



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E  
APLICADA

PAULO ANDRÉ MULLER

**TEORIA DE COMPARAÇÃO DE VOLUME NA GEOMETRIA DE  
LORENTZ**

FLORIANÓPOLIS

2020

Paulo André Muller

**TEORIA DE COMPARAÇÃO DE VOLUME NA GEOMETRIA DE LORENTZ**

Dissertação/submetida ao Programa de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis  
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Muller, Paulo André

Teoria de comparação de volume na geometria de Lorentz /  
Paulo André Muller ; orientador, Ivan Pontual Costa e  
Silva, 2020.

156 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Teoria de comparação.  
3. Geometria Lorentziana. 4. Teoremas de comparação de área  
e volume. I. Costa e Silva, Ivan Pontual. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Paulo André Muller

**Teoria de comparação de volume na geometria de Lorentz**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jónatan Herrera Fernandez, Dr.  
Universidad de Córdoba

Profa. Marianna Ravara Vago, Dra.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em geometria e topologia.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2020.

## Agradecimentos

Esta dissertação é resultado de um trabalho que durou dois anos, e, após muitas reviravoltas, apresento-lhes a versão finalizada do trabalho. Naturalmente, não seria possível concretizá-lo se não pela ajuda e orientação de várias pessoas.

Gostaria de agradecer primeiramente a minha família que me apoiou de todas as formas possíveis nesse período, então a conclusão deste trabalho é também uma conquista de vocês.

Um especial agradecimento ao meu orientador, Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva, que me orientou num caminho de grande aprendizado matemático e humano. Seu vasto conhecimento guiou-me na escrita deste trabalho, e aguçou o meu interesse pela geometria.

Agradeço aos demais professores do programa de pós-graduação em matemática pura e aplicada da UFSC, em especial à Profa. Dra. Marianna Ravara Vago, que além de fazer parte da banca examinadora, foi extremamente compreensiva em suas aulas, sempre disposta a tirar dúvidas e discutir sobre as ideias matemáticas que surgiam.

Não poderia esquecer dos colegas dos seminários com o prof. Ivan, Henrique Puel Martins, Luiz Henrique Suzana, Victor Luis Espinoza e Kledilson Peter Ribeiro Honorato, que agradeço pela ajuda ao longo destes dois anos.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e aos funcionários do departamento de matemática.

## Resumo

O objetivo principal desta dissertação é desenvolver teoremas de comparação para espaços-tempo globalmente hiperbólicos com tensor de curvatura de Ricci limitado inferiormente em direções temporais.

Primeiramente, consideramos a função distância Lorentziana a uma hipersuperfície espacial  $P$ , causalmente completa e acausal. Para essa função, apresentamos certas condições de regularidade, destacando-se o fato de ser uma função distância. Em seguida, fixamos um produto torcido (Robertson-Walker) como variedade modelo, e o utilizamos para provar um teorema de comparação para o Laplaciano da distância Lorentziana a  $P$ ; ou equivalentemente, para a função curvatura média das hipersuperfícies de nível com distância  $t$  a  $P$ . Usamos esse resultado, juntamente com as fórmulas de variação de área e coárea, para provar um teorema de comparação da área de regiões compactas dentro das hipersuperfícies de nível. Consequentemente, estabelecemos um resultado comparando o volume de certas regiões entre superfícies de nível com seus correspondentes na variedade modelo.

Para a obtenção desses resultados, utilizamos aspectos geométricos globais e aspectos analíticos locais das variedades de Lorentz. Quanto aos geométricos, destacamos a propriedade de hiperbolicidade global, enquanto que os analíticos são fundamentados principalmente pela teoria de comparação da equação de Riccati associada a uma função distância.

**Palavras chave:** geometria Lorentziana, distância Lorentziana, teoria de comparação.

## **Abstract**

The main goal of this dissertation is developing comparison theorems for globally hyperbolic spacetimes with Ricci curvature tensor bounded from below along temporal directions.

We first consider the Lorentzian distance function to an acausal, causally complete, spacelike hypersurface  $P$ . For this function, we present some regularity conditions stemming from the fact that it is a distance function. Then we fix a warped product (Robertson-Walker) as a model space, and use it to prove a comparison theorem for the Laplacian of the Lorentzian distance to  $P$ , or equivalently, for the mean curvature function of the level hypersurfaces with distance  $t$  to  $P$ . We use this result together with the coarea and variation of area formulas, to prove a comparison theorem for the area of compact regions of the level hypersurfaces. As a consequence, we establish a result comparing the volume of certain regions between these level hypersurfaces with their counterparts in the model space.

In order to obtain these results, we have used global, geometric aspects, as well as local, analytic tools. As a key geometric aspect we highlight the globally hyperbolic property, while the analytic tools are mainly based on comparison theory for the Riccati equation associated with a distance function.

**Keywords:** Lorentzian geometry, Lorentzian distance, comparison theory.

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
|          | <b>Introdução</b>                                     | <b>9</b>  |
| <b>1</b> | <b>Noções Básicas</b>                                 | <b>11</b> |
| 1.1      | Métrica   | 11        |
| 1.2      | Conexões  | 13        |
| 1.2.1    | Torção e curvatura                                    | 14        |
| 1.2.2    | Conexão sobre funções                                 | 15        |
| 1.2.3    | Derivada covariante e transporte paralelo             | 17        |
| 1.2.4    | Aplicações a dois parâmetros                          | 19        |
| 1.2.5    | Conexão de Levi-Civita                                | 19        |
| 1.3      | Curvatura   | 20        |
| 1.3.1    | Simetrias da curvatura                                | 20        |
| 1.3.2    | Curvatura seccional e tensor de Ricci                 | 22        |
| 1.4      | Exemplos de variedades semi-Riemannianas              | 24        |
| 1.4.1    | A Esfera $\mathbb{S}^n$                               | 24        |
| 1.4.2    | O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$                   | 25        |
| 1.4.3    | Produtos Torcidos                                     | 25        |
| 1.5      | Geodésicas  | 27        |
| 1.5.1    | Aplicação exponencial                                 | 29        |
| 1.5.2    | Minimização e maximização Local                       | 31        |
| 1.6      | Subvariedades semi-Riemannianas                       | 32        |
| 1.6.1    | Segunda forma fundamental                             | 34        |
| 1.6.2    | Hipersuperfícies semi-Riemannianas                    | 36        |
| 1.7      | Alguns operadores diferenciais                        | 37        |
| <b>2</b> | <b>Cálculo Variacional</b>                            | <b>39</b> |
| 2.1      | Campos de Jacobi                                      | 39        |
| 2.1.1    | Campos de Jacobi em variedades de curvatura constante | 42        |
| 2.2      | Primeira e segunda variação                           | 42        |
| 2.3      | Forma Índice  | 45        |
| 2.4      | Pontos conjugados                                     | 46        |
| 2.5      | Pontos focais   | 48        |
| 2.6      | O caso tipo-luz                                       | 52        |
| <b>3</b> | <b>Tensores de Jacobi</b>                             | <b>56</b> |
| 3.1      | Geodésicas tipo-luz e módulos quociente               | 56        |
| 3.2      | Tensores transversais                                 | 61        |
| 3.3      | Tensores de Jacobi                                    | 65        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.4      | Equação de Riccati . . . . .  | 74         |
| 3.4.1    | Equação de Raychaudhuri . . . . .   | 77         |
| 3.5      | Funções distância . . . . .   | 79         |
| 3.5.1    | Primeira variação de área e fórmula de coárea . . . . .                       | 84         |
| 3.6      | Tensores de Lagrange canônicos. . . . .                                       | 86         |
| <b>4</b> | <b>Resultados preliminares de comparação.</b> . . . . .                       | <b>91</b>  |
| 4.1      | Teoremas de comparação . . . . .  | 92         |
| <b>5</b> | <b>Causalidade</b> . . . . .  | <b>100</b> |
| 5.1      | Cones Temporais. . . . .  | 100        |
| 5.1.1    | Cone Causal . . . . .   | 101        |
| 5.2      | Orientação Temporal . . . . .   | 102        |
| 5.3      | Relações de Causalidade. . . . .  | 103        |
| 5.4      | Distância Lorentziana . . . . .   | 110        |
| 5.5      | Mais sobre curvas causais . . . . .   | 113        |
| 5.5.1    | Existência de curvas maximizantes. . . . .                                    | 119        |
| <b>6</b> | <b>Comparação de área e volume em hipersuperfícies Lorentzianas</b> . . . . . | <b>123</b> |
| 6.1      | Cut locus . . . . .   | 123        |
| 6.1.1    | Regularidade da distância Lorentziana . . . . .                               | 132        |
| 6.2      | Comparação para a curvatura de Ricci . . . . .                                | 134        |
| 6.2.1    | Construção de espaços de comparação . . . . .                                 | 136        |
| 6.3      | Comparação de área e volume . . . . .   | 146        |
|          | <b>Apêndice.</b> . . . . .  | <b>150</b> |
| <b>A</b> | <b>Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos e Lorentzianos</b> . . . . .            | <b>150</b> |
| A.1      | Formas Bilineares . . . . .   | 150        |
| A.2      | Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos . . . . .                                  | 151        |
| A.3      | Espaços Vetoriais Lorentzianos . . . . .                                      | 153        |
| A.3.1    | O Caso Luminoso . . . . .   | 154        |
|          | <b>Conclusão</b> . . . . .  | <b>155</b> |
|          | <b>Referências</b> . . . . .  | <b>156</b> |

# Introdução

O objetivo deste trabalho consiste em abordar aspectos relacionados à assim chamada *teoria de comparação*. A ideia geral por trás desses resultados é obter informação geométrica sobre alguma classe de variedades semi-Riemannianas admitindo certas desigualdades específicas, que se reduzem a igualdades em uma subclasse, os chamados *espaços de comparação* ou *variedades modelo*. Sendo assim, neste trabalho, revisamos todo o material necessário para que, no último capítulo, estejamos em condições de enunciar teoremas de comparação de área e volume para espaços-tempos globalmente hiperbólicos com tensor de curvatura de Ricci limitado inferiormente em direções temporais.

Naturalmente, a teoria de comparação é muito ampla, estendendo-se para outros contextos. O seguinte resultado é um exemplo de teorema de comparação aplicado à Geometria Riemanniana.

**Teorema (Toponogov, 1959).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional  $K \geq \kappa$  para algum  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Então, dados quaisquer triângulos geodésicos  $\Delta \subset M$  e  $\Delta_\kappa \subset M_\kappa^n$  com lados iguais, os ângulos interiores de  $\Delta$  são maiores do que os em  $\Delta_\kappa$ .*

A curvatura seccional  $K$ , que aparece nesse teorema, é um importante elemento de curvatura, a ser definido no Capítulo 1, e é ela quem faz a conexão entre as variedades Riemannianas  $M$  e  $M_\kappa^n$ . Para cada  $\kappa \in \mathbb{R}$ , existe (a menos de isometrias) uma única variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e  $n$ -dimensional  $(M_\kappa^n, g_\kappa)$  com curvatura seccional constante  $\kappa$ . Esta é a variedade mencionada no teorema acima e que consiste na esfera de raio  $1/\sqrt{\kappa}$  se  $\kappa > 0$ , no espaço Euclidiano se  $\kappa = 0$ , e no espaço hiperbólico para  $\kappa < 0$ . Por triângulo geodésico, entende-se um triângulo cujos lados sejam geodésicas minimizantes.

Assim como no Teorema de Toponogov, em muitos casos, uma das duas variedades possui curvatura constante, enquanto que a outra possui alguma limitação na curvatura. Não à toa, é exatamente esse cenário no qual iremos trabalhar. Por um lado, fixaremos um *produto torcido de Robertson-Walker* como variedade modelo, e folheada por uma família de hipersuperfícies cuja curvatura seccional é constante. Por outro, a condição imposta às variedades que iremos comparar com esse produto torcido é a de satisfazer a *condição de comparação cosmológica*, que limita inferiormente o tensor de curvatura de Ricci em direções temporais.

Para desenvolver esses teoremas de comparação, são necessários vários pré-requisitos que, cuidadosamente e dentro do possível, selecionamos e apresentamos de modo que o leitor não precise se dirigir a outra bibliografia para que compreenda o texto completo, bem como para não tornar o trabalho excessivamente extenso. No entanto, o conteúdo dos capítulos iniciais são vistos muito rapidamente e sem demonstrações, e portanto um leitor inicialmente deve remeter-se às referências citadas antes de prosseguir.

No capítulo 1, fazemos uma breve revisão de geometria semi-Riemanniana, com enfoque nos resultados necessários para o desenvolvimento do tema principal. No capítulo 2, também

introdutório, introduzimos os chamados *campos de Jacobi*, que nos permitem estabelecer uma ideia de “convergência” e “divergência” de famílias de geodésicas, por meio de pontos conjugados e focais. Sendo assim, omitimos as demonstrações nesses capítulos, uma vez que seus conteúdos podem ser encontrados em O’Neill (1983), capítulos 3-5, 8 e 10, e os resultados apresentados não são o foco deste trabalho.

No capítulo 3, introduzimos os chamados *tensores de Jacobi*. Estaremos particularmente interessados nos *tensores de Riccati*, isto é, aqueles que satisfazem uma *equação de Riccati*, que é uma equação diferencial de primeiro grau com um termo quadrático. No capítulo 4, utilizamos esses tensores de Riccati para provar teoremas de comparação preliminares, que serão fundamentais nas provas dos principais resultados deste trabalho.

No capítulo 5, estudamos a *teoria de causalidade*, que é um dos principais conteúdos da Geometria Lorentziana. A partir daí, focamos em encontrar condições para a existência de geodésicas maximizantes, ou seja, que maximizam a distância Lorentziana entre dois pontos (ou de um ponto a um conjunto).

Por fim, tratamos no capítulo 6 de enunciar os principais resultados deste trabalho: teoremas de comparação de área e volume para espaços-tempos globalmente hiperbólicos. Para isso, definimos primeiramente o *cut locus*, e mostramos que a distância Lorentziana é uma função distância (conforme Definição 3.5.1) quando restrita a um certo domínio que evita esse conjunto. Em seguida, tratamos de definir nossa variedade modelo, e apresentamos suas principais propriedades. Por fim, provamos o Teorema de comparação d’Alembertiano, que, juntamente com as fórmulas de coárea e de variação de área, serão fundamentais nas provas dos teoremas principais.

Para a leitura desta dissertação, um domínio da teoria básica de variedades suaves e uma pequena familiaridade com geometria Riemanniana serão assumidos. No que diz respeito a campos e tensores de Jacobi, nos baseamos essencialmente em O’Neill (1983) e Costa e Silva (s.d), respectivamente. A teoria de causalidade é comum às bibliografias referentes à Geometria Lorentziana, e indicamos Beem (1999). Quanto aos resultados de comparação, nos baseamos principalmente em Treude e Grant (2013).

# 1 Noções Básicas

Neste capítulo, trazemos uma série de definições e resultados introdutórios a respeito de Geometria semi-Riemanniana que servem como base para o restante do trabalho, bem como para fixar notações e convenções (de sinal).

Assumimos que o leitor esteja familiarizado com a teoria de variedades suaves (de dimensão finita), sendo Lee (2012) nossa principal referência. Se não houver risco de confusão, faremos uso da notação de Einstein para somatórios. Além disso, campos vetoriais e tensoriais, curvas, etc., serão assumidos suaves (isto é,  $C^\infty$ ) a menos de menção contrária.

As demonstrações neste capítulo serão omitidas, mas as provas e mais detalhes podem ser encontrados em O’Neill (1983), capítulos 2 a 5, e Costa e Silva (s.d.), capítulos 2 a 5. Detalhes mais voltados à Geometria Riemanniana podem ser encontrados em Carmo (2015).

## 1.1 Métrica

Lembremos que em uma variedade diferenciável  $M$ , um campo tensorial (tensor)  $g$  do tipo  $(0, 2)$  simétrico associa, para cada  $p \in M$ , uma forma bilinear simétrica  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que o tensor  $g$  é *não degenerado* se cada  $g_p$  o é, ou seja, dado  $v \in T_p M$ , se  $g_p(v, w) = 0$  para todo  $w \in T_p M$ , então  $v = 0$ .

Mais detalhes sobre formas bilineares em espaços vetoriais (reais) podem ser encontrados no Apêndice A.1.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $n$ . Uma métrica (ou tensor métrico) em  $M$  é um campo tensorial  $(0, 2)$  simétrico não degenerado  $g$  de índice constante  $0 \leq \mu \leq n$ .*

Uma *variedade semi-Riemanniana* de índice  $\mu$  é um par  $(M, g)$ , onde  $M$  é uma variedade suave e  $g$  uma métrica em  $M$  com índice correspondente. Dois casos particulares serão estudados com mais detalhes nesse trabalho: o caso  $\mu = 0$ , em que cada  $g_p$  é positiva-definida, isto é, um produto interno em  $T_p M$ , e  $M$  é<sup>1</sup> dita ser uma *variedade Riemanniana*; e o caso  $\mu = 1$ , em que  $M^n (n \geq 2)$  será chamada de *variedade de Lorentz* (ou *Lorentziana*). Frequentemente, denotaremos  $g$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $g_p$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ou simplesmente  $g_p$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quando não houver risco de confusão. Também é comum fazer referência ao índice  $\mu$  de  $g$  como sendo o índice de  $M$ .

Dado um sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  em  $M$ , as respectivas componentes do tensor  $g$  são as funções suaves  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

<sup>1</sup>A partir de agora, frequentemente omitiremos menção explícita à métrica  $g$  se não houver risco de confusão, e abusaremos a notação referindo-nos à variedade  $M$  como ao respectivo par.

Sendo  $g$  não degenerado, para cada  $p \in U$ , as componentes de  $g_p$  formam uma matriz inversível simétrica  $[g_p] = (g_{ij}(p))_{i,j}$ . Denotamos por  $g_p^{ij}$  as componentes da matriz inversa de  $[g_p]$  na base coordenada de  $(U, \varphi)$ . Como  $g$  é simétrico, temos que  $g_{ij} = g_{ji}$  e portanto  $g^{ij} = g^{ji}$ .

Dados campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , com  $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$  em  $U$ , temos

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j = (g_{ij} dx^i \otimes dx^j)(X, Y),$$

e portanto  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  em  $U$ .

É comum fazer uso da notação clássica

$$g = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

em que o simbolo  $ds^2$  é chamado *elemento de linha* (com respeito ao sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$ ).

**Exemplo 1.1.2.** Em  $\mathbb{R}^n$  com coordenadas Cartesianas  $(x^1, \dots, x^n)$ , considere a métrica dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^{\mu} (dx^i)^2 + \sum_{j=\mu+1}^n (dx^j)^2.$$

Tal métrica é chamada de *métrica semi-Euclidiana* de índice  $\mu$ . Denotamos  $\mathbb{R}^n$  munido com tal métrica de  $\mathbb{R}_{\mu}^n$ . Para o caso  $\mu = 1$ , nos referimos a  $\mathbb{R}_1^n$  como *espaço-tempo de Minkowski*. ◀

Para  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana, o fato de  $g_p$  ser uma forma de sinal indefinido classifica vetores tangentes em classes mutuamente exclusivas. Dizemos que  $v \in T_p M$  é

1. *tipo-tempo* (ou *temporal*) se  $g_p(v, v) < 0$ ,
2. *tipo-luz* (ou *luminoso*) se  $g_p(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ ,
3. *tipo-espaço* (ou *espacial*) se  $g_p(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ .

Dizemos ainda que um vetor  $v \in T_p M$  é *causal* se for tipo-luz ou tipo-tempo.

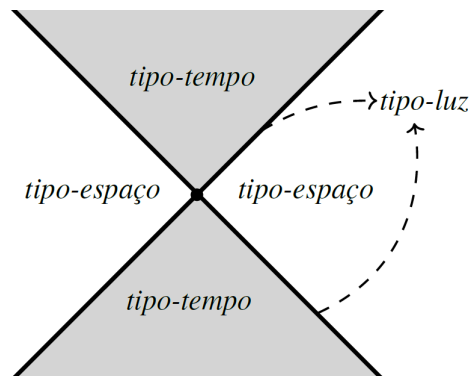
Denotamos por  $\mathcal{T}$  o conjunto de vetores tipo-tempo em um espaço vetorial semi-Euclidiano,  $\mathcal{S}$  o conjunto de todos vetores tipo-espaço excluindo a origem, e  $\Lambda$  o conjunto de todos os vetores tipo-luz, chamado de *cone de luz*. No caso de  $\mathbb{R}_1^n$ , estes conjuntos formam uma figura em forma de cone duplo, conforme ilustra a Figura 1.1.

Em uma variedade Lorentziana  $M$ , cada espaço tangente  $T_p M$  é isométrico ao espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ , assim  $\Lambda$  tem formato de cone duplo,

Tais noções se transmitem para outros objetos. Um campo vetorial  $X$  sobre  $M$  é *temporal* (resp. *luminoso*, *espacial* ou *causal*) se em cada  $p \in M$  tivermos  $X_p$  temporal (resp. luminoso, espacial ou causal). Similarmente, uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  é *temporal* (resp. *luminoso*, *espacial* ou *causal*) se  $\gamma'(t)$  for temporal (resp. luminoso, espacial ou causal) em todo  $t \in I$ .

Eventualmente, será interessante ampliar o conjunto das curvas com as quais trabalharemos.

Figura 1.1: Cones em Minkowski



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

**Definição 1.1.3.** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  é suave por partes se, para todo subintervalo fechado  $[a, b] \subseteq I$ , existe partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$  de  $[a, b]$  tal que, para cada  $i = 0, 1, \dots, k$ , a restrição de  $\alpha$  a  $[t_i, t_{i+1}]$  seja suave.

Os pontos  $t_1, \dots, t_k$  são ditos pontos de quebra e, nesse caso, podemos ter  $\alpha'(t_i^+) \neq \alpha'(t_i^-)$ . Em geral, trabalharemos com curvas definidas em intervalos fechados  $[a, b]$ , então fixaremos  $a = t_0$  e  $b = t_{k+1}$  nesse caso. Usaremos também a seguinte notação

$$\Delta\alpha'(t_i) = \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-) \in T_{\alpha(t_i)}M, \quad i = 1, \dots, k,$$

para representar a diferença entre as derivadas laterais.

## 1.2 Conexões

Um dos aspectos mais importantes numa variedade semi-Riemanniana é a existência de uma certa *conexão* natural. Através desta estrutura, podemos definir vários outros elementos que nos dão informação a respeito da geometria da variedade, tais como curvatura, transporte paralelo ao longo de curvas, aplicações exponenciais e geodésicas. Nesta e nas próximas seções, iremos explorar esses elementos.

**Definição 1.2.1.** Seja  $M$  uma variedade suave. Uma conexão (afim) em  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(i) \quad \nabla_{X_1 + fX_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y, \text{ para } X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } f \in C^\infty(M).$$

$$(ii) \quad \nabla_X (Y_1 + cY_2) = \nabla_X Y_1 + c \nabla_X Y_2, \text{ para } X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

(iii)  $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ , para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ .

Chamamos o par  $(M, \nabla)$  de variedade afim.

**Exemplo 1.2.2.** Tome  $M = \mathbb{R}^n$  e defina  $\nabla^{\text{flat}}$  da seguinte forma. Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , escreva  $X = X^i \partial_i, Y = Y^i \partial_i$ , onde  $\{\partial_i\}_{i=1}^n$  são os campos coordenados associados à carta identidade  $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ . Então, ponha

$$\nabla_X^{\text{flat}} Y := X(Y^i) \partial_i.$$

É fácil ver que  $\nabla^{\text{flat}}$  é de fato uma conexão em  $\mathbb{R}^n$ , chamada de conexão *flat* (padrão). ◀

Observe que a conexão não é tensorial, pois  $\nabla$  não é  $C^\infty(M)$ -linear na segunda variável. Porém, em virtude das propriedades (i) - (iii) na definição acima, é possível mostrar que  $\nabla$  depende apenas localmente dos campos vetoriais, no sentido da próxima proposição, conforme Costa e Silva (s.d.), Proposição 2.1.3.

**Proposição 1.2.3.** *Sejam  $\nabla$  conexão em  $M$  e  $U \subseteq M$  um aberto. Então,*

- (i) *se  $Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $Y|_U = \tilde{Y}|_U$ , então  $(\nabla_X Y)_q = (\nabla_X \tilde{Y})_q$ , para todo  $q \in U$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .*
- (ii) *Se  $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $X_p = \tilde{X}_p$  para algum  $p \in U$ , então  $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}} Y)_p$ , para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .*
- (iii) *Se  $X_p = \tilde{X}_p$  e  $Y|_U = \tilde{Y}|_U$ , então  $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$ .*

Em vista da Proposição 1.2.3, utilizaremos a notação  $\nabla_X Y$  mesmo quando  $X$  ou  $Y$  não forem campos suaves globalmente definidos. Em particular, dado  $v \in T_p M$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , fica bem definida a notação  $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p$ , onde  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é qualquer campo vetorial satisfazendo  $X_p = v$ .

Além disso, o resultado também nos permite realizar cálculos em coordenadas. Seja  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  um sistema de coordenadas em  $M$ , escrevemos  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , onde as  $n^3$  funções  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$  são chamadas de *coeficientes de conexão* ou *símbolos de Christoffel*. Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , com  $X = X^i \partial_i$  e  $Y = Y^j \partial_j$  em  $U$ , temos

$$\nabla_X Y = \left( X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \partial_k.$$

## 1.2.1 Torção e curvatura

Dada uma conexão numa variedade, podemos construímos dois tensores de importante relevância geométrica.

**Definição 1.2.4.** *Seja  $\nabla$  conexão em  $M$ . A torção de  $\nabla$  é um  $(1, 2)$ -tensor*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Se  $T \equiv 0$ , dizemos que a conexão  $\nabla$  é simétrica.

Como o colchete de Lie é zero quando calculado em campos coordenados, vemos que as componentes da torção em um sistema de coordenadas são dadas, em termos dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  da conexão correspondente, por

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Assim, concluímos que uma conexão é simétrica se, e somente se, seus símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  são simétricos na troca dos índices  $i$  com  $j$ .

**Definição 1.2.5.** *Seja  $\nabla$  conexão em  $M$ . A curvatura de  $\nabla$  é o  $(1, 3)$ -tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por<sup>2</sup>

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Se  $R \equiv 0$ , dizemos que a conexão  $\nabla$  é plana.

Em coordenadas,

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i,$$

onde  $R_{jkl}^i \partial_i = R(\partial_k, \partial_l) \partial_j$ .

Sendo  $R$  tensor  $C^\infty(M)$ -trilinear, podemos computar em  $R$  em vetores tangentes, isto é, dado  $p \in M$  e  $x, y, z \in T_p M$  fica bem definido  $R_p(x, y)z \in T_p M$ . Novamente, omitiremos o índice  $p$  quando não houver risco de confusão.

## 1.2.2 Conexão sobre funções

Em muitas aplicações queremos restringir conexões a imagens de certas funções sobre variedades, por exemplo curvas. Para isto generalizamos a noção de campos vetoriais e consequentemente de conexões.

**Definição 1.2.6.** *Sejam  $N$  e  $M$  variedades suaves e  $F : N \rightarrow M$  uma função. Um campo vetorial sobre  $F$  é uma função  $V : N \rightarrow TM$  tal que  $\pi_M \circ V = F$ , ou seja, se o seguinte diagrama comuta:*

<sup>2</sup>O sinal da curvatura pode variar na literatura. Em O'Neill (1983), a curvatura é o negativo da definida aqui.



$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{V} & TM \\
 & \searrow F & \swarrow \pi_M \\
 & & M
 \end{array}$$

onde  $\pi_M : TM \rightarrow M$  é a projeção canônica do fibrado tangente. Denotamos os campos vetoriais suaves sobre  $F$  por  $\mathfrak{X}(F)$ .

Observe que  $\mathfrak{X}(F)$  é um  $C^\infty(N)$ -módulo com respeito às operações

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{X}(F) \times \mathfrak{X}(F) &\rightarrow \mathfrak{X}(F) \\
 (V, W) &\mapsto V + W
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 C^\infty(N) \times \mathfrak{X}(F) &\rightarrow \mathfrak{X}(F) \\
 (f, V) &\mapsto fV.
 \end{aligned}$$

Note também que, se  $N = M$  e  $F = \text{Id}_M$ , obtemos a definição usual de campo vetorial.

**Exemplo 1.2.7.** Sejam  $F : N \rightarrow M$  função qualquer e  $V : M \rightarrow TM$  campo vetorial. Então, a aplicação  $V \circ F : N \rightarrow TM$  é um campo vetorial sobre  $F$ , pois

$$\pi_M \circ V \circ F = \text{Id}_M \circ F = F.$$

Se  $F$  é suave e  $dF : TN \rightarrow TM$  denota sua função derivada, então, para um campo vetorial  $X : N \rightarrow TN$ , temos que

$$\pi_M \circ dF \circ X = F \circ \pi_N \circ X = F \circ \text{Id}_N = F.$$

Portanto  $dF \circ X$  é também um campo vetorial sobre  $F$ . ◀

**Definição 1.2.8.** Uma conexão sobre  $F : N \rightarrow M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}
 D : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(F) &\rightarrow \mathfrak{X}(F) \\
 (X, V) &\mapsto D_X V
 \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(i) \quad D_{X_1 + fX_2} V = D_{X_1} V + fD_{X_2} V, \text{ para } X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(N), V \in \mathfrak{X}(F) \text{ e } f \in C^\infty(N).$$

$$(ii) \quad D_X (V_1 + cV_2) = D_X V_1 + cD_X V_2, \text{ para } X \in \mathfrak{X}(N), V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(F) \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad D_X (fV) = (Xf)V + fD_X V, \text{ para } X \in \mathfrak{X}(N), V \in \mathfrak{X}(F) \text{ e } f \in C^\infty(N).$$

Note que, se  $N = M$  e  $F = \text{Id}_M$ , então a conexão  $D$  sobre  $F$  é também uma conexão afim em  $M$ .

O interesse principal dessa definição é o fato de uma conexão afim definida sobre uma variedade  $M$  sempre induzir uma conexão sobre aplicações, chamada de *conexão induzida*, conforme o próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em Costa e Silva (s.d.), Teorema 2.4.4.

**Teorema 1.2.9.** *Sejam  $\nabla$  conexão afim em  $M$  e  $F : N \rightarrow M$  função suave. Então, existe uma única conexão  $D^\nabla$  sobre  $F$ , chamada de conexão induzida por  $\nabla$ , que satisfaz:*

$$D_X^\nabla(V \circ F)(p) = (\nabla_{dF_p(X_p)}V)_{F(p)},$$

para quaisquer  $p \in N$ ,  $X \in \mathfrak{X}(N)$  e  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

### 1.2.3 Derivada covariante e transporte paralelo

No caso de curvas, a conexão sobre mapa está intimamente ligada a um outro objeto bastante familiar da geometria, a *derivada covariante*.

**Definição 1.2.10.** *Seja  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  curva suave. Uma função  $D/dt : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  é dita ser derivada covariante da curva  $\alpha$  se é  $\mathbb{R}$ -linear e satisfaz*

$$\frac{D(hV)}{dt} = h'V + h \frac{DV}{dt}.$$

para qualquer  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e  $h \in C^\infty(I)$ .

A relação entre derivada covariante e conexão sobre a curva se dá pelo próximo teorema (ver Costa e Silva (s.d.), Teorema 3.3.3).

**Teorema 1.2.11.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave e  $D$  conexão sobre  $\alpha$ . Então,*

(i) *denotando por  $d/dt$  o campo vetorial canônico em  $I$ , a função*

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) &\rightarrow \mathfrak{X}(\alpha) \\ V &\mapsto D_{\frac{d}{dt}}V, \end{aligned}$$

*define uma derivada covariante sobre  $\alpha$ . Mais ainda, toda derivada covariante sobre  $\alpha$  é desta forma para uma única conexão sobre  $\alpha$ .*

(ii) *Se  $\nabla$  é uma conexão afim em  $M$  e  $D = D^\nabla$  é sua conexão induzida em  $\alpha$ , então*

$$\frac{D^\nabla(W \circ \alpha)}{dt}(s) = (\nabla_{\alpha'(s)}W)_{\alpha(s)},$$

para todo  $s \in I$  e  $W \in \mathfrak{X}(M)$ .

Uma vez que  $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , podemos aplicar a derivada covariante  $n$  vezes. Utilizaremos também a notação  $V', V'', V''', \dots, V^{(n)}$  para as subseqüentes derivadas covariantes de  $V$ .

Sobre uma curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$ , um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  satisfazendo

$$\frac{DV}{dt} = 0$$

é dito ser um campo vetorial *paralelamente transportado* (ou *paralelo*). Para um sistema de coordenadas  $(U, (x^1, \dots, x^n))$ , a equação acima se torna

$$\frac{dV^i}{dt}(t) + \Gamma_{jk}^i \circ \alpha(t)(x^j \circ \alpha)'(t)V^k(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

chamadas de *equações de transporte paralelo*. Sendo tais equações diferenciais lineares, é possível mostrar existência e unicidade a partir de uma condição inicial, conforme estabelece o próximo resultado (ver O'Neill (1983), Proposição 3.19).

**Teorema 1.2.12.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva suave,  $t_0 \in I$  e  $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ . Então, existe um único  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que*

$$\frac{DV}{dt} = 0 \text{ e } V(t_0) = v.$$

A noção de *transporte paralelo* é dada pelo seguinte resultado (ver Costa e Silva (s.d.), Teorema 3.3.7).

**Teorema 1.2.13 (Transporte Paralelo).** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave,  $D$  conexão sobre  $\alpha$  e  $D/dt$  derivada covariante associada a  $D$ . Para cada par  $t, s \in I$ , definimos*

$$P_{t,s}^{\alpha,D} : T_{\alpha(t)}M \rightarrow T_{\alpha(s)}M,$$

da seguinte maneira: para cada  $v \in T_{\alpha(t)}M$ , seja  $V$  o único campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  paralelamente transportado com  $V(t) = v$ . Fica então bem definida  $P_{t,s}^{\alpha,D}(v) = V(s)$ . A família de funções  $\{P_{t,s}^{\alpha,D}\}_{t,s \in I}$  possui as seguintes propriedades:

- (i) Cada  $P_{t,s}^{\alpha,D}$  é um isomorfismo entre espaços vetoriais.
- (ii) Dados  $t, s, r \in I$ , temos  $P_{s,r}^{\alpha,D} \circ P_{t,s}^{\alpha,D} = P_{t,r}^{\alpha,D}$ , chamadas de condições de cociclo. Em particular  $P_{t,t}^{\alpha,D} = \text{Id}_{T_{\alpha(t)}M}$  e  $(P_{t,s}^{\alpha,D})^{-1} = P_{s,t}^{\alpha,D}$ .
- (iii) Dado  $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e  $t_0 \in I$ , temos

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{t_0+t,t_0}^{\alpha,D}(X(t_0+t)) - X(t_0)}{t}.$$

A coleção de isomorfismos  $P_{t,s}^{\alpha,D}$  é chamada de *transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  com respeito à conexão  $D$* .

### 1.2.4 Aplicações a dois parâmetros

Um exemplo muito importante decorrente das conexões sobre funções é dado a seguir. Sejam  $\delta > 0$  e  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  uma função suave. Tal função será chamada de *aplicação a dois parâmetros*. Fixe também uma conexão  $\nabla$  em  $M$ , e denote a conexão induzida em  $\sigma$  por  $D = D^\nabla$ .

Denote pontos de  $[a, b] \times (-\delta, \delta)$  por  $(t, s)$ , e sejam  $\partial/\partial t$  e  $\partial/\partial s$  os campos coordenados canônicos. Dado  $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ , denotamos

$$Z_t = D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, \quad Z_s = D_{\frac{\partial}{\partial s}} Z.$$

Iterando derivadas, escrevemos

$$Z_{tt} = D_{\frac{\partial}{\partial t}}^2 Z, \quad Z_{ts} = D_{\frac{\partial}{\partial s}} Z_t = D_{\frac{\partial}{\partial s}} D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, \text{ etc.}$$

Escrevemos também  $\sigma_t = d\sigma \circ \partial/\partial t$  e  $\sigma_s = d\sigma \circ \partial/\partial s$ . Aplicações a dois parâmetros gozam de boas propriedades, como estabelece o próximo resultado (ver Costa e Silva (s.d.), Proposição 2.4.7).

**Proposição 1.2.14.** *Seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta \times \delta) \rightarrow M$  aplicação a dois parâmetros e  $\nabla$  conexão afim em  $M$  com  $D = D^\nabla$  conexão induzida em  $\sigma$ . Então,*

(i) *Dado  $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ , temos  $Z_{ts} - Z_{st} = R(\sigma_s, \sigma_t)Z$ .*

(ii)  *$\sigma_{ts} - \sigma_{st} = T(\sigma_s, \sigma_t)$ , e em particular  $\sigma_{st} = \sigma_{ts}$  se  $\nabla$  for conexão simétrica.*

### 1.2.5 Conexão de Levi-Civita

O principal resultado a respeito de conexões vem a seguir, e uma prova pode ser encontrada em O'Neill (1983), Teorema 3.11. Ele nos diz que toda métrica semi-Riemanniana sempre induz uma (única) conexão satisfazendo certas propriedades.

**Teorema 1.2.15.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Então, existe uma única conexão afim  $\nabla$  simétrica que é compatível com sua métrica, isto é,*

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

*Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita e pode ser caracterizada pela fórmula de Koszul:*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]),$$

*para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .*

**Notação.** A partir de agora, a menos de menção contrária, sempre que nos referirmos a uma conexão sobre uma variedade semi-Riemanniana, estaremos tratando exclusivamente da conexão de Levi-Civita, e não usaremos nenhuma notação especial para especificá-la.

Em um sistema de coordenadas locais, a compatibilidade com a métrica nos dá

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{il}\Gamma_{jk}^l + g_{jl}\Gamma_{ik}^l,$$

e pela fórmula de Koszul, obtemos

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (1.2)$$

Isso nos dá uma maneira de obter os símbolos de Christoffel a partir dos coeficientes da métrica  $g$ . Por exemplo, em qualquer  $\mathbb{R}_v^n$ , os coeficientes  $g_{ij}$  da métrica semi-Euclidiana (Exemplo 1.1.2) são constantes, então segue-se de 1.2 que todos os  $\Gamma_{jk}^i$  com respeito às coordenadas Cartesianas usuais são nulos. Da Definição 1.2.5, vemos que o tensor de curvatura em  $\mathbb{R}_v^n$  é identicamente nulo, isto é, a variedade semi-Riemanniana  $\mathbb{R}_v^n$  é plana com respeito à conexão de Levi-Civita.

Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave e  $D/dt$  derivada covariante sobre  $M$  associada a conexão de Levi-Civita, dados  $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , temos

$$g(V, W)' = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right),$$

onde, no lado esquerdo da igualdade, denotamos a derivada da função  $t \in I \mapsto g_{\alpha(t)}(V(t), W(t)) \in \mathbb{R}$ .

## 1.3 Curvatura

Agora que já definimos a conexão de Levi-Civita, veremos quais propriedades são ganhas pelo tensor de curvatura (Definição 1.2.5) associado a essa conexão. Além disso, introduziremos alguns objetos derivados desse tensor.

### 1.3.1 Simetrias da curvatura

Para quaisquer campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos o *operador de curvatura* associado ao par  $(X, Y)$  como sendo a aplicação  $C^\infty(M)$ -linear dada por

$$R(X, Y) : Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Devido a sua natureza tensorial, ela naturalmente induz um operador linear em cada espaço tangente  $T_pM$ , a saber, para  $x, y \in T_pM$ ,

$$R_p(x, y) : z \in T_pM \mapsto R_p(x, y)z \in T_pM.$$

Outro importante operador linear associado a curvatura é o chamado *operador força de maré*<sup>3</sup> associado a um vetor  $v \in T_pM$ , definido por

$$R_v : x \in T_pM \mapsto R_v(x) = R(x, v)v \in T_pM.$$

As próximas identidades são as chamadas *simetrias de curvatura*, cujas provas podem ser vistas O'Neill (1983), Proposição 3.36.

**Teorema 1.3.1 (Simetrias do Tensor de Curvatura).** *Para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , temos*

- (i)  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ .
- (ii)  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(Z, R(X, Y)W)$ .
- (iii)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ . (*Primeira identidade de Bianchi.*)
- (iv)  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ . (*Troca por Pares.*)
- (v)  $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$ . (*Segunda Identidade de Bianchi.*)

Tais simetrias induzem as seguintes propriedades no operador força de maré.

**Corolário 1.3.2.** *Dado  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , o operador força de maré  $R_v$  possui as seguintes propriedades:*

- (i)  $R_v(v) = 0$  e  $R_v(T_pM) \subseteq v^\perp$ . *Em particular, o operador força de maré pode ser visto como um operador em  $v^\perp$ .*
- (ii)  $g_p(R_v(x), y) = g_p(x, R_v(y))$ , *para todo  $x, y \in T_pM$ , isto é,  $R_v$  é auto-adjunto com respeito ao produto escalar  $g_p$ .*

Quando se trata de geodésicas tipo-luz, que serão exploradas no Capítulo 3, é conveniente utilizar a seguinte variação do operador força de maré (ver Costa e Silva (s.d.), p. 100).

**Proposição 1.3.3 (Operador força de maré luminoso).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ , e fixe  $p \in M$ . No espaço vetorial Lorentziano  $(T_pM, g_p)$ , seja  $v \in T_pM$  vetor luminoso, e considere o quociente  $\overline{v^\perp}$  tal como construído no Apêndice A (ver Proposição A.3.6). Então, o operador*

$$\overline{R_v} : \overline{w} \in \overline{v^\perp} \mapsto \overline{R_v(w)} \in \overline{v^\perp}$$

<sup>3</sup>Do inglês *tidal force operator*.

está bem definido e é auto-adjunto com respeito ao produto interno induzido por  $g_p$ , tal como definido na Proposição A.3.6-(ii).

### 1.3.2 Curvatura seccional e tensor de Ricci

Apesar do do tensor de curvatura ser um objeto elaborado no sentido algébrico, ele pode ser completamente determinado por uma aplicação mais simples, a *curvatura seccional*, que visa apenas os planos bidimensionais sobre a variedade.

Exibiremos apenas os resultados mais relevantes no que diz respeito a essa nova curvatura, mais detalhes podem ser encontrados em O'Neill (1983), capítulo 3.

Em cada  $p \in M$ , chamaremos de *plano* qualquer conjunto  $\Pi \subseteq T_p M$  que seja um subespaço vetorial bidimensional.

**Definição 1.3.4.** *Se  $\Pi \subseteq T_p M$  é um plano não degenerado (isto é, restrito ao qual  $g_p$  é não degenerada), a curvatura seccional de  $\Pi$  é o número*

$$K(\Pi) = \frac{g_p(R_p(w, v)v, w)}{g_p(w, w)g_p(v, v) - g_p(v, w)^2}, \quad (1.3)$$

onde  $\{v, w\}$  é uma base qualquer de  $\Pi$ .

Nas referências dadas acima, demonstra-se que a curvatura seccional está bem definida, isto é, que o denominador em (1.3) nunca se anula para planos não degenerados, e que o valor de  $K(\Pi)$  independe da escolha de base.

**Proposição 1.3.5 (Schur).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana com a propriedade de que, para todo  $p \in M$ , existe  $f(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $K(\Pi) = f(p)$  para qualquer plano  $\Pi \subseteq T_p M$  não degenerado. Então, a função  $f : p \in M \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$  é suave e temos, para qualquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$R(X, Y)Z = f[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y].$$

Uma prova desse resultado pode ser encontrada em Costa e Silva (s.d.), Proposição 3.7.14. As condições da proposição acima são trivialmente satisfeitas em variedades bidimensionais.

**Corolário 1.3.6.** *Se  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana bidimensional (também chamada de superfície semi-Riemanniana), então existe uma única função  $K \in C^\infty(M)$  tal que, para qualquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$R(X, Y)Z = K[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y].$$

Tal função  $K$  é chamada de curvatura Gaussiana da superfície.

**Definição 1.3.7 (Curvatura Constante).** Dado  $C_0 \in \mathbb{R}$ , uma variedade semi-Riemanniana é dita ser de curvatura constante  $C_0$  se

$$K(\Pi) = C_0,$$

para qualquer plano  $\Pi$  não degenerado em qualquer espaço tangente de  $M$ . Se existe um tal número real, dizemos que  $(M, g)$  é uma variedade de curvatura constante.

A respeito de curvatura constante, a Proposição 1.3.5 tem uma importante consequência.

**Corolário 1.3.8.** Uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  tem curvatura constante  $C_0$  se e somente se

$$R(X, Y)Z = C_0[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y],$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Em particular,  $(M, g)$  é plana se e somente se tem curvatura constante  $C_0 = 0$ .

Outro variante do tensor de curvatura, e que será muito importante neste trabalho, é dado a seguir.

**Definição 1.3.9.** Seja  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana  $n$ -dimensional e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  referencial ortonormal local, com  $g(E_i, E_i) = \varepsilon_i = \pm 1$ . O tensor de Ricci (ou curvatura de Ricci) de  $(M, g)$  é dado por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(E_i, Y)X, E_i), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se  $S$  denota o traço do tensor de Ricci, então dizemos que  $S$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$ . Explicitamente,

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{Ric}(E_i, E_i).$$

Naturalmente, tais definições independem da escolha do referencial ortonormal. Além disso, pelas simetrias do tensor de curvatura, vemos que o tensor de Ricci é simétrico.

O tensor de Ricci também se associa ao operador força de maré em direções não luminosas da seguinte maneira, conforme Costa e Silva (s.d.), p. 110.

**Proposição 1.3.10.** Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $n \geq 2$ ,  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  não nulo e temporal caso  $g$  seja indefinida. Temos então que

$$\text{Ric}(v, v) = \text{tr } R_v.$$

E temos uma adaptação via quociente para o caso luminoso.



**Proposição 1.3.11.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ ,  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  luminoso. Com as notações e propriedades do quociente feitas no apêndice A (proposição A.3.6), e para o operador força de maré luminoso  $\overline{R}_v$  introduzido na proposição 1.3.3, temos*

$$\text{Ric}(v, v) = \text{tr } \overline{R}_v.$$

## 1.4 Exemplos de variedades semi-Riemannianas

O primeiro exemplo de variedade semi-Riemanniana que introduzimos foi o caso dos espaços semi-Euclidianos  $\mathbb{R}_\mu^n$  no Exemplo 1.1.2. Consideramos agora outros exemplos.

Antes, é conveniente lembrar a noção de *pullback* da teoria de variedades. Dado um  $(0, s)$ -tensor  $\mathbb{T}$  sobre uma variedade  $M$  e uma função suave  $F : N \rightarrow M$ , o *pullback* de  $\mathbb{T}$  por  $F$  é o  $(0, s)$ -tensor  $F^*\mathbb{T}$  em  $N$  definido por

$$F^*\mathbb{T}_p(v_1, \dots, v_s) = \mathbb{T}_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_s)),$$

para todo  $p \in N, v_1, \dots, v_s \in T_p N$ . Agora, se  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana, e  $F : N \rightarrow M$  é uma aplicação suave, então o *pullback*  $F^*g$  define um  $(0, 2)$ -tensor simétrico em  $N$ , que não é necessariamente uma métrica semi-Riemanniana em  $N$ .

### 1.4.1 A Esfera $\mathbb{S}^n$

O primeiro exemplo onde o *pullback* é de fato uma métrica é o caso da *n-esfera*. No espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  usual, denotamos sua métrica por  $\delta$ , e a aplicação inclusão por  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . A *métrica redonda* na esfera é a métrica Riemanniana  $\omega_n := i^*\delta$ .

Como um exemplo concreto, considere o caso  $n = 2$ , com coordenadas esféricas usuais em  $\mathbb{R}^3$  dadas por

$$(r, \theta, \phi) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

Fixando  $r = 1$ , obtemos as coordenadas adaptadas

$$(\theta, \phi) \mapsto (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

sobre  $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$  até o aberto  $U \subset \mathbb{S}^2$ , dado por  $U = \mathbb{S}^2 \setminus P$ , onde  $P$  é o semi-plano fechado  $y = 0, x \geq 0$ .

As componentes  $(\omega_2)_{ij}$  são facilmente computadas, resultando no elemento de linha

$$ds_{\omega_2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.4)$$

### 1.4.2 O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$

O espaço hiperbólico possui diversas representações equivalentes. Para uma primeira ilustração, exibimos o modelo de semi-espaço superior. Considere

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

chamado de *semi-espaço superior* em  $\mathbb{R}^n$ . A *métrica hiperbólica*  $g_H$  é dada da seguinte maneira. Seja  $\delta$  a métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  restrita a  $\mathbb{H}^n$ . Considere a função positiva

$$\Omega : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n \mapsto 1/x_n \in (0, +\infty).$$

Definimos então

$$g_H := \Omega^2 \delta.$$

Em coordenadas Cartesianas  $(x^1, \dots, x^n)$ , o elemento de linha é

$$ds_H^2 = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

### 1.4.3 Produtos Torcidos

A partir de variedades semi-Riemannianas conhecidas, podemos obter novas variedades “combinando-as” de certa forma, o que nos dá uma vasta classe de variedades.

Sejam  $(B, g_B)$  e  $(F, g_F)$  variedades semi-Riemannianas, e  $f : B \rightarrow (0, +\infty)$  função suave. Denote por  $\pi_B : (p, q) \in B \times F \mapsto p \in B$  e  $\pi_F : (p, q) \in B \times F \mapsto q \in F$  as projeções canônicas. O *produto torcido* de base  $(B, g_B)$ , fibra  $(F, g_F)$ , e *função de torção*<sup>4</sup>  $f$  é a variedade semi-Riemanniana dada por

$$B \times_f F := (B \times F, \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)).$$

Note que se  $f \equiv 1$ , então um produto torcido é simplesmente um *produto*.

Dados  $(p, q) \in B \times F$ , temos a decomposição  $T_{(p,q)}(B \times F) \simeq T_p B \oplus T_q F$ . Então, se  $(v, w), (v', w') \in T_p B \oplus T_q F$ , temos que

$$g_{B \times_f F}((v, w), (v', w')) = (g_B)_p(v, v') + f(p)^2 (g_F)_q(w, w').$$

Dadas bases ortonormais  $\{v_1, \dots, v_{\dim(B)}\}$  e  $\{w_1, \dots, w_{\dim(F)}\}$  de  $(T_p B, (g_B)_p)$  e  $(T_q F, (g_F)_q)$ ,

---

<sup>4</sup>Do inglês, warping function.

respectivamente, vemos que

$$\left\{ (v_1, 0), \dots, (v_{\dim(B)}, 0), \left( 0, \frac{w_1}{f(p)} \right), \dots, \left( 0, \frac{w_{\dim(F)}}{f(p)} \right) \right\}$$

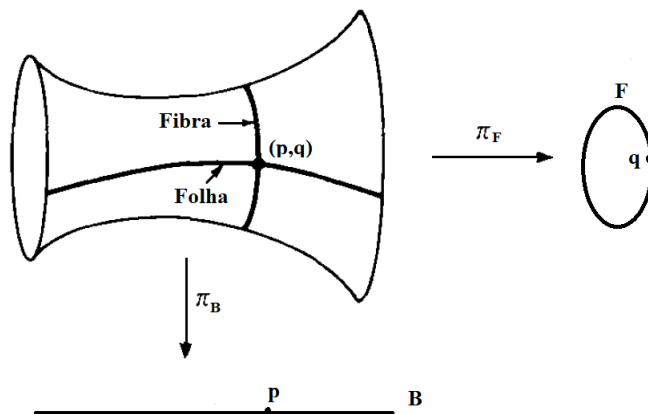
é uma base ortonormal de  $(T_{(p,q)}(B \times_f F), (g_{B \times_f F})_{(p,q)})$ . Utilizando tais bases, é fácil ver que

$$\text{ind}(B \times_f F) = \text{ind}(B) + \text{ind}(F).$$

Em particular,

- i) se  $(B, g_B)$  é Lorentziana e  $(F, g_F)$  é Riemanniana, então  $B \times_f F$  é Lorentziana;
- ii) se  $(B, g_B)$  e  $(F, g_F)$  são ambas Riemannianas, então  $B \times_f F$  também é.

Figura 1.2: Folhas e fibras no produto torcido  $B \times_f F$ .



Fonte: Adaptada de O'Neill (1983).

Conjuntos da forma  $\{p\} \times F = \pi_B^{-1}(p)$  são chamados de *fibras*, enquanto que os da forma  $B \times \{q\} = \pi_F^{-1}(q)$  são as *folhas*, conforme Figura 1.2. Como esperado, folhas e fibras se interceptam sempre ortogonalmente. Vetores (respectivamente, campos vetoriais) tangentes às fibras são ditos *verticais*, enquanto que tangentes às folhas são ditos *horizontais*.

Veamos alguns exemplos clássicos de produtos torcidos.

- 1) Sejam  $(B, g_B) = (\mathbb{R}, dt^2)$  com a métrica positiva padrão em  $\mathbb{R}$ , e  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$  a  $n$ -esfera. O produto  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, dt^2 + \omega_n)$  é o *cilindro (Riemanniano) padrão*.
- 2) A versão Lorentziana do exemplo anterior é a seguinte. Sejam  $(B, g_B) = (\mathbb{R}, -dt^2)$  e  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$ . Então, o produto  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, -dt^2 + \omega_n)$  é chamado de *cilindro de Einstein*.

3) Sejam  $(B, g_B) = ((a, b), -dt^2)$  com a métrica negativa no intervalo aberto  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$  função suave, e  $(F, g_F)$  uma variedade Riemanniana qualquer. O produto torcido Lorentziano  $(a, b) \times_f F$  é chamado de *espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado* (é chamado simplesmente de *espaço-tempo de Robertson-Walker* se  $(F, g_F) = (\mathbb{R}^n, \delta)$ ,  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$ , ou  $(F, g_F) = (\mathbb{H}^n, g_H)$ ).

4) Fixe  $M > 0$ . Considere o conjunto aberto

$$B = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r > 2M\},$$

com a métrica Lorentziana

$$g_B = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr.$$

Seja também  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^2, \omega_2)$ , e considere a função de torção como sendo a projeção

$$f : (t, r) \in B \mapsto r \in (2M, +\infty).$$

Esse produto torcido Lorentziano  $B \times_f F$  é chamado de *espaço-tempo de Schwarzschild de massa  $M$* .

