2) Os ângulos correspondentes dos dois triângulos são congruentes.

Dizemos, portanto, que dois triângulos são congruentes quando existir pelo menos uma maneira de sobrepô-los, exatamente, de forma que seus lados correspondentes sejam congruentes e seus ângulos correspondentes congruentes. Usaremos o símbolo $\cong$ para indicar a congruência entre dois triângulos. Representamos, simbolicamente,- a congruência dos triângulos MNO e PQR da seguinte maneira:

$$\boxed{\Delta\, MNO \cong \Delta\, RPQ}$$

Observe que a ordem das letras que representam os vértices do triângulo PQR deve respeitar as correspondências obtidas mediante a superposição. Não poderíamos, por exemplo, escrever $\Delta\, MNO \cong \Delta\, PQR$ pois, após a superposição, o vértice M do Δ MNO não corresponderá ao vértice P do Δ PQR, nem N corresponderá a Q e nem O - corresponderá a R.

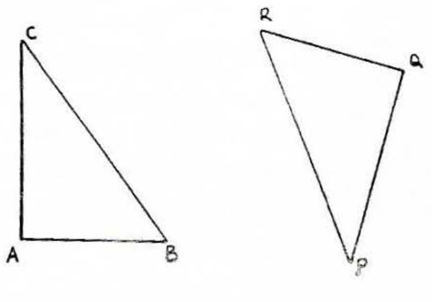
Por outro lado, poderíamos, se quiséssemos, mudar a ordem das letras do primeiro triângulo desde que fizéssemos o mesmo com as letras do segundo, de forma a manter as correspondências.

Assim, seria também correto escrever:

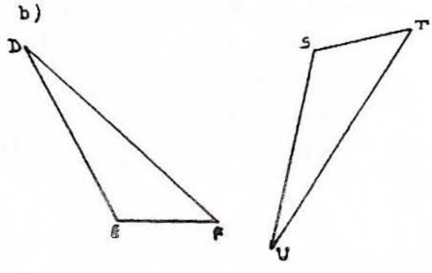
$\Delta\, NOM \cong \Delta\, PQR$ ou $\Delta\, ONM \cong \Delta\, QPR$

12a. Atividade: Usando régua e transferidor, diga se os pares de triângulos seguintes são ou não congruentes. Se forem, escreva - simbolicamente a congruência. Se não forem, explique porque não - são.

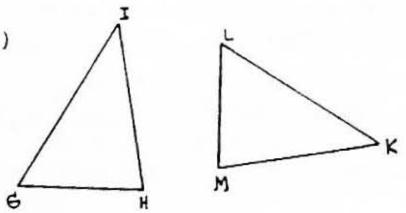
a)



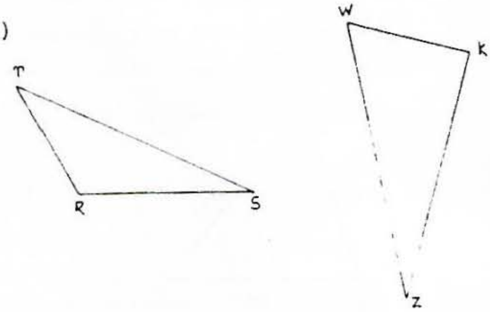
b)



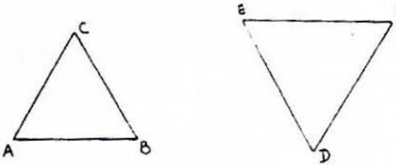
c)



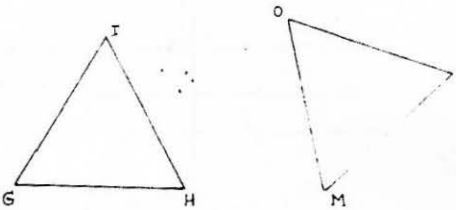
d)



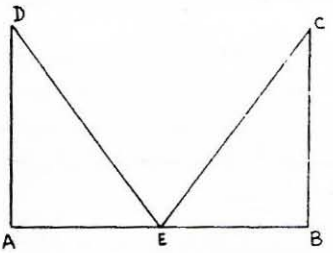
e)



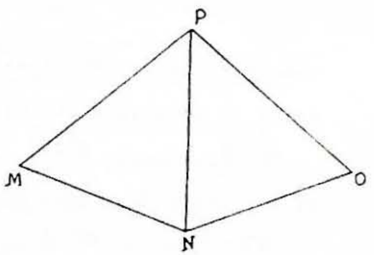
f)



g)

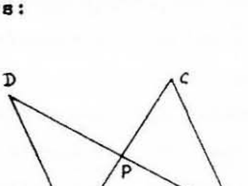


h)



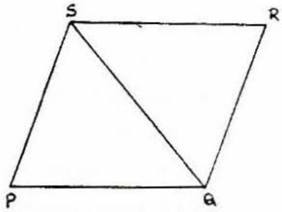
13a. Atividade: Utilizando apenas as propriedades dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversais, a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e os dados abaixo, escreva, simbolicamente, as congruências para cada par de triângulos seguintes:

a)



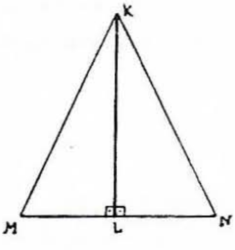
Dados: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$;
$\overline{AP} \cong \overline{PC}$ e $\overline{DP} \cong \overline{PB}$

b)



Dados: $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$; $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$;
$\overline{SR} \cong \overline{PQ}$ e $\overline{PS} \cong \overline{QR}$

c)



Dados: $M\hat{K}L \cong L\hat{K}N$; $\overline{KL} \perp \overline{MN}$;
$\overline{MK} \cong \overline{NK}$ e $\overline{ML} \cong \overline{LN}$

14a. Atividade: Complete:

a) Se $\triangle ABC \cong \triangle KLM$, então, $\overline{AB} \cong$ _____; $\overline{BC} \cong$ _____; $\overline{AC} \cong$ _____;
$A\hat{B}C \cong$ _____; $B\hat{C}A \cong$ _____; $C\hat{A}B \cong$ _____

b) Se $\triangle HPZ \cong \triangle WBK$, então, $\overline{WB} \cong$ _____; $\overline{WK} \cong$ _____; $\overline{KB} \cong$ _____;
$H\hat{P}Z \cong$ _____; $Z\hat{H}P \cong$ _____; $H\hat{Z}P \cong$ _____.

c) Se $\triangle KLP \cong \triangle KLA$, então, $\overline{KL} \cong$ _____; $\overline{KP} \cong$ _____;
$\overline{LP} \cong$ _____; $K\hat{L}P \cong$ _____; $K\hat{P}L \cong$ _____; $P\hat{K}L \cong$ _____.

Texto 8 - Pesquisando as Condições Mínimas Necessárias que Assegurem a Congruência de dois Triângulos.

Já sabemos que dois triângulos são congruentes sempre que possuírem todos os pares de lados e ângulos correspondentes congruentes.

Entretanto, será mesmo necessário que se conheça previamente todos os 3 pares de lados correspondentes e todos os 3 pares de ângulos correspondentes, dos dois triângulos, para termos certeza que eles são congruentes? Para responder a essa questão é necessário que você faça uma pesquisa, para saber qual é o menor número de elementos correspondentes de dois triângulos, e em que ordem eles - devem ser dados, para que se possa concluir pela congruência deles.

As atividades que se seguem terão essa finalidade. Utilize régua, compasso e transferidor para resolvê-las.

15a. Atividade: a) Construa um triângulo ABC, tal que, m $(\overline{AB})$ = = 3 cm.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua, também, um de seus lados medindo 3 cm.

c) Se dois triângulos possuem apenas um par de lados congruentes,- eles serão necessariamente congruentes? ______________________

____

16a. Atividade: a) Construa um triângulo ABC, tal que, m $(\hat{A}) = 60°$

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua, também, um ângulo de 60°.

c) Se dois triângulos possuem apenas um par de ângulos congruentes, eles serão necessariamente congruentes? ______________________

____

1a. Conclusão: Se dois triângulos possuem apenas um par de elementos (ângulos ou lados) congruentes, eles serão necessariamente congruentes? ______________________

17a. Atividade: a) Construa um Δ ABC, tal que, m $(\overline{AB})$ = 3 cm. e m $(\overline{AC})$ = 2 cm.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua dois lados cujas medidas sejam, também, 3 cm. e 2 cm.

c) Se dois triângulos possuem apenas dois pares de lados congruentes, eles serão necessariamente congruentes? ______________________

____

18a. Atividade: a) Construa um Δ ABC, tal que, m $(\hat{A}) = 60°$ e m $(\hat{B}) = 30°$.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua dois ângulos cujas medidas sejam, também, 60° e 30°.

c) Se dois triângulos possuem apenas dois pares de ângulos congruentes, eles serão necessariamente congruentes? ____________

____

19a. Atividade: a) Construa um Δ ABC, tal que, m $(\overline{AB}) = 3$ cm. e m $(\hat{A}) = 45°$.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua, também, um lado medindo 3 cm. e um ângulo medindo 45°.

c) Se dois triângulos possuem apenas um par de lados congruentes e um par de ângulos congruentes, eles serão, necessariamente-congruentes? ______________________________

2a. Conclusão: Se dois triângulos possuem apenas 2 pares de elementos (lados ou ângulos) congruentes, eles serão, necessariamente, congruentes? ______________

20a. Atividade:

a) Construa um Δ ABC tal que, m $(\overline{AB}) = 4$ cm.; m $(\overline{AC}) = 2$ cm. e m $(\overline{BC}) = 3$ cm.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua, também, os lados medindo 4 cm., 2 cm. e 3 cm.

c) Se dois triângulos possuem 3 pares de lados correspondentes - congruentes, eles serão, necessariamente, congruentes?

____

21a. Atividade:

a) Construa um Δ ABC tal que, m $(\hat{A}) = 20°$; m $(\hat{B}) = 60°$ e m $(\hat{C}) = 100°$.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC e que possua, também, os ângulos medindo 20°, 60° e 100°.

c) Se dois triângulos possuem 3 pares de ângulos correspondentes - respectivamente congruentes, eles serão, necessariamente, con-- gruentes?

____

22a. Atividade:

a) Construa um triângulo ABC tal que: m $(\overline{AB})$ = 4 cm.; m $(\hat{B})$ = 30° e m $(\overline{BC})$ = 3 cm.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um Δ DEF, não-congruente - ao Δ ABC, que possua 2 lados medindo, também, 4 cm. e 3 cm. e o ângulo formado por esses dois lados medindo, também, 30°.

c) Se dois triângulos possuem dois pares de lados correspondentes- respectivamente congruentes e os ângulos formados por esses - dois lados, nos dois triângulos, também, congruentes, então, - eles serão, necessariamente, congruentes?

____

23a. Atividade: a) Construa um triângulo ABC tal que: m $(\overline{AB})$ = 4 cm.; m $(\overline{BC})$ = 3 cm. e m $(\hat{A})$ = 30°.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um Δ DEF, não-congruente ao Δ ABC, que possua, também, dois lados medindo 4 cm. e 3 cm. e, também, um de seus ângulos, não formado por esses lados, medindo 30°.

c) Se dois triângulos possuem dois pares de lados correspondentes - respectivamente congruentes e um par de ângulos, não formados - por esses lados, respectivamente congruentes, então, eles serão, necessariamente, congruentes? ______________________

24a. Atividade:

a) Construa um Δ ABC tal que: m $(\overline{AB})$ = 4 cm.; m $(\hat{A})$ = 30° e m $(\hat{B})$= = 60°.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um Δ DEF, não-congruente ao Δ ABC, que possua, também, um lado medindo 4 cm. e dois ângulos, cada um com vértice numa das extremidades do segmento de 4 cm., medindo, também, 30° e 60°.

c) Se dois triângulos possuem um par de lados correspondentes respectivamente congruentes e dois pares de ângulos correspondentes, cada um com vértice numa das extremidades dos lados congruentes, respectivamente congruentes, então, eles serão, necessariamente, congruentes? ____________________

25a. Atividade:

a) Construa um Δ ABC tal que: m $(\overline{AB})$ = 4 cm.; m $(\hat{A}) = 30^{\circ}$ e m $(\hat{C}) = 50^{\circ}$.

b) Construa, ao lado direito do Δ ABC, um triângulo DEF, não-congruente ao Δ ABC, que possua, um lado medindo 4 cm., um ângulo que tenha seu vértice numa das extremidades desse lado, medindo, também, 30° e o ângulo oposto a esse lado medindo, também, 50°.

c) Se dois triângulos possuem um par de lados correspondentes respectivamente congruentes, um par de ângulos com vértices numa das extremidades desses lados, respectivamente congruentes e o par de ângulos opostos a esses lados respectivamente congruentes, então, eles serão, necessariamente, congruentes?

____

Texto 9: Os Casos de Congruência de Triângulos.

Na pesquisa exaustiva feita nas atividades anteriores você deve ter chegado à conclusão de que o menor número de elementos (lados e/ou ângulos) de dois triângulos necessários para que se possa concluir pela sua congruência é 3.

Isso significa que:

1) Não se pode concluir pela congruência de dois triângulos se eles possuírem apenas um ou dois pares de elementos correspondentes, respectivamente, congruentes.

2) Em alguns casos, pode-se concluir pela congruência de dois triângulos, se eles possuírem pelo menos 3 pares de elementos correspondentes, respectivamente, congruentes.

Que casos são esses?

1º Caso: Lado-Lado-Lado ou L. L. L.

"Dois triângulos serão, necessariamente, congruentes sempre que possuírem 3 pares de lados correspondentes respectivamente congruentes".

2º Caso: Lado-Ângulo-Lado ou L. A. L.

"Dois triângulos serão, necessariamente, congruentes sempre que possuírem dois pares de lados correspondentes respectivamente congruentes e, os ângulos formados por esses lados, respectivamente congruentes".

3º Caso: Ângulo-Lado-Ângulo ou A. L. A.

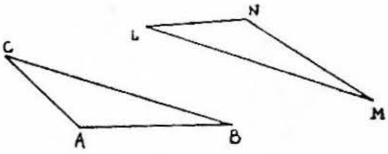
"Dois triângulos serão, necessariamente, congruentes sempre que possuírem um par de lados correspondentes respectivamente congruentes e os ângulos correspondentes, cada qual com vértice numa das extremidades desse lado, respectivamente congruentes".

4º Caso: Lado-Ângulo-Ângulo Oposto ou L. A. A_o

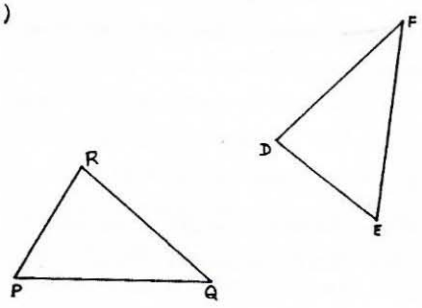
"Dois triângulos serão, necessariamente, congruentes sempre que possuírem um par de lados correspondentes respectivamente congruentes, um par de ângulos com vértices numa das extremidades desse lado, respectivamente congruentes e um par de ângulos opostos a esse lado, respectivamente congruentes".

26a. Atividade: Diga se cada par abaixo é formado ou não por triângulos congruentes. Se os triângulos forem congruentes, diga o caso em que essa congruência se baseia. Caso contrário, explique porque os triângulos não são congruentes.

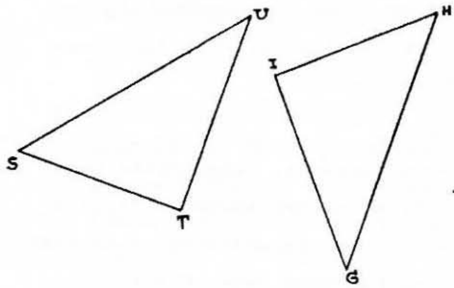
Dados: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$; $\overline{AC} \cong \overline{LN}$ e $B\hat{A}C \cong L\hat{N}M$.



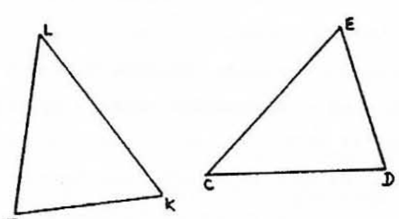
b) **Dados**: $\overline{PQ} \cong \overline{EF}$; $\overline{RQ} \cong \overline{DF}$ e $\overline{PR} \cong \overline{DE}$.



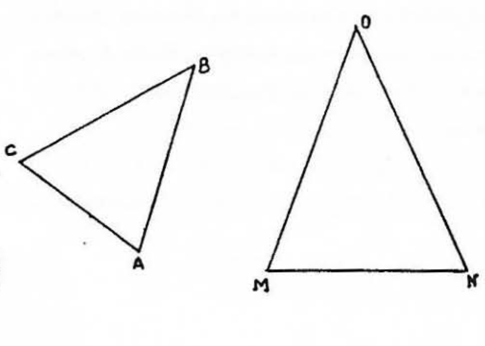
c) **Dados**: $\overline{ST} \cong \overline{IH}$, $T\hat{S}U \cong I\hat{H}G$ e $U\hat{T}S \cong G\hat{I}H$.

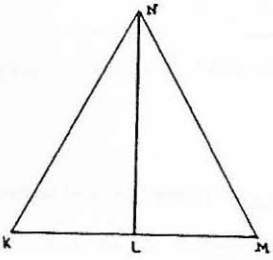


d) **Dados**: $\overline{LK} \cong \overline{CE}$; $L\hat{K}J \cong C\hat{E}D$ e $K\hat{J}L \cong E\hat{D}C$.

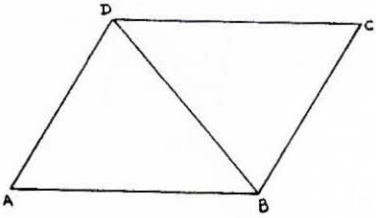


e) **Dados**: $B\hat{A}C \cong N\hat{M}O$; $A\hat{C}B \cong O\hat{N}M$ $C\hat{B}A \cong M\hat{O}N$.

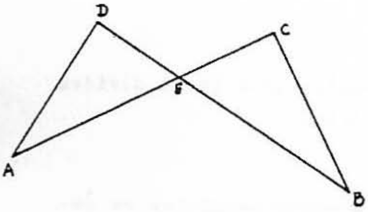




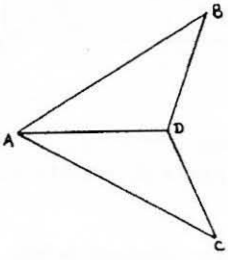
<u>Dados</u>: $\overline{LN} \perp \overline{KM}$ e $\overline{KL} \cong \overline{LM}$



<u>Dados</u>: $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



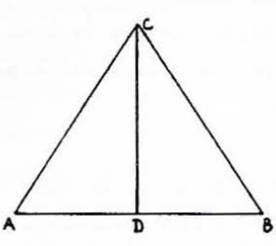
<u>Dados</u>: $\overline{AD} \perp \overline{BD}$; $\overline{BC} \perp \overline{AC}$.



<u>Dados</u>: $D\hat{A}B \cong C\hat{A}D$ e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

<u>27a. Atividade</u>: Considerando cada figura abaixo e os dados correspondentes, demonstre o que se pede:

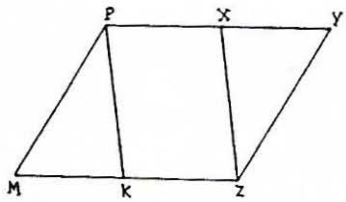
a)



<u>Dados</u>: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

<u>Demonstre que</u>: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

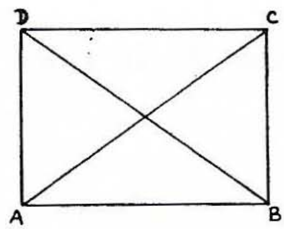
b)



Dados: $K\hat{M}P \cong X\hat{Y}Z$; $P\hat{K}M \cong Z\hat{X}Y$ e $\overline{MK} \cong \overline{XY}$.

Demonstre que: $\overline{PK} \cong \overline{ZX}$

c)



Dado: ABCD é um retângulo

Demonstre: 1) As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.

2) As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se cruzam ao meio.

28a. Atividade: Demonstre que se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DF}$ se dividem ao meio num ponto P, então, $\triangle PDA \cong \triangle PFE$.

29a. Atividade: Demonstre que em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Sugestão: Considere dois triângulos isósceles mudando de posição as letras que indicam os vértices dos ângulos das bases.

30a. Atividade: Demonstre que se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então, ele é um triângulo isósceles.

Sugestão: Considere dois triângulos cujos ângulos da base são congruentes , mudando de posição as letras correspondentes aos vértices desses ângulos.

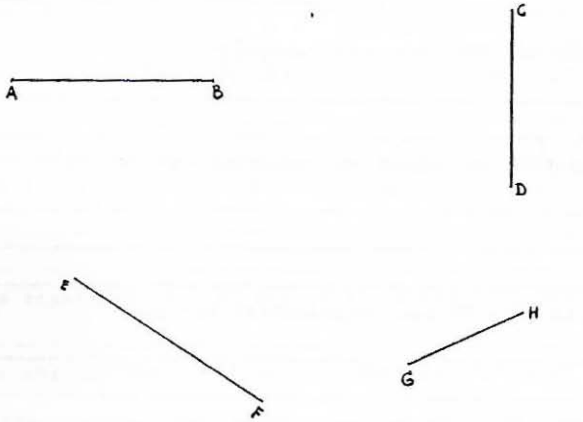
31a. Atividade: Demonstre que os ângulos internos de todo triângulo equilátero são congruentes entre si e medem exatamente 60°.

Sugestão: Considere três triângulos equiláteros mudando as posições das letras que representam seus vértices.

Texto 10 - Ponto Médio e Mediatriz de um Segmento de Reta.

Dado um segmento de reta, chamamos de Ponto Médio desse segmento, ao ponto que o divide em duas partes congruentes. Chamamos de Mediatriz desse segmento à reta que é perpendicular a esse segmento passando pelo seu ponto médio.

32a. Atividade: a) Utilizando régua e esquadro, trace a mediatriz de cada um dos segmentos abaixo.



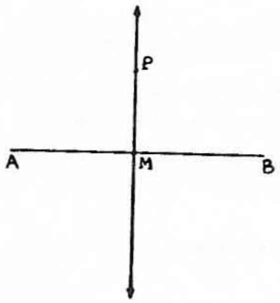
b) Coloque e nomeie 3 pontos distintos que pertençam a cada uma das mediatrizes traçadas. Ligue esses pontos às duas extremidades dos respectivos segmentos de reta. Meça os segmentos encontrados. O que você observou?

____

____

____

33a. Atividade: Respondendo as questões abaixo, você estará demonstrando a seguinte propriedade: "Todo ponto da mediatriz de um segmento de reta equidista (tem a mesma distância) dos extremos desse segmento". Para isso, considere o segmento de reta $\overline{AB}$ e a sua mediatriz $\overline{PM}$.



a) Ligue o ponto P às extremidades A e B do segmento $\overline{AB}$.

b) Quais os triângulos obtidos após a execução do ítem a ?

____

c) Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são - congruentes? Por quê?

____

____

d) Os ângulos $P\hat{M}A$ e $B\hat{M}P$ são congruentes? Por quê?

____

____

e) Os triângulos existentes na figura são congruentes? Por quê?

____

____

____

f) Os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são congruentes? Por quê?

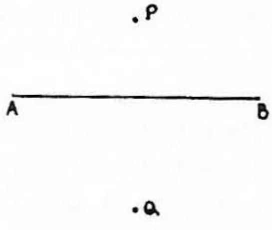
____

____

g) Se tivéssemos tomado, ao invés do ponto P, um outro <u>ponto qualquer</u> da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, o que você poderia afirmar sobre as distâncias desse ponto às extremidades so segmento $\overline{AB}$?

____

<u>34a. Atividade</u>: Demonstre a <u>afirmação recíproca</u> da anterior: "Se - dois pontos equidistam das extremidades de um segmento de reta $\overline{AB}$, - então, a reta que os une é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$". Para isso, - considere o segmento de reta $\overline{AB}$ e os pontos P e Q, equidistantes dos extremos A e B do segmento $\overline{AB}$.



a) Ligue o ponto P aos pontos A, B e Q e chame de R o ponto de interseção dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$.

b) Ligue o ponto Q aos pontos A e B.

c) Os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são congruentes? Por quê?

____

d) Os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{BQ}$ são congruentes? Por quê?

____

e) Os triângulos PAQ e PBQ são congruentes? Por quê?

____

____

f) Os ângulos $A\hat{P}R$ e $R\hat{P}B$ são congruentes? Por quê?

____

____

g) Os triângulos APR e BPR são congruentes? Por quê?

____

____

h) Os segmentos $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$ são congruentes? Por quê?

____

i) Os ângulos $P\hat{R}A$ e $B\hat{R}P$ são congruentes? Por quê?

____

j) Qual é a soma dos ângulos $P\hat{R}A$ e $B\hat{R}P$?

____

l) Qual é a medida do ângulo $P\hat{R}A$? ______________________
E do ângulo $B\hat{R}P$? ______________________

m) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$? Por quê?

____

n) O ponto R é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$?

____

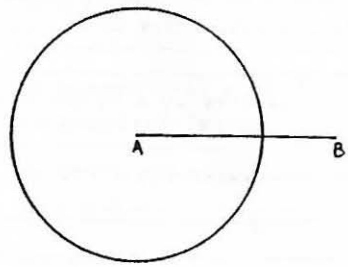
o) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$? Por quê?

____

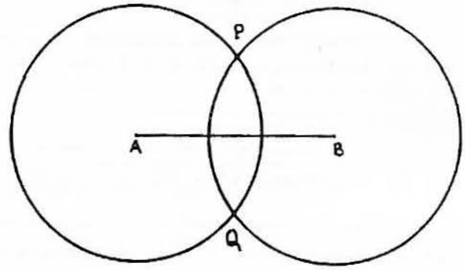
<u>Texto 11</u>: <u>Construção da Mediatriz de um Segmento com Régua e Compasso</u>.

Você observou e demonstrou na atividade anterior que sempre que tivermos dois pontos equidistantes das duas extremidades de um segmento de reta, a reta determinada por esses dois pontos é a mediatriz do segmento. Essa propriedade possibilita e fundamenta o processo de construção da mediatriz de um segmento de reta usando régua e compasso. A seguir são dados os passos desse processo.

<u>1º Passo</u>: Centralizando o compasso no ponto A de $\overline{AB}$, traça-se uma circunferência de raio maior do que a metade do segmento $\overline{AB}$.



<u>2º Passo</u>: Centralizando o compasso no ponto B de $\overline{AB}$, traça-se outra circunferência de mesmo raio que a anterior e que a intersecciona nos pontos P e Q.

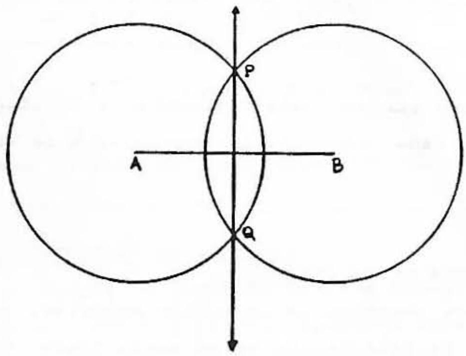


<u>Observação 1</u> - Os raios das circunferências devem ser maiores que a metade do segmento $\overline{AB}$, pois, caso contrário, elas não seriam secantes.

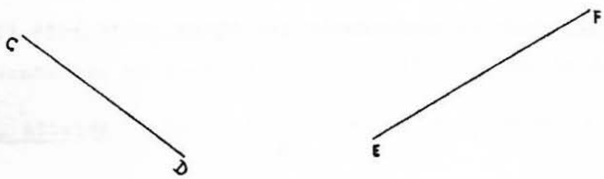
<u>Observação 2</u> - Os raios das circunferências devem ter a mesma medida para que os pontos P e Q equidistem dos extremos A e B do segmento $\overline{AB}$.

<u>3º Passo</u>: Ligando os pontos P e Q obtemos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ que é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

<u>Observação 3</u> - Como a mediatriz de um segmento sempre passa pelo seu ponto médio, esse mesmo processo é utilizado para a determinação do ponto médio de um segmento qualquer.

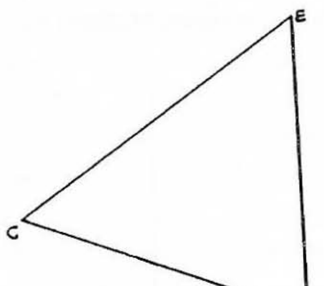


35a. Atividade: Utilizando régua e compasso, trace a mediatriz de cada um dos segmentos abaixo.



36a. Atividade: Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cruzam no meio.

37a. Atividade: a) Trace a mediatriz de cada um dos lados do triângulo CDE abaixo:



b) As três mediatrizes traçadas interseccionam-se num mesmo ponto?

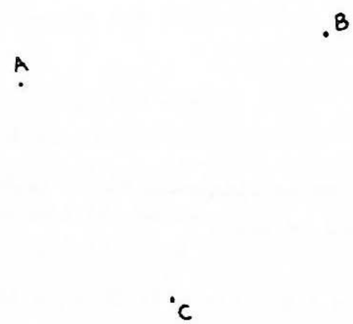
---

c) Trace, no espaço abaixo, dois triângulos e verifique se as três mediatrizes de cada triângulo interseccionam-se ou não num mesmo ponto.

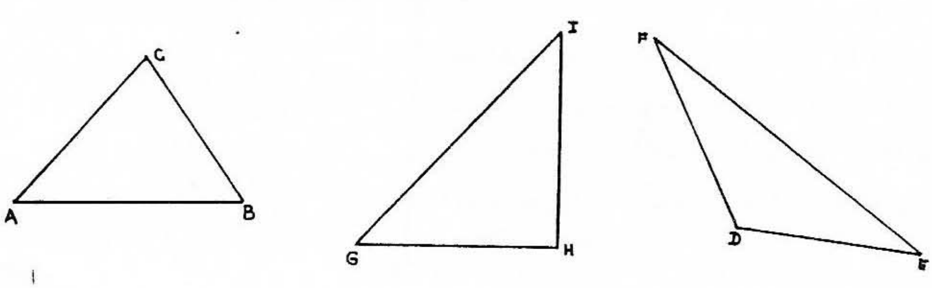
<u>Texto 12</u>: <u>Circuncentro de um Triângulo</u>.

Pelo que você observou na atividade anterior, as mediatrizes de um triângulo se interceptam em um único ponto. Esse ponto - recebe o nome de <u>Circuncentro do Triângulo</u>. Isto porque, ele é o centro de uma circunferência que passa pelos três vértices do triângulo, ao mesmo tempo. Comprove isso, inscrevendo os triângulos dos ítens <u>a</u> e <u>c</u> da atividade anterior, numa circunferência.

<u>38a. Atividade</u>: Trace uma circunferência que passe pelos três pontos abaixo.



<u>39a. Atividade</u>: Considere os triângulos abaixo:



a) Determine o ponto médio de cada um dos lados dos triângulos dados.

b) Em cada triângulo, ligue o ponto médio de cada lado ao vértice oposto a esse lado.

c) Os segmentos de reta que você encontrou em cada triângulo se interceptam num mesmo ponto? ______________________

<u>Texto 13</u>: <u>Baricentro de um Triângulo</u>

Num triângulo, o segmento de reta cujas extremidades são o ponto médio de um lado e o vértice oposto a esse lado, chama-se <u>Mediana relativa a esse lado</u>. Pelo que você observou na atividade anterior, as três medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto. Esse ponto recebe o nome de <u>Baricentro do Triângulo</u>. Baricentro é o centro de gravidade de um triângulo, isto é, o ponto de equilíbrio do triângulo. Comprove isto, recortando um triângulo de papel cartão e suspendendo-o, por meio de um barbante com um nó, passando por um pequeno orifício feito no seu baricentro.

<u>40a. Atividade</u>: Considere novamente os triângulos da atividade 39.

a) Tome no compasso, a distância entre o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e o baricentro do Δ ABC.
Quantas vezes essa distância cabe na mediana relativa ao lado $\overline{AB}$? ______________________
Quantas vezes essa distância cabe no segmento cujas extremidades são o baricentro e o vértice C do triângulo ABC?
____

b) Tome no compasso, a distância entre o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e o baricentro do triângulo ABC.
Quantas vezes essa distância cabe na mediana relativa ao lado $\overline{AC}$? ______________________
Quantas vezes essa distância cabe no segmento cujas extremidades são o baricentro e o vértice B do triângulo ABC?
____

c) Tome no compasso, a distância entre o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e o baricentro do triângulo ABC.

Quantas vezes essa distância cabe na mediana relativa ao lado $\overline{BC}$? ____

Quantas vezes essa distância cabe no segmento cujas extremidades são o baricentro e o vértice A do triângulo ABC?

____

d) Faça o mesmo para as três medianas dos triângulos DEF e GHI.

e) Quantas vezes o segmento de reta, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio de um dos lados de um triângulo, cabe na mediana relativa a esse lado? ____________________

f) Quantas vezes o segmento de reta, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio de um dos lados de um triângulo, cabe no segmento cujas extremidades são o baricentro e o vértice oposto a esse lado?

____

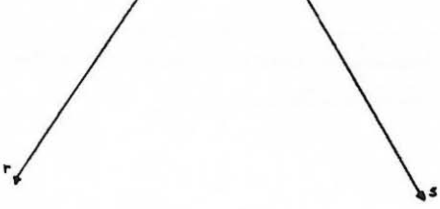
<u>41a. Atividade</u>: Num triângulo PRQ a mediana relativa ao lado $\overline{PQ}$ mede 6 cm. A medida do segmento de reta cujas extremidades são o Baricentro (G) e o ponto médio do lado $\overline{PR}$ do triângulo PQR é - 2,5 cm.

a) Determine a medida da mediana relativa ao lado $\overline{PR}$ do triângulo PQR. ________________________________

b) Qual é a distância entre o Baricentro (G) e o vértice R do - triângulo PQR? ________________________________

c) Qual é a distância entre o Baricentro (G) e o vértice R do - triângulo PQR? ________________________________

<u>42a. Atividade</u>: Considere o ângulo de vértice P formado pelas semi-retas r e s abaixo.



a) Centrando o compasso no ponto P, trace um arco de circunferên-cia, de raio qualquer, que cruze a semi-reta r no ponto A e a semi-reta s no ponto B.

b) Centrando o compasso nos pontos A e B, trace dois arcos de circunferência que se cruzem num ponto Q, localizado no interior do ângulo dado.

c) Ligue o ponto Q aos pontos A, B e P.

d) Os triângulos QAP e QBP são congruentes? Por quê? ____________

____

____

____

e) Os ângulos APQ e QPB são congruentes? Por quê? ____________

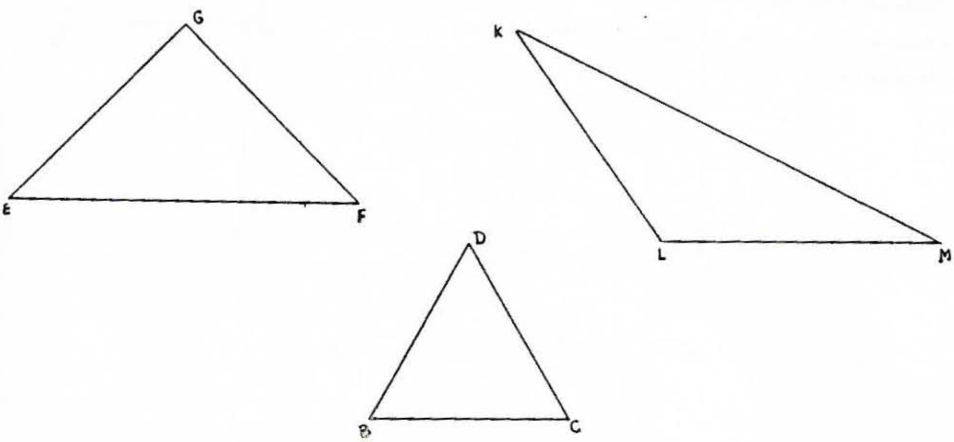
____

____

<u>Texto 14</u>: <u>Bissetriz de um Ângulo</u>.

Você demonstrou, na atividade anterior, que os ângulos $A\hat{P}Q$ e $Q\hat{P}B$ são congruentes. Isso significa que o segmento de reta $\overline{PQ}$ divide o ângulo $A\hat{P}B$ ao meio. Chamamos de <u>Bissetriz de um Ângulo</u> à semi-reta que tem origem no vértice desse ângulo e que o divide ao meio. Para se construir a bissetriz de um ângulo qualquer, utilizando apenas régua e compasso, basta seguir os passos da atividade anterior.

<u>43a. Atividade</u>: Considere os triângulos abaixo.



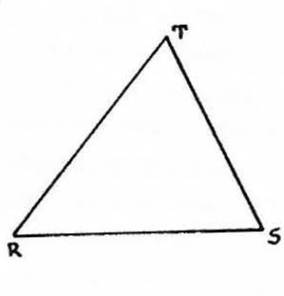
a) Trace a bissetriz de cada um dos ângulos dos triângulos dados.

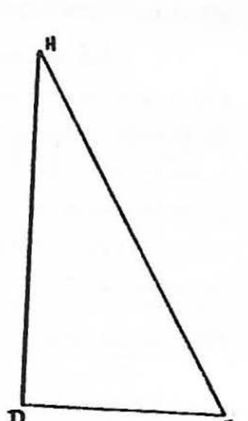
b) As três bissetrizes traçadas, em cada um dos triângulos interseccionam-se num mesmo ponto? ______________________________

Texto 15: Incentro de um Triângulo.

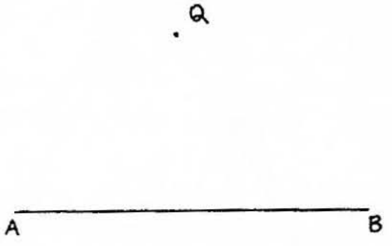
Pelo que você observou, na atividade anterior, as bissetrizes de um triângulo interceptam num mesmo ponto. Esse ponto recebe o nome de Incentro do Triângulo. Isto porque, em cada triângulo ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo, isto é, que que tangencia os três lados do triângulo, ao mesmo tempo. Comprove isto, inscrevendo uma circunferência em cada um dos triângulos da atividade anterior.

44a. Atividade: Trace as circunferências circunscritas e inscritas a cada um dos triângulos abaixo e determine a medida de seus raios.





45a. Atividade: Considere o segmento $\overline{AB}$ abaixo e o ponto Q, não pertencente ao segmento.



a) Centrando o compasso no ponto Q, trace um arco de circunferência que cruze o segmento $\overline{AB}$ nos pontos R e S.

b) Centrando o compasso nos pontos R e S, trace dois arcos de circunferência que se cruzem num ponto P, de maneira que o segmento de reta $\overline{PQ}$ cruze o segmento $\overline{AB}$.

c) Ligue o ponto Q aos pontos R e S e o ponto P aos pontos R, S e Q.

d) Os triângulos PRQ e PSQ são congruentes? Por quê? ___________

____

____

____

e) O segmento $\overline{QP}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$? Por quê?

____

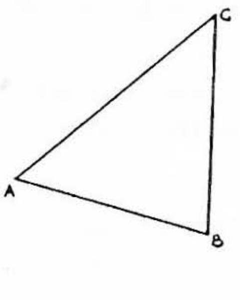
____

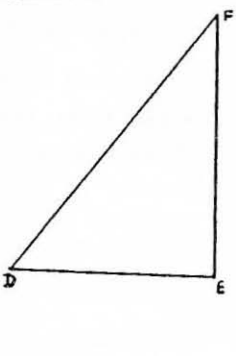
____

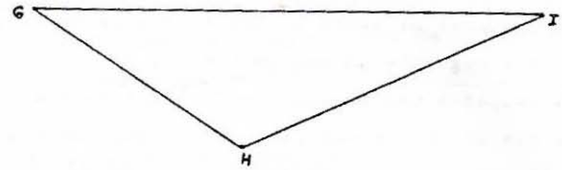
<u>Texto 16</u>: <u>Construção da Perpendicular a um Segmento por um Ponto não pertencente a ele.</u>

Você demonstrou, na atividade anterior, que o segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e, dessa forma, aprendeu um processo de construção de uma reta perpendicular a um segmento de reta dado, por um ponto não pertencente a esse segmento, utilizando apenas régua e compasso.

<u>46a. Atividade</u>: Considere os triângulos abaixo.







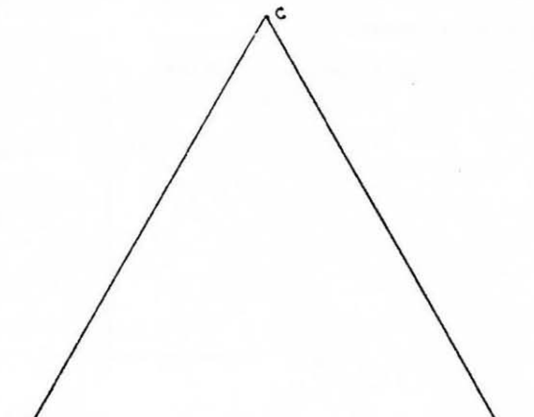
a) Utilizando o processo anterior, trace retas perpendiculares a cada um dos lados dos triângulos, passando pelo vértice oposto ao lado considerado.

b) Em cada triângulo, as retas perpendiculares traçadas, interceptam-se em um mesmo ponto? ______________________________

<u>Texto 17</u>: <u>Ortocentro de um Triângulo</u>.

Dado um triângulo ABC, chamamos de <u>Altura relativa ao lado $\overline{AB}$</u>, ao segmento de reta que é perpendicular ao lado $\overline{AB}$ e cujas extremidades são o vértice C e o ponto onde a perpendicular intercepta o lado $\overline{AB}$. Um triângulo, portanto, possui três alturas, cada uma relativa a um dos seus lados. Você observou, na atividade anterior, que as retas que contem as três alturas de um triângulo interceptam num mesmo ponto. Esse ponto é chamado <u>Ortocentro</u> do - triângulo.

<u>47a. Atividade</u>: Considere o triângulo equilátero abaixo.



a) Trace: a mediatriz, a mediana e a altura relativas ao lado $\overline{AB}$ e a bissetriz do ângulo oposto a esse lado.

b) O que você observou ao executar o ítem a?

____

____

c) Trace: a mediatriz, a mediana e a altura relativas ao lado $\overline{BC}$ e a bissetriz do ângulo oposto a esse lado.

d) O que você observou ao executar o ítem c?

____

____

e) Trace: a mediatriz, a mediana e a altura relativas ao lado $\overline{AC}$ e a bissetriz do ângulo oposto a esse lado.

f) O que você observou ao executar o ítem e?

____

____

g) O que você pode afirmar a respeito da localização do circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro de um triângulo - equilátero? ______________________________

____

____

h) Demonstre que num triângulo equilátero a bissetriz de um ângulo qualquer coincide com a altura, mediana e mediatriz relativas ao lado oposto a esse ângulo.

48a. Atividade: Demonstre a seguinte afirmação:

"Em todo triângulo isósceles a bissetriz do ângulo formado pelos dois lados congruentes coincide com a mediatriz, a mediana e a altura relativas ao lado não-congruente (base)".

49a. Atividade- Num triângulo ABC, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes e m $(A\hat{C}B) = 50°$. Determine:

a) m $(B\hat{A}C)$ = ______________

b) m $(C\hat{B}A)$ = ______________

50a. Atividade: O lado de um triângulo equilátero mede 10 cm. Determine:

a) A medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

b) A medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

c) A medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

d) A medida da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

e) A medida de cada um dos ângulos internos do triângulo ABC.

f) O perímetro do triângulo ABC.

g) A área do triângulo ABC

h) A distância do vertice A ao baricentro G do triângulo ABC.

i) O raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

j) O raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

51a. Atividade: A altura de um triângulo equilátero mede 3 cm. Determine:

a) A medida do lado desse triângulo

b) O perímetro desse triângulo.

c) A área desse triângulo

d) A distância de um vértice qualquer do triângulo ao seu baricentro.

e) O raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

f) O raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

52a. Atividade: Os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC medem respectivamente: 6 cm., 5 cm. e 5 cm. e o ângulo BAC desse triângulo mede - 53°. Determine:

a) A medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do Δ ABC.

b) O perímetro do Δ ABC.

c) A área do Δ ABC

d) A medida da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ do Δ ABC.

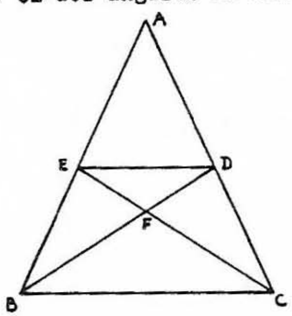
e) $m\ (C\hat{B}A) =$

f) $m\ (A\hat{C}B) =$

g) A medida do ângulo cujos lados são: o lado $\overline{AC}$ do triângulo e a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

h) A distância do vértice C do Δ ABC ao seu baricentro.

53a. Atividade: ABC é um triângulo isósceles no qual as bissetrizes $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ dos ângulos da base certam-se em F. Demonstre que:



a) O triângulo BCF é isósceles.

b) Os ângulos $B\hat{E}F$ e $B\hat{D}C$ são congruentes.

c) Os triângulos BCE e BCD são congruentes.

d) O triângulo EFD é isósceles.

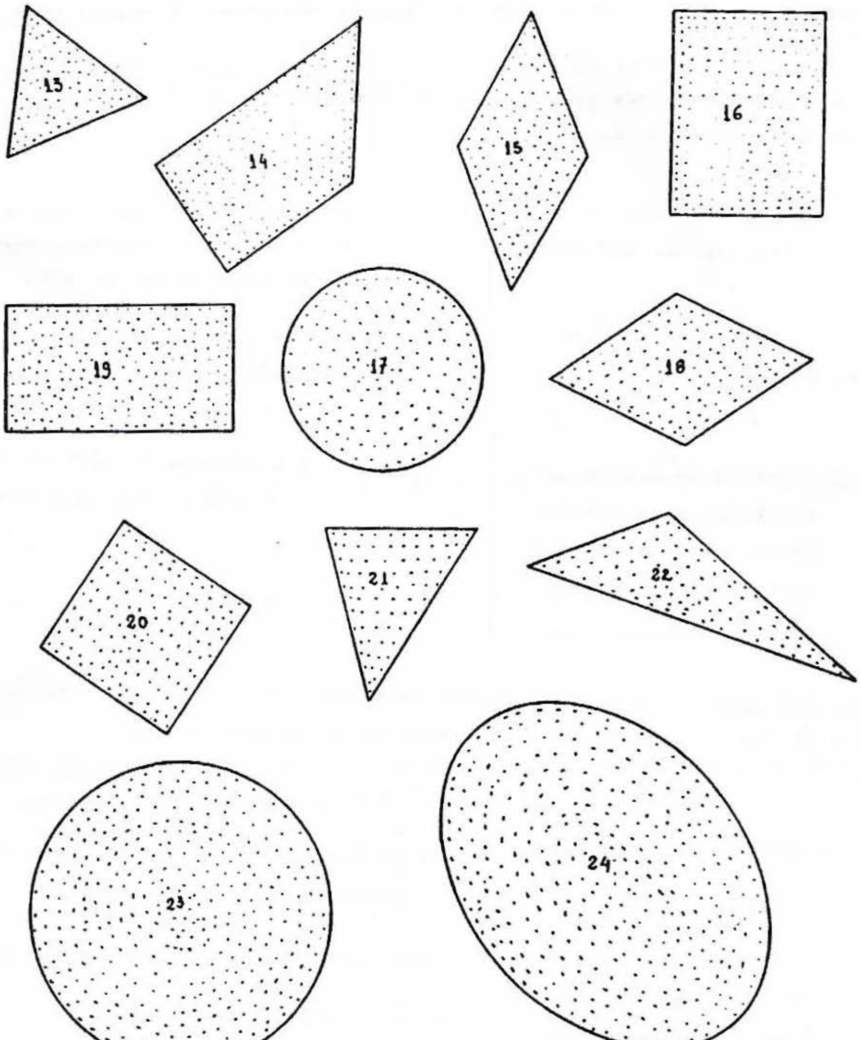
e) O triângulo EDA é isósceles.

f) $\overline{ED}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

54a. Atividade: Demonstre que os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero são os vértices de um outro triângulo equilátero.

55a. Atividade: Demonstre que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles são os vértices de um outro triângulo isósceles.

ANEXO I



ANEXO II