



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E
SISTEMAS

João Bernardo Aranha Ribeiro

Algoritmos de MPC Robusto para Modelos Industriais de Entrada e Saída

Florianópolis
2020

João Bernardo Aranha Ribeiro

Algoritmos de MPC Robusto para Modelos Industriais de Entrada e Saída

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr.

Coorientador: Prof. Daniel Martins Lima, Dr.

Coorientador: Eng. Rodrigo da Silva Gesser, M.Eng.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ribeiro, João Bernardo Aranha
Algoritmos de MPC Robusto para Modelos Industriais de
Entrada e Saída / João Bernardo Aranha Ribeiro ;
orientador, Julio Elias Normey-Rico, coorientador, Daniel
Martins Lima, coorientador, Rodrigo da Silva Gesser, 2020.
115 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Estabilidade
robusta. 3. Controle robusto. 4. Controle preditivo. 5.
Incertezas no modelo. I. Normey-Rico, Julio Elias. II.
Martins Lima, Daniel. III. da Silva Gesser, Rodrigo IV.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. V. Título.

João Bernardo Aranha Ribeiro

Algoritmos de MPC Robusto para Modelos Industriais de Entrada e Saída

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Eng. Mário César M. Massa de Campos, Dr.
Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello - Cenpes/Petrobras

Prof. Rodolfo César Costa Flesch, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Gustavo Artur de Andrade, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Prof. Werner Kraus Junior, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr.
Orientador

Florianópolis, 26 de maio de 2020.

Este trabalho é dedicado a meus pais pelo apoio incondicional e por nunca me deixarem desanimar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e força necessária para terminar este mestrado.

Agradeço aos meus pais, por todo o suporte que me deram e pelo incentivo contínuo dado durante todo o curso. A meus irmãos, pelo apoio e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina, em especial ao Departamento de Automação e Sistemas, por proporcionar um ambiente adequado para o desenvolvimento de minha pesquisa.

À Petrobras e ao Centro de Pesquisa Leopoldo Américo Miguez de Mello (CEN-PES) por financiar esse trabalho.

A meu orientador Prof. Julio E. Normey Rico pela orientação e disposição durante a execução deste trabalho e a meus co-orientadores Prof. Daniel Lima e Eng. Rodrigo Gesser pelo apoio e paciência.

E a todos os colegas do laboratório por contribuírem, mesmo que indiretamente, no desenvolvimento deste trabalho e pelos momentos de descontração vividos.

*"I don't know if we each have a destiny, or if we're all just floating around accidental-like on a breeze, but
I think maybe it's both."
(Forrest Gump, 1994)*

RESUMO

Os algoritmos de controle preditivo têm uma grande aceitação na indústria de processos devido à capacidade de lidar com sistemas multivariáveis e com restrições. Esses são projetados baseando-se no modelo da planta que geralmente está sujeito a incertezas. Nesse contexto, é definido como controle preditivo robusto (RMPC) aquele que garante a estabilidade da malha fechada da planta mesmo na presença dessas incertezas. Existem diversas formulações RMPC, no entanto, estas são baseadas em modelos de espaço de estados para os quais a estabilidade é garantida sob a suposição de que os estados podem ser medidos, o que não acontece na prática. Assim, o objetivo deste trabalho é adaptar diferentes métodos RMPC utilizando apenas dados mensuráveis de entrada e saída. Os métodos escolhidos foram o RMPC baseado em tubos e o RMPC com Custo-Contrativo, pois estes têm um custo computacional aceitável. Primeiramente, a estratégia Controle Preditivo Generalizado (GPC) é adaptada para incluir restrições de custo contrativo de forma a garantir estabilidade robusta em aplicações práticas onde não se tem acesso aos estados. Em seguida, um RMPC baseado em tubos é adaptado utilizando um modelo não mínimo de forma a atingir o mesmo objetivo. Por fim, um sistema multivariável não linear é usado como um estudo de caso para ilustrar a aplicação dos controladores propostos.

Palavras-chave: Estabilidade robusta. Controle robusto. Controle preditivo. Incertezas no modelo.