## 1.5 Geodésicas

Um dos conceitos mais importantes na geometria semi-Riemanniana é o de *geodésica*, que será definido em termos das conexões.

**Definição 1.5.1 (Aceleração e geodésicas).** *Seja  $(M, \nabla)$  uma variedade afim. A aceleração de uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é o campo vetorial  $\alpha'' \in \mathfrak{X}(\alpha)$  dado por*

$$\alpha'' := \frac{D^\nabla \alpha'}{dt}.$$

*A curva  $\alpha$  é uma geodésica em  $(M, \nabla)$  se possuir aceleração identicamente nula, isto é,  $\alpha'' = 0$ . Em outras palavras, uma geodésica é uma curva cujo campo vetorial  $\alpha'$  é paralelo.*

Novamente, a menos de menção contrária, uma geodésica numa variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  estará sempre associada à conexão de Levi-Civita.

A questão de uma curva ser geodésica depende da parametrização. Se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica e  $H : J \rightarrow I$  é um difeomorfismo, temos

$$(\alpha \circ h)'' = h''(\alpha' \circ h) + (h')^2(\alpha \circ h'')$$

que não é zero se  $h'' \neq 0$ . Vemos assim que apenas *reparametrizações afins* preservam o caráter geodésico. Por outro lado, se  $\beta : I \rightarrow M$  é uma curva tal que existe uma reparametrização  $h : J \rightarrow I$  de forma que  $\beta \circ h$  seja uma geodésica, dizemos que  $\beta$  é uma *pré-geodésica*.

Observe também que o *caráter causal* de uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  não se altera, pois

$$\frac{dg(\alpha', \alpha')}{dt} = 2g(\alpha'', \alpha') = 0,$$

logo  $g(\alpha', \alpha')$  é constante. A menos de menção contrária, sempre se considerará geodésicas não constantes, isto é, com  $\alpha' \neq 0$ . Diremos que a geodésica é *espacial*, *temporal* ou *luminosa* se essa constante for positiva, negativa ou zero, respectivamente. Se  $g(\alpha', \alpha') \leq 0$ ,  $\alpha$  é chamada de geodésica *causal*.

Como vimos na Seção 1.2.3, um campo vetorial ao longo de uma curva  $\alpha$  é paralelo se, e somente se, satisfaz as equações de transporte paralelo (1.1). Em particular,  $\alpha$  é geodésica se, e somente se, satisfaz as equações

$$\frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} + (\Gamma^i_{jk} \circ \alpha) \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^k \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

chamadas de *equações geodésicas*. Diferente do transporte paralelo, essas equações diferenciais são não lineares, logo existência e unicidade só podem ser garantidas localmente, como diz o próximo resultado (ver Costa e Silva (s.d.), Teorema 3.4.2).

**Teorema 1.5.2.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Dado  $v \in TM$ , existe  $\varepsilon > 0$  e uma única geodésica  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha'(0) = v$ . Ainda, se  $\alpha : I \rightarrow M$  e  $\beta : J \rightarrow M$  são geodésicas tais que, para algum  $t_0 \in I \cap J$ , temos  $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$ , então  $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$ .*

**Corolário 1.5.3.** *Para cada  $v \in TM$ , existe uma única geodésica  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  tal que*

- (i)  $I_v \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo aberto contendo 0 e  $\gamma'_v(0) = v$ .
- (ii) se  $\alpha : I \rightarrow M, 0 \in I$ , é uma geodésica com  $\alpha'(0) = v$ , então  $I \subseteq I_v$  e  $\gamma_v|_I = \alpha$ .

$\gamma_v$  é chamada de geodésica maximal com velocidade inicial  $v$ .

A respeito de geodésicas maximais  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ , se  $I_v = \mathbb{R}$ , dizemos que a geodésica  $\gamma_v$  é *completa*, do contrário dizemos que é *incompleta*. Uma variedade semi-Riemanniana é dita ser *completa* (ou geodesicamente completa) se todas as suas geodésicas maximais são completas, e, contrariamente, será dita *incompleta* se possui ao menos uma geodésica incompleta.

De acordo com o caráter causal de geodésicas, podemos ainda separar completude por tais caracteres. Uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  é dita ser *temporalmente completa*, *espacialmente completa* ou *luminosamente completa* se todas geodésicas com os respectivos caracteres causais são completas. Se ambas as geodésicas temporais e luminosas são completas, dizemos que  $(M, g)$  é *causalmente completa*. Surpreendentemente, esses tipos de (in)completude geodésica são independentes entre si. Kundt (1963) deu um exemplo de variedade Lorentziana

que é temporal e luminosamente completo mas não espacialmente completo. Já Geroch (1968) deu um exemplo em que se tem completude geodésica luminosa e espacial, mas incompletude temporal.

Uma outra propriedade relevante de geodésicas diz respeito ao seu comprimento. O comprimento de uma curva suave por partes  $\alpha : I \rightarrow M$  entre valores  $a \leq b$  é dada por

$$L_g(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{|g_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s))|} ds.$$

O índice  $g$  na definição de comprimento de curva será geralmente omitido se não houver risco de confusão.

Numa variedade Riemanniana, o comprimento de arco se comporta similarmente ao caso do espaço Euclidiano. O caso geral é mais delicado, por exemplo, uma curva luminosa possui comprimento zero.

Dada uma curva suave por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , uma *reparametrização* de  $\alpha$  é uma função suave por partes  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , com  $h(c) = a$  e  $h(d) = b$  (ou vice-versa). Se sua derivada não muda de sinal, dizemos que  $h$  é *monótona*. Assim, uma prova análoga ao do cálculo elementar mostra o seguinte resultado.

**Proposição 1.5.4.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva suave por partes, então*

- (i) *o comprimento de arco de  $\alpha$  é invariante por reparametrização monótona.*
- (ii) *Se  $|\alpha'| > 0$ , então existe uma reparametrização estritamente crescente  $h$  de modo que a curva  $\beta := \alpha \circ h$  seja unitária, isto é,  $|\beta'| = 1$ .*

Na proposição anterior, dizemos também que  $\beta$  está *parametrizada por comprimento de arco*. No caso de  $\alpha$  ser geodésica,  $g(\alpha', \alpha')$  é constante, em particular igual a  $|\alpha'(a)|^2$ . Nesse caso, o comprimento de  $\alpha$  fica

$$L_g(\alpha|_{[a,b]}) = (b - a)|\alpha'(a)|.$$

Vemos portanto que função reparametrização por comprimento de arco  $h$  de  $\alpha$  é uma reparametrização afim (isto é, da forma  $h(t) = a_1 t + a_2$  para  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ). Nesse caso, a curva parametrizada por comprimento de arco  $\beta := \alpha \circ h$  é também uma geodésica, conforme O'Neill (1983), Lema 3.26. Em particular, quando trabalhando com geodésicas não luminosas, podemos sempre assumir serem unitárias.

### 1.5.1 Aplicação exponencial

Uma aplicação de extrema relevância na geometria semi-Riemanniana é a chamada *aplicação exponencial*. Uma discussão completa deste tópico requer discutir uma série de outros resultados

<sup>5</sup>A norma de um vetor  $v$  é dada por  $|v| := |g(v, v)|^{1/2}$ .

auxiliares que não serão relevantes no resto desta dissertação (para uma discussão em detalhes do assunto, ver O’Neill (1983), capítulo 3 ou Costa e Silva (s.d.), capítulo 5), portanto daremos sua definição e os resultados mais relevantes a serem utilizados.

Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana e considere  $\mathcal{D} \subseteq TM$  o conjunto de vetores  $v \in TM$  tais que a geodésica maximal  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  está definida para  $t = 1$ . Usando fluxo de campos vetoriais, é possível mostrar que  $\mathcal{D}$  é aberto em  $TM$  contendo a seção nula  $\mathcal{Z}$ . A aplicação exponencial é a função

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{D} &\rightarrow M \\ v &\mapsto \exp(v) = \gamma_v(1) \end{aligned}$$

É possível mostrar que  $\exp$  é uma função suave com  $\exp(tv) = \gamma_v(t)$  se  $t \in [0, 1]$ .

A restrição de  $\exp$  para um espaço tangente  $T_p M$  é denotada por  $\exp_p : \mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M \rightarrow M$ . O domínio  $\mathcal{D}_p$  contém o vetor nulo  $0_p$  e é *estrelado*, isto é, se  $v \in \mathcal{D}_p$ , então  $tv \in \mathcal{D}_p$  para  $t \in [0, 1]$ .

Uma cálculo simples mostra que a derivada de  $\exp_p$  em  $0_p$  é o *isomorfismo canônico* entre espaços vetoriais (cf. Lee (2012), proposição 3.13). Aplicando o teorema da função inversa, existe um aberto  $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{D}_p$  contendo  $0_p$  tal que  $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \exp_p(\tilde{\mathcal{N}}) =: \mathcal{N}$  é um difeomorfismo. Ainda, podemos reduzir  $\tilde{\mathcal{N}}$  de modo que seja um domínio estrelado.

A discussão acima mostra que todo ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança aberta  $\mathcal{N} = \exp_p(\tilde{\mathcal{N}})$  com  $\tilde{\mathcal{N}}$  estrelado e  $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}}$  difeomorfismo. Um tal vizinhança é dita ser *vizinhança normal* de  $p$ . Tais vizinhanças formam uma base para a topologia de  $M$ . A necessidade de considerar vizinhanças normais se dá pelo seguinte resultado (ver O’Neill (1983), Proposição 3.31).

**Proposição 1.5.5 (Geodésicas Radiais).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana, e  $\mathcal{N}$  vizinhança normal de  $p \in M$ . Então, para cada  $q \in \mathcal{N}$ , existe uma única geodésica  $\rho_q : [0, 1] \rightarrow M$  começando em  $p$  e terminando em  $q$  com imagem inteiramente contida em  $\mathcal{N}$ . Ainda,*

$$\rho'_q(0) = (\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}})^{-1}(q).$$

Podemos melhorar a noção de vizinhanças normais. Uma *vizinhança convexa* ou *aberto convexo*  $C$  é um aberto de  $M$  que é vizinhança normal de todos os seus pontos.

**Teorema 1.5.6.** *Dado  $p \in M$  e  $U \subseteq M$  aberto contendo  $p$ , existe um aberto convexo  $C$  com  $p \in C \subseteq U$ .*

Portanto temos também uma base de  $M$  por abertos convexos. Dados dois pontos de uma vizinhança convexa  $p, q \in C$ , seja  $\rho_q : [0, 1] \rightarrow C$  a geodésica radial de  $p$  até  $q$ , o *vetor deslocamento* é definido por  $\overline{pq} = \rho'_q(0) \in T_p M$ . Um fato importante sobre vetores deslocamento

é que a função

$$\begin{aligned}\Delta : C \times C &\rightarrow TM \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq}\end{aligned}$$

é suave (ver Costa e Silva (s.d.), Corolário 5.5.5).

## 1.5.2 Minimização e maximização Local

Um resultado extremamente importante que utiliza a aplicação exponencial diz respeito ao problema de minimizar ou maximizar o comprimento de curvas entre dois pontos. O caso Riemanniano diz respeito à minimização, e o caso Lorentziano à maximização.

**Teorema 1.5.7.** *Seja  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana e  $N$  uma vizinhança normal de um ponto  $p \in M$ . Então, para todo  $q \in N$ , a geodésica radial  $\rho_q$  é a geodésica de menor comprimento entre todas as curvas ligando  $p$  a  $q$  dentro de  $N$ .*

Uma prova desse teorema pode ser encontrada em O’Neil (1983), Lema 5.14. Para o caso Lorentziano abaixo, ver Proposição 5.34 da mesma referência.

**Teorema 1.5.8.** *Seja  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana e  $N$  é vizinhança normal de um ponto  $p \in M$ . Se para  $q \in N$  existe uma curva causal (suave por partes) ligando  $p$  a  $q$  inteiramente contida em  $N$ , então a geodésica radial  $\rho_q$  é a geodésica de maior comprimento entre todas as curvas causais ligando  $p$  a  $q$  dentro de  $N$ .*

Podemos nos perguntar sobre o problema de minimizar ou maximizar globalmente entre dois pontos. O caso Lorentziano será explorado no capítulo 5, e o caso Riemanniano está relacionado ao teorema de Hopf-Rinow.

**Definição 1.5.9.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana conexa. A distância Riemanniana  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  entre dois pontos  $p$  e  $q$  é dada por*

$$d_g(p, q) = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ é curva suave por partes com } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Pode-se checar que a distância Riemanniana é na verdade uma métrica cuja topologia induzida coincide com a topologia de  $M$ . Além disso, se existe curva suave por partes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  de  $p$  até  $q$  com  $d_g(p, q) = L_g(\gamma)$ , é possível mostrar que  $\gamma$  é na verdade uma pré-geodésica. Novamente, se não houver risco de confusão, omitiremos o índice  $g$  na definição acima.

Um outro aspecto importante na Geometria Riemanniana é no que diz respeito à noção de *bola geodésica*; que nos será bastante útil no Capítulo 5.

**Definição 1.5.10.** *Sejam  $h$  uma métrica Riemanniana em  $M$ ,  $U \subset M$  uma vizinhança normal de  $p \in M$  e  $V \subset T_p M$  o domínio estrelado contendo  $0_p$  difeomorfo a  $U$  via  $\exp$ . Para todo  $r > 0$  tal*



que  $B(0_p, r)^{cl} \subset V$ , onde essa bola está definida com respeito ao produto escalar  $g_p$ , definimos a bola geodésica de raio  $r$  em  $p$  como sendo o conjunto

$$B_g(p, r) := \exp_p(B(0_p, r)) \subset U \quad (1.5)$$

Como  $\exp$  é um difeomorfismo e  $B(0_p, r)$  é estrelado, a bola geodésica estar contida na vizinhança normal  $U$  implica que  $B_g(p, r)$  é também uma vizinhança normal de  $p$ . Um dos motivos pelos quais bolas geodésicas são importantes consiste no seguinte resultado.

**Proposição 1.5.11.** *Seja  $U \subset M$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $B_g(p, r) \subset U$  uma bola geodésica. Então, para cada  $q \in U$ , a geodésica radial de  $p$  a  $q$  em  $U$  é a (única) menor curva de  $p$  a  $q$  em  $U$ , a menos de reparametrização monótona. Além disso, se uma curva partindo de  $p$  deixa  $B_g(p, r)$ , então seu comprimento é maior ou igual a  $r$ . Em particular, para todo  $q \in B_g(p, r)$ , a geodésica radial de  $p$  a  $q$  é minimizante.*

Para uma prova, ver O’Neil (1983), Lema 5.14 e Proposição 5.16. Como consequência direta dessa proposição, obtemos que

$$B_g(p, r) = \{q \in M \mid d_g(p, q) < r\}. \quad (1.6)$$

Portanto, não ocorre risco de confusão se definirmos a bola centrada em  $p$  de raio  $r$  como em (1.6), e para isso não precisamos considerar a restrição do raio feita na Definição 1.5.10.

Para curvas inextensíveis numa variedade Riemanniana, temos o seguinte resultado.

**Lema 1.5.12.** *Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana completa. Dada uma curva  $\alpha : [a, b) \rightarrow N$  inextensível em  $b$ , temos que*

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \sqrt{g(\alpha'(s), \alpha'(s))} ds = +\infty.$$

## 1.6 Subvariedades semi-Riemannianas

Para  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  variedade semi-Riemanniana e  $M$  uma subvariedade imersa ou mergulhada de  $\tilde{M}$ , (i.e.  $M$  possui estrutura suave cuja inclusão  $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$  é imersão ou mergulho, respectivamente), dizemos que  $M$  é *subvariedade semi-Riemanniana* de  $\tilde{M}$  se o pullback<sup>6</sup>  $g = \iota^* \tilde{g}$  da métrica em  $\tilde{M}$  define uma métrica semi-Riemanniana<sup>7</sup> em  $M$ . Isso nem sempre ocorre, por exemplo, na circunferência unitária contida no espaço-tempo de Minkowski  $R_1^2$ , o índice é ora 0 ora 1, e portanto o pullback da métrica de Minkowski não define uma métrica sobre a circunferência.

Se a métrica definida pelo pullback for Riemanniana ou Lorentziana, trocamos “subvariedade semi-Riemanniana” por estes termos. No caso de  $\tilde{M}$  ser variedade Lorentziana e  $M$  ser

<sup>6</sup>Mais detalhes sobre pullback de tensores podem ser vistos em (O’Neill (1983), Capítulo 2).

<sup>7</sup>No caso de  $\tilde{M}$  ser Riemanniana,  $\iota^* \tilde{g}$  é sempre métrica Riemanniana na subvariedade  $M$ .

subvariedade Riemanniana, dizemos que  $M$  é subvariedade *tipo-espaço* ou *espacial*, e no caso de  $M$  ser Lorentziana, é dita ser subvariedade *tipo-tempo* ou *temporal*.

Para  $M \subseteq \tilde{M}$  subvariedade, um vetor tangente  $v \in T_p M$  pode ser identificado como um vetor de  $T_p \tilde{M}$  de maneira canônica pelo mapa  $d\iota_p : T_p M \rightarrow T_p \tilde{M}$ ,  $\tilde{v} = d\iota_p(v) \in T_p \tilde{M}$ . Faremos tal identificação sempre que não houver risco de confusão. Em particular, por meio desta identificação, tratamos  $T_p M$  como subespaço vetorial de  $T_p \tilde{M}$ .

Se  $X : M \rightarrow T\tilde{M}$  é um campo vetorial sobre a aplicação inclusão  $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$ , vemos que, em cada  $p \in M$ ,  $X_p$  é um vetor em  $T_p \tilde{M}$ . No contexto de subvariedades, utilizaremos a notação  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$  para denotar o conjunto  $\mathfrak{X}(\iota)$  dos campos vetoriais suaves sobre a inclusão. Em particular, dado  $Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ , a restrição  $Y|_M$  é campo em  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ . Como estamos identificando vetores tangentes em  $M$  com sua inclusão em  $\tilde{M}$ , temos também que  $\mathfrak{X}(M)$  é  $C^\infty(M)$ -submódulo de  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ .

Como  $M$  é subvariedade semi-Riemanniana de  $\tilde{M}$ , cada  $T_p M$  é subespaço não degenerado de  $T_p \tilde{M}$ , e utilizando as decomposições de espaços vetoriais semi-Riemannianos obtidas no apêndice A, temos

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

com  $T_p M^\perp$  também não degenerado, com dimensão igual a codimensão de  $M$  em  $\tilde{M}$ .

Em vista de tal decomposição em  $T_p \tilde{M}$ , definimos as projeções *tangente* e *normal*, dadas respectivamente por

$$\begin{array}{ccc} T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M & \text{e} & T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M^\perp \\ v \mapsto v^\top & & v \mapsto v^\perp \end{array}$$

Temos uma decomposição análoga para campos vetoriais. Se  $X \in \mathfrak{X}(M) \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ , dizemos que  $X$  é campo vetorial *tangente* a  $M$ , e se  $Z \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$  é tal que  $Z_p \in T_p M^\perp$  para todo  $p \in M$ , dizemos que  $Z$  é campo vetorial *normal* a  $M$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^\perp(M)$  o conjunto dos campos vetoriais normais a  $M$ , que também é  $C^\infty(M)$ -submódulo de  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ .

Aplicando as projeções tangente e normal em cada ponto  $p \in M$  de um campo  $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ , obtemos dois campos vetoriais suaves  $X^\top$  e  $X^\perp$  que são pontualmente tangentes e normais a  $M$ , respectivamente. Portanto ficam bem definidas as projeções

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) & \text{e} & \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M) \\ X \mapsto X^\top & & X \mapsto X^\perp \end{array}$$

e temos a decomposição  $\tilde{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}^\perp(M)$ .

### 1.6.1 Segunda forma fundamental

Fixamos aqui as seguintes notações:  $\tilde{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita em  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ,  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita em  $M$  para a métrica  $g = \iota^* \tilde{g}$ , e  $D$  a conexão sobre a inclusão  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$  induzida por  $\tilde{\nabla}$ .

Uma vez que todo campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(M)$  pode ser visto localmente como a restrição de um campo vetorial  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$  a um aberto de  $M$  (Costa e Silva (s.d.), Lema 4.1.5), destacamos o seguinte resultado.

**Lema 1.6.1.** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Para  $U \subseteq M$  aberto e  $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$  campos que em  $U$  são iguais<sup>8</sup> a  $X, V$  e  $W$ , respectivamente. Então,*

$$(i) \quad (D_X V)|_U = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V})|_U.$$

$$(ii) \quad X(\tilde{g}(V, W)) = \tilde{g}(D_X V, W) + \tilde{g}(V, D_X W).$$

Para uma prova, ver Costa e Silva (s.d.), Lema 4.1.7. Analisamos agora a relação entre as conexões em  $\tilde{M}$  e  $M$ . Dados campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , não é necessário que  $D_X Y$  seja também um campo vetorial tangente a  $M$ , então fazemos uma análise das partes tangente e normal.

**Lema 1.6.2.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então*

$$\nabla_V W = (D_V W)^\top,$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita da métrica induzida em  $M$ .

Esta lema nos diz que sua parte tangente não nos traz nenhuma informação nova, diferente da parte normal.

**Lema 1.6.3.** *A função  $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$  dada por*

$$II(V, W) = (D_V W)^\perp$$

é  $C^\infty(M)$ -linear e simétrica, chamada de tensor da segunda forma fundamental (ou *shape tensor*) de  $M \subseteq \tilde{M}$ .

**Observação 1.6.4.** Pela  $C^\infty(M)$ -bilinearidade da segunda forma fundamental, pontualmente em  $p \in M$ ,  $II$  nos dá um mapa  $II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M^\perp$   $\mathbb{R}$ -bilinear simétrico, e  $II$  possui essencialmente caráter de  $(0,2)$ -tensor, apesar de sua imagem ser  $T_p M^\perp$ .

<sup>8</sup>Para manter a consistência com a notação utilizada na seção de conexões sobre mapas, deveríamos escrever  $\tilde{X}|_U = d\iota \circ X|_U$ , mas como decidimos identificar  $T_p M$  com  $d\iota_p(T_p M)$ , mantemos tal identificação também em campos vetoriais, que no contexto de inclusão não trará confusão.

Em vista da observação acima, podemos fazer a contração métrica de  $II$ , o que nos dá um campo vetorial normal a  $M$ . Dividindo tal vetor por  $n = \dim M$  dá origem ao *vetor de curvatura média*  $H$  em  $M$ . Explicitamente, para cada  $p \in M$ ,

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal para  $T_p M$ .

Por estes dois lemas é imediata a decomposição de  $D_V W$ ,  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  em parte tangente e normal:

$$D_V W = \nabla_V W + II(V, W).$$

Para uma primeira aplicação desta decomposição, relacionamos a aceleração de uma curva em  $M$  com sua aceleração ao ser observada como curva em  $\tilde{M}$ .

**Proposição 1.6.5.** *Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave, dado  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que  $V_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)} M$  para todo  $t \in I$ , e denotando por  $V'$  a derivada covariante de  $V$  em  $M$  com relação a  $\nabla$  e  $\dot{V}$  a derivada covariante em  $\tilde{M}$  para  $\tilde{\nabla}$ , temos*

$$\dot{V} = V' + II(\alpha', V),$$

e em particular  $\ddot{\alpha} = \alpha'' + II(\alpha', \alpha')$ .

Como corolário imediato desta proposição, temos uma maneira de verificar quando curvas são geodésicas em  $M$ .

**Corolário 1.6.6.** *Uma curva  $\alpha$  em  $M \subseteq \tilde{M}$  é geodésica em sua geometria intrínseca se, e somente se, sua aceleração  $\ddot{\alpha}$  em  $\tilde{M}$  é sempre normal a  $M$ .*

**Definição 1.6.7.** *Sejam  $M$  subvariedade semi-Riemanniana de  $\tilde{M}$ , e  $U$  um campo unitário e normal<sup>9</sup> a  $M$ . Definimos os seguintes objetos:*

(i) A segunda forma fundamental (associada a  $U$ ) é o  $(0, 2)$ -tensor  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_U$  em  $M$  dado por

$$\mathcal{K}_U(X, Y) = -\tilde{g}(II(X, Y), U), \quad (1.7)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $II$  é o shape tensor de  $M$ .

(ii) O operador de Weingarten (ou shape operator) (associado a  $U$ ) é o  $(1, 1)$ -tensor  $S = S_U$  em  $M$  metricamente associado a  $\mathcal{K}_U$ , isto é,  $S : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é dado por

$$g(S_U(X), Y) = \mathcal{K}_U(X, Y) \quad (1.8)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

<sup>9</sup>Pode não existir tal campo vetorial definido em todo  $M$  (por exemplo, a faixa de Möbius), mas tal campo existe em uma vizinhança aberta de cada ponto, que é o suficiente para nossas aplicações.

Explicitamente, temos que

$$S_U(X) = \tan D_X U. \quad (1.9)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . A simetria de  $II$  nos mostra que pontualmente o operador de Weingarten  $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é um operador linear auto-adjunto em relação ao produto escalar  $g_p$ . Introduzimos também a *curvatura média* (associada a  $U$ ) de  $M$  como sendo a função

$$h_U := \text{tr } S_U \in C^\infty(M), \quad (1.10)$$

que terá importância significativa nos principais resultados deste trabalho.

**Observação 1.6.8.** O sinal negativo na Equação 1.7, e que é conseqüentemente herdado pelo operador de Weingarten e pela função curvatura média (associada a  $U$ ) não é universal. Por exemplo, esse sinal é positivo em O'Neill (1983), mas negativo em Treude (2011). No Capítulo 6, ficará claro o porquê dessa escolha.

## 1.6.2 Hipersuperfícies semi-Riemannianas

Uma *hipersuperfície semi-Riemanniana*  $M \subseteq \tilde{M}$  é uma subvariedade semi-Riemanniana de codimensão 1. Neste caso, temos que o co-índice (i.e. o índice comum de todos os  $T_p M^\perp$ ) de  $M$  é 0 ou 1. Classificamos  $M$  por um sinal  $\varepsilon = \pm 1$ , da seguinte maneira:

- +1 se o co-índice de  $M$  é 0, ou seja,  $\tilde{g}(z, z) > 0$  para todo vetor  $z \neq 0$  normal a  $M$ .
- -1 se o co-índice de  $M$  é 1, ou seja,  $\tilde{g}(z, z) < 0$  para todo vetor  $z \neq 0$  normal a  $M$ .

Para  $f \in C^\infty(\tilde{M})$ , sabemos que a imagem inversa de seus valores regulares são subvariedades mergulhadas de codimensão 1. Isso nos permite enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 1.6.9.** *Seja  $c$  valor regular de  $f \in C^\infty(\tilde{M})$ . Então,  $M = f^{-1}(c)$  é hipersuperfície semi-Riemanniana se, e somente se,  $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f) > 0$  em todo  $M$  ou  $< 0$  em todo  $M$ . Em caso afirmativo, o sinal de  $M$  é o sinal de  $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f)$  e o campo vetorial  $U := \nabla f / |\nabla f|$  é unitário e normal a  $M$ .*

No caso de codimensão 1, os operadores de Weingarten podem ser simplificados da seguinte forma.

**Proposição 1.6.10.** *Sejam  $U$  campo unitário e normal a  $M$  e  $S$  o operador de Weingarten associado a  $U$ . Então, para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , o campo  $D_V U$  é tangente a  $M$  e, de (1.9), segue-se que*

$$S_U(X) = D_X U. \quad (1.11)$$

**Observação 1.6.11.** Como a conexão induzida  $D = D^\nabla$  e a conexão de Levi-Civita estão tão intimamente ligadas via o Teorema 1.2.9, é comum na literatura utilizar a mesma notação  $\nabla$  para

ambas as conexões. Faremos uso dessa notação principalmente no Capítulo 3. Desse modo, escrevemos a Equação 1.11 como

$$S_U(X) = \nabla_X U. \quad (1.12)$$

## 1.7 Alguns operadores diferenciais

Definiremos agora alguns operadores que irão surgir naturalmente no decorrer do trabalho. Eles são simplesmente generalizações de operadores diferenciais usuais do cálculo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.7.1.** *O gradiente  $\nabla f$  de uma função suave  $f \in C^\infty(M)$  é o campo vetorial metricamente equivalente à diferencial  $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ <sup>10</sup>. Assim,*

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em coordenadas, temos que

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

Em particular, para as coordenadas naturais no espaço semi-Euclidiano  $R_\mu^n$ , temos que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \partial_i,$$

que se reduz à fórmula usual em  $R^3$ .

**Definição 1.7.2.** *A Hessiana  $\text{Hess}_f$  de uma função suave  $f \in C^\infty(M)$  é o  $(0, 2)$ -tensor simétrico dado por*

$$\text{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Em coordenadas, a Hessiana de  $f$  é dada por

$$(\text{Hess}_f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

**Definição 1.7.3.** *O Laplaciano  $\Delta f$  de uma função suave  $f \in C^\infty(M)$  é o traço da Hessiana de  $f$ , isto é,*

$$\Delta f = \text{tr Hess}_f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{Hess}_f(E_i, E_i),$$

onde  $E_1, \dots, E_n$  é um referencial ortonormal local em  $M$  e  $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$ .

<sup>10</sup> $C^\infty$ -módulo constituído das 1-formas em  $M$  (cf. O'Neill (1983), Definição 1.23)

Se  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana, é comum chamar o Laplaciano de  $f$  de *d'Alembertiano*, mas manteremos a notação  $\Delta f$  em todos os casos<sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup>Alguns autores utilizam a notação  $\square f$  para referir-se ao d'Alembertiano.

## 2 Cálculo Variacional

Como vimos no capítulo anterior, geodésicas são curvas de aceleração nula, e intuitivamente são as curvas mais “retas” na variedade semi-Riemanniana. Nesse sentido, a curvatura age sobre famílias de geodésicas próximas resultado em “convergência” ou “divergência” das mesmas. Neste capítulo, formalizaremos essas noções utilizando-se da chamada *Teoria variacional*. Mais precisamente, estudaremos os chamados *campos de Jacobi*, bem como *pontos conjugados* e *focais* relacionados a estes campos vetoriais.

A menos de menção contrária, fixaremos a seguinte notação no decorrer deste capítulo:  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $n$ ; o domínio de uma curva será o intervalo fechado  $[a, b]$ , e, se  $\alpha$  for uma geodésica não luminosa, então  $c > 0$  representa sua velocidade, e  $\varepsilon$  o sinal de  $\alpha$ , isto é,  $\varepsilon = \text{sgn}\langle \alpha', \alpha' \rangle = \pm 1$ .

Novamente, estamos interessados apenas no enunciado dos resultados. As provas destes podem ser obtidas em O’Neill (1983), Capítulos 8 e 10.

### 2.1 Campos de Jacobi

Neste capítulo, resgataremos os conceitos e notações introduzidos na Seção 1.2.4 no que diz respeito às aplicações a dois parâmetros.

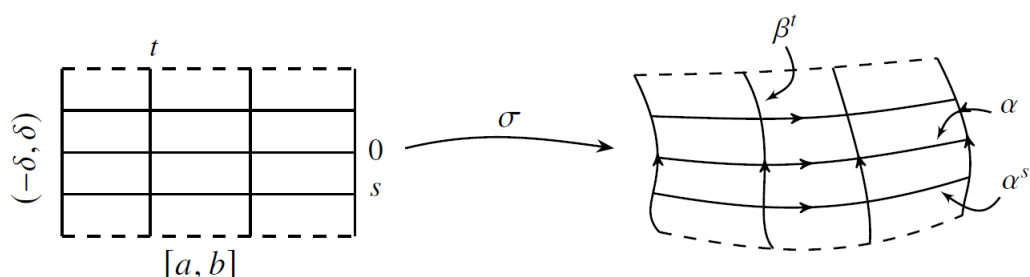
**Definição 2.1.1.** *Uma variação de um segmento de curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é uma aplicação a dois parâmetros*

$$\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \longrightarrow M$$

*satisfazendo  $\sigma_0 := \sigma(\cdot, 0) = \alpha$ , isto é,  $\sigma(t, 0) = \alpha(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ .*

De modo geral, variações capturam a ideia de perturbar uma curva numa pequena vizinhança, conforme mostra a Figura 2.1. Neste capítulo, exploraremos algumas informações que podem ser obtidas a partir desse objeto.

Figura 2.1: Variação da curva  $\alpha$ .



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).



Para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , as curvas  $\alpha^s = \sigma(\cdot, s) : [a, b] \rightarrow M$  são ditas *longitudinais*, enquanto que, para cada  $t \in [a, b]$ , as curvas  $\beta^t = \sigma(t, \cdot) : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  são ditas *transversais*. A curva  $\alpha$  é dita ser a *curva base* (ou *fiducial*) de  $\sigma$ .

**Lema 2.1.2.** *Seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação da curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ . A aplicação dada por*

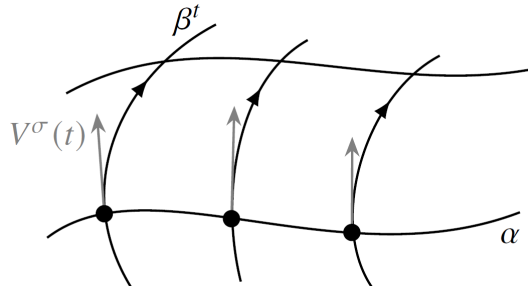
$$V^\sigma : [a, b] \longrightarrow TM$$

$$t \mapsto (\beta^t)'(0)$$

é um campo vetorial suave sobre  $\alpha$ , e  $V^\sigma = \sigma_s(\cdot, 0)$ .  $V^\sigma$  é chamado de campo vetorial variacional de  $\sigma$ . Além disso, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , a curva  $\alpha^s$  tem derivada dada por  $(\alpha^s)'(t) = \sigma_t(t, s)$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Em resumo, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $V^\sigma(t)$  é precisamente a velocidade inicial da curva  $\beta^t$  (Figura 2.2). Se cada curva longitudinal de  $\sigma$  é geodésica, então  $\sigma$  é dita ser uma *variação geodésica*.

Figura 2.2: Campo variacional de  $\sigma$ .



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

**Corolário 2.1.3.** *Seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação da curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , e tome um ponto qualquer  $(t_0, s_0) \in [a, b] \times (-\delta, \delta)$ . Então,*

$$\sigma_{tt}(t_0, s_0) = (\alpha^{s_0})''(t_0).$$

*Em particular,  $\sigma$  é variação geodésica se, e somente se,  $\sigma_{tt} = 0$ .*

**Definição 2.1.4.** *Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é uma geodésica, então um campo  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é um campo de Jacobi se satisfaz a equação*

$$J'' + R(J, \alpha')\alpha' = 0, \tag{2.1}$$

*conhecida como equação diferencial de Jacobi.*

Em (2.1), utilizamos a notação simplificada  $J''$  para representar a derivada covariante  $D^2J/dt^2$ , conforme definido na Seção 1.2.3. Evidentemente, a equação de Jacobi é uma equação diferencial de segunda ordem linear. Assim, o conjunto dos campos de Jacobi sobre uma geodésica  $\alpha$  formam um espaço vetorial real, ao qual denotaremos por  $\mathcal{J}^\alpha$ .

**Definição 2.1.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva suave. Um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é dito ser tangente à curva  $\alpha$  se existe uma função  $h \in C^\infty(I)$  tal que  $V = h \cdot \alpha'$ , e  $V$  é normal (ou perpendicular) a  $\alpha$  se  $\langle V, \alpha' \rangle = 0$ .*

Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é curva com  $|\alpha'| > 0$ , então podemos fazer a seguinte decomposição:

$$T_{\alpha(t)}M = \mathbb{R} \cdot \alpha' + (\alpha')^\perp, \quad \forall t \in [a, b].$$

Assim, dado  $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , escrevemos  $Y = Y^\top + Y^\perp$  para denotar as componentes tangente e normal de  $Y$  a  $\alpha$ , respectivamente. Mais ainda, se  $\alpha$  é geodésica não luminosa, temos que  $(Y^\top)' = (Y')^\top$  e  $(Y^\perp)' = (Y')^\perp$ .

**Lema 2.1.6.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica e  $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ . Então,*

(i) *Se  $Y$  é tangente à curva  $\alpha$ , então  $Y$  é campo de Jacobi  $\Leftrightarrow Y'' = 0 \Leftrightarrow$  existem constantes  $a, b \in [a, b]$  tais que*

$$Y(s) = (as + b) \cdot \alpha'(s), \quad \forall s \in [a, b].$$

(ii) *Se  $Y$  é de Jacobi, então  $Y$  é normal à curva  $\alpha \Leftrightarrow$  existem  $a \neq b \in [a, b]$  tais que  $Y(a) \perp \alpha$  e  $Y(b) \perp \alpha \Leftrightarrow$  existe  $a \in [a, b]$  tal que  $Y(a) \perp \alpha$  e  $Y'(a) \perp \alpha$ .*

(iii) *Se  $\alpha$  é geodésica não luminosa, então  $Y$  é campo de Jacobi  $\Leftrightarrow Y^\perp, Y^\top \in \mathfrak{X}(\alpha)$  são campos de Jacobi.*

A linearidade da equação de Jacobi, bem como o lema anterior, nos dão o seguinte resultado de existência e unicidade.

**Proposição 2.1.7.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M^n$  uma geodésica. Então, para todo  $t_0 \in [a, b]$  e  $v, w \in T_{\alpha(t_0)}M$ , existe um único campo de Jacobi  $J \in \mathcal{J}^\alpha$  tal que*

$$J(t_0) = v \text{ e } J'(t_0) = w.$$

*Em particular,  $\mathcal{J}^\alpha \subset \mathfrak{X}(\alpha)$  é um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear de dimensão  $2n$ .*

Segue-se da proposição 2.1.7 que o conjunto  $\mathcal{J}_{t_0}^\alpha \subset \mathcal{J}^\alpha$  dos campos de Jacobi em  $\alpha$  que se anulam em  $t_0$  é um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear de dimensão  $n$ .

O próximo resultado nos mostra que todos os campos de Jacobi sobre uma geodésica surgem como o campo variacional de uma variação geodésica.

**Proposição 2.1.8.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Então, um campo  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é um campo de Jacobi se, e somente se,  $J$  é o campo variacional de alguma variação geodésica de  $\alpha$ .*

### 2.1.1 Campos de Jacobi em variedades de curvatura constante

Um caso interessante a ser analisado ocorre quando  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana com curvatura constante  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Nesse caso, podemos exibir explicitamente quem são seus campos de Jacobi. Como  $M$  tem curvatura constante, temos que

$$R(X, Y)Z = c_0 \cdot [\langle Z, Y \rangle X - \langle Z, X \rangle Y], \quad (2.2)$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma geodésica parametrizada de modo que

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle =: \varepsilon,$$

onde  $\varepsilon = 0, 1$  ou  $-1$  se  $\alpha$  é luminosa, espacial ou temporal, respectivamente. Então, de (2.1) e (2.2), vemos que a equação de Jacobi em  $\alpha$  se resume a

$$J'' + c_0 \cdot [\varepsilon J - \langle \alpha', J \rangle \alpha'] = 0.$$

Se olharmos apenas para campos de Jacobi normais a  $\alpha$ , a equação acima é simplificada, o que nos leva a procurar soluções da equação

$$J'' + \kappa \cdot J = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\kappa := \varepsilon c_0$ . Assuma que  $0 \in I$ . Por contagem dimensional e inspeção direta, um cálculo direto mostra que o conjunto de soluções de (2.3) é da forma

$$J(t) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) \cdot V + \sinh(\sqrt{|\kappa|}t) \cdot W, & \text{se } \kappa < 0, \\ V + t \cdot W, & \text{se } \kappa = 0, \\ \cos(\sqrt{\kappa}t) \cdot V + \sin(\sqrt{\kappa}t) \cdot W & \text{se } \kappa > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

para todo  $t \in I$ , onde  $V, W$  são campos vetoriais transportados paralelamente e perpendiculares a  $\alpha$ .

## 2.2 Primeira e segunda variação

Inicialmente, consideremos apenas curvas não luminosas. Nesse caso,  $|\alpha'| > 0$  e, portanto,  $\alpha$  é curva temporal se  $\varepsilon = -1$  e espacial se  $\varepsilon = +1$ . O caso luz será visto no final deste capítulo.

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva não luminosa e  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação de  $\alpha$ .

Definimos o funcional  $L^\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$L^\sigma(s) = L(\alpha^s) = \int_a^b |\sigma_t(t, s)| dt,$$

em que  $L$  é a função comprimento de arco. Dessa forma,  $L^\sigma$  mede o comprimento das curvas longitudinais de  $\sigma$ , sendo  $L^\sigma(0) = L(\alpha)$ . Além disso, denotaremos  $L_\sigma$  simplesmente por  $L$  se não houver risco de confusão.

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva suave não luminosa e  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação de  $\alpha$ . Então,*

$$L^{\sigma'}(0) = \frac{dL}{ds} \Big|_{s=0} = \varepsilon \int_a^b \left\langle \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V' \right\rangle dt,$$

em que  $V$  é o campo variacional de  $\sigma$ .

A noção de suavidade por partes introduzida na Definição 1.1.3 pode ser naturalmente estendida para variações e campos vetoriais da seguinte forma. Uma variação  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é dita ser suave por partes se é contínua e se existe uma partição  $a = t_0 < \dots < t_{k+1} = b$  tal que, para cada  $i = 0, 1, \dots, k$ , a restrição de  $\sigma$  a  $[t_i, t_{i+1}] \times (-\delta, \delta)$  seja suave. Dessa forma, todo ponto de quebra da curva base  $\alpha$  é também de  $\sigma$ . Assim, se  $\alpha$  é suave por partes, qualquer variação de  $\alpha$  também o é. Iremos sempre supor que  $\alpha$  e  $\sigma$  possuem os mesmos pontos de quebra, adicionando pontos de quebra triviais se necessário, isto é, pontos em que  $\alpha$  ou  $\sigma$  seja suave. Analogamente, podemos definir o que é um campo vetorial suave por partes sobre uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$ , conjunto que denotaremos por  $\mathfrak{X}'(\alpha)$  e que admite uma estrutura natural de módulo sobre o anel das funções  $I \mapsto \mathbb{R}$  suaves por partes, denotado por  $C^\infty(I)$ . Por exemplo, se  $V$  é o campo variacional de uma variação suave por partes de  $\alpha$ , então  $V \in \mathfrak{X}'(\alpha)$ .

**Teorema 2.2.2 (Primeira variação).** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva suave por partes com velocidade constante  $c > 0$ . Se  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é variação de  $\alpha$ , então*

$$L^{\sigma'}(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle dt - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \alpha'(t_i), V(t_i) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_a^b, \quad (2.5)$$

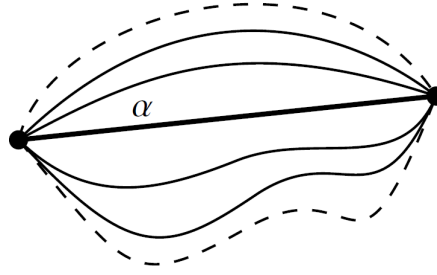
em que  $t_1, \dots, t_k$  são as quebras de  $\alpha$  e  $\sigma$ .

**Definição 2.2.3.** *Uma variação  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de uma curva suave por partes  $\alpha$  é uma variação de extremos fixos se as curvas transversais  $\beta^a$  e  $\beta^b$  são constantes.*

Nesse caso,  $\beta^a(s) = \beta^a(0) = \alpha(a)$  e  $\beta^b(s) = \beta^b(0) = \alpha(b)$  para todo  $s \in (-\delta, \delta)$ . Além disso, todas as curvas longitudinais vão de  $\alpha(a)$  a  $\alpha(b)$ . A Figura 2.3 ilustra esse tipo de variação.

**Proposição 2.2.4.** *Uma curva suave por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de velocidade constante  $c > 0$  é geodésica suave se, e somente se,  $L^{\sigma'}(0) = 0$  para toda variação de extremos fixos  $\sigma$  de  $\alpha$ .*

Figura 2.3: Variação de extremos fixos.



Fonte: Produção do autor.

Sabemos que o campo variacional  $V$  de uma variação  $\sigma$  calcula a velocidade nos pontos em que cada curva transversal cruza a curva base  $\sigma_0$ . Sendo assim, é natural definirmos o campo  $A := \sigma_{ss}(\cdot, 0) \in \mathfrak{X}(\sigma_0)$ , chamado de *aceleração transversal de  $\sigma$* , que calcula a aceleração das curvas transversais em  $\sigma_0$ .

**Teorema 2.2.5 (Segunda variação).** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica com velocidade constante  $c > 0$ . Se  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é variação de  $\alpha$ , então*

$$L^{\sigma''}(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left[ \langle (V^\perp)', (V^\perp)' \rangle + \langle R(V, \alpha')V, \alpha' \rangle \right] dt + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', A \rangle \Big|_a^b, \quad (2.6)$$

em que  $V$  é o campo variacional de  $\sigma$  e  $A$  sua aceleração transversal.

Pelas simetrias de  $R$  (Teorema 1.3.1), o segundo termo no integrando em (2.6) pode ser reescrito como  $\langle R(V^\perp \alpha')V^\perp, \alpha' \rangle$ . Além disso, se  $\sigma$  é uma variação de extremos fixos, então  $A(a) = 0 \in T_{\alpha(a)}M$  e  $A(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ . Nesse caso, a fórmula da segunda variação reduz-se a

$$L^{\sigma''}(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left[ \langle (V^\perp)', (V^\perp)' \rangle + \langle R(V^\perp, \alpha')V^\perp, \alpha' \rangle \right] dt,$$

mostrando que  $L^{\sigma''}(0)$  depende apenas da parte normal do campo variacional  $V$  e não de  $\sigma$  necessariamente, o que será importante quando definirmos a *forma índice* de uma geodésica não luminosa na próxima seção.

Naturalmente,  $L^{\sigma'}(0)$  e  $L^{\sigma''}(0)$  nos dão informação sobre a variação de comprimento das curvas longitudinais próximas da geodésica base  $\alpha$ . De fato, se  $L^{\sigma'}(0) = 0$  e  $L^{\sigma''}(0) \neq 0$ , então seu sinal determina se  $\alpha$  tem comprimento máximo (sinal positivo) ou mínimo (sinal negativo) em relação às curvas longitudinais de  $\sigma$  numa pequena vizinhança de  $s = 0$ .

## 2.3 Forma Índice

Fixe  $p, q \in M$  e um intervalo  $[a, b]$ . Considere o seguinte conjunto de curvas:

$$\Omega(p, q) := \{\alpha \in C^{\infty'}([a, b]); \alpha(a) = p \text{ e } \alpha(b) = q\}.$$

Considerar  $\Omega(p, q)$  como uma variedade<sup>1</sup> nos permite fazer analogias que serão extremamente importantes no desenvolvimento de resultados variacionais.

Seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  uma variação de extremos fixos de uma curva  $\alpha \in \Omega(p, q)$ . Para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , temos que  $\alpha^s \in \Omega(p, q)$ , assim podemos pensar em  $\sigma$  como uma “curva” em  $\Omega(p, q)$  começando em  $\alpha$ , cuja velocidade inicial é o campo variacional  $V$  que se anula em  $a$  e  $b$ .

Lembrando que cada  $T_p M$  pode ser definido como o conjunto das velocidades iniciais das curvas em  $M$  que começam em  $p$ , isso sugere a seguinte definição.

**Definição 2.3.1.** *Se  $\alpha \in \Omega(p, q)$ , então o espaço tangente de  $\Omega(p, q)$  em  $\alpha$  é*

$$T_\alpha(\Omega(p, q)) := \{V \in \mathfrak{X}'(\alpha); V(a) = 0 \text{ e } V(b) = 0\}.$$

Todo campo  $V \in T_\alpha(\Omega(p, q))$  é o campo variacional de alguma variação de extremos fixos  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\alpha$ . Explicitamente,

$$\sigma(t, s) := \exp_{\alpha(t)}(sV(t))$$

é a variação desejada, em que  $\delta$  foi tomado suficientemente pequeno de modo que  $\sigma$  esteja bem definida.

É natural pensar na função comprimento de arco  $L$  como um funcional em  $\Omega(p, q)$ . Isso nos permite dar um sentido a  $V(L)$  de modo análogo ao que é feito em variedades. Assim, tomamos  $V(L) = L^{\sigma'}(0)$  em que  $\sigma$  é uma variação de extremos fixos qualquer cujo campo variacional é  $V$ .

De modo geral, se  $p \in M$  é ponto de crítico de  $f \in C^\infty(M)$ , então  $v(f) = 0$  para todo  $v \in T_p M$ . Assim, a Proposição 2.2.4 nos diz que as geodésicas não luminosas em  $\Omega(p, q)$  são justamente os pontos críticos do funcional  $L$  em  $\Omega(p, q)$ .

Num ponto crítico  $p$  de  $f \in C^\infty(M)$ , as primeiras derivadas coordenadas se anulam e, portanto, estudamos  $f$  ao redor de  $p$  a partir de suas segundas derivadas, expressas pela Hessiana de  $f$  em  $p$ . A próxima definição tenta capturar essa ideia para o funcional  $L$ .

**Definição 2.3.2.** *A forma índice  $I_\alpha$  de uma geodésica não luminosa  $\alpha \in \Omega(p, q)$  é a única forma bilinear simétrica*

$$I_\alpha : T_\alpha(\Omega(p, q)) \times T_\alpha(\Omega(p, q)) \rightarrow \mathbb{R}$$

<sup>1</sup>A construção de  $\Omega(p, q)$  como variedade (de dimensão infinita) pode ser tomada precisa (cf. Beem, Ehrlich e Easley (1999), Capítulo 3), mas não a faremos aqui.

tal que, se  $V \in T_\alpha(\Omega(p, q))$ , então

$$I_\alpha(V, V) = L^{\sigma''}(0),$$

em que  $\sigma$  é qualquer variação de extremos fixos de  $\alpha$  com campo variacional  $V$ .

Lembre que para variações de extremos fixos, a segunda variação depende apenas do campo variacional  $V$  e não do  $\sigma$  em particular. Mais geralmente, para quaisquer  $V, W \in T_\alpha(\Omega(p, q))$ ,

$$I_\alpha(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \left[ \langle (V^\perp)', (W^\perp)' \rangle + \langle R(V, \alpha')W, \alpha' \rangle \right] dt. \quad (2.7)$$

A parte tangente de  $V$  não tem contribuição na segunda variação, assim

$$I_\alpha(V, W) = I_\alpha(V^\perp, W^\perp), \quad \forall V, W \in T_\alpha(\Omega(p, q)).$$

Portanto, não há perda de informação em restringir  $I_\alpha$  para

$$T_\alpha^\perp(\Omega(p, q)) := \{V \in T_\alpha(\Omega(p, q)) : \langle V, \alpha' \rangle = 0\},$$

restrição que denotaremos por  $I_\alpha^\perp$ .

**Proposição 2.3.3.** *Seja  $\alpha \in \Omega(p, q)$  geodésica não luminosa de velocidade  $c > 0$ . Se  $t_1 < \dots < t_k$  são os pontos de quebra de  $\alpha$  e dos campos  $V, W \in T_\alpha(\Omega(p, q))$ , então*

$$I_\alpha(V, W) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \langle (V^\perp)'' + R(V^\perp, \alpha')\alpha', W^\perp \rangle dt - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta(V^\perp)', W^\perp \rangle(t_i).$$

## 2.4 Pontos conjugados

**Definição 2.4.1.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica não constante. Dois pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são ditos conjugados sobre  $\alpha$  se existir um campo  $J \in \mathcal{J}^\alpha$  não nulo tal que  $J(a) = 0$  e  $J(b) = 0$ .*

O conjunto

$$\mathcal{J}_{a,b}^\alpha := \{J \in \mathcal{J}^\alpha : J(a) = 0 \text{ e } J(b) = 0\}$$

é um subespaço de  $\mathcal{J}^\alpha$  e sua dimensão é dita *ordem de conjugação* de  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  ao longo de  $\alpha$ , denotada por  $\text{Conj}(\alpha(a), \alpha(b))$ . Mais especificamente,  $\mathcal{J}_{a,b}^\alpha$  é subespaço de  $\mathcal{J}_a^\alpha$ , formado pelos campos de Jacobi que se anulam em  $a$ , que tem dimensão  $n$  pela Proposição 2.1.7. Vê-se facilmente que o campo  $t \mapsto (t - a) \cdot \alpha'(t)$  é de Jacobi sobre  $\alpha$  e que se anula em  $a$  mas não em  $b$ , logo a dimensão de  $\mathcal{J}_{a,b}^\alpha$  é no máximo  $n - 1$ .

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é geodésica com  $\alpha(a) = p$ . São equivalentes:*

- (i)  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são pontos conjugados sobre  $\alpha$ .
- (ii) Existe uma variação geodésica não trivial (i.e., seu campo variacional é não nulo)  $\sigma$  de  $\alpha$  de modo que todas as curvas longitudinais começam em  $p$  e  $\sigma_s(b, 0) = 0$ .
- (iii)  $(b - a)\alpha'(a)$  é ponto crítico de  $\exp_p : \mathcal{D}_p \subseteq T_p M \rightarrow M$ , isto é,  $d(\exp_{\alpha(a)})_{(b-a)\alpha'(a)} : T_{(b-a)\alpha'(a)}(T_{\alpha(a)}M) \rightarrow T_{\alpha(b)}M$  é singular.

**Exemplo 2.4.3 (Pontos conjugados em curvatura constante).** Considere uma geodésica  $\alpha : I \ni 0 \rightarrow M$  em uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  com curvatura constante  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Aplicando as expressões de (2.4), concluímos o seguinte:

- 1) Suponha que  $\kappa < 0$  ou  $\kappa = 0$ . Se um campo de Jacobi se anula em  $t = 0$  e em  $t = t_0 \neq 0$ , então é o campo nulo. Portanto, nesse caso, geodésicas não possuem pares de pontos conjugados;
- 2) Se  $\kappa > 0$ , então os pontos conjugados a  $\alpha(0)$  são os  $\alpha(t_\ell)$  tais que

$$t_\ell = \frac{\pi\ell}{\sqrt{\kappa}}, \quad \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

caso  $t_\ell \in I$ . Nesse caso, utilizando (2.4), vemos que os campos vetoriais em  $\mathcal{J}_{0, \pi/\sqrt{\kappa}}^\alpha$  (supondo  $\ell = 1$ ) são todos da forma

$$J(t) = \text{sen}(\sqrt{\kappa}t) \cdot W, \quad \forall t \in [0, \pi/\sqrt{\kappa}],$$

com  $W$  transportado paralelamente e perpendicular a  $\alpha$ .

Em particular, nenhuma geodésica tipo-luz numa variedade semi-Riemanniana com curvatura constante possui pares de pontos conjugados. O mesmo ocorre para quaisquer geodésicas nos espaços semi-Euclidianos  $\mathbb{R}_\mu^n$  ou em qualquer outra variedade com curvatura nula. Em todos esses casos, temos que  $\kappa = 0$ . ◀

**Definição 2.4.4.** Uma geodésica  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é dita coespacial quando o subespaço  $\alpha'(t)^\perp$  de  $T_{\alpha(t)}M$  é tipo-espaço para algum  $t$  (consequentemente, para todo  $t \in [a, b]$ ).

Assim, toda geodésica  $\alpha$  coespacial é necessariamente não luminosa, e  $M$  é Riemanniana ou de Lorentz dependendo do sinal de  $\alpha$ .

**Teorema 2.4.5.** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica coespacial em  $\Omega(p, q)$ . Então,

- (i) Se não existem pontos conjugados a  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$ , então  $\varepsilon I_\alpha^\perp$  é positiva definida.
- (ii) Se  $\alpha(b)$  é o único ponto conjugado de  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$ , então  $\varepsilon I_\alpha^\perp$  é positiva semi-definida, mas não definida.



(iii) Se existe um ponto  $\alpha(r)$  conjugado a  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$  com  $a < r < b$ , então  $I_\alpha^\perp$  é indefinida.

Naturalmente, a curvatura da variedade influencia no comportamento de suas geodésicas. A saber, é esperado que uma curvatura positiva proporcione “convergência”, enquanto que curvatura negativa implique o efeito contrário. O próximo resultado formaliza essa noção.

**Proposição 2.4.6.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica coespacial. Suponha que*

- (i) *ou  $M$  é riemanniana e todas as curvaturas seccionais são não positivas, isto é,  $K(\Pi) \leq 0$  para todo plano, ou*
- (ii)  *$M$  é de Lorentz,  $\alpha$  é temporal e as curvaturas seccionais  $K(\Pi) \geq 0$  para todos os planos temporais  $\Pi \subset TM$ .*

Então,  $\alpha$  não possui pontos conjugados.

## 2.5 Pontos focais

Fixe a seguinte notação:  $P$  uma subvariedade mergulhada semi-Riemanniana de  $M$ ,  $q \in M$  e  $[a, b]$  um intervalo fechado. Denotaremos por  $\Omega(P, q)$  o conjunto das curvas suaves por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  tais que  $\alpha(a) \in P$  e  $\alpha(b) = q$ .

Para uma curva  $\alpha \in \Omega(P, q)$ , estamos interessados nas variações  $\sigma$  de  $\alpha$  cujas curvas longitudinais estão em  $\Omega(P, q)$ . Assim, a curva transversal inicial  $\beta^a$  está em  $P$ , enquanto que a curva transversal final  $\beta^b$  é constante e igual a  $q$ . Uma tal variação será chamada de  $(P, q)$ -variação de  $\alpha$ . Assim como antes, há uma forma natural de descrever o espaço tangente de  $\Omega(P, q)$  em  $\alpha$ .

**Definição 2.5.1.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva em  $\Omega(P, q)$ . O espaço tangente de  $\Omega(P, q)$  em  $\alpha$  é*

$$T_\alpha(\Omega(P, q)) := \{V \in \mathfrak{X}'(\alpha) : V(0) \in T_{\alpha(0)}P \text{ e } V(b) = 0\}.$$

O próximo resultado nos diz que os pontos críticos do funcional comprimento de arco  $L$  em  $\Omega(P, q)$  são as geodésicas não luminosas  $\alpha \in \Omega(P, q)$  normais a  $P$  (ou  $P$ -normais), isto é, tais que  $\alpha'(a) \in (T_{\alpha(a)}P)^\perp$ .

**Proposição 2.5.2.** *Seja  $\alpha \in \Omega(P, q)$  curva com velocidade constante  $c > 0$ . Então,  $\alpha$  é uma geodésica normal a  $P$  se, e somente se,  $L^{\sigma'}(0) = 0$  para toda  $(P, q)$ -variação  $\sigma$  de  $\alpha$ .*

A fim de estudar a segunda variação para geodésicas não luminosas normais a  $P$ , o tensor de Weingarten  $II$  de  $P$  surge naturalmente. De fato, se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é geodésica não luminosa normal a  $P$  em  $\Omega(P, q)$  e  $\sigma$  é  $(P, q)$ -variação de  $\alpha$ , então vê-se facilmente a partir da fórmula da segunda variação 2.6 que

$$L^{\sigma''}(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left[ \langle (V^\perp)', (V^\perp)' \rangle + \langle R_{V\alpha'}V, \alpha' \rangle \right] dt - \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(a), II(V(a), V(a)) \rangle, \quad (2.8)$$

em que  $V$  é o campo variacional de  $\sigma$ .

Assim como definida anteriormente, a forma índice de uma geodésica não luminosa  $\alpha \in \Omega(P, q)$  é a única forma bilinear simétrica em  $T_\alpha(\Omega(P, q))$  tal que  $I_\alpha(V, V) = L^{\sigma''}(0)$  para todo  $V \in T_\alpha(\Omega(P, q))$  e para qualquer  $(P, q)$ -variação  $\sigma$  de  $\alpha$ . Como  $II$  é simétrico, temos

$$I_\alpha(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left[ \langle (V^\perp)', (W^\perp)' \rangle + \langle R_{V\alpha'} W, \alpha' \rangle \right] dt - \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(a), II(V(a), W(a)) \rangle \quad (2.9)$$

para quaisquer  $V, W \in T_\alpha(\Omega(P, q))$ . Assim como antes, podemos restringir a forma índice para  $T_\alpha^\perp(\Omega(P, q))$ .

A noção de ponto conjugado pode ser generalizada para uma subvariedade  $P \subset M$ . A ideia é entender quando geodésicas emanando de  $P$  - antes saindo de  $p$  - “reconvergem em primeira ordem” para um determinado ponto num sentido que tornar-se-á preciso adiante. Essa noção pode ser formalizada novamente a partir de certos campos de Jacobi, os chamados *campos P-Jacobi*.

**Definição 2.5.3.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica normal a  $P$ . Então  $\alpha(b)$  é dito ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$  se existe um campo de Jacobi não nulo  $J \in \mathcal{J}^\alpha$  tal que  $J(b) = 0$ ,*

$$J(a) \in T_{\alpha(0)}P \text{ e } \tan_P(J'(a)) = S_{\alpha'(a)}(J(a)) \quad (2.10)$$

em que  $S_{\alpha'(a)} : T_{\alpha(a)}P \rightarrow T_{\alpha(a)}P$  é o operador de Weingarten de  $P$  em  $\alpha(a)$  associado ao vetor normal  $\alpha'(a)$  (Definição 1.6.7). Um campo de Jacobi satisfazendo as duas condições em (2.10) é dito campo *P-Jacobi*.

**Proposição 2.5.4.** *Sejam  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica  $P$ -normal e  $J \in \mathcal{J}^\alpha$ . São equivalentes:*

- (i)  $J$  é *P-Jacobi*.
- (ii) Existe uma variação geodésica de  $\alpha$  com campo variacional  $J$  e cujas curvas longitudinais são geodésicas *P-normais*.

Ainda mais, se  $\alpha$  é tipo-luz e  $J$  é um campo *P-Jacobi* perpendicular a  $\alpha$ , então a variação em (ii) pode ser tomada de modo que as curvas longitudinais sejam geodésicas tipo-luz.

Esse resultado nos dá a seguinte caracterização para pontos focais.

**Corolário 2.5.5.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica  $P$ -normal. Então,  $\alpha(b)$  é um ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$  se, e somente se, existe uma variação geodésica de  $\alpha$  por geodésicas  $P$ -normais e cujo campo variacional se anula em  $b$  mas não é identicamente nulo.*

O conjunto  $P\mathcal{J}^\alpha$  dos campos *P-Jacobi* sobre  $\alpha$  é um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . Com efeito, para cada  $v \in T_{\alpha(a)}P$  e  $w \in (T_{\alpha(a)}P)^\perp$ , segue-se da Proposição 2.1.7 que existe um

único campo de Jacobi  $J \in \mathcal{J}^\alpha$  tal que  $J(a) = v$  e  $J'(a) = S_{\alpha'(a)}(v) + w$ . Assim,  $J$  é  $P$ -Jacobi e a aplicação  $v + w \mapsto J$  define um isomorfismo linear entre  $T_{\alpha(a)}P \oplus (T_{\alpha(a)}P)^\perp \simeq T_{\alpha(a)}M$  e  $P\mathcal{J}^\alpha$ .

Generalizando a noção de ordem de conjugação, se  $\alpha(r)$  é um ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ , então o conjunto  $P\mathcal{J}_r^\alpha$ , constituído dos campos  $P$ -Jacobi sobre  $\alpha$  que se anulam em  $r$ , é subespaço de  $P\mathcal{J}^\alpha$ , e a dimensão de  $P\mathcal{J}_r^\alpha$  é dita *ordem focal* de  $\alpha(r)$ , denotada por  $\text{Foc}(P, \alpha(r))$ . Convém observar que a ordem focal de  $\alpha(r)$  é no máximo  $n - 1$ , já que o campo  $t \rightarrow (t - a)\alpha'(t)$  em  $\alpha$  é  $P$ -Jacobi e se anula apenas em  $t = a$ .

O próximo resultado é uma generalização do Teorema 2.4.2.

**Teorema 2.5.6.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica normal a  $P$ . Então, são equivalentes:*

- (i)  $\alpha(b)$  é um ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ .
- (ii) Existe uma variação não trivial  $\sigma$  de  $\alpha$  por geodésicas  $P$ -normais tal que  $\sigma_s(b, 0) = 0$ .
- (iii) A exponencial normal<sup>2</sup>  $\exp^N : \mathcal{D}^N \subset NP \rightarrow M$  é singular em  $(b - a)\alpha'(a)$ .

**Exemplo 2.5.7.** Seja  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  o hiperboloide imerso em  $\mathbb{R}^3$  com a métrica Riemanniana. Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por  $\alpha_1(t) = (1 + t, 0, 0)$  e  $\alpha_2(t) = (1 - t, 0, 0)$ . Obviamente, são geodésicas em  $\mathbb{R}^3$  normais a  $P$  em  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = (1, 0, 0)$ , e verificaremos que os pontos  $q = \alpha_1(1) = (2, 0, 0)$  e  $\alpha_2(1) = (0, 0, 0)$  são pontos focais de  $P$  sobre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente. Para tal, basta exibir variações de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  conforme o Teorema 2.5.6. Explicitamente,

$$\sigma_1(t, s) = ((1 + t) \cosh(s), 0, (1 - t) \sinh(s)), t \in [0, 1], s \in (-1, 1),$$

$$\sigma_2(t, s) = (1 - t)(\cos(s), \sin(s), 0), t \in [0, 1], s \in (-\pi, \pi),$$

são variações de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, por geodésicas normais a  $P$ . Assim, seus campos variacionais  $(\sigma_1)_s(t, 0) = (0, 0, 1 - t)$  e  $(\sigma_2)_s(t, 0) = (0, 1 - t, 0)$  satisfazem  $(\sigma_1)_s(1, 0) = 0$  e  $(\sigma_2)_s(1, 0) = 0$ , o que conclui a verificação.

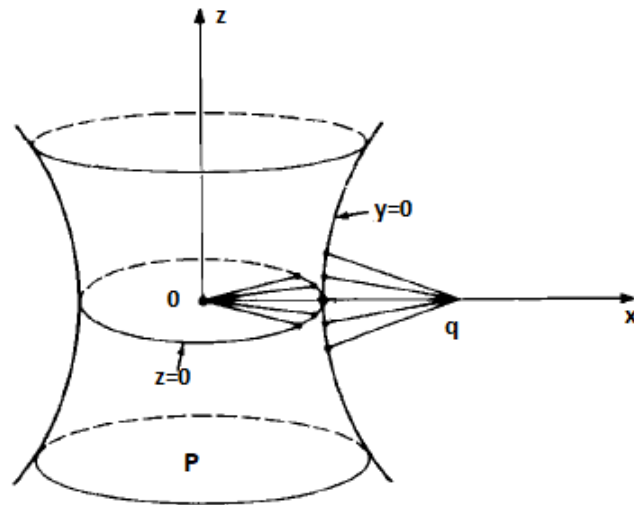
Note que as geodésicas longitudinais de  $\alpha_1$  partem da hipérbole  $\{(x, 0, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 = 1\} \subset P$  e passam arbitrariamente próximas (mas não sobre) ao ponto focal  $q$ , exceto pela própria  $\alpha_1$ , conforme ilustra a Figura 2.4. Por outro lado, as geodésicas longitudinais de  $\alpha_2$  partem da circunferência  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \subset P$  e têm ponto final o próprio ponto focal  $\alpha_2(1)$ .

**Proposição 2.5.8.** *Seja  $\alpha$  geodésica não luminosa normal a  $P$ . Então, o núcleo da forma índice  $I_\alpha^\perp$  é o espaço  $P\mathcal{J}_b^\alpha$ .*

**Lema 2.5.9.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M^n$  geodésica normal a  $P$  (com qualquer causalidade). Então,*

<sup>2</sup>Restrição da aplicação exponencial  $\exp : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M$  para  $\mathcal{D}^N := \mathcal{D} \cap NP$ , onde  $NP$  é o fibrado normal de  $P$ .

Figura 2.4: Pontos focais sobre o hiperboloide.



Fonte: Adaptada de O'Neill (1983).

- (i) O conjunto  $P\mathcal{J}^{\alpha, \perp}$ , formado pelos campos  $P$ -Jacobi sobre  $\alpha$  que são perpendiculares a  $\alpha$ , é um espaço  $\mathbb{R}$ -linear de dimensão  $n - 1$ .
- (ii) Se não existem pontos focais de  $P$  ao longo de  $\alpha$ , então  $T_{\alpha}^{\perp}(\Omega(P, q))$ , visto como um  $C^{\infty}([a, b])$ -módulo, é gerado por  $n - 1$  campos  $P$ -Jacobi linearmente independentes.

Para geodésicas coespaciais, a forma índice caracteriza pontos focais assim como no caso de pontos conjugados.

**Teorema 2.5.10.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica coespacial normal a  $P$ . Então,*

- (i) *Se não existem pontos focais a  $P$  sobre  $\alpha$ , então  $\varepsilon I_{\alpha}^{\perp}$  é positiva definida.*
- (ii) *Se  $\alpha(b)$  é o único ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ , então  $\varepsilon I_{\alpha}^{\perp}$  é semi-definida positiva, mas não definida.*
- (iii) *Se existe um ponto focal  $\alpha(r)$  de  $P$  sobre  $\alpha$  com  $a < r < b$ , então  $I_{\alpha}^{\perp}$  é indefinida.*

O aparecimento de pontos focais dá-se sob determinadas condições esperadas para  $P$  e  $M$ . A saber, a “forma” de  $P$  - caracterizada pelo seu tensor de Weingarten - proporciona uma “convergência” inicial das geodésicas partindo de  $P$ , bem como a curvatura de  $M$  tem papel fundamental nesse sentido. O Teorema 2.5.10 nos dá um critério muito útil para determinar a existência ou não de pontos conjugados. Os próximos resultados são uma aplicação dessas ideias.

**Proposição 2.5.11.** *Sejam  $P \subset M$  subvariedade espacial e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica coespacial não luminosa normal a  $P$ . Suponha que*

- (1)  $\langle \alpha'(0), II(y, y) \rangle = k > 0$  para algum vetor  $y \in T_{\alpha(0)}P$ ;

(2)  $\langle R(v, \alpha')\alpha', v \rangle \geq 0$  para todo vetor tangente  $v \perp \alpha'$ .

Então, existe um ponto focal  $\alpha(r)$  de  $P$  sobre  $\alpha$  com  $0 < r \leq 1/k$ , caso  $\alpha$  esteja definida nesse intervalo.

**Definição 2.5.12.** *Seja  $P$  subvariedade semi-Riemanniana de  $M$  com vetor curvatura média  $H$ . A convergência de  $P$  é a função  $k$ , definida sobre o fibrado normal  $NP$  de  $P$ , dada por*

$$k(z) = \langle z, (H \circ \pi)(z) \rangle, \quad \forall z \in NP,$$

em que  $\pi$  é a projeção de  $NP$  sobre  $P$ .

O próximo resultado nos mostra que a convergência  $k$  de  $P$  tem um sentido geométrico bem definido quando  $P$  é uma hipersuperfície espacial. A saber, ela promove uma “convergência inicial” de geodésicas emanando de  $P$  de forma normal, possibilitando o surgimento de pontos focais.

**Proposição 2.5.13.** *Sejam  $P \subset M$  hipersuperfície espacial e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  geodésica não luminosa normal a  $P$ . Suponha que*

(1)  $k(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), H_{\alpha(0)} \rangle > 0$ ;

(2)  $\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq 0$ .

Então, existe um ponto focal  $\alpha(r)$  de  $P$  sobre  $\alpha$ , com  $0 < r \leq \frac{1}{k(\alpha'(0))}$ , caso  $\alpha$  esteja definida nesse intervalo.

## 2.6 O caso tipo-luz

Até então, restringimos nossa análise para geodésicas não luminosas devido à suavidade do funcional de comprimento  $L$ , que é perdida caso  $\alpha$  seja uma geodésica tipo-luz por exemplo. Dessa forma, nosso intuito é definir um funcional similar que permaneça suave independentemente do caráter causal da curva. Para tal, dada uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  suave por partes, considere o funcional de energia

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \alpha', \alpha' \rangle dt.$$

Assim, se  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é variação de  $\alpha$ , definimos o funcional  $E^\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo o funcional  $E$  aplicado a cada curva longitudinal. Explicitamente,

$$E^\sigma(s) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \sigma_t(t, s), \sigma_t(t, s) \rangle dt.$$

Naturalmente, obtemos uma primeira e segunda variação para esse funcional. Explicitamente, se  $V$  e  $A$  são os campos variacional e aceleração transversal de  $\sigma$  respectivamente e  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  são as quebras de  $\alpha$  e de  $\sigma$ , então

$$E^{\sigma'}(0) = \int_a^b \langle V', \alpha' \rangle dt = - \int_a^b \langle V, \alpha'' \rangle dt - \sum_{i=1}^k \langle V, \Delta \alpha' \rangle(t_i) + \langle V, \alpha' \rangle \Big|_a^b. \quad (2.11)$$

Ainda mais, se  $\alpha$  é geodésica, temos também

$$E^{\sigma''}(0) = \int_a^b \left[ \langle V', V' \rangle + \langle R(V, \alpha')V, \alpha' \rangle \right] dt + \langle A, \alpha' \rangle \Big|_a^b. \quad (2.12)$$

Segue-se da Equação 2.11 que os pontos críticos do funcional  $E$  em  $\Omega(P, q)$  são as geodésicas normais a  $P$ . Se  $\alpha$  é uma tal geodésica, definimos o análogo à forma índice para o funcional de energia, a qual chamaremos de *Hessiana* de  $E$ . Explicitamente,  $H_\alpha$  é a única forma bilinear simétrica em  $T_\alpha(\Omega(P, q))$  tal que

$$H_\alpha(V, V) = E^{\sigma''}(0), \quad \forall V \in T_\alpha(\Omega(P, q)),$$

em que  $\sigma$  é qualquer  $(P, q)$ -variação com campo variacional  $V$ . Se  $V, W \in T_\alpha(\Omega(P, q))$ , segue-se da Equação 2.12 que

$$H_\sigma(V, W) = \int_a^b \left[ \langle V', W' \rangle + \langle R(V, \alpha')W, \alpha' \rangle \right] dt - \langle \alpha'(a), II(V(a), W(a)) \rangle,$$

em que  $II$  é o operador de Weingarten de  $P$ . Assim como antes, estamos interessados na restrição  $H_\alpha^\perp$  ao espaço  $T_\alpha^\perp(\Omega(P, q))$ .

O próximo resultado é um análogo do Teorema 2.5.10 para o caso das geodésicas tipo-luz.

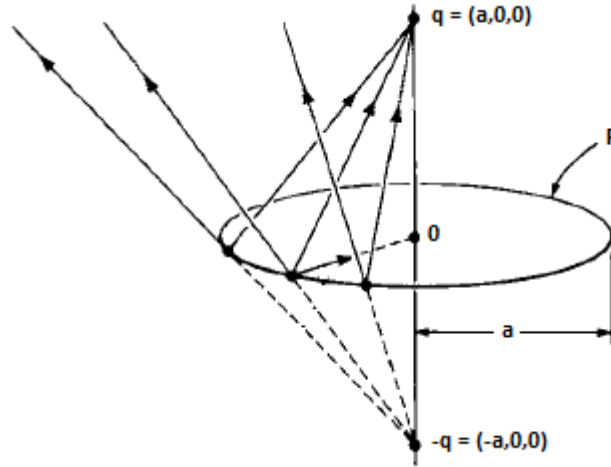
**Proposição 2.6.1.** *Seja  $P$  subvariedade espacial de uma variedade de Lorentz. Se não há pontos focais de  $P$  ao longo de uma geodésica  $\alpha \in \Omega(P, q)$  luminosa  $P$ -normal, então  $H_\alpha^\perp$  é positiva semi-definida. Ainda mais, se  $H_\alpha^\perp(V, V) = 0$ , então  $V \in T_\alpha^\perp(\Omega(P, q))$  é tangente a  $\alpha$ .*

**Exemplo 2.6.2.** Seja  $M = R_1^3$ , com métrica  $ds^2 = -x^2 + y^2 + z^2$ , e tome  $P$  como sendo a circunferência  $\{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y^2 + z^2 = a, a > 0\}$  de raio  $a > 0$ . Para cada ponto de  $P$ , passam exatamente duas curvas (geodésicas)  $P$ -normais luminosas, conforme a Figura 2.5. Na direção futura<sup>3</sup>, todas essas geodésicas se encontram no ponto  $q = (a, 0, 0)$ , que é um ponto focal de  $P$  ao longo de cada uma dessas curvas. Simetricamente,  $-q = (-a, 0, 0)$  é ponto focal de  $P$  com respeito as geodésicas apontando na direção passada.

A Proposição 2.5.13 tem o seguinte resultado análogo para geodésicas tipo-luz.

<sup>3</sup>Convencionamos que a direção futura se refere ao cone superior, enquanto que direção passada remete ao cone inferior, ver Figura 1.1.

Figura 2.5: Pontos focais sobre a circunferência em  $\mathbb{R}_1^3$ .



Fonte: Adaptada de O'Neill (1983).

**Proposição 2.6.3.** *Seja  $P$  uma subvariedade espacial  $(n - 2)$ -dimensional numa variedade de Lorentz  $M^n$ . Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  geodésica tipo-luz normal a  $P$  satisfazendo*

- (1)  $\langle \alpha'(0), H_{\alpha(0)} \rangle = k > 0$ ;
- (2)  $\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq 0$ .

*Então, existe um ponto focal  $\alpha(r)$  de  $P$  sobre  $\alpha$ , com  $0 < r \leq 1/k$ , caso  $\alpha$  esteja definida nesse intervalo.*

Um problema fundamental na teoria de variedades de Causalidade, a ser discutida no Capítulo 5, é determinar quais pontos de uma variedade Lorentziana podem ser ligados por uma curva temporal  $\alpha$ . Uma segunda condição, mais fraca, é pedir que  $\alpha$  seja apenas causal. Obviamente, a primeira implica na segunda mas a recíproca é falsa. Por exemplo, seja  $M = \mathbb{R}_1^2$ , os pontos  $p = (0, 0)$  e  $q = (1, 1)$  podem ser conectados pela curva causal  $\alpha(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , mas nenhuma curva temporal pode ligar esses pontos. Note que, nesse exemplo,  $\alpha$  é uma geodésica luminosa sem pontos conjugados. O Teorema a seguir nos diz que a recíproca é válida se excluirmos esse tipo de situação.

**Teorema 2.6.4.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva causal em  $\Omega(p, q)$  numa variedade de Lorentz. Se  $\alpha$  não admite reparametrização como geodésica tipo-luz, então existe uma variação de extremos fixos  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\alpha$  cujas curvas longitudinais  $t \mapsto \sigma(t, s)$ ,  $s \neq 0$ , são temporais.*

Mais geralmente, o aparecimento de pontos focais sobre uma subvariedade  $P$  ao longo de uma curva causal nos permite perturbá-la (através de uma variação) por curvas temporais, como estabelece o próximo resultado.

**Teorema 2.6.5.** *Seja  $P$  uma subvariedade espacial numa variedade de Lorentz e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva causal em  $\Omega(P, q)$ . Suponha que  $\alpha$  não seja uma geodésica luminosa  $P$ -normal que não contenha pontos focais de  $P$  antes de  $\alpha(b)$ . Então, existe uma  $(P, q)$ -variação  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\alpha$  tal que as curvas longitudinais  $t \mapsto \sigma(t, s), s \neq 0$ , sejam temporais.*



### 3 Tensores de Jacobi

No capítulo anterior, vimos como campos de Jacobi e variações geodésicas descrevem o comportamento de geodésicas por meio da curvatura, através da noção de pontos conjugados e focais.

A fim de obter resultados geométricos mais profundos, precisamos de novas técnicas para analisar soluções da equação de Jacobi. Com esse objetivo, introduziremos neste capítulo a noção de *tensores de Jacobi* e sua *equação de Riccati* associada.

Neste capítulo, a menos de menção contrária, uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  será uma geodésica (não constante) em  $(M, g)$ . Além disso, a fim de evitar certas technicalidades, quando estudarmos geodésicas tipo-luz, a variedade semi-Riemanniana  $(M^n, g)$  será sempre Lorentziana com  $n \geq 3$ .

#### 3.1 Geodésicas tipo-luz e módulos quociente

Na parte inicial deste capítulo, faremos considerações especificamente a respeito de geodésicas tipo-luz, com ideias similares às apresentadas no Apêndice A. Posteriormente, unificaremos esses resultados para geodésicas com qualquer causalidade.

Sabemos que se  $\alpha$  é geodésica tipo-luz e  $\dim M \geq 3$ , então  $\alpha' \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ . Nesse caso, definiremos as seguintes relações de equivalência em  $\mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , e, para cada  $t \in I$ , em  $(\alpha'(t))^\perp$ :

$$\begin{aligned} V \sim W &\iff W = V + h \cdot \alpha' \text{ para alguma } h \in C^\infty(I), \quad V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha), \\ v \sim w &\iff w = v + c \cdot \alpha'(t) \text{ para algum } c \in \mathbb{R}, \quad v, w \in (\alpha'(t))^\perp. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denotaremos por  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  e  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$  seus respectivos conjuntos de classes de equivalência, e chamaremos seus elementos de *seções*. O conjunto  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  [resp.  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$ ] herda uma estrutura natural de  $C^\infty(I)$ -módulo [resp. espaço vetorial real], via a seguinte operação

$$\overline{V} + f \cdot \overline{W} := \overline{V + f \cdot W}, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha), \forall f \in C^\infty(I).$$

[resp.

$$\overline{v} + c \cdot \overline{w} := \overline{v + c \cdot w}, \quad \forall v, w \in (\alpha'(t))^\perp, \forall c \in \mathbb{R}].$$

Para todo  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , podemos pensar em  $\overline{V}$  como uma aplicação

$$\overline{V} : t \in I \mapsto \overline{V(t)} \in \overline{(\alpha'(t))^\perp}.$$

Assim, podemos estender o operador derivada covariante  $D^\alpha/dt$  sobre  $\alpha$  para  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  naturalmente.

A saber, dado  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , temos que  $D^\alpha V/dt \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , pois  $\alpha$  é geodésica. Daí, definimos

$$\overline{V}' := \frac{D^\alpha \overline{V}}{dt} := \overline{\frac{D^\alpha V}{dt}}.$$

Essa operação está bem definida, pois se  $W = V + h \cdot \alpha'$ , então

$$W' = V' + (dh/dt) \cdot \alpha',$$

e, portanto,  $\overline{V}' = \overline{W}'$ . É fácil ver que o operador  $D^\alpha/dt : \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \rightarrow \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é  $\mathbb{R}$ -linear e que satisfaz

$$(h \cdot \overline{V})' = (dh/dt) \cdot V + h \cdot \overline{V}', \quad \forall h \in C^\infty(I).$$

Diremos que  $\overline{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é uma *seção transportada paralelamente* (ou simplesmente paralela) se  $\overline{V}' = 0$ . O próximo resultado é uma extensão análoga para o caso em  $\mathfrak{X}(\alpha)$ .

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica tipo-luz numa variedade de Lorentz  $(M, g)$ . Dados  $t_0 \in I$  e  $\overline{v} \in (\alpha'(t_0))^\perp$ , existe uma única seção paralela  $\overline{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  tal que  $\overline{V}(t_0) = \overline{v}$ .*

*Demonstração.* (Existência)

Sejam  $v \in (\alpha'(t_0))^\perp$  representante arbitrário de  $\overline{v}$  e  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  o único campo transportado paralelamente ao longo de  $\alpha$  (no sentido usual) tal que  $V(t_0) = v$ . Então,  $\overline{V}' = 0$  e  $\overline{V}(t_0) = \overline{v}$ .

(Unicidade)

Sejam  $V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  seções paralelas tais que  $\overline{V}(t_0) = \overline{W}(t_0)$ , e

$$\overline{U} := \overline{V} - \overline{W}.$$

Como  $\overline{U}$  é paralelo, existe  $f \in C^\infty(I)$  e um representante  $U$  da classe  $\overline{U}$  tal que

$$U' = f \cdot \alpha'.$$

Temos também que

$$U(t_0) = c \cdot \alpha'(t_0)$$

para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Defina  $g \in C^\infty(I)$  como

$$g(t) := c + \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad \forall t \in I,$$

e seja

$$Z := U - g \cdot \alpha'.$$

Assim,

$$Z' = U' - f \cdot \alpha' = 0,$$

e

$$Z(t_0) = U(t_0) - c \cdot \alpha'(t_0) = 0.$$

Portanto,  $Z = 0$  e, assim,

$$U = g \cdot \alpha' \Rightarrow \bar{U} = 0,$$

ou seja,  $\bar{V} = \bar{W}$ . ■

**Observação 3.1.2.** Como estamos assumindo  $(M, g)$  Lorentziana, para cada  $t \in I$ , as aplicações

$$(\bar{v}, \bar{w}) \in \overline{(\alpha'(t))^\perp} \times \overline{(\alpha'(t))^\perp} \mapsto \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_{\alpha(t)} := g_{\alpha(t)}(v, w) \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

com  $v, w \in (\alpha'(t))^\perp$  representantes quaisquer em  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$ , são formas bilineares positivo definidas (isto é, produtos internos) nos espaços quociente (Proposição A.3.6).

Analogamente, a aplicação

$$(\bar{V}, \bar{W}) \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \times \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \mapsto \langle \bar{V}, \bar{W} \rangle := g(V, W) \in C^\infty(I) \quad (3.3)$$

está bem definida, e satisfaz

$$d\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle / dt = \langle \bar{V}', \bar{W} \rangle + \langle \bar{V}, \bar{W}' \rangle, \quad \forall \bar{V}, \bar{W} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}. \quad (3.4)$$

Denotaremos a aplicação definida em (3.3) [resp. em (3.2)] como *produto interno induzido em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$*  [resp. *produto interno induzido em  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$* ].

**Corolário 3.1.3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica tipo-luz na variedade de Lorentz  $(M^n, g)$  com  $n \geq 3$ . Fixe  $t_0 \in I$  e seja  $\{\alpha'(t_0), w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  base pseudo-ortonormal de  $T_{\alpha(t_0)}M$  (Definição A.3.4). Então,*

i)  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-2}\}$  é base ortonormal de  $\overline{(\alpha'(t_0))^\perp}$ .

ii) *Sejam  $\bar{E}_i$  as únicas seções paralelas tais que  $\bar{E}_i(t_0) = \bar{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n-2$ ). Então,*

$$\langle \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-2\},$$

e, para todo  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ , existem únicas  $f_1, \dots, f_{n-2} \in C^\infty(I)$  tais que

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n-2} f_i \cdot \bar{E}_i.$$

*Demonstração.* i) Como  $g(\alpha'(t_0), w) = -1$ , e cada  $e_i$  é ortogonal a  $\alpha'(t_0)$ , temos que  $\{\alpha'(t_0), e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é base de  $(\alpha'(t_0))^\perp$ . O conjunto  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-2}\}$  é ortonormal por construção de base pseudo-ortonormal e pela definição do produto interno em  $\overline{(\alpha'(t_0))^\perp}$ . Dados

$\bar{v} \in \overline{(\alpha'(t_0))^\perp}$  arbitrário e  $v$  um representante na classe, podemos escrevê-lo unicamente como

$$v = c \cdot \alpha'(t_0) + \sum_{i=1}^{n-2} c_i \cdot e_i, \quad c, c_i \in \mathbb{R},$$

e, como  $\overline{\alpha'(t_0)} = 0$ , segue-se que

$$\bar{v} = c \cdot \overline{\alpha'(t_0)} + \sum_{i=1}^{n-2} c_i \cdot \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n-2} c_i \cdot \bar{e}_i.$$

Logo,  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-2}\}$  é base ortonormal de  $\overline{(\alpha'(t_0))^\perp}$ .

ii) Segue-se da Equação (3.4) que

$$d\langle \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle / dt = \langle \bar{E}_i', \bar{E}_j \rangle + \langle \bar{E}_i, \bar{E}_j' \rangle = 0.$$

Assim,  $\langle \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle$  é constante e igual a  $\delta_{ij}$ , pois

$$\langle \bar{E}_i(t_0), \bar{E}_j(t_0) \rangle_{t_0} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_{t_0} = g_{t_0}(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Além disso,  $\{\bar{E}_1(t), \dots, \bar{E}_{n-2}(t)\}$  é base de  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$  para todo  $t \in I$ . Assim, dado  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ , para cada  $t \in I$ , existem únicos  $f_i(t) \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n-2$ ) tais que

$$\bar{V}(t) = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(t) \cdot \bar{E}_i(t).$$

Assim, obtemos as aplicações  $f_i \in C^\infty(I)$  desejadas. ■

No contexto atual, podemos estender a noção de campos de Jacobi da seguinte forma.

**Definição 3.1.4 (Classes de Jacobi).** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica tipo-luz numa variedade de Lorentz  $(M^n, g)$  com  $n \geq 3$ . Uma seção  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é dita uma classe de Jacobi (em, ou sobre  $\alpha$ ) se*

$$\bar{V}'' + \bar{R}_{\alpha'}(\bar{V}) = 0, \tag{3.5}$$

em que  $\bar{R}_{\alpha'}$  é o operador força de maré luminoso.

**Proposição 3.1.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica tipo-luz numa variedade Lorentziana  $(M^n, g)$  com  $n \geq 3$ . Dados  $t_0 \in I$  e  $\bar{v}, \bar{w} \in \overline{(\alpha'(t_0))^\perp}$ , existe uma única classe de Jacobi  $\mathcal{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  tal que*

$$\mathcal{V}(t_0) = \bar{v} \quad e \quad \mathcal{V}'(t_0) = \bar{w}.$$

Em particular, o conjunto das classes de Jacobi é um subespaço de  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  de dimensão  $2(n-2)$ . Denotaremos esse subespaço por  $\mathcal{JC}^\alpha$ .

*Demonstração.* Seja  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-2}\}$  base ortonormal de  $\overline{\alpha'(t_0)^\perp}$  e  $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n-2}$  as únicas seções paralelas em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  tais que  $\bar{E}_i(t_0) = \bar{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n-2$ ), conforme Corolário (3.1.3). Assim, podemos escrever

$$\bar{R}_{\alpha'}(\bar{E}_j) = \sum_{i=1}^{n-2} (\bar{R}_{\alpha'})_{ij} \cdot \bar{E}_i, \quad \forall j = 1, \dots, n-2,$$

com elementos matriciais  $(\bar{R}_{\alpha'})_{ij} \in C^\infty(I)$ .

Escreva também

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n-2} v_i \cdot \bar{e}_i \quad \text{e} \quad \bar{w} = \sum_{i=1}^{n-2} w_i \cdot \bar{e}_i.$$

Sejam  $f_1, \dots, f_{n-2} \in C^\infty(I)$  as únicas soluções do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n-2} (\bar{R}_{\alpha'})_{ij} f_j &= 0, \\ f_i(t_0) &= v_i \\ \frac{df_i}{dt}(t_0) &= w_i, \quad i = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, vê-se facilmente que

$$\mathcal{V} := \sum_{i=1}^{n-2} f_i \cdot \bar{E}_i$$

é de fato uma seção de Jacobi em  $\alpha$  satisfazendo  $\mathcal{V}(t_0) = \bar{v}$  e  $\mathcal{V}'(t_0) = \bar{w}$ . Mais ainda, seja  $\mathcal{Z}$  uma seção de Jacobi em  $\alpha$  tal que  $\mathcal{Z}(t_0) = \bar{v}$  e  $\mathcal{Z}'(t_0) = \bar{w}$ . Escreva

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{n-2} h_i \cdot \bar{E}_i,$$

com  $h_i \in C^\infty(I)$ . Dessa forma, as componentes de  $\mathcal{Z}$  são solução do problema de valor inicial 3.6, e, pela unicidade da solução, temos que  $f_i = h_i$  para todo  $i = 1, \dots, n-2$ , donde concluímos que  $\mathcal{Z} = \mathcal{V}$ . ■

O próximo resultado relaciona campos de Jacobi com classes de Jacobi em  $\alpha$ . Aqui,  $\mathcal{J}^{\alpha, \perp}$  denota o conjunto dos campos de Jacobi perpendiculares a  $\alpha$ .

**Proposição 3.1.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica tipo-luz numa variedade Lorentziana  $(M^n, g)$  com  $n \geq 3$ . A projeção induzida*

$$\pi_\alpha : J \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp} \mapsto \bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha$$

*está bem definida, é linear e sobrejetiva. Mais ainda, para quaisquer  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp}$ , temos que  $\pi_\alpha(J_1) = \pi_\alpha(J_2)$  se, e somente se, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $J_1(t) = J_2(t) + (at + b)\alpha'(t)$  para todo  $t \in I$ .*

*Demonstração.* Seja  $J \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp}$ . Temos que

$$\overline{J''} = \overline{J'} = \overline{J''} = -\overline{R(J, \alpha')\alpha'} = -\overline{R_{\alpha'}(\overline{J})} \implies \overline{J} \in \mathcal{J}C^\alpha.$$

Isso mostra que  $\pi_\alpha$  está bem definida. Linearidade é imediata da estrutura de  $C^\infty(I)$ -módulo em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ .

Quanto à sobrejetividade, seja  $\mathcal{V} \in \mathcal{J}C^\alpha$  arbitrário. Então,  $\mathcal{V} = \overline{V}$  para algum representante  $V \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp}$ , tal que

$$V'' + R(V, \alpha')\alpha' = f \cdot \alpha'$$

para alguma  $f \in C^\infty(I)$ . Seja  $h \in C^\infty(I)$  tal que  $d^2h/dt^2 = f$ , e defina  $J \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  como

$$J := V - h \cdot \alpha'.$$

Assim,  $\pi_\alpha(J) = \pi_\alpha(V)$ , isto é,  $J$  define a mesma classe de Jacobi  $\mathcal{V}$  de  $V$ . Mas,

$$J'' = V'' - f \cdot \alpha' = -R(V, \alpha')\alpha' = -R(J, \alpha')\alpha',$$

ou seja,  $J \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp}$ , o que garante sobrejetividade.

Agora, se  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp}$  definem a mesma classe em  $\mathcal{J}C^\alpha$ , então existe  $f \in C^\infty(I)$  tal que

$$J_1 = J_2 + f \cdot \alpha'.$$

Assim,  $f \cdot \alpha'$  é um campo de Jacobi tangente a  $\alpha$ , então segue-se do Lema (2.1.6) que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(t) = at + b, \forall t \in I.$$

A recíproca é imediata. ■

## 3.2 Tensores transversais

Para unificar a discussão com geodésicas não luminosas, introduzimos a seguinte notação que será adotada até o fim deste capítulo.

$$\mathfrak{N}(\alpha) := \begin{cases} \mathfrak{X}^\perp(\alpha), & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa} \\ \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz e } n \geq 3, \end{cases} \quad (3.7)$$

e, para cada  $t \in I$ ,

$$\mathcal{N}(t) := \begin{cases} (\alpha'(t))^\perp, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa} \\ \overline{(\alpha'(t))^\perp}, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz e } n \geq 3. \end{cases} \quad (3.8)$$

Eventualmente, omitiremos as barras sobre  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  e  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$  se não houver risco de confusão. Desse modo, podemos introduzir algumas definições unificadas.

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma geodésica qualquer em  $(M, g)$ . Um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre  $\alpha$  é uma aplicação  $C^\infty(I)$ -linear  $\mathcal{A} : \mathfrak{N}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{N}(\alpha)$ .*

**Observação 3.2.2.** *Seja  $\mathcal{A}$  é um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre uma geodésica  $\alpha$ . A  $C^\infty(I)$ -linearidade de  $\mathcal{A}$  induz aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares*

$$\mathcal{A}(t) : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t), \quad \forall t \in I,$$

de modo que

$$\mathcal{A}(V)(t) = \mathcal{A}(t)(V(t)), \quad \forall t \in I, \forall V \in \mathfrak{N}(\alpha).$$

Reciprocamente, dada uma família  $\{\mathcal{A}(t) : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t)\}_{t \in I}$  de aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares suaves no sentido de que, para qualquer  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ , a aplicação

$$\mathcal{A}(V) : t \in I \mapsto \mathcal{A}(t)(V(t)) \in \mathcal{N}(t)$$

está em  $\mathfrak{N}(\alpha)$ , temos que

$$\mathcal{A} : V \in \mathfrak{N}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}(V) \in \mathfrak{N}(\alpha)$$

define um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre  $\alpha$ . Equivalentemente, podemos descrever a suavidade de um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{A}$  matricialmente da seguinte forma.

Primeiramente, suponha  $\alpha$  geodésica não luminosa. Seja  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  conjunto de campos vetoriais em  $\alpha$ , gerando  $\alpha'(t)^\perp$  para cada  $t \in I$ . Escreva

$$\mathcal{A}(E_j) = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ij} \cdot E_i, \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\},$$

em que  $A_{ij} \in C^\infty(I)$  são unicamente determinadas, e defina a aplicação (suave) com valores matriciais

$$A : t \in I \mapsto [A_{ij}(t)] \in M(n-1, \mathbb{R}).$$

Note que  $A(t)$  é precisamente a matriz associada ao operador  $\mathcal{A}(t)$  com respeito à base  $\{E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)\}$  de  $\mathcal{N}(t)$ .

Agora, suponha que  $\alpha$  é tipo-luz e  $n \geq 3$ . Seja  $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n-2}\}$  conjunto de seções paralelas ortonormais conforme Corolário 3.1.3. Essas seções geram  $\overline{\alpha'(t)^\perp}$  para cada  $t \in I$ , assim

$$\mathcal{A}(\bar{E}_j) = \sum_{i=1}^{n-2} A_{ij} \cdot \bar{E}_i, \quad \forall j \in \{1, \dots, n-2\},$$

com  $A_{ij} \in C^\infty(I)$  unicamente determinadas, e defina a aplicação (suave)

$$A : t \in I \mapsto [A_{ij}(t)] \in M(n-2, \mathbb{R}).$$

O conjunto dos tensores  $(1, 1)$  transversais sobre uma geodésica  $\alpha$  admite uma estrutura natural de  $C^\infty(I)$ -módulo, o qual denotaremos por  $\mathfrak{T}(\alpha)$ . Dados  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(\alpha)$ , vê-se facilmente que a composição  $A \circ B$  também está em  $\mathfrak{T}(\alpha)$ , e que a aplicação

$$(A, B) \in \mathfrak{T}(\alpha) \times \mathfrak{T}(\alpha) \mapsto A \circ B \in \mathfrak{T}(\alpha)$$

é  $C^\infty(I)$ -bilinear.

**Exemplo 3.2.3.** O exemplo trivial de tensor  $(1, 1)$  transversal sobre uma geodésica  $\alpha$  é o *tensor identidade*  $\mathbb{I}$  dado por  $\mathbb{I}(V) = V$  para todo  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ , e que induz a aplicação identidade em cada  $\mathcal{N}(t)$ . ◀

**Exemplo 3.2.4.** Um tensor  $(1, 1)$  transversal que nos será muito importante é o *endomorfismo curvatura*  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  definido da seguinte forma. Se  $\alpha$  é geodésica não luminosa, considere a família  $\{R_{\alpha'(t)}\}_{t \in I}$  de aplicações lineares dada pelos *operadores força de maré* associados a  $\alpha'(t)$

$$R_{\alpha'(t)} : v \in (\alpha'(t))^\perp \mapsto R(v, \alpha'(t))\alpha'(t) \in (\alpha'(t))^\perp, \quad \forall t \in I,$$

e aplique as considerações feitas na Observação (3.2.2) para definir  $\mathcal{R}_\alpha$ . Se  $\alpha$  é tipo-luz e  $n \geq 3$ , obtemos  $\mathcal{R}_\alpha$  a partir da família de operadores força de maré luminosos  $\{\bar{R}_{\alpha'(t)}\}_{t \in I}$  definidos em (1.3.3). ◀

Introduziremos agora uma série de operações em  $\mathfrak{T}(\alpha)$  que nos serão úteis nas próximas seções.

A primeira operação é a *derivada (covariante)*:

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}' \in \mathfrak{T}(\alpha)$$

dada por

$$\mathcal{A}'(V) := \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(V))}{dt} - \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right), \quad (3.9)$$

para todo  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  e  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ . Como estamos restringindo a definição em (3.9) a geodésicas, temos que

$$D^\alpha V/dt \in \mathfrak{N}(\alpha) \text{ para todo } V \in \mathfrak{N}(\alpha).$$

Assim,  $\mathcal{A}'$  está bem definido como um tensor  $(1, 1)$  transversal<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Usamos implicitamente o fato de que, quando  $\alpha$  é geodésica tipo-luz, a derivada covariante de campos vetoriais sobre  $\alpha$  permanece bem definida em  $\bar{\mathfrak{X}}^\perp(\alpha)$ .



Diremos que  $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha)$  é *paralelo* se  $\mathcal{A}' = 0$ . Por exemplo, o tensor identidade  $\mathbb{I} \in \mathfrak{L}(\alpha)$  é paralelo, pois

$$\mathbb{I}'(V) = \frac{D^\alpha(\mathbb{I}(V))}{dt} - \mathbb{I}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right) = \frac{D^\alpha(V)}{dt} - \frac{D^\alpha(V)}{dt} = 0, \quad \forall V \in \mathfrak{N}(\alpha).$$

As seguintes propriedades são facilmente verificáveis:

$$\text{P1)} \quad (h \cdot \mathcal{A})' = (dh/dt) \cdot \mathcal{A} + h \cdot \mathcal{A}', \quad \forall h \in C^\infty(I), \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

$$\text{P2)} \quad (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}', \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

Vejamos que vale P2). Para todo  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})'(V) &= \frac{D^\alpha((\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(V))}{dt} - (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right) \\ &= \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V)))}{dt} - \mathcal{A}\left(\mathcal{B}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right)\right) \\ &= \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V)))}{dt} - \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha(\mathcal{B}(V))}{dt}\right) + \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha(\mathcal{B}(V))}{dt}\right) - \mathcal{A}\left(\mathcal{B}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right)\right) \\ &= \mathcal{A}'(\mathcal{B}(V)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}'(V)) \\ &= (\mathcal{A}' \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}')(V). \end{aligned}$$

Abstraindo  $V$ , obtemos a igualdade desejada.

A segunda operação associa cada  $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha)$  a sua *adjunta*  $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{L}(\alpha)$  dada por

$$\mathcal{A}^*(t) := (\mathcal{A}(t))^*, \quad \forall t \in I,$$

em que a adjunta no lado direito é a usual para operadores lineares. Se  $\alpha$  é geodésica tipo-luz e  $(M, g)$  é Lorentziana, a adjunta em  $\mathcal{N}(t)$  é tomada com respeito ao produto interno induzido em  $\overline{(\alpha'(t))}^\perp$ . Segue-se da caracterização matricial de suavidade para tensores  $(1, 1)$  transversais feita na Observação 3.2.2 que  $\mathcal{A}^*$  está bem definida, e, por construção,

$$\langle \mathcal{A}^*(V), W \rangle = \langle V, \mathcal{A}(W) \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{N}(\alpha).$$

A aplicação

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}^* \in \mathfrak{L}(\alpha)$$

possui as seguintes propriedades facilmente verificáveis:

$$\text{T1)} \quad (h \cdot \mathcal{A})^* = h \cdot \mathcal{A}^*, \quad \forall h \in C^\infty(I), \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

$$\text{T2)} \quad (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \circ \mathcal{A}^*, \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

$$\text{T3)} \quad (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}, \quad \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

$$T4) (\mathcal{A}^*)' = (\mathcal{A}')^*, \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha).$$

Diremos que  $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha)$  é *auto-adjunto* se

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*.$$

Segue-se das simetrias de  $R$  que o endomorfismo curvatura  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é sempre auto-adjunto<sup>2</sup>.

A última operação a ser definida em  $\mathfrak{L}(\alpha)$  é a de inversão. Dado  $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha)$ , definimos

$$I_{\mathcal{A}} := \{t \in I : \mathcal{A}(t) \text{ é invertível}\}.$$

Usando representações matriciais conforme Observação 3.2.2, vê-se facilmente que

I1)  $I_{\mathcal{A}}$  é aberto em  $I$ .

I2) Para qualquer intervalo  $I' \subset I_{\mathcal{A}}$ ,

$$t \in I' \mapsto (\mathcal{A}(t))^{-1} : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t)$$

define um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre a restrição  $\alpha|_{I'}$ , que denotaremos simplesmente por  $\mathcal{A}^{-1}$  se não houver risco de confusão.

I3)  $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}^*}$ , e para todo intervalo  $I' \subset I_{\mathcal{A}}$ ,

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*.$$

**Lema 3.2.5.** *Dado  $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\alpha)$ , para todo intervalo  $I' \subset I_{\mathcal{A}}$ , temos que*

$$(\mathcal{A}^{-1})' = -\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}^{-1}.$$

*Demonstração.* Utilizando a propriedade P2) da operação derivada, temos que

$$0 = \mathbb{I}' = (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1})' = \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1})'.$$

Aplicando  $\mathcal{A}^{-1}$  no primeiro e último termos, e rearranjando os termos, obtemos a igualdade desejada. ■

### 3.3 Tensores de Jacobi

Nesta seção, fixamos uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  em  $(M^n, g)$ . Se  $\alpha$  é tipo-luz, então  $M$  será Lorentziana e  $n \geq 3$ .

<sup>2</sup>isso permanece válido quando  $\alpha$  é geodésica tipo-luz. Nesse caso, consideramos o operador força de maré luminoso.

Dizemos uma  $\alpha$  é *codefinida* se o produto escalar induzido em cada  $\mathcal{N}(t)(t \in I)$  é positivo definido. Essa situação restringe-se aos seguintes dois casos:

- 1) ou  $\alpha$  é coespacial, isto é,  $\alpha$  é temporal e  $(M, g)$  é Lorentziana, ou  $(M, g)$  é Riemanniana,
- 2) ou  $\alpha$  é tipo-luz, e  $(M, g)$  é Lorentziana.

Alguns dos resultados abaixo restringem-se a geodésicas codefinidas. Assim como antes, para lidar simultaneamente com geodésicas independentemente de seu caráter causal, definimos

$$\mu := \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pelo restante do capítulo,  $\mu$  irá sempre será dado por essa convenção.

**Definição 3.3.1 (Tensores de Jacobi).** *Um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha$  é um tensor de Jacobi (ou endomorfismo de Jacobi) se*

$$\mathcal{A}'' + \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} = 0, \quad (3.11)$$

em que  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é o endomorfismo curvatura.

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $t_0 \in I$  e  $B, C : \mathcal{N}(t_0) \rightarrow \mathcal{N}(t_0)$  operadores lineares. Então, existe um único tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  tal que*

$$\mathcal{A}(t_0) = B \text{ e } \mathcal{A}'(t_0) = C. \quad (3.12)$$

Em particular, o conjunto dos tensores de Jacobi em  $\alpha$  é um espaço vetorial de dimensão de  $2\mu^2$ .

*Demonstração.* Sejam  $\{e_1, \dots, e_\mu\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{N}(t_0)$ , e  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  um referencial sobre  $\alpha$  de campos vetoriais transportados paralelamente (ou seções paralelas, se  $\alpha$  é tipo-luz e  $(M, g)$  é Lorentziana) tal que  $E_i(t_0) = e_i$  para  $i = 1, \dots, \mu$ . Sejam  $\hat{B} = [B_{ij}], \hat{C} = [C_{ij}] \in M(\mu, \mathbb{R})$  as matrizes de  $B$  e  $C$ , respectivamente, com respeito à base escolhida:

$$B(e_j) = \sum_{i=1}^{\mu} B_{ij} \cdot e_i \text{ e } C(e_j) = \sum_{i=1}^{\mu} C_{ij} \cdot e_i, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mu\}.$$

Analogamente, podemos escrever o endomorfismo curvatura como

$$\mathcal{R}_{\alpha'}(E_j) = \sum_{i=1}^{\mu} R_{ij} \cdot E_i, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mu\},$$

em que  $R_{ij} \in C^\infty(I)$ , e defina a seguinte aplicação (suave) com valores matriciais

$$R : t \in I \mapsto [R_{ij}(t)] \in M(\mu, \mathbb{R}).$$

Agora, seja  $A = [A_{ij}] : I \rightarrow M(\mu, \mathbb{R})$  única solução global do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + R \cdot A = 0, \\ A(t_0) = \hat{B} \text{ e } \frac{dA}{dt}(t_0) = \hat{C}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Assim,

$$\mathcal{A}(E_j) := \sum_{i=1}^{\mu} A_{ij} \cdot E_i, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mu\}, \quad (3.14)$$

define um tensor de Jacobi com condições iniciais (3.12). A fim de mostrar unicidade, considere um outro tensor de Jacobi  $\mathcal{D}$  satisfazendo as condições em (3.12). Decompondo  $\mathcal{D}$  como em (3.14), obtemos componentes  $D_{ij} \in C^\infty(I)$  que formam uma aplicação com valores matriciais  $D : I \rightarrow M(\mu, \mathbb{R})$  que também é solução de (3.13). Assim,

$$D = A \implies \mathcal{D} = \mathcal{A},$$

como desejado. ■

Denote por  $\mathfrak{P}(\alpha) \subset \mathfrak{R}(\alpha)$  o subespaço vetorial formado pelos campos vetoriais perpendiculares e transportados paralelamente sobre  $\alpha$  (ou de seções paralelas, se  $\alpha$  é tipo-luz).

**Proposição 3.3.3.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi sobre a geodésica não luminosa [resp. tipo-luz]  $\alpha$  na variedade semi-Riemanniana [resp. Lorentziana]  $(M, g)$ . Então, para qualquer  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$ , o campo [resp. a seção]  $\mathcal{A}(V)$  é um campo de Jacobi [resp. classe de Jacobi]. Mais ainda, as seguintes afirmações são equivalentes.*

i) *A aplicação linear*

$$J_{\mathcal{A}} : V \in \mathfrak{P}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}(V) \in \mathcal{J}^{\alpha, \perp} \text{ [resp. } \mathcal{J}C^\alpha \text{]}$$

*é injetiva.*

ii)  $\ker \mathcal{A}(t) \cap \ker \mathcal{A}'(t) = \{0\}, \forall t \in I$ .

iii)  $\ker \mathcal{A}(t_0) \cap \ker \mathcal{A}'(t_0) = \{0\}$ , para algum  $t_0 \in I$ .

*Se uma (e conseqüentemente todas) afirmação de (i) – (iii) vale, então  $\mathcal{A}$  é dito ser não degenerado.*

*Demonstração.* Dado  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$ ,

$$(\mathcal{A}(V))'' = \mathcal{A}''(V) = -\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A}(V) = -R(\mathcal{A}(V), \alpha')\alpha'$$

[em que utilizamos o operador força de maré luminoso na última igualdade se  $\alpha$  é tipo-luz], o que mostra a primeira afirmação. (i)  $\implies$  (ii)

Fixe um  $t \in I$ , e  $v \in \ker \mathcal{A}(t) \cap \ker \mathcal{A}'(t)$ . Seja  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  o único campo perpendicular e paralelo [resp. seção paralela] tal que  $V(t) = v$ . Então,

$$(\mathcal{A}(V))(t) = \mathcal{A}(t)(v) = 0 \text{ e } (\mathcal{A}(V))'(t) = \mathcal{A}'(t)(v) = 0,$$

donde concluímos que  $\mathcal{A}(V) = 0$ , pois  $\mathcal{A}(V)$  é um campo de Jacobi, conforme Proposição 2.1.7 [resp. classe de Jacobi, conforme Proposição 3.1.5], e como  $J_{\mathcal{A}}$  é injetiva, temos que  $V = 0$ . Em particular,  $v = 0$  como desejado.

(ii)  $\implies$  (iii) Trivial.

(iii)  $\implies$  (i)

Seja  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $\mathcal{A}(V) = 0$ . Temos que  $\mathcal{A}'(V) = (\mathcal{A}(V))' = 0$ , assim

$$\mathcal{A}(t_0)(V(t_0)) = (\mathcal{A}(V))(t_0) = 0 \text{ e } \mathcal{A}'(t_0)(V(t_0)) = (\mathcal{A}(V))'(t_0) = 0 \implies V(t_0) = 0$$

por (iii). Mas, como  $V$  é paralelo, concluímos que  $V = 0$ . Isso mostra que  $J_{\mathcal{A}}$  é injetiva.  $\blacksquare$

Em particular, se um tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  é invertível em algum  $t_0 \in I$  (nesse caso,  $\ker \mathcal{A}(t_0) = \{0\}$ ), então  $\mathcal{A}$  é não degenerado.

Obviamente, o espaço  $\mathfrak{P}(\alpha)$  é  $\mu$ -dimensional. Assim, em vista da Proposição 3.3.3, dado um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$ , a injetividade de  $J_{\mathcal{A}}$  nos dá a existência de um subespaço vetorial  $\mu$ -dimensional de  $\mathcal{J}^{\alpha, \perp}$  [resp.  $\mathcal{J}C^{\alpha}$  se  $\alpha$  é tipo-luz]. A saber, o subespaço

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha) := J_{\mathcal{A}}(\mathfrak{P}(\alpha)). \quad (3.15)$$

Em geral, estaremos mais interessados em tensores de Jacobi não degenerados. Eventualmente, iremos restringir ainda mais a classe dos tensores de Jacobi e trabalhar com os chamados *tensores de Lagrange* (ou *Lagrangianos*), que introduziremos a seguir.

Uma *forma simplética*  $\sigma$  em um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é uma forma bilinear antissimétrica não-degenerada. O par  $(\mathbb{V}, \sigma)$  é dito *espaço vetorial simplético*, e  $\mathbb{V}$  tem dimensão necessariamente par. Dado um subespaço  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ , definimos o que seria um análogo do complemento ortogonal num espaço semi-euclidiano:

$$\mathbb{W}^{\perp, \sigma} := \{v \in \mathbb{V} : \sigma(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{W}\},$$

assim

$$\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^{\perp, \sigma}.$$

$\mathbb{W}$  é dito ser *Lagrangiano* se  $\mathbb{W} = \mathbb{W}^{\perp, \sigma}$ . Nesse caso,

$$\dim \mathbb{W} = \dim \mathbb{V} / 2.$$

Para qualquer geodésica não luminosa [resp. tipo-luz], o espaço vetorial  $\mathcal{J}^{\alpha, \perp}$  [resp.  $\mathcal{J}C^{\alpha}$ ]

admite uma forma bilinear antissimétrica natural  $\sigma$ , dada por

$$\sigma(J_1, J_2) := \langle J'_1, J_2 \rangle - \langle J_1, J'_2 \rangle, \quad \forall J_1, J_2 \in \mathcal{J}^\perp(\alpha) \text{ [resp. } \mathcal{J}C^\alpha], \quad (3.16)$$

em que a expressão do lado direito em (3.16) é constante para cada  $t \in I$  em decorrência da equação de Jacobi e das simetrias de  $R$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} d\langle J'_1, J_2 \rangle/dt - d\langle J_1, J'_2 \rangle/dt &= \langle J''_1, J_2 \rangle - \langle J_1, J''_2 \rangle \\ &= -\langle R(J_1, \alpha')\alpha', J_2 \rangle + \langle J_1, R(J_2, \alpha')\alpha' \rangle \\ &= -\langle R(J_2, \alpha')\alpha', J_1 \rangle + \langle J_1, R(J_2, \alpha')\alpha' \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, portanto, a expressão em (3.16) é constante em  $I$ .

**Proposição 3.3.4 (Tensores de Lagrange).** *A forma bilinear  $\sigma$  definida em (3.16) é simplética, e as seguintes afirmações a respeito de um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre uma geodésica  $\alpha$  são equivalentes.*

i)  $(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$ .

ii) O subespaço vetorial  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha)$  é um subespaço Lagrangiano de  $(\mathcal{J}^{\alpha, \perp}, \sigma)$  [resp.  $(\mathcal{J}C^\alpha, \sigma)$ ].

iii)  $(\mathcal{A}')^*(t_0) \circ \mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}^*(t_0) \circ \mathcal{A}'(t_0)$  para algum  $t_0 \in I$ .

Se alguma (e conseqüentemente todas) afirmação vale, então  $\mathcal{A}$  é dito ser um tensor de Lagrange (sobre  $\alpha$ ).

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $\sigma$  é não-degenerada. Sejam

$$\mathbb{V} := \begin{cases} \mathcal{J}^{\alpha, \perp}, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa} \\ \mathcal{J}C^\alpha, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz,} \end{cases}$$

e  $J \in \mathbb{V}$  tal que  $\sigma(J, \cdot) = 0$ . Fixe  $t_0 \in I$ , e escolha qualquer  $w \in \mathcal{N}(t_0)$ . Defina  $J_i \in \mathbb{V}$  ( $i = 1, 2$ ) com condições iniciais

$$J_1(t_0) = 0, J'_1(t_0) = w \text{ e } J_2(t_0) = w, J'_2(t_0) = 0.$$

Como  $\sigma$  independe de  $t \in I$  e  $\sigma(J, J_i) = 0$ , vemos que

$$\sigma(J, J_1) = \langle J'(t_0), J_1(t_0) \rangle - \langle J(t_0), J'_1(t_0) \rangle = -\langle J(t_0), w \rangle = 0,$$

e

$$\sigma(J, J_2) = \langle J'(t_0), J_2(t_0) \rangle - \langle J(t_0), J'_2(t_0) \rangle = \langle J'(t_0), w \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle J(t_0), w \rangle = \langle J'(t_0), w \rangle = 0.$$

Como  $w$  é arbitrário, e o produto escalar em  $\mathcal{N}(t_0)$  é não degenerado, concluímos que

$$J(t_0) = J'(t_0) = 0 \implies J = 0.$$

Isso mostra que  $\sigma$  é uma forma simplética.

(i)  $\iff$  (ii)

Como  $\dim \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha) = \mu = d \operatorname{Im} \mathbb{V} / 2$ , basta mostrar que (i) é satisfeita se, e somente se,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset (\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha))^{\perp, \sigma}. \quad (3.17)$$

Assim, para quaisquer  $V, W \in \mathfrak{P}(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(J_{\mathcal{A}}(V), J_{\mathcal{A}}(W)) &= \langle (\mathcal{A}(V))', \mathcal{A}(W) \rangle - \langle \mathcal{A}(V), (\mathcal{A}(W))' \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}'(V), \mathcal{A}(W) \rangle - \langle \mathcal{A}(V), \mathcal{A}'(W) \rangle \\ &= \langle V, [(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'](W) \rangle, \end{aligned}$$

o que torna imediata a equivalência entre (i) e (3.17).

(i)  $\iff$  (iii)

Obviamente, (i)  $\implies$  (iii). A fim de mostrar a recíproca, note que

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}')' &= (\mathcal{A}'')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'' \\ &= -(\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A})^* \circ \mathcal{A} + \mathcal{A}^* \circ \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{A}^* \circ (\mathcal{R}_{\alpha'}^* - \mathcal{R}_{\alpha'}) \circ \mathcal{A} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

visto que o endomorfismo curvatura  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é auto-adjunto. Ou seja, o tensor de Jacobi

$$X := (\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$$

é paralelo. Agora, seja  $\{E_1, \dots, E_{\mu}\}$  um referencial ortonormal paralelo sobre  $\alpha$ , e escreva

$$X(E_j) = \sum_{i=1}^{\mu} X_{ij} \cdot E_i,$$

com  $X_{ij} \in C^{\infty}(I)$  ( $i, j = 1, \dots, \mu$ ). Se mostrarmos que cada  $X_{ij} = 0$ , a prova estará concluída.

Temos que

$$(\mathcal{X}(E_j))'(t) = \mathcal{X}'(E_j)(t) = \sum_{i=1}^{\mu} X'_{ij}(t) \cdot E_i(t) = 0, \quad \forall t \in I, \forall j = 1, \dots, \mu.$$

Isso mostra que cada  $X_{ij}$  é constante. Mas,  $\mathcal{X}(t_0) = 0$  por (iii), ou seja,

$$\mathcal{X}(E_j)(t_0) = \sum_{i=1}^{\mu} X_{ij}(t_0) \cdot E_i(t_0) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, \mu.$$

Portanto, para cada  $i, j = 1, \dots, \mu$ , temos  $X_{ij}(t_0) = 0$ , e conseqüentemente  $X_{ij} = 0$ . ■

O corolário a seguir é consequência direta do item iii) da Proposição 3.3.4, e nos dá uma condição suficiente para obtenção de um tensor de Lagrange.

**Corolário 3.3.5.** *Se um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  se anula em algum  $t_0 \in I$ , então  $\mathcal{A}$  é um tensor de Lagrange.*

Seja  $\mathcal{A}$  é um tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$  e  $t_0 \in I$ . Introduziremos a seguinte notação:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha} := \{J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha) : J(t_0) = 0\}. \quad (3.19)$$

O próximo resultado será bastante útil futuramente.

**Proposição 3.3.6.** *Seja  $\mathcal{A}$  tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$ , e seja  $t_0 \in I$ . Defina a aplicação  $\Phi : \ker \mathcal{A}(t_0) \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$  da seguinte forma. Dado  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$ , tome o único  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $V(t_0) = v$ , e ponha*

$$\Phi(v) := J_{\mathcal{A}}(V).$$

Então,  $\Phi$  é um isomorfismo linear.

*Demonstração.* Dado  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$ , tome o único  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $V(t_0) = v$ .

$$(\Phi(v))(t_0) = \mathcal{A}(V)(t_0) = \mathcal{A}(t_0)(v) = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{A}(V) \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$ . Portanto,  $\Phi$  está bem definida e sua linearidade é evidente.

Se  $\Phi(v) = \mathcal{A}(V) = 0$ , então  $\mathcal{A}(V)' = 0$ , e, em particular,  $\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}'(t_0)(v) = 0$ . Assim, como  $\mathcal{A}$  é não degenerado, temos que  $v = 0$ . Isso prova que  $\Phi$  é injetiva. Agora, dado  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$ , tome o único  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $J_{\mathcal{A}}(V) = J$ . Então,

$$\mathcal{A}(t_0)(V(t_0)) = J(t_0) = 0 \implies V(t_0) \in \ker \mathcal{A}(t_0) \text{ e } \Phi(V(t_0)) = J,$$

mostrando que  $\Phi$  é sobrejetiva. ■



Dado um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre  $\alpha$ , diremos que um ponto  $\alpha(t_0)$  é  $\mathcal{A}$ -conjugado se  $\dim \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^\alpha > 0$ , isto é, se existe  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha)$  não nulo tal que  $J(t_0) = 0$ . Segue-se da proposição 3.3.6 o seguinte resultado.

**Corolário 3.3.7.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$ , então*

$$I \setminus I_{\mathcal{A}} = \{t \in I : \alpha(t) \text{ é } \mathcal{A}\text{-conjugate}\}.$$

*Em particular, esse conjunto é fechado em  $I$ .*

Podemos fortalecer esse resultado caso  $\mathcal{A}$  seja um tensor Lagrangiano sobre uma geodésica codefinida. Mas antes, enunciaremos um lema auxiliar.

**Lema 3.3.8.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi não degenerado e um referencial ortonormal paralelo  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  em  $\alpha$ . Associada a esse referencial, defina uma base  $\{J_1, \dots, J_\mu\}$  de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha)$  como*

$$J_i := \mathcal{A}(E_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}.$$

*Então,  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$  se, e somente se,  $\alpha(t_0)$  não é  $\mathcal{A}$ -conjugado, isto é, se  $\mathcal{A}(t_0)$  é invertível.*

*Demonstração.* Como  $\{E_1(t_0), \dots, E_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ , se  $\mathcal{A}(t_0)$  é invertível, então  $\mathcal{A}(t_0)$  leva bases em bases, logo  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é também base de  $\mathcal{N}(t_0)$ .

Reciprocamente, se  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ , então as equações

$$J_j(t_0) = \sum_{i=1}^{\mu} M_{ij} \cdot E_i(t_0), \quad j \in \{1, \dots, \mu\},$$

para a matriz mudança de base  $[M_{ij}]$  (que é sempre invertível) mostram que essa matriz coincide com a matriz de  $\mathcal{A}(t_0)$  com respeito à base  $\{E_1(t_0), \dots, E_\mu(t_0)\}$ . Portanto,  $\mathcal{A}(t_0)$  é invertível. ■

**Teorema 3.3.9.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Lagrange sobre a geodésica codefinida  $\alpha : I \rightarrow M$ . Se  $\alpha(t_0)$  é um ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado, então existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\} \implies \mathcal{A}(t) \text{ é invertível}.$$

*Em outras palavras,  $I \setminus I_{\mathcal{A}}$  é discreto em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ( $0 < k \leq \mu$ ) base ortonormal de  $\ker \mathcal{A}(t_0)$ , e complete-a para uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_\mu\}$  de  $\mathcal{N}(t_0)$ . Para o único referencial ortonormal paralelo  $\{E_1, \dots, E_\mu\} \subset \mathfrak{B}(\alpha)$  tal que  $E_i(t_0) = e_i$ , tome a base associada

$$J_i := \mathcal{A}(E_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad (3.20)$$

de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ . Pelo Lema 3.3.8, sabemos que  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  não é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ . Porém, a fim de provar este teorema, basta mostrar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\{J_1(t), \dots, J_\mu(t)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t)$  para todo  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}$ .

Para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , temos que  $J_i(t_0) = \mathcal{A}(t_0)(e_i) = 0$ , então (cf. O'Neill (1983), Exercício 1.17), existem  $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tais que

$$J_i(t) = (t - t_0) \cdot Y_i(t), \quad \forall t \in I, \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (3.21)$$

*Afirmção:* para algum  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{B}_t := \{Y_1(t), \dots, Y_k(t), J_{k+1}(t), \dots, J_\mu(t)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t)$  para todo  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

Por continuidade, basta mostrar que  $\{Y_1(t_0), \dots, Y_k(t_0), J_{k+1}(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é linearmente independente em  $\mathcal{N}(t_0)$ .

Note que  $Y_i(t_0) = J'_i(t_0) \neq 0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sejam  $a_1, \dots, a_\mu \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot J'_i(t_0) + \sum_{j=k+1}^{\mu} a_j \cdot J_j(t_0) = 0. \quad (3.22)$$

Sejam

$$v := \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i \text{ e } w := \sum_{j=k+1}^{\mu} a_j \cdot e_j,$$

então (3.22) pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}'(t_0)(v) + \mathcal{A}(t_0)(w) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{A}'(t_0)(v), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{A}(t_0))^* \mathcal{A}'(t_0)(v), w \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{A}'(t_0))^* \mathcal{A}(t_0)(v), w \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle, \end{aligned}$$

em que utilizamos o fato de que  $\mathcal{A}$  é de Lagrange na terceira igualdade e de que  $\mathcal{A}(t_0)(v) = 0$  - pois  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$  - na última.

Como  $\alpha$  é codefinida, temos que

$$\mathcal{A}(t_0)(w) = 0 \implies w = 0 \implies a_{k+1} = \dots = a_\mu = 0.$$

Assim,  $\mathcal{A}'(t_0)(v) = 0$ . Agora, como  $\mathcal{A}(t_0)(v) = 0$  e  $\mathcal{A}$  é não degenerado, concluímos que  $v = 0$ , isto é,  $a_1 = \dots = a_k = 0$ . Isso prova a afirmação.

Para concluir a prova, basta notar que, para  $\varepsilon > 0$  conforme a Afirmação,

$$\hat{\mathcal{B}}_t := \{J_1(t), \dots, J_\mu(t)\}$$

é de fato uma base de  $\mathcal{N}(t)$  para todo  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}$ , em que os  $k$  primeiros  $J_i$ 's são descritos em (3.21). ■

### 3.4 Equação de Riccati

Seja  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução não trivial da EDO linear

$$u'' + F \cdot u = 0, \quad (3.23)$$

em que  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua fixada. Fazendo a mudança de variáveis

$$v := u'/u, \quad (3.24)$$

obtemos a *equação de Riccati* associada a (3.23):

$$v' + v^2 + F = 0. \quad (3.25)$$

Ao contrário de (3.23), a equação (3.25) está definida apenas num intervalo  $I' \subset I$  em que  $u$  é não nulo, pois só assim (3.24) faz sentido. Reciprocamente, se uma solução  $v : I' \subset I \rightarrow \mathbb{R}$  da equação de Riccati (3.25) está dada, então uma solução positiva  $u$  de (3.23) pode ser dada como

$$u := \exp(h), \text{ em que } h' = v.$$

A função  $u$ , sendo solução de uma equação linear, pode ser estendida para todo o  $I$ , porém pode não ser mais positiva fora de  $I'$ .

A princípio, pode parecer não fazer sentido e até mais complicado trabalhar com a equação não-linear (3.25) invés de (3.23), porém ela proporciona a visualização de aspectos globais interessantes das soluções de (3.23), a saber, sobre seus zeros. Esse fato será ilustrado nesta seção num contexto bem mais geral, e tem consequências geométricas importantes.

Assim como antes, fixaremos uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, g)$  com  $n \geq 2$  e uma geodésica  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , mas se  $\alpha$  é tipo-luz, assumiremos sempre que  $(M, g)$  é Lorentziana  $n \geq 3$ .

**Definição 3.4.1 (Equação de Riccati de tensores).** *Seja  $I' \subset I$  um intervalo não vazio. Dizemos que um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{S}$  sobre  $\alpha|_{I'}$  satisfaz a equação de Riccati (ou é um tensor de Riccati) em  $\alpha$  se*

$$\mathcal{S}' + \mathcal{S}^2 + \mathcal{R}_{\alpha'} = 0, \quad (3.26)$$

em que  $\mathcal{S}^2 := \mathcal{S} \circ \mathcal{S}$  e  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é a restrição para  $\alpha|_{I'}$  do endomorfismo curvatura. Um tensor de Riccati é dito ser maximalmente estendido se dado qualquer outro intervalo  $I' \subset I'' \subset I$ , e um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\hat{\mathcal{S}}$  sobre  $\alpha|_{I''}$  satisfazendo a equação de Riccati em  $\alpha$  tal que  $\hat{\mathcal{S}}|_{I'} = \mathcal{S}$ , então  $I'' = I'$  e  $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ .

O próximo resultado faz uma conexão entre tensores de Jacobi e tensores de Riccati.

**Teorema 3.4.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica em  $(M, g)$ . Então,*

1) *seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi em  $\alpha$ , e seja  $I' \subset I$  um intervalo não vazio de modo que  $\mathcal{A}|_{I'}$  seja invertível em todo  $I'$ . O tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  sobre  $\alpha|_{I'}$  definido por*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) := \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1}, \quad \forall t \in I', \quad (3.27)$$

*satisfaz a equação de Riccati (3.26). Mais ainda,  $\mathcal{A}$  é tensor Lagrangiano se, e somente se,  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  é auto-adjunto.*

2) *Dado um intervalo não vazio  $I' \subset I$  e um tensor de Riccati  $\mathcal{S}$  em  $\alpha|_{I'}$ , existe um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  que é (i) invertível em  $I'$ , e (ii) tal que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ . Se  $\hat{\mathcal{A}}$  é qualquer outro tensor de Jacobi não degenerado satisfazendo as propriedades (i) e (ii), então existe um único tensor  $(1, 1)$  transversal paralelo invertível  $\mathcal{C}$  tal que*

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ \mathcal{C}.$$

3) *Se um tensor de Riccati  $\mathcal{S}$  em  $\alpha|_{I'}$  é maximalmente estendido, e um tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  é tal que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  como em (3.27), então, para  $t_0 \in \partial I' \cap I$ , temos que  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado. Um tal  $t_0$  será dito uma singularidade da equação de Riccati.*

*Demonstração.* (1)

Primeiramente, note que  $\mathcal{A}$  é não degenerado pois é invertível em  $I'$ . Para cada  $t \in I'$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{\mathcal{A}}(t) &= \mathcal{A}''(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} - \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} \circ \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'}(t) \circ \mathcal{A}(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^2(t) \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'}(t) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^2(t), \end{aligned}$$

em que utilizamos o Lema 3.2.5 na primeira igualdade. Isso mostra que  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  é tensor de Riccati. Mais ainda, para cada  $t \in I'$ ,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*(t) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = (\mathcal{A}^*(t))^{-1} \circ (\mathcal{A}'(t))^* - \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1},$$

assim

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) \iff \mathcal{A}^*(t) \circ \mathcal{A}'(t) = (\mathcal{A}'(t))^* \circ \mathcal{A}(t),$$

o que conclui a prova de (1).

(2)

Dado um tensor de Riccati  $\mathcal{S}$  em  $\alpha|_{I'}$ , fixe  $t_0 \in I'$ , e considere as únicas soluções  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dos PVI<sup>3</sup> lineares

$$\begin{cases} \mathcal{A}' = \mathcal{S} \circ \mathcal{A} \text{ em } I', \\ \mathcal{A}(t_0) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t_0)}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{B}' = -\mathcal{B} \circ \mathcal{S} \text{ em } I', \\ \mathcal{B}(t_0) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t_0)}. \end{cases}$$

Assim,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são tensores  $(1, 1)$  transversais em  $\alpha|_{I'}$ . Mais ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' &= \mathcal{S}' \circ \mathcal{A} + \mathcal{S} \circ \mathcal{A}' \\ &= -\mathcal{S}^2 \circ \mathcal{A} - \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} + \mathcal{S}^2 \circ \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A}, \end{aligned}$$

em que utilizamos a equação de Riccati para o primeiro termo e a definição de  $\mathcal{A}$  (via EDO) para o segundo termo na segunda igualdade. Isso mostra que  $\mathcal{A}$  é um tensor de Jacobi em  $\alpha|_{I'}$ , que pode ser unicamente estendido como tensor de Jacobi em  $\alpha$  pela Proposição 3.3.2. Mais ainda, em  $I'$ , temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})' &= \mathcal{B}' \circ \mathcal{A} + \mathcal{B} \circ \mathcal{A}' \\ &= -\mathcal{B} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{A} + \mathcal{B} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{A} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  é paralelo, e, em decorrência das condições iniciais dos PVI<sup>3</sup>s, segue-se que

$$\mathcal{B}(t) \circ \mathcal{A}(t) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t)} \quad \forall t \in I'.$$

Portanto,  $\mathcal{A}$  é invertível em  $I'$ , e, em particular, é um tensor de Jacobi com

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$$

por construção.

Finalmente, se  $\hat{\mathcal{A}}$  é outro tensor de Jacobi não degenerado em  $\alpha$  satisfazendo (i) e (ii), então

<sup>3</sup>Esses PVI<sup>3</sup>s podem ser interpretados de forma matricial a fim de aplicarmos os teoremas de existência e unicidade. Para isso, basta tomar um referencial paralelo  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  em  $\alpha|_{I'}$ , assim como fizemos na Proposição 3.3.2. Daqui em diante, assumiremos que esse procedimento está sendo aplicado implicitamente.

$\hat{\mathcal{A}}$  é a única solução em  $I'$  do PVI linear

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}' = \mathcal{S} \circ \hat{\mathcal{A}} \text{ em } I', \\ = \hat{\mathcal{A}}(t_0) \text{ em } \mathcal{N}(t_0). \end{cases} \quad (3.28)$$

Seja  $C$  é o único tensor  $(1, 1)$  transversal paralelo em  $\alpha$  tal que  $C(t_0) = \hat{\mathcal{A}}(t_0)$ . Então, se definirmos o tensor  $(1, 1)$  transversal

$$\mathcal{Z} := \mathcal{A} \circ C,$$

um cálculo direto mostra que  $\mathcal{Z}$  é um tensor de Jacobi em  $\alpha$ , e que satisfaz o mesmo PVI (3.28) que  $\hat{\mathcal{A}}$  em  $I'$ . Assim,  $\mathcal{Z}|_{I'} = \hat{\mathcal{A}}|_{I'}$  e, em particular,  $\mathcal{Z}'(t_0) = \hat{\mathcal{A}}'(t_0)$ . Segue-se da Proposição 3.3.2 que

$$\mathcal{Z} = \hat{\mathcal{A}},$$

concluindo a prova de (2).

(3)

Se  $\alpha(t_0)$  não fosse um ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado, então, por continuidade,  $I'$  poderia ser estendido para um intervalo maior  $I' \subsetneq I'' \subset I$  contendo  $t_0$  de modo que  $\mathcal{A}$  ainda seja invertível em  $I''$ . Assim,  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \mathcal{S}$  seria extensível para  $I''$ , contradizendo a hipótese de que  $\mathcal{S}$  é maximalmente estendido. ■

Para o restante da seção, fixaremos um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$ , e tomaremos  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  como o tensor de Riccati associado definido em (3.27), maximalmente estendido no intervalo  $I' \subset I$ .

Sendo  $\mathcal{A}$  não degenerado, para cada  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ , existe um único  $V \in \mathfrak{B}(\alpha)$  tal que  $J = \mathcal{A}(V)$ . Em  $I'$ , temos que

$$J' = \mathcal{A}'(V) = \mathcal{A}'(\mathcal{A}^{-1}(J)) = \mathcal{S}(J), \quad \forall J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha|_{I'}). \quad (3.29)$$

A Equação (3.29) pode ser interpretada no sentido de que  $\mathcal{S}$  mede o quanto campos/classes de Jacobi em  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(\alpha|_{I'})$  falham em ser paralelos.

### 3.4.1 Equação de Raychaudhuri

O objetivo agora é introduzir a famosa *equação de Raychaudhuri*. Antes, faremos uma decomposição conveniente de  $\mathcal{S}$ , que nos permitirá uma melhor visualização geométrica dos efeitos de  $\mathcal{S}$ . Para isso, no restante do capítulo, assumiremos que  $\alpha$  é geodésica codefinida.

Nesse contexto, definiremos três novas aplicações associadas a  $\mathcal{S}$ .

a) A *expansão* (ou *expansão escalar*)  $\theta = \theta_S \in C^\infty(I')$ , dada por

$$\theta := \operatorname{tr} \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \mathcal{S}(E_i), E_i \rangle, \quad (3.30)$$

em que  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  é qualquer referencial paralelo ortonormal em  $\alpha|_{I'}$ .

b) O *cisalhamento* é o tensor  $(1, 1)$  transversal  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_S$  sobre  $\alpha|_{I'}$ , dado por

$$\hat{\sigma} := \frac{1}{2} [\mathcal{S} + \mathcal{S}^*] - \frac{\theta}{\mu} \cdot \mathbb{I}, \quad (3.31)$$

em que  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade.

c) A *vorticidade* é o tensor  $(1, 1)$  transversal  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_S$  sobre  $\alpha|_{I'}$ , dado por

$$\hat{\omega} := \frac{1}{2} [\mathcal{S} - \mathcal{S}^*]. \quad (3.32)$$

Note que cisalhamento e vorticidade são simplesmente a decomposição de  $\mathcal{S}$  em suas partes auto-adjunta e anti-auto-adjunta, respectivamente. Um cálculo direto também mostra que  $\operatorname{tr}(\hat{\sigma}) = \operatorname{tr}(\hat{\omega}) = 0$ .

Com essas definições, temos a seguinte decomposição:

$$\mathcal{S} = \frac{\theta}{\mu} \cdot \mathbb{I} + \hat{\sigma} + \hat{\omega}. \quad (3.33)$$

Uma das razões pela qual estamos restringindo nossa análise para geodésicas codefinidas é para controlar o sinal do *cisalhamento escalar*  $\sigma \geq 0$ , dado por

$$\sigma^2 := \operatorname{tr} \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{\mu} \langle E_i, \hat{\sigma}^2(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \hat{\sigma}(E_i), \hat{\sigma}(E_i) \rangle \geq 0, \quad (3.34)$$

e da *vorticidade escalar*  $\omega \geq 0$ , dada por

$$\omega^2 := -\operatorname{tr} \hat{\omega}^2 = -\sum_{i=1}^{\mu} \langle E_i, \hat{\omega}^2(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \hat{\omega}(E_i), \hat{\omega}(E_i) \rangle \geq 0. \quad (3.35)$$

**Teorema 3.4.3 (A equação de Raychaudhuri).** *Se a geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  é codefinida, então a expansão escalar  $\theta$  satisfaz a equação de Raychaudhuri em  $I'$ :*

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{\mu} + \operatorname{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 - \omega^2 = 0. \quad (3.36)$$

Em particular, se  $S$  é auto-adjunto, essa equação reduz-se a

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{\mu} + \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 = 0.$$

*Demonstração.* Aplicando o traço na equação de Riccati (3.26), obtemos

$$\text{tr } S' + \text{tr } S^2 + \text{tr } \mathcal{R}_{\alpha'} = 0. \quad (3.37)$$

Agora, pelas Proposições 1.3.10 e 1.3.11, temos, tanto para o caso temporal quanto para o luminoso, que

$$\text{tr } \mathcal{R}_{\alpha'} = \text{Ric}(\alpha', \alpha'). \quad (3.38)$$

Diferenciando a decomposição (3.33), temos que

$$S' = \frac{\theta'}{\mu} \cdot \mathbb{I} + \hat{\sigma}' + \hat{\omega}', \quad (3.39)$$

cujos dois últimos termos possuem traço nulo, logo

$$\text{tr } S' = \frac{\theta'}{\mu} \cdot \text{tr } \mathbb{I} = \theta'. \quad (3.40)$$

Elevando ao quadrado (3.33), obtemos

$$S^2 = \frac{\theta^2}{\mu^2} \cdot \mathbb{I} + \hat{\sigma}^2 + \hat{\omega}^2 + \frac{2\theta}{\mu} \cdot \hat{\sigma} + \frac{2\theta}{\mu} \cdot \hat{\omega} + \hat{\sigma} \circ \hat{\omega} + \hat{\omega} \circ \hat{\sigma}.$$

Somente os três primeiros termos dessa igualdade possuem traço não nulo. Assim, usando (3.34) e (3.35), temos que

$$\text{tr } S^2 = \frac{\theta^2}{\mu} + \sigma^2 - \omega^2. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.38), (3.40) e (3.41) em (3.37), obtemos o resultado desejado. ■

## 3.5 Funções distância

Uma importante aplicação das equações de Riccati é no que diz respeito aos conjuntos de nível de *funções distância*.

**Definição 3.5.1 (Função distância).** *Uma função distância numa variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  é uma submersão suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U \subset M$  aberto conexo, tal que*

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \varepsilon \quad (3.42)$$

para algum  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  fixado.  $f$  é dita ser coespacial se, para todo  $p \in U$ ,  $g_p$  restrita a



$(\nabla f(p))^\perp \subset T_p M$  é positiva-definida

Vejamos alguns exemplos de funções distância.

**Exemplo 3.5.2.** No Espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , a função

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

é uma função distância. Note que  $f$  mede a distância Euclidiana à origem. Mais ainda, apesar de  $f$  poder ser estendida continuamente para 0, essa extensão não é diferenciável. Obviamente, os conjuntos de nível de  $f$  são esferas centradas na origem. ◀

**Exemplo 3.5.3.** No espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  ( $n \geq 2$ ), a função

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{T}_+ \mapsto \sqrt{x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2},$$

em que  $\mathcal{T}_+$  é o cone temporal

$$\mathcal{T}_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n : \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2} < x_1\},$$

é uma função distância. Um cálculo direto mostra que seu gradiente é sempre temporal. Além disso, seus conjuntos de nível são componentes conexas de hiperboloides. ◀

Esses exemplos mostram que uma função distância pode não estar bem definida em todo o  $M$ . Porém, quando se tratando de aspectos e propriedades gerais dessas funções, é conveniente defini-las em todo o espaço se não houver risco de confusão, e restringi-las nos exemplos e casos particulares.

**Proposição 3.5.4.** Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância na variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ . Então,

i) cada conjunto de nível  $N_r := f^{-1}(r)$ , com  $r \in \text{Im } f$ , é uma hipersuperfície semi-Riemanniana, todos com o mesmo índice

$$\text{ind}(N_r) = \text{ind}(M) + (\varepsilon - 1)/2,$$

em que  $\varepsilon = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$ .

ii) A restrição de  $\nabla f$  é normal-unitária a cada conjunto de nível.

iii) Dado  $r \in \text{Im } f$ , o operador de Weingarten de  $N_r$  com respeito a  $\nabla f$  é

$$S_r := S_{\nabla f} : X \in \mathfrak{X}(N_r) \mapsto \nabla_X \nabla f \in \mathfrak{X}(N_r).$$

*Demonstração.* Como  $f$  é submersão suave, todo  $r \in \text{Im } f$  é valor regular, então os itens i) e ii) são simplesmente um caso particular da Proposição 1.6.9. Já o item iii) decorre imediatamente da Proposição 1.6.10. ■

O próximo resultado exhibe propriedades importantes de uma função distância, responsáveis por sua grande utilidade em geometria.

**Teorema 3.5.5.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância numa variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ . Então,*

i) *as curvas integrais de  $\nabla f$  são geodésicas normais a cada hipersuperfície de nível e intersectando cada nível no máximo uma vez.*

ii) *Dada qualquer curva integral  $\alpha : I \rightarrow M$  de  $\nabla f$ ,*

$$f(\alpha(t)) - f(\alpha(t')) = \varepsilon(t - t'), \quad \forall t, t' \in I. \quad (3.43)$$

iii) *Sejam  $N_r, N_s$  hipersuperfícies de nível, com  $r, s \in \text{Im } f$  e  $r < s$  dados, e seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva integral de  $\nabla f$  intersectando ambos os conjuntos, em pontos  $\alpha(a) \in N_r$  e  $\alpha(b) \in N_s$ ,  $a, b \in I$ . Então,*

$$a < b \text{ e } L_g(\alpha|_{[a,b]}) = s - r, \text{ se } \nabla f \text{ é espacial}$$

e

$$b < a \text{ e } L_g(\alpha|_{[b,a]}) = s - r, \text{ se } \nabla f \text{ é temporal.}$$

iv) *Suponha  $f$  coespacial. Sejam  $N_r, N_s$ , com  $r \neq s \in \text{Im } f$ , hipersuperfícies de nível, e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma curva integral de  $\nabla f$  indo de  $N_r$  até  $N_s$ . Se  $\nabla f$  é espacial [resp. temporal], então  $\alpha$  tem o menor [resp. maior] comprimento dentre todos segmentos de curva [resp. segmentos de curvas causais] indo de  $N_r$  até  $N_s$ .*

*Demonstração.* Escreva  $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \varepsilon$ , e, fixe uma curva integral  $\alpha : I \rightarrow M$  de  $\nabla f$  pelo restante da prova.

(i)

Como  $\nabla f$  é normal a cada hipersuperfície de nível, a curva integral  $\alpha$  também o é. Para checar que  $\alpha$  é geodésica, isso será imediato se verificarmos que:

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0. \quad (3.44)$$

Para mostrar isso, seja  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  arbitrário, então

$$\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Z \rangle = \text{Hess}_f(\nabla f, Z) = \text{Hess}_f(Z, \nabla f) = \langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f \rangle = \frac{1}{2} Z \langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0,$$

o que prova (3.44). Que  $\alpha$  intersecta cada conjunto de nível no máximo uma vez, ficará claro no próximo item.

(ii)

Temos que

$$(f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \nabla f \circ \alpha(t), \nabla f \circ \alpha(t) \rangle = \varepsilon. \quad (3.45)$$

Integrando (3.45), obtemos a Equação 3.43, como desejado.

Em particular, (3.43) mostra que  $\alpha$  não pode intersectar o mesmo conjunto de nível para dois valores distintos, isto é,  $\alpha$  cruza um dado nível no máximo uma vez.

(iii)

De (3.43), temos que

$$s - r = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \varepsilon(b - a). \quad (3.46)$$

Isso mostra que  $a \leq b$  and  $b \leq a$  se  $\nabla f$  é espacial e temporal, respectivamente. Em todo caso, se o comprimento de  $\alpha$  entre  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  é  $\ell$ , então

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0 = s - r.$$

onde  $t_0 := \min\{a, b\}$  e  $t_1 := \max\{a, b\}$ .

(iv)

Suponha  $f$  coespacial. As demonstrações para quando  $\nabla f$  é temporal ou espacial são similares, então faremos o caso temporal. Seja  $\beta$  um segmento de curva causal conectando  $N_r$  a  $N_s$ , e suponha  $r < s$ . Reparametrize  $\beta : [a, b] \rightarrow M$  de modo que continue indo de  $N_r$  a  $N_s$  (comprimento permanece inalterado). Como  $\beta'$  é causal e  $\nabla f$  temporal, podemos escrever

$$\beta' = -\langle \nabla f \circ \beta, \beta' \rangle \nabla f \circ \beta + \vec{N}$$

com  $\vec{N}$  espacial e ortogonal a  $\nabla f \circ \beta$ . Assim,

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{\langle \nabla f \circ \beta(t), \beta'(t) \rangle^2 - |\vec{N}(t)|^2} dt \leq \int_a^b (f \circ \beta)'(t) dt = f(\beta(b)) - f(\beta(a)) = s - r,$$

sendo o último número o comprimento de qualquer curva integral de  $\nabla f$  conectando  $N_r$  a  $N_s$  pelo item (iii). ■

Obviamente, as hipersuperfícies de nível  $N_r$ , com  $r \in \text{Im } f$ , cobrem todo o  $M$ . Assim, combinamos todos os operadores de Weingarten  $S_r$  para definir uma aplicação global  $C^\infty(M)$ -linear dada por

$$S : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \nabla f \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.47)$$

Quando restrito a uma hipersuperfície de nível  $N_r$ , e se considerarmos apenas campos tangentes, vemos que  $S$  coincide com o operador de Weingarten de  $N_r$ , conforme Proposição 3.5.4-iii), isto é,  $S|_{N_r} = S_r$ .

**Proposição 3.5.6.** *Sejam  $f \in C^\infty(M^n)$  uma função distância,  $r \in \text{Im}(f)$  e  $h_r = \text{tr } S_r \in C^\infty(N_r)$  a função curvatura média de  $N_r$  com respeito ao campo  $\nabla f$  (ver 1.10). Então, para cada  $q \in N_r$ , temos que*

$$h_r(q) = \Delta f(q) = \text{tr Hess } f|_q = \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle, \quad (3.48)$$

onde  $e_2, \dots, e_n \in T_q N_r$  é uma base ortonormal arbitrária.

*Demonstração.* Seja  $e_2, \dots, e_n \in T_q N_r$  base ortonormal, e complete-a com  $\nabla f|_q$  de modo que seja uma base ortonormal de  $T_q M$ . Temos que

$$\begin{aligned} h_r(q) &= \text{tr } S_r|_q = \sum_{i=2}^n \langle S_r(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f|_q, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f|_q, e_i \rangle + \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f|_q, \nabla f|_q \rangle \\ &\stackrel{(3.44)}{=} \text{tr Hess } f|_q = \Delta f(q), \end{aligned}$$

onde utilizamos a igualdade  $\text{Hess}_f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$ . ■

**Teorema 3.5.7.** *O operador  $S$  definido em (3.47) satisfaz*

$$\nabla_{\nabla f} S + S^2 + R_{\nabla f} = 0, \quad (3.49)$$

em que  $R_{\nabla f} = R(\cdot, \nabla f)\nabla f$ .

*Demonstração.* Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que

$$\begin{aligned} R(X, \nabla f)\nabla f &= \nabla_X \nabla_{\nabla f} \nabla f - \nabla_{\nabla f} \nabla_X \nabla f - \nabla_{[X, \nabla f]} \nabla f \\ &\stackrel{(3.44)}{=} -\nabla_{\nabla f}(S(X)) - S([X, \nabla f]) \\ &= -(\nabla_{\nabla f} S)(X) - S(\nabla_{\nabla f} X) - S([X, \nabla f]) \\ &= -(\nabla_{\nabla f} S)(X) - S(\nabla_{\nabla f} X) + S(\nabla_{\nabla f} X) - S(S(X)) \\ &= -(\nabla_{\nabla f} S)(X) - S(S(X)), \end{aligned}$$

em que foi utilizada a regra de Leibniz para derivadas covariantes e a identidade  $[X, \nabla f] = \nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla f} X$  nas terceira e quarta igualdades, respectivamente. Rearranjando os termos e abstraído  $X$ , obtemos a Equação 3.49. ■

**Observação 3.5.8.** Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: o que acontece quando restringirmos o operador  $S$  para uma curva integral  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  de  $\nabla f$ ? Nesse caso, sabemos do Teorema 3.5.5 que  $\alpha$  é geodésica, e suponha que seja coespacial. Como  $\alpha$  é curva integral, temos que  $T_{\alpha(t)}(N_{f(\alpha(t))}) = \alpha'(t)^\perp$  para todo  $t \in I$ . Assim, restringindo  $S$  para ao longo de  $\alpha$

pontualmente, fica bem definido um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre  $\alpha$  dado por

$$\mathcal{S}(t)v = \nabla_v \nabla f(\alpha(t)), \quad \forall v \in \alpha'(t)^\perp, \forall t \in I. \quad (3.50)$$

Assim, uma análise pontual da Equação (3.49) resulta que

$$\mathcal{S}' + \mathcal{S}^2 + \mathcal{R}_{\alpha'} = 0, \quad (3.51)$$

em que  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é o endomorfismo curvatura. Isso mostra que  $\mathcal{S}$  é um tensor de Riccati.

### 3.5.1 Primeira variação de área e fórmula de coárea

**Notação.** Os resultados desta seção serão extremamente importantes para provarmos teoremas de comparação de área e volume<sup>4</sup>. Então, como será o caso futuramente, iremos assumir nesta seção que  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana.

Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância e  $R \in \mathbb{R}$ , definimos o conjunto

$$B(R) := \{p \in M \mid f(p) < R\} \subset M.$$

Posteriormente, estaremos interessados em estudar como o volume dessas “bolas” se comporta quando variamos o “raio”  $R$ . Para esse fim, convém observar que

$$B(R) = \bigsqcup_{r < R} N_r,$$

onde  $N_r = f^{-1}(r)$ . Isso indica que o volume da bola é a soma da área de esferas. Essa noção intuitiva será importante quando lidarmos com comparação de volume na Seção 6.3 e é formalizada pela chamada *fórmula de coárea*. Para esse fim, introduzimos a seguinte notação: para uma função  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $r \in \text{Im } f$ , definimos  $\varphi_r := \varphi|_{N_r}$ . Além disso, definimos a função  $\bar{\varphi} : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{\varphi}(r) := \int_{N_r} \varphi_r d\mu_r,$$

onde  $\mu_r$  denota a forma volume em  $(N_r, g|_{N_r})$ .

**Proposição 3.5.9 (Fórmula de coárea).** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância coespacial. Então, para cada  $\varphi \in \mathcal{L}^1(M, d\mu_g)$ , temos que  $\varphi_r \in \mathcal{L}^1(N_r, d\mu_r)$  para quase todo  $r \in \text{Im } f$ ,  $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}^1(\text{Im } f, dt)$ , e*

$$\int_M \varphi d\mu_g = \int_{\text{Im } f} \bar{\varphi} dt = \int_{\text{Im } f} dt \int_{N_r} \varphi_r d\mu_r. \quad (3.52)$$

<sup>4</sup>Aqui e doravante, usamos o termo “área” para nos referirmos ao volume de regiões dentro de hipersuperfícies de  $M$  (com a medida dada pela métrica induzida), e “volume” para conjuntos com interior não vazio em  $M$ .

*Demonstração.* Esse resultado é simplesmente um caso especial do Teorema de Fubini (cf. Treude (2011), p. 149) para submersões semi-Riemannianas, aplicado à função  $f$ . ■

Então, se

$$\text{vol } B(R) := \int_{B(R)} d\mu_g < \infty,$$

segue-se da fórmula de coárea que

$$\text{vol } B(R) = \int_{-\infty}^R dr \int_{N_r} d\mu_r =: \int_{-\infty}^R \text{area } N_r dr. \quad (3.53)$$

Também precisaremos da chamada *primeira variação de área*, mas antes convém provar o seguinte resultado.

**Lema 3.5.10.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância coespacial e  $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  o fluxo de  $\nabla f$ . Então, para cada  $p \in N_r$ ,  $t \in \mathbb{R}$  com  $(t, p) \in \mathcal{U}$ , temos que  $\Phi_t(p) \in N_{r-t}$ .*

*Demonstração.* Lembre que  $\frac{d}{dt}\Phi_t(p) = \nabla f(\Phi_t(p))$ . Assim, pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt}f(\Phi_t(p)) = df_{\Phi_t(p)}(\nabla f|_{\Phi_t(p)}) = \langle \nabla f|_{\Phi_t(p)}, \nabla f|_{\Phi_t(p)} \rangle = -1,$$

ou seja,  $f(\Phi_t(p)) = -t + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Mas,  $f \circ \Phi_0 = f$  implica que  $b = r$ , donde segue o resultado. ■

Futuramente, estaremos mais interessados no fluxo de  $-\nabla f$ . Nesse caso, temos que  $\Phi_t(p) \in N_{r+t}$ . O próximo resultado trata da variação de área ao transladar compactos contidos numa hipersuperfície de nível de uma função distância  $f$  via o fluxo de  $\nabla f$ . Uma prova pode ser encontrada em Treude (2011), Proposição 1.3.11.

**Proposição 3.5.11 (Primeira variação de área).** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância coespacial,  $R \in \text{Im } f$ , e denote por  $S_R$  o operador de Weingarten de  $N_R$  com respeito a  $-\nabla f$ . Seja  $K \subset N_R$  um subconjunto compacto de modo que o fluxo  $\Phi$  de  $\nabla f$  esteja definido em  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times K$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , ponha  $K_t := \Phi_t(K) \subset N_{R+t}$ . Então,*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{area } K_t = \int_K \text{tr } S_R d\mu_R, \quad (3.54)$$

onde  $\mu_R$  denota a forma volume em  $(N_R, g|_{N_R})$ .

Mais geralmente, para  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , temos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \text{area } K_t = \int_{\Phi_{t_0}(K)} \text{tr } S_{R+t_0} d\mu_{R+t_0}.$$

### 3.6 Tensores de Lagrange canônicos

Até então, obtemos uma série de propriedades analíticas associadas a tensores de Jacobi e suas respectivas equações de Riccati. Porém, aspectos geométricos ainda não foram devidamente explorados.

Em particular, quais relações podemos inferir a respeito de pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados e de pontos conjugados/focais ao longo de geodésicas? O próximo exemplo ilustra que essa relação pode ser mais indireta do que o esperado.

**Exemplo 3.6.1.** Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M^3$  geodésica coespacial ao longo do qual o endomorfismo curvatura é identicamente nulo:  $\mathcal{R}_{\alpha'} = 0$ . Seja  $\{E_1, E_2\}$  referencial ortonormal ao longo de  $\alpha$  gerando  $(\alpha')^\perp$ . Defina um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  pondo

$$\mathcal{A}(t)(E_1(t)) = t \cdot E_1(t) \text{ e } \mathcal{A}(t)(E_2(t)) = (t - 1) \cdot E_2(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Um cálculo direto mostra que  $\mathcal{A}' = \mathbb{I}$  e  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . Logo,  $\mathcal{A}'' = 0$  e  $(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  é Lagrangiano. Mais ainda,  $\mathcal{A}(0)(E_1(0)) = 0$  e  $\mathcal{A}(1)(E_2(1)) = 0$ , e portanto  $\alpha(0)$  e  $\alpha(1)$  são pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados. Mas, se tomarmos  $(M, g)$  como sendo o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  ou Minkowski  $R_1^3$ , então não há pontos conjugados ao longo do segmento de reta  $\alpha$ , conforme Exemplo 2.4.3. ◀

O exemplo anterior nos mostra que nem todos os tensores de Jacobi têm grande relevância geométrica. Os mais importantes definiremos a seguir.

**Definição 3.6.2 (Tensores de Lagrange canônicos).** *Assuma que  $0 \in I$ . Os tensores de Lagrange canônicos sobre uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  são definidos da seguinte forma:*

a)  $\mathcal{A}_0$  é o único tensor de Jacobi sobre  $\alpha$  tal que

$$\mathcal{A}_0(0) = 0 \text{ e } \mathcal{A}'_0(0) = \mathbb{I}_{N(0)}. \quad (3.55)$$

b) Seja  $P \subset M$  uma subvariedade semi-Riemanniana tal que  $\alpha(0) \in P$  e  $\alpha'(0) \in (T_{\alpha(0)}P)^\perp$ , isto é, de se  $\alpha$  é normal a  $P$ , então  $\mathcal{A}_P$  é o único tensor de Jacobi tal que

$$\mathcal{A}_P(0) = \tan_P \text{ e } \mathcal{A}'_P(0) = \mathcal{S}_{\alpha'(0)} \circ \tan_P + \text{nor}_P \quad (3.56)$$

se  $\alpha$  é geodésica não luminosa, e seus correspondentes induzidos em  $\overline{(\alpha'(0))^\perp}$  se  $\alpha$  é tipo-luz e  $(M, g)$  Lorentziana.

A importância geométrica dos tensores canônicos é expressa no próximo resultado. Até o restante do capítulo,  $P \subset M$  denotará uma subvariedade semi-Riemanniana de modo que a geodésica  $\alpha$  seja  $P$ -normal.

**Teorema 3.6.3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica não luminosa [resp. tipo-luz] e  $0 \in I$ . Então,*

- i)  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}_P$  são tensores de Lagrange sobre  $\alpha$ .
- ii)  $\text{Im } J_{\mathcal{A}_0} = \{J \in \mathcal{J}^\perp(\alpha) \text{ [resp. } \bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha] : J(0) = 0\}$ .
- iii)  $\text{Im } J_{\mathcal{A}_P} = \{J \in \mathcal{J}^\perp(\alpha) \text{ [resp. } \bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha] : J \text{ é } P\text{-Jacobi}\}$ .
- iv) Para  $t_0 \neq 0$  em  $I$ , temos que  $\alpha(t_0)$  é  $\mathcal{A}_0$ -conjugado se, e somente se,  $\alpha(t_0)$  é conjugado a  $\alpha(0)$  sobre  $\alpha$ .
- v) Para  $t_0 \neq 0$  em  $I$ , temos que  $\alpha(t_0)$  é  $\mathcal{A}_P$ -conjugado se, e somente se,  $\alpha(t_0)$  é ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ .

*Demonstração.* (i)

Como  $\ker \mathcal{A}'_0(0) = \{0\}$ ,  $\mathcal{A}_0$  é não degenerado, e assim Lagrangiano pelo Corolário 3.3.5. Agora, por um lado, temos que  $\ker \mathcal{A}_P(0) = (T_{\alpha(0)}P)^\perp$ , enquanto que  $\ker \mathcal{A}'_P(0) \subset T_{\alpha(0)}P$ ; logo  $\ker \mathcal{A}_P(0) \cap \ker \mathcal{A}'_P(0) = \{0\}$ , e, portanto,  $\mathcal{A}_P$  é também não degenerado. Mais ainda, para quaisquer  $v, w \in \mathcal{N}(0)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_P(0)(v), \mathcal{A}'_P(0)(w) \rangle &= \langle \tan_P(v), \mathcal{S}_{\alpha(0)}(\tan_P(w)) \rangle \\ &= \langle \tan_P(w), \mathcal{S}_{\alpha(0)}(\tan_P(v)) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}_P(0)(w), \mathcal{A}'_P(0)(v) \rangle \end{aligned}$$

visto que o operador de Weingarten  $\mathcal{S}_{\alpha(0)}$  é auto-adjunto. Logo,

$$\langle (\mathcal{A}'_P)^*(0) \circ \mathcal{A}_P(0)(v), w \rangle = \langle \mathcal{A}_P^*(0) \circ \mathcal{A}'_P(0)(v), w \rangle,$$

e, portanto,

$$(\mathcal{A}'_P)^*(0) \circ \mathcal{A}_P(0) = \mathcal{A}_P^*(0) \circ \mathcal{A}'_P(0).$$

Segue-se da Proposição 3.3.4 que  $\mathcal{A}_P$  é de Lagrange.

(ii)

Seja  $J \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ . Assim,  $J$  é um campo de Jacobi perpendicular [resp. classe], e seja  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  (único pela Proposição 3.3.3-i)) tal que  $J = \mathcal{A}_0(V)$ . Assim,

$$J(0) = \mathcal{A}_0(0)(V(0)) = 0.$$

Reciprocamente, dado um campo de Jacobi [resp. classe]  $J$  com  $J(0) = 0$ , então seja  $v := J'(0)$ , e  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  o único campo paralelo [resp. classe] estendendo  $v$ . Seja  $\hat{J} := \mathcal{A}_0(V) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ . Então,

$$\hat{J}(0) = \mathcal{A}_0(0)(v) = 0 = J(0) \text{ e } \hat{J}'(0) = \mathcal{A}'_0(0)(v) = v = J'(0),$$



donde concluimos que  $J = \hat{J}$ . Isso conclui a prova de (ii).

(iii)

Examinaremos os casos não nulo e tipo-luz separadamente.

*Caso 1:  $\alpha$  geodésica não luminosa.*

Seja  $J \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Então,  $J \in \mathcal{J}^\perp(\alpha)$ , e tome o único  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que  $J = \mathcal{A}_P(V)$ . Assim,

$$J(0) = \mathcal{A}_P(0)(V(0)) = \tan_P(V(0)) \in T_{\alpha(0)}P.$$

Mais ainda,

$$J'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(V(0)) = \mathcal{S}_{\alpha'(0)} \circ \tan_P(V(0)) + \text{nor}_P(V(0)) \implies \tan_P(J'(0)) = \mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)),$$

assim  $J$  é um campo  $P$ -Jacobi perpendicular.

Reciprocamente, dado um campo  $P$ -Jacobi  $J$  (em particular,  $J$  é perpendicular). Seja  $v := J(0) + \text{nor}_P(J'(0)) \in (\alpha'(0))^\perp$ , e  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  be o único campo paralelo estendendo  $v$ . Tome  $\hat{J} := \mathcal{A}_P(V) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Assim,

$$\hat{J}(0) = \mathcal{A}_P(0)(v) = \tan_P(v) = J(0),$$

e

$$\hat{J}'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(v) = \mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)) + \text{nor}_P(J'(0)) = \tan_P(J'(0)) + \text{nor}_P(J'(0)) = J'(0).$$

Portanto,  $J = \hat{J}$ . Isso conclui o Caso 1.

*Caso 2:  $\alpha$  é tipo-luz.*

Seja  $\mathcal{J} \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Então,  $\mathcal{J}$  é uma classe de Jacobi, e considere o único  $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que  $\mathcal{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V})$ . Tome  $v \in (\alpha'(0))^\perp$  tal que  $\bar{v} = \mathcal{V}(0)$  em  $\overline{(\alpha'(0))^\perp}$ . Considere o único campo  $P$ -Jacobi em  $\alpha$  dado por

$$J(0) = \tan_P(v) \text{ e } J'(0) = \mathcal{S}_{\alpha'(0)}(\tan_P(v)) + \text{nor}_P(v).$$

Assim, pela definição de  $\mathcal{A}_P$  para esse caso tipo-luz,

$$\mathcal{J}(0) = \mathcal{A}_P(0)(\bar{v}) := \overline{\tan_P(v)} = \overline{J(0)}$$

e

$$\mathcal{J}'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(\bar{v}) := \overline{\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(\tan_P(v)) + \text{nor}_P(v)} = \overline{J'(0)}.$$

Unicidade das classes de Jacobi implica  $\mathcal{J} = \bar{J}$ .

Reciprocamente, dado  $\mathcal{J} \in \mathcal{J}C^\alpha$  tal que  $\mathcal{J} = \bar{J}$  para algum campo  $P$ -Jacobi  $J$ . Sejam  $v := J(0) + \text{nor}_P(J'(0)) \in (\alpha'(0))^\perp$ , e  $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}(\alpha)$  a única classe paralela tal que  $\mathcal{V}(0) = \bar{v}$ . Então,  $\mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ .

Agora,

$$\mathcal{A}_P(\mathcal{V})(0) = \mathcal{A}_P(0)(\bar{v}) = \overline{\tan_P(v)} = \overline{J(0)} = \mathcal{J}(0),$$

e

$$\mathcal{A}_P(\mathcal{V})'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(\bar{v}) = \overline{\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)) + \text{nor}_P(J'(0))} = \overline{J'(0)} = \mathcal{J}'(0).$$

Portanto,  $\mathcal{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V})$  como desejado.

(iv) e (v)

Todas as provas aqui são bem familiares, então demonstraremos o caso que requer um cuidado maior, que é o caso tipo-luz para o item (v).

Suponha que  $\alpha$  seja geodésica tipo-luz, e seja  $t_0 \neq 0$  tal que  $\alpha(t_0)$  seja um ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ . Tome um campo  $P$ -Jacobi  $J$  em  $\alpha$  tal que  $J(t_0) = 0$ . Pelo item (iii), existe uma classe paralela  $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que

$$\bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V}).$$

Em particular,  $\mathcal{V}(t_0) \neq 0_{\mathcal{N}(t_0)}$ , mas

$$0_{\mathcal{N}(t_0)} = \bar{J}(t_0) = \mathcal{A}_P(t_0)(\mathcal{V}(t_0)).$$

Portanto,  $\ker \mathcal{A}_P(t_0)$  é não trivial e, assim,  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado.

Reciprocamente, suponha que  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado para algum  $t_0 \neq 0$  em  $I$ , e seja  $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}(\alpha)$  uma classe paralela não nula tal que

$$\mathcal{A}_P(t_0)(\mathcal{V}(t_0)) = 0_{\mathcal{N}(t_0)}.$$

Novamente,  $\mathcal{A}_P(\mathcal{V})$  é uma classe de Jacobi, e, por (iii), existe um campo  $P$ -Jacobi  $J$  em  $\alpha$  tal que

$$\bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \implies \bar{J}(t_0) = 0_{\mathcal{N}(t_0)}.$$

Assim, existe um número  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$J(t_0) = c \cdot \alpha'(t_0).$$

Agora, considere o campo  $P$ -Jacobi sobre  $\alpha$  dado por

$$\tilde{J}(t) := J(t) - (c/t_0)t\alpha'(t), \quad \forall t \in I.$$

Por construção,  $\tilde{J}(t_0) = J(t_0) - c \cdot \alpha'(t_0) = 0$ . Mais ainda, se  $\tilde{J}$  fosse identicamente nulo, teríamos pela Proposição 3.1.6

$$0 = \bar{\tilde{J}} = \bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \implies \mathcal{V} = 0,$$

uma contradição. Portanto,  $\tilde{J}$  é não nulo com  $\tilde{J}(t_0) = 0$ , ou seja,  $\alpha(t_0)$  é ponto focal de  $P$ . ■

**Corolário 3.6.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica codefinida em  $(M, g)$  com  $0 \in I$ .*

i) O conjunto dos pontos conjugados a  $\alpha(0)$  ao longo de  $\alpha$  é um conjunto discreto. Mais ainda, se  $\alpha(t_0)$  é conjugado a  $t_0 \neq 0$ , a corresponde ordem de conjugação é

$$\text{Conj}(\alpha(0), \alpha(t_0)) \leq \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz.} \end{cases}$$

ii) Se  $\alpha$  é normal à (necessariamente espacial) subvariedade  $P \subset M$ , então o conjunto dos pontos focais a  $P$  ao longo de  $\alpha$  é um conjunto discreto. Ainda, dado um ponto focal  $\alpha(t_0)$  com  $t_0 \neq 0$ , sua ordem focal é

$$\text{Foc}(P, \alpha(t_0)) \leq \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é tipo-luz.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Quanto às afirmações a respeito de conjuntos discretos, o item (i) do teorema anterior nos garante que  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}_P$  são não degenerados, então segue-se do Teorema 3.3.9 que  $I \setminus I_{\mathcal{A}_0}$  e  $I \setminus I_{\mathcal{A}_P}$  são discretos em  $\mathbb{R}$ . Mas,  $I_{\mathcal{A}_0}$  e  $I \setminus I_{\mathcal{A}_P}$  coincidem com os conjuntos de pontos conjugados a  $\alpha(0)$  e de pontos focais a  $P$  pelos itens (iv) e (v), respectivamente.

No que diz respeito às ordens de conjugação e focal, pelo item (ii) do teorema anterior, temos que  $\mathcal{J}_{0,t_0}^\alpha \subset \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ , e portanto

$$\text{Conj}(\alpha(0), \alpha(t_0)) = \dim \mathcal{J}_{0,t_0}^\alpha \leq \dim J_{\mathcal{A}_0} = \mu.$$

Por outro lado, o item (iii) nos garante que  $P\mathcal{J}_{t_0}^\alpha \subset \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Logo,

$$\text{Foc}(P, \alpha(t_0)) = \dim P\mathcal{J}_{t_0}^\alpha \leq \dim J_{\mathcal{A}_P} = \mu \quad \blacksquare$$

## 4 Resultados preliminares de comparação

As técnicas desenvolvidas neste capítulo são melhor aplicadas nos casos cujo índice da variedade é 0 ou 1. Sendo assim, daqui até o final do capítulo, assumiremos que  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana ou Lorentziana.

Nesta seção, provaremos uma série de resultados que dizem respeito a um espaço vetorial arbitrário  $E$  munido de um produto interno. O que nos será importante é associá-los aos tensores definidos no capítulo anterior. Faremos isso da seguinte forma: para uma geodésica coespacial  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  numa variedade Riemanniana ou Lorentziana  $(M^n, g)$ , sabemos que um tensor  $(1, 1)$  transversal  $\mathcal{A}$  sobre  $\alpha$  é da forma

$$\mathcal{A} : t \in I \mapsto \mathcal{A}(t) \in \text{End}((\alpha'(t))^\perp),$$

onde  $\text{End}((\alpha'(t))^\perp)$  denota o conjunto das aplicações lineares  $(\alpha'(t))^\perp \rightarrow (\alpha'(t))^\perp$ . Fixe um  $t_0 \in I$  e considere uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  de  $((\alpha'(t))^\perp)$ . Estenda-a, por transporte paralelo, para um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  em  $\alpha$ . Assim, lembrando que transporte paralelo é isometria linear, identificamos todos os espaços  $(\alpha'(t))^\perp$  como  $E := ((\alpha'(t_0))^\perp)$ , de modo que possamos reescrever o tensor  $\mathcal{A}$  como uma aplicação  $I \rightarrow \text{End}(E)$ .

Assim, dada uma aplicação suave<sup>1</sup>  $B : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(E)$ , em que  $E$  é um espaço vetorial com produto interno arbitrário, concluímos que  $B$  herda todas as propriedades<sup>2</sup> vistas no capítulo anterior que diziam respeito a um tensor  $(1, 1)$  transversal sobre uma geodésica (em particular, dos tensores de Jacobi).

Feita essa observação, se não houver risco de confusão, podemos chamar uma dada aplicação  $B : J \rightarrow \text{End}(E)$  como acima de tensor transversal, atribuindo propriedades como de ser não degenerado, auto-adjunto ou Lagrangiano conforme for o caso. Além disso, se para alguma aplicação suave  $R : J' \rightarrow \text{End}(E)$ , tivermos

$$B'' + R \circ B = 0,$$

então diremos  $B$  é tensor de Jacobi. Se, por outro lado, valer

$$B' + B^2 + R = 0,$$

diremos que  $B$  é um tensor de Riccati. Nesse caso, ficam bem definidos os operadores associados a  $B$  que compõem a equação de Raychaudhuri (Teorema 3.4.3), e que faremos uso adiante.

<sup>1</sup>Suavidade no sentido da Observação 3.2.2

<sup>2</sup>Propriedades inerentes a tensores sobre geodésicas codefinidas.

## 4.1 Teoremas de comparação

Seja  $E$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Denote por  $S(E) \subset \text{End}(E)$  o subespaço das aplicações lineares  $E \rightarrow E$  que são auto-adjuntas com respeito a esse produto interno.

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $R : \mathbb{R} \rightarrow S(E)$  suave e  $S : (0, b) \rightarrow S(E)$  solução da equação de Riccati*

$$S' + S^2 + R = 0. \quad (4.1)$$

*Então, existe uma projeção<sup>3</sup>  $P \in S(E)$  de modo que a aplicação  $C : (0, b) \rightarrow S(E)$ , dada por*

$$C(t) := S(t) - P/t, \quad (4.2)$$

*tenha extensão contínua para  $t = 0$ . Mais ainda,  $\text{im } P \subset \ker C(0)$ .*

*Demonstração.* Tome  $t_0 \in (0, b)$  e seja  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(E)$  o único tensor de Jacobi tal que  $A(t_0) = \text{id}_E$  e  $S = A' \circ A^{-1}$ . Agora, defina  $V : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(E)$  por

$$V(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}(A(t) - A(0)), & \text{se } t \neq 0 \\ A'(0), & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$A(t) = A(0) + tV(t). \quad (4.4)$$

Como  $A(t_0) = \text{id}_E$ ,  $A$  é não degenerado, isto é,  $\ker A(t) \cap \ker A'(t) = \{0\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular, isso vale para  $t = 0$  e, portanto,  $V(0) = A'(0)$  é injetiva em  $\ker A(0)$ . Ainda, como

$$E = \ker A(0) \oplus \ker A(0)^\perp,$$

a restrição de  $A(0)$  a  $\ker A(0)^\perp$  também é injetiva. Logo,

$$\begin{aligned} & \dim [A(0)(\ker A(0)^\perp)] + \dim [V(0)(\ker A(0))] \\ &= \dim (\ker A(0)^\perp) + \dim (\ker A(0)) = \dim E. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como  $S$  é auto-adjunto,  $A$  é Lagrangiano em  $(0, b)$  (ver Teorema 3.4.2), e, conseqüentemente, é de Lagrange em todo o  $\mathbb{R}$  conforme Proposição 3.3.4. Assim, para quaisquer vetores  $v \in \ker A(0)^\perp$

<sup>3</sup>Uma aplicação  $P : E \rightarrow E$  num espaço vetorial com produto interno é dita ser uma projeção se for auto-adjunta e satisfizer  $P = P^2$ .

e  $w \in \ker A(0)$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle A(0)v, V(0)w \rangle &= \langle A(0)v, A'(0)w \rangle \\ &= \langle v, A(0)^* \circ A'(0)w \rangle \\ &= \langle v, A'(0)^* \circ A(0)w \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $A(0)(\ker A(0)^\perp) \perp V(0)(\ker A(0))$  e, juntamente com (4.5), obtemos

$$E = A(0)(\ker A(0)^\perp) \oplus V(0)(\ker A(0)).$$

Assim, existe uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  tal que os  $k$  primeiros vetores formam uma base  $\ker A(0)$  e os últimos  $n - k$  uma base de  $\ker A(0)^\perp$ , e, mais ainda, de modo que  $\{V(0)e_1, \dots, V(0)e_k, A(0)e_{k+1}, \dots, A(0)e_n\}$  é também base de  $E$ . De (4.4), temos que

$$\begin{aligned} t^{-k} \det A(t) &= t^{-k} \det[A(t)e_1 \dots A(t)e_n] \\ &= t^{-k} \det[(A(0) + tV(t))e_1 \dots (A(0) + tV(t))e_k A(t)e_{k+1} \dots A(t)e_n] \\ &= \det[V(t)e_1 \dots V(t)e_k A(t)e_{k+1} \dots A(t)e_n] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \det[V(0)e_1 \dots V(0)e_k A(0)e_{k+1} \dots A(0)e_n] \neq 0. \end{aligned}$$

Concluimos que a função  $t^{-k} \det A$  é suave em todo o  $\mathbb{R}$  e não se anula em  $t = 0$ . Usando a representação da inversa da matriz em termos da matriz adjunta, obtemos

$$A^{-1}(t) = \frac{1}{\det A(t)} A(t)^* \Rightarrow t^{-k} A^{-1}(t) = \frac{1}{t^{-k} \det A(t)} A(t)^*.$$

Portanto,  $t^{-k} A^{-1}$  pode ser estendida suavemente de  $(0, b)$  para  $[0, b)$ . Assim, o mesmo vale para  $t^k S = t^k A' \circ A^{-1} = A' \circ (t^k A^{-1})$ . Fazendo expansão de Taylor de ordem  $k - 1$  para  $t^k S$ , obtemos aplicações  $S_0, \dots, S_{k-1} \in S(E)$ ,  $\tilde{C} : [0, b) \rightarrow S(E)$  tais que

$$t^k S(t) = S_0 + tS_1 + \dots + t^{k-1} S_{k-1} + \tilde{C}(t), \quad (4.6)$$

onde  $\tilde{C}$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-(k-1)} \tilde{C}(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \tilde{C}(t)$  existe. Assim, a aplicação  $C : [0, b) \rightarrow S(E)$  dada por  $C(t) := t^{-k} \tilde{C}(t)$  é suave em  $(0, b)$  e contínua em  $[0, b)$ . Dividindo a Equação (4.6) por  $t^k$ , obtemos

$$S(t) = t^{-k} S_0 + \dots + t^{-1} S_{k-1} + C(t) \quad (4.7)$$

para todo  $t \in (0, b)$ . Assim, podemos escrever

$$S'(t) = -kt^{-k-1} S_0 - \dots - t^{-2} S_{k-1} + C'(t),$$

e

$$S^2(t) = \sum_{i,j=0}^{k-1} t^{i+j-2k} S_i S_j + \sum_{i=0}^{k-1} t^{i-k} [S_i C(t) + C(t) S_i] + C^2(t),$$

para todo  $t \in (0, b)$ . Substituindo essas expressões na equação de Riccati (4.1), multiplicando a equação resultante por  $t^{2k}$  e aplicando o  $\lim_{t \rightarrow 0}$ , vemos que

$$S_0^2 = -\lim_{t \rightarrow 0} t^{2k} R(t) = 0_{\text{End}(E)},$$

onde a suavidade de  $R$  em  $\mathbb{R}$  foi utilizada na segunda igualdade. Agora, sendo  $S_0$  auto-adjunto e  $S_0^2 = 0$ , segue-se que  $S_0 = 0$ . Fazendo o mesmo para a potência  $t^{2(k-1)}$ , vemos que  $S_1 = 0$ . Repetindo esse processo até  $t^4$ , obtemos

$$S_0 = \dots = S_{k-2} = 0.$$

Para  $t^2$ , temos que

$$-S_{k-1} + S_{k-1} S_{k-1} = -\lim_{t \rightarrow 0} t^2 R(t) = 0 \implies S_{k-1} = S_{k-1}^2.$$

Por fim, multiplicando por  $t$ , resulta que

$$S_{k-1} C(0) + C(0) S_{k-1} = 0.$$

Assim,  $P := S_{k-1}$  é uma projeção, e segue-se de (4.7) que

$$C(t) = S(t) - P/t,$$

sendo  $C$  suave em  $(0, b)$  com extensão contínua para  $t = 0$ . Por fim, para ver que  $\text{im} P \subset \ker C(0)$ , note que

$$PC(0)v = -C(0)P^2v = -C(0)Pv, \quad \forall v \in E,$$

em que utilizamos  $PC(0) = -C(0)P$  na última igualdade. Assim,

$$PC(0)v = -C(0)Pv = PC(0)Pv = -P^2C(0)v = -PC(0)v,$$

e, portanto,  $C(0)Pv = PC(0)v = 0$ , o que conclui a prova. ■

Obviamente, a análise feita para  $t = 0$  foi por conveniência. De modo geral, se  $S$  estiver definido num intervalo  $(a, b)$ , então existe uma projeção  $P$  e uma aplicação suave  $C : (a, b) \rightarrow S(E)$  continuamente extensível para  $t = a$  satisfazendo

$$C(t) = S(t) - \frac{P}{t-a}, \quad \forall t \in (a, b).$$

**Exemplo 4.1.2.** Considere o círculo  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ , e a função  $f : \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{S}^1 \cup \{x = y = 0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) = \left(1 + x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{1/2}.$$

Essa função descreve a distância Euclidiana a  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ , e um cálculo direto mostra que  $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 1$ , isto é,  $f$  é uma função distância. Os conjuntos de nível de  $f$  são os toros ao redor de  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ . Considere a geodésica  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\alpha(t) = (1+t)e_x$ , onde  $e_x = (1, 0, 0)$ . Para cada  $t \in (0, \infty)$ , temos que  $\alpha(t) \in f^{-1}(t)$ , e  $\alpha'(t) = \nabla f|_{\alpha(t)}$ . Em outras palavras,  $\alpha$  é curva integral de  $\nabla f$ .

Seja  $S_{\nabla f|_{f^{-1}(t)}}$  o operador de Weingarten de  $f^{-1}(t)$ ,  $t > 0$ , com respeito ao campo  $\nabla f|_{f^{-1}(t)}$ . No ponto  $\alpha(t)$ , temos  $S_{\alpha'(t)} = S(t)$ , que é simplesmente o operador global  $S$  definido em (3.47) restrito à curva integral  $\alpha$ .

Identifique todos os espaços normais  $\alpha'(t)^\perp$  como  $E = \{(0, v_y, v_z) | v_y, v_z \in \mathbb{R}\}$  de maneira óbvia. Nesse caso, concluímos a partir da Observação 3.5.8 que o operador  $S : (0, \infty) \rightarrow S(E)$  é um tensor de Riccati em  $\alpha$ .

Agora, se  $v = (0, v_y, v_z) \in E$ , um cálculo direto mostra que

$$S(t)(v) = (\nabla_v \nabla f)|_{\alpha(t)} = \left(0, \frac{v_y}{1+t}, \frac{v_z}{t}\right) = \frac{1}{1+t} \text{pr}_y(v) + \frac{1}{t} \text{pr}_z(v).$$

Com a notação da Proposição anterior, concluímos que  $P = \text{pr}_z$  e  $C(0) = \text{pr}_y$ . Geometricamente, esses resultados podem ser interpretados da seguinte forma: o termo  $\text{pr}_z$  é a projeção ao complemento ortogonal de  $T_{\alpha(0)}\mathbb{S}^1$  em  $\alpha'(0)^\perp$ . Já  $\text{pr}_y$  é precisamente o operador de Weingarten de  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$  com respeito a  $\alpha'(0)$ . De fato, se  $v = (0, v_y, 0) \in E$  é tangente a  $\mathbb{S}^1$ , então

$$S_{\alpha'(0)}(v) = \lim_{t \rightarrow 0} S(t)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t} \text{pr}_y(v) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{pr}_z(v) = \text{pr}_y(v). \quad \blacktriangleleft$$

Lembrando que uma aplicação  $A \in S(E)$  é dita *positiva semi-definida* com respeito ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se  $\langle Av, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in E$ . Nesse caso, escrevemos  $A \geq 0$ . Ainda, para  $A, B \in S(E)$ , escrevemos  $A \leq B$  se  $B - A \geq 0$ . Explicitamente,  $A \leq B$  se, e somente se,

$$\langle Bv, v \rangle \geq \langle Av, v \rangle, \quad \forall v \in E.$$

**Teorema 4.1.3.** *Sejam  $R_1, R_2 : \mathbb{R} \rightarrow S(E)$  aplicações suaves com  $R_1 \geq R_2$  (isto é,  $R_1(t) \geq R_2(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ). Para  $i = 1, 2$ , sejam  $S_i : [t_0, t_i) \rightarrow S(E)$  soluções de*

$$S'_i + S_i^2 + R_i = 0 \tag{4.8}$$

*não extensíveis além de  $t_i$ . Suponha que  $S_1(t_0) \leq S_2(t_0)$ . Então,*



i)  $t_1 \leq t_2$  e  $S_1 \leq S_2$  em  $[t_0, t_1)$

ii) Se  $S_1(s) = S_2(s)$  para algum  $s \in [t_0, t_1)$ , então, em  $[t_0, s]$ , temos  $S_1 = S_2$  e  $R_1 = R_2$ .

*Demonstração.* (i)

Escreva  $U := S_2 - S_1$ , assim  $U(t_0) \geq 0$  e

$$U' = S_2' - S_1' = S_1^2 - S_2^2 + R_1 - R_2. \quad (4.9)$$

Defina

$$\Delta R := R_1 - R_2 \geq 0 \text{ e } X := \frac{1}{2}(S_1 + S_2).$$

Substituindo em (4.9), obtemos

$$U' = X \circ U + U \circ X + \Delta R. \quad (4.10)$$

Sejam  $t' := \min\{t_1, t_2\}$  e  $B : [t_0, t') \rightarrow S(E)$  uma solução invertível<sup>4</sup> da equação homogênea

$$B' = X \circ B. \quad (4.11)$$

Uma solução de (4.10) é

$$U = B \circ V \circ B^*, \quad (4.12)$$

em que  $V$  satisfaz

$$V' = B^{-1} \circ \Delta R \circ (B^{-1})^*. \quad (4.13)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} U' &= B' \circ V \circ B^* + B \circ V' \circ B^* + B \circ V \circ (B^*)' \\ &= (X \circ B) \circ V \circ B^* + B \circ (B^{-1} \circ \Delta R \circ (B^{-1})^*) \circ B^* + B \circ V \circ (B')^* \\ &= X \circ U + \Delta R + B \circ V \circ (X \circ B)^* \\ &= X \circ U + \Delta R + B \circ V \circ B^* \circ X^* \\ &= X \circ U + \Delta R + U \circ X, \end{aligned}$$

em que utilizamos o fato de que  $X$  é auto-adjunto na última igualdade. Como  $\Delta R \geq 0$ , temos<sup>5</sup>

$$\langle V'(w), w \rangle = \langle B^{-1} \circ \Delta R \circ (B^{-1})^*(w), w \rangle = \langle \Delta R \circ (B^{-1})^*(w), (B^{-1})^*(w) \rangle \geq 0, \quad \forall w \in E,$$

<sup>4</sup>Um argumento análogo ao utilizado na prova do Teorema 3.4.2-2) mostra que podemos tomar  $B$  como sendo invertível.

<sup>5</sup>As expressões abaixo valem para todo  $t \in [t_0, t')$ , então omitiremos o parâmetro  $t$  por conveniência. Essa simplificação será usada frequentemente daqui em diante se não houver risco de confusão.

ou seja,  $V' \geq 0$ . Agora, para todo  $w \in E$ , temos que

$$\langle U(t_0)(w), w \rangle = \langle B(t_0) \circ V(t_0) \circ B(t_0)^*(w), w \rangle = \langle V(t_0) \circ B(t_0)^*(w), B(t_0)^*(w) \rangle \geq 0. \quad (4.14)$$

Mas, sendo  $B(t_0)$  invertível,  $B(t_0)^*$  também o é. Em particular,  $B(t_0)^*(E) = E$ . Assim, segue-se de (4.14) que  $V(t_0) \geq 0$ .

*Afirmção:*  $V \geq 0$ .

Com efeito, fixe um  $w \in E$  e considere a aplicação

$$h_w : t \in [t_0, t'] \rightarrow \langle V(t)(w), w \rangle \in \mathbb{R}.$$

Como  $V(t_0) \geq 0$ , temos que  $h_w(t_0) \geq 0$ . Além disso, como  $V' \geq 0$ ,

$$h'_w(t) = \langle V'(t)(w), w \rangle \geq 0,$$

ou seja,  $h_w$  é não-decrescente em  $[t_0, t']$ . Portanto,  $V(t) \geq 0$  para todo  $t \in [t_0, t']$ . Isso prova a afirmação.

Agora, como  $B(t)^*$  é invertível e  $V(t) \geq 0$  em  $[t_0, t']$ , repetindo os cálculos de (4.14) substituindo  $t_0$  por um  $t \in [t_0, t']$  arbitrário, concluímos que  $U \geq 0$  nesse intervalo, isto é,  $S_1 \leq S_2$  em  $[t_0, t']$ .

Falta mostrar que  $t_1 \leq t_2$ . Suponha que não. Seja  $(t_k)_{k \in \mathbb{R}} \subset [t_0, t_2)$  uma sequência convergindo para  $t_2$ . Pela Proposição 4.1.1, existe uma projeção  $P_2$  e uma aplicação suave  $C_2 : [t_0, t_2) \rightarrow S(E)$  continuamente extensível para  $t = t_2$  satisfazendo

$$C_2(t) = S_2(t) - \frac{P}{t - t_2}, \quad \forall t \in [t_0, t_2).$$

Assim, para todo  $v \in E$ ,

$$\langle S_2(t_k)v, v \rangle = \langle C_2(t_k)v, v \rangle + \left\langle \frac{P_2(v)}{t_k - t_2}, v \right\rangle = \langle C_2(t_k)v, v \rangle + \frac{1}{t_k - t_2} |P_2(v)|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Mas, como  $S_1 \leq S_2$ , também temos que

$$\langle S_1(t_k)v, v \rangle \rightarrow -\infty.$$

Por outro lado, como estamos supondo  $t_2 < t_1$ , teríamos continuidade de  $S_1$  em  $t_2$ , isto é,

$$\langle S_1(t_k)v, v \rangle \rightarrow \langle S_1(t_2)v, v \rangle,$$

que é um número finito, uma contradição. Portanto,  $t_1 \leq t_2$ .

(ii)

Suponha  $U(s) = S_1(s) - S_2(s) = 0$  para algum  $s \in [t_0, t_1)$ . Assim, de (4.12), para todo  $w \in E$ ,

temos

$$U(s)(w) = B(s) \circ V(s) \circ B(s)^*(w) = 0. \quad (4.15)$$

Como  $B, B^*$  são invertíveis em  $[t_0, t_1]$ , segue-se de (4.15) que  $V(s) = 0$ . Para cada  $w \in E$ , vimos na prova do item (i) que a aplicação  $h_w$  é não-decrescente com valor inicial  $h_w(t_0) \geq 0$ , ou seja,

$$\langle V(t)(w), w \rangle = 0, \quad \forall w \in E, \forall t \in [t_0, s]. \quad (4.16)$$

Mas,  $V$  é auto-adjunto, pois

$$B \circ V \circ B^* = U = U^* = B \circ V^* \circ B^* \implies V = V^*.$$

Assim, segue-se de (4.16) que  $V(t) = 0$  para todo  $t \in [t_0, s]$ . Consequentemente,  $U = 0$  em  $[t_0, s]$  e, por definição,  $S_1 = S_2$  nesse intervalo. Finalmente, de (4.8), vemos que  $R_1 = R_2$  em  $[t_0, s]$ , concluindo a prova. ■

**Teorema 4.1.4 (Comparação escalar de Riccati).** *Seja  $R : \mathbb{R} \rightarrow S(E)$  uma aplicação suave tal que  $\text{tr } R \geq (n-1)k$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ , onde  $n-1 = \dim E$ . Sejam também  $S : [0, b) \rightarrow S(E)$  solução de*

$$S' + S^2 + R = 0, \quad (4.17)$$

*inextensível em  $b$ , e  $s_k : [0, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$  solução de*

$$\dot{s}_k + s_k^2 + k = 0, \quad (4.18)$$

*inextensível em  $b_k$ . Se*

$$s_k(0) - \text{tr } S(0)/(n-1) \geq 0,$$

*então  $b \leq b_k$  e*

$$\text{tr } S(t) \leq (n-1) \cdot s_k(t) \quad (4.19)$$

*para todo  $t \in [0, b)$ . Mais ainda, se vale igualdade em (4.19) para algum  $t_0 \in (0, b)$ , então a igualdade se mantém para todo  $t < t_0$ . Nesse caso, temos que  $S(t) = s_k(t) \cdot \text{id}_E$  e  $R(t) = k \cdot \text{id}_E$  para todo  $t \in [0, t_0]$ .*

*Demonstração.* Como  $S$  é tensor de Riccati auto-adjunto, sua vorticidade escalar  $\omega$  é nula (ver Equação 3.35), e a equação de Raychaudhuri (3.36) de  $S$  reduz-se a

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{n-1} + \text{tr } R + \sigma^2 = 0, \quad (4.20)$$

em que  $\theta := \text{tr } S$  e o cisalhamento escalar  $\sigma$  foi definido em (3.34). Dividindo essa equação por

$n - 1$ , vemos que  $\theta/(n - 1)$  satisfaz a equação escalar de Riccati

$$\left(\frac{\theta}{n-1}\right)' + \left(\frac{\theta}{n-1}\right)^2 + r = 0,$$

onde

$$r := \frac{\operatorname{tr} R + \sigma^2}{n-1}.$$

Note que

$$r = \frac{\operatorname{tr} R + \sigma^2}{n-1} \geq \frac{\operatorname{tr} R}{n-1} \geq k. \quad (4.21)$$

Assim, como  $s_k$  satisfaz a equação de Riccati (4.18) e  $s_k(0) - \operatorname{tr} S(0)/(n - 1) \geq 0$ , estamos nas hipóteses do Teorema 4.1.3, donde concluímos que  $b \leq b_k$  e  $\theta/(n - 1) \leq s_k$  em  $[0, b)$ . Isso conclui a primeira parte da prova.

Suponha igualdade em (4.19) para  $t_0 \in (0, b)$ . Pelo Teorema 4.1.3-ii), vale igualdade para todo  $t \leq t_0$  e  $r(t) = k$  para todo  $t \in [0, t_0]$ . Assim, temos igualdade em (4.21), donde concluímos que  $\sigma^2 = 0$  em  $[0, t_0]$ . Ora, sendo  $\sigma^2 = 0$ , obtemos de (3.34) que  $\hat{\sigma} = 0$ , e, de (3.33), vemos que  $S$  é puro traço, isto é,  $S = \theta/(n - 1) \cdot \operatorname{id}_E$  em  $[0, t_0]$ . Como estamos supondo igualdade em (4.19), concluímos que  $S(t) = s_k(t) \cdot \operatorname{id}_E$  para todo  $t \in [0, t_0]$ . Substituindo em (4.17), obtemos que

$$\dot{s}_k(t) \cdot \operatorname{id}_E + s_k^2(t) \cdot \operatorname{id}_E + R(t) = 0 \implies R(t) = k \cdot \operatorname{id}_E$$

para todo  $t \in [0, t_0]$ . ■

Usando os resultados da Seção 3.5, segue-se imediatamente desse teorema o seguinte corolário, que traduz o que temos visto em termos geométricos.

**Corolário 4.1.5.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função distância coespacial e  $S$  o operador definido em (3.47) dado por  $S(X) = \nabla_X \nabla f$ . Seja  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$  uma curva integral de  $\nabla f$  inextensível em  $b$  tal que  $\operatorname{Ric}(\alpha', \alpha') \geq (n - 1)k$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ , onde  $n = \dim M$ . Ainda, seja  $s_k : (0, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de*

$$\dot{s}_k + s_k^2 + k = 0,$$

*não extensível em  $b_k$ . Se  $s_k(0) - (\operatorname{tr} S(\alpha(0)))/(n - 1)$  é não-negativo, então  $b \leq b_k$  e*

$$\operatorname{tr} S(\alpha(t)) \leq (n - 1) \cdot s_k(t) \quad (4.22)$$

*para todo  $t \in [0, b)$ . Mais ainda, igualdade em (4.22) para algum  $t_0 \in (0, b)$  implica igualdade para todo  $t \leq t_0$ . Nesse caso,  $S(\alpha(t)) = s_k(t) \cdot \operatorname{id}_{\alpha'(t)^\perp}$  e  $R(\cdot, \alpha'(t))\alpha'(t) = k \cdot \operatorname{id}_{\alpha'(t)^\perp}$  para todo  $t \in [0, t_0]$ .* ■

## 5 Causalidade

De modo geral, a teoria de causalidade trata do problema de descobrir em quais condições dois pontos numa variedade Lorentziana podem ser conectados por uma curva causal.

Um dos principais resultados obtidos a partir deste estudo será o de definir condições suficientes para ligar pontos na variedade Lorentziana através de uma geodésica com comprimento Lorentziano maximal entre todas as outras curvas causais. Esse resultado possui uma versão análoga no caso Riemanniano pelo Teorema de Hopf-Rinow (O'Neill (1983), Teorema 5.21).

### 5.1 Cones Temporais

Numa variedade Lorentziana, a cada ponto, associa-se seu espaço tangente que é um espaço vetorial de Lorentz. As propriedades mais gerais com respeito a esses espaços podem ser vistas no Apêndice A. Porém, para estudar causalidade, é necessário analisar um pouco mais detalhadamente a estrutura de cada espaço tangente.

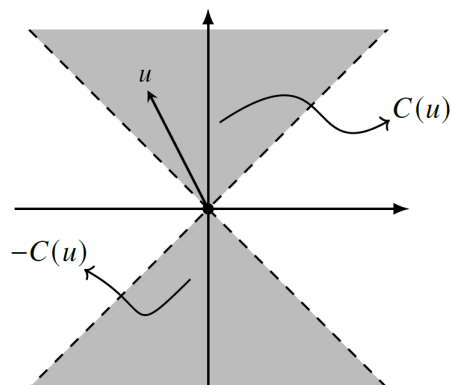
**Definição 5.1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial Lorentziano, e fixe  $u \in V$  vetor temporal. O cone temporal contendo  $u$  é o conjunto*

$$C(u) = \{v \in V \text{ temporal} \mid \langle u, v \rangle < 0\},$$

*e o cone temporal oposto a  $u$  é o conjunto*

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in v \in V \text{ temporal} \mid \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Figura 5.1: Cones temporais



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

Como  $u^\perp$  é espacial em um espaço vetorial Lorentziano e  $V = \mathbb{R}u \oplus u^\perp$ , dado um vetor temporal  $v$ , temos que  $v = au + z$ , em que  $a \in \mathbb{R}$  é não nulo e  $z$  é um vetor espacial tal que

$\langle u, z \rangle = 0$ . Logo  $\langle u, v \rangle = a\langle u, u \rangle$ , donde vemos que  $v$  está exclusivamente em algum cone temporal associado a  $u$ , determinado pelo sinal de  $a$ . Isso mostra que o conjunto dos vetores temporais  $\mathcal{T}$  é a união disjunta dos dois cones temporais.

**Lema 5.1.2.** *Vetores temporais  $v$  e  $w$  de um espaço vetorial Lorentziano pertencem ao mesmo cone temporal se, e somente se,  $\langle v, w \rangle < 0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $v, w \in V$  vetores temporais e  $C(u)$  cone temporal. Note que podemos assumir  $|u| = 1$ , pois  $C(u) = C(u/|u|)$ . Escrevendo  $v = au + x, w = bu + y$  com  $x, y$  espaciais e ortogonais a  $u$ , e computando  $\langle v, v \rangle$  e  $\langle w, w \rangle$ , vemos que  $|a| > |x|$  e  $|b| > |y|$ . Como  $\langle v, w \rangle = -ab + \langle x, y \rangle$ , e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restrito a  $u^\perp$  é um produto interno, segue-se da desigualdade de Cauchy-Schwarz que  $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y| < |ab|$ . Sem perda de generalidade, assumamos  $v \in C(u)$ , logo

$$\langle v, u \rangle = -a < 0 \Rightarrow a > 0.$$

Assim,

$$\text{sgn}\langle v, w \rangle = \text{sgn}(-ab) = -\text{sgn}(b).$$

Como  $b > 0$  significa dizer que  $w \in C(u)$ , concluímos daí que  $\langle v, w \rangle < 0$  se, e somente se,  $w \in C(u)$ , o que conclui a prova. ■

Também vale observar que cones temporais são convexos. Com efeito, dados  $v, w \in C(u)$  e  $\lambda, \mu \geq 0$  com pelo menos um não nulo,  $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda\langle u, v \rangle + \mu\langle u, w \rangle < 0$ , logo  $\lambda v + \mu w \in C(u)$ .

### 5.1.1 Cone Causal

Para tratar causalidade em vetores luminosos, fazemos uma pequena modificação nos cones temporais.

**Definição 5.1.3.** *Fixado  $u \in V$  vetor temporal, o cone causal contendo  $u$  é o conjunto*

$$\overline{C}(u) = \{v \in V \text{ causal} \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

e o cone causal oposto a  $u$  é

$$-\overline{C}(u) = \overline{C}(-u) = \{v \in V \text{ causal} \mid \langle u, v \rangle > 0\}$$

Vetores temporais são em particular causais, logo  $C(u) \subseteq \overline{C}(u)$ . Desse modo, é natural que resultados para cones temporais se transfiram para cones causais com pequenas modificações. Por exemplo, mostra-se com o mesmo argumento que cones causais são convexos e que o conjunto de todos os vetores causais é a união disjunta de um cone causal com seu cone oposto. Temos também o análogo do Lema 5.1.2.

**Lema 5.1.4.** *Vetores causais  $v$  e  $w$  de um espaço vetorial Lorentziano pertencem ao mesmo cone causal se, e somente se,  $\langle v, w \rangle < 0$  ou  $v$  e  $w$  são luminosos com  $v = \alpha w$  para  $\alpha > 0$ .*

*Demonstração.* Se  $v$  e  $w$  são colineares, a equivalência é imediata. Se  $v$  é temporal e  $w$  é luminoso (ou vice-versa), a prova é tal e qual como no Lema 5.1.2. Por fim, se  $v$  e  $w$  são vetores luminosos não colineares, a análise é similar à realizada no caso temporal (neste caso, tem-se  $|a| \geq |x|$  e  $|b| \geq |y|$ ), e o resultado segue facilmente. ■

Com esta caracterização de cone causal, vemos que  $\overline{C}(u) = \overline{C(u)} \setminus \{0\}$ , (lembre que consideramos o vetor nulo como espacial). Além disso, assim como no caso temporal, há exatamente dois cones causais em cada espaço vetorial Lorentziano, a saber, um cone causal qualquer e seu cone oposto.

## 5.2 Orientação Temporal

Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana. A orientabilidade de variedades em geral é similar à orientação temporal que estabeleceremos a seguir, a ideia é fazer uma escolha contínua de cones temporais ao redor de cada ponto de  $M$ . Faremos isso da seguinte forma: seja  $\tau$  uma função que a cada ponto  $p \in M$ , associa-se um cone temporal  $\tau(p)$  em  $T_p M$ . Naturalmente, ao escolher um cone temporal, estamos automaticamente escolhendo também um cone causal que, juntamente com o vetor nulo, resulta no fecho do cone temporal correspondente.

**Definição 5.2.1.** *Dizemos que  $\tau$  é suave se para cada  $p \in M$  existir um campo vetorial suave  $X$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $X_q \in \tau(q)$  para todo  $q \in U$ . Tal função  $\tau$  é chamada de orientação temporal. Se  $M$  admite uma orientação temporal, dizemos que  $M$  é orientável temporalmente. O ato de escolher uma orientação temporal específica em  $M$  é orientar temporalmente  $M$ .*

Exibiremos várias propriedades e resultados relacionados à orientabilidade temporal, bem como as relações de causalidade daí provenientes. Sendo assim, omitiremos algumas dessas provas, visto que são resultados mais gerais no que diz respeito à teoria causal, e suas provas podem ser encontradas detalhadamente em Espinoza (2020), capítulo 3, e O’Neill (1983), capítulo 14.

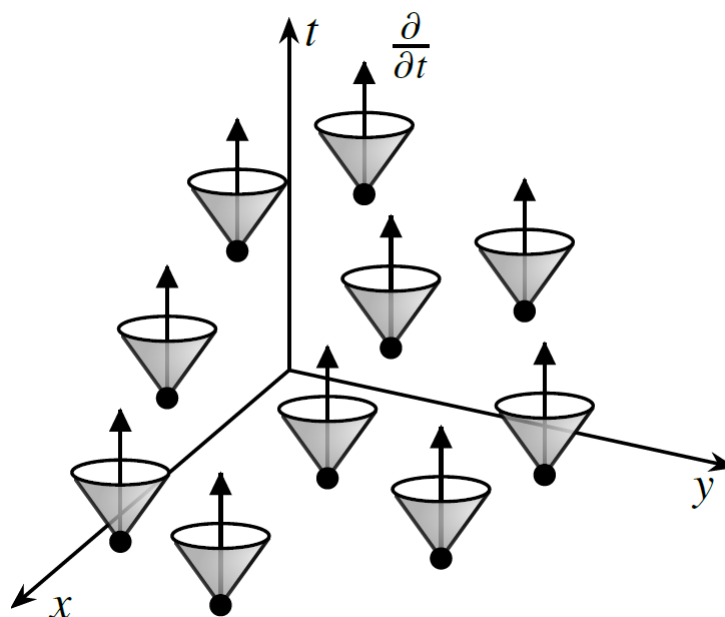
**Proposição 5.2.2.** *Se  $M$  é uma variedade Lorentziana conexa e orientável temporalmente, então existem exatamente duas orientações temporais em  $M$ .*

**Lema 5.2.3.** *Uma variedade Lorentziana  $M$  é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo vetorial suave, temporal e globalmente definido em  $M$ .*

Se existe campo vetorial  $X$  como no Lema 5.2.3, a orientação definida por  $X$  é chamada de *orientação temporal induzida*.

**Exemplo 5.2.4.** No espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ , o campo vetorial globalmente definido  $\partial/\partial t$  é temporal e suave, e portanto induz uma orientação temporal em  $\mathbb{R}_1^n$ , conforme Figura 5.2. Sempre que mencionarmos espaços-tempos de Minkowski, estaremos assumindo essa orientação. ◀

Figura 5.2: Orientação temporal em Minkowski induzida por  $\partial/\partial t$ .



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

Naturalmente, existem variedades Lorentzianas não orientáveis temporalmente. Em Treude (2011), p. 92-93, são fornecidos exemplos, utilizando-se da faixa de Möbius e do cilindro, em que ambas as orientações ocorrem simultaneamente (bem como quando nenhuma delas ocorre), e em que se tem orientação temporal, mas não a orientação usual (e vice-versa).

**Observação 5.2.5.** Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva suave por partes. Para que  $\alpha$  seja temporal ou causal, não só devemos ter  $\alpha'(t)$  temporal ou causal em todo  $I$ , mas também exigimos a condição extra de que, nos pontos de quebra  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , os vetores tangentes não trocam de cone. Mais precisamente, denotando por  $\alpha'(t_i^-)$  e  $\alpha'(t_i^+)$  os vetores tangentes em  $t_i$  de  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  e  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ , respectivamente, no caso temporal temos  $\langle \alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+) \rangle < 0$  conforme Lema 5.1.2, e a condição análoga para o caso causal.

### 5.3 Relações de Causalidade

Seja  $M$  variedade temporalmente orientável, e induza uma orientação a partir de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temporal.



**Definição 5.3.1.** Um vetor causal  $v \in T_p M$  é dito ser futuro-dirigido (resp. passado-dirigido) se  $\langle v, X_p \rangle < 0$  (resp.  $\langle v, X_p \rangle > 0$ ). Similarmente, dizemos que uma curva causal suave por partes<sup>1</sup>  $\alpha : I \rightarrow M$  é futuro-dirigida (resp. passado-dirigida) se  $\alpha'(t)$  é futuro-dirigido (resp. passado-dirigido) em todo  $I$ .

Note que, por continuidade da derivada fora dos pontos de quebra, juntamente com a consistência dos cones nas quebras de acordo com a Observação 5.2.5, se a curva causal  $\alpha$  possui pelo menos um vetor tangente futuro-dirigido (resp. passado-dirigido), então a curva inteira será futuro-dirigida (resp. passado-dirigida).

Utilizaremos uma nomenclatura especial para extensibilidade de curvas neste contexto de causalidade.

**Definição 5.3.2.** Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  curva causal futuro-dirigida, com  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Um ponto limite futuro de  $\alpha$  é um ponto  $p \in M$  tal que toda sequência  $\{t_n\}$  em  $(a, b)$  com  $t_n \rightarrow b$  é tal que  $\alpha(t_n) \rightarrow p$ . A curva  $\alpha$  é dita ser futuro-inextensível se não existe ponto limite futuro. Definimos analogamente ponto limite passado e passado-inextensível em  $a$ . No caso de uma curva  $\beta : (a, b) \rightarrow M$  passado-dirigida, invertamos os papéis das definições em  $a$  e  $b$ . Se há inextensibilidade em ambos os extremos, dizemos que a curva é inextensível.

Por uma questão de simplificação, dada uma curva causal  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ , ao dizermos que  $\alpha$  é futuro ou passado-inextensível, ficará implícito, a menos de menção contrária, que ela é futuro ou passado-dirigida, respectivamente. Note também que como  $M$  é Hausdorff, um ponto limite futuro ou passado é único, se existir.

A existência de orientação temporal é fundamental para estabelecer relações causais entre pontos na variedade Lorentziana. Sendo assim, focaremos no estudo de variedades Lorentzianas conexas que admitem orientação temporal.

**Definição 5.3.3.** Um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana conexa e temporalmente orientada.

Ao contrário do que possa parecer, essa condição não é tão restritiva, pois, para qualquer variedade Lorentziana conexa  $M$ , é possível construir um recobrimento duplo  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  que é uma variedade Lorentziana conexa e temporalmente orientável, logo um espaço-tempo localmente isométrico a  $M$  (O'Neill (1983), Lema 7.17).

Com os pré-requisitos estabelecidos, passamos agora para o estudo da causalidade.

**Definição 5.3.4.** Dados  $p, q \in M$ , definimos as seguintes relações de causalidade entre  $p$  e  $q$ :

- (i) dizemos que  $p$  precede cronologicamente  $q$ , e escrevemos  $p \ll q$ , se existe uma curva temporal suave por partes e futuro-dirigida de  $p$  até  $q$ ;

<sup>1</sup>Aqui e doravante, a menos de menção contrária, toda curva causal será assumida suave por partes.

(ii) dizemos que  $p$  precede causalmente  $q$ , e escrevemos  $p < q$ , se existe uma curva causal suave por partes e futuro dirigida de  $p$  até  $q$ ;

Escrevemos também  $p \leq q$ , se  $p < q$  ou  $p = q$ . Tais relações são chamadas de *relações de causalidade* em  $M$ .

Evidentemente,  $p \ll q$  implica  $p < q$ . Para um subconjunto qualquer  $A \subseteq M$ , o conjunto

$$I^+(A) = \{q \in M \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \ll q\},$$

é chamado *futuro cronológico* de  $A$ . Similarmente, definimos

$$J^+(A) = \{q \in M \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \leq q\},$$

chamado *futuro causal* de  $A$ . Claramente,  $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$ . No caso de um conjunto unitário  $\{p\}$ , denotaremos  $I^+(\{p\})$  por  $I^+(p)$ , e similarmente para  $J^+$ . Neste caso vemos que  $I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p)$ , e o mesmo para  $J^+$ .

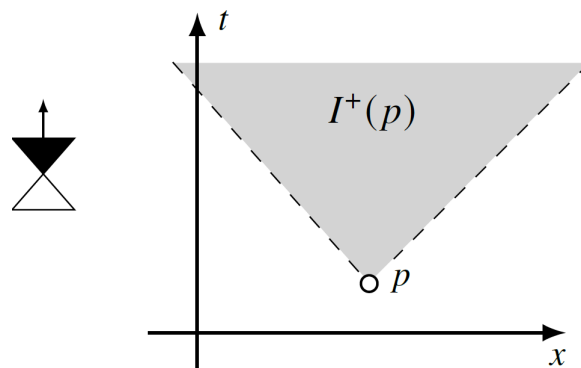
Dualmente, trocando a ordem das relações de causalidade, define-se o *passado cronológico*  $I^-(A)$  e *passado causal*  $J^-(A)$ .

**Exemplo 5.3.5 (Causalidade em Minkowski).** Considere um ponto  $p = (p^1, \dots, p^n)$  em  $\mathbb{R}_1^n$ . Vamos mostrar que o futuro cronológico de  $p$  é o conjunto

$$I^+(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - p, x - p \rangle_1 < 0 \text{ e } x^1 - p^1 > 0\},$$

ilustrado na Figura 5.3.

Figura 5.3: Futuro cronológico do ponto  $p$  em Minkowski.



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

Primeiramente, seja  $x \in \mathbb{R}_1^n$  satisfazendo as condições do lado direito da igualdade acima, e considere o segmento geodésico temporal  $\alpha(t) = t(x - p)$ ,  $t \in [0, 1]$ , indo de  $p$  a  $x$ . Assim,  $\alpha$  é futuro-dirigida, pois  $\langle \alpha'(t), \partial/\partial t \rangle_1 = -(x^1 - p^1) < 0$ , o que estabelece a inclusão “ $\supseteq$ ”. Agora, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  curva temporal e futuro-dirigida com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = x$ . Considere as

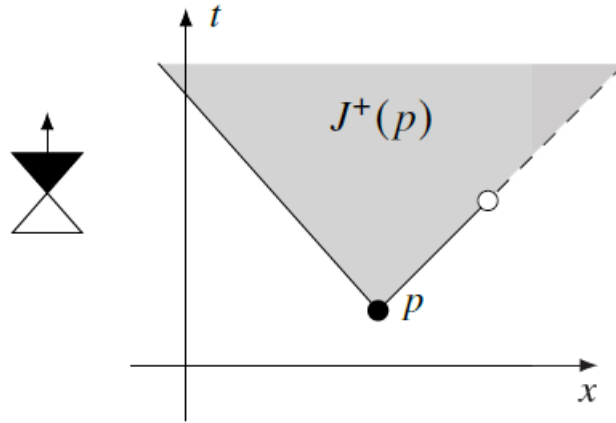
funções  $f(t) = \langle \gamma(t) - p, x - p \rangle_1$  e  $h(t) = \langle \gamma(t) - p, (1, 0, \dots, 0) \rangle_1 = -(\gamma^1(t) - p^1)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Diferenciando, temos  $f'(t) = \langle \gamma'(t), x - p \rangle_1 < 0$  (pois  $\gamma$  é temporal) e  $h'(t) = -(\gamma^1)'(t) < 0$  (pois  $\gamma$  é futuro-dirigida). Sendo  $h$  e  $f$  decrescentes, temos que  $h(1) - h(0) = p^1 - x^1 < 0$ , e  $f(1) - f(0) = \langle x - p, x - p \rangle_1 < 0$ , estabelecendo a outra inclusão, e consequentemente a igualdade desejada.

Analogamente, vemos que o futuro causal do ponto  $p$  em  $\mathbb{R}_1^n$  é

$$J^+(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - p, x - p \rangle_1 \leq 0 \text{ e } x^1 - p^1 \geq 0\} = \overline{I^+(p)},$$

A relação entre  $I^+(p)$  e  $J^+(p)$  pode ser mais complicada em outros espaços-tempos. Por exemplo, se removermos um ponto de  $\mathbb{R}_1^2$ , então existirá um ponto  $p$  de modo que  $J^+(p) \neq \overline{I^+(p)}$  (Figura 5.4). Esse exemplo também mostra que  $J^+(p)$  não é necessariamente fechado. ◀

Figura 5.4: Futuro causal em Minkowski sem um ponto.



Fonte: Adaptada de Espinoza (2020).

As relações de causalidade são transitivas. Tal fato segue concatenando curvas temporais (ou causais) e observando que, em um possível ponto de quebra da concatenação, os vetores tangentes não trocam de cone pois as curvas são futuro-dirigidas. Vale também uma transitividade mais geral, consequência do Teorema 2.6.4.

**Corolário 5.3.6.** *Se  $p \ll q$  e  $q \leq r$ , ou se  $p \leq q$  e  $q \ll r$ , então  $p \ll r$ .*

Uma vez que um aberto  $U$  de um espaço-tempo  $M$  é por si só uma variedade Lorentziana temporalmente orientada (com a restrição da orientação em  $M$ ), podemos definir relações de causalidade intrínsecas em  $U$  exigindo que as curvas como na definição 5.3.4 tenham imagem em  $U$ . Denotamos tais relações por  $\ll_U$ ,  $<_U$  e  $\leq_U$ . Com isto, para  $A \subseteq U$  definimos o futuro cronológico de  $A$  intrínseco a  $U$  por

$$I^+(A, U) = \{q \in U \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \ll_U q\},$$

e o análogo para  $J^+(A, U)$  e passados.

No caso do aberto em questão ser convexo, destacamos as seguintes propriedades.

**Lema 5.3.7.** *Se  $C$  é um aberto convexo de  $M$ , temos*

- (i) *Para  $p \neq q \in C$ ,  $q \in I^+(p, C)$  se, e somente se,  $\vec{pq}$  é temporal e futuro dirigido (o análogo vale para  $J^+$ ).*
- (ii)  *$I^+(p, C)$  é aberto em  $C$  (logo em  $M$ ) para todo  $p \in C$ .*
- (iii)  *$J^+(p, C) = \overline{I^+(p, C)}^{\text{cl}}$  (o fecho em  $C$ ).*
- (iv) *A relação  $\leq_C$  é fechada em  $C$ , isto é, dados  $p, q \in C$  e  $\{p_k\}_{k=1}^\infty, \{q_k\}_{k=1}^\infty$  seqüências em  $C$  com  $p_k \rightarrow p$  e  $q_k \rightarrow q$ , então  $q_k \in J^+(p_k, C)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  implica  $q \in J^+(p, C)$ .*
- (v) *Uma curva causal  $\alpha$  com imagem em um compacto  $K$  contido em  $C$  é extensível.*

**Observação 5.3.8.** Como estamos assumindo  $M$  conexa, pela Proposição 5.2.2 existem apenas duas orientações temporais em  $M$ . Sendo assim, trocando a orientação fixada em  $M$ , as noções de futuro se tornam as de passado e vice-versa. Logo todos os resultados acima e os próximos a serem discutidos continuam válidos para os conjuntos relacionados ao passado. Com isso em mente, nossos resultados serão enunciados e demonstrados apenas para uma direção temporal em geral, com o resultado temporalmente dual implícito na discussão.

**Proposição 5.3.9.** *Para  $p, q \in M$  com  $p \ll q$ , existem vizinhanças abertas  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tais que para todo  $p' \in U$  e  $q' \in V$ , temos  $p' \ll q'$ .*

Essa proposição nos mostra que a relação de cronologia “ $\ll$ ” é aberta em qualquer espaço-tempo. Em particular,  $I^+(p)$  é aberto, e sendo  $I^+(A)$  união de tais abertos, também é aberto. Além disso, se  $U$  é aberto,  $I^+(p, U)$  também o é. Utilizando esse resultado, temos as seguintes propriedades para os futuros  $I^+$  e  $J^+$ .

**Proposição 5.3.10.** *Para um subconjunto qualquer  $A \subseteq M$ , temos*

- (i)  $I^+(A) = I^+(\overline{A})$ .
- (ii)  $\text{int } J^+(A) = I^+(A)$ .
- (iii)  $\overline{J^+(A)} = \overline{I^+(A)}$ .
- (iv)  $\partial J^+(A) = \partial I^+(A)$ .

Assim como definimos relações de causalidade para pontos em  $M$ , podemos caracterizar um subconjunto  $A \subset M$  de acordo as relações causais entre seus pontos.

**Definição 5.3.11.** *Seja  $A \subset M$  um subconjunto qualquer.*

- (i)  $A$  é dito ser cronológico se  $p \not\prec p$  para todo  $p \in A$ .
- (ii)  $A$  é dito ser causal se  $p \not\prec p$  para todo  $p \in A$ .
- (iii)  $A$  é dito ser fortemente causal se, para cada  $p \in A$ , e para cada vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ , existe uma outra vizinhança  $V \subset U$  de  $p$  tal que toda curva causal que começa e termina em  $V$  permanece em  $U$ .
- (iv)  $A$  é dito ser globalmente hiperbólico se é fortemente causal e, para cada  $p, q \in A$ , o diamante causal  $J(p, q) := J^+(p) \cap J^-(q) \subset M$  é compacto e está contido em  $A$ .

Veja que essas condições estão listadas em ordem de força crescente. Para ver que causalidade forte implica causalidade por exemplo, note que causalidade forte implica que cada ponto possui uma vizinhança arbitrariamente pequena tal que qualquer causal que entra e sai dessa vizinhança jamais retorna. Assim, nenhuma curva causal pode retornar para o seu ponto inicial em particular, donde segue causalidade.

**Definição 5.3.12.** Um subconjunto  $A \subset M$  é dito ser acronal se não existe curva temporal ligando pontos de  $A$ , isto é, se  $p \not\prec q$  para todo  $p, q \in A$ . Se não existir se quer curva causal entre pontos de  $A$ , dizemos então que  $A$  é acausal, isto é,  $p \not\prec q$  para todo  $p, q \in A$ .

Para o desenvolvimento do restante da teoria, não necessitamos de propriedades adicionais a respeito de conjuntos acronais e acausais. Portanto, ilustramos esses conceitos com alguns exemplos. Detalhes sobre essa teoria pode ser encontrada em O'Neill (1983), Capítulo 14.

**Exemplo 5.3.13.** Considere o espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , com coordenadas usuais  $(t, x_1, \dots, x_n)$ .

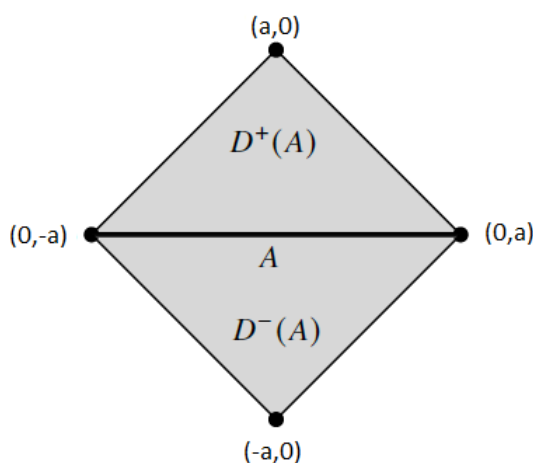
- (i) Cada plano  $\Sigma_t = \{t\} \times \mathbb{R}^n$  é acausal.
- (ii) Cada esfera  $\{t\} \times \mathbb{S}^n \subset \Sigma_t$  é acausal.
- (iii) O cone de luz futuro  $J^+(p) \setminus I^+(p)$  de cada ponto  $p \in \mathbb{R}_1^{n+1}$  é acronal, mas não acausal.
- (iv) Para cada  $m \in \mathbb{R}$ , o hiperboloide futuro  $\{(t, x_1, \dots, x_n) \mid t^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = m^2, t > 0\}$  é acausal. ◀

**Definição 5.3.14.** Seja  $A \subseteq M$  um subconjunto acronal, definimos o domínio de dependência futuro de  $A$ , as vezes chamado também de desenvolvimento de Cauchy futuro de  $A$ , como o conjunto

$$D^+(A) = \left\{ p \in M \mid \begin{array}{l} \text{toda curva causal e passado-inextensível} \\ \gamma : [a, b) \rightarrow M \text{ com } \gamma(a) = p \text{ intersecta } A \end{array} \right\}.$$

O domínio de dependência passado ou desenvolvimento de Cauchy passado de  $A$ , denotado por  $D^-(A)$ , se define de maneira temporalmente dual (claramente  $A \subseteq D^\pm(A)$ ). Por fim, o domínio de dependência ou desenvolvimento de Cauchy de  $A$  é a união  $D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$ .

Figura 5.5: Desenvolvimento de Cauchy de  $\{0\} \times [-a, a] \subset \mathbb{R}_1^2$



Fonte: Produção do autor.

**Exemplo 5.3.15.** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , considere o segmento de reta  $A = \{0\} \times [-a, a]$ ,  $a > 0$ . Temos que  $D^+(A)$  é o conjunto  $J^-((a, 0))$  limitado pelo segmento de reta  $A$  (Figura 5.5). Similarmente,  $D^-(A)$  é  $J^+((-a, 0))$  limitado por  $A$ . Assim,  $D(A)$  é o diamante causal  $J^-((a, 0)) \cap J^+((-a, 0))$ . ◀

Por fim, introduzimos um objeto que utilizaremos no final do próximo capítulo quando estivermos em busca de uma variedade modelo para os teoremas de comparação.

**Definição 5.3.16.** Um conjunto  $S \subset M$  é uma hipersuperfície de Cauchy se toda curva temporal e inextensível intersecta  $S$  exatamente uma única vez.

Uma propriedade importante das hipersuperfícies de Cauchy  $S \subset M$  consiste na seguinte decomposição:

$$M = I^-(S) \cup S \cup I^+(S).$$

Essa decomposição é imediata da definição, visto que para um ponto  $p \notin S$ , uma curva inextensível passando por  $p$  intersecta  $S$  uma única vez, seja para o passado ou para o futuro de  $p$ . Ainda, se a hipersuperfície de Cauchy é acronal, então essa decomposição é disjunta.

De modo geral, hipersuperfícies de Cauchy gozam de boas propriedades topológicas e de causalidade. Destacamos os seguintes aspectos: hipersuperfícies de Cauchy existem se, e somente se,  $M$  é globalmente hiperbólico. Além disso, todo espaço-tempo globalmente hiperbólico admite uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  com gradiente temporal e de modo que cada conjunto de nível seja uma hipersuperfície de Cauchy (Bernal e Sánchez (2005)).

## 5.4 Distância Lorentziana

No Teorema 1.5.8, vimos que geodésicas temporais maximizam o comprimento de arco dentro de vizinhanças normais. Nesta seção, nosso objetivo agora é analisar propriedades maximizantes globais de geodésicas temporais e também causais.

**Definição 5.4.1 (Distância Lorentziana).** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. A distância Lorentziana  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty]$  é dada por*

$$d(p, q) := \sup \{L_g(\gamma) \mid \gamma \text{ é curva causal suave por partes futuro dirigida de } p \text{ a } q\} \quad (5.1)$$

se  $p \leq q$  e 0 caso contrário.

Se o supremo é atingido por alguma curva na definição acima, então dizemos que é uma curva maximizante entre  $p$  e  $q$ . A próxima proposição traz as principais propriedades da distância Lorentziana, em que falha a continuidade em geral.

**Proposição 5.4.2.** *Seja  $M$  um espaço-tempo e  $p, q, r \in M$ .*

- i)  $d(p, q) > 0$  se, e somente se,  $p \ll q$ .
- ii)  $d(p, p) = \infty$  se, e somente se, existe uma curva temporal fechada passando por  $p$ . Caso contrário,  $d(p, p) = 0$ .
- iii) Se  $p \leq q \leq r$ , então vale a desigualdade triangular reversa:

$$d(p, q) + d(q, r) \leq d(p, r). \quad (5.2)$$

- iv) Se  $0 < d(p, q) < \infty$ , então  $d(q, p) = 0$ .

- v) A função distância Lorentziana é semicontínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{(p,q) \rightarrow (x,y)} d(p, q) \geq d(x, y)$$

para todo  $x, y \in M$ .

*Demonstração.* i) Esse resultado é consequência do Teorema de deformação 2.6.5 juntamente com o fato de que uma curva causal com comprimento de arco maior do que zero deve ser temporal em algum momento.

ii) Se existir uma curva temporal fechada em  $p$ , então  $d(p, p) = \infty$  é obtido percorrendo a curva repetidamente. Se não existir curva temporal fechada em  $p$ , então  $d(p, p) = 0$  segue de i).

iii) Vamos separar a prova deste item em diferentes casos. Primeiramente, se  $d(p, q) = \infty$  ou  $d(q, z) = \infty$ , então também temos  $d(p, z) = \infty$ , e (5.2) é satisfeita. Então, suponha que

$d(p, q), d(q, z) < \infty$ . Se  $p = q$  ou  $q = z$ , então por *ii*) temos que  $d(p, q) = 0$  ou  $d(q, z) = 0$  respectivamente, e a condição é trivialmente satisfeita. Por fim, suponha que os três pontos sejam distintos, e seja  $\varepsilon > 0$ . Então, existem curvas causais futuro-dirigidas  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$  e de  $q$  a  $z$ , respectivamente, com  $L(\gamma_1) \geq d(p, q) - \varepsilon/2$  e  $L(\gamma_2) \geq d(q, z) - \varepsilon/2$ . Como a concatenação  $\gamma_1 \star \gamma_2$  é uma curva causal futuro-dirigida de  $p$  a  $z$ , obtemos que

$$d(p, z) \geq L(\gamma_1 \star \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \geq d(p, q) + d(q, z) - \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrário, isso conclui o item.

*iv*) Por *i*),  $d(p, q) > 0$  implica que  $p \ll q$ . Suponha que  $d(q, p) > 0$ , então também temos  $q \ll p$ , e *ii*) implica que  $d(p, p) = \infty$ . Assim, a desigualdade triangular reversa aplicada a  $p \ll p \ll q$  gera uma contradição com o fato de que  $d(p, q) < \infty$ .

*v*) Sejam  $p_0, q_0 \in M$  e  $\varepsilon > 0$ . Temos que encontrar vizinhanças  $U, V \subset M$  de  $p_0$  e  $q_0$ , respectivamente, de modo que, para todo  $p \in U$  e  $q \in V$ , temos  $d(p, q) \geq d(p_0, q_0) - \varepsilon$ . Se  $d(p_0, q_0) = 0$ , basta tomar  $U = V = M$ . Então, suponha que  $d(p_0, q_0) > 0$ . Então, existe uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  de  $p_0$  a  $q_0$  com

$$L(\gamma) \geq \begin{cases} d(p_0, q_0) - \varepsilon/2, & \text{se } d(p_0, q_0) < \infty \\ k, & \text{se } d(p_0, q_0) = \infty, \end{cases}$$

onde o  $k \in \mathbb{R}$  pode ser escolhido arbitrariamente grande. Tome  $t_1, t_2 \in (0, 1)$  tais que

$$0 < L(\gamma|_{[0, t_1]}) < \varepsilon/4, \quad L(\gamma|_{[t_2, 1]}) < \varepsilon/4,$$

e ponha  $p_1 = \gamma(t_1)$  e  $p_2 = \gamma(t_2)$ . Como o comprimento de ambas as curvas acima é maior do que zero, elas não podem ser tipo-luz. Então, pelo Teorema 2.6.5 elas podem ser deformadas em curvas temporais, logo  $p_0 \in I^-(p_1), q_0 \in I^+(p_2)$ . Assim,  $U := I^-(p_1)$  e  $V := I^+(p_2)$  são vizinhanças abertas de  $p_0$  e  $q_0$ , respectivamente. Para todo  $p \in U$  e  $q \in V$ , temos que  $p \leq p_1 \leq p_2 \leq q$ , e pela desigualdade triangular reversa duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} d(p, q) &\geq d(p, p_1) + d(p_1, p_2) + d(p_2, q) \\ &\geq L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = L(\gamma) - L(\gamma|_{[0, t_1]}) + L(\gamma|_{[t_2, 1]}) \\ &> \begin{cases} d(p, q) - \varepsilon/2 - \varepsilon/4 - \varepsilon/4, & \text{se } d(p_0, q_0) < \infty \\ k - \varepsilon/4 - \varepsilon/4, & \text{se } d(p_0, q_0) = \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} d(p, q) - \varepsilon, & \text{se } d(p_0, q_0) < \infty \\ k - \varepsilon/2, & \text{se } d(p_0, q_0) = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

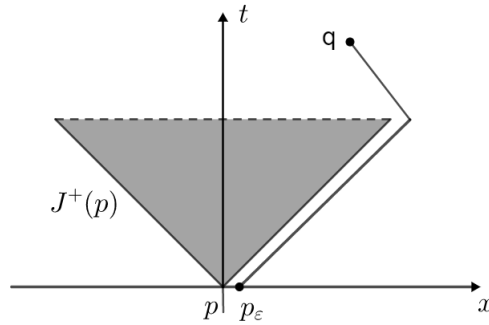
Como  $k$  pode ser tomado arbitrariamente grande no segundo caso, isso conclui a prova.  $\blacksquare$

Em geral, a distância Lorentziana é apenas semicontínua inferiormente. Por exemplo,



considere  $M = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{1\})$  com a métrica induzida de Minkowski. Se  $p = (0, 0)$  e  $q = (2, 1)$ , então  $d(p, q) = 0$  conforme a Figura 5.6. Por outro lado, para  $p_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ , temos  $d(p_\varepsilon, q) \rightarrow 1$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , assim não temos semicontinuidade superior. Veremos adiante que a distância Lorentziana é contínua para espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

Figura 5.6: Espaço-tempo cuja distância Lorentziana não é semicontínua superiormente.



Fonte: Adaptada de Treude (2011).

**Observação 5.4.3 (Distância Lorentziana a um conjunto convexo).** Seja  $U \subset M$  um subconjunto convexo, e  $V \subset TM$  tal que  $\pi \times \exp : \mathcal{D} \rightarrow M \times M$  seja um difeomorfismo entre  $V$  e  $U \times U$ , onde  $\pi$  denota a projeção canônica de  $TM|_{\mathcal{D}}$  em  $M$ . Pelo Teorema 1.5.8, para cada  $p \ll_U q$ , a única geodésica radial de  $p$  a  $q$  em  $U$  é a maior curva entre todas as curvas causais de  $p$  a  $q$  em  $U$ . Logo,

$$d_U(p, q) = |(\pi \times \exp)|_U^{-1}(p, q)|,$$

onde  $d_U : U \times U \rightarrow [0, \infty]$  é a distância Lorentziana de  $(U, g|_U)$ . Isso mostra que  $d_U$  é contínua e finito-valorada. Além disso, se  $V \subset M$  é outro convexo com  $V \subset U$ , então  $d_V = d_U|_{V \times V}$ . Em particular, se  $\bar{U}$  é compacto e está contido num convexo maior, então  $d_U$  é limitado superiormente por continuidade.

**Definição 5.4.4 (Distância Lorentziana a um subconjunto).** Seja  $M$  um espaço-tempo. Para um subconjunto  $A \subset M$ , definimos a distância Lorentziana futura  $d_A^+ : M \rightarrow [0, \infty]$  por

$$d_A^+(q) := \begin{cases} \sup_{p \in A} d(p, q), & \text{se } q \in J^+(A), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente, definimos a distância Lorentziana passada  $d_A^- : M \rightarrow [0, \infty]$  por

$$d_A^-(q) := \begin{cases} \sup_{p \in A} d(q, p), & \text{se } q \in J^-(A), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  entre  $A$  e  $q$  é dita ser *maximizante entre  $A$  e  $q$*  se  $L(\gamma) = d_A^\pm(q)$ , caso  $q$  esteja no futuro ou no passado de  $A$ .

No que se segue, trabalharemos apenas com a distância Lorentziana futura explicitamente, mas afirmações análogas valem para a distância Lorentziana passada. Isso pode ser realizado simplesmente invertendo a orientação temporal de  $M$ , visto que essa operação troca as distâncias Lorentzianas futura e passada.

**Proposição 5.4.5.** *Seja  $M$  um espaço-tempo e  $A \subset M$  um subconjunto qualquer.*

i) *Temos que  $d_A^+(q) > 0$  se, e somente se,  $q \in I^+(A)$ .*

ii) *Para  $q_1, q_2 \in J^+(A)$  com  $q_1 \leq q_2$ , vale a desigualdade triangular reversa generalizada:*

$$d_A^+(q_1) + d(q_1, q_2) \leq d_A^+(q_2).$$

iii) *A distância Lorentziana futura  $d_A^+$  é semicontínua inferiormente, isto é, para qualquer  $q \in M$ , temos que*

$$\liminf_{p \rightarrow q} d_A^+(p) \geq d_A^+(q).$$

*Demonstração.* A primeira parte também decorre do Teorema de deformação 2.6.5. Para a segunda parte, note que, para cada  $p \in A \cap J^-(q_1)$ , temos  $p \leq q_1 \leq q_2$ . Assim, pela desigualdade triangular reversa 5.2, temos

$$d_A^+(q_2) \geq d(p, q_2) \geq d(p, q_1) + d(q_1, q_2).$$

Tomando o supremo sobre todos os  $p \in A \cap J^-(q_1)$  no lado direito da inequação acima conclui o item (ii). semicontinuidade superior de  $d_A^+$  pode ser provada de forma similar a de  $d$ . ■

Se  $A \subset M$  é acausal, então  $I^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$  e  $J^+(A) \cap J^-(A) = A$ . Assim, podemos fazer a seguinte definição, que será importante no próximo capítulo.

**Definição 5.4.6 (Distância Lorentziana com sinal).** *Seja  $M$  um espaço-tempo e  $A \subset M$  um subconjunto acausal arbitrário. A distância Lorentziana com sinal a  $A$ ,  $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por*

$$d_A(q) = \begin{cases} d_A^+(q), & \text{se } q \in I^+(A), \\ -d_A^-(q), & \text{se } q \in I^-(A), \\ 0, & \text{se } q \notin I^-(A) \cup I^+(A). \end{cases}$$

Novamente, uma curva de  $A$  a  $q \in J^\pm(A)$  é dita ser *maximizante entre  $A$  e  $q$*  se seu comprimento é igual a  $|d_A(q)|$ .

## 5.5 Mais sobre curvas causais

Nosso objetivo agora é provar existência de geodésicas maximizantes em espaços-tempos globalmente hiperbólicos, isto é, queremos mostrar que o supremo na Equação 5.1 é atingido por

alguma curva. Para isso, usaremos o chamado *método direto do cálculo variacional* do funcional comprimento de arco Lorentziano. Precisaremos de duas condições para que possamos provar o resultado desejado:

- (1) O funcional comprimento de arco Lorentziano deve ser semicontínuo superiormente com respeito a uma certa noção de convergência em curvas causais.
- (2) É necessário um resultado de compacidade para uma topologia em um conjunto adequado de curvas causais, que também dê a mesma noção de convergência do item anterior.

Essas duas condições se combinam da seguinte maneira: suponha que já tenhamos introduzido uma noção de convergência e seja uma sequência de curvas  $\gamma_n$  entre pontos  $p, q \in M$  satisfazendo  $L(\gamma_n) \rightarrow d(p, q)$ . Então, por (2), obtemos uma subsequência convergente, e por (1) concluímos que esse limite é maximizante entre  $p$  e  $q$ .

**Fixando notação.** Até o final deste trabalho, a menos de menção contrária,  $h$  sempre denotará uma métrica Riemanniana completa em  $M$ , o que é sempre possível conforme Nomizu e Ozeki (1961). As quantidades referentes a essa métrica serão indexadas por um  $h$ , por exemplo,  $|v|_h$  ou  $L_h(\gamma)$ . Porém, quando se tratando de geodésicas, estaremos sempre nos referindo com respeito à métrica Lorentziana subjacente  $g$ .

Para o estudo de convergência que vamos necessitar aqui, o conjunto das curvas causais suaves por partes não é grande o suficiente, tendo em vista que o limite de uma sequência de curvas causais suaves por partes não precisa ser uma curva causal suave por partes. Sendo assim, introduzimos uma nova classe de curvas.

**Definição 5.5.1.** *Uma curva contínua  $\gamma : I \rightarrow M$  é dita ser causal futuro-dirigida se, para cada  $t_0 \in I$ , existir um aberto convexo  $U \ni \gamma(t_0)$  e um número  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma(I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subset U$ , e  $\gamma(s) <_U \gamma(t)$  para quaisquer  $s, t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  com  $s < t$ . Analogamente, define-se curva causal passado-dirigida.*

Daqui em diante, uma *curva causal* sempre denotará uma curva causal contínua, futuro ou passado-dirigida. Explicitaremos propriedades adicionais de regularidade para uma curva quando for o caso, tais como suavidade ou suavidade por partes. Uma propriedade interessante das curvas causais é a seguinte: se dois pontos podem ser conectados por uma curva causal contínua, então também podem ser ligados por uma curva causal suave por partes. De fato, basta cobrir a imagem (compacta) de  $\gamma$  por finitos conjuntos convexos, e tomar uma sequência finita de segmentos geodésicos futuro-dirigidos. Sendo assim, a relação causal  $\leq$  não é alterada se considerarmos apenas uma curva causal contínua no lugar de uma curva causal suave por partes.

Antes de definir a noção de convergência entre curvas causais, introduziremos a seguinte notação. Dadas duas curvas causais  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ , pomos

$$d_\infty^h(\gamma_1, \gamma_2) := \sup\{d_h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid t \in I_1 \cap I_2\}, \quad (5.3)$$

onde  $d_h$  é a distância Riemanniana (ver Definição 1.5.9).

Na definição a seguir, dada uma sequência de intervalos  $I_n \subset \mathbb{R}$ , escrevemos  $I_n \rightarrow I$  para dizer que os pontos do bordo de  $I_n$  convergem para os pontos do bordo do intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definição 5.5.2.** *Seja  $\gamma_n : I_n \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma sequência de curvas.*

- i) *Dizemos que as curvas  $\gamma_n$  convergem  $h$ -uniformemente para uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  se  $I_n \rightarrow I$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty^h(\gamma_n, \gamma) = 0$ .*
- ii) *Dizemos que as curvas  $\gamma_n$  convergem  $h$ -compactamente para uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  se, para cada intervalo compacto  $J \subset I$ , existem intervalos  $J_n \subset I_n$  tais que as curvas  $\gamma_n|_{J_n}$  convergem  $h$ -uniformemente para  $\gamma|_J$ .*

Se uma sequência  $\gamma_n : I_n \rightarrow M$  converge  $h$ -uniformemente para uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , então para cada intervalo próprio  $J \subsetneq I$ , temos que  $J \subset I_n$  para  $n$  suficientemente grande. Para esses  $n$ , podemos considerar as restrições  $\gamma_n|_J$ , que convergem  $h$ -uniformemente para  $\gamma|_J$ . Isso mostra que convergência  $h$ -uniforme é bastante similar à convergência uniforme.

A primeira propriedade que mostraremos nos diz que essa convergência preserva a classe de curvas causais se estiverem parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Essa condição não é uma restrição muito significativa tendo em vista que toda curva causal admite tal parametrização (cf. Treude (2011), Proposição B.1.3).

**Proposição 5.5.3.** *Seja  $\gamma_n : I_n \rightarrow M$  uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Suponha que essa sequência converge  $h$ -uniformemente para uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ . Então,*

- i)  *$\gamma$  é uma curva causal futuro-dirigida.*
- ii) *Se  $t_n \in I_n$  e  $t_n \rightarrow t \in I$ , então  $\gamma_n(t_n) \rightarrow \gamma(t)$ .*

*O mesmo é válido para convergência  $h$ -compacta.*

Para uma prova, ver Treude (2011), Proposição 3.2.8. Nosso próximo objetivo agora é mostrar que limites de curvas causais existem em diversas situações.

**Teorema 5.5.4.** *Seja  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Suponha que essa sequência possua um ponto de acumulação  $p \in M$ . Então,  $\gamma_n$  possui uma subsequência que converge  $h$ -compactamente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  com  $p \in \text{Im}(\gamma)$ .*

Uma prova desse resultado pode ser encontrada em Treude (2011), Teorema 3.2.10. O resultado acima só é válido para curvas definidas em todo o  $\mathbb{R}$ , e utilizaremos esse resultado para provar a existência de limite de segmentos de curvas causais em espaços globalmente hiperbólicos.

**Teorema 5.5.5.** *Sejam  $(M, g)$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico e  $p_n \rightarrow p, q_n \rightarrow q$  seqüências convergentes. Suponha que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenhamos uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $p_n$  a  $q_n$  parametrizada por  $h$ -comprimento de arco. Então, ou  $p = q$  e as curvas  $\gamma_n$  colapsam em  $p$  ou  $\gamma_n$  admite uma subsequência que converge  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$ . O resultado é análogo para curvas causais passado-dirigidas.*

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tome duas curvas causais futuro-dirigidas  $\alpha_n : (-\infty, 0] \rightarrow M$  e  $\beta_n : [b_n, \infty) \rightarrow M$  com  $\alpha_n(0) = p_n$  e  $\beta_n(b_n) = q_n$ . ambas parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Isso é possível, basta por exemplo tomar a geodésica maximal passado-dirigida partindo de  $p_n$ , e a geodésica maximal futuro-dirigida partindo de  $q_n$ , e depois reparametrizá-las por  $h$ -comprimento de arco. Assim, a curva  $\tilde{\gamma}_n : \mathbb{R} \rightarrow M$  obtida concatenando as curvas  $\alpha_n, \gamma_n$  e  $\beta_n$  é causal futuro-dirigida parametrizada por  $h$ -comprimento de arco. Além disso, como  $\tilde{\gamma}_n(0) = \gamma_n(0) = p_n \rightarrow p$ , o ponto  $p$  é um ponto de acumulação da seqüência  $\tilde{\gamma}_n$ , então podemos aplicar o Teorema 5.5.4 e supor que  $\tilde{\gamma}_n$  converge  $h$ -compactamente para uma curva causal futuro-dirigida  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$ . Extrairemos nossa curva desejada  $\gamma$  de  $\tilde{\gamma}$ .

Tome  $p', q' \in M$  com  $p \in I^+(p')$  e  $q \in I^-(q')$ . Assim, o diamante causal  $J(p', q') \subset M$  é uma vizinhança de  $p$  e de  $q$ . Então, a menos de passagem pra subsequência, podemos assumir que esse diamante contém todos os  $p_n$  e  $q_n$ , conseqüentemente todas as  $\gamma_n$ . Por causalidade forte, para cada ponto de  $J(p', q')$ , existe uma vizinhança convexa arbitrariamente pequena de modo que toda curva causal que entre e saia dessa vizinhança jamais retorne. Fixe  $C > 0$ , podemos escolher essa vizinhança convexa pequena o suficiente de modo que o  $h$ -comprimento de arco de qualquer curva causal aí contida seja limitado superiormente por  $C$ . Mais ainda, como  $M$  é globalmente hiperbólico,  $J(p', q') \subset M$  é compacto, então podemos cobri-lo por finitos subconjuntos convexos  $U_1, \dots, U_k \subset M$  satisfazendo as duas condições anteriores. Isso implica que cada curva causal contida em  $J(p', q')$  possui  $h$ -comprimento de arco menor ou igual do que  $kC$ . Em particular,  $b_n = L_h(\gamma_n) \in [0, kC]$  para todo  $n$ . Logo, podemos assumir que a seqüência  $b_n$  converge para algum  $b \in [0, kC]$ . Se  $b = 0$ , então as curvas  $\gamma_n$  colapsam em  $p = q$ . Se  $b > 0$ , então as  $\gamma_n$  convergem  $h$ -uniformemente para a restrição de  $\tilde{\gamma}$  a  $[0, b]$ , sendo essa restrição a curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$  que buscávamos. ■

Como consequência desse resultado, concluímos que a relação causal num espaço-tempo globalmente hiperbólico é fechada.

**Corolário 5.5.6.** *Seja  $M$  globalmente hiperbólico. Então, a relação  $\leq$  é fechada, isto é, se  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$  com  $p_n \leq q_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , então  $p \leq q$ . Como consequência, para todo  $p \in M$ , os passado e futuro causais  $J^\pm(p) \subset M$  são fechados e  $J^\pm(p) = I^\pm(p)^{cl}$ .*

*Demonstração.* Que a relação  $\leq$  é fechada, segue-se diretamente do Teorema anterior. Também é imediato que os subconjuntos  $J^\pm(p) \subset M$  são fechados para todo  $p \in M$ . A identidade  $J^\pm(p) = I^\pm(p)^{cl}$  segue da Proposição 5.3.10).

Se  $A \subset M$  é um compacto e  $q_n \in J^\pm(A)$  com  $q_n \rightarrow q$ , então existe uma sequência  $p_n \in A$  com  $p_n \leq q_n$  (ou  $\geq$ ). Por compacidade, podemos assumir que  $p_n \rightarrow p$ . Pelo parágrafo anterior, concluímos que  $p \leq q$  (ou  $\geq$ ), logo  $q \in J^\pm(A)$ . A identidade  $J^\pm(A) = I^\pm(A)^{\text{cl}}$  também segue da Proposição 5.3.10. ■

Tendo estabelecido as condições de pré-compacidade, nosso objetivo agora é lidar com a semicontinuidade superior do comprimento de arco Lorentziano com respeito à convergência  $h$ -uniforme. Tendo em vista que ampliamos nossa classe de curvas ao incluir curvas causais, precisamos ampliar a nossa noção de comprimento de arco.

**Definição 5.5.7.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva causal futuro-dirigida. Definimos o comprimento de arco Lorentziano de  $\gamma$  como*

$$L(\gamma) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d_{U_i}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < \dots < t_k = b : \exists U_1, \dots, U_k \subset M \right. \\ \left. \text{convexos} : \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

É natural questionar se, para uma curva causal suave por partes, o comprimento dado pela definição coincide com a usual dada pela integral. Felizmente, temos igualdade nesse caso, e uma prova detalhada pode ser encontrada em Treude (2011), p. 155-158.

Finalmente, mostraremos a semicontinuidade superior do comprimento de arco Lorentziano com respeito à convergência  $h$ -uniforme.

**Proposição 5.5.8.** *Seja  $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow M$  uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Se as curvas  $\gamma_n$  convergem  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , então*

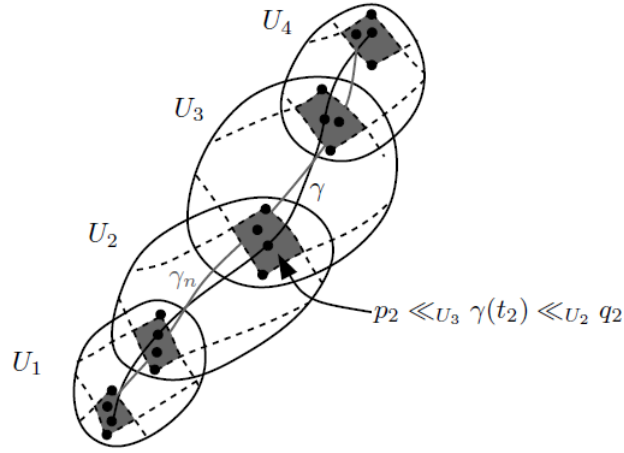
$$L(\gamma) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n). \quad (5.4)$$

*Demonstração.* Primeiramente, suponha que todas as curvas estejam parametrizadas no mesmo domínio  $[a, b]$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos mostrar que  $L(\gamma_n) \leq L(\gamma) + \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande. Pela Definição 5.5.7, podemos tomar uma partição  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  e conjuntos convexos  $U_1, \dots, U_k \subset M$  tais que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , e de modo que o polígono geodésico  $\alpha$  - que conecta  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t_1)$  em  $U_1$ , depois  $\gamma(t_1)$  a  $\gamma(t_2)$  em  $U_2$  e assim por diante - satisfaz  $L(\alpha) \leq L(\gamma) + \varepsilon/2$ . Para cada  $i = 1, \dots, k - 1$ , tome pontos  $p_i, q_i \in U_i \cap U_{i+1}$  tais que

$$p_1 \ll_{U_{i+1}} \gamma(t_i) \ll_{U_i} q_i. \quad (5.5)$$

Ver Figura 5.7 para uma ilustração. Além disso, escolha  $p_0, q_0 \in U_1$  com  $p_0 \ll_{U_1} \gamma(t_0) \ll_{U_1} q_0$ ,

Figura 5.7: Ilustração para a prova da semicontinuidade superior do comprimento de arco Lorentziano.



Fonte: Adaptada de Treude (2011).

e  $p_k, q_k \in U_k$  com  $p_k \ll_{U_k} \gamma(t_k) \ll_{U_k} q_k$ . Como a distância Lorentziana num conjunto convexo é contínua (Observação 5.4.3), podemos escolher todos esses pontos de modo que, para  $i = 1, \dots, k$ , tenhamos

$$d_{U_i}(p_{i-1}, q_i) < d_{U_i}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + \varepsilon/2k. \quad (5.6)$$

Por convergência uniforme, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_n([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$  para todo  $n \geq N$  e  $i = 1, \dots, k$ . Mais ainda, como  $\gamma_n(t_i) \rightarrow \gamma(t_i)$ , por (5.5), podemos tomar  $N$  suficientemente grande de modo que para todo  $n \geq N$ , tenhamos

$$\gamma_n(t_i) \in I_{U_{i+1}}^+(p_i) \cap I_{U_i}^-(q_i), \quad \forall i = 1, \dots, k-1,$$

bem como  $\gamma_n(t_0) \in I_{U_1}^+(p_0)$  e  $\gamma_n(t_k) \in I_{U_k}^-(q_k)$ . Assim, para cada  $i = 1, \dots, k$ , podemos visualizar  $\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}$  como parte de curva causal maior indo de  $p_i$  a  $q_{i+1}$  em  $U_i$ . Logo,  $L(\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq d_{U_i}(p_{i-1}, q_i)$ , e para todo  $n \geq N$ , temos

$$\begin{aligned} L(\gamma_n) &= \sum_{i=1}^k L(\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq \sum_{i=1}^k d_{U_i}(p_{i-1}, q_i) \\ &\stackrel{(5.6)}{<} \sum_{i=1}^k (d_{U_i}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/2k) \\ &= L(\alpha) + \varepsilon/2 \leq L(\gamma) + \varepsilon/2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

o que conclui a prova com a hipótese feita sobre o intervalo de definição das curvas.

Consideraremos agora o caso geral. Seja  $\varepsilon > 0$ . Como destacamos na Observação 5.4.3, podemos tomar vizinhanças  $U, V \subset M$  de  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  respectivamente, cujas distâncias

Lorentzianas  $d_U, d_V$  fiquem limitadas superiormente por  $\varepsilon/4$ . Consequentemente, o comprimento de arco Lorentziano de cada curva causal contida em  $U$  ou  $V$  é também menor ou igual a  $\varepsilon/4$ . Tome  $c, d \in (a, b)$  tais que  $\gamma([a, c]) \subset U$  e  $\gamma([d, b]) \subset V$ . Como  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , temos que, para  $n$  suficientemente grande,  $a_n \leq c$  e  $b_n \geq d$ . Assim, podemos considerar as restrições  $\gamma_n|_{[c, d]}$ , que convergem  $h$ -uniformemente para  $\gamma|_{[c, d]}$ . Pela primeira parte da prova, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $L(\gamma_n|_{[c, d]}) \leq L(\gamma|_{[c, d]}) + \varepsilon/2$  para todo  $n \geq N$ . Além disso, por convergência  $h$ -uniforme, podemos assumir que  $\gamma_n([a_n, c]) \subset U$  e que  $\gamma_n([d, b_n]) \subset V$  para todo  $n \geq N$ . Assim,

$$\begin{aligned} L(\gamma_n) &= L(\gamma_n|_{[a_n, c]}) + L(\gamma_n|_{[c, d]}) + L(\gamma_n|_{[d, b_n]}) \\ &\leq \varepsilon/4 + (L(\gamma|_{[c, d]}) + \varepsilon/2) + \varepsilon/4 \leq L(\gamma) + \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

### 5.5.1 Existência de curvas maximizantes

Com os resultados da seção anterior, estamos em condições de mostrar existência de curvas maximizantes em espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

Primeiramente, provaremos a existência de curvas maximizantes entre dois pontos causalmente relacionados.

**Teorema 5.5.9.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico e  $p, q \in M$ . Se  $p < q$ , então existe uma curva causal maximizante futuro-dirigida  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  entre  $p$  e  $q$ . Mais ainda, se  $p \ll q$ , então  $\gamma$  pode ser reparametrizada como uma geodésica temporal. Caso contrário,  $\gamma$  pode ser reparametrizada como geodésica tipo-luz. Em ambos os casos, a geodésica obtida não possui pontos conjugados antes do ponto  $q$ .*

*Demonstração.* Pela definição da distância Lorentziana, existem curvas causais futuro-dirigidas  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$  com  $L(\gamma_n) \rightarrow d(p, q)$ . Assuma que todas as  $\gamma_n$  estejam parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Como  $p \neq q$ , segue-se do Teorema 5.5.5 que  $\gamma_n$  possui uma subsequência que converge  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$ . Assim, pela Proposição 5.5.8, temos que

$$L(\gamma) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = d(p, q).$$

Pela definição de  $d$ , isso implica que  $L(\gamma) = d(p, q)$ .

Agora, seja  $p \ll q$ , e suponha que  $\gamma$  não possa ser reparametrizada como uma geodésica temporal. Então, existem um convexo  $U \subset M$  e um subintervalo  $J \subset [0, b]$ , com  $\gamma(J) \subset U$ , de modo que  $\gamma|_J$  também não possa ser reparametrizada como geodésica temporal. Assim, podemos tomar  $t_0 < t_1 < t_2$  em  $J$  tais que  $\gamma(t_1)$  não seja um ponto da geodésica radial de  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t_2)$  em



U. Logo,

$$L(\gamma|_{[t_0, t_2]}) \leq d_U(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + d_U(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) < d_U(\gamma(t_0), \gamma(t_2)),$$

o que contradiz o fato de  $\gamma$  ser maximizante. Portanto, podemos reparametrizar  $\gamma$  como uma geodésica temporal, e segue-se do Teorema 2.4.5 que essa reparametrização não possui pontos conjuntos antes de  $q$ .

Se  $p \not\ll q$ , então pelo Teorema 2.6.5, a única curva causal de  $p$  a  $q$  é uma pré-geodésica tipo-luz sem pontos conjugados antes de  $q$ . ■

**Corolário 5.5.10.** *Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico, então a distância Lorentziana  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e finito-valorada.*

*Demonstração.* Pela existência de geodésicas maximizantes, a distância Lorentziana deve ser finita. Também sabemos da Proposição 5.4.2–v) que  $d$  é semicontínua inferiormente. Suponha que  $d$  não seja semicontínua superiormente num ponto  $(p, q) \in M \times M$ . Então, existem  $\varepsilon > 0$  e sequências  $p_n \rightarrow p, q_n \rightarrow q$  tais que

$$d(p_n, q_n) \geq d(p, q) + \varepsilon. \quad (5.8)$$

Em particular, temos que  $d(p_n, q_n) > 0$ . Assim,  $p_n \ll q_n$ , e segue-se do Teorema anterior que existem curvas causais futuro-dirigidas maximizantes  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $p_n$  a  $q_n$ . Suponha que essas curvas estejam parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Então, pelo Teorema 5.5.5, ou as  $\gamma_n$  colapsam em  $p = q$  ou  $\gamma_n$  possui uma subsequência convergindo  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$ . Se essas curvas colapsam, então  $L(\gamma_n) \rightarrow 0$ , contradizendo (5.8). No segundo caso, pela semicontinuidade superior do comprimento de arco Lorentziano, obtemos que

$$L(\gamma) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) \stackrel{(5.8)}{\geq} d(p, q) + \varepsilon,$$

contradizendo a definição de  $d$ . ■

O caso mais importante de curvas maximizantes para nossos estudos será o de curvas entre um subconjunto e um ponto. Porém, para garantir a existência destas, devemos impor certas condições adicionais ao subconjunto em questão. A próxima definição será conveniente nesse sentido.

**Definição 5.5.11.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo. Um subconjunto  $A \subset M$  é dito ser futuro causalmente completo (FCC) se, para cada  $q \in J^+(A)$ , a intersecção  $J^-(q) \cap A \subset A$  possui fecho compacto em  $A$ . Analogamente, definimos um subconjunto passado causalmente completo (PCC). Um subconjunto PCC e FCC é dito ser causalmente completo.*

Obviamente, todo subconjunto PCC ou FCC é fechado e todo compacto é causalmente completo. Um exemplo de subconjunto causalmente completo que não seja necessariamente compacto é dado pelas hipersuperfícies de Cauchy definidas em 5.3.16. Mais especificamente, seja  $A \subset M$  um subconjunto acronal e  $D^\pm(A)$  seus desenvolvimentos de Cauchy futuro e passado. Em (O'Neill (1983), Lema 14.40), prova-se que para cada  $p \in \text{int } D^\pm(A)$ , a intersecção  $J^\mp(A) \cap D^\pm(A)$  é compacta. Assim, se  $A \subset M$  é também fechado, então  $J^\mp(A) \cap A$  também é compacto visto que  $A \subset D^\pm(A)$ . Isso mostra que um conjunto fechado acronal é causalmente completo se considerado como subconjunto do interior do seu desenvolvimento de Cauchy  $D(A) := D^-(A) \cup D^+(A)$ . Porém, sendo  $A \subset M$  uma hipersuperfície de Cauchy, temos que  $D(A) = M$ , donde segue-se que  $A \subset M$  é causalmente completo.

**Proposição 5.5.12.** *Seja  $A \subset M$  um subconjunto FCC de um espaço-tempo globalmente hiperbólico, e seja  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  uma seqüência de curvas causais futuro-dirigidas partindo de  $A$  parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco. Suponha que  $q_n := \gamma_n(b_n) \rightarrow q \in M$ . Então, ou a seqüência  $\gamma_n$  colapsa em  $q$  e  $q \in A$  ou  $\gamma_n$  admite uma subseqüência convergindo  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $A$  a  $q$ .*

*Demonstração.* Como  $J^+(A) \subset M$  é fechado, nós temos que  $q \in J^+(A)$ . Tome um ponto  $q' \in I^+(q) \subset I^+(A)$ , então podemos assumir que todos os  $q_n$  e todas as  $\gamma_n$  estão contidas em  $J^-(q)$ . Em particular, os pontos  $p_n := \gamma_n(0)$  estão em  $J^-(q) \cap A$ . Como  $A$  é FCC, a menos de passagem pra subseqüência, podemos assumir que  $p_n \rightarrow p \in J^-(q) \cap A$ . Assim, pelo Teorema 5.5.5, temos duas possibilidades: ou  $p = q \in A$  e as curvas  $\gamma_n$  colapsam nesse ponto ou  $p \neq q$  e existe uma subseqüência de  $\gamma_n$  convergindo  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  de  $p \in A$  a  $q$ . ■

**Teorema 5.5.13.** *Seja  $A \subset M$  um subconjunto FCC de um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $M$ .*

- i) *Para cada  $q \in J^+(A)$ , existe  $p \in A$  com  $d_A^+(q) = d(p, q)$ . A geodésica maximizante  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$  é temporal se  $q \in I^+(A)$  e tipo-luz se  $q \notin I^+(A)$ . Em ambos os casos, não há pontos conjugados antes de  $q$ .*
- ii) *Se  $A \subset M$  é uma subvariedade espacial, então  $\gamma$  é normal a  $A$  e não há pontos focais antes de  $q$ . Consequentemente, se  $A$  é hipersuperfície espacial, então  $\gamma$  é necessariamente temporal.*

*Demonstração.* i) Seja  $q \in J^+(A)$ . Pelo Corolário 5.5.10, a função  $d(\cdot, q) : M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Assim, atinge um máximo no subconjunto compacto  $\overline{J^-(q) \cap A}^A \subset A$  em algum ponto  $p \in \overline{J^-(q) \cap A}^A$ . Além disso,  $d(\cdot, q)$  tem suporte em  $J^-(q)$ , logo

$$d(p, q) = \sup_{p' \in A} d(p', q).$$

Portanto, a geodésica maximizante entre  $p$  e  $q$  é também maximizante entre  $A$  e  $q$ . O restante das propriedades segue do Teorema 5.5.9.

ii) Se  $q \notin I^+(A)$ , então pelo Teorema 2.6.5,  $\gamma$  deve ser uma geodésica tipo-luz normal a  $A$  sem pontos focais antes de  $q$ . Se  $q \in I^+(A)$ , então  $\gamma$  é temporal e normal a  $A$  pela Proposição 2.5.2. Mais ainda, pelo Teorema 2.5.10 sobre a forma índice,  $\gamma$  não pode ter pontos focais antes de  $q$ . Por fim, se  $A \subset M$  é hipersuperfície espacial, então toda geodésica normal a  $A$  é necessariamente temporal. ■

**Corolário 5.5.14.** *Seja  $A \subset M$  subconjunto FCC de um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $M$ . Então, a distância Lorentziana futura  $d_A^+$  é contínua e finito-valorada. O mesmo vale para PCC e  $d_A^-$ .*

## 6 Comparação de área e volume em hipersuperfícies Lorentzianas

Neste capítulo, exibiremos os principais resultados deste trabalho: teoremas de comparação de área e de volume para certas hipersuperfícies em variedades Lorentzianas. Porém, precisamos introduzir novos conceitos e provar alguns resultados preliminares que servirão de base para nossos propósitos.

### 6.1 Cut locus

Nesta seção, estudaremos os dois motivos pelos quais uma geodésica causal pode deixar de maximizar a distância Lorentziana seja de um ponto ou de um conjunto. Para isso, introduziremos a noção fundamental de *cut locus (causal)* de certas subvariedades espaciais. Faremos as contas apenas para geodésicas futuro-dirigidas. O caso passado-dirigido pode ser tratado de forma análoga como mencionado anteriormente.

**Lema 6.1.1.** *Seja  $M$  um espaço-tempo fortemente causal e  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$  uma geodésica causal futuro-dirigida. Então, existe um  $\delta > 0$  tal que  $\gamma|_{[0, \delta]}$  é maximizante.*

*Demonstração.* Sejam  $p := \gamma(0)$  e  $U \subset M$  uma vizinhança normal de  $p$ . Por causalidade forte, existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $p$  tal que todas as curvas causais iniciando e terminando em  $V$  nunca saem de  $U$ . Por continuidade, existe  $\delta > 0$  tal que  $\gamma([0, \delta]) \subset V$ . Se  $\gamma$  é temporal, então sabemos pelo Teorema 1.5.8 que  $\gamma|_{[0, \delta]}$  é a única maximizante entre  $p$  e  $\gamma(\delta)$  dentre todas as curvas causais que permanecem em  $U$ . Pela escolha de  $V$ ,  $\gamma|_{[0, \delta]}$  será também a maior entre todas as curvas causais de  $p$  a  $\gamma(\delta)$ . Se  $\gamma$  é tipo-luz, segue-se do Lema 5.3.7-(i) e do Teorema 1.5.8 que não existe curva temporal entre  $p$  e  $\gamma(\delta)$  em  $U$ . Pela escolha de  $V$ , não existe curva temporal entre  $p$  e  $\gamma(\delta)$  em todo  $M$ . Logo,  $d(p, \gamma(\delta)) = 0 = L(\gamma|_{[0, \delta]})$ , o que conclui a prova. ■

No que se refere a geodésicas maximizando a distância Lorentziana a um subconjunto, além de propriedades causais a respeito do espaço-tempo em questão, é esperado que seja necessário requerer que o subconjunto também tenha certas propriedades. O próximo lema nos diz que, para um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $M$ , se qualquer geodésica causal futuro-dirigida normal a uma subvariedade espacial FCC  $P \subset M$  nunca maximiza a distância a  $P$ , então  $P$  não pode ser acausal.

**Lema 6.1.2.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC no espaço-tempo globalmente hiperbólico  $M$ , e seja  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$  uma geodésica futuro-dirigida normal a  $P$ , com  $v := \gamma'(0) \in N_p P$  e  $p = \gamma(0)$ . Se  $\gamma$  nunca maximiza a distância Lorentziana a  $P$ , então existe uma curva causal futuro-dirigida indo de  $P$  a  $p \in P$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\gamma|_{[0,\delta]}$  não maximize a distância Lorentziana a  $P$  para qualquer  $\delta > 0$ . Pelo Teorema 5.5.13, para cada  $n \in \mathbb{N}$  com  $1/n < b$ , existe uma geodésica maximizante  $\gamma_n : [0, a_n] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q_n := \gamma(1/n)$  com velocidade inicial  $v_n := \gamma'_n(0) \in NP$  diferente de  $v$ . Reparametrizando essas curvas por comprimento de  $h$ -arco, pela Proposição 5.5.12, ou elas colapsam em  $p$  ou encontramos uma curva causal futuro-dirigida de  $P$  a  $p \in P$ . Para o segundo caso, já temos a curva desejada, então vejamos o que acontece no primeiro caso. Nesse caso, também temos que  $a_n v_n \rightarrow 0_p$ . Também sabemos que  $v/n \rightarrow 0_p, v/n \neq a_n v_n$  e  $\exp^N(a_n v_n) = \exp^N(v/n)$ . Mas isso contradiz o fato de que  $\exp^N$  é injetiva ao redor da seção nula de  $NP$  (ver O'Neill (1983), Proposição 7.26). ■

**Corolário 6.1.3.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal de um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então, toda geodésica futuro-dirigida normal a  $P$  maximiza a distância Lorentziana a  $P$  para pequenos parâmetros.*

**Hipóteses causais.** Daqui em diante, sempre vamos assumir que o espaço-tempo de referência  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico.

A fim de definir o *cut locus*, precisamos estabelecer uma certa condição de normalização para vetores causais. A métrica Lorentziana  $g$  por si só não é suficiente para esse fim, pois vetores tipo-luz tem norma zero em  $(M, g)$ . Sendo assim, normalizaremos esses vetores com respeito a uma métrica Riemanniana completa  $h$  em  $M$ . Assim, ponha

$$S^{h+}M := \{v \in TM \mid h(v, v) = 1, v \text{ é futuro-dirigido}\} \subset TM,$$

e denominemos esse conjunto *fibrado tangente futuro  $h$ -unitário de  $M$* . Similarmente, para uma subvariedade  $P \subset M$ , ponha

$$S^{h+}NP := \{v \in NP \mid h(v, v) = 1, v \text{ é futuro-dirigido}\} \subset NP,$$

e denominemos esse conjunto *fibrado normal futuro  $h$ -unitário de  $P$* . Analogamente, definimos o *fibrado tangente passado  $h$ -unitário de  $M$*   $S^{h-}M$  e o *fibrado normal passado  $h$ -unitário de  $P$*   $S^{h-}NP$ .

Ao lidarmos com convergência  $h$ -uniforme, é geralmente necessário reparametrizar as curvas por  $h$ -comprimento de arco. Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica com velocidade inicial  $\gamma'(0) \in S^{h+}NP$ . Apesar de  $|\gamma'(0)|_h = 1$ ,  $\gamma$  pode não estar parametrizada por  $h$ -comprimento de arco. Ao reparametrizá-la por  $h$ -comprimento de arco, a curva reparametrizada pode não ser mais uma geodésica, apenas uma pré-geodésica. Porém, sua velocidade inicial permanece inalterada.

Um aspecto importante que decorre da normalização tomada acima é que as fibras de  $S^{h+}NP$  são difeomorfas ao conjunto compacto

$$\mathbb{S}_+^{n-k-1} := \mathbb{S}^{n-k-1} \cap J^+(0), \quad (6.1)$$

onde  $k = \dim P$  e  $J^+(0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$  é o cone causal futuro no espaço-tempo  $(n - k)$ -dimensional de Minkowski. O mesmo vale para  $S^{h+}M$  se pusermos  $k = 0$ . Isso nos permite extrair subsequências convergentes de velocidades iniciais como ilustrado na prova do seguinte resultado.

**Proposição 6.1.4.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC no espaço-tempo  $(M, g)$ , e seja  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  uma sequência de geodésicas causais futuro-dirigidas com  $v_n := \gamma'_n(0) \in S^{h+}NP$ . Suponha que cada  $\gamma_n$  seja maximizante entre  $P$  e  $q_n := \gamma_n(b_n)$  com  $q_n \rightarrow q \in M$ . Então, ou  $\gamma_n$  colapsa em  $q$  e  $q \in P$  ou existe uma subsequência  $\gamma_{n_k}$  tal que  $v_{n_k} \rightarrow v \in S^{h+}NP$ ,  $b_{n_k} \rightarrow b \in (0, \infty)$ , e a geodésica maximal  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  de velocidade inicial  $\gamma'_v(0) = v$  passa por  $q$  em  $t = b$  e é maximizante entre  $P$  e  $q$ .*

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\tilde{\gamma}_n := \gamma_n \circ \varphi_n : [0, c_n] \rightarrow M$  a reparametrização de  $\gamma_n$  por  $h$ -comprimento de arco. Pela Proposição 5.5.12, ou  $\tilde{\gamma}_n$  colapsa em  $q$  ou, a menos de passagem a alguma subsequência, essa sequência converge  $h$ -uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida  $\tilde{\gamma} : [0, c] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q$ . No primeiro caso, a sequência  $\gamma_n$  também colapsa em  $q$ , então vejamos o que acontece no segundo caso. Pela semicontinuidade superior do comprimento de arco Lorentziano (Proposição 5.5.8) e pela continuidade de  $d_p^+$ , temos que  $\tilde{\gamma}$  é maximizante entre  $P$  e  $q$ . Assim, podemos reparametrizar  $\tilde{\gamma}$  como uma geodésica  $\gamma : \tilde{\gamma} \circ \varphi : [0, c] \rightarrow M$  com velocidade inicial  $w := \gamma'(0) \in S^{h+}NP$ . Falta mostrar que, depois de eventualmente passar pra uma subsequência,  $b_n \rightarrow c$  e  $v_n \rightarrow w$ . Como  $\gamma_n(0) = \tilde{\gamma}_n(0) \rightarrow \tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) =: p$ , e como as fibras de  $S^{h+}NP$  são compactas, podemos assumir que  $v_n \rightarrow v \in S_p^{h+}NP$  a menos de passagem pra subsequência. Tome uma vizinhança  $\exp^N$ -normal  $U \subset M$  de  $p \in P$  (ver O'Neill (1983), Proposição 7.26 para mais detalhes), e seja  $V \subset NP$  a vizinhança aberta de  $0_p \in NP$  que é difeomorfa a  $U$  via  $\exp^N$ . Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos que  $\varepsilon v, \varepsilon w \in V$ , assim também temos  $[0, \varepsilon] \cdot v, [0, \varepsilon] \cdot w \subset V$ . Como  $v_n \rightarrow v$  e  $V \subset NP$  é aberto, para  $n$  suficientemente grande, temos que  $[0, \varepsilon] \cdot v_n \subset V$ . Logo, para cada  $t \in [0, \varepsilon]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \exp^N(tw) &= \gamma(t) = \tilde{\gamma}(\varphi(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n(\varphi(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n((\varphi_n \circ \varphi)(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp^N((\varphi_n \circ \varphi)(t)v_n). \end{aligned}$$

Como estamos numa vizinhança  $\exp^N$ -normal, isso implica que  $(\varphi_n \circ \varphi)(t)v_n \rightarrow tw$ . Como  $v_n, w \in S^{h+}NP$ , tomando a  $h$ -norma em ambos os lados, obtemos  $(\varphi_n \circ \varphi)(t) \rightarrow t$ . Portanto,  $(\varphi_n \circ \varphi)(t)v_n \rightarrow tv$  e, conseqüentemente,  $v = w$ . Assim, basta provar que  $b_n \rightarrow c$  após eventualmente passar pra uma subsequência. Como  $b_n \in [0, \infty]$ , podemos assumir que  $b_n \rightarrow b \in [0, \infty]$  a menos de passagem pra subsequência. Consideraremos dois casos:

- (1) Suponha  $b \leq c$ . Nesse caso,  $bv \in \mathcal{D}^N$ , e, como  $v_n \rightarrow v$  e  $\mathcal{D}^N \subset NP$  é aberto, podemos assumir que  $bv_n \in \mathcal{D}^N$  para todo  $n$ . Assim,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp^N(b_n v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp^N(bv) = \gamma_v(b),$$

então devemos ter  $b = c$ , caso contrário  $\gamma_v|_{[b,c]}$  seria uma curva causal fechada.

(2) Suponha  $b > c$ . Assim, podemos supor que  $b_n > b$  para todo  $n$ . Logo,  $cv_n \in \mathcal{D}^N$ , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp^N(cv_n) = \exp^N(cv) = \gamma_v(c) = q.$$

Por outro lado, também temos  $\gamma_n(b_n) \rightarrow q$  por hipótese. Logo, segue-se do Teorema 5.5.5 que as restrições  $\gamma_n|_{[c,b_n]}$  colapsam, caso contrário obteríamos uma curva causal fechada. Denote por  $(s_n, t_n) \subset \mathbb{R}$  o domínio maximal da geodésica  $\gamma_n$ , e por  $I_v = (s, t)$  o domínio maximal de  $\gamma_v$ . Como  $v_n \rightarrow v$ , temos que  $(s_n, t_n) \rightarrow (s, t)$ , pois domínios maximais de curvas integrais dependem continuamente de seus valores iniciais. Agora, como  $b_n \in (c, t_n)$  e  $b_n \rightarrow b > c$ , temos que  $b \in (c, t]$ . Se fixarmos  $t_0 \in (c, b)$ , então  $t_0 \in (c, t)$  e, para  $n$  suficientemente grande, também temos  $t_0 \in (c, t_n)$ . Suponha que esse é o caso para todo  $n$ , então

$$\gamma_n(t_0) = \exp^N(t_0v_n) \longrightarrow \exp^N(t_0v) = \gamma_v(t_0) \neq q.$$

Assim,  $\gamma_n$  não pode colapsar e, portanto, (2) nunca ocorre. ■

Agora, estamos em condições de investigar o *cut locus* de um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Primeiramente, note que, como decorrência do Teorema 5.5.13, uma geodésica causal normal a uma subvariedade espacial FCC  $P \subset M$  de um espaço-tempo globalmente hiperbólico deixa de ser maximizar a distância Lorentziana a  $P$  se encontrar um ponto focal a  $P$ . A uma outra razão pela qual essas geodésicas deixam de ser maximizantes como, a saber, quando intersectam outra geodésica maximizante. Nosso objetivo agora é provar que *esses são os dois únicos motivos que fazem uma geodésica causal deixar de ser maximizante*.

**Definição 6.1.5.** A função  $s^{h+} : S^{h+}M \rightarrow (0, \infty]$ , dada por

$$s^{h+}(v) := \sup\{t > 0 \mid d(\gamma_v(0), \gamma_v(t)) = L(\gamma_v|_{[0,t]})\},$$

é dita função de corte futura com respeito a  $h$ . Aqui,  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  é a geodésica maximal com  $\gamma'_v(0) = v$ . Se  $s^{h+}(v) \in I_v$ , então esse número é chamado de parâmetro de  $h$ -corte de  $v$  e  $\gamma_v(s^{h+}(v))$  é dito ser ponto de corte de  $\gamma_v$ .

Segue-se do Lema 6.1.1 que  $s^{h+}(v) > 0$  para todo  $v \in S^{h+}M$ , visto que cada  $\gamma_v$  é geodésica causal futuro-dirigida. Portanto,  $s^{h+}$  está bem definida.

**Definição 6.1.6.** Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal. A função  $s_P^{h+} : S^{h+}NP \rightarrow (0, \infty]$ , dada por

$$s_P^{h+}(v) := \sup\{t > 0 \mid d_P^+(\gamma_v(t)) = L(\gamma_v|_{[0,t]})\},$$



é chamada de função de corte  $P$ -futura com respeito a  $h$ . Se  $s_P^{h+}(v) \in I_v$ , então esse número é dito ser parâmetro de  $h - P$ -corte de  $v$  e  $\gamma_v(s_P^{h+}(v))$  é o ponto de  $P$ -corte de  $\gamma_v$ .

Pelo Corolário 6.1.3, temos que  $s_P^{h+}(v) > 0$  para todo  $v \in S^{h+}NP$ , e, portanto,  $s_P^{h+}$  realmente toma valores em  $(0, \infty]$ .

Há um último detalhe que devemos resolver a fim de definir o *cut locus*. Como a priori não temos a propriedade de completude geodésica em  $(M, g)$ , podemos ter  $s_P^{h+}(v) < \infty$  não pelo fato de  $\gamma_v$  deixar de ser maximizante em algum ponto, mas simplesmente por não estar definida para grandes parâmetros. Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 6.1.7.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal. O conjunto*

$$\text{Cut}_T^+(P) := \{s_P^{h+}(v)v \in \mathcal{D}^N \mid v \in S^{h+}NP\} \subset NP,$$

é chamado de *cut locus tangente futuro de  $P$* .

Aqui,  $\mathcal{D}^N \subset NP$  denota o domínio maximal da exponencial normal  $\exp^N$ . Finalmente, o conjunto

$$\text{Cut}^+(P) := \exp^N(\text{Cut}_T^+(P)) \subset M$$

é dito ser o *cut locus futuro de  $P$* .

**Proposição 6.1.8.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal e  $q \in M$ . Então,  $q \in \text{Cut}^+(P)$  se, e somente se, ou existe mais de uma geodésica maximizante entre  $P$  e  $q$ , ou  $q$  é o primeiro ponto focal a  $P$  ao longo de uma geodésica maximizante.*

*Demonstração.* Já sabemos que essas condições são suficientes. Com efeito, suponha que existam duas geodésicas  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$  maximizantes entre  $P$  e  $q$ , com  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$ . Seja  $\gamma_1 : [0, 1 + \varepsilon]$  uma extensão geodésica qualquer de  $\gamma_1$ . Se essa extensão fosse maximizante, o mesmo aconteceria com a curva

$$t \in [0, 1 + \varepsilon] \mapsto \begin{cases} \gamma_2(t), & \text{se } t \in [0, 1) \\ \gamma_1(t), & \text{se } t \in [1, 1 + \varepsilon]. \end{cases} \quad (6.2)$$

Mas como  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são distintas, pela unicidade de geodésicas para uma dada velocidade inicial, devemos ter  $\gamma_1'(1) \neq \gamma_2'(1)$ , e conseqüentemente a curva acima não é suave. Assim, também não pode ser maximizante, pois curvas maximizantes sempre podem ser reparametrizadas por geodésicas suaves (Proposição 2.5.2). Segue-se daí que  $q \in \text{Cut}^+(P)$ . Agora, no caso da existência de ponto focal, o resultado é imediato do Teorema 5.5.13. Para a recíproca, seja  $q \in \text{Cut}^+(P)$ . Então, existe  $v \in S^{h+}NP$  com  $s_P^{h+}(v) < \infty$ ,  $s_P^{h+}(v)v \in \mathcal{D}^N$  e  $q = \exp^N(s_P^{h+}(v)v)$ . A geodésica  $\gamma_v$  com velocidade inicial  $v$  pode ser estendida além de  $q$ , então, para  $n$  suficientemente grande, temos que

$$q_n := \exp^N((s_P^{h+}(v) + 1/n)v) \in I^+(P).$$



A menos de passagem pra subsequência, suponha que isso vale para todo  $n$ . Pelo Teorema 5.5.13, existem geodésicas maximizantes  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q_n$  com velocidades iniciais  $w_n := \gamma'_n(0) \in S^{h+}NP$ . Como  $\gamma_v$  deixa de maximizar em  $t = s_P^{h+}(v)$ , temos que  $w_n \neq v$  para todo  $n$ . Como  $q_n \rightarrow q \notin P$ , da Proposição 6.1.4, podemos supor que  $w_n \rightarrow w \in S^{h+}NP$ ,  $b_n \rightarrow b \in (0, \infty)$ , e a geodésica maximal  $\gamma_w : I_w \rightarrow M$  com  $\gamma'_w(0) = w$  passa por  $q$  quando  $t = b$ , maximizando a distância entre  $P$  e  $q$ . Se  $v \neq w$ , então o resultado está provado visto que encontramos uma geodésica maximal diferente. Então, suponha que  $v = w$ . Nesse caso, temos que  $b = s_P^{h+}(v)$ . Além disso, pela construção de  $w_n$ , temos que  $b_n w_n \neq (s_P^{h+}(v) + 1/n)v$ , mas  $\exp^N(b_n w_n) = \exp^N((s_P^{h+}(v) + 1/n)v)$ . Como  $b_n w_n \rightarrow bw = s_P^{h+}(v)v$  e  $(s_P^{h+}(v) + 1/n)v \rightarrow s_P^{h+}(v)v$ , concluímos que  $\exp^N$  não é injetiva em torno de  $s_P^{h+}(v)v$ . Assim,  $s_P^{h+}(v)v$  deve ser um ponto crítico de  $\exp^N$ . Portanto,  $q$  é ponto focal de  $P$  ao longo de  $\gamma_v$ . ■

A fim de obter resultados mais interessantes a respeito do *cut locus*, precisamos primeiramente de uma certa regularidade da função de corte, conforme ilustra o seguinte resultado.

**Proposição 6.1.9.** *A função de corte futura  $s^{h+} : S^{h+}M \rightarrow (0, \infty]$  é semicontínua inferiormente, e é contínua em cada ponto  $v \in S^{h+}M$  em que ou  $s^{h+}(v) = \infty$  ou  $s^{h+}(v)v \in \mathcal{D}$ . Se  $P \subset M$  é uma subvariedade espacial FCC acausal, então o mesmo vale para a função de  $P$ -corte futura  $s_P^{h+} : S^{h+}NP \rightarrow (0, \infty]$ .*

*Demonstração.* Provaremos a proposição para a função de  $P$ -corte futura. A prova para a função de corte futura em  $M$  é similar.

Primeiramente, provaremos semicontinuidade inferior. Seja  $v_n \rightarrow v$  uma sequência convergente em  $S^{h+}NP$ . Devemos mostrar que

$$s_P^{h+}(v) \leq s_0 := \liminf_{n \rightarrow \infty} s_P^{h+}(v_n).$$

Passando pra subsequência se necessário, podemos assumir que  $s_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_P^{h+}(v_n)$ . Se  $s_0 = \infty$ , não há nada a ser feito, então suponha que  $s_0 < \infty$ . Suponha que o resultado é falso, isto é, que  $s_P^{h+}(v) > s_0$ . Seja  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de modo que ainda tenhamos  $s_0 + \delta < s_P^{h+}(v)$ . Seja  $\gamma_v$  a geodésica maximal com velocidade inicial  $v$ , então pela última desigualdade, podemos por  $q := \gamma_v(s_0 + \delta)$ . Para cada  $n$ , defina  $b_n := s_P^{h+}(v_n) + \delta$ . Assim, como  $b_n \rightarrow s_0 + \delta < s_P^{h+}(v)$ , passando para outra subsequência, podemos assumir que  $b_n < s_P^{h+}(v)$  para todo  $n$ . Além disso, para cada  $n$ , seja  $\gamma_n$  a geodésica maximal com velocidade inicial  $v_n$ , e ponha  $p_n := \gamma_n(0) \in P$ . Como  $b_n v_n \rightarrow (s_0 + \delta)v \in \mathcal{D}^N$ , e  $\mathcal{D}^N \subset NP$  é um aberto, temos que  $b_n v_n \in \mathcal{D}^N$  para  $n$  suficiente grande. Novamente, suponha que isso é válido para todo  $n$ , e ponha  $q_n := \gamma_n(b_n v_n) \in J^+(P)$ . Como  $b_n > s_P^{h+}(v_n)$ ,  $\gamma_n$  não é maximizante entre  $P$  e  $q_n$ . Entretanto, pelo Teorema 5.5.13, existe uma geodésica maximizante distinta  $\alpha_n : [0, c_n] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q_n$ , com  $\alpha'_n(0) =: w_n \in S^{h+}NP$  diferente de  $v_n$ . Como  $q_n \rightarrow q \notin P$ , pela Proposição 6.1.4, podemos supor que  $w_n \rightarrow w \in S^{h+}NP$ ,  $c_n \rightarrow c \in (0, \infty)$ , e a geodésica maximal  $\alpha : I_w \rightarrow M$  com  $\alpha'(0) = w$  passa por  $q$  quando  $t = c$ , e é maximizante entre  $P$  e  $q$ . Como  $\gamma_v$  permanece

maximizante depois de  $q$ , ela deve coincidir com  $\alpha$ . Em particular,  $w = v$  e  $c = s_0 + \delta$ . Logo, ambos  $b_n v_n$  e  $c_n w_n$  convergem para  $(s_0 + \delta)v$ , e, pela construção de  $w_n$ , temos que  $b_n v_n \neq c_n w_n$ . Mas  $\exp^N(b_n v_n) = q_n = \exp^N(c_n w_n)$ . Isso mostra que  $\exp^N$  não é injetiva em torno de  $(s_0 + \delta)v$ , sendo assim, este é um ponto crítico de  $\exp^N$ . Assim,  $q$  é ponto focal de  $P$  ao longo de  $\gamma_v$ , contradizendo  $s_P^{h^+}(v) > s_0 + \delta$ . Portanto,  $s_P^{h^+}$  é de fato semicontínua inferiormente.

Agora, assumamos que  $s_P^{h^+}(v) = \infty$  ou que  $s_P^{h^+}(v)v \in \mathcal{D}^N$ . Seja  $v_n \rightarrow v$  uma sequência convergente em  $S^{h^+}NP$ . Como  $s_P^{h^+}$  é semicontínua inferiormente, basta mostrar que

$$s_P^{h^+}(v) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_P^{h^+}(v_n) =: s_0.$$

Se  $s_P^{h^+}(v) = \infty$ , o resultado é trivial. Então, suponhamos que a afirmação é falsa, isto é, que  $s_P^{h^+}(v) < s_0$ . Como  $\mathcal{D}^N \subset NP$  é aberto, podemos escolher um  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $(s_P^{h^+}(v) + \delta)v \in \mathcal{D}^N$  e que  $s_P^{h^+}(v) + \delta < s_0$ . Além disso, como  $s_P^{h^+}(v_n) \rightarrow s_0$ , podemos assumir que  $s_P^{h^+}(v_n) > s_P^{h^+}(v) + \delta$  para todo  $n$ . Assim, a restrição de  $\gamma_n$  a  $[0, s_P^{h^+}(v) + \delta]$  é maximizante entre  $P$  e  $q_n := \gamma_n(s_P^{h^+}(v) + \delta)$ . Assim,

$$\begin{aligned} L(\gamma_v|_{[0, s_P^{h^+}(v) + \delta]}) &= (s_P^{h^+}(v) + \delta)|v| = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_P^{h^+}(v) + \delta)|v_n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n|_{[0, s_P^{h^+}(v) + \delta]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_P^+(q_n) \\ &= d_P^+(q), \end{aligned} \tag{6.3}$$

contradizendo a definição de  $s_P^{h^+}(v)$ . ■

O fato das funções de corte serem contínuas nos pontos que pertencem ao *cut locus* nos permitem enunciar o seguinte resultado a respeito do *cut locus*.

**Proposição 6.1.10.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal. O conjunto dos pontos  $q \in \text{Cut}^+(P)$  dos quais existe mais de uma geodésica maximizante entre  $P$  e  $q$  é denso em  $\text{Cut}^+(P)$ .*

*Demonstração.* Seja  $q \in \text{Cut}^+(P)$  de modo que exista uma única geodésica maximizante  $\gamma_v : [0, s_P^{h^+}(v)] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q$  com  $\gamma'(0) = v \in S^{h^+}NP$ . Temos que mostrar que cada vizinhança de  $q$  contém algum ponto de  $\text{Cut}^+(P)$  que está conectado a  $P$  por mais de uma geodésica maximizante.

Primeiramente, temos que trabalhar com a continuidade de  $s_P^{h^+}$ . Pela Proposição 6.1.9,  $s_P^{h^+}$  é contínua em  $v$ . Assim, para cada vizinhança  $I \subset (0, \infty)$  de  $s_P^{h^+}(v)$ , existe uma vizinhança  $W \subset S^{h^+}NP$  de  $v$  tal que  $s_P^{h^+}(W) \subset I$ . Além disso, como  $s_P^{h^+}(v)v \in \mathcal{D}^N$  e  $\mathcal{D}^N \subset NP$  é aberto, podemos tomar uma vizinhança  $V \subset NP$  de  $v$  e uma vizinhança  $I \subset (0, \infty)$  de  $s_P^{h^+}(v)$  tal que  $I \cdot V \subset \mathcal{D}^N$ . Combinando essas duas informações, encontramos uma vizinhança  $W \subset S^{h^+}NP$  de  $v$  tal que  $s_P^{h^+}(w)w \in \mathcal{D}^N$  para todo  $w \in W$ . A Proposição 6.1.9 implica que  $s_P^{h^+}$  é contínua em  $W$ . Ponha  $U := \pi_{NP}(W)$ , onde  $\pi_{NP}$  denota a projeção sobre  $NP$ . Eventualmente, diminuindo

$W$  se necessário, podemos assumir que  $S^{h+}NP|_U \simeq U \times \mathbb{S}_+^{n-k-1}$ , onde  $k = \dim P$  e  $\mathbb{S}_+^{n-k-1}$  foi definido em (6.1).

Agora, para  $\delta_1, \delta_2 > 0$  suficientemente pequenos, ponha

$$K(\delta_1, \delta_2) := \{w \in W \mid \pi_{NP}(w) \in B_{\delta_1}(\pi_{NP}(v))^{\text{cl}}, \text{pr}_2(w) \in B_{\delta_2}(\text{pr}_2(v))^{\text{cl}}\},$$

onde  $B_{\delta_1}(\pi_{NP}(v)) \subset P$  é uma bola com respeito à métrica  $h|_P$ ,  $B_{\delta_2}(\text{pr}_2(v)) \subset \mathbb{S}_+^{n-k-1}$  é uma bola com respeito à métrica usual da esfera, e  $\text{pr}_2$  denota a projeção sobre  $\mathbb{S}_+^{n-k-1}$ .  $K(\delta_1, \delta_2)$  é uma vizinhança de  $v \in S^{h+}NP$ , que pode ficar arbitrariamente pequena diminuindo  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Mais ainda, para  $\delta_1$  suficiente pequeno,  $B_{\delta_1}(\pi_{NP}(v))^{\text{cl}} \subset P$  é compacto. Então, pela compacidade de  $\mathbb{S}_+^{n-k-1}$ , concluímos que  $K(\delta_1, \delta_2)$  também é compacto. Agora, considere os conjuntos

$$C(\delta_1, \delta_2) := \{tw \mid w \in K(\delta_1, \delta_2), t \in [0, 1]\}$$

$$\tilde{C}(\delta_1, \delta_2) := \{s_P^{h+}(w/|w|)w \mid w \in C(\delta_1, \delta_2), w \neq 0\} \cup \{w \in C(\delta_1, \delta_2) \mid w = 0\}.$$

Para  $\delta_1, \delta_2 > 0$  suficientemente pequenos, ambos os conjuntos anteriores são homeomorfos a produtos cartesianos de bolas fechadas em  $\mathbb{R}^n$ . Para o primeiro conjunto, isso é imediato. Para o segundo, segue-se do fato de que  $s_P^{h+}$  é contínua em  $K(\delta_1, \delta_2)$ . Em particular, eles são compactos.

Agora, vamos iniciar o argumento da prova de fato. Suponha que a proposição seja falsa. Então, podemos tomar  $\delta_1, \delta_2 > 0$  suficientemente pequenos de modo que  $\exp^N$  seja injetiva em  $\tilde{C}(\delta_1, \delta_2)$ . Como este conjunto é compacto,  $\exp^N|_{\tilde{C}(\delta_1, \delta_2)}$  deverá ser um homeomorfismo em sua imagem, que, por sua vez, é uma variedade topológica com fronteira, pois  $\tilde{C}(\delta_1, \delta_2)$  o é. Como  $q = \exp^N(s_P^{h+}(v)v)$  está nessa fronteira, cada vizinhança de  $q$  em  $M$  contém pontos que não estão em  $\exp^N(\tilde{C}(\delta_1, \delta_2))$ . Assim, podemos tomar uma sequência  $q_n \rightarrow q$ , com  $q_n \notin \exp^N(\tilde{C}(\delta_1, \delta_2))$  para todo  $n$ . Agora, para cada  $n$ , considere a geodésica maximizante  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q_n$  com  $w_n := \gamma_n'(0) \in S^{h+}NP$ . Pela Proposição 6.1.4, podemos assumir que  $w_n \rightarrow w \in S^{h+}NP$ , e que a geodésica maximal  $\gamma_w : I_w \rightarrow M$  com velocidade inicial  $w$  passa por  $q$  e é maximizante entre  $P$  e  $q$ . Logo,  $v = w$ . Mas, pela construção dos  $w_n$ , temos que  $w_n \notin K(\delta_1, \delta_2)$  para todo  $n$ , e como este conjunto é uma vizinhança de  $v$ , isso contradiz  $w_n \rightarrow w = v$ . ■

**Teorema 6.1.11.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal. Ponha*

$$\mathcal{J}_T^+(P) := \{tv \mid v \in S^{h+}NP \text{ e } t \in [0, s_P^{h+}(v))\} \subset NP,$$

e  $I_T^+(P) := \text{int } \mathcal{J}_T^+(P)$ . Então,

i)  $I^+(P) := \exp^N(I_T^+(P)) \subset M$  é aberto e difeomorfo a  $I_T^+(P)$  via  $\exp^N$ .

ii)  $I^+(P) = I^+(P) \setminus \text{Cut}^+(P)$ .

iii)  $\text{Cut}^+(P) \subset M$  é fechado.

iv)  $I^+(P)$  é o maior subconjunto aberto de  $I^+(P)$  com a propriedade de que todos os seus pontos podem ser ligados a  $P$  por uma única geodésica temporal maximizante.

*Demonstração.* i) Sabemos que uma geodésica deixa de maximizar quando intercepta outra geodésica maximizante. Assim,  $\exp^N$  é injetiva em  $\mathcal{I}_T^+(P)$ . Além disso, do fato de que uma geodésica deixa de maximizar quando encontra um ponto focal, segue-se que  $\exp^N$  não possui pontos críticos em  $\mathcal{I}_T^+(P)$ . Concluimos assim que  $I^+(P) \subset M$  é aberto e que  $\exp^N$  é um difeomorfismo entre  $\mathcal{I}_T^+(P)$  e  $I^+(P)$ .

ii) Se  $q \in I^+(P) \setminus \text{Cut}^+(P)$ , então existe uma única geodésica maximizante  $\gamma_v$  de  $P$  a  $q$  com velocidade inicial  $v \in S^{h+}NP$ . Como  $q \notin \text{Cut}^+(P)$ , temos que  $q = \exp^N(tv)$  para algum  $t < s_P^{h+}(v)$ . Isso mostra que  $tv \in \mathcal{J}_T^+(P)$ , e nos fica restando provar que  $tv \in \mathcal{I}_T^+(P)$ . Fixe  $\delta > 0$  tal que  $t + \delta < s_P^{h+}(v)$ . Pela semicontinuidade inferior de  $s_P^{h+}$ , existe uma vizinhança  $W \subset S^{h+}NP$  de  $v$  tal que  $s_P^{h+}(w) \geq s_P^{h+}(v) - \delta > t$  para todo  $w \in W$ . Logo, podemos tomar uma vizinhança  $I \subset (0, \infty)$  de  $t$  de modo que  $I \subset [0, s_P^{h+}(w))$  para todo  $w \in W$ . Assim,  $I \cdot W \subset NP$  é uma vizinhança de  $tv$  que está contida em  $\mathcal{J}_T^+(P)$ . Isso mostra que  $tv \in \text{int } \mathcal{J}_T^+(P) = \mathcal{I}_T^+(P)$ . Portanto,  $q \in I^+(P)$ , e  $I^+(P) \setminus \text{Cut}^+(P) \subset \mathcal{I}^+(P)$ . A outra inclusão é imediata.

iii) Seja  $q_n \rightarrow q \in M$  uma sequência convergente com  $q_n \in \text{Cut}^+(P)$  para todo  $n$ . Para cada  $n$ , considere a geodésica maximizante  $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow M$  de  $P$  a  $q_n$  com velocidade inicial  $v_n := \gamma_n'(0) \in S^{h+}NP$ . Como  $q_n \in \text{Cut}^+(P)$ , temos que  $b_n = s_P^{h+}(v_n)$ . Pela Proposição 6.1.4, ou  $\gamma_n$  colapsa e  $q \in P$  ou podemos assumir que  $v_n \rightarrow v \in S^{h+}NP$ ,  $b_n \rightarrow b \in (0, \infty)$ , e a geodésica maximal  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  de velocidade inicial  $v$  passa por  $q$  quando  $t = b$ , sendo também maximizante entre  $P$  e  $q$ . Para o primeiro caso, temos que  $q \in P \cap \text{Cut}^+(P)$ , contradizendo o Corolário 6.1.3. Assim, ficamos apenas com o segundo caso. Por um lado, como  $\gamma_v$  é maximizante entre  $P$  e  $q$ , devemos ter  $s_P^{h+}(v) \geq b$ . Por outro lado, pela semicontinuidade inferior de  $s_P^{h+}$ , temos que  $s_P^{h+}(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} s_P^{h+}(v_n) = b$ . Logo,  $s_P^{h+}(v) = b$ , e, portanto,  $q = \gamma_v(b) \in \text{Cut}^+(P)$ .

iv) Que  $I^+(P)$  possui essa propriedade, segue-se de ii). Que esse é o maior conjunto aberto com tal propriedade, segue-se da Proposição 6.1.10. ■

Para fazermos comparação de volume posteriormente, será importante saber que o *cut locus* futuro tem medida nula.

**Proposição 6.1.12.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial FCC acausal. Então,  $\text{Cut}^+(P) \subset M$  tem medida nula com respeito à medida Lorentziana<sup>1</sup>  $\mu_g$ . Em particular,  $\text{Cut}^+(P)$  não possui pontos interiores.*

*Demonstração.* Para cada  $N \in \mathbb{N}$ , ponha  $U_N := \{v \in S^{h+}NP \mid s_P^{h+} < N\}$ , e considere a função  $s_N : s_P^{h+}|_{U_N} \rightarrow (0, \infty)$ . Defina

$$\mathbb{J}_N^+(P) := \bigcup_{q \in P} J^+(0_q) \cap N_q P,$$

<sup>1</sup>Medida proveniente da métrica Lorentziana  $g$  em  $M$ .

onde  $J^+(0_q)$  é o futuro causal dentro do espaço vetorial de Lorentz  $(T_qM, g_p)$ . Assim

$$S^{h+}NP \times (0, \infty) \cong \mathbb{J}_N^+(P) \setminus \{0_q\}$$

via a aplicação  $(v, \lambda) \mapsto \lambda v$ . Com essa identificação, temos que

$$\text{Cut}_T(P) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Gamma(s_N),$$

onde  $\Gamma(s_N) \subset S^{h+}NP \times (0, \infty)$  é o gráfico de  $s_N$ . Pelo teorema de Fubini, segue-se que gráficos de funções limitadas e semicontínuas em espaços de medida  $\sigma$ -finitos possuem medida nula com respeito à medida produto. Aqui, usamos uma medida em  $S^{h+}NP$  induzida por alguma métrica Riemanniana auxiliar aí, enquanto que usamos a medida de Lebesgue em  $(0, +\infty)$ . Como ambas são  $\sigma$ -finitas, Fubini se aplica (mais detalhes em Bartle (1995), Capítulo 10). Logo,  $\Gamma(s_N)$  tem medida nula para cada  $N \in \mathbb{N}$ , e, conseqüentemente, o mesmo ocorre com  $\text{Cut}^+(P)$ . ■

**Observação 6.1.13 (O cut locus passado.)** Fazendo as devidas alterações, podemos definir a função de corte passada  $s_p^{h-}$  e o *cut locus* passado  $\text{Cut}^-(P)$ . Todos os resultados anteriores valem analogamente para esses objetos. Em particular, a aplicação exponencial normal de  $P$  é um difeomorfismo entre  $\mathcal{I}_T^-(P) := \text{int } \mathcal{J}_T^-(P)$  e  $\mathcal{I}^-(P)$ .

### 6.1.1 Regularidade da distância Lorentziana

Nesta seção, mostraremos que a distância Lorentziana a uma subvariedade espacial FCC acausal e causalmente completa  $P \subset M$  é uma função distância em  $\mathcal{I}^+(P) \cup \mathcal{I}^-(P)$  conforme a Definição 3.5.1. Mas antes, vamos analisar os casos das distâncias Lorentziana passada e futura.

**Proposição 6.1.14.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial acausal e causalmente completa. Então, a distância Lorentziana futura/passada  $d_p^\pm : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- i)  $d_p^\pm$  é suave em  $\mathcal{I}^\pm(P)$ .
- ii) Para cada  $q \in \mathcal{I}^\pm(P)$ , temos que  $\nabla_q d_p^\pm = -\gamma'(d_p^\pm(q))$ , onde  $\gamma : [0, d_p^\pm(q)] \rightarrow M$  é a única geodésica maximizante unitária de  $P$  a  $q$ .
- iii) Em  $\mathcal{I}^\pm(P)$ ,  $\nabla d_p^\pm$  é temporal e satisfaz  $|\nabla d_p^\pm| = 1$ . Mais ainda,  $\nabla d_p^+$  é passado-dirigido e  $\nabla d_p^-$  é futuro-dirigido.

*Demonstração.* i) Como  $\exp^N$  é um difeomorfismo entre  $\mathcal{I}_T^\pm(P)$  e  $\mathcal{I}^\pm(P)$ , temos que

$$d_p^\pm(q) = \left| (\exp^N |_{\mathcal{I}_T^\pm(P)})^{-1}(q) \right|_g, \quad q \in \mathcal{I}^\pm(P),$$

Além disso, como  $d_p^\pm(q) > 0$  para todo  $q \in \mathcal{I}^\pm(P)$ , segue o resultado.

ii) Seja  $q \in \mathcal{I}^\pm(P)$ . Para cada  $v \in T_qM$ , como  $\mathcal{I}^\pm(P) \subset M$  é aberto, podemos escolher um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de modo que  $\alpha(0) = q$ ,  $\alpha'(0) = v$ , e  $\text{Im}(\alpha) \subset \mathcal{I}^\pm(P)$ . Por um lado, temos que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d_P^\pm(\alpha(s)) = \langle \nabla d_P^\pm|_q, v \rangle. \quad (6.4)$$

Por outro lado, ponha  $b := d_P^\pm(q)$ , e seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  a única geodésica unitária maximizante de  $P$  a  $q$ . Assim, podemos definir uma variação (Definição 2.1.1)  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, b] \rightarrow M$  de  $\gamma$  pondo

$$\sigma_s(t) := \exp^N \left( \frac{t}{b} (\exp^N|_{\mathcal{I}^\pm(P)})^{-1}(\alpha(s)) \right).$$

Para cada  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , a curva  $\sigma_s$  é uma geodésica maximizante entre  $P$  e  $\alpha(s)$ . Logo,  $L(\sigma_s) = d_P^\pm(\alpha(s))$ . Aplicando a fórmula da primeira variação (2.5) a  $\sigma$ , obtemos

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d_P^\pm(\alpha(s)) = -\langle \gamma'(b), V(b) \rangle = -\langle \gamma'(b), \alpha'(0) \rangle = -\langle \gamma'(b), v \rangle, \quad (6.5)$$

onde  $V \in \mathfrak{X}(M)$  é o campo variação de  $\sigma$ . Note que  $\sigma_s(b) = \alpha(s)$ , assim  $V(b) = \alpha'(0)$ . Comparando (6.4) e (6.5), concluímos que  $\nabla d_P^\pm|_q = -\gamma'(b)$ , já que  $v \in T_qM$  foi arbitrário.

iii) Segue-se imediatamente das partes i) e ii), e do fato que as geodésicas maximizantes partindo de  $P$  e indo até  $\mathcal{I}^+(P)$  são futuro-dirigidas, enquanto que as indo até  $\mathcal{I}^-(P)$  são passado-dirigidas. ■

Agora, combinamos as distâncias Lorentzianas futura e passada para obtermos importantes resultados a respeito da distância Lorentziana  $d_P$ .

**Proposição 6.1.15.** *Seja  $P \subset M$  uma subvariedade espacial acausal e causalmente completa. Então, a distância Lorentziana  $d_P : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- i)  $d_P$  é suave em  $\mathcal{I}^+(P) \cup \mathcal{I}^-(P)$ .
- ii) Para cada  $q \in \mathcal{I}^\pm(P)$ , temos que  $\nabla_q d_P = \mp \gamma'(d_P(q))$ , onde  $\gamma : [0, d_P(q)] \rightarrow M$  é a única geodésica maximizante unitária de  $P$  a  $q$ .
- iii)  $d_P$  é uma função distância coespacial em  $\mathcal{I}^+(P) \cup \mathcal{I}^-(P)$  (ver Definição 3.5.1), e seu gradiente é passado-dirigido.
- iv) Se  $P$  é uma hipersuperfície, então  $d_P$  também é suave em  $\mathcal{I}(P) := \mathcal{I}^+(P) \cup P \cup \mathcal{I}^-(P)$ , e a restrição de  $\nabla d_P$  a  $P$  é passado-dirigido, temporal, unitário e normal a  $P$ .

*Demonstração.* As primeiras três afirmações são consequência direta da Proposição 6.1.14. Convém notar que  $d_P = -d_P^-$  em  $\mathcal{I}^-(P)$ , o que justifica a diferença de sinal em ii) para o caso passado, bem como o porquê de  $\nabla d_P$  ser passado-dirigido em todo o lugar.

iv) Seja  $P \subset M$  uma hipersuperfície. Para cada  $p \in P$ , tome uma vizinhança  $\exp^N$ -normal  $U \subset M$  de  $p$ , e seja  $V \subset NP$  a vizinhança aberta de  $0_p \in NP$  difeomorfa a  $U$  via  $\exp^N$ . Diminuindo  $U$  e  $V$  se necessário, podemos tomar coordenadas adaptadas  $(y^2, \dots, y^n)$  para  $P$  em  $P \cap U$ , e um campo temporal unitário futuro-dirigido  $(n)$  normal a  $P$  definido em  $P \cap U$ . A partir destes, construímos coordenadas  $(e^1, \dots, e^n)$  para  $NP$  em  $NP|_{P \cap U}$ , pondo

$$e^1(v) := -\langle v, n_{\pi_{NP}(v)} \rangle, \quad e^i(v) := (y^i \circ \pi_{NP})(v), \quad i = 2, \dots, n.$$

Essas coordenadas induzem coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  para  $M$  em  $U$  via  $\exp^N$ , isto é, pondo  $x^i := e^i \circ (\exp^N|_V)^{-1}$ . Essas coordenadas são chamadas de *coordenadas  $\exp^N$ -normais* ou *coordenadas de Fermi* (cf. Gray (2004), Capítulo 2). Agora, seja  $q \in \mathcal{I}^\pm(P) \cap U$ . Então,  $q = \exp^N(d_P(q)n_{p'})$ , para um único  $p' \in P$ , e assim

$$x^1(q) = e^1(d_P(q)n_{p'}) = -d_P(q)\langle n_{p'}, n_{p'} \rangle = d_P(q).$$

Logo,  $d_P = x^1$  em  $\mathcal{I}^\pm(P) \cap U$ . Como ambos  $d_P$  e  $x^1$  são zero em  $P \cap U$ , eles permanecem iguais em  $\mathcal{I}(P) \cap U$ . Isso mostra que  $d_P$  é suave em  $\mathcal{I}(P) \cap U$ . Como  $\nabla d_P$  é temporal, unitário e passado-dirigido em  $\mathcal{I}^\pm(P)$ , por continuidade isso não é alterado em  $\mathcal{I}(P) \cap U$ . Como  $p \in P$  foi arbitrário, o resultado está provado. ■

## 6.2 Comparação para a curvatura de Ricci

**Notação.** Até o final deste capítulo,  $(M, g)$  sempre denotará um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $(n+1)$ -dimensional e  $P \subset M$  será uma hipersuperfície espacial FCC acausal com distância Lorentziana com sinal  $d_P : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

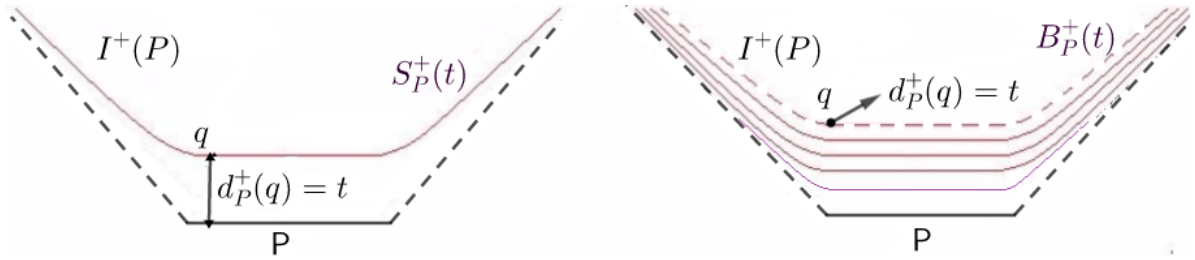
**Definição 6.2.1.** As esferas e bolas futuras de raio  $t > 0$  em  $P$  são, respectivamente, os subconjuntos de  $M$  dados por

$$\mathcal{S}_P^+(t) := (d_P^+)^{-1}(t) \subset \mathcal{I}^+(P) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_P^+(t) := \bigcup_{r \in (0, t)} \mathcal{S}_P^+(r) \subset \mathcal{I}^+(P).$$

A Figura 6.1 ilustra os subconjuntos definidos acima. Por conveniência, deixamos que  $\mathcal{S}_P^+(0) = P$ . A fim de evitar o *cut locus* de  $P$ , fazemos as restrições  $\mathcal{S}_P^+(t) := \mathcal{S}_P^+(t) \cap \mathcal{I}^+(P)$  e  $\mathcal{B}_P^+(t) := \mathcal{B}_P^+(t) \cap \mathcal{I}^+(P)$ . Pela Proposição 6.1.15,  $d_P$  é uma função distância em  $\mathcal{I}^+(P)$ , cujos conjuntos de nível são precisamente as esferas futuras restritas  $\mathcal{S}_P^+(t)$ . Juntamente com a Proposição 3.5.4, em  $\mathcal{I}^+(P)$ , temos que o campo vetorial  $n := -\nabla d_P$  é temporal futuro-dirigido unitário e normal aos subconjuntos  $\mathcal{S}_P^+(t)$ . Além disso, vimos na Proposição 3.5.6 que a curvatura média de cada hipersuperfície  $\mathcal{S}_P^+(t)$  é dada por

$$h_t(q) = \text{tr } S_t|_q = \text{tr } S|_q = -\Delta d_P(q), \quad q \in \mathcal{S}_P^+(t), \quad (6.6)$$



Figura 6.1: Esfera e bola futura de  $P$ .

Fonte: Produção do autor.

onde  $S_t$  é o operador de Weingarten de  $S_P^+(t)$  e  $S$  é o operador definido em (3.47).

Em geral, bolas e esferas futuras não possuem volume e área finita respectivamente. Sendo assim, é conveniente introduzir a noção de bolas e esferas *truncadas*. Dado um subconjunto  $A \subset P$ , pomos

$$\tilde{S}_A^+(t) := \{q \in S_P^+(t) \mid \exists p \in A : d_P(q) = d(p, q)\},$$

ou seja,  $\tilde{S}_A^+(t) \subset S_P^+(t)$  consiste dos pontos que podem ser atingidos a partir de  $A$  através de uma geodésica maximizante de comprimento  $t$ . Analogamente, definimos

$$\tilde{B}_A^+(t) := \bigcup_{r \in (0, t)} \tilde{S}_A^+(r) \subset B_P^+(t).$$

Novamente, para evitar o *cut locus* de  $P$ , fazemos as restrições  $\tilde{S}_A^+(t) := \tilde{S}_A^+(t) \cap I^+(P)$  e  $\tilde{B}_A^+(t) := \tilde{B}_A^+(t) \cap I^+(P)$ .

As seguintes condições de curvatura serão assumidas nos principais resultados de comparação daqui em diante.

**Definição 6.2.2.** Para constantes  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$ , dizemos que o par  $(M^{n+1}, P)$  satisfaz a condição de comparação cosmológica  $(CCC(\kappa, \beta))$  se as seguintes condições são satisfeitas<sup>2</sup>.

- (1)  $M$  possui Ricci temporal limitado inferiormente por  $\kappa$ , isto é,  $\text{Ric}(v, v) \geq n\kappa$  para todo  $v \in TM$  com  $\langle v, v \rangle = -1$ .
- (2) A curvatura média  $h_n = \text{tr } S_n \in C^\infty(P)$  de  $P \subset M$  com respeito ao campo vetorial  $n = -\nabla d_P$  é limitada superiormente por  $\beta$ .

Note que a condição (1) na definição acima é equivalente a dizer que  $\text{Ric}(v, v) \geq -n\kappa \langle v, v \rangle$  para todo vetor temporal  $v \in TM$ .

<sup>2</sup>Lembrando que estamos assumindo  $M = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço-tempo globalmente hiperbólico e  $P \subset M$  uma hipersuperfície espacial, acausal e FCC.



### 6.2.1 Construção de espaços de comparação

O objetivo agora é construir, para cada par  $(\kappa, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , uma certa variedade Lorentziana globalmente hiperbólica, juntamente com certas subvariedades distinguidas, de tal modo que as desigualdades existentes na  $CCC(\kappa, \beta)$  se tornem igualdades. Isso vai nos gerar uma família de *espaços de comparação*.

Nossos espaços de comparação serão produtos torcidos (ver Seção 1.4) definidos da seguinte forma. Seja  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $(N, h)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional, e  $f \in C^\infty((a, b))$  uma função suave positiva. Assim, podemos introduzir o produto torcido Lorentziano  $(M^{n+1}, g)$  onde

$$M = (a, b) \times N, \quad g = -dt^2 + f(t)^2 h. \quad (6.7)$$

Escolhemos a orientação em  $(M, g)$  de modo que o campo vetorial  $\partial_t$  seja futuro-dirigido. Vamos assumir que  $(N, h)$  seja completo de modo que  $(M, g)$  seja globalmente hiperbólico (cf. Beem, Ehrlich e Easley (1999), Teorema 3.66). Espaços-tempos desse tipo são conhecidos como de *Robertson-Walker generalizados* e são de fundamental importância em modelos cosmológicos na física, donde se deriva o nome das CCC. A aplicação  $\text{pr}_1 : M \rightarrow (a, b)$  goza de propriedades que nos serão muito úteis adiante.

**Proposição 6.2.3.** *Seja  $(M^{n+1}, g)$  o produto torcido definido em (6.7) e suponha que  $(N, h)$  seja completo. Então, a projeção  $t := \text{pr}_1 : M \rightarrow (a, b)$  é uma função distância. Além disso, para cada  $t \in (a, b)$ , a hipersuperfície  $N_t := \{t\} \times N \subset M$  é uma hipersuperfície de Cauchy espacial. Em particular,  $N_t$  é acausal e causalmente completo.*

*Demonstração.* Seja  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  sistema de coordenadas em  $N$ , e seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo vetorial arbitrário. Assim, podemos escrever

$$X = X^0 \partial_t + \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Por um lado,

$$\langle \nabla_{\text{pr}_1}, X \rangle = X(\text{pr}_1) = X^0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{pr}_1) = X^0;$$

por outro,

$$\langle \partial_t, X \rangle = -X^0 = -X(\text{pr}_1) = -\langle \nabla_{\text{pr}_1}, X \rangle.$$

Logo,  $\nabla_{\text{pr}_1} = -\partial_t$  e, portanto,  $\langle \nabla_{\text{pr}_1}, \nabla_{\text{pr}_1} \rangle = -1$ . Isso mostra que  $\text{pr}_1$  é função distância.

Agora, sejam  $N_{t_0} = \{t_0\} \times N$  e  $\gamma : (a_0, b_0) \rightarrow M$ ,  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), \alpha(\lambda))$ , uma curva causal futuro-dirigida inextensível com  $t'(\lambda) > 0$  para todo  $\lambda \in (a_0, b_0)$ . Vamos provar que  $N_{t_0} \cap \text{Im } \gamma \neq \emptyset$ . Suponha que essa intersecção seja vazia. Sem perda de generalidade, suponha que  $t(\lambda) < t_0$  para todo  $\lambda \in (a_0, b_0)$ . Fixe  $\lambda_0 \in (a_0, b_0)$ , daí  $t(\lambda_0) < t(\lambda) < t_0$  para todo

$\lambda \in (\lambda_0, b_0)$ . Então, pelo Lema 1.5.12, existe um  $\lambda_1$  tal que  $\lambda_0 < \lambda_1 < b_0$  e

$$L_h(\alpha|_{[\lambda_0, \lambda_1]}) > \frac{t_0 - t(\lambda_0)}{c}, \quad (6.8)$$

onde

$$c := \min_{t \in [t(\lambda_0), t_0]} \{f(t)\} > 0.$$

Por outro lado, por definição, temos que

$$g(\gamma'(\lambda), \gamma'(\lambda)) = -t'(\lambda)^2 + f(t(\lambda))^2 \cdot h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)), \quad \forall \lambda \in (a_0, b_0),$$

o que implica

$$\sqrt{h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} \leq \frac{t'(\lambda)}{f(t(\lambda))}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1].$$

Mas  $t(\lambda) \in (t(\lambda_0), t_0)$  para todo  $\lambda > \lambda_0$ , logo

$$\sqrt{h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} \leq \frac{t'(\lambda)}{c}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1].$$

Integrando em  $\lambda$ , obtemos

$$L_h(\alpha|_{[\lambda_0, \lambda_1]}) \leq \frac{t(\lambda_1) - t(\lambda_0)}{c} < \frac{t_0 - t(\lambda_0)}{c} \quad (6.9)$$

Ora, (6.8) e (6.9) nos dão uma contradição. Portanto,  $N_{t_0} \cap \text{Im } \gamma \neq \emptyset$ , ou seja,  $N_{t_0}$  é hipersuperfície de Cauchy. Como  $t_0$  foi arbitrário, concluimos que todos os conjuntos de nível de  $\text{pr}_1$  são hipersuperfícies de Cauchy.

Fixe  $t \in (a, b)$ , vamos mostrar que  $N_t$  é acausal. Suponha que não. Então, existem pontos  $p, q \in N_t$  com  $p < q$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva causal futuro-dirigida com  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ . Como  $p \not\ll q$ , segue-se do Teorema 2.6.5 que  $\alpha$  precisa ser pré-geodésica tipo-luz normal a  $N_t$  em  $p$ . Absurdo, pois  $T_p N_t \subset T_p M$  é espacial, e, conseqüentemente,  $\alpha$  seria temporal.

Por fim, para ver que  $N_t$  é causalmente completo. Segue-se de (O'Neill (1983), Lema 14.40) que para todo  $p \in \text{int } D^\pm(N_t)$ , temos que  $J^\mp(p) \cap D^\pm(N_t)$  é compacto em  $M$ . Sendo  $N_t$  hipersuperfície de Cauchy, é também um conjunto fechado, assim  $J^\mp(p) \cap N_t$  é compacto em  $N_t$  visto que  $N_t \subset D^\pm(N_t)$ . Isso mostra que  $N_t$  é causalmente completo se considerado como subconjunto do  $\text{int } D(N_t)$ . Ora, sendo  $N_t$  de Cauchy, temos que  $D(S) = M$ , donde segue o resultado. ■

A fim de satisfazer a condição (1) da Definição 6.2.2, construiremos espaços de comparação que são de Einstein<sup>3</sup>. Mais especificamente, que satisfaçam  $\text{Ric} = -\kappa g$ .

<sup>3</sup>Uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  é dita ser de Einstein se  $\text{Ric} = cg$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 6.2.4.** *Seja  $(M^{n+1}, g)$  o produto torcido definido em (6.7). Então,  $\text{Ric} = -n\kappa g$  se, e somente se,  $(N, h)$  é de Einstein com  $\text{Ric}_N = (n-1)\kappa_N h$ , para algum  $\kappa_N \in \mathbb{R}$ , e  $f$  satisfaz as equações*

$$f'' = -\kappa \cdot f \quad \text{e} \quad (f')^2 + \kappa_N = f \cdot f'' \quad (6.10)$$

*Demonstração.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  horizontais. Assim, eles são múltiplos de  $\partial_t$ , e assumiremos que  $X = Y = \partial_t$  sem perda de generalidade. Para campos horizontais (ver Seção 1.4.3), segue-se de (O'Neill (1983), Corolário 7.43) temos que

$$\text{Ric} = \text{Ric}_M = \text{Ric}_{(a,b)} - \frac{n}{f} \cdot \text{Hess}_f. \quad (6.11)$$

Como sabemos, os espaços  $\mathbb{R}_\mu^m$  tem curvatura nula para todo  $m \geq 1$  e  $1 \leq \mu \leq m$ . Em particular,  $\text{Ric}_{(a,b)} = 0$ . Além disso, podemos explicitar  $\text{Hess}_f$ :

$$\text{Hess}_f(\partial_t, \partial_t) = \langle \nabla_{\partial_t} \nabla f, \partial_t \rangle = \langle \nabla_{\partial_t} (-f' \cdot \partial_t), \partial_t \rangle = \langle -f'' \cdot \partial_t, \partial_t \rangle = f''.$$

Agora, de (6.11), temos

$$\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = -\frac{n}{f} \cdot \text{Hess}_f(\partial_t, \partial_t) = -\frac{n}{f} \cdot f''. \quad (6.12)$$

Por outro lado, segue-se da hipótese de  $\text{Ric} = -n\kappa g$  que

$$\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = -n\kappa g(\partial_t, \partial_t) = n\kappa. \quad (6.13)$$

De (6.12) e (6.13), vemos que  $f'' = -\kappa \cdot f$ .

Quanto ao outro sentido da proposição, supondo que  $f'' = -\kappa \cdot f$ , temos que

$$\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = -\frac{n}{f} \cdot \text{Hess}_f(\partial_t, \partial_t) = -\frac{n}{f} \cdot f'' = n\kappa = -n\kappa g(\partial_t, \partial_t),$$

ou seja,  $\text{Ric} = -n\kappa g$  para campos horizontais.

Para campos  $V, W$  verticais, segue-se também de (O'Neill (1983), Corolário 7.43) que

$$\text{Ric} = \text{Ric}_N(V, W) - \langle V, W \rangle \cdot \tilde{f}, \quad (6.14)$$

onde

$$\tilde{f} := \frac{\Delta f}{f} + \frac{(n-1) \cdot \langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} = \frac{\Delta f}{f} - \frac{(n-1) \cdot (f')^2}{f^2}.$$

Podemos explicitar  $\Delta f$  da seguinte forma: seja  $\{\partial_t, E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal em

$(M, g)$ , então

$$\Delta f = \text{tr Hess}_f = -\text{Hess}_f(\partial_t, \partial_t) + \sum_{i=1}^n \text{Hess}_f(E_i, E_i).$$

Mas, por ((O'Neill (1983), Proposição 7.35)), se  $X$  é horizontal e  $V$  é vertical, então  $\nabla_X V = \nabla_V X$ , assim, tomando  $V$  unitário, temos que

$$\text{Hess}_f(V, V) = \langle \nabla_V \nabla f, V \rangle = \langle \nabla_{\nabla_V V}, V \rangle = \frac{1}{2} \nabla f \langle V, V \rangle = 0,$$

onde usamos o fato de que  $\nabla f$  é horizontal na segunda igualdade, e  $\langle V, V \rangle = 1$  na última. Ora, cada  $E_i$  é vertical e unitário, o que nos deixa com

$$\Delta f = -\text{Hess}_f(\partial_t, \partial_t) = -f'',$$

e

$$\tilde{f} = -\frac{f''}{f} - \frac{(n-1) \cdot (f')^2}{f^2}.$$

Supondo que  $\text{Ric} = -n\kappa g$ , segue-se de (6.14) que

$$\text{Ric}_N(V, W) = [-n\kappa f^2 - f \cdot f'' - (n-1)(f')^2]h(V, W).$$

Ora, nem  $\text{Ric}_N$  nem  $h$  varia em  $t$ , então o mesmo acontece com  $A := -n\kappa f^2 - f \cdot f'' - (n-1)(f')^2$ . Assim, defina  $\kappa_N \in \mathbb{R}$  por  $A = (n-1)\kappa_N$ . Note que  $-n\kappa f^2 = nf \cdot f''$  visto que  $f'' = \kappa \cdot f$  conforme mostramos na primeira parte, logo

$$(n-1)\kappa_N = nf \cdot f'' - f \cdot f'' - (n-1) \cdot (f')^2 = (n-1)(f \cdot f'' - (f')^2),$$

donde concluímos que  $\kappa_N = f \cdot f'' - (f')^2$ . Isso conclui a prova da ida da proposição.

Quanto à volta da proposição, sejam  $V, W$  campos verticais em  $M$ , então

$$\begin{aligned} \text{Ric}(V, W) &= \text{Ric}_N(V, W) - g(V, W) \cdot \tilde{f} \\ &= (n-1)\kappa_N h(V, W) + f^2 h(V, W) \cdot \left( \frac{f''}{f} + \frac{(n-1) \cdot (f')^2}{f^2} \right) \\ &= \left[ (n-1)\kappa_N + f \cdot f'' + (n-1) \cdot (f')^2 \right] \cdot h(V, W) \\ &= \left[ -n\kappa f^2 - f \cdot f'' - (n-1) \cdot (f')^2 + f \cdot f'' + (n-1) \cdot (f')^2 \right] \cdot h(V, W) \\ &= -n\kappa f^2 h(V, W) = -n\kappa g(V, W), \end{aligned}$$

ou seja, também temos  $\text{Ric} = -n\kappa g$  para campos verticais, o que conclui a prova. ■

Dadas condições iniciais, para cada  $\kappa \in \mathbb{R}$ , existe uma única solução maximal da equação da esquerda em (6.10). Por outro lado, dadas condições iniciais, para cada  $\kappa_N$ , existe uma única

Tabela 6.1: Soluções do sistema (6.10).  $h_t = nf'(t)/f(t)$  é a curvatura média de  $N_t \subset M$ .

|              |                |   |  |
|--------------|----------------|---|--|
| $\kappa < 0$ | $\kappa_N > 0$ | $f(t) = \sqrt{ \kappa_N / \kappa } \cosh(\sqrt{ \kappa }t + b)$ | $h_t = n\sqrt{ \kappa } \tanh(\sqrt{ \kappa }t + b)$ |
| $\kappa < 0$ | $\kappa_N = 0$ | $f(t) = e^{\pm\sqrt{ \kappa }t}$                                | $h_t = \pm n\sqrt{ \kappa }$                         |
| $\kappa < 0$ | $\kappa_N < 0$ | $f(t) = \sqrt{ \kappa_N / \kappa } \sinh(\sqrt{ \kappa }t + b)$ | $h_t = n\sqrt{ \kappa } \coth(\sqrt{ \kappa }t + b)$ |
| $\kappa = 0$ | $\kappa_N = 0$ | $f(t) = e^b = \text{const.}$                                    | $h_t = 0$  |
| $\kappa = 0$ | $\kappa_N < 0$ | $f(t) = \pm\sqrt{ \kappa_N }t + b$                              | $h_t = n/(t \pm b/\sqrt{ \kappa_N })$                |
| $\kappa > 0$ | $\kappa_N < 0$ | $f(t) = \sqrt{ \kappa_N /\kappa} \sin(\sqrt{\kappa}t + b)$      | $h_t = n\sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa}t + b)$      |

Fonte: Adaptada de Treude e Grant (2013).

solução para a equação da direita. Para certos valores  $\kappa, \kappa_N \in \mathbb{R}$ , essas soluções coincidem se as condições iniciais são escolhidas apropriadamente (ver Tabela 6.1). Os dois casos omissos  $\kappa = 0, \kappa_N > 0$  e  $\kappa > 0, \kappa_N \geq 0$  não admitem uma tal solução compatível. Note que, reescalando  $f$  se necessário, podemos considerar apenas os casos  $\kappa_N = 0, \pm 1$  sem perda de generalidade.

No que se refere à condição (2) na definição 6.7, note que para cada  $t \in (a, b)$  e para cada hipersuperfície  $N_t \subset M$ , seu operador de Weingarten com respeito a  $\partial_t$  é dado por

$$S_t = \frac{f'(t)}{f(t)} \text{id}_{TN_t} \quad (6.15)$$

Com efeito, segue-se de ((O'Neill (1983), Proposição 7.35)) que, para campos  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  verticais em  $(M^{n+1}, g)$ ,

$$II(V, W) = -\frac{g(V, W)}{f} \nabla f = +\frac{g(V, W)}{f} f' \partial_t.$$

Além disso, mostramos na Proposição 6.2.3 que a projeção  $t = \text{pr}_1$  (consequentemente  $-t$ ) é uma função distância. Note também que cada  $S_t$  é o operador de Weingarten da hipersuperfície de nível  $N_t$  com respeito ao campo  $\partial_t = \nabla(-t)$ . Assim, o operador  $S$  definido em (3.5.6) por

$$S(X) = \nabla_X \nabla(-t), \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

coincide com cada  $S_t$  quando restrito à respectiva hipersuperfície, logo

$$g(S(V), W) = -g(II(V, W), \partial_t) = -\frac{f'}{f} g(V, W) g(\partial_t, \partial_t) = \frac{f'}{f} g(V, W),$$

donde concluímos que  $S(V) = (f'(t)/f(t)) \cdot V$ . Restringindo para cada  $N_t$ , obtemos a igualdade desejada. Consequentemente, a curvatura média correspondente é constante em cada  $N_t$  e dada por

$$h_t = \text{tr } S_t = n \cdot \frac{f'(t)}{f(t)}. \quad (6.16)$$

De (6.10), é fácil ver que o operador de Weingarten satisfaz a equação de Riccati

$$S'_t + S_t^2 + \kappa \cdot \text{id}_{TN_t} = 0. \quad (6.17)$$

De fato,

$$\begin{aligned} S'_t + S_t^2 + \kappa \cdot \text{id}_{TN_t} &= \left( \frac{f \cdot f'' - (f')^2 + (f')^2}{f^2} + k \right) \text{id}_{TN_t} \\ &\stackrel{(6.10)}{=} \left( \frac{f \cdot f''}{f^2} - \frac{f''}{f} \right) \text{id}_{TN_t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, tirando o traço em (6.17), obtemos a seguinte igualdade que será importante na próxima seção:

$$\frac{h'_t}{n} + \frac{h_t^2}{n^2} + k = 0. \quad (6.18)$$

Agora, iremos definir concretamente nossos espaços de comparação. Sejam  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$ . Da Tabela 6.1, vemos que existe uma única maneira de tomar  $\kappa_N = 0, \pm 1$  e uma solução  $f_{\kappa, \beta} : (a_{\kappa, \beta}, b_{\kappa, \beta}) \rightarrow \mathbb{R}$  de (6.10) de modo que

$$h_0 = n \cdot \frac{f'_{\kappa, \beta}(0)}{f_{\kappa, \beta}(0)} = \beta. \quad (6.19)$$

Aqui,  $(a_{\kappa, \beta}, b_{\kappa, \beta})$  denota o maior intervalo contendo  $t = 0$  no qual  $f_{\kappa, \beta}$  permaneça estritamente positiva. Note que (6.19) estabelece igualdade na segunda condição da  $CCC(\kappa, \beta)$  para o par  $(M, N_0)$ . Além disso, tomamos  $(N_{\kappa, \beta}^n, h_{\kappa, \beta})$  como sendo a única variedade Riemanniana simplesmente conexa  $n$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\kappa_N = 0, \pm 1$  determinada pelas constantes  $\kappa, \beta$ . Um cálculo direto usando as definições de curvatura seccional e de Ricci mostra que a condição de curvatura seccional constante  $\kappa_N$  em  $N_{\kappa, \beta}$  implica que

$$\text{Ric}_{N_{\kappa, \beta}} = (n - 1)\kappa_N h_{\kappa, \beta}. \quad (6.20)$$

**Definição 6.2.5.** Dados  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $(M_{\kappa, \beta}^{n+1}, g_{\kappa, \beta})$  o produto torcido

$$M_{\kappa, \beta}^{n+1} := (a_{\kappa, \beta}, b_{\kappa, \beta}) \times N_{\kappa, \beta}^n, \quad g_{\kappa, \beta} := -dt^2 + f_{\kappa, \beta}(t)^2 h_{\kappa, \beta}, \quad (6.21)$$

onde  $(N_{\kappa, \beta}^n, h_{\kappa, \beta})$  e  $f_{\kappa, \beta} : (a_{\kappa, \beta}, b_{\kappa, \beta}) \rightarrow \mathbb{R}$  foram definidos acima.

Por conveniência, colocamos  $P_{\kappa, \beta} := \{0\} \times N_{\kappa, \beta}^n$ . Assim,  $P_{\kappa, \beta} \subset M_{\kappa, \beta}$  é uma hipersuperfície espacial acausal causalmente completa com curvatura média constante  $h_0 = \beta$ . Pela Proposição 6.2.4, segue-se de (6.20) que  $(M_{\kappa, \beta}, g_{\kappa, \beta})$  possui  $\text{Ric} = -n\kappa g_{\kappa, \beta}$ . Assim, o par  $(M_{\kappa, \beta}, P_{\kappa, \beta})$  satisfaz as  $CCC(\kappa, \beta)$  com igualdades nas condições (1) e (2).

**Lema 6.2.6.** *A distância Lorentziana com sinal  $d_{\kappa,\beta} := d_{P_{\kappa,\beta}} : M_{\kappa,\beta} \longrightarrow \mathbb{R}$  coincide com a projeção  $t := \text{pr}_1 : M_{\kappa,\beta} \longrightarrow (a_{\kappa,\beta}, b_{\kappa,\beta})$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 6.2.3, temos que  $t$  é função distância e a hipersuperfície de nível  $P_{\kappa,\beta}$  é uma hipersuperfície de Cauchy espacial, logo

$$M_{\kappa,\beta} = I^+(P_{\kappa,\beta}) \cup P_{\kappa,\beta} \cup I^-(P_{\kappa,\beta}).$$

Assim, para qualquer ponto  $q = \{t_0\} \times N_{\kappa,\beta} \in M_{\kappa,\beta}$ , segue-se do Teorema 5.5.13 que existe um ponto  $p_0 \in P_{\kappa,\beta}$  que realiza a distância  $d(p_0, q) = d_{\kappa,\beta}(q)$ , e a geodésica maximizante de  $p_0$  a  $q$  é temporal e normal a  $P_{\kappa,\beta}$ . Por outro lado, vimos no Teorema 3.5.5(i) que as curvas integrais do campo  $\partial_t$  são geodésicas normais às hipersuperfícies de nível (em particular, a  $P_{\kappa,\beta}$ ). Por unicidade, concluímos que essas curvas integrais são geodésicas temporais maximizantes passando por  $P_{\kappa,\beta}$ . Decorre também do Teorema 3.5.5–(iii) que o comprimento de uma tal geodésica partindo de  $P_{\kappa,\beta}$  até o ponto  $q \in \{t_0\} \times N_{\kappa,\beta}$  é  $t_0 = d_{\kappa,\beta}(q) = \text{pr}_1(q)$ . ■

Como vimos na demonstração do resultado acima, as geodésicas maximizantes futuro-dirigidas emanando de  $P_{\kappa,\beta}$  são curvas integrais do campo  $\partial_t = -\nabla t$ . Porém, curvas integrais não se cruzam, então cada ponto de  $I^+(P_{\kappa,\beta})$  é conectado a  $P_{\kappa,\beta}$  por uma única geodésica maximizante. Assim, concluímos que  $\text{Cut}^+(P_{\kappa,\beta}) = \emptyset$ . Além disso, de  $d_{\kappa,\beta} = t$ , concluímos que as esferas futuras de  $P_{\kappa,\beta}$  coincidem com as esferas futuras restringidas, isto é,

$$S_{\kappa,\beta}^+(t) = \mathcal{S}_{\kappa,\beta}^+(t) = \{t\} \times N_{\kappa,\beta}.$$

Como vimos em (6.6) e (6.16), essas hipersuperfícies possuem curvatura média constante com respeito a  $\partial_t$  e dadas por

$$h_{\kappa,\beta}(t) = h_t = -\Delta_{\kappa,\beta} d_{\kappa,\beta} |_{S_{\kappa,\beta}^+(t)}.$$

Além disso, segue-se da fórmula de variação de área (3.54) o seguinte resultado.

**Proposição 6.2.7.** *Se  $B \subset P_{\kappa,\beta}$  é um conjunto compacto, e  $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M_{\kappa,\beta} \longrightarrow M_{\kappa,\beta}$  é o fluxo de  $\partial_t = -\nabla d_{\kappa,\beta}$ . Então,  $\Phi_t(B) = \tilde{S}_B^+(t)$  para todo  $t > 0$  e*

$$\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_B^+(t) = \frac{\text{area}_{\kappa,\beta} B}{f_{\kappa,\beta}(0)^n} \cdot f_{\kappa,\beta}(t)^n. \quad (6.22)$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar que  $\Phi_t(B) = \tilde{S}_B^+(t)$  para todo  $t > 0$ . Seja  $p = (0, x) \in B$ , então  $\Phi_t(p) = \gamma_p(t) = (t, p)$ . Assim,

$$\Phi_t(B) = \{(t, x) \mid x \in B\} \subset S_{\kappa,\beta}^+(t).$$

Porém, vimos no Teorema 3.5.5 que as geodésicas temporais (curvas integrais de  $\partial_t$ ) partindo normalmente de  $P_{\kappa,\beta}$  e indo até esse conjunto tem comprimento  $t$ . Em particular,  $\Phi_t(B) \subset \tilde{S}_B^+(t)$ .

Por outro lado, dado um ponto  $(t, x) \in \tilde{S}_B^+(t)$ , denote por  $\gamma$  a única geodésica temporal maximizante futuro-dirigida partindo normalmente de  $B$  até o ponto  $(t, x)$ , conforme a Proposição 6.1.15. Em particular,  $\gamma$  é curva integral de  $\partial_t$  e seu ponto de partida é  $(0, x) \in B$ . Logo,

$$\Phi_t(0, x) = (t, x) \in \Phi_t(B) \implies \tilde{S}_B^+(t) \subset \Phi_t(B).$$

O que conclui a primeira parte da prova.

Pela primeira variação de área (3.54), temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_s(B) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_{t+s}(B) - \text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_t(B)}{s} \\ &= \int_{\Phi_t(B)} h_t d\mu_t \\ &\stackrel{(6.16)}{=} n \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_t(B). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Defina  $A(t) := \text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_t(B)$ . De (6.23), temos que

$$A'(t) = n \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot A(t) \implies \frac{A'(t)}{A(t)} = n \frac{f'(t)}{f(t)},$$

donde concluímos que

$$A(t) = c f^n(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pondo  $t = 0$ , vemos que

$$c = \frac{A(0)}{f^n(0)} = \frac{\text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_0(B)}{f^n(0)} = \frac{\text{area}_{\kappa, \beta} B}{f^n(0)}.$$

Logo,

$$\text{area}_{\kappa, \beta} \Phi_t(B) = \text{area}_{\kappa, \beta} \tilde{S}_B^+(t) = \frac{\text{area}_{\kappa, \beta} B}{f^n(0)} \cdot f^n(t) \quad \blacksquare$$

Agora, iremos provar um teorema de comparação que será crucial posteriormente. Para isso, faremos uso do Teorema de comparação escalar de Riccati 4.1.4. Convencionamos que os termos acompanhados dos índices  $\kappa, \beta$  estarão sempre associados ao espaço de comparação  $(M_{\kappa, \beta}, g_{\kappa, \beta})$  introduzido em (6.21).

**Teorema 6.2.8 (Teorema de comparação d'Alembertiano).** *Sejam  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$  e suponha que o par  $(P, M^{n+1})$  satisfaz as CCC( $\kappa, \beta$ ). Então, para cada  $q \in \mathcal{I}^+(P)$ , temos que  $d_P(q) < b_{\kappa, \beta}$  e*

$$h_{d_P(q)}(q) = -\Delta d_P(q) \leq -\Delta_{\kappa, \beta} d_{\kappa, \beta} |_{S_{\kappa, \beta}^+(d_P(q))} = h_{\kappa, \beta}(d_P(q)). \quad (6.24)$$



*Demonstração.* Vimos em (6.6) que

$$h_{d_P(q)}(q) = \text{tr } S|_q = -\Delta d_P(q),$$

e, conforme o Teorema 3.5.7, temos que

$$\nabla_n S + S^2 + R_n = 0, \quad (6.25)$$

onde  $n = -\nabla d_P$  e  $R_n = R(\cdot, n)n$ .

Fixe  $q \in I^+(P)$ , e seja  $\gamma : [0, d_P(q)] \rightarrow M$  a única geodésica temporal unitária maximizante futuro-dirigida de  $P$  a  $q$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base ortonormal de  $\gamma'(0)^\perp = T_{\gamma(0)}P$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  referencial ortonormal transportado paralelamente ao longo de  $\gamma$ . Restringindo a Equação 6.25 para ao longo de  $\gamma$ , ficamos com

$$\frac{D^\gamma}{dt}(S|_\gamma) + S|_\gamma^2 + R_{n|_\gamma} = 0.$$

Pela Proposição 6.1.15, temos que  $\gamma' = -\nabla d_P$ , então a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{D^\gamma}{dt}(S|_\gamma) + S|_\gamma^2 + R_{\alpha'} = 0. \quad (6.26)$$

Por conveniência, reescreva a equação (6.26) como

$$S' + S^2 + R = 0. \quad (6.27)$$

Aplicando esses operador no referencial  $\{E_1, \dots, E_n\}$ , obtemos funções suaves  $S_{ij}, R_{ij} : [0, d_P(q)] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$S(E_j) = \sum_{i=1}^n S_{ij} \cdot E_i,$$

$$R(E_j) = \sum_{i=1}^n R_{ij} \cdot E_i.$$

Assim, ficam bem definidas as aplicações com valores matriciais  $\bar{S}, \bar{R} : [0, d_P(q)] \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  definidas como

$$\bar{S}(t) := [S_{ij}(t)] \text{ e } \bar{R}(t) := [R_{ij}(t)].$$

Como tomamos um referencial ortonormal, temos que essas matrizes são auto-adjuntas visto que os operadores  $S$  e  $R$  o são. Assim, a Equação 6.26 pode ser reescrita matricialmente como

$$\bar{S}' + \bar{S}^2 + \bar{R} = 0. \quad (6.28)$$

Utilizando a hipótese da  $CCC(\kappa, \beta)$ , temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\bar{R}(t)) &= \operatorname{tr}[R(\cdot, \gamma'(t))\gamma'(t)] \\ &= \operatorname{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &\stackrel{CCC(\kappa, \beta)}{\geq} n\kappa, \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde a segunda igualdade segue do fato que  $\gamma$  é unitária, daí  $\gamma'(t)$  pode ser completada numa base ortonormal, e então basta aplicar a definição do Ricci. Também segue da  $CCC(\kappa, \beta)$  que

$$\operatorname{tr} \bar{S}(0) = \operatorname{tr} S|_{\gamma(0)} =: h_{t=0}(\gamma(0)) \stackrel{CCC(\kappa, \beta)}{\leq} \beta. \quad (6.30)$$

A fim de usar o Teorema de comparação escalar de Riccati 4.1.4 adiante, é conveniente estender a geodésica unitária maximal  $\gamma$  até um parâmetro  $L \leq +\infty$  de modo que  $\gamma : [0, L) \rightarrow M$  seja inextensível em  $L$  e inteiramente contida em  $\mathcal{I}^+(P)$ , o que é possível, pois  $\mathcal{I}^+(P)$  é aberto como mostramos no Teorema 6.1.11. Dessa forma, as extensões  $\tilde{S}, \tilde{R} : [0, L) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  possuem todas as propriedades acima.

No que se refere ao nosso espaço de comparação, defina a função

$$S_{\kappa, \beta} := \frac{1}{n} h_{\kappa, \beta}|_{[0, b_{\kappa, \beta})} : [0, b_{\kappa, \beta}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Essa função está bem definida tendo em vista que  $h_{\kappa, \beta}$  é constante nas hipersuperfícies  $\{t\} \times N_{\kappa, \beta}$ . Assim,  $S_{\kappa, \beta}$  é inextensível à direita pela construção de  $b_{\kappa, \beta}$  e  $S_{\kappa, \beta}(0) = \beta/n$ . Além disso, segue-se de (6.18) que  $S_{\kappa, \beta}$  satisfaz a equação de Riccati

$$S'_{\kappa, \beta} + S_{\kappa, \beta}^2 + \kappa = 0. \quad (6.31)$$

Pelo Teorema de comparação de Riccati, segue-se de (6.28) e (6.31) que

$$L \leq b_{\kappa, \beta} \stackrel{L > d_P(q)}{\implies} d_P(q) < b_{\kappa, \beta},$$

e

$$\operatorname{tr} \bar{S}(t) = \operatorname{tr} S|_{\gamma(t)} \leq nS_{\kappa, \beta}(t) = h_{\kappa, \beta}(t).$$

Ponha  $t = d_P(q)$ , então

$$h_{d_P(q)}(q) = \operatorname{tr} S|_{\gamma(d_P(q))} \leq h_{\kappa, \beta}(d_P(q)).$$

O que conclui a prova. ■

Note que estivemos aptos a aplicar o teorema de comparação escalar de Riccati na prova

anterior. Uma das hipóteses necessárias que precisou ser satisfeita é a de que

$$S_{\kappa,\beta}(0) - \frac{\text{tr} \bar{S}(0)}{n} \geq 0,$$

mas isso é verificado, pois  $S_{\kappa,\beta}(0) = \beta/n$  e  $\text{tr} \bar{S}(0) \leq \beta$ .

### 6.3 Comparação de área e volume

Utilizando-se do Teorema de comparação d'Alembertiano 6.2.8, juntamente com a primeira variação de área (3.54) e a fórmula de coárea (3.5.9), estamos em condições de provar os principais resultados desse trabalho: teoremas de comparação de área e volume.

**Teorema 6.3.1 (Teorema de comparação de área).** *Sejam  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$  e suponha que o par  $(P, M^{n+1})$  satisfaz as CCC( $\kappa, \beta$ ). Então, para quaisquer compactos  $A_1 \subset P$  e  $A_2 \subset P_{\kappa,\beta}$ , a função*

$$t \mapsto \frac{\text{area} \tilde{S}_{A_1}^+(t)}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t)}, \quad t \in [0, b_{\kappa,\beta}),$$

*é não crescente. Em particular,*

$$\text{area} \tilde{S}_{A_1}^+(t) \leq \frac{\text{area} A_1}{\text{area}_{\kappa,\beta} A_2} \cdot \text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t), \quad \forall t \in [0, b_{\kappa,\beta}).$$

*Demonstração.* Sejam  $0 < t_1 < t_2 < b_{\kappa,\beta}$ . Sabemos que cada ponto de  $S_{A_1}^+(t_2)$  pode ser atingido por uma única geodésica temporal unitária maximizante futuro-dirigida. Como essas geodésicas são curvas integrais de  $n = -\nabla d_P$  (Proposição 6.1.15), temos que

$$K(t) := \Phi_{t-t_2}(S_{A_1}^+(t_2)) \subset \tilde{S}_{A_1}^+(t), \quad (6.32)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo de  $n$ . Além disso,  $K(t)$  é compacto visto que  $A_1$  o é, e  $\Phi$  está bem definida em  $(-t, t_2 - t) \times K(t)$ . Assim, podemos usar a fórmula de variação de área (3.54) e o teorema de

comparação d'Alembertiano, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \log(\text{area } K(t)) &= \frac{1}{\text{area}K(t)} \cdot \frac{d}{dt} \text{area } K(t) \\
&\stackrel{(3.54)}{=} \frac{1}{\text{area}K(t)} \int_{\Phi_t(K)} \text{tr } S(t) d\mu_t \\
&= \frac{1}{\text{area}K(t)} \int_{K(t)} h_t(q) d\mu_t \\
&= h_t(q) \stackrel{(6.24)}{\leq} h_{\kappa,\beta}(t) \\
&= \frac{1}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t)} \int_{\tilde{S}_{A_2}^+(t)} h_{\kappa,\beta}(t) d\mu_t \\
&\stackrel{(3.54)}{=} \frac{1}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t)} \cdot \frac{d}{dt} \text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t) \\
&= \frac{d}{dt} \log(\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t)). \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Isso mostra que a função  $t \mapsto \text{area } K(t)/\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t)$  é não crescente em  $[0, t_2]$ . Logo,

$$\frac{\text{area } \tilde{S}_{A_1}^+(t_2)}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t_2)} = \frac{\text{area } K(t_2)}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t_2)} \leq \frac{\text{area } K(t_1)}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t_1)} \leq \frac{\text{area } \tilde{S}_{A_1}^+(t_1)}{\text{area}_{\kappa,\beta} \tilde{S}_{A_2}^+(t_1)},$$

onde a última desigualdade segue simplesmente do fato que  $K(t_1) \subset \tilde{S}_{A_1}^+(t_1)$ . Como  $0 < t_1 < t_2 < b_{\kappa,\beta}$  foram tomados arbitrariamente, segue o resultado. ■

Para o teorema de comparação de volume, precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 6.3.2.** *Sejam  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$  funções contínuas, não nulas em  $(a, b)$ , e suponha que  $f/g$  é não crescente em  $(a, b)$ . Então, as funções  $F, G : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ , dadas por*

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy \quad e \quad G(x) = \int_a^x g(y) dy,$$

*são contínuas, e  $F/G$  é não crescente em  $(a, b)$ .*

*Demonstração.* A continuidade de  $F$  e  $G$  decorre da continuidade de  $f$  e  $g$ . Sejam  $r, R \in (a, b)$  com  $r \leq R$ . Como  $f/g$  é não crescente, temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^r f(x) dx \cdot \int_r^R g(x) dx &\geq \int_a^r \frac{f(r)}{g(r)} g(x) dx \cdot \int_r^R \frac{g(r)}{f(r)} f(x) dx \\
&= \int_a^r g(x) dx \cdot \int_r^R f(x) dx.
\end{aligned}$$

Usando esta desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
F(r) \cdot G(R) &= \int_a^r f(x)dx \cdot \int_a^R g(x)dx \\
&= \int_a^r f(x)dx \cdot \int_a^r g(x)dx + \int_a^r f(x)dx \cdot \int_r^R g(x)dx \\
&\geq \int_a^r f(x)dx \cdot \int_a^r g(x)dx + \int_a^r g(x)dx \cdot \int_r^R f(x)dx \\
&= \int_a^R f(x)dx \cdot \int_a^r g(x)dx \\
&= F(R) \cdot G(r),
\end{aligned}$$

como desejado. ■

**Teorema 6.3.3.** *Sejam  $\kappa, \beta \in \mathbb{R}$  e suponha que o par  $(P, M^{n+1})$  satisfaz as CCC( $\kappa, \beta$ ). Então, para quaisquer compactos  $A_1 \subset P$  e  $A_2 \subset P_{\kappa, \beta}$ , a função*

$$t \mapsto \frac{\text{vol} \tilde{\mathcal{B}}_{A_1}^+(t)}{\text{vol}_{\kappa, \beta} \tilde{\mathcal{B}}_{A_2}^+(t)}, \quad t \in [0, b_{\kappa, \beta}),$$

é não crescente.

*Demonstração.* Primeiramente, como  $A_1, A_2$  são compactos, o volume dessas bolas é finito. Pela fórmula de coárea (3.5.9), temos que

$$\text{vol} \tilde{\mathcal{B}}_{A_1}^+(t) = \int_0^t dr \cdot \int_{\tilde{\mathcal{S}}_{A_1}^+(r)} d\mu_r = \int_0^t \text{area} \tilde{\mathcal{S}}_{A_1}^+(r) dr. \quad (6.34)$$

Seja  $t_2 \in (0, b_{\kappa, \beta})$ . Pela fórmula de variação de área, as aplicações

$$t \in [0, t_2] \mapsto \text{area} \tilde{\mathcal{S}}_{A_1}^+(t) \in \mathbb{R},$$

$$t \in [0, t_2] \mapsto \text{area}_{\kappa, \beta} \tilde{\mathcal{S}}_{A_2}^+(t) \in \mathbb{R}$$

são contínuas. Assim, podemos aplicar o Lema 6.3.2, juntamente com o teorema de comparação de área e a Equação (6.34), para concluirmos que a função

$$t \mapsto \frac{\text{vol} \tilde{\mathcal{B}}_{A_1}^+(t)}{\text{vol}_{\kappa, \beta} \tilde{\mathcal{B}}_{A_2}^+(t)}, \quad t \in [0, t_2],$$

é não crescente. Como  $0 < t_2 < b_{\kappa, \beta}$  foi tomado arbitrariamente, segue o resultado. ■

Como uma aplicação bastante interessante desses teoremas de comparação, podemos provar o seguinte teorema de singularidade de Hawking (Hawking (1973), p. 272).

**Teorema 6.3.4.** *Seja  $(M, g)$  globalmente hiperbólico e  $P \subset M$  uma hipersuperfície espacial FCC acausal. Suponha que  $(P, M)$  satisfaça a CCC( $\kappa, \beta$ ), com  $\kappa = 0$  e  $\beta < 0$ . Então, nenhuma curva causal futuro-dirigida partindo de  $P$  pode ter comprimento maior do que  $1/|\beta|$ . Em particular,  $M$  é geodesicamente incompleto temporalmente.*

*Demonstração.* Iremos exibir duas provas alternativas desse resultado.

*Prova via comparação d'Alembertiana* Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica temporal, unitária,  $P$ -normal, futuro-dirigida e maximizante. Então,  $\gamma(t) \in I^+(P)$  para todo  $t \in (0, b)$ . Para  $\kappa = 0$  e  $\beta < 0$ , segue-se do teorema de comparação d'Alembertiano 6.2.8 que

$$-(\Delta d_P)(\gamma(t)) \leq H_{0,\beta}(t) = \frac{1}{t + 1/|\beta|} = \frac{1}{t - 1/|\beta|}, \quad \forall t \in (0, b). \quad (6.35)$$

Como o lado direito em (6.35) diverge para  $-\infty$  quando  $t \nearrow 1/|\beta|$ , e o lado esquerdo é finito para todo  $t \in (0, \infty)$ , concluímos que  $b \leq 1/|\beta|$ . Assim, como cada ponto de  $I^+(P)$  é conectado a  $P$  por uma geodésica maximizante, temos que  $d_P(q) \leq 1/|\beta|$  para todo  $q \in I^+(P)$ . Pela definição da distância Lorentziana, isto nos dá uma limitação superior para o comprimento de arco das curvas futuro-dirigidas emanando de  $P$ .

*Prova via comparação de área.* Mostraremos que  $S_P^+(1/|\beta|) \subset \text{Cut}^+(P)$ , o que implica  $S_P^+(t) = \emptyset$  para todo  $t > |\beta|$ . Daí, concluiremos que  $d_P(q) \leq 1/|\beta|$  para todo  $q \in I^+(P)$ , recaindo na prova anterior.

Suponha por contradição que existe  $q \in S_P^+(1/|\beta|) \setminus \text{Cut}^+(P) = \mathcal{S}_P^+(1/|\beta|)$ . Como o *cut locus* é fechado, existe uma vizinhança compacta  $K \subset \mathcal{S}_P^+(1/|\beta|)$  de  $q$  com a propriedade de que  $\text{area } K > 0$ . Ponha  $A := \Phi_{-1/|\beta|}(K) \subset P$ , onde  $\Phi$  é o fluxo de  $n = -\nabla d_P$ , e seja  $B \subset P_{0,\beta}$  um subconjunto compacto qualquer. Pelo teorema de comparação de área 6.3.1, obtemos

$$\text{area} \tilde{S}_A^+(t) \leq \frac{\text{area } A}{\text{area}_{0,\beta} B} \cdot \text{area}_{0,\beta} \tilde{S}_B^+(t) \sim (1 - |\beta|t), \quad \forall t \in (0, 1/|\beta|).$$

cuja aproximação acima foi obtida tomando  $\kappa = 0$ , e  $\beta < 0$  na Tabela 6.1, e aplicando os resultados obtidos na Proposição 6.2.7. Segue-se que  $\text{area} \tilde{S}_A^+(t_0) = 0$  para algum  $t_0 \leq 1/|\beta|$ , e portanto  $\text{area } K \leq \text{area} \tilde{S}_A^+(1/|\beta|) = 0$ . Isso contradiz a escolha de  $K$ . ■

# A Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos e Lorentzianos

Neste apêndice fazemos uma breve revisão sobre questões de álgebra linear necessárias para o estudo da geometria semi-Riemanniana, com especial ênfase no caso Lorentziano. As demonstrações dos fatos citados aqui serão omitidas e podem ser vistas em grande detalhe em Costa e Silva (s.d.), Capítulo 1, ou O'Neill (1983), Capítulo 2.

## A.1 Formas Bilineares

Uma *forma bilinear* sobre um espaço vetorial (real)  $\mathbb{V}$  de dimensão finita  $n$  é uma função  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo,

$$\begin{aligned} b(u, cv + w) &= cb(u, v) + b(u, w) \\ b(cu + v, w) &= cb(u, w) + b(v, w), \end{aligned}$$

para todo  $u, v, w \in \mathbb{V}$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Uma forma bilinear  $b$  é dita ser *simétrica* (resp. *antissimétrica*) se  $b(v, w) = b(w, v)$  (resp.  $b(v, w) = -b(w, v)$ ), e uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica é dita ser *não degenerada* se, para todo  $w \in \mathbb{V}$ ,  $b(v, w) = 0$  implica  $v = 0$ .

Em relação ao sinal de uma forma bilinear  $b$  *simétrica*, dizemos que

- $b$  é *positivo-definida* se  $b(v, v) > 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$  não nulo.
- $b$  é *negativo-definida* se  $b(v, v) < 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$  não nulo.
- $b$  é *indefinida* se não for positiva nem negativa-definida.

Observe que formas bilineares positivo ou negativo-definidas são sempre não degeneradas. Formas *positivo-semidefinidas* são tais que  $b(v, v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$ , podendo se anular em algum  $v \neq 0$ . Formas *negativo-semidefinidas* são definidas analogamente.

Fixado uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{V}$ , associamos qualquer bilinear  $b$  a uma matriz  $n \times n$  dada por  $B = [b(v_i, v_j)]$ , que é simétrica no caso de  $b$  ser simétrica. Com isto, definimos a *nulidade*, denotado por  $N(b)$ , e o *posto* de  $b$  denotado por  $R(b)$ , como sendo, respectivamente, a dimensão do núcleo e da imagem de uma representação matricial de  $b$ . Tais números são invariantes por escolha de base, visto que uma troca de base leva não altera dimensão de núcleo e imagem. Pelo teorema do núcleo e imagem,  $R(b) = \dim \mathbb{V} - N(b)$ .

Se  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é um subespaço vetorial, denotaremos por  $b|_{\mathbb{W}}$  a restrição  $b|_{\mathbb{W} \times \mathbb{W}}$ . Tais restrições nos dão outra quantidade invariante para formas bilineares simétricas. O *índice* de  $b$  é o número

natural

$$\text{ind}(b) = \max\{\dim \mathbb{W} \mid \mathbb{W} \subseteq \mathbb{V} \text{ é subespaço vetorial e } b|_{\mathbb{W}} \text{ é negativa-definida}\}.$$

Vemos facilmente que  $\text{ind}(b) \leq R(b)$ . O nosso resultado principal para formas bilineares simétricas é o seguinte.

**Teorema A.1.1 (Lei da Inércia de Sylvester).** *Seja  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $\mu = \text{ind}(b)$  e  $r = R(b)$ , temos*

- (i) *Existe uma base ordenada  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{V}$  tal que, para todo vetor  $v \in \mathbb{V}$ , escrevendo  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,*

$$b(v, v) = - \sum_{i=1}^{\mu} x_i^2 + \sum_{i=\mu+1}^r x_i^2.$$

*Tal base é chamada de base de Sylvester.*

- (ii) *Se uma base  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  é tal que existem  $\mu', r' \in \{0, \dots, n\}$  com*

$$g(v, v) = - \sum_{i=1}^{\mu'} x_i^2 + \sum_{i=\mu'+1}^{r'} x_i^2,$$

*para qualquer vetor  $v = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ , então  $\mu' = \text{int}(b)$  e  $r' = R(b)$ , e tal base é de Sylvester.*

## A.2 Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de uma forma bilinear  $g$  simétrica e não degenerada de índice  $\mu$ . O par  $(\mathbb{V}, g)$  é dito ser um espaço vetorial *semi-Euclidiano* de índice  $\mu$ . Uma tal forma bilinear  $g$  é chamada de *produto escalar*.

Espaços semi-Euclidianos são generalizações naturais de espaços com produto interno. Vemos que  $\mu = 0$  se e somente se  $g$  é positivo-definida, logo um produto interno usual. Neste contexto chamamos tais espaços de *Euclidianos*. Quando  $\dim \mathbb{V} \geq 2$  e  $\mu = 1$ ,  $(\mathbb{V}, g)$  é dito ser um espaço vetorial *Lorentziano*.

De maneira análoga ao caso Euclidiano, definimos a norma de um vetor  $v$  em um espaço semi-Euclidiano  $(V, g)$  como sendo

$$|v| = \sqrt{|g(v, v)|} \geq 0,$$

que pode ser nula mesmo se  $v \neq 0$ , logo não é uma norma no sentido Euclidiano. Um vetor  $v$  com  $|v| = 1$  é dito ser *unitário*. Novamente, por analogia aos espaços Euclidianos, vetores  $v, w$  são *ortogonais* se  $g(v, w) = 0$ , e *ortonormais* se são ortogonais e unitários. No caso de  $g$  não degenerada o seguinte resultado é imediato do teorema A.1.1.



**Proposição A.2.1.** *Todo espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$  possui uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .*

**Observação A.2.2.** É comum ordenar bases ortonormais  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de forma que os primeiros ou últimos  $\mu$  vetores sejam tais que  $g(e_i, e_i) = -1$ . Aqui sempre que bases ortogonais forem mencionadas ficará sempre implícita que escolhemos os *primeiros*  $\mu$  de tal maneira. Neste contexto, o símbolo  $\varepsilon_i$  para um espaço vetorial semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$  sempre significará

$$\varepsilon_i = \begin{cases} g(e_i, e_i) = -1, & \text{se } i = 1, \dots, \mu \\ g(e_i, e_i) = +1, & \text{se } i = \mu + 1, \dots, n, \end{cases}$$

que claramente não depende da escolha de base ortonormal.

O *perp* de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{V}$  é

$$A^\perp = \{w \in \mathbb{V} \mid g(v, w) = 0 \text{ para todo } v \in A\}.$$

Um subespaço vetorial  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é dito ser *não degenerado* se a restrição  $g|_{\mathbb{W}}$  é uma forma bilinear não degenerada.

**Proposição A.2.3.** *Seja  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial semi-Euclidiano  $n$ -dimensional e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço. Então*

- (i)  $\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp = n$ .
- (ii)  $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$ .
- (iii)  $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp \Leftrightarrow \mathbb{W}$  é não degenerado  $\Leftrightarrow \mathbb{W}^\perp$  é não degenerado.

Com mais uma analogia ao caso Euclidiano, definimos, em um espaço vetorial semi-Euclidiano com uma base ordenada ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$

- O *adjunto* de um operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  como sendo o único operador linear  $T^*$  tal que

$$g(T(v), w) = g(v, T^*(w)),$$

para todo  $u, v \in \mathbb{V}$ . Em particular,  $T$  é *autoadjunto* se  $T^* = T$ .

- O *traço* de uma forma bilinear  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\text{tr } b = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i b(e_i, e_i).$$

É fácil ver que tal definição não depende da escolha de base *ortonormal*. (Há uma relação utilizando bases não ortonormais, mas não faremos uso dela aqui.)

- O *traço* de um operador linear  $S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  é definido como sendo o traço (no sentido do último item) da forma bilinear  $g(S(v), w)$ . Isto é,

$$\text{tr } S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(S(e_i), e_i).$$

Em um espaço vetorial semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$ ,  $g(v, v)$  pode ser tanto positivo quando negativo ou nulo. Seu sinal diz respeito ao *caráter causal* de  $v$ . Mais precisamente, dizemos que  $v$  é

- (i) *temporal* (ou *tipo-tempo*) se  $g(v, v) < 0$ ,
- (ii) *luminoso* (ou *tipo-luz*) se  $g(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ ,
- (iii) *espacial* (ou *tipo-espaço*) se  $g(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ .

Dizemos ainda que um vetor  $v$  é *causal* se for temporal ou luminoso<sup>1</sup>.

### A.3 Espaços Vetoriais Lorentzianos

Para espaços vetoriais Lorentzianos  $(\mathbb{V}, g)$ , temos  $\dim \mathbb{V} \geq 2$  e  $\mu = 1$ , assim, subespaços vetoriais possuem classificações bem características para este caso. Se  $\mathbb{W}$  é um subespaço com  $g|_{\mathbb{W}}$  não degenerada, tal forma só pode ter índice 0 ou 1. Dizemos que  $\mathbb{W}$  é *temporal* se  $\text{ind}(g|_{\mathbb{W}}) = 1$ , e que é *espacial* se  $\text{ind}(g|_{\mathbb{W}}) = 0$ . No caso de  $g|_{\mathbb{W}}$  ser degenerada, dizemos que  $\mathbb{W}$  é *luminoso*.

Temos os seguintes resultados para subespaços no caso Lorentziano.

**Proposição A.3.1.** *Dado  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço vetorial de  $(\mathbb{V}, g)$  Lorentziano, temos*

1.  $\mathbb{W}$  é *temporal* se e somente se  $\mathbb{W}^\perp$  é *espacial*.
2.  $\mathbb{W}$  é *luminoso* se e somente se  $g|_{\mathbb{W}}$  é *positivo-semidefinido* mas não *positivo-definido*.

**Proposição A.3.2.** *Para um espaço vetorial Lorentziano  $(\mathbb{V}, g)$  e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço vetorial com  $\dim \mathbb{W} \geq 2$ , são equivalentes*

- (i)  $\mathbb{W}$  é *temporal*;
- (ii)  $\mathbb{W}$  contém dois vetores temporais linearmente independentes;
- (iii)  $\mathbb{W}$  contém um vetor luminoso.

<sup>1</sup>É comum encontrar, na literatura em inglês, vetores luminosos serem chamados de *nulos* (*null vectors*). Isto pode se tornar muito ambíguo, portanto nunca utilizaremos esta nomenclatura

### A.3.1 O Caso Luminoso

Finalizamos este apêndice comentando brevemente alguns resultados associados a vetores luminosos e espaços vetoriais quocientes sobre vetores luminosos que são necessários para construções no texto principal.

**Proposição A.3.3.** *Para um espaço vetorial Lorentziano  $(\mathbb{V}, g)$  e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  um subespaço qualquer, são equivalentes*

- (i)  $\mathbb{W}$  é luminoso;
- (ii)  $\mathbb{W}$  contém um vetor luminoso mas nenhum vetor temporal;
- (iii)  $\dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp) = 1$ .

**Definição A.3.4.** *Para  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$ , uma base ordenada  $\{v, w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é dita ser base pseudo-ortonormal se  $v$  e  $w$  são vetores luminosos tais que  $g(v, w) = -1$ , e o conjunto  $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é composto de vetores espaciais ortonormais, com cada um normal a  $v$  e  $w$ .*

**Proposição A.3.5.** *Todo espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$  admite uma base pseudo-ortonormal. Mais ainda, qualquer vetor luminoso  $v$  pode ser escolhido como o primeiro elemento de tal base.*

A partir deste resultado, para  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$ , considere  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço luminoso. Pela proposição A.3.3, existe  $w \in \mathbb{W}$  luminoso tal que  $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \mathbb{R}w$ . Agora, introduza em  $\mathbb{W}$  a seguinte relação de equivalência:

$$w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 = w_2 + cw, \text{ para algum } c \in \mathbb{R},$$

que é claramente de equivalência. Defina  $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{W}/(\mathbb{R}w)$  o quociente por tal relação, e denote por  $\bar{u}$  uma classe de equivalência em  $\overline{\mathbb{W}}$ . Acerca de tal quociente, temos os seguintes fatos.

**Proposição A.3.6.** *Para  $\overline{\mathbb{W}}$  como definido acima, temos*

- (i)  $\overline{\mathbb{W}}$  não depende da escolha de  $w$ , e com as operações no quociente  $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$  e  $\overline{cw_1} = c\overline{w_1}$ , é um espaço vetorial de dimensão  $\dim(\mathbb{W}) - 1$ . Em particular, se  $W = v^\perp$  para algum vetor luminoso  $v \in \mathbb{V}$ , então  $\dim(\overline{v^\perp}) = n - 2$ .
- (ii) Dados  $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{W}}$ , a operação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \overline{\mathbb{W}} \times \overline{\mathbb{W}} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\langle \overline{w_1}, \overline{w_2} \rangle = g(w_1, w_2).$$

*está bem-definida e define um produto interno (positivo-definido) em  $\overline{\mathbb{W}}$ .*

- (iii) Se  $\{v, w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é uma base pseudo-ortonormal de  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W} = v^\perp$ , então  $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_{n-2}}\}$  é base de  $\overline{\mathbb{W}}$  ortonormal em relação ao produto interno induzido no item (ii).

## Conclusão

Ao longo desta dissertação, estudamos diversos aspectos de geometria semi-Riemanniana e Lorentziana, em uma ordem de construção e sequência lógica com o objetivo de enunciar e demonstrar claramente os teoremas de comparação de área e volume para hipersuperfícies Lorentzianas como consequência da teoria de Jacobi e da causalidade.

Um ponto que merece atenção especial neste trabalho é o método utilizado para obtenção dos resultados referentes à existência de geodésicas maximizantes. Optamos por uma abordagem utilizando-se da convergência  $h$ -uniforme, porém é comum na bibliografia fazer-se uso da chamada topologia  $C^0$  para obtenção de tais resultados, como pode ser visto em Espinoza (2020).

Naturalmente, há mais resultados de comparação na geometria. Uma abordagem Riemanniana similar à desenvolvida neste trabalho pode ser encontrada em Treude (2011), bem como uma versão diferenciada para o caso Lorentziano.

Para obtenção dos resultados de comparação neste trabalho, assumimos uma série de hipóteses sobre os espaços de comparação, donde destacam-se a condição de comparação cosmológica e as propriedades causais para as hipersuperfícies Lorentzianas. Nesse sentido, as possibilidades para estudos futuros nessa área são imensuráveis. Sugerimos a abordagem deste tema sob diferentes hipóteses causais, considerar outros espaços de comparação, e quais novos resultados de comparação poderiam ser obtidos.

## Referências

- BEEM, John K.; EHRLICH, Paul E.; EASLEY, Kevin L. **Global Lorentzian Geometry**. 2. ed. New York: CRC Press, 1999. p. 656.
- BARTLE, R.G., **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**, New York: J.Wiley, 1995.
- BERNAL, A. N; SÁNCHEZ, M. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes, **Comm. Math. Phys.**, vol. 257. p. 43–50. May 2005.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. p. 335.
- COSTA E SILVA, Ivan Pontual. **Lecture Notes on Semi-Riemannian Geometry**. [S.l.: s.n.]. No prelo 2020.
- ESPINOZA, V.L. **Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com aplicações à relatividade**. 2020. Dissertação - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- GEROCH, R. P. What is a singularity in general relativity. *Ann. Phys. (N.Y.)* **48**, p. 526-540. 1968.
- GRAY, A. *Tubes*, 2 ed., vol. 221 of **Progress in Mathematics**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- HAWKING, S.W; ELLIS, G.F.R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 391. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- KUNDT, W. Note on the completeness of spacetimes. *Zs. für Phys* **172**. 1963. p. 488-489.
- LEE, J.M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012. v. 218, p. 708. (Graduate Texts in Mathematics).
- NOMIZU, Katsumi; OZEKI, Hideki. **The existence of complete Riemannian metrics**. *Proceedings of the American Mathematical Society, JSTOR*, v. 12, n. 6, p. 889–891, 1961.
- O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity**. 1. ed. San Diego: Academic Press, 1983. v. 108. (Pure and Applied Mathematics).
- TREUDE, J. **Ricci Curvature Comparison in Riemannian and Lorentzian Geometry**. 2011. Dissertação – University of Vienna.
- TREUDE, J.; GRANT, J.D.E. **Volume comparison for hypersurfaces in Lorentzian manifolds and singularity theorems**. *Ann Glob Anal Geom* 43, 233–251 (2013).