VOLUMES DA SÉRIE

TÓPICOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA

1 – Números Naturais
2 – Geometria I
3 – O Conceito de Fração
4 – Operações com Números Fracionários
5 – O Problema da Medida
6 – Números Decimais
7 – Geometria II
8 – Números Inteiros
9 – Cálculo Literal
10 – Equações de 1º Grau
11 – Sistemas de Equações de 1º Grau
12 – Proporcionalidade
13 – Geometria III
14 – Áreas e Perímetros
15 – Números Irracionais
16 – Equações de 2º Grau

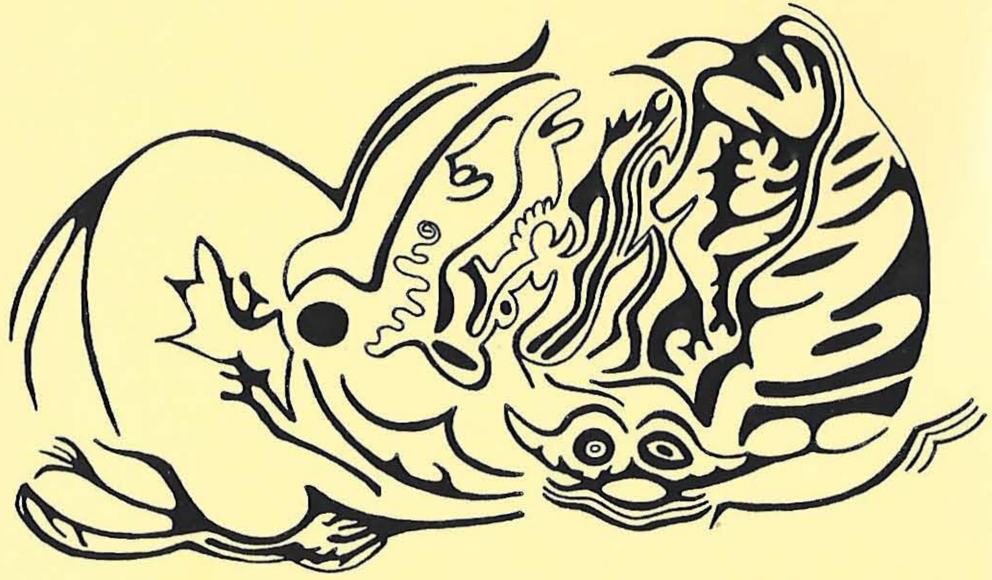
δx DELTA XIS
EDITORA LTDA

Rua: Maria Luiza Missio Mingone, 184
13100 - Campinas - SP.

Tópicos de Ensino de

MATEMÁTICA

7 – Geometria II



ADAIR MENDES NACARATO
ANTONIO MIGUEL
MANOEL AMARAL FUNCIA
MARIA ÂNGELA MIORIM

Delta Xis Editora Ltda

APRESENTAÇÃO

Desde 1982, um grupo de professores de Matemática de Campinas, insatisfeitos com os resultados obtidos na sua prática pedagógica, vem se reunindo com o objetivo de elaborar projetos de ensino-aprendizagem que possam, aos poucos, alterar a situação existente.

Esses projetos são aplicados em escolas das redes pública e particular e avaliados periodicamente. A avaliação dos resultados obtidos na prática levanta críticas e sugestões que impõem, frequentemente, aprofundamento teórico e reformulações dos projetos já produzidos, além da produção de novos projetos. Essa é a principal característica desse material: o fato de estar sendo continuamente refeito. Outra característica dele é que, embora englobe o conteúdo de 5ª a 8ª séries, é apresentado em fascículos, permitindo ao professor escolher o momento mais adequado para trabalhar um certo tema junto à seus alunos.

Contamos atualmente com 16 projetos que compõem os volumes da série "Tópicos de Ensino de Matemática". Esses fascículos representam a mais recente versão do trabalho mas, certamente, não a última.

Um trabalho dessa natureza, só foi e continua sendo possível, graças à participação contínua de professores que aplicam os projetos. Queremos registrar, portanto, o nosso agradecimento aos seguintes professores que, durante esses anos, têm contribuído na elaboração e reformulação dos projetos, trazendo críticas e sugestões, participando de reuniões e encontros com o propósito de repensar e aprofundar questões referentes ao ensino da Matemática:

Ana Maria C.Coimbra, Ana Regina P.B.Angi, Aurora S. Santana, Beatriz V.B.de Carvalho, Carmem Lúcia B.Passos, Cláudia V.C.Miguel, Divina A. de Aquino, Eliza A.Mukai, Elizabeth A.Carrara, Gelson J.Jacobucci, Heloisa de Carvalho M.Debiazzi, Jane M.da Silva Vidal, José Amaury Alves, Margali A.de Nadai, Maria Aparecida B.Pinheiro, Maria Clélia F. Jacobucci, Maria Lúcia Negri, Marília B.Pereira, Marisa S.Pinheiro Travaini, Marta I. de Almeida, Neusa B.Ferraz, Regina Celi Ayres, Ronaldo Nicolai, Rosana Fávero, Rosemeire M.R.Silva, Sandra T.Cardoso, Suely M.Gimenis, Susy M.Fadel, Teresa Neide G.Guimarães, Vilma M. M. Silva, Yara P.P.Bueno e Zuleide G. Paulino.

Campinas, fevereiro de 1990

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 01

1 - O conceito da circunferência 04

2 - Esferas, Superfícies Esféricas, Círculos e Circunferências 05

3 - Posições de um ponto em relação a uma circunferência 07

4 - Cordas e Diâmetros 10

5 - Circunferências Máximas 12

6 - Arcos de Circunferência 15

7 - Os povos antigos, o céu e a medida de arcos 17

8 - Circunferência Concêntricas 23

9 - Como se usa o transferidor 26

10 - O navio perdido e os submúltiplos do grau 27

11 - A medida do tempo 31

12 - Adição e subtração de arcos 35

13 - Exprimindo a medida do tempo no sistema decimal. 38

14 - O conceito do ângulo 40

15 - Tipos de ângulos 45

16 - Ângulos e Anjos 46

17 - Perspectivas e a representação plana de objetos não-planos 48

18 - Ângulos suplementares 50

19 - Ângulos opostos pelo vértice 51

20 - Ângulos alternos externos 54

21 - Condição de congruência dos ângulos alternos externos 55

22 - Ponto médio e mediatriz 64

23 - Mediatrizes, Cordas e Tangentes 66

24 - Perpendicularismo entre segmento e superfície plana 67

25 - Comprimento de uma circunferência 69

26 - Como Eratóstenes mediu a Terra 74

Anexo I 78

Anexo II 79

Anexo III 80

INTRODUÇÃO

Dando continuidade ao Estudo da Geometria, serão estudados neste trabalho, tópicos referentes a esferas, superfícies esféricas, círculos e circunferências, arcos e ângulos e propriedades de retas paralelas cortadas por transversais.

Grande parte do conteúdo geométrico que aqui será desenvolvido já era de conhecimento dos povos da Antiguidade.

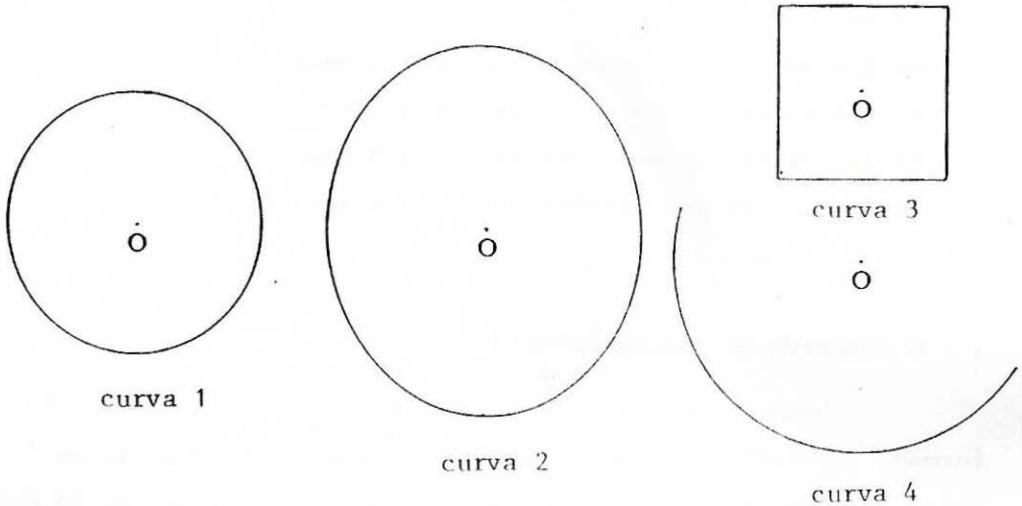
Esses conhecimentos foram produzidos com base em necessidades práticas que se impuseram a esses povos. Essas práticas levaram esses povos à observação e estudo do céu e, dessa forma, eles puderam produzir e acumular conhecimentos astronômicos.

A astronomia foi, portanto, a primeira ciência que surgiu na face da Terra já ligada à Geometria. Isso porque o homem logo percebeu que grande parte dos conhecimentos adquiridos na prática da agrimensura ou demarcação de terras podia ser aplicada, com êxito, em cálculos astronômicos. Assim, a geometria, que inicialmente era utilizada para medir as terras e coisas que estavam sobre a terra, passou também a ser usada para medir a própria Terra. Isto é, para cálculo de distâncias inacessíveis como, por exemplo, o comprimento da circunferência máxima da Terra, o diâmetro e o raio da Terra, a distância entre a Terra e a Lua, etc...

Você estudará neste trabalho uma pequena parte desses conhecimentos baseados nessas experiências de nossos antepassados. Mas isso não será feito aqui de forma como eles fizeram e nem como os mesmos objetivos.

O objetivo central deste estudo é fazer com que você possa compreender como se pode efetuar o cálculo de algumas distâncias inacessíveis através do uso combinado de conceitos e propriedades geométricas.

1ª ATIVIDADE : Observe as curvas abaixo:



a) Complete com as palavras: aberta ou fechada.

A curva 1 é

A curva 2 é

A curva 3 é

A curva 4 é

b) Por quantos pontos da superfície dessa folha de papel a curva 1 passa ?

c) Por quantos pontos da superfície dessa folha de papel a curva 4 passa ?

d) Para cada curva acima, escolha vários pontos pertencentes' a elas e meça a distância desses pontos ao centro O de cada curva. Complete as sentenças abaixo com as palavras: iguais ou diferentes.

As distâncias encontradas na curva 1 são:

As distâncias encontradas na curva 2 são:

As distâncias encontradas na curva 3 são:

As distâncias encontradas na curva 4 são:

1 - O CONCEITO DE CIRCUNFERÊNCIA

Chamamos de circunferência toda curva plana e fechada formada por infinitos pontos que têm a mesma distância de um ' ponto fixo chamado centro. Observe novamente as curvas da 1ª atividade e diga quais delas são circunferências.

2ª ATIVIDADE : Observando os objetos mostrados pelo professor, assinale com um X quais dos cortes seguintes produzem circunferências e, em cada caso, faça um desenho da seção deixada pelo corte em cada objeto.

a) (   ) A seção deixada por um corte paralelo à base de uma superfície cilíndrica.

b) (   ) A seção deixada por um corte não-paralelo à base de uma superfície cilíndrica.

c) (   ) A seção deixada por um corte paralelo à base de uma superfície cônica

d) ( ) A seção deixada por um corte não-paralelo à base de uma superfície cônica

e) ( ) A seção deixada por um corte qualquer de uma superfície esférica.

f) ( ) A seção deixada por um corte qualquer de uma esfera.

g) ( ) A seção deixada por um corte paralelo à base de um cilindro.

2 - ESFERAS, SUPERFÍCIES ESFÉRICAS, CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS

A atividade anterior nos permite fazer a distinção entre uma esfera, uma superfície esférica, um círculo e uma circunferência. Uma esfera e uma superfície esférica têm a mesma forma, além de serem, ambas, objetos não-planos. O que as distingue, entretanto, é o fato de que a esfera é um sólido e a superfície esférica uma superfície, isto é, a **periferia** ou **fronteira de uma esfera**. Desse modo, um corte qualquer de uma esfera sempre gera superfícies e um corte qualquer sobre uma superfície esférica sempre gera curvas. Dizemos que qualquer superfície gerada pelo corte de uma esfera se chama **CÍRCULO** e qualquer curva gerada pelo corte de uma superfície esférica se chama **CIRCUNFERÊNCIA**.

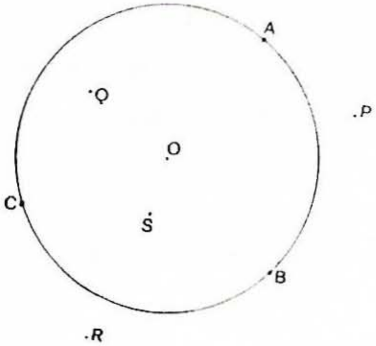
O que distingue, portanto, uma circunferência de um círculo é o fato de que o círculo é uma superfície plana e a circunferência é uma curva plana, isto é, a circunferência é a **periferia ou fronteira de um círculo.**

3ª ATIVIDADE : Em cada parênteses, coloque as letras E, S, C e F conforme o objeto citado seja parecido com uma esfera, uma superfície esférica, um círculo ou uma circunferência, respectivamente.

a) (   ) bolinha de ping-pong
b) (   ) bola de bilhar
c) (   ) disco long-play
d) (   ) anel
e) (   ) bola de futebol
f) (   ) planeta Terra
g) (   ) Lua
h) (   ) bolinha de gude

4ª ATIVIDADE :

a) Ligue os pontos A, B e C da circunferência ao centro O. Meça os segmentos de reta formados. O que você observa ?



b) Se você pegar um outro ponto qualquer dessa circunferência e ligar o seu centro, qual vai ser a medida de segmento de reta formado ?

c) Ligue, agora os pontos P e R

ao centro da circunferência e meça os segmentos de reta formados. As medidas desses segmentos são maiores, menores ou iguais às anteriores ?

d) Ligue os pontos Q e S ao centro da circunferência e meça os segmentos de reta formados. As medidas desses segmentos são maiores, menores ou iguais às anteriores ?

3 - POSIÇÕES DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Todo segmento de reta que se obtém ligando um ponto qualquer da circunferência ao seu centro se chama **raio** da circunferência.

Quantos raios possui uma circunferência ?

Dizemos ainda, que um ponto pertence a uma circunferência, quando a distância desse ponto ao centro dessa circunferência for igual à medida do raio da circunferência.

Se essa distância for maior que a medida do raio, então, esse ponto é exterior à circunferência. Caso essa distância seja menor que a medida do raio, então, ele é interior à circunferência.

5ª ATIVIDADE :

a) Utilizando um compasso, trace duas circunferências que se interceptem em 2 pontos distintos A e B. O raio de uma delas deve medir 2cm e o raio da outra 25mm.

b) Marque, na superfície onde as circunferências foram traçadas, um ponto C que esteja no exterior de ambas as circunferências.

c) Marque um ponto D que esteja situado, ao mesmo tempo, no interior da circunferência de raio 2cm e no exterior da outra.

d) Marque um ponto E que esteja situado no interior da circunferência de raio 25mm e que, ao mesmo tempo, pertença à outra circunferência.

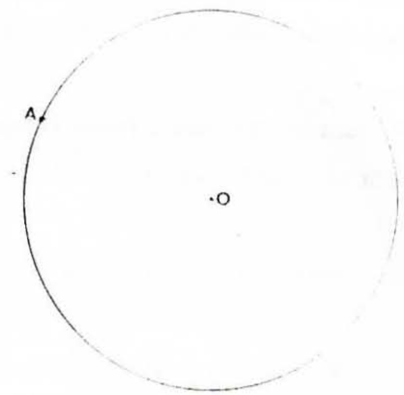
e) Marque um ponto F que esteja situado no interior de ambas as circunferências.

f) Marque um ponto G que pertença apenas à circunferência de raio 25 mm.

6ª ATIVIDADE : Observe a circunferência de centro O, na folha seguinte.

a) Utilizando uma régua, trace 8 segmentos de reta que tenham uma extremidade no ponto A e a outra num outro ponto qual -

quer da circunferência.



b) Trace um outro segmento de reta que tenha uma extremidade no ponto A, passe pelo centro da circunferência e que tenha a outra extremidade na circunferência.

c) Dentre os 9 segmentos que você traçou, qual é o que possui o maior comprimento ?

d) Seria possível traçar um outro segmento de reta, com uma das extremidades no ponto A e a outra num ponto qualquer da circunferência, que fosse maior que o segmento que passa pelo centro da circunferência ?

e) Seria possível traçar um segmento de reta, cujas extremidades fossem dois pontos diferentes da circunferência, e que tivesse o mesmo comprimento do segmento que passa pelo centro da circunferência ? Em caso afirmativo, diga quantos.

4 - CORDAS E DIÂMETROS

Chamamos de **corda de uma circunferência**, todo segmento de reta cujas extremidades são dois pontos distintos da circunferência.

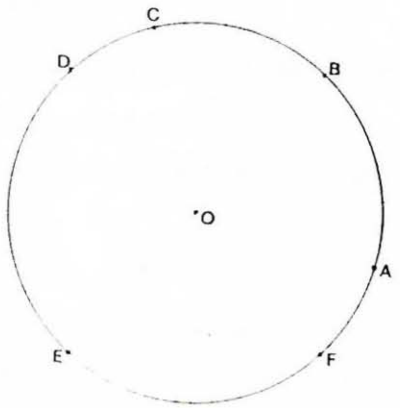
Chamamos de **diâmetro de uma circunferência** toda corda que passa pelo centro da circunferência.

a) Quantas cordas possui uma circunferência ?

b) Qual é a maior corda de uma circunferência ?

c) Quantos diâmetros possui uma circunferência ?

7ª ATIVIDADE : Observe a circunferência seguinte e os pontos A B, C, D, E e F pertencentes a ela.



a) Qual é a medida do raio da circunferência? (Em cm).

b) Utilizando caneta azul, trace e nomeie todas as cordas da circunferência que você pode formar com esses pontos.

c) Utilizando caneta vermelha, trace e nomeie na circunferên - cia, uma corda que meça 3cm e outra que meça 6cm.

d) É sempre possível traçar numa circunferência dada, cordas ' de qualquer comprimento ? Por quê ?

e) Quanto mede o diâmetro da circunferência ?

f) Que relação existe entre o comprimento do raio e do diâme - tro dessa circunferência ?

g) Utilizando um compasso, trace várias circunferências de rai os diferentes, meça seus raios e diâmetros e, em seguida , verifique se a relação do ítem anterior continua válida pa- ra essas circunferências.

8ª ATIVIDADE : Efetuando cortes em superfícies esféricas coloque V ou F nas afirmações seguintes:

a) (   ) As seções produzidas por qualquer corte em uma superfície esferica são sempre circunferências com diâmetros de mesma medida.

b) (   ) Dados 2 pontos quaisquer de uma superfície esférica,é sempre possível encontrar infinitas maneiras de cortá-la de forma que cada um dos cortes passe por esses 2 pontos.

c) (   ) Por dois pontos distintos de uma superfície esférica, que não sejam as extremidades de um diâmetro, dessa superfície, existe sempre uma única maneira de cortá-la de forma que o corte passe pelos pontos considerados e pelo centro da superfície esférica.

d) (   ) As seções produzidas por qualquer corte que passe pelo centro de uma superfície esférica são sempre circunferências com diâmetros da mesma medida.

e) (   ) Dentre todos os cortes possíveis de uma superfície esférica, aqueles que produzem circunferências com o maior diâmetro possível são os cortes que passam pelo centro da superfície esférica.

5 - CIRCUNFERÊNCIAS MÁXIMAS

Ao executar a atividade anterior, você deve ter concluído que todo corte que passe pelo centro de uma superfície esférica produz seções que são circunferências que possuem o maior diâmetro possível. Circunferências desse tipo são chamadas de **CIRCUNFERÊNCIAS MÁXIMAS** de uma superfície esférica.

Nas viagens marítmas, aéreas e mesmo nas viagens espaciais, é muito importante saber a localização exata de um ponto sobre a superfície da Terra. Como você sabe, o nosso planeta tem a forma aproximada de uma esfera e vivemos, todos, sobre sua superfície, isto é, numa superfície esférica. Daí, para facilitar a localização de pontos sobre a superfície da Terra, geógrafos, cartógrafos e astrônomos, imaginaram linhas sobre a sua superfície: são as **linhas** imaginárias chamadas **PARALELOS E MERIDIANOS.** Os meridianos são cortes sobre a superfície da Terra que passam por dois pontos extremos (chamados POLOS) de um diâmetro da superfície terrestre. Os meridianos são portanto, circunferências máximas sobre a superfície terrestre. Já os paralelos, são determinados por cortes paralelos uns aos outros sobre a superfície terrestre. Dessa forma, só existe um paralelo que passa pelo centro da superfície terrestre. Este paralelo é uma circunferência máxima e recebe o nome de **EQUADOR.** Os demais paralelos não são circunferências máximas sobre a superfície terrestre. O Equador, por ser uma circunferência máxima, divide a superfície terrestre em duas partes chamadas **HEMISFÉRIOS** (metade de uma esfera): o hemisfério Norte e o hemisfério Sul. O Brasil está situado no hemisfério Sul do Globo terrestre.

9ª ATIVIDADE : Marque, em uma superfície esférica (utilize a superfície de uma bola de isopor), dois pontos A e B distintos, que não sejam extremidades de um diâmetro dessa superfície. Coloque V ou F nas afirmações seguintes :

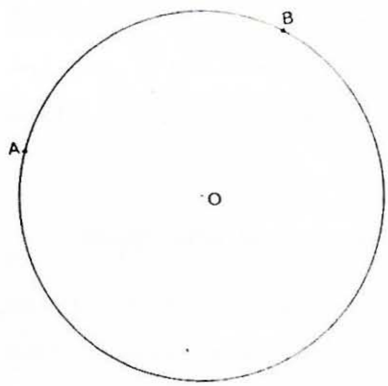
a) (   ) Existem infinitos caminhos diferentes sobre a superfície esférica para se sair do ponto A e chegar ao ponto B.

b) (   ) Existem infinitos caminhos diferentes sobre a superfície esférica para se sair de A e chegar a B, que são pedaços de circunferências não máximas dessa superfície.

c) (   ) Existem apenas dois caminhos diferentes sobre a superfície esférica para se sair de A e chegar a B, que são pedaços da circunferência máxima que passa por A e B.

d) (   ) O menor caminho possível sobre a superfície esférica para se sair do ponto A e chegar ao ponto B está na circunferência máxima que passa por A e B.

10ª ATIVIDADE : Uma formiga está no ponto A da circunferência abaixo e quer chegar ao ponto B da mesma, passando apenas por pontos que pertençam a essa circunferência.



a) Utilizando canetas azuis e canetas vermelhas, trace os diferentes caminhos que ela pode fazer para chegar ao ponto B.

b) Se a formiga optar pelo caminho azul, ela estará se movimentando no mesmo sentido que os ponteiros de um relógio ?

c) E se ela optar pelo caminho vermelho ?

6 - ARCOS E CIRCUNFERÊNCIAS

Ao fazer a atividade nº 10 você deve ter concluído que existem apenas dois caminhos possíveis para se sair do ponto A e chegar ao ponto B da circunferência, **passando apenas por pontos que pertençam a essa circunferência.**

Chamamos de **ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA** a qualquer caminho feito sobre uma circunferência, que ligue dois pontos quaisquer dessa circunferência.

É claro que se marcássemos dois pontos A e B numa superfície esférica, existiriam infinitos arcos de circunferência passando por A e B. Isto porque existem, como foi visto na 9ª atividade, infinitas circunferências (uma máxima e infinitas não-máximas) que passam por esses dois pontos.

Deste modo, como você notou na atividade anterior, se pegarmos dois pontos de uma circunferência, eles determinam dois arcos nessa circunferência: o vermelho e o azul.

Observe também, que partindo de um ponto da circunferência, pode-se chegar a outro caminhando em dois sentidos diferentes : **horário** (no mesmo sentido do movimento dos ponteiros do relógio) e **anti-horário** (contra o sentido do movimento dos ponteiros do relógio).

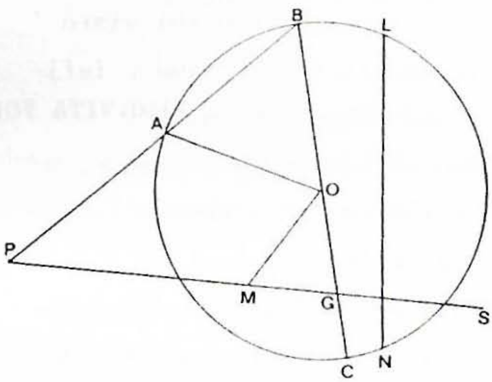
Para nomearmos arcos, devemos ter o cuidado de indicar a qual deles estamos nos referindo. Para isso, devemos adotar um sentido de percurso na circunferência. Por convenção, o sentido adotado é o anti-horário. Assim, quando escrevemos $\widehat{AB}$ estamos querendo dizer que o arco ao qual nos referimos, inicia-se no ponto A e vai até o ponto B no sentido anti-horário. Na circunferência da atividade anterior, o arco $\widehat{AB}$ é o maior arco e o arco $\widehat{BA}$ é o arco menor.

11ª ATIVIDADE : Observe novamente a circunferência da 7ª atividade.

a) O arco $\widehat{DE}$ é igual ao arco $\widehat{ED}$? Por quê ?

b) Nomeie todos os arcos formados pelos pontos A, B, C, D, E e F nessa circunferência.

12ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo:



a) Nomeie todos os raios da circunferência.

b) Nomeie todas as cordas da circunferência, que não sejam diâmetros.

c) Nomeie todos os diâmetros da figura.

d) $\overline{OM}$ é um raio da circunferência ? Por quê ?

e) $\overline{PB}$ é uma corda da circunferência ? Por quê ?

f) Nomeie 5 arcos da figura.

g) Nomeie 5 segmentos de reta da figura que não sejam nem cor-e nem raios.

7 - OS POVOS ANTIGOS, O CÉU E A MEDIDA DE ARCOS

Você sabe, evidentemente, que para **medir um segmento** de reta utilizamos, geralmente, uma régua graduada em centímetros. Mas como é que se constrói essa escala na régua ?

Como 1 centímetro é a centésima parte de 1 metro, isto é, $1cm = \frac{1m}{100}$, então, precisamos pegar um segmento de reta do tamanho de um metro e dividí-lo em 100 partes iguais ou então, dividí-lo em 10 partes iguais, e tomando uma dessas partes, dividí-la novamente em 10 partes iguais.

Assim como os segmentos de reta de diferentes tamanhos podem ser medidos, podemos também medir arcos dos mais diversos tamanhos. É lógico que a régua não é o instrumento mais aconselhável para se medir arcos, embora pudéssemos retificar o arco a ser medido, isto é, esticá-lo e colocá-lo sobre uma régua, expressando seu comprimento em cm.

Entretanto, é mais comum utilizarmos um outro instrumento para medir arcos. Este instrumento se chama **transferidor,** e nada mais é do que um círculo ou semi-círculo graduado. Mas como é que é feita essa escala no transferidor ?

De forma semelhante à construção da régua, toma-se uma circunferência de raio qualquer e a dividimos em 360 partes iguais, isto é, em 360 arcos iguais.

Mas por que 360 partes ? Este fato tem uma explicação histórica que passamos a expor.

A astronomia talvez tenha sido a primeira ciência que utilizou os conhecimentos matemáticos.

Sabemos que a sobrevivência dos povos da antiguidade, que viveram há milhares de anos antes do nascimento de Jesus Cristo, dependia do que se obtinha da terra, isto é, do plantio e da colheita. Entretanto, como a maior ou menor produção de alimentos, a melhor época de plantar e colher, etc... dependiam dos fenômenos celestes e climáticos (estações do ano, secas, chuvas, enchentes dos rios, etc.) houve a necessidade de estudar o movimento dos astros e de se confeccionar mapas celestes.

Para se usar o céu como relógio ou calendário necessita-se de números. E medir a distância entre a Lua e as estrelas e o horizonte, também implica o emprego de números. Se se desejasse saber a que distância a Lua estava acima do horizonte, tinha-se que medir uma **distância inacessível**, isto é, que não pode ser feita diretamente. Solucionou-se esse impasse empregando-se os seguintes métodos: esticava-se o braço e se calculava quantos dedos comportava o espaço entre a Lua e o horizonte, ou segurava-se um fio entre as mãos afastadas do corpo e se media a distância. Os braços deviam permanecer bem esticados pois, caso contrário, a resposta não seria fiel. A medida feita era, portanto, diferente da de um comprimento comum; e este foi o primeiro passo para se medir um arco.

Entretanto, não sabemos quando o homem começou a medir arcos, mas certamente eram medidos na antiga Mesopotâmia e eram perfeitamente conhecidos no segundo milênio antes de Cristo.

A aparência variável do céu era algo que cativava a mente e a imaginação do homem primitivo. O lento e magestoso movimento do céu durante a noite, conduzindo as estrelas de um lado a outro do horizonte, era uma visão extraordinária. Da mesma forma, o movimento da Lua, que não apenas se levantava e se punha, como as estrelas, mas também mudava de forma, crescendo de uma fina linha no princípio do mês, até se tornar um grande globo no céu, e depois minguar outra vez. A Lua era também um medidor de tempo quase ideal, pois levava apenas 29 $\frac{1}{2}$ dias para completar seu ciclo de fases. Todos os calendários primitivos eram baseados na Lua.

Para os sacerdotes-astrônomos do antigo Egito, por exemplo, o céu servia para a determinação do tempo. E eles organizaram um calendário bastante satisfatório e dos mais avançados dos tempos antigos. Desde logo, observaram que a inundação anual do rio Nilo coincidia com o aparecimento, antes da alvorada, da estrela SIRIUS (conhecida pelos egípcios como Sotis), a mais brilhante estrela do céu. Ela aparecia nessa época depois de um longo período de invisibilidade, e, no céu claro do Egito, sua aparição deve ter sido impressionante. Esse nascimento de SIRIUS veio a se chamar "O Iniciador do Ano", e o calendário civil foi a ele associado.

Cada ciclo de fases da Lua, cuja duração era de aproximadamente 29 $\frac{1}{2}$ dias, chamou-se de MÊS. Desta forma, como dois aparecimentos consecutivos da estrela Sirius comportavam aproximadamente 12 ciclos de fases da Lua, então, cada ano possuía aproximadamente 12 meses dando um total aproximado de 354 dias.

Mais tarde, devido à necessidade de um calendário mais preciso, calculavam o ano com base nas estações. De acordo com este novo método o ano compreendia o período entre dois solstícios de verão consecutivos. O cálculo provavelmente foi feito usando-se uma haste vertical introduzida no solo e observando-se a extensão variável da sombra projetada no solo pela haste ao meio-dia de cada dia.

A medida que as estações passam, o sol sobe cada vez mais alto no céu e a sombra correspondente ao meio-dia vai diminuindo até que, no solstício de verão, ela atinge sua extensão mínima. Então, o Sol começa a descer outra vez e a sombra' ao meio-dia cresce, até atingir o seu maior valor no solstício de inverno. Esse fenômeno era bem conhecido por todas as civilizações. Ao elaborar esse novo calendário, os administradores mantiveram as 3 estações que o costume egípcio havia estabelecido há muito tempo: a inundação, a Emersão dos Campos e a Colheita. Mas os 4 meses em cada uma delas tinha, cada um, a duração de 30 dias totalizando 360 dias num ano ao qual foi somado mais 5 dias como fator de correção.

No início, da mesma forma que os egípcios, os babilônios, pensavam que o ano tinha 360 dias. Este fato confirmava' curiosamente o sistema de numeração por eles utilizado que, diferentemente do nosso que é decimal, utilizava a base 60 no registro dos números. Daí ser ele chamado de sistema sexagesimal.

Para os babilônios, a Terra possuia a forma de um **GUFA** (barco de pesca) virado de ponta-cabeça. O Sol movia-se pelo céu durante o dia e, à noite, movia-se debaixo da terra descrevendo uma circunferência. Hoje sabemos que ocorre o contrário: É a Terra que gira em torno do Sol. Como a duração do ano era de 360 dias, dividiram a circunferência correspondente à trajetória do Sol em torno da Terra em 12 arcos iguais de 30 gesh cada, totalizando 360 unidades (12x30).

Como herança dos povos da antiguidade continuamos hoje em dia a dividir uma circunferência em 360 partes iguais na construção do instrumento necessário à medida de arcos. Cada arco assim obtido corresponde a um arco de 1º (leia 1 grau). Em outras palavras, $1^{\circ} = \frac{1}{360}$ de uma circunferência de raio qualquer. (Este texto é uma adaptação, para fins didáticos, de trechos do livro "História Ilustrada da Ciência" - vol.1 - de Collin Ronan).

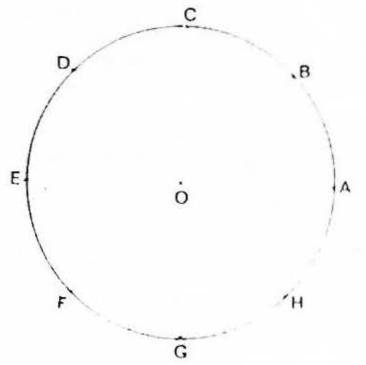
13ª ATIVIDADE : Responda:

a) Se você dividir uma circunferência de raio qualquer em 360 partes iguais, qual a medida de cada um dos arcos obtidos ?

b) O que você deve fazer para obter um arco de 1º ?

c) Se você dividir uma circunferência em 6 partes iguais, qual a medida de cada um dos arcos obtidos ?

d) A circunferência abaixo foi dividida em 8 partes iguais. Complete as sentenças a seguir:



1) m $(\widehat{AB})$ =

2) m $(\widehat{BC})$ =

3) m $(\widehat{EF})$ =

4) m $(\widehat{HA})$ =

5) m $(\widehat{AC})$ =

6) m $(\widehat{EG})$ =

7) m $(\widehat{AD})$ =

8) m $(\widehat{AE})$ =

9) m $(\widehat{AF})$ =

10) m $(\widehat{AG})$ =

11) m $(\widehat{AH})$ =

12) m $(\widehat{CG})$ =

13) m $(\widehat{EA})$ =

14) m $(\widehat{BH})$ =

e) Se você dividir uma circunferência em 60 partes iguais,qual a medida de cada um dos arcos obtidos ?

f) O que você faria para obter um arco de 12º ?

g) O que você faria para obter um arco de 15º ?

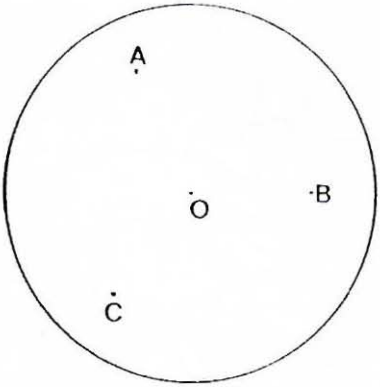
h) Se você quisesse construir um relógio que marcasse apenas ' horas, em quantas partes você teria que dividir uma circunferência ? Quanto vai medir cada um dos arcos assim obtidos?

i) E se você quisesse construir um relógio que marcasse também os minutos ?

14ª ATIVIDADE :

Num certo campeonato de tiro ao alvo, um atirador acertou seu tiro no ponto A, outro acertou seu tiro no ponto B e outro acertou seu tiro no ponto C, como mostra a circunferência (ou alvo).

Depois que os três competidores atiraram, o juiz da competição foi verificar qual dos tiros estava mais próximo do centro, isto é, quem era o ganhador da competição. Como ele não tinha nenhum instrumento para medir as distâncias, ele ficou com uma



grande dúvida para declarar o campeão, pois os tiros A, B e C estão, aparentemente, à mesma distância do centro do alvo.

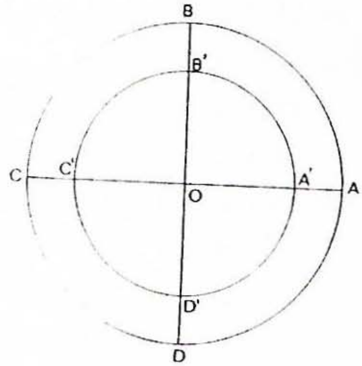
Utilizando apenas um compasso, como você resolveria a questão ?

8 - CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

Como você verificou na atividade anterior, para resolver o problema você precisou traçar três circunferências de raios diferentes e todas com centro no ponto O. Dizemos que duas ou mais circunferências são **concêntricas** quando elas possuem o mesmo centro.

15ª ATIVIDADE : Na figura seguinte, temos duas circunferências concêntricas, uma com raio 2cm e a outra com raio 3cm, ambas divididas em 4 partes iguais. Sem usar transferidor, complete as sentenças seguintes:

1) m $(\widehat{AB})$ =	5) m $(\widehat{CD})$ =
2) m $(\widehat{A'B'})$ =	6) m $(\widehat{C'D'})$ =
3) m $(\widehat{BC})$ =	7) m $(\widehat{DA})$ =
4) m $(\widehat{B'C'})$ =	8) m $(\widehat{D'A'})$ =



9) $\widehat{AB} + \widehat{BC} =$

10) $m\ (\widehat{AB}) + m\ (\widehat{BC}) =$

11) $\widehat{A'B'} + \widehat{B'C'} + \widehat{C'D'} =$

12) $m\ (\widehat{A'B'}) + m\ (\widehat{B'C'}) + m\ (\widehat{C'D'}) =$

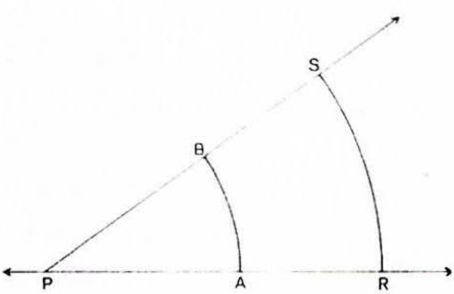
13) $\widehat{C'D'} + \widehat{D'A'} =$

14) $m\ (\widehat{C'D'}) + m\ (\widehat{D'A'}) =$

15) $m\ (\widehat{AB}) + m\ (\widehat{BC}) + m\ (\widehat{CD}) + m\ (\widehat{DA}) =$

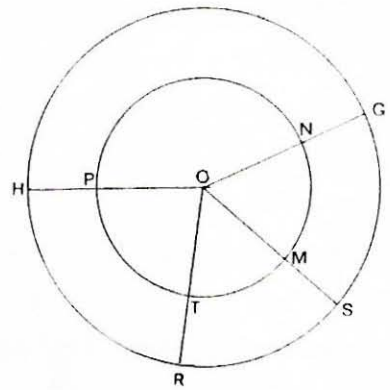
16) $m\ (\widehat{A'B'}) + m\ (\widehat{B'C'}) + m\ (\widehat{C'D'}) + m\ (\widehat{D'A'}) =$

16ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo:



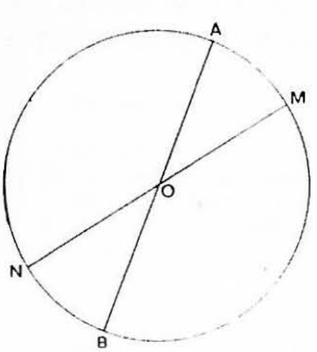
Qual dos arcos da figu ra é o maior, o arco ' $\widehat{AB}$ ou o arco $\widehat{RS}$?

17ª ATIVIDADE : Sabendo que m $(\overset{\frown}{MN})$ = 65°; m $(\overset{\frown}{RS})$ = 55° e m$(\overset{\frown}{TP})$ = 280°, complete as sentenças abaixo, sem usar transferidor.



1) m $(\overset{\frown}{TM})$ =
2) m $(\overset{\frown}{SG})$ =
3) m $(\overset{\frown}{PT})$ =
4) m $(\overset{\frown}{GS})$ =
5) m $(\overset{\frown}{SR})$ =
6) m $(\overset{\frown}{GR})$ =
7) m $(\overset{\frown}{HR})$ =
8) m $(\overset{\frown}{RH})$ =
9) m $(\overset{\frown}{NP})$ =
10) m $(\overset{\frown}{PN})$ =
11) m $(\overset{\frown}{GH})$ =
12) m $(\overset{\frown}{HG})$ =

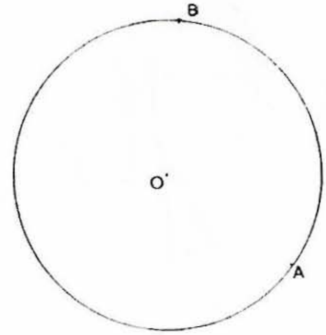
18ª ATIVIDADE : Sabendo que $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são dois diâmetros da circunferência e que m $(\overset{\frown}{MA})$ = 35°, complete as sentenças abaixo , sem utilizar transferidor.



1) m $(\overset{\frown}{AB})$ =
2) m $(\overset{\frown}{BA})$ =
3) m $(\overset{\frown}{MN})$ =
4) m $(\overset{\frown}{NM})$ =
5) $\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AN}$ =
6) m $(\overset{\frown}{MA})$ + m $(\overset{\frown}{AN})$ =
7) m $(\overset{\frown}{AN})$ =
8) $\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{NB}$ =
9) m $(\overset{\frown}{AN})$ + m $(\overset{\frown}{NB})$ =
10) m $(\overset{\frown}{NB})$ =

9 - COMO SE USA O TRANSFERIDOR

Vamos, agora, aprender a utilizar o transferidor na medida de arcos de circunferência. Pegue o seu transferidor e siga os passos abaixo para medir o arco AB da circunferência seguinte:



1º passo: Com o auxílio de uma régua, ligue os pontos A e B ao centro O da circunferência e prolongue esses segmentos nos sentidos de O para A e de O para B.

2º passo: Coloque o transferidor sobre a circunferência à direita de forma que o centro do transferidor coincida com o centro **O** da circunferência. Ao mesmo tempo, faça coincidir a linha que passa pelo **ponto zero** da escala do transferidor com o segmento $\overline{OA}$ prolongado. Nessa posição, o transferidor e a circunferência da folha de papel são duas circunferências concêntricas. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ deverá, portanto, ser igual à medida do arco que vai do ponto zero até o ponto da escala por onde passa o segmento $\overline{OB}$ prolongado.

Conclusão: m $(\overset{\frown}{AB})$ =

Como você poderia, sabendo a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ e sem utilizar o transferidor, calcular a medida do arco $\overset{\frown}{BA}$?

19ª ATIVIDADE : Utilizando um transferidor, complete :

1) m $(\overset{\frown}{PR})$ =

2) m $(\overset{\frown}{RS})$ =

3) m $(\overset{\frown}{SQ})$ =

4) m $(\overset{\frown}{QP})$ =

5) m $(\overset{\frown}{PS})$ =

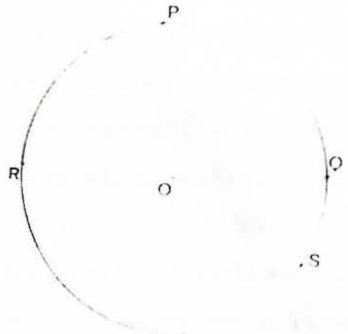
6) m $(\overset{\frown}{PQ})$ =

7) m $(\overset{\frown}{QS})$ =

8) m $(\overset{\frown}{RQ})$ =

9) m $(\overset{\frown}{RP})$ =

10) m $(\overset{\frown}{SR})$ =



20ª ATIVIDADE : Utilizando um transferidor, complete:

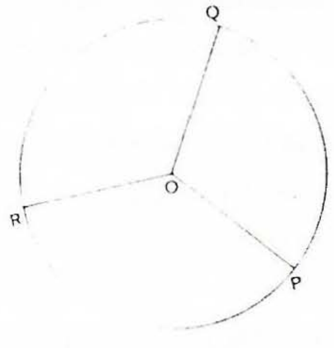
1) m $(\overset{\frown}{PQ})$ =

2) m $(\overset{\frown}{RP})$ =

3) m $(\overset{\frown}{QP})$ =

4) m $(\overset{\frown}{RQ})$ =

5) m $(\overset{\frown}{PQ})$ + m $(\overset{\frown}{QR})$ + m $(\overset{\frown}{RP})$ =



10 - O NAVIO PERDIDO E OS SUBMÚLTIPLOS DO GRAU

Existem arcos menores que 1° ?

Existem arcos maiores que 10° e menores que 11° ?

Para responder a essas questões, pode-se fazer uma comparação da circunferência graduada em graus com a reta graduada em centímetros. É lógico que existem segmentos de reta menores que 1cm. Para medí-los, basta dividirmos 1cm em 10 partes iguais, por exemplo, e obteremos uma outra unidade chamada milímetro (mm) que corresponde à décima parte do centímetro , isto é, $1\ mm = \frac{1}{10}\ cm$.

Mas se as unidades lineares mais comuns como o decímetro, o centímetro e o milímetro são obtidas através de sucessivas divisões de segmentos em 10 partes iguais, isto é, são **unidades decimais**, os submúltiplos mais usado do grau são **sexagesimais**, isto é, são obtidos dividindo-se, sucessivamente, arcos cada vez menores em 60 partes iguais. Assim, se dividirmos um arco de 1^{o} em 60 partes iguais, obteremos 60 arcos minúsculos, cada um medindo 1 minuto (cujo símbolo é 1' ou 1min). Poderíamos dividir ainda, se assim fosse necessário, para medidas cada vez mais precisas, um arco de 1 minuto em 60 partes iguais e obteríamos 60 arcos ainda menores, cada um medindo 1 segundo (cujo símbolo é 1" ou 1s). Portanto, temos as seguintes correspondências:

$$1^{o} = 60min = 60' \text{ ou } 1' = \frac{1}{60} \text{ do grau.}$$

$$1' = 60seg = 60'' \text{ ou } 1'' = \frac{1}{60} \text{ do minuto.}$$

Exemplificando, vamos considerar um arco cuja medida' seja de $20^{o}\ 15'\ 30''$. Isso significa que esse arco é maior que 20^{o} e menor que 21^{o}. Para localizarmos de forma mais precisa ' esse arco na circunferência graduada, precisaríamos dividir o arco de 1^{o} compreendido entre 20^{o} e 21^{o} em 60 partes iguais e pegarmos 15 partes e dividirmos novamente uma dessas 15 partes em 60 partes iguais e pegarmos 30 partes.

Você deve estar pensando: mas porque é necessário dividir um arco de um grau, que já é tão pequeno, em 60 partes , obtendo-se arcos ainda menores que, por sua vez deverão ser novamente subdivididos ? É preciso que você compreenda que o arco de 1^o só é pequeno nas circunferências que você traça numa' folha de papel. Se, entretanto, você imaginar circunferências' sobre a superfície da esfera terrestre, cujo diâmetro é de a - proximadamente 12700 km, é claro que um arco de 1^o numa dessas circunferências será bastante grande. Terá um comprimento aproximado de 111 km. A necessidade de subdivisão do grau em minitos e segundos está ligado à necessidade que têm os homens de localizar com precisão, cidades, vilas, montanhas, países, navios nos oceanos e muitas outras coisas sobre a superfície terrestre.

Imagine um navio, que por alguma razão, se perdeu em alto mar. Através de um rádio consegue pedir socorro a um posto próximo da Marinha. Como localizar o navio em alto mar ?

Você já sabe o que são meridianos e paralelos. A figura a seguir, mostra como a rede de meridianos e paralelos so - bre a superfície da esfera terrestre divide a Terra em regiões parecidas com gomos de laranja. A circunferência do Equador divide a esfera terrestre nos hemisférios Norte e Sul, enquanto' o meridiano de Greenwich o divide nos hemisférios Oriental ou Leste e Ocidental ou Oeste. É claro que na figura seguinte estão traçados apenas alguns paralelos e meridianos. Geralmente, costuma-se traçar um total de 90 paralelos, numerados de 0^o a 90^o, para cada hemisfério, tomando-se como referência a linha do Equador e 180 meridianos em cada hemisfério, tomando-se como referência o meridiano de Greenwich. A **Latitude** de um ponto é a distância, em graus, de um ponto qualquer da superfície ' terrestre ao Equador. A **Longitude** é a distância em graus,de um ponto qualquer da superfície terrestre ao meridiano de Greenwich. Assim, se um navio está situado no ponto A da superfície terrestre (observe a figura) ele será localizado pelas seguintes informações: 30° de latitude sul e 60° de longitude leste. Complete você:

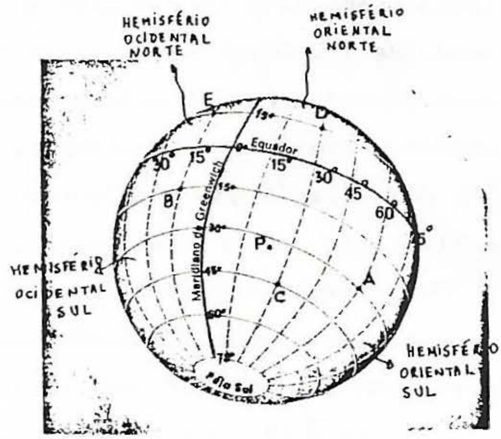
a) as coordenadas do ponto B=

b) as coordenadas do ponto C=

c) as coordenadas do ponto D=

d) as coordenadas do ponto E=

e) as coordenadas do ponto P=



Parece que você encontrou dificuldades para determinar as coordenadas do ponto P. Por infelicidade, é exatamente aí que se encontra o nosso navio perdido. Poderia acontecer, por exemplo, que o nosso navio se encontrasse num ponto cuja latitude estivesse compreendida entre 32° e 33° e longitude entre 23° e 24°. Logo, para definir com precisão a sua localização seria necessário recorrer aos minutos e talvez até aos segundos.

21ª ATIVIDADE : Responda :

a) Quantos minutos existem num arco de 1° ?

b) Quantos minutos existem num arco de 7° ?

c) Quantos minutos existem num arco de 100° ?

d) Quantos minutos existem num arco de 21º 45' ?

e) Quantos segundos existem num arco de 1' ?

f) Quantos segundos existem num arco de 5' ?

g) Quantos segundos existem num arco de 32' ?

h) Quantos segundos existem num arco de 37' 25" ?

i) Quantos segundos existem num arco de 1º ?

j) Quantos segundos existem num arco de 36º ?

l) Expresse em graus o comprimento de 1 arco de 420'.

m) Expresse em graus e minutos o comprimento de um arco de 500'.

n) Expresse em graus e minutos o comprimento de um arco de 350'.

11 - A MEDIDA DO TEMPO

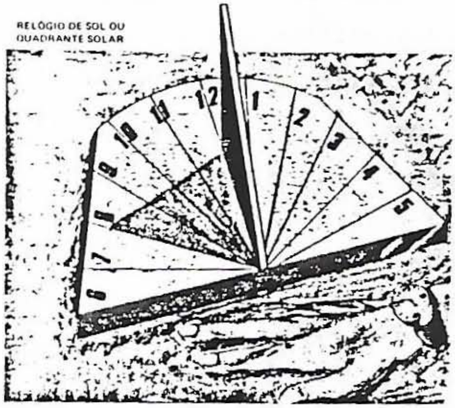
Desde a antiguidade, o homem sentiu a necessidade de medir a duração do dia e da noite. Vários instrumentos foram criados para medir o tempo. Foi na Mesopotâmia, região hoje pertencente ao Irã e ao Iraque, por volta de 700 A.C., que surgiu o relógio de sol. Esse relógio foi chamado de **quadrante solar** ou **gnômon** pelos gregos.

Entretanto o relógio de sol apresentava alguns incovenientes:

1) A duração do dia varia no inverno e no verão. No inverno os dias são mais curtos e no verão, mais longos.

2) Não mede o tempo nos dias sem sol.

3) Não possibilita medir o tempo no interior das residências.

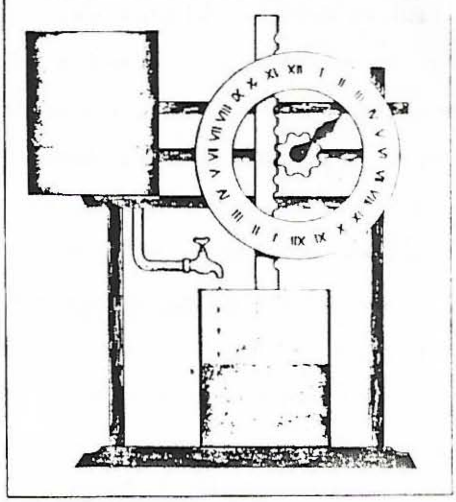


O relógio de sol é dividido em 12 partes iguais, correspondendo a 12 horas. Baseando-se no movimento aparente do Sol e na sombra da haste que o Sol projeta na prancha ou "mostrador", obtém-se a hora do lugar.

Diante dos incovenientes do relógio de sol, foram inventadas outras técnicas para medir o tempo. Os gregos aperfeiçoaram um **relógio de água** e deram-lhe o nome de **clepsidra**. Era um instrumento bem simples, formado por um recipiente de couro, pedra, madeira ou argila cozida. Esse recipiente, cheio de água, era colocado sobre outro recipiente que possuía em suas paredes marcas espaçadas para indicar as horas. O primeiro recipiente lançava gotas de água no segundo, enchendo-o pouco a pouco. Desse modo, a água alcançava as sucessivas marcas do segundo recipiente, indicando o passar do tempo.

Entretanto, o relógio de água não podia ser utilizado por povos do deserto. A água, para esses povos, era preciosa, não podiam gastá-la enchendo clepsidras. O seu mundo era de areia e, além disso, era muito incômodo transportá-las. Os fenícios, povo que viveu em terras do atual Líbano, já tinham descoberto o segredo de fabricar vidro, e os egípcios tiveram a de substituir a água pela areia. Nasceu, assim, a idéia de medir o tempo utilizando vidro e areia. A esse novo aparelho, os romanos denominaram **ampulha**, que quer dizer "redoma", conhecido até os dias atuais com o nome de **ampulheta ou relógio de areia.**

RELÓGIO DE ÁGUA OU CLEPSIDRA DE RODAS DENTADAS



A bóia está em contato com uma roda dentada. À medida que a água sobe no recipiente onde está a bóia, esta também sobe e move a roda dentada, a qual, por sua vez, move um ponteiro. Admite-se que este relógio de água tenha sido desenvolvido em Alexandria (cidade ao norte do Egito)

Na Idade Média, a queima de velas indicava o passar do tempo. Alfinetes eram espetados nas velas, em alturas diferentes, para medir o tempo à noite. Em 1583, Galileu Galilei, o grande físico italiano, introduziu o pêndulo no relógio. Em 1675, o relógio ganhou o ponteiro de minuto e em 1690, John Floyer acrescentou ao relógio o ponteiro dos segundos. Mas por que medir o tempo com tanta precisão ? Não foi por acaso que essa necessidade de precisão tenha ocorrido nas últimas décadas do século XVII. É que, para os antigos, o tempo não possuía qualquer valor, isto é, não se poderia tirar vantagens ou lucros através de sua medida. Quando se vive uma boa vida e não é necessário competir com ninguém, a vida segue o seu curso a passo de tartaruga. Mas nos finais do século XVII, entretanto, as coisas tinham mudado. Alguns países europeus, principalmente a Inglaterra, passava por grandes transformações. A burguesia (os comerciantes da época), começou a reunir os operários, que até então trabalhavam isoladamente, em grupos de cooperação. A produção dos objetos deixou de ser uma série de atos individuais para se converter numa série de atos coletivos. Os operários foram reunidos em grandes fábricas e a produção sofreu um poderosíssimo aumento. Mas não foi só a produção que aumentou. Com ela também aumentaram os lucros dos patrões ... Era preciso agora medir o tempo com grande precisão... os minutos e também os segundos pois... "tempo é dinheiro".

Atualmente, nós dividimos o tempo de um dia em 24 horas. Cada hora tem 60 minutos e cada minuto tem 60 segundos.

Esse sistema sexagesimal, que está na base da divisão do tempo, é uma herança dos povos antigos e como você já deve ter notado, é a mesma divisão empregada na medição de arcos.

(Este texto, incluindo as ilustrações, é uma adaptação, para fins didáticos de trechos dos livros: "Geografia" - vol. 1 de Melhem Adas e "Educação e Luta de classes" de Anibal Ponce).

22ª ATIVIDADE : Uma pessoa A executa uma tarefa em 3h 45min e uma pessoa B executa a mesma tarefa em 4h 55min.

a) Em quantos minutos a pessoa A executa a tarefa ?

b) Em quantos minutos a pessoa B executa a tarefa ?

c) Em quantos segundos cada uma das pessoas executa a tarefa ?

23ª ATIVIDADE : Três máquinas, trabalhando em rítmos diferentes, executam um certo trabalho. A primeira leva 75 minutos para executá-lo; a segunda o faz em 100 minutos e a terceira leva 128 minutos para executá-la.

a) Quantas horas e quantos minutos são necessários para a primeira máquina executar o trabalho ?

b) E para a segunda máquina executá-lo ?

c) E para a terceira máquina executá-lo ?

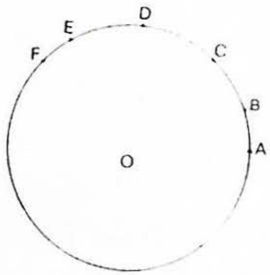
12 - ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

A soma de dois arcos é sempre um arco cuja medida é igual à soma das medidas dos dois primeiros. Na figura a seguir, se m $(\overset{\frown}{AB}) = 20^{o}$ e m $(\overset{\frown}{BC}) = 29^{o}$, então, $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$ e m $(\overset{\frown}{AB})$ + m $(\overset{\frown}{BC}) = 20^{o} + 29^{o} = 49^{o}$.

Logo, m $(\overset{\frown}{AC}) = 49^{o}$

Se m $(\overset{\frown}{CD}) = 39^{o}\ 35'\ 27''$ e m $(\overset{\frown}{DE}) = 33^{o}\ 54'\ 49''$, então, $\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CE}$ e m $(\overset{\frown}{CD})$ + m $(\overset{\frown}{DE}) = 39^{o}\ 35'\ 27'' + 33^{o}\ 54'\ 49''$.

Para efetuarmos essa adição, procedemos como mostra o esquema, somando segundos com segundos, minutos com minutos



$$\begin{array}{cccc}
39^{o} & 35' & 27'' & \\
 & & & + \\
33^{o} & 54' & 49'' & \\
\hline
72^{o} & 89' & 76'' & \\
+ & + & - & \\
1^{o} & 1' & 60'' & \\
\hline
73^{o} & 90' & 16'' & \\
 & 60' & & \\
\hline
 & \cancel{306}\ 30' & &
\end{array}$$

e graus com graus, respectivamente. Toda vez que as somas parciais, excederem 60 unidades, devemos extrair deles a maior ' quantidade possível do submúltiplo que estiver a sua esquerda, quantidade essa, que deve ser acrescentada ao total desse submúltiplo.

Logo, $m(\overset{\frown}{CE}) = 73^{o}\ 30'\ 16''$.

A subtração de arcos é feita de forma análoga; na figura acima, como $m(\overset{\frown}{CF}) = 90^{o}$ e $m(\overset{\frown}{CD}) = 39^{o}\ 35'\ 27''$, então , $\overset{\frown}{CF} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DF}$ e $m(\overset{\frown}{CF}) - m(\overset{\frown}{CD}) = 90^{o} - 39^{o}\ 35'\ 27''$.

Com $90^{o} = 89^{o}\ 60' = 89^{o}\ 59'\ 60''$, então,

$90^{o} - 39^{o}\ 35'\ 27'' = (89^{o}\ 59'\ 60'')-(39^{o}\ 35'\ 27'')$.

$$\begin{array}{rl}
 & 89^{o}\ 59'\ 60'' \\
- & \\
 & 39^{o}\ 35'\ 27'' \\
\hline
 & 50^{o}\ 14'\ 33''
\end{array}$$

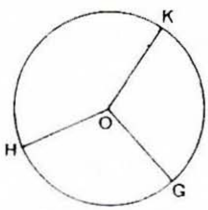
24'

24'

Logo, $m(\overset{\frown}{CF}) - m(\overset{\frown}{CD}) = 50^{o}\ 14'\ 33''$

É claro que tudo o que foi dito para a adição e subtração de arcos, vale também para a adição e subtração de unidades de tempo.

24ª ATIVIDADE : Sabendo que m ($\overset{\frown}{KG}$) = 259° 30' e a m ($\overset{\frown}{HG}$) = 109° 21' 12'', determine:



1) m ($\overset{\frown}{GK}$) =

2) m ($\overset{\frown}{KH}$) =

3) m ($\overset{\frown}{HK}$) =

4) m ($\overset{\frown}{GH}$) =

25ª ATIVIDADE :

1) Uma pessoa foi ao centro da cidade onde mora para efetuar um pagamento. Ficou 35 minutos à espera do ônibus que o levou ao centro, ficou 48 minutos na fila do banco e levou mais 37 minutos à espera do ônibus que o levou de volta. Sabendo que demorou mais 23 minutos para percorrer os trajetos entre um local e outro, calcule quantas horas e quantos minutos essa pessoa levou para ir ao centro e retornar a sua casa.

2) Uma máquina foi planejada para executar um certo trabalho em 2 horas. Começou a funcionar às 14h30min. Às 15 horas e 10 minutos a máquina quebrou e parou de funcionar. Depois de consertada, a máquina voltou a funcionar às 16h 25min e manteve-se em funcionamento o tempo necessário para completar o trabalho. Responda:

a) Depois de quanto tempo em funcionamento a máquina quebrou ?

b) Quanto tempo foi necessário para se consertar a máquina ?

c) Quanto tempo foi necessário para a máquina completar o trabalho que ainda restava ?

3) O salário mensal de uma pessoa é NCz$ 4.800,00. Sabendo que essa pessoa trabalha 8 horas por dia, responda:

a) Qual é o salário diário dessa pessoa ?

b) Quanto recebe essa pessoa por uma semana de trabalho ?

c) Quanto recebe essa pessoa por hora de trabalho ?

4) Numa prova de natação, um competidor A fez o percurso em 1 min 48s . Os competidores B e C o fizeram em, respectivamente 1min 43s e 1min 50s.

a) Qual a diferença de tempo entre o vencedor da prova e o terceiro classificado ?

b) Qual a diferença de tempo entre o vencedor da prova e o segundo classificado ?

c) Qual a diferença de tempo entre o segundo e terceiro classificado ?

13 - EXPRIMINDO A MEDIDA DO TEMPO NO SISTEMA DECIMAL

É muito comum as pessoas ficarem confusas quando se afirma que dois acontecimentos, um com duração de 3h 30min e outro com duração de 3,30h não tiveram, na verdade, a mesma duração. Em outras palavras, que 3h 30min $\neq$ 3,30h. Porque isso acontece ? Simplesmente porque a representação 3h 30min, indica que a medida do tempo foi feita no sistema sexagesimal (base

60) e a representação 3,30h indica que a medida do tempo foi feita no sistema decimal (base 10). Como passar de um sistema' para o outro ?

1º Exemplo: Exprimir 3,30h no sistema sexagesimal: 3,30h é o mesmo que 3 horas + 30 centésimos de hora, isto é, 3,30h = 3h+ $\frac{30}{100}$ da hora = 3h + $\frac{3}{10}$ da hora. Como em 1 hora há 60 minutos , então, em $\frac{3}{10}$ da hora haverá $\frac{3}{10}$ de 60 minutos, isto é, 18 minutos.

Conclusão: 3,30h = 3h 18min.

2º Exemplo: Exprimir 3h 30min no sistema decimal:

3h 30min = 180min + 30min (pois 1h tem 60 minutos)

3h 30min = 210min.

210/ 60 300 3,5 00	(Dividindo 210 por 60 concluiremos que em 210min "cabem" 3h e mais 5 décimos da hora)

Conclusão: 3h 30min = 3,5h.

26ª ATIVIDADE :

1) Exprima no sistema sexagesimal a duração de cada um dos acontecimentos abaixo, dado no sistema decimal:

a) Acontecimento A durou 5,25h.

b) Acontecimento B durou 1,18h.

c) Acontecimento C durou 2,30h.

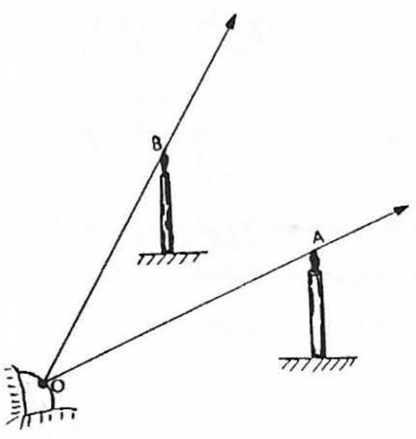
2) Exprima no sistema decimal a duração de cada um dos acontecimentos, dada no sistema sexagesimal.

a) Acontecimento D durou 1h 45min.

b) Acontecimento E durou 2h 15min.

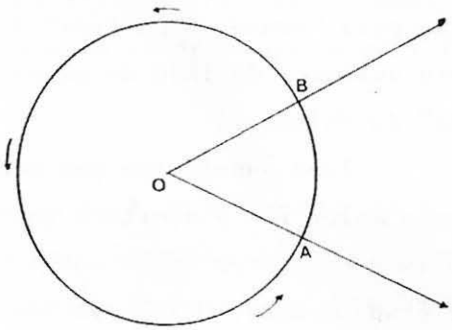
c) Acontecimento F durou 2h 30min 36seg.

14 - O CONCEITO DE ÂNGULO



Imagine duas velas acesas separadas uma da outra por uma distância qualquer como mostra a figura ao lado. Um observador situado no ponto O, observa a extremidade **A** da chama de uma das velas e, em seguida, a extremidade **B** da chama da outra vela. Podemos traçar duas linhas retas imaginárias para caracterizar essa observação : a primeira partindo do ponto O, situado no olho do observador, e passando pelo ponto A, situado na extremidade da chama de uma das velas; a segunda partindo também do ponto O, no olho do observador, e passando pelo ponto B, situado na extremidade da chama da outra vela. Imaginemos ainda que essas linhas possam ser prolongadas ilimitadamente. A figura assim formada, isto é, o conjunto das **semi-retas**, ambas com origem no ponto O, recebe o nome de **ÂNGULO**. É claro que, quanto mais afastada uma da outra estiverem as velas, tanto maior seria a **abertura** entre as duas semi-retas. O ângulo sob o qual as duas velas são vistas pelo observador recebe o nome de $A\hat{O}B$. As duas semi-retas são os **LADOS DO ÂNGULO** é a **ORIGEM COMUM** das duas semi-retas, isto é, o ponto situado no olho do observador, recebe o nome de **VÉRTICE DO ÂNGULO.**

Imagine agora um objeto girando no **sentido anti-horário**, em torno de um ponto fixo O. A figura ao lado mostra o ângulo formado, para um observador situado no ponto O (centro da circunferência), pelo mesmo objeto em duas posições diferentes de sua tragetória: quando o objeto passa' pelo ponto A e quando o objeto passa pelo ponto B. Como saber se, nesse caso, o objeto saiu do ponto A e chegou ao ponto B percorrendo o arco AB ou se saiu do ponto B e chegou ao ponto A percorrendo o arco BA ?

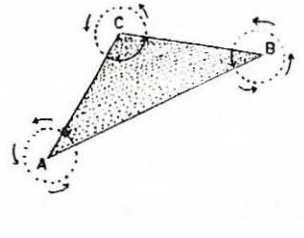


Embora o observador enxergue o objeto, nas duas posições, sempre através do ângulo definido pelo arco menor (AB) , ficamos sem saber se o objeto percorreu a menor ou a maior parte de sua trajetória. Logo, para distinguir uma situação da outra, precisamos dizer que o ângulo definido pelo menor arco ' **tem medida diferente** do ângulo definido pelo maior arco. E como esse ângulo define duas situações diferentes, daremos nomes diferentes a ele de acordo com a situação que apresenta.

O ângulo definido pelo menor arco (AB) será chamado ' $A\hat{O}B$ e o ângulo definido pelo maior arco (BA) será chamado $B\hat{O}A$. Observe que, para nomearmos os ângulos, utilizamos 3 letras ' maiúsculas, sendo que a letra que representa o vértice do ângulo sempre está entre as outras duas e recebe um acento circunflexo. A ordem entre as outras duas letras é importante: a primeira deve sempre ser um ponto qualquer do lado do ângulo que passa pelo "ponto de partida" do objeto e a segunda, sempre um ponto qualquer do lado do ângulo que passa pelo "ponto de chegada" do objeto.

Todo ângulo tem uma medida. Um ângulo é tanto maior quanto maior for a abertura entre os seus lados. Quanto mais próximos estiverem um do outro os lados de um ângulo, tanto menor é sua medida. O instrumento utilizado para medir ângulos é o mesmo utilizado na medida de arcos: o transferidor. Isto porque a medida de um ângulo é sempre igual à medida do arco definido pela abertura de seus dois lados.

É claro que os lados de um polígono ou de uma superfície poligonal e as arestas de uma superfície poliédrica definem ângulos. Num polígono, o que nos interessa são os ângulos internos, isto é, os ângulos definidos por arcos que estão no interior da superfície poligonal. Observe que o triângulo ABC ao lado possui 3 ângulos internos. Para nomeá-lo imagine que cada vértice do triângulo é o centro de uma circunferência, que deve sempre ser percorrida no sentido anti-horário.



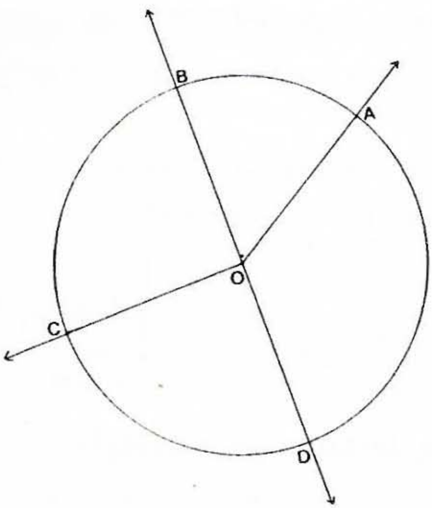
O ângulo interno definido pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo é CBA:

O ângulo interno definido pelos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo é ACB.

O ângulo interno definido pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo é BAC.

A medida de cada um desses ângulos internos é igual à medida de cada um dos arcos contidos no interior da superfície triangular.

27ª ATIVIDADE : Na figura, os pontos A, B, C e D estão sobre as marcas 30º, 90º, 180º e 270º respectivamente de uma circunferência dividida em 360 partes iguais. Sem utilizar transferidor, complete:



1) m $(\overset{\frown}{AB})$ =

2) m $(\overset{\frown}{BC})$ =

3) m $(\overset{\frown}{CD})$ =

4) m $(\overset{\frown}{DA})$ =

5) m $(A\hat{O}B)$ =

6) m $(B\hat{O}C)$ =

7) m $(C\hat{O}D)$ =

8) m $(D\hat{O}A)$ =

9) m $(\overset{\frown}{AC})$ =

10) m $(A\hat{O}C)$ =

11) m $(\overset{\frown}{BD})$ =

12) m $(B\hat{O}D)$ =

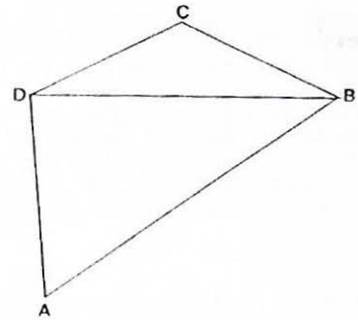
13) m $(A\hat{O}D)$ =

14) m $(B\hat{O}A)$ =

15) m $(C\hat{O}A)$ =

16) m $(\overset{\frown}{BA})$ =

28ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo:



a) Quantos ângulos internos ela possui ?

b) Nomeie todos os seus ângulos internos.

c) Prolongue as linhas da figura e, utilizando um transferidor meça todos os seus ângulos internos.

29ª ATIVIDADE : Observe as figuras 1, 2 e 3 abaixo:

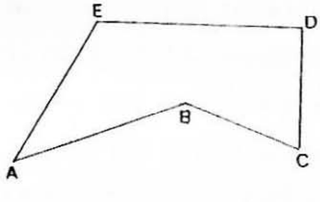


FIGURA 01

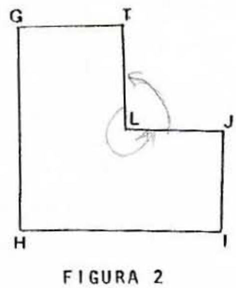


FIGURA 2

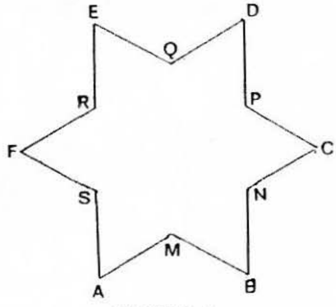


FIGURA 3

a) Nomeie e meça todos os ângulos internos da figura 1.

b) Nomeie e meça todos os ângulos internos da figura 2.

c) Nomeie e meça 5 ângulos internos da figura 3.

JLT
TLJ

15 - TIPOS DE ÂNGULOS

Ao medir os ângulos das figuras da atividade anterior você observou que alguns medem mais de 90°, outros menos que 90° e outros, ainda exatamente 90°.

Chamamos de **ângulo agudo** qualquer ângulo cuja medida' é menor que 90°.

Chamamos de **ângulo obtuso** qualquer ângulo cuja medida é maior que 90°.

Chamamos de **ângulo reto** qualquer ângulo cuja medida é exatamente 90°.

Dizemos ainda, que todo par de ângulos que possuírem' a mesma medida são chamados **ângulos congruentes**.

30ª ATIVIDADE :

a) Diga quais são os ângulos agudos, os retos e os obtusos da figura 1 da atividade anterior.

b) Diga quais são os ângulos agudos, os retos e os obtusos da figura 2 da atividade anterior.

c) Cite 5 ângulos agudos e 5 ângulos obtusos da figura 3 da atividade anterior. Existe algum ângulo reto nessa figura ?

d) Cite 4 pares de ângulos congruentes da figura 3 da atividade anterior.

e) Cite 3 pares de ângulos congruentes da figura 2 da atividade anterior.

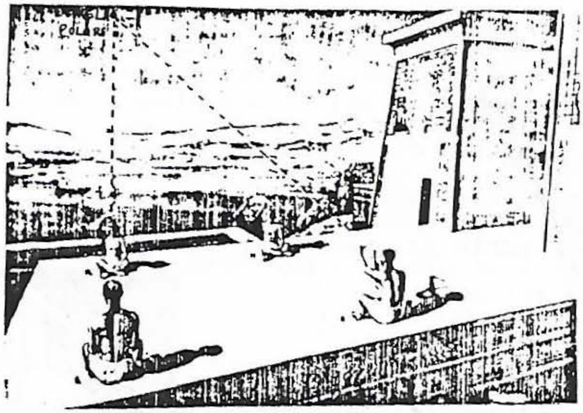
31ª ATIVIDADE : Um menino olhou para a linha do horizonte e marcou o ponto onde o sol nasceu. Depois de um certo tempo, conservando-se na mesma posição, esticou um de seus braços e, com auxílio de duas varetas de 10cm cada, mediu a distância linear entre o ponto onde o sol havia nascido e o ponto onde o sol se encontrava naquele momento. A distância encontrada entre as duas extremidades das varetas foi de 5cm.

a) Qual foi a distância angular "percorrida pelo sol" (na verdade é a Terra que gira em torno do Sol) nesse intervalo de tempo ? Utilize para isso um transferidor.

b) Qual seria a **distância linear** entre as extremidades da vareta quando o sol percorrer uma distância angular de 90º ?

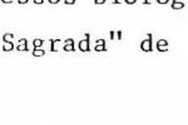
16 - ÂNGULOS E ANJOS

Os astrônomos antigos, determinavam o movimento e a posição dos corpos celestes através de distâncias angulares. As diferentes posições angulares do sol, da lua, dos planetas e estrelas eram relacionadas com as **mudanças cíclicas** na natureza, tais como as fases da Lua (4 fases que duram, aproximadamente, 7 dias cada), as estações do ano (4 estações que duram, aproximadamente, 3 meses cada), as marés, o crescimento das plantas, a fertilidade dos animais e seres humanos, etc. Era, portanto, o ângulo que especificava as influências dos fenômenos celestes sobre os eventos terrestres. Daí, a semelhança em nossa língua, das palavras ângulo e anjo. O mesmo acontece na língua inglesa onde ângulo escreve-se "angle" (lê-se: angol) e anjo escreve-se "angel" (lê-se: andjíel). Hoje, uma ciência no



va chamada heliobiologia verificou que a posição angular da Lua e dos planetas afeta as radiações eletromagnéticas e cósmicas. Estas, quando chegam à Terra afetam os processos biológicos. Texto e ilustração extraídos de "Geometria Sagrada" de Robert Lawior).

32ª ATIVIDADE : Observe o cubo abaixo, representado por suas arestas.



a) Utilizando um transferidor, meça o ângulo $\widehat{AGH}$ formado pelas arestas $\overline{AG}$ e $\overline{GH}$ do cubo.

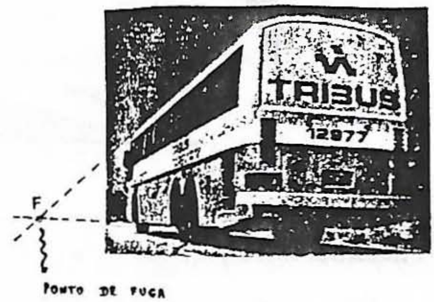
b) Utilizando um transferidor e um "cubo de verdade", meça esse mesmo ângulo.

c) Compare as medidas encontradas para esse mesmo ângulo quando feitas no "cubo de verdade" e na representação plana desse cubo na folha de papel. Elas são iguais ? Por quê ?

17 - PERSPECTIVAS E A REPRESENTAÇÃO PLANA DE OBJETOS NÃO-PLANOS

Ao executar a atividade anterior, você deve ter notado que quando desenhamos um objeto não-plano numa superfície plana alguns dos ângulos do objeto são deformados.

Observe a fotografia do ônibus ao lado. A parte traseira do ônibus parece ser bem maior que a dianteira. Mas você sabe que isso é apenas uma ilusão, pois, na realidade elas são do mesmo tamanho. É que, para fotografar o ônibus, o fotógrafo escolheu um certo ângulo. Fotografou-o a partir de uma certa **PERSPECTIVA.**



Como você sabe, a linha do teto do ônibus que acompanha suas janelas é, na realidade, paralela à linha inferior da lateral do ônibus. Entretanto, como mostra a figura, essas linhas, ao serem prolongadas acabam por se cruzar num ponto. Esse ponto recebe o nome de **PONTO DE FUGA.** Chama-se ponto de fuga de uma figura desenhada em perspectiva, ao ponto onde convergem as linhas paralelas dessa figura. Utilizando uma régua, prolongue outras linhas paralelas à linha do teto do ônibus e verifique que elas vão se encontrar no mesmo ponto de fuga. Numa mesma fotografia pode existir mais do que um ponto de fuga.

Considere, por exemplo, o problema que um artista enfrenta quando deseja pintar um quadro real de algum objeto . Quando o artista olha o objeto, os raios de luz que partem do objeto entram em seu olho. Se pusessemos uma tela transparente entre o olho do artista e o objeto, os raios de luz cruzariam a tela em vários pontos. Este conjunto de pontos chama-se **IMAGEM OU PROJEÇÃO** do objeto sobre a tela. É esta imagem que o artista deverá pintar em seu papel para que um observador da pintura receba a mesma impressão da forma do objeto que receberia quando olhasse diretamente para o objeto real daquela mesma posição, isto é, naquela perspectiva. Em um esforço para produzir quadros mais reais, muitos artistas e arquitetos do Renascimento se interessaram bastante em descobrir as leis que regem a construção das projeções dos objetos sobre a tela plana e, no século XV, vários deles criaram os elementos de uma teoria da perspectiva geométrica. Esses conhecimentos são estudados em um campo da geometria chamado **GEOMETRIA PROJETIVA.**

33ª ATIVIDADE : Observe na folha anexo 1, as fotografias das maquetes de duas casas.

a) Determine os pontos de fuga de cada uma dessas fotos.

b) Dentre os ângulos assinalados por letras minúsculas em cada foto, diga quais deles foram deformados devido à perspectiva.

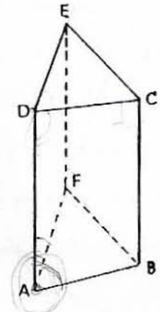
c) Diga quais linhas das figuras são perpendiculares na realidade e que nas fotos não são, devido à perspectiva.

d) Diga quais linhas das figuras são paralelas na realidade e que nas fotos não são, devido à perspectiva.

34ª ATIVIDADE :

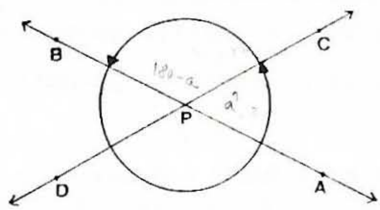
a) Observe o cubo da atividade nº 32 e cite todos os pares de arestas que, na realidade, são perpendiculares, mas que no desenho não são.

b) Observe o prisma reto de base triangular ao lado, dado por suas arestas. Cite todos os ângulos que, na realidade, são retos, mas que no desenho não são.



35ª ATIVIDADE : Observe as duas retas concorrentes abaixo. Sabendo que P é o centro da circunferência :

a) Sem utilizar transferidor seria possível dizer exatamente qual é a medida ' ângulo $A\hat{P}C$?
E do ângulo $C\hat{P}B$?



b) Sem utilizar transferidor seria possível dizer exatamente quanto é a soma das medidas dos ângulos $A\hat{P}C$ e $C\hat{P}B$? Por quê ?

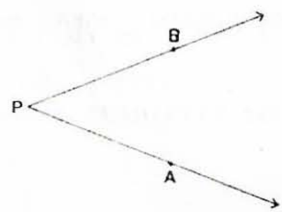
18 - ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Na atividade anterior, você pode dizer com certeza , e sem utilizar transferidor, que a soma das medidas dos ângulos $A\hat{P}C$ e $C\hat{P}B$ é 180º, pois a soma dos arcos determinados por esses ângulos produz uma semi-circunferência. O par de ângulos cuja soma de suas medidas é 180º recebe o nome de **ÂNGULOS SUPLEMENTARES**.

Na figura da atividade anterior, cite 3 pares de ângulos suplementares, sem utilizar transferidor.

36ª ATIVIDADE : Considere os ângulos $A\hat{P}B$ abaixo:

a) Utilizando uma régua, prolongue o lado $\overline{PA}$ desse ângulo no **sentido oposto** ao da semi-reta $\overline{PA}$.



b) Prolongue o lado $\overline{PB}$ desse ângulo no sentido oposto ao da semireta $\overline{PB}$.

c) Utilizando um transferidor, meça o ângulo $A\hat{P}B$ e o ângulo formado pelo prolongamento dos lados desse ângulo em sentido oposto. O que você pode afirmar em relação às medidas encontradas ?

d) Desenhe um outro ângulo qualquer e faça para ele o mesmo que se fez nos ítens a, b, e c.

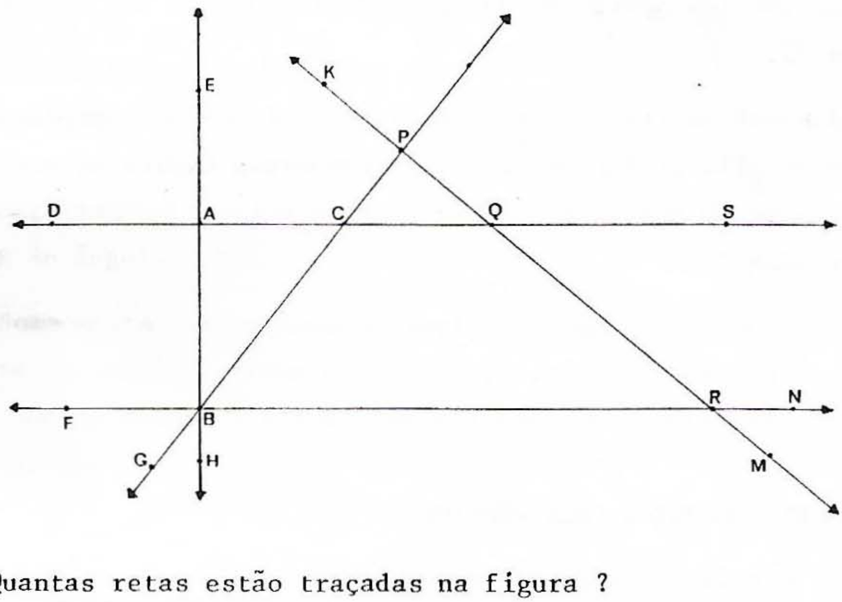
19 - ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Considere um ângulo $\hat{a}$ qualquer. Considere também o ângulo $\hat{b}$ formado pelo prolongamento dos lados de $\hat{a}$ em sentido oposto.

Dois ângulos construídos dessa maneira recebem o nome de **ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE**. É claro que dois ângulos opostos pelo vértice sempre têm o mesmo vértice. Além disso, você verificou na atividade anterior que dois ângulos desse tipo sempre são congruentes, isto é, sempre têm a mesma medida.

37ª ATIVIDADE : Sabendo que na figura da 35ª atividade o ângulo $A\hat{P}C$ mede 60^o, determine a medida dos outros 3 ângulos da figura, sem utilizar transferidor. Explique por que é possível ' determinar essas medidas sem o uso do transferidor.

38ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo:



a) Quantas retas estão traçadas na figura ?

b) Cite um par de retas paralelas da figura.

c) Utilizando um esquadro, reconheça e nomeie todos os pares ' de retas perpendiculares da figura.

d) Cite 5 pares de ângulos suplementares da figura, que não sejam retos.

e) Nomeie 8 pares de ângulos opostos pelo vértice da figura , que não sejam retos.

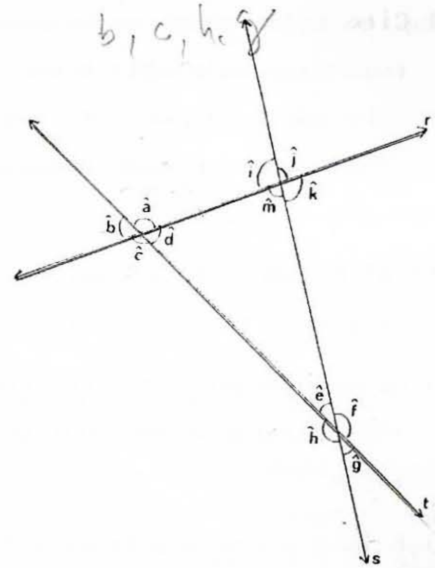
A.C

39ª ATIVIDADE : Na figura abaixo, as retas r, s e t são concorrentes duas a duas. Qualquer uma delas pode ser chamada de reta transversal em relação às outras duas, pois cada reta da figura sempre cruza as duas restantes. Considerando a reta t como transversal, responda :

a) Quais são os ângulos que possuem o vértice na transversal **t** ?

a, d, i, f

b, c, h, g



b) A transversal **t** divide a superfície plana da folha de papel em duas partes chamadas **semi-planos**. Dentre os ângulos citados no ítem **a**, cite todos os **pares de ângulos** que estão situados em **semi-planos opostos** em relação à transversal **t**.

c) Dentre os pares de ângulos citados no ítem **b** , quais são aqueles que não possuem **nenhum** ponto comum (que nunca se cruzam) ?

20 - ÂNGULOS ALTERNOS EXTERNOS

Considere 3 retas contidas numa mesma superfície plana, que não sejam paralelas entre si e que não se cruzam em um mesmo ponto. Dizemos que dois ângulos com vértices em uma dessas retas considerada como transversal são chamadas **ALTERNOS EXTERNOS** quando estiverem situados em semi-planos opostos em relação à transversal e não possuírem nenhum ponto comum.

40ª ATIVIDADE : Observe novamente a figura da atividade nº 39.

a) Cite todos os pares de ângulos alternos externos, considerando a reta **s** como transversal.

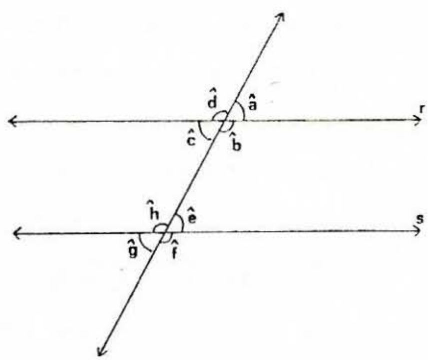
b) Cite todos os pares de ângulos alternos externos, considerando a reta **r** como transversal.

41ª ATIVIDADE : Na figura ao lado, as retas **r** e **s** são paralelas e a reta **t** é transversal em relação a elas.

a) Quantos ângulos menores que 180º existem nessa configuração ?

b) Existe algum ângulo da figura cujo vértice não pertence à transversal ?

c) Cite todos os pares de ângulos alternos externos dessa configuração.



d) Utilizando um transferidor, determine a medida de cada um dos ângulos pertencentes aos pares de ângulos alternos externos da figura. O que você observa ?

e) Utilizando um transferidor, determine a medida de cada um dos ângulos pertencentes aos pares de ângulos alternos externos em relação à transversal **t** da figura da atividade 39. O que você observa ?

f) Com base nos resultados encontrados nos ítens **d** e **e**, complete as sentenças seguintes com as palavras "diferentes" ou "iguais":

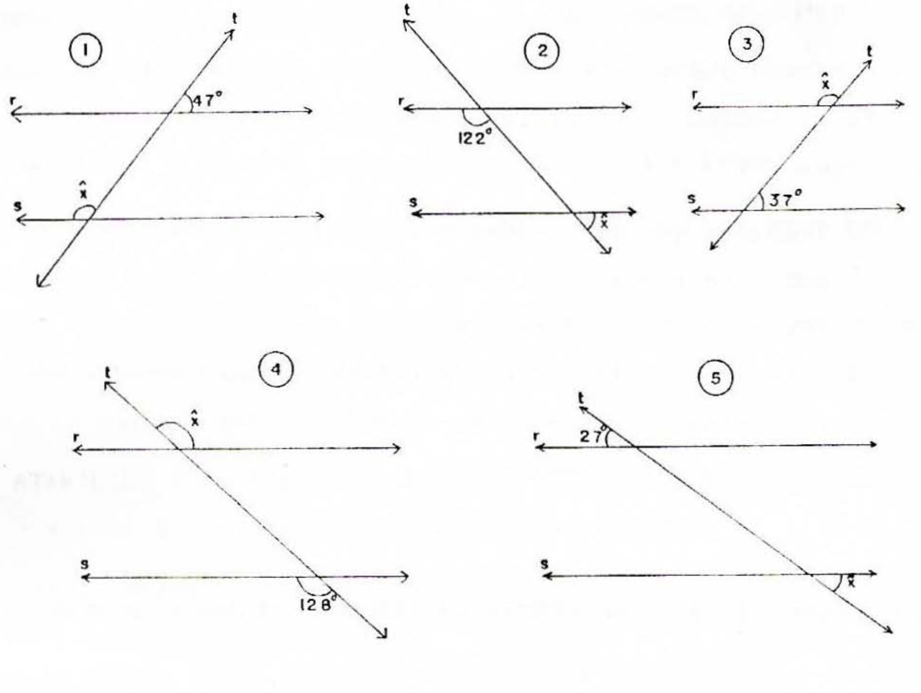
   1) Toda vez que duas **retas concorrentes** forem cortadas por uma reta transversal a elas, as medidas dos ângulos alternos externos serão sempre ________________.

   2) Toda vez que duas **retas paralelas** forem cortadas por uma reta transversal a elas, as medidas dos ângulos alternos externos serão sempre ________________.

21 - CONDIÇÃO DE CONGRUÊNCIA DOS ÂNGULOS ALTERNOS EXTERNOS

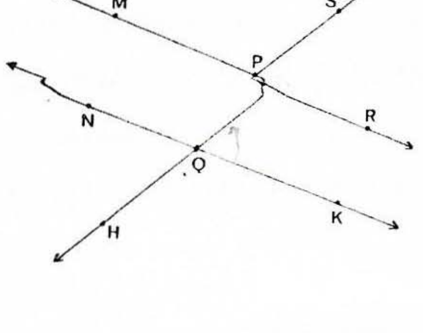
Ao executar a atividade anterior, você concluiu que dois ângulos alternos externos só são congruentes, quando são determinados por retas paralelas. Essa propriedade dos ângulos alternos externos, juntamente com a dos opostos pelo vértice e com a definição de ângulos suplementares, nos possibilitará, a partir de agora, resolver problemas referentes à determinação' da medida de certos ângulos em configurações planas, sem que seja preciso, para isso, utilizar o transferidor ou qualquer ' outro instrumento. É o que você fará nas atividades que se seguem.

42ª ATIVIDADE : Sem utilizar transferidor, determine, em cada' configuração abaixo, a medida do ângulo $\hat{x}$, sabendo que as re - tas **r** e **s** são paralelas em todas as configurações.



43ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo, onde são dados:

$m\ (P\hat{Q}N) = 120^{o}$ e $\overline{MR}\ //\ \overline{NK}$



Sem utilizar transferidor, complete:

1) $m\ (K\hat{Q}P) =$

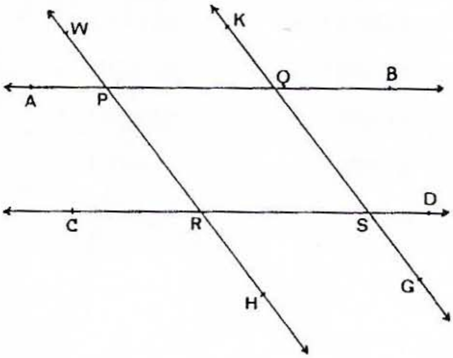
2) $m\ (H\hat{Q}P) =$

3) $m\ (N\hat{Q}K) =$

4) $m\ (S\hat{P}M) =$

5) m $(R\hat{P}S)$ = 6) m $(M\hat{P}Q)$ = 7) m $(Q\hat{P}R)$ =

44ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados :



1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

2) $\overline{HW} \parallel \overline{KG}$

3) m $(K\hat{Q}P) = 68^{o}$

Sem utilizar transferidor determine:

1) m $(B\hat{Q}K)$ =

2) m $(S\hat{Q}B)$ =

3) m $(P\hat{Q}S)$ =

4) m $(Q\hat{S}R)$ =

5) m $(R\hat{S}G)$ =

6) m $(G\hat{S}D)$ =

7) m $(D\hat{S}Q)$ =

8) m $(W\hat{P}A)$ =

9) m $(Q\hat{P}W)$ =

10) m $(R\hat{P}Q)$ =

11) m $(A\hat{P}R)$ =

12) m $(P\hat{R}C)$ =

13) m $(S\hat{R}P)$ =

14) m $(H\hat{R}S)$ =

15) m $(C\hat{R}H)$ =

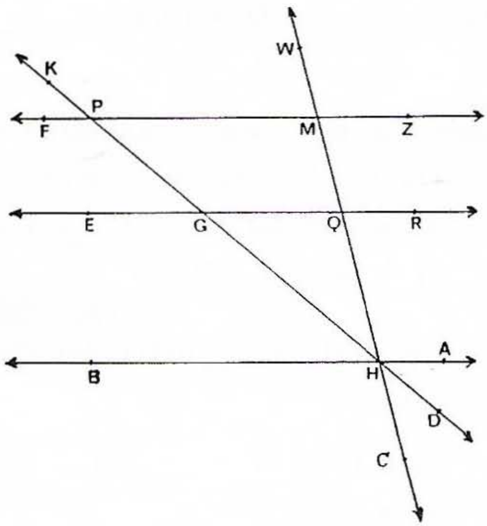
45ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados:

1) $\overline{FZ} \parallel \overline{ER} \parallel \overline{AB}$

2) m $(K\hat{P}F) = 45^{o}$

3) m $(C\hat{H}D) = 35^{o}$

Sem utilizar o transferidor, determine:



$m(H\widehat{G}Q) =$ $m(M\widehat{Q}R) =$

$m(Q\widehat{G}P) =$ $m(W\widehat{M}Z) =$

$m(B\widehat{H}D) =$ $m(P\widehat{M}W) =$

$m(B\widehat{H}C) =$ $m(H\widehat{Q}G) =$

$m(D\widehat{H}A) =$ $m(F\widehat{P}G) =$

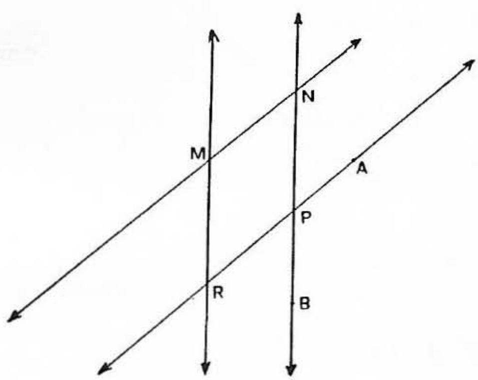
$m(G\widehat{H}Q) =$ $m(E\widehat{G}H) =$

$m(Q\widehat{H}A) =$ $m(H\widehat{Q}R) =$

$m(B\widehat{H}G) =$ $m(F\widehat{P}K) =$

$m(B\widehat{H}A) =$ $\cancel{m(H\widehat{Q}R)} =$

46ª ATIVIDADE : Na figura abaixo, são dados:



$\overline{MN} \parallel \overline{PR}$

RM // PN

$m\ (B\widehat{P}A) = 131^\circ$

Determine:

$m\ (R\widehat{P}N) =$

$m\ (P\widehat{N}M) =$

$m\ (R\widehat{M}N) =$

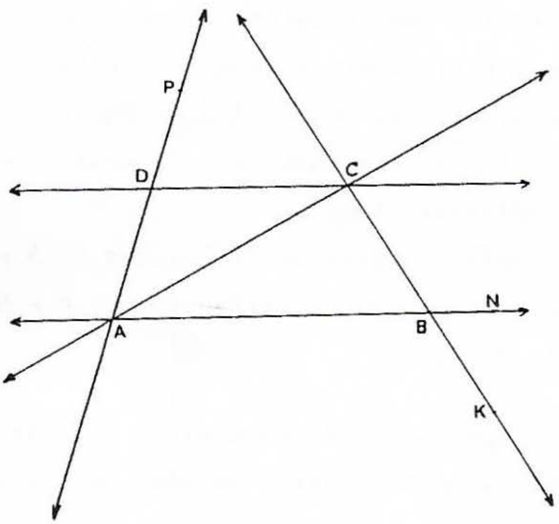
$m\ (P\widehat{R}M) =$

47ª ATIVIDADE : Na figura a seguir, são dados: $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$

$m\ (K\widehat{B}N) = 58^\circ$

$m\ (C\widehat{D}P) = 73^\circ$

$m\ (B\widehat{A}C) = 28^\circ$



Determine:

m $(A\hat{B}C)$ =

m $(A\hat{D}C)$ =

m $(C\hat{A}D)$ =

m $(D\hat{C}A)$ =

m $(A\hat{C}B)$ =

m $(B\hat{A}D)$ =

m $(D\hat{C}B)$ =

48ª ATIVIDADE : Na folha anexo II estão desenhados 9 triângulos. Os triângulos 1, 2 e 3 são iguais entre si. O mesmo acontece com os triângulos 4, 5 e 6 e com os triângulos 7, 8 e 9. 7

Pinte com uma mesma cor o interior dos ângulos congruentes de cada série de 3 triângulos iguais, usando para isso , as cores azul, vermelho e verde. Em seguida, recorte os triângulos 1, 2 e 3 da folha anexa e faça o seguinte: cole o triângulo 1 sobre o círculo 1 da folha anexo III de modo que um de seus vértices coincida com o centro P do círculo 1. Escolha no triângulo 2, um ângulo interno de cor diferente do anterior e cole esse triângulo sobre o mesmo círculo, de forma que o vértice do ângulo escolhido coincida com o ponto P e um dos lados desse ângulo coincida com um dos lados do ângulo do triângulo 1, já colado.

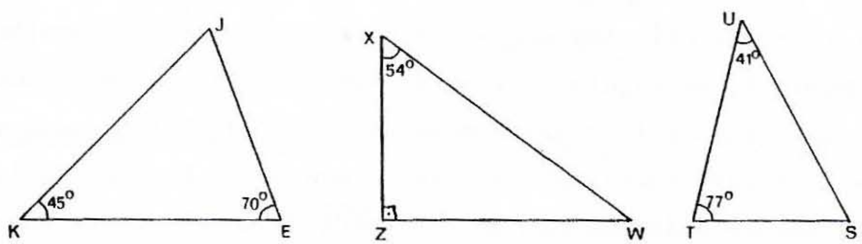
Escolha no triângulo 3 o ângulo interno, cuja cor seja diferente das escolhidas anteriormente e cole esse triângulo sobre o mesmo círculo de maneira que o vértice do ângulo escolhido coincida com o ponto P e um dos lados desse ângulo coincida com um dos lados do triângulo 1 ou 2.

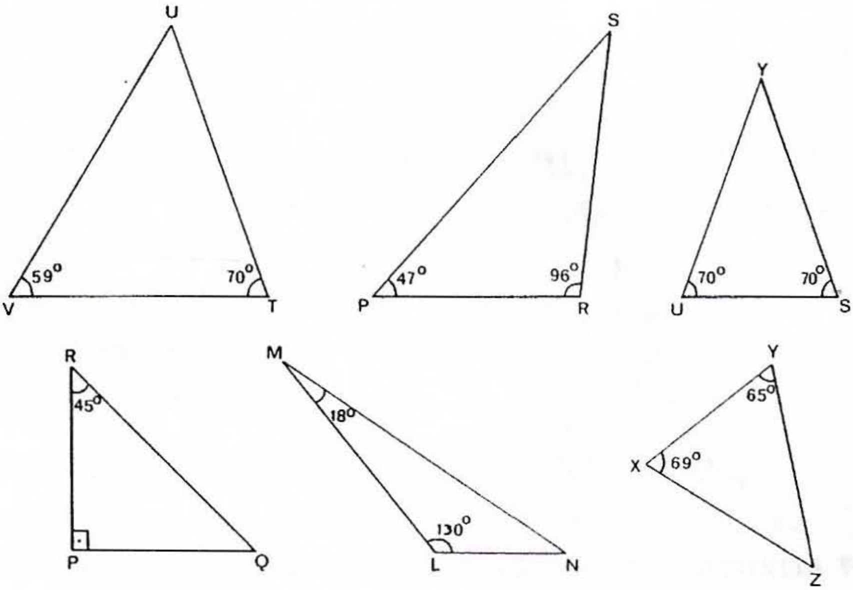
Repita o mesmo procedimento para os triângulos 4, 5 e 6 colocando-os sobre o círculo 2 e para os triângulos 7, 8 e 9 colocando-os sobre o círculo 3.

a) Observando as colagens, o que você pode concluir a respeito da soma dos ângulos azul, vermelho e verde em cada um dos círculos ?

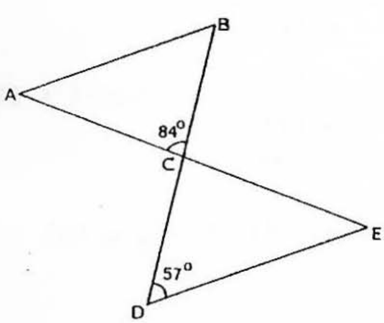
b) Como os 3 ângulos internos de cada um dos 9 triângulos têm as cores vermelho, azul e verde, o que você pode afirmar a respeito da soma dos 3 ângulos internos de cada triângulo ?

49ª ATIVIDADE : Sem usar transferidor, determine a medida dos ângulos desconhecidos em cada triângulo abaixo:





50ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo:



Se $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$, então:

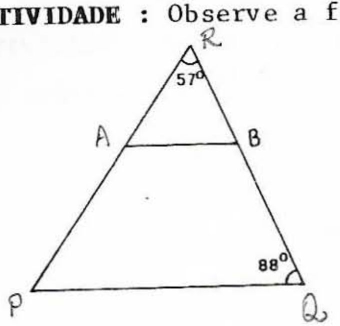
m $(D\hat{C}E)$ =

m $(C\hat{E}D)$ =

m $(A\hat{B}C)$ =

m $(C\hat{A}B)$ =

(*) **51ª ATIVIDADE** : Observe a figura abaixo, se $\overline{AB}$ // $\overline{PQ}$, então:



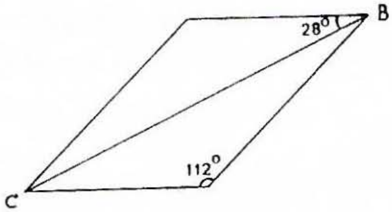
m $(A\hat{B}Q)$ =

m $(Q\hat{P}A)$ =

m $(P\hat{A}B)$ =

m $(B\hat{A}R)$ = m $(R\hat{B}A)$ =

52ª ATIVIDADE : Observe a figura abaixo. Se $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ e $\overline{AC}$ // $\overline{BD}$, então:



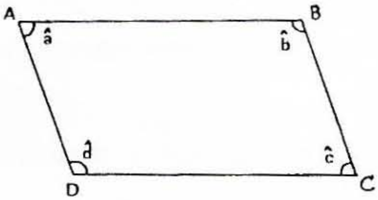
m $(B\hat{C}A)$ =

m $(C\hat{A}B)$ =

m $(D\hat{C}B)$ =

m $(C\hat{B}D)$ =

53ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados: $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ e m $(\hat{A})$ = 70°.



Determine:

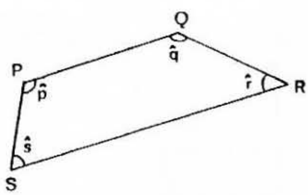
m $(\hat{b})$ =

m $(\hat{c})$ =

m ~~$(\hat{a})$~~ =

m $(\hat{d})$ =

54ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados: $\overline{RS}$ // $\overline{PQ}$, m $(\hat{q})$ = ~~150~~. 150°.



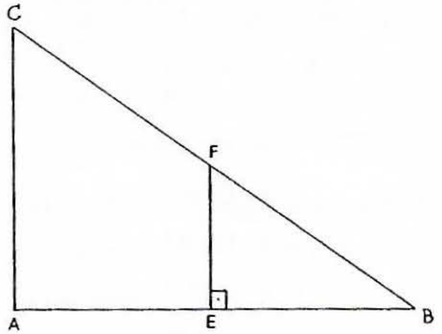
Determine:

m $(\hat{p})$ =

m $(\hat{r})$ =

55ª ATIVIDADE : Na próxima figura são dados :

$\overline{AC}$ // $\overline{EF}$ e m $(A\hat{C}F)$ = 47°



Determine:

m $(F\hat{E}A)$ =

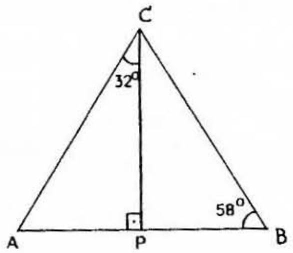
m $(E\hat{A}C)$ =

m $(E\hat{F}B)$ =

m $(C\hat{F}E)$ =

m $(F\hat{B}E)$ =

56ª ATIVIDADE : Observando a figura abaixo, determine:

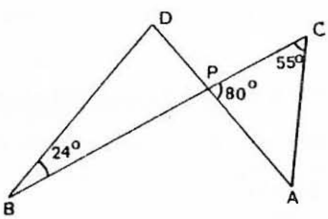


m $(P\hat{A}C)$ =

m $(B\hat{P}C)$ =

m $(P\hat{C}B)$ =

57ª ATIVIDADE : Observando a figura abaixo, determine:

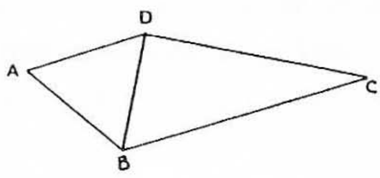


m $(C\hat{A}P)$ =

m $(D\hat{P}B)$ =

m $(B\hat{D}P)$ =

58ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados: $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, m $(D\hat{C}B)$= 31º, m $(C\hat{B}A)$ = 129º e m $(A\hat{D}B)$ = 73º. Determine:



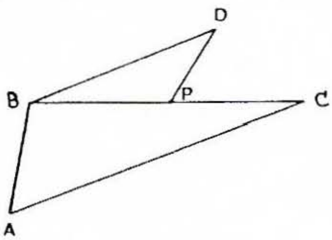
m $(C\hat{B}D)$ =

m $(B\hat{D}C)$ =

m $(B\hat{A}D)$ =

m $(D\hat{B}A)$ =

59ª ATIVIDADE : Na figura abaixo, são dados: $\overline{AC}$ // $\overline{BD}$, m$(P\hat{B}D)$= 37º, m $(C\hat{P}D)$ = 88º e m $(A\hat{B}D)$ = 123º. Determine:



m $(D\hat{P}B)$ =

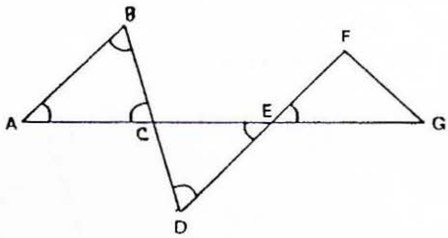
m $(B\hat{D}P)$ =

m $(B\hat{C}A)$ =

m $(A\hat{B}C)$ =

m $(C\hat{A}B)$ =

60ª ATIVIDADE : Na figura abaixo são dados: $\overline{AB}$ // $\overline{DF}$, m $(G\hat{E}F)$= 42º e m $(A\hat{B}C)$ = 78º. Determine:



m $(C\hat{E}D)$ =

m $(E\hat{D}C)$ =

m $(D\hat{C}E)$ =

m $(B\hat{C}A)$ =

m $(C\hat{A}B)$ =

22 - PONTO MÉDIO E MEDIATRIZ

Considere o segmento de reta $\overline{AB}$ abaixo. Qual é a sua medida ? Marque um ponto **M** nesse segmento de modo que **M** divida o em duas partes congruentes. O ponto de um segmento que o divide em duas partes congruentes chama-se **PONTO MÉDIO** do segmento. Utilizando um esquadro, trace uma reta que seja perpendicular a $\overline{AB}$ e que passe pelo seu ponto médio. Tal reta é chamada **MEDIATRIZ** do segmento $\overline{AB}$.

61ª ATIVIDADE : Numa folha de papel sulfite, marque dois pontos A e B tal que m $(\overline{AB})$ = 5cm. Com auxílio de uma régua, determine o ponto médio **M** do segmento $\overline{AB}$. Com auxílio de um esquadro, trace a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

a) Centralizando o compasso em vários pontos da mediatriz traçada, trace várias circunferências que passem, ao mesmo tempo pelos pontos A e B do segmento $\overline{AB}$.

b) Seria possível traçar outras circunferências que passem, ao mesmo tempo, pelos pontos A e B ? Quantas ?

c) Trace circunferências que passem, ao mesmo tempo, pelos pontos A e B e cujos centros não pertençam à mediatriz.

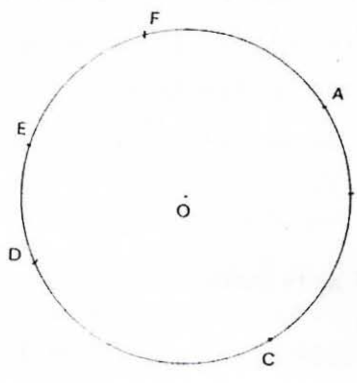
AC

62ª ATIVIDADE : Na circunferência abaixo, trace as cordas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

a) Todas as cordas traçadas têm a mesma medida ?

b) Utilizando régua e esquadro, trace a mediatriz de cada corda e prolongue-as.

c) As mediatrizes traçadas cruzam-se em algum ponto comum? Em caso afirmativo, diga qual é esse ponto.



d) Assinale na circunferência os pontos de cruzamento dela com as mediatrizes traçadas. Trace, por cada um desses pontos, retas perpendiculares às mediatrizes. Em quantos pontos diferentes cada uma dessas perpendiculares intercepta a cir - cunferência ?

23 - MEDIATRIZES, CORDAS E TANGENTES

Ao executar a atividade nº 61, você verificou que por dois pontos distintos de uma superfície plana, podemos traçar' infinitas circunferências de raios diferentes. Verificou ainda que os centros dessas circunferências devem, todos, pertencer' à mediatriz do segmento de extremidades A e B. Por essa razão, o segmento $\overline{AB}$ é uma corda de todas as circunferências traçadas. Na atividade nº 62, você verificou que a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência sempre passa pelo centro da circun ferência. Verificou ainda que as perpendiculares pelos pontos' de cruzamento da circunferência com a mediatriz sempre cortam' a circunferência em um único ponto. Esses pontos são chamados' **PONTOS DE TANGÊNCIA** e as retas que interceptam a circunferên - cia em um único ponto são chamadas **RETAS TANGENTES** à circunfe- rência.

63ª ATIVIDADE :

a) Trace, numa folha de papel sulfite, vários segmentos de re- ta que se cruzem num mesmo ponto. Chame de P este ponto.
b) Coloque um lápis ou um canudo de refrigerante sobre o ponto P da superfície plana da folha de papel, de modo que ele ' forme um ângulo reto com todos os segmentos de reta traça - dos. Utilize, se necessário, um esquadro.
c) Se você traçasse outros segmentos de reta na folha de papel

passando pelo ponto P, eles seriam perpendiculares ao lápis mantido na posição anterior ?

d) Imprima uma pequena inclinação ao lápis mantendo a sua ponta no ponto P. Coloque V ou F nas afirmações seguintes:

(F) O lápis continua perpendicular a todos os segmentos ' da superfície da folha que passam por P.

(F) O lápis não é mais perpendicular a nenhum segmento da folha que passa por P.

(V) O lápis continua perpendicular a apenas um segmento ' da folha que passa pelo ponto P.

24 - PERPENDICULARISMO ENTRE SEGMENTO E SUPERFÍCIE PLANA

Ao executar a atividade anterior, você verificou que **sempre existe** um segmento de reta, não contido em uma superfície plana, que é perpendicular a todos os segmentos de reta , contidos na superfície e que se cruzam num mesmo ponto P da superfície. Dizemos que um tal segmento é perpendicular à superfície plana no ponto considerado. É claro que, para cada ponto da superfície, existe **um e apenas um** segmento que lhe é perpendicular. Na vida diária, temos vários exemplos de perpendicularismo entre segmentos e superfície plana: a haste de um lustre é perpendicular à superfície do teto de uma sala; quando abandonamos um objeto de uma certa altura de uma mesa, o caminho ' descrito pelo objeto é perpendicular à superfície plana da mesa; um pedreiro ao bater uma estaca num terreno plano o faz ' perpendicularmente à superfície plana do terreno, etc.

64ª ATIVIDADE : Pegue uma cartela de papelão, um alfinete, uma esfera de isopor, um elástico e canetas hidrocor.

a) Faça um pequeno furo na superfície da cartela para indicar um ponto P dessa superfície plana e trace várias retas por esse ponto. (Use um alfinete).

b) Marque um ponto P na superfície da esfera. Coloque um elástico na superfície esférica passando por P, para indicar uma circunferência máxima. Trace essa circunferência no isopor utilizando a caneta. Trace, dessa maneira, várias circunferências máximas que passe por P.

c) Encoste a cartela na superfície da esfera de isopor de modo que o ponto P da cartela coincida com o ponto P da superfície esférica.

d) Mantendo a esfera e a cartela na posição anterior, espete o alfinete no ponto P, comum à cartela e à esfera, de modo que o alfinete seja perpendicular à superfície da cartela.

e) Coloque V ou F nas afirmações seguintes:

(√) Existem infinitas retas contidas na superfície da cartela, que passam pelo ponto P e que são perpendiculares ao alfinete.

(√) Existem infinitas circunferências máximas da superfície da esfera que passam pelo ponto P.

(√) Todas as retas contidas na superfície da cartela e que passam pelo ponto P são tangentes à superfície da esfera no ponto P, pois, todas elas, interceptam a superfície esférica em apenas um ponto.

(√) Todas as retas contidas na superfície da cartela e que passam pelo ponto P são tangentes a todas as circunferências máximas que passam pelo ponto P da superfície esférica.

(√) A linha reta que passa pelo alfinete, por ser perpendicular a todas as retas tangentes a uma das circunferências máximas que passa pelo ponto P da superfície' esférica, passa necessariamente pelo centro da esfera.

65ª ATIVIDADE : Para executar esta atividade, você deverá utilizar uma fita métrica, uma calculadora e 4 discos de papel ' cartão, de diâmetros e cores diferentes.

Meça os diâmetros e o comprimento das circunferências dos discos e, em seguida, complete a tabela abaixo:

DISCO	COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA DO DISCO (C)	DIÂMETRO DO DISCO (D)	$\frac{C}{D}$
amarelo			
azul			
vermelho			
verde			

25 - COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Ao executar a atividade anterior, você verificou que:

1) Quanto maior é o diâmetro de uma circunferência, tanto maior é o seu comprimento.

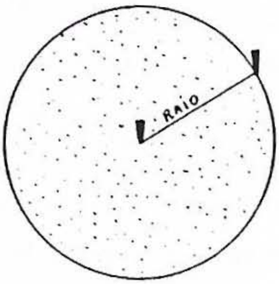
2) O diâmetro de uma circunferência qualquer cabe, aproximadamente 3,14 vezes na própria circunferência, quando retificada. Esse segundo resultado foi constatado quando você dividiu o comprimento da circunferência pela medida de seu diâmetro. Temos pois, que:

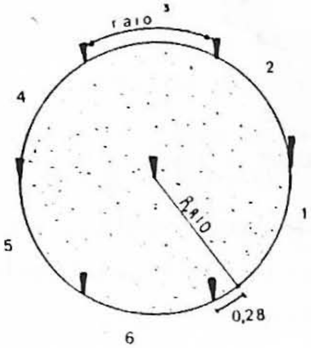
$$C : D \cong 3,14$$

É claro que se dividíssemos o comprimento de uma circunferência por 3,14, obteríamos o valor aproximado da medida de seu diâmetro, e se multiplicarmos a medida de diâmetro de uma circunferência por 3,14 obteremos o valor aproximado da medida de seu comprimento.

Os geômetras da antiguidade já conheciam bastante bem esse fato. Para traçar círculos, amarravam uma corda de determinado comprimento numa estaca cravada perpendicularmente ao solo (como na figura abaixo), fazendo-a girar em torno de um ponto fixo (ponto onde se cravou a estaca no solo). Aos poucos foram observando que essa corda (o raio da circunferência) cabia, aproximadamente, 6 vezes e um pouco mais de um quarto, isto é, cerca de 6,28 vezes na própria circunferência traçada. E, esse mesmo número, voltava a ser encontrado qualquer que fosse o tamanho da corda ou da circunferência a ser traçada. Concluíram, pois, que para conhecer o comprimento de uma circunferência bastava saber o comprimento de seu raio e multiplicá-lo por 6,28 ou então, tomar o comprimento do diâmetro da circunferência (o dobro de seu raio) e multiplicá-lo pela metade de 6,28; isto é, por 3,14 aproximadamente. O número 3,14 deverá aparecer novamente em outras situações, tanto na Geometria como

como na Matemática em geral. Os gregos antigos usavam-no com o valor aproximado de 3,1416. Hoje em dia, esse número é representado pelo símbolo π (letra do alfabeto grego chamada "pi"). Esse nome é relativamente recente e foi tirado da primeira sílaba da palavra grega "peripheria" cujo significado é circunferência, ou seja, a periferia ou fronteira de um círculo.





66ª ATIVIDADE : Resolva:

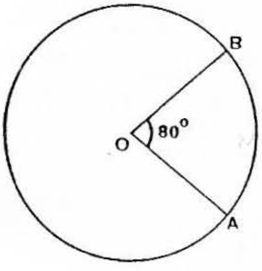
1) O comprimento de uma circunferência é, aproximadamente 8,16 cm. Qual é a medida aproximada de seu diâmetro ? E de seu ' raio ?

2) O diâmetro de uma circunferência mede 10cm. Qual é a medida aproximada de seu comprimento ?

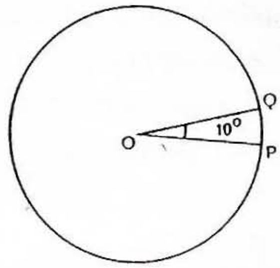
3) O raio de uma circunferência mede 2,5cm. Qual é a medida aproximada de seu comprimento ?

4) O comprimento de uma circunferência é, aproximadamente 25,6 cm. Qual é a medida aproximada de seu raio ?

5) Determine a medida em cm, de cada um dos arcos de circunferência seguinte :



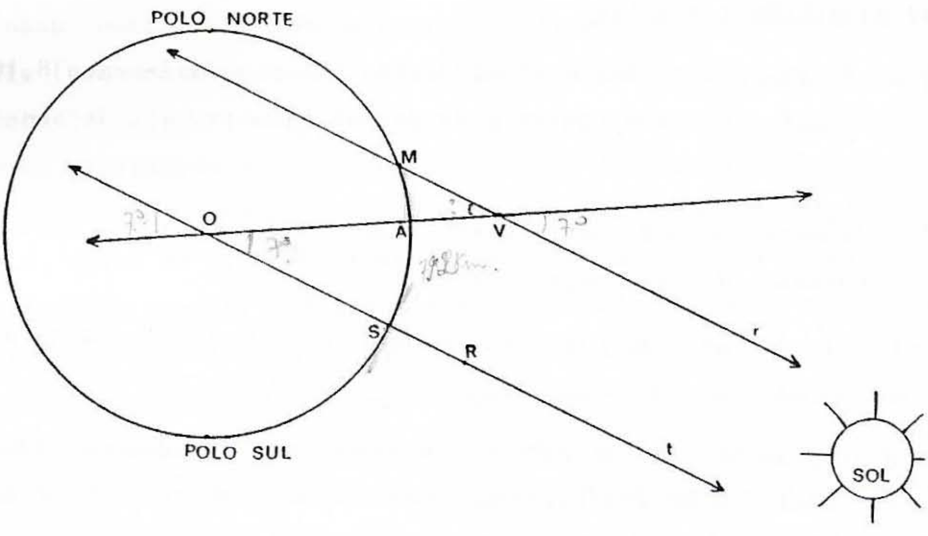
Dados:
m($\overline{OA}$)= 1cm
m($A\hat{O}B$)= 80°
m($\widehat{AB}$)= ?



Dados:
m($\overline{OP}$)= 2cm
m($P\hat{O}Q$)= 10°
m(PQ)= ?
m(QP)= ?

67ª ATIVIDADE : Um problema histórico: um desafio para você.

Na figura abaixo, a circunferência do centro O representa uma circunferência máxima da Terra, ao longo de um meridiano terrestre.



Os pontos A e S desse meridiano representam duas cidades. A distância entre essas duas cidades é de aproximadamente

792 Km - ? ? 792 Km.

798km, isto é, m (SA) = 798km. O segmento $\overline{AV}$ representa uma vareta, cravada perpendicularmente ao solo na cidade A e o segmento $\overline{SR}$, uma outra vareta cravada perpendicularmente ao solo na cidade S. As retas r e t, paralelas entre si, representam raios de sol ao meio-dia de um certo dia. Neste exato momento, na cidade S, o sol está exatamente a pino, isto é, nenhum objeto projeta sombra. O mesmo não acontece para os objetos da cidade A. A vareta AV, portanto, projeta uma sombra, representada na figura pelo arco AM. Neste instante mediu-se o ângulo $M\hat{V}A$ formado pela vareta AV e pelo raio de sol que passa, ao mesmo tempo, pelo ponto mais alto da vareta (ponto V) e pelo ponto extremo de sua sombra (ponto M). Verificou-se que a medida do ângulo $M\hat{V}A$ era de, aproximadamente 7^{o}.

Com base nessa experiência, responda:

a) Como você justifica o fato das retas t e $\overline{AV}$ passarem pelo centro O da Terra ?

b) Por que a reta **r** não passa pelo centro da Terra ?

c) Na figura, quais são os segmentos de reta que representam o raio da Terra ?

d) Sem usar transferidor, qual a medida do ângulo $S\hat{O}A$?

e) Utilizando o grau como unidade de medida, qual é a medida do arco SA ?

792 Km

f) Se m $(\widehat{SA})$ = 798km e m $(\widehat{SA})$ = 7^{o}, qual é o comprimento, em km, de um arco de 1^{o}, na circunferência máxima da Terra ?

g) Qual é o comprimento da circunferência máxima da Terra ?

h) Calcule a medida do diâmetro da Terra.

i) Calcule a medida do raio da Terra.

26 - COMO ERATÓSTENES MEDIU A TERRA

Uma das primeiras descobertas, e das mais chocantes ' relacionadas com o planeta onde vivemos, a Terra, foi a de que ela é uma esfera (bola) solta no espaço. Outro passo importante foi a medida de seu tamanho. Você já pensou, como poderia ' determinar o raio de uma bola sobre a qual você está andando , sem poder entrar nela ?

A circunferência máxima da Terra (ao nível do Equador) é cerca de 40.000km. No século XV (1600-1699), pensava-se que era muito menor. Assim, quando Colombo partiu para a Índia e aportou em uma das ilhas Bahamas, achou que já estava na Índia, logo, sua margem de erro foi maior que a largura dos Estados Unidos, mais a do Oceano Pacífico.

No terceiro século antes de Cristo (399 A.C. a 300 A.C.), os gregos sabiam mais. Naquela época, um matemático grego chamado Eratóstenes, mediu a circunferência da Terra e seu resultado apresentava um erro de apenas 1 ou 2 por cento. O método por ele utilizado foi o mesmo utilizado por você, no problema anterior.

Ele observou que na cidade de Aswan, chamada Syena naquela época, localizada no Egito às margens do rio Nilo, ao ' meio dia de um dia especial (chamado solstício de verão),o sol estava exatamente a pino, isto é, ao meio dia deste dia particular, uma vareta em posição vertical não lançava nenhuma sombra, e a base de um poço profundo ficava completamente iluminada. Nesse mesmo instante, em Alexandria, cidade localizada também no Egito, a aproximadamente 792km de Aswan, Eratóstenes mediu o ângulo entre uma vareta cravada perpendicularmente ao solo e uma semi-reta partindo do ponto superior da vareta até o pé de sua sombra (ângulo $M\hat{V}A$ na figura do problema anterior). Ele viu que era um ângulo com cerca de $7^o\ 12'$.

Como o sol está muito afastado da Terra, os seus raios, quando observados da Terra, são muito aproximadamente paralelos. Portanto, na figura do problema anterior, as retas r e t são paralelas (pois representam raios de sol) e a reta $\overline{AV}$ é transversal em relação a elas. Além disso, tanto o raio de sol t como a transversal $\overline{AV}$ passam pelo centro da Terra, pois as varetas foram cravadas perpendicularmente à superfície da Terra. Logo, com base nas propriedades das retas paralelas cortadas por uma transversal, Eratóstenes concluiu que os ângulos $M\hat{V}A$ e $S\hat{O}A$ eram congruentes. Como o ângulo $S\hat{O}A$ tem o vértice no centro da Terra e determina na circunferência máxima, o arco SA, então, a medida desse arco em graus é também $7^o\ 12'$, ou seja, cerca de $\frac{1}{50}$ da circunferência máxima da Terra.

A distância entre Aswan e Alexandria era conhecida na época: cerca de 5.000 "stadium" gregos. Um "stadium" era uma antiga unidade de distância. Eratóstenes concluiu que a circunferência da Terra devia ser por volta de 250.000 "stadium". Convertendo a quilômetros, de acordo com que antigas fontes dizem sobre o comprimento de um "stadium", obtemos 39.600km. Assim, o erro de Eratóstenes foi de aproximadamente 1%.

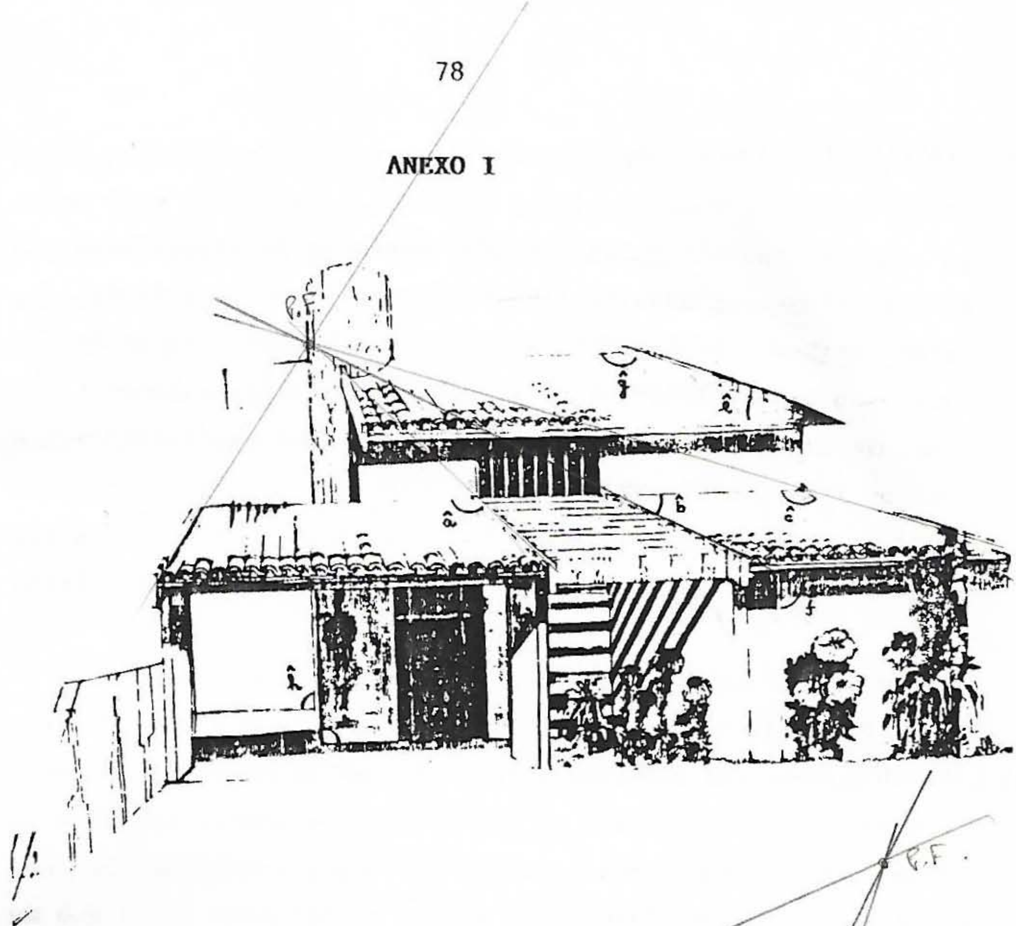
Desde os primeiros tempos, a geometria desenvolveu um papel preponderante na Matemática aplicada. Os egípcios precisaram dela intensamente, porque o Nilo elevava seu nível anualmente, destruía as pequenas demarcações das terras criando, assim, problemas de agrimensura. Daí a palavra **geometria**, provindo de duas palavras gregas, significando **terra e medida**. Mais' tarde, aconteceu que a "geometria" seria usada não apenas para medir coisas que estavam sobre a terra, mas, literalmente,para medir a própria terra. Isto ilustra um processo geral: quando' uma parte útil da Matemática se desenvolve por uma razão, em ' geral, ela se torna igualmente útil por outras razões inesperadas.

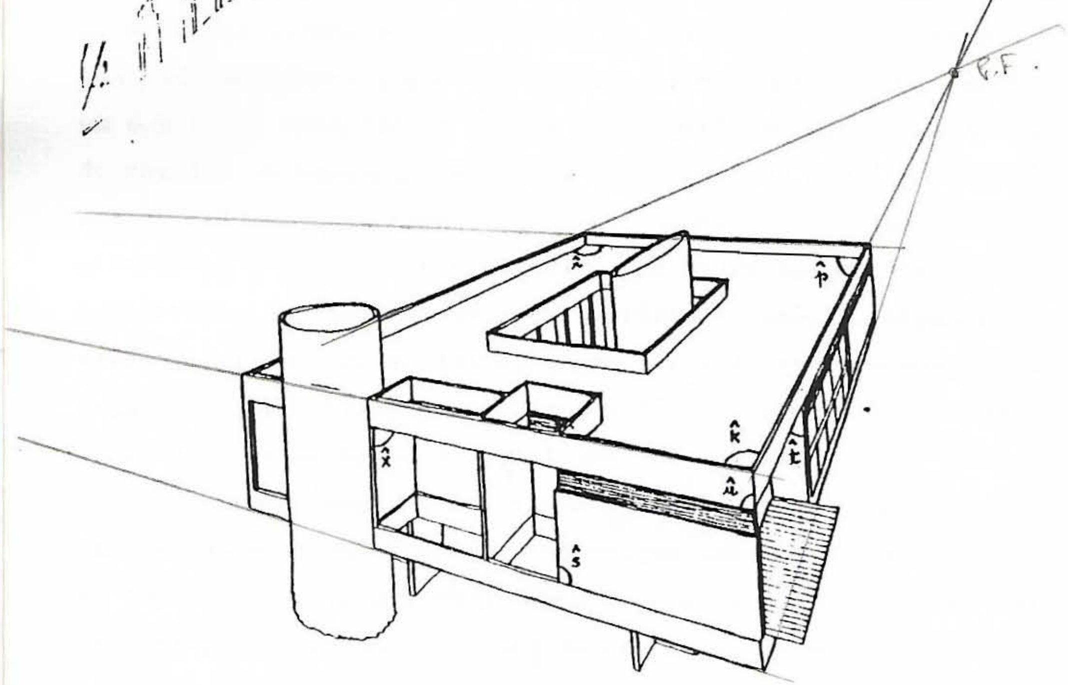
Muito pouco se conhece sobre o trabalho de Eratóstenes (276-194 A.C.). Temos alguns fragmentos de seus livros, na forma de citações de outros autores antigos, mas nenhum de seus próprios livros sobreviveu até os dias de hoje. As fontes ' indicam, entretanto, que ele escreveu sobre quase tudo, sendo, um dos raros exemplos de sábios desse período que se afastaram do caráter de especialização que distinguia os eruditos desta' época. Foi ao mesmo tempo, filólogo, orador, poeta, arqueólogo, matemático e filósofo e escreveu sobre quase tudo: geometria , astronomia, teoria dos números, história e comédia. Além disso, recebeu o título de Pentathlos, por ter sido campeão das cinco lutas dos jogos Olímpicos: a luta atlética, o salto, o arremesso do disco e da haste e o pugilato.

Eratóstenes, já em idade avançada, tendo ficado cego, em consequência da oftalmia (inflamação nos olhos), que era uma espécie de epidemia que, tanto hoje em dia como naquela época, atingia as pessoas no vale do rio Nilo, deixou-se morrer , miseravelmente, pouco tempo depois.

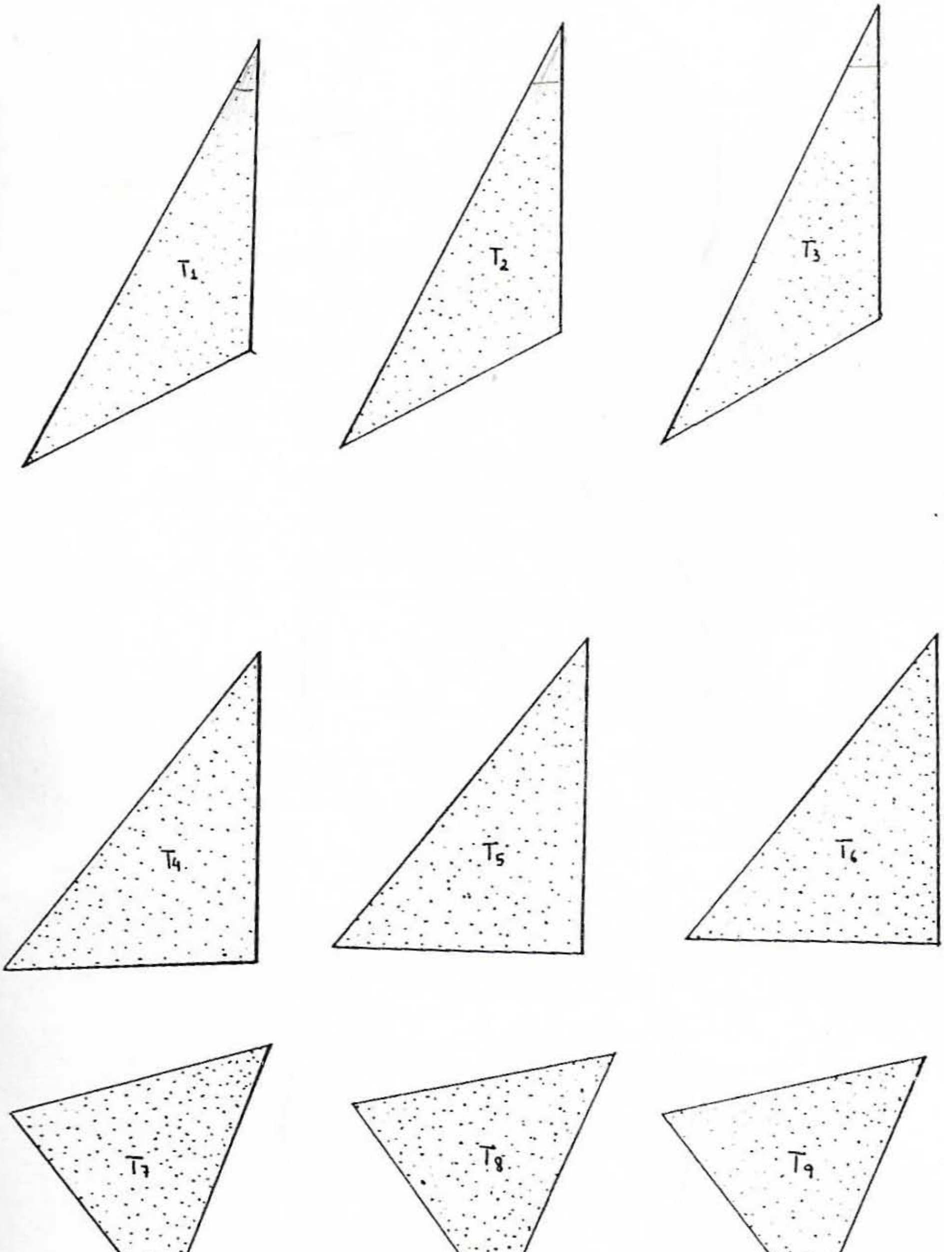
(Esse texto é uma adaptação de trechos dos seguintes livros: Geometria Moderna de Moise e Downs, História das Matemáticas na Antiguidade de Fernando de Almeida e Vasconcelos e "A Terra em que vivemos" de Rodolpho Caniato.)

ANEXO I





ANEXO II



ANEXO III