ABSTRACT

Model Predictive Control (MPC) algorithms are widely accepted in industry due to its ability to handle multivariable and constrained systems. These are designed assuming a perfect plant model, however such models are usually associated with uncertainties. In this context, a controller that guarantees the plant closed-loop stability even in the presence of such uncertainties is defined as robust predictive control (RMPC). There are several RMPC formulations, however, they are based on state-space models where stability is usually assured under the assumption that the system states can be measured, which generally does not occur in practice. Thus, the aim of this work is to adapt different RMPC methods using only measurable input and output data. The methods chosen were the tube-based RMPC and the Cost-Contractive RMPC, as these have an acceptable computational burden. Firstly, the Generalized Predictive Control (GPC) strategy is adapted to include cost-contractive constraints to ensure robust stability in practical applications where there is no access to states. Then, a tube-based RMPC is adapted using a non-minimum model in order to achieve the same objective. Finally, a non-linear multivariable system is used as a case study to illustrate the application of the proposed controllers.

Keywords: Robust stability. Robust control. Predictive control. Model uncertainty.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura básica do MPC.	20
Figura 2 – Poliedro de distúrbio.	35
Figura 3 – Trajetórias dos estados.	38
Figura 4 – Resposta temporal com erro de modelo no atraso.	56
Figura 5 – Resposta temporal do RGPC para coluna debutanizadora.	59
Figura 6 – Comparação resposta temporal: GPC e RGPC.	60
Figura 7 – Valor da função objetivo dos modelos.	60
Figura 8 – Conjuntos ϕ_s calculados.	79
Figura 9 – Restrições apertadas para ambos os problemas.	82
Figura 10 – Conjuntos invariantes para rastreamento - Projeção nos estados.	82
Figura 11 – Conjuntos invariantes para rastreamento - Projeção na saída.	84
Figura 12 – Resposta temporal dos TRMPC para duplo integrador.	85
Figura 13 – O processo do tanque quádruplo.	90
Figura 14 – Comparação da saída da planta e sinal de controle entre GPC e RGPC.	94
Figura 15 – Resposta temporal dos TRMPC para o tanque quádruplo.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Restrições de entrada e estados.	77
Tabela 2 – Limites dos distúrbios.	77
Tabela 3 – Características dos conjuntos mRPIs calculados.	80
Tabela 4 – Comparação entre sistemas.	87
Tabela 5 – Parâmetros do processo.	91
Tabela 6 – Parâmetros de linearização.	91
Tabela 7 – Pontos de equilíbrio no conjunto Ω	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CARIMA	Média Móvel Integrada Auto-Regressiva Controlada, do inglês <i>Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average</i>
CARMA	Média Móvel Auto-Regressiva Controlada, do inglês <i>Controlled Auto-Regressive Moving Average</i>
CSTR	Reator Continuamente Agitado, do inglês <i>Continuous Stirred-Tank Reactor</i>
EKF	Filtro Estendido de Kalman, do inglês <i>Extended Kalman Filter</i>
GLP	Gás Liquefeito de Petróleo
GPC	Controlador Preditivo Generalizado, do inglês <i>Generalized Predictive Controller</i>
IHMPC	MPC com horizonte infinito, do inglês <i>Infinite Horizon Model Predictive Control</i>
iNMSS	Espaços de Estados Não-Mínimo em forma Incremental, do inglês <i>incremental Non-Minimal State-Space</i>
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês <i>Linear matrix inequality</i>
LQR	Regulador Linear Quadrático, do inglês <i>Linear Quadratic Regulator</i>
MIMO	<i>Multiple-Inputs Multiple-Outputs</i>
MPC	Controle Preditivo baseado em Modelo, do inglês <i>Model Predictive Control</i>
NMSS	Espaços de Estados Não-Mínimo, do inglês <i>Non-Minimal State-Space</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
QP	Programação Quadrática
RGPC	GPC Robusto
RMPC	Controle Preditivo Robusto, do inglês <i>Robust Model Predictive Control</i>
RPI	Robusto e Positivamente Invariável
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
SSMPC	Controlador Preditivo em Espaço de Estados, do inglês <i>State-Space Model Predictive Controller</i>
SVD	Decomposição de Valor Singular, do inglês <i>Singular Value Decomposition</i>
TRMPC	RMPC baseado em tubos, do inglês <i>Tube-based Robust Model Predictive Control</i>
TRMPC-NMSS	TRMPC com modelo não mínimo

LISTA DE SÍMBOLOS

F_∞	Representação do Efeito do Distúrbio no Sistema.
N_1	Início do Horizonte de Predição
N_2	Fim do Horizonte de Predição
N_c	Horizonte de Controle
V_N	Função Custo do TRMPC
Ω_t^a	Conjunto Terminal para Rastreamento
Ω	Conjunto de Possíveis Plantas
Θ_N	Representação do Modelo Nominal para Incertezas Multi-Modelo
Θ_T	Representação do Modelo Real para Incertezas Multi-Modelo
Θ_j	Representação de Cada um dos Modelos para Incertezas Multi-Modelo
\tilde{y}_p	Predição de Saída Calculada usando $\tilde{\pi}_k$
\tilde{U}_k	Pseudo-folga Associada a Solução Ótima Passada do Problema
$\tilde{\pi}_k$	Restrição nas Entradas de Controle
\bar{Q}	Ponderação Terminal
\bar{u}	Controle Nominal
\bar{x}	Estado Nominal
$\bar{\theta}$	Referência Artificial para o TRMPC
\hat{x}	Estado Estimado
\hat{y}	Saída Estimada
A_m	Matriz de Estado do Sistema
B_m	Matriz de Entrada do Sistema
C_m	Matriz de Saída do Sistema
D_m	Matriz de Transmissão Direta do Sistema
G	Matriz de Resposta Forçada
L	Ganho do Observador
P	Matriz de Ponderação do Custo Terminal para TRMPC
Q	Matriz de Ponderação das Saídas
R	Matriz de Ponderação das Entradas
S	Matriz de Ponderação da Diferença entre Referências
ν_k	Vetor de Referências Artificiais
e_e	Dinâmica do Erro de Estimção
e_{inf}	Vetor de Erro de Rastreamento após o Horizonte
e_{Np}	Erro de Rastreamento Artificial
f	Vetor de Resposta Livre
u	Entradas de Controle
v	Distúrbios na Saída
w	Distúrbios
y	Saídas do Sistema

z_s	Vetor de Estados Estacionários
\mathcal{U}	Poliedro de Restrições de Entradas
\mathcal{W}	Poliedro de Restrições do Distúrbio
\mathcal{X}	Poliedro de Restrições de Estados
$\bar{\mathcal{U}}$	Poliedro de Restrições das Entradas para Problema Nominal
$\bar{\mathcal{X}}$	Poliedro de Restrições dos Estados para Problema Nominal
ϕ_K	Conjunto RPI Mínimo
ϕ_{ec}	Conjunto RPI para Dinâmica do Erro de Controle
ϕ_{ee}	Conjunto RPI para Dinâmica do Erro de Estimção
π_k	Sequência de Ações de Controle
θ	Vetor que Caracteriza Qualquer Ponto de Equilíbrio
k	Instante de Tempo Atual
q	Número de Plantas dentro do Conjunto

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS	18
1.1.1	Objetivo Geral	18
1.1.2	Objetivos Específicos	19
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
1.3	RECONHECIMENTO DE APOIO	19
2	CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO - MPC	20
2.1	GENERALIDADES DO MPC	20
2.2	CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO - GPC	21
2.2.1	Restrições no GPC	26
2.3	MPC EM ESPAÇO DE ESTADOS - SSMPC	28
2.3.1	Observadores de Estado	30
2.3.2	O Modelo Realinhado	31
2.4	CONTROLADOR PREDITIVO ROBUSTO - RMPC	33
2.4.1	Descrição das incertezas	34
2.4.1.1	Incerteza Multi-Modelo	34
2.4.1.2	Incerteza via distúrbios aditivos	35
2.4.2	RMPC com custo contrativo	36
2.4.3	RMPC baseado em tubos - TRMPC	38
2.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
3	CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO ROBUSTO -RGPC	43
3.1	RMPC COM CUSTO CONTRATIVO: HISTÓRICO	43
3.2	GPC NOMINALMENTE ESTÁVEL	46
3.3	CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO ROBUSTO - RGPC	49
3.3.1	Estabilidade Assintótica do RGPC	51
3.4	SÍNTESE DO CONTROLADOR RGPC	54
3.5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	55
3.5.1	Sistema <i>Single-Input Single-Output</i> (SISO) com erro de modelagem no atraso	55
3.5.2	Sistema <i>Multiple-Inputs Multiple-Outputs</i> (MIMO): Coluna Debutanizadora	57
3.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
4	CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM TUBOS -TRMPC	63
4.1	MPC ROBUSTO PARA RASTREAMENTO DE SISTEMAS LINEARES RESTRITOS COM DISTÚRBIOS ADITIVOS.	63
4.1.1	Caracterização dos estados estacionários do sistema linear	64
4.1.2	Cálculo do conjunto invariante para rastreamento	65

4.1.3	Problema de otimização	66
4.2	MPC ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA RASTRE- AMENTO DE SISTEMAS LINEARES RESTRITOS COM DISTÚR- BIOS ADITIVOS	67
4.3	SÍNTESE DO CONTROLADOR BASEADO EM TUBOS	71
4.3.1	Escolha da matriz T	71
4.3.2	Escolha das matrizes \bar{K}, P e $\Omega_{t,\bar{K}}^a$	71
4.3.3	Escolha da matriz K_{dr}	72
4.3.4	Cálculo do conjunto $\phi_{K_{dr}}$	73
4.3.5	Implementação do Controlador	75
4.4	EXEMPLOS	76
4.4.1	Sistema Duplo-Integrador	76
4.4.1.1	Restrições do Problema	77
4.4.1.2	Inicialização do Problema	78
4.4.1.3	Cálculo do Conjunto mRPI	79
4.4.1.4	Restrições Apertadas do Problema	81
4.4.1.5	Cálculo do conjunto terminal para rastreamento	82
4.4.1.6	Simulação dos Controladores	84
4.4.2	Sistema CSTR	85
4.5	ESCOLHA DO CONTROLADOR	88
4.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
5	ESTUDO DE CASO - SISTEMA DE TANQUE QUÁDRUPLO	90
5.1	RGPC APLICADO AO TANQUE QUÁDRUPLO	92
5.2	RMPCT-NMSS APLICADO AO TANQUE QUÁDRUPLO	95
5.2.1	Considerações Gerais sobre a técnica TRMPC	99
6	CONCLUSÃO	101
6.1	TRABALHOS FUTUROS	102
	REFERÊNCIAS	104
	ANEXO A – DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE NOMINAL USANDO O MODELO INMSS	112

1 INTRODUÇÃO

Uma das partes mais importantes em um projeto de sistemas de controle é obter um modelo que represente o processo de interesse. Geralmente, este é um modelo matemático encontrado aplicando os princípios físicos que descrevem o comportamento do sistema ou por métodos de identificação a partir de dados obtidos em experimentos.

Observa-se que o modelo exato de um processo físico geralmente é complexo e não linear. Felizmente, em muitos casos o comportamento do processo pode ser aproximado por modelos lineares simples em uma faixa significativa de operação (FRIEDLAND, 2012). Assim, controladores lineares são largamente usados no meio industrial com bons resultados.

Nesse contexto, os chamados controladores clássicos usam a ideia de realimentação para comparar o valor de saída desejado com o valor de saída atual de forma a reduzir os efeitos dos distúrbios que afetam o sistema e garantir rastreamento ao operar em estado estacionário. Essas características tornam estes controladores, como por exemplo os controladores Proporcional-Integral-Derivativo (PID), excelentes para resolver muitos problemas na indústria. De fato, os controladores PID são encontrados em grande número na indústria de processos (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006). Geralmente, estes atuam na camada mais baixa de controle de uma planta.

Entretanto, existem muitas situações em que os modelos do processo não têm dinâmica simples ou que os requisitos de projeto são muito rigorosos. Para essas situações, um controle por realimentação básico não é suficiente e os controladores clássicos tornam-se inadequados, exigindo então estratégias de controle por realimentação mais avançadas que incluem, além da ideia de realimentação, ações *feed-forward*, compensação de atraso, compensação de não linearidades, entre outras.

Nas últimas décadas, houve um número crescente de estudos relacionados ao controle avançado como uma alternativa às estratégias clássicas de controle local em cenários em que os controladores PID apresentam baixo desempenho (GESSER, 2018), e também como controladores de segunda camada, gerando *setpoints* para os controles locais da planta. Dentre esses cenários pode-se incluir o controle de sistemas não lineares, sistemas com atraso, sistemas sujeitos a restrições físicas e sistemas sujeitos a incertezas.

Uma dessas estratégias avançadas é o chamado Controle Preditivo baseado em Modelo, do inglês *Model Predictive Control* (MPC), que consiste em diferentes algoritmos que usam explicitamente o modelo do processo para calcular os sinais de controle. Ou seja, o controlador usa o modelo da planta para tentar prever o comportamento futuro das saídas do sistema de forma a escolher as melhores ações de controle (RAWLINGS; MAYNE, 2009). O objetivo normalmente é minimizar o erro

entre a saída predita e a referência desejada ou manter as variáveis controladas em faixas, enquanto se limitam os movimentos da ação de controle, sempre respeitando as restrições operacionais do processo. Portanto, o problema de controle se reduz em cada passo de amostragem na resolução de um problema de otimização, envolvendo uma função custo e um conjunto de restrições, que dependem do modelo de predição. Diversos exemplos de aplicações demonstram o sucesso do MPC na indústria, em especial em refinarias e na indústria petroquímica (QIN; BADGWELL, 2003).

Entretanto, a aplicação do MPC vem acompanhada de certos desafios, sendo os mais relevantes: custo computacional/escalabilidade da técnica e robustez frente às incertezas no modelo que representa o processo.

Sabe-se que quanto mais complexos são os cenários considerados na formulação do MPC, maior a complexidade do algoritmo de controle. Perceba que o uso do MPC para resolver problemas grandes ou complexos possui um alto custo computacional, pois um (ou vários) problema de otimização precisa ser resolvido a cada iteração do controlador (ALESSIO; BEMPORAD, 2009).

Além disso, a essência do problema de controle normalmente está na modelagem. Em outras palavras, o MPC é projetado assumindo um modelo de planta perfeito. Na prática, esses modelos geralmente estão associados às incertezas, como erros de estimativa dos parâmetros do modelo ou de sua própria estrutura, alterações nos pontos operacionais ou distúrbios não medidos. Tais incertezas podem causar o deterioramento do desempenho do controlador ou até mesmo levar a planta à instabilidade.

Portanto, essas incertezas devem ser consideradas na formulação do problema de controle de forma a, no mínimo, garantir a estabilidade da malha fechada do sistema na presença dessas incertezas. Uma estratégia MPC que possui tais garantias é chamada de Controle Preditivo Robusto, do inglês *Robust Model Predictive Control* (RMPC).

Existem várias abordagens para projetar RMPC que são discutidas no *survey* de Jalali e Nadimi (2006). A grande desvantagem de todos esses métodos, e de uma parte significativa da literatura recente de pesquisa do MPC, é que as contribuições para a robustez são baseadas em modelos de espaço de estados nos quais a estabilidade é geralmente garantida sob a suposição de que os estados do sistema podem ser medidos, o que geralmente não acontece na prática. Quando esses estados não estão disponíveis, a lei de controle usa estimativas de estado geradas por um observador.

Para que essa lei de controle, baseada nas estimativas de estado, não atue de forma equivocada deve-se projetar um observador com dinâmica mais rápida que a dinâmica do controle de realimentação de estados, a fim de garantir que o sinal de erro entre o estado estimado e o sistema real convirja para zero mais rápido do que o sistema converge para o estado desejado. Alternativamente, se não for possível projetar um observador com uma dinâmica rápida, este deve ser explicitamente

incluído no projeto do controlador para que o mesmo busque compensar tanto o erro de seguimento de referência quanto o erro de estimação.

De qualquer forma, isso adiciona complexidade ao projeto do controlador. Ademais, pode dificultar a prova das garantias de robustez ou até diminuir a mesma, conforme mostrado em Bitmead, Gevers e Wertz (1990) e Taylor, Chotai e Young (2000).

Além disso, quando as restrições do sistema estão ativadas no MPC, a realimentação dos estados pode ser dominada por propriedades não lineares. De acordo com González, Perez e Odloak (2009), a malha fechada de um sistema controlado por uma realimentação de estados combinado com um observador pode ser instável, mesmo que o controlador estabilize a planta quando os estados são mensuráveis. Portanto, o efeito da dinâmica do observador se torna uma questão ainda mais complicada, como demonstrado por Tenny, Rawlings e Wright (2004) e por Wang e Young (2006).

Dessa forma, o problema então é obter uma técnica RMPC que não necessite de observadores ou estimadores de estados e que tenha um custo computacional aceitável, de forma que possa ser aplicada na indústria. O ponto de partida para lidar parcialmente com esse problema é o trabalho de Gesser (2018). Neste, uma análise dos principais problemas de algumas estratégias RMPC foi realizada e uma comparação profunda entre elas foi feita com foco no custo computacional e na escalabilidade dos mesmos. Partindo disso, dois métodos foram julgados como mais relevantes, a saber: RMPC com Custo Contrativo e RMPC baseado em Tubos.

A estrutura do RMPC com custo contrativo baseia-se na estrutura originalmente proposta por Badgwell (1997b) e por Ralhan e Badgwell (2000). O método consiste de um algoritmo para o qual a estabilidade robusta é alcançada por meio da adição de restrições que impedem o aumento da função de custo do controle MPC.

A estrutura do RMPC baseado em Tubos parte dos trabalhos de Langson *et al.* (2004) e de Mayne, Seron e Raković (2005). Consiste em controlar o sistema nominal enquanto mantém o sistema incerto preso dentro de um tubo de trajetórias que tem como centro a trajetória do próprio sistema nominal.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral e os objetivos específicos desta dissertação são apresentados a seguir.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo do trabalho é adaptar algumas abordagens de RMPC para algoritmos que usem apenas valores mensuráveis de entrada e saída do processo (dispensando o uso de observadores), levando em consideração o custo computacional do algoritmo,

de forma a deixá-las mais próximas de uma aplicação prática industrial.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- desenvolver um MPC do tipo GPC com custo contrativo embutido;
- desenvolver um MPC baseado em tubos usando apenas dados de entrada e saída;
- apresentar os principais problemas dos algoritmos desenvolvidos e como amenizá-los;
- aplicar os algoritmos em um estudo de caso.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 apresenta uma revisão sobre MPC, apresentando as formulações utilizadas neste trabalho e comentários sobre a implementação dos algoritmos robustos. No Capítulo 3 expõe-se o desenvolvimento de um Controlador Preditivo Generalizado utilizando a técnica de custo contrativo, enfatiza-se como este controlador garante estabilidade robusta e alguns exemplos de aplicação são apresentados. O Capítulo 4 explica como implementar o controlador preditivo baseado em tubos, como adaptá-lo de forma a usar apenas dados mensuráveis e alguns exemplos de aplicações da técnica. O Capítulo 5 apresenta um estudo de caso para os métodos RMPC estudados, usando um modelo não linear realista de um Tanque Quádruplo. Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho, bem como propostas de trabalhos futuros.

1.3 RECONHECIMENTO DE APOIO

Esta dissertação de mestrado foi apoiada pelo Centro de Pesquisa Leopoldo Américo Miguez de Mello (CENPES), que é o principal centro de pesquisa da Petrobras. O trabalho aqui descrito foi desenvolvido em um projeto do CENPES em conjunto com o Departamento de Automação e Sistemas (DAS) intitulado “Desenvolvimento Algoritmos de Controle Preditivo Não Linear e Avaliação Preditiva do Desempenho do Controlador para Plataformas de Produção de Petróleo, Fase 2” coordenado pelo Prof. Julio E. Normey-Rico.

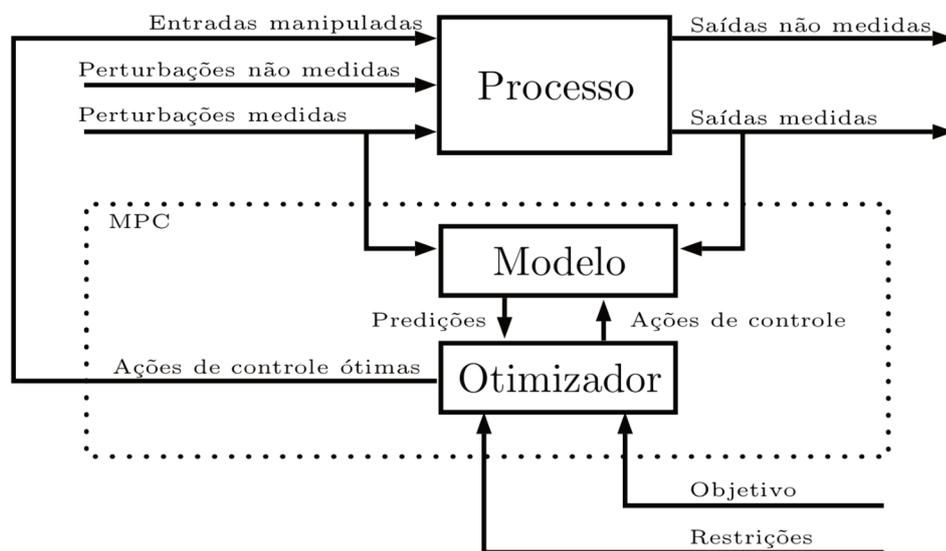
2 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO - MPC

Este capítulo apresenta uma visão geral do MPC, seus principais conceitos e algumas de suas propriedades. A Seção 2.1 discorre a respeito dos conceitos básicos de MPC. Nas Seções 2.2 e 2.3 são descritas as formulações do Controlador Preditivo Generalizado, do inglês *Generalized Predictive Controller (GPC)*, e do Controlador Preditivo em Espaço de Estados, do inglês *State-Space Model Predictive Controller (SSMPC)*, respectivamente. Na sequência, as generalidades do MPC robusto são apresentadas enfatizando sua formulação e como descrever as incertezas do modelo para serem incluídas na descrição do controlador. Posteriormente, na mesma seção, são apresentadas as técnicas de controle utilizadas neste trabalho.

2.1 GENERALIDADES DO MPC

O termo MPC refere-se a uma ampla gama de estratégias de controle que fazem uso explícito do modelo da planta para obter um sinal de controle que minimiza uma função objetivo, com o intuito de otimizar o comportamento futuro da saída do processo e também do esforço de controle em um horizonte deslizante (WANG, 2009). A estrutura básica desse controlador pode ser vista na Figura 1.

Figura 1 – Estrutura básica do MPC.



Fonte: Brandão (2018).

Conforme a Figura 1, o MPC pode considerar, além do modelo da planta, também o modelo de perturbações medidas, o que pode permitir um melhor desempenho na rejeição de perturbações. Outra vantagem dessa técnica está no fato de o otimizador levar em conta as restrições de equipamentos e de segurança para escolha do

controle ótimo. A importância disso é que operar próximo a essas restrições é necessário, em muitos casos, para uma operação mais lucrativa ou mais eficiente do processo (MACIEJOWSKI, 2002). Esse é um dos principais motivos que explicam porque o MPC se tornou uma ferramenta poderosa e prática para o controle de processos industriais desde seu surgimento no final dos anos setenta (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Os algoritmos de controle preditivo podem ser considerados práticos, pois seus conceitos são intuitivos e seu ajuste é feito diretamente no domínio do tempo, portanto não é necessário um forte conhecimento de teoria de controle para seu uso. E é uma ferramenta poderosa, pois pode ser usada para controlar processos mono e multivariáveis com dinâmicas simples e complexas, além de ser uma metodologia aberta que permite futuras extensões.

Uma outra característica muito importante do MPC é o uso do horizonte deslizante. O MPC faz todo um planejamento calculando uma sequência de ações de controle a ser aplicada para resolver o problema. Entretanto, apenas a primeira ação é aplicada na planta, e todo o procedimento é repetido na próxima amostra com as novas medidas recebidas do processo de forma a evitar que o MPC trabalhe com valores desatualizados. Isto já dá ao MPC um certo grau de robustez.

Como pode ser constatado na ampla literatura de MPC, existem diversos algoritmos propostos que compõem a chamada família MPC, assim é importante frisar as diferenças entre seus vários algoritmos. Segundo Normey-Rico e Camacho (2007), as diferenças estão principalmente na função de custo a ser minimizada e na formulação do modelo utilizado para representar o processo e as perturbações. As Seções 2.2 e 2.3 resumem as formulações GPC e SSMPC, ambas usadas neste trabalho.

2.2 CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO - GPC

Antes de discutirmos a respeito do controlador em si, é necessário definir a representação do modelo do processo. No caso do GPC, o conceito de função de transferência é usado. De forma genérica, um sistema discreto de múltiplas entradas e saídas, do inglês *Multiple-Input Multiple Outputs* (MIMO), pode ser descrito pela matriz de funções de transferência $\mathbf{P}(z^{-1})$ de dimensão $p \times m$ conforme a Equação (1).

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{P}(z^{-1}) \mathbf{u}(k) \quad (1)$$

onde cada elemento $p_{ij}(z^{-1})$ de $\mathbf{P}(z^{-1})$ é uma função de transferência com uma entrada e uma saída, do inglês *Single-Input Single-Output* (SISO), e as variáveis $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$ são os vetores de saídas e de entradas da planta no instante atual k , sendo p o número total de saídas e m o número total de entradas. Neste trabalho, z é usado para representar tanto a variável complexa relacionada à transformada Z, na representação de uma função de transferência discreta, como o operador de atraso de tempo z^{-1} ,

usado na representação compacta de uma equação à diferenças. Assim, em algumas equações, para simplificar a explicação do problema, há um abuso de notação ao utilizar variáveis no tempo e funções polinomiais em z^{-1} na mesma equação.

Para o caso mais geral, quando o processo exibe tempos mortos de entrada-saída, cada elemento $p_{ij}(z^{-1})$ tem um tempo morto d_{ij} . Este é o tempo morto da função de transferência entre a entrada j e a saída i expresso como um número de tempos de amostragem. Portanto, cada função de transferência pode ser representada conforme a Equação (2).

$$\frac{y_i(k)}{u_j(k)} = p_{ij}(z^{-1}) = \frac{B'_{ij}(z^{-1})}{A_{ij}(z^{-1})} z^{-d_{ij}} \quad (2)$$

onde $A_{ij}(z^{-1})$ e $B'_{ij}(z^{-1})$ são polinômios no operador de atraso z^{-1} .

O tempo morto efetivo de cada saída é determinado pelo tempo morto mínimo dos elementos de uma linha conforme a Equação (3).

$$d_i = \min_j [d_{ij}] \quad (3)$$

Assim, o modelo pode ser descrito como $\mathbf{P}(z^{-1}) = \mathbf{D}(z^{-1}) \mathbf{G}_p(z^{-1})$. Note que $\mathbf{G}_p(z^{-1})$, com elementos $g_{p,ij}(z^{-1})$, é a matriz de funções de transferência sem o tempo morto mínimo. Perceba também que:

- $\mathbf{D}(z^{-1})$ é uma matriz diagonal polinomial com elementos z^{-d_i} , sendo d_i o tempo morto mínimo de cada linha i de $\mathbf{P}(z^{-1})$;
- $\mathbf{G}_p(z^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) z^{-1}$;
- $\mathbf{A}(z^{-1})$ é uma matriz polinomial diagonal com elementos $A_i(z^{-1})$ igual ao mínimo múltiplo comum dos denominadores ($A_{ij}(z^{-1})$) de cada linha i da matriz $\mathbf{P}(z^{-1})$;
- $\mathbf{B}(z^{-1})$ é uma matriz polinomial com elementos $B_{ij}(z^{-1})$ tal que

$$g_{p,ij}(z^{-1}) = \frac{z^{-1} B_{ij}(z^{-1})}{A_i(z^{-1})} \quad (4)$$

ou seja, $g_{p,ij}(z^{-1})$ são as funções de transferência SISO sem o atraso comum d_i da saída correspondente.

Os polinômios A_i e B_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned} A_i(z^{-1}) &= 1 + a_1^i z^{-1} + a_2^i z^{-2} + \dots + a_{na_i}^i z^{-na_i} \\ B_{ij}(z^{-1}) &= b_0^{ij} + b_1^{ij} z^{-1} + b_2^{ij} z^{-2} + \dots + b_{nb_{ij}}^{ij} z^{-nb_{ij}} \end{aligned} \quad (5)$$

sendo A_i e B_{ij} polinômios no operador de atraso z^{-1} de ordem na e nb respectivamente. Observe que os primeiros coeficientes $d_{ij} - d_i$ dos polinômios $B_{ij}(z^{-1})$ são nulos,

porque as diferenças entre o tempo morto do elemento e o tempo morto mínimo foram absorvidas nesses polinômios.

Uma das vantagens dessa representação é que ela é válida para processos instáveis, estáveis e integradores, e apenas as matrizes polinomiais \mathbf{A} e \mathbf{B} e os atrasos d_{ij} precisam ser conhecidos para seu uso. Perceba que a saída atual do modelo só depende das saídas e entradas passadas.

Note também que o passo a passo a ser explicado aqui pode ser facilmente utilizado para modelos SISO, considerando $i = j = 1$, e para modelos sem atraso, considerando $d_{ij} = 0, \forall i, j$.

O Controlador Preditivo Generalizado, originalmente proposto por (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987), utiliza uma variação do modelo por função de transferência chamado Média Móvel Integrada Auto-Regressiva Controlada, do inglês *Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average* (CARIMA). Tal modelo pode ser descrito pela Equação (6).

$$\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(k) = \mathbf{D}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{u}(k-1) + \frac{1}{\Delta} \mathbf{T}(z^{-1}) \xi(k) \quad (6)$$

no qual $\mathbf{T}(z^{-1})$ é uma matriz polinomial $p \times p$ mônica que representa os polinômios coloridos do ruído, $\xi(k)$ é o vetor de ruído de dimensão $p \times 1$, e $\Delta = 1 - z^{-1}$ é usado para melhorar a modelagem de distúrbios não estacionários (CAMACHO; BORDONS, 2007). Em geral, $\mathbf{T}(z^{-1})$ é escolhido igual a matriz identidade devido às dificuldades na identificação das características do ruído e no ajuste correto dos elementos dessa matriz (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Perceba que as matrizes polinomiais \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são as mesmas que descrevem $\mathbf{P}(z^{-1})$.

O objetivo do GPC é calcular uma sequência de ações de controle futuras para minimizar uma função de custo em um horizonte finito. Esta função normalmente considera o erro de rastreamento de referência e o esforço de controle, conforme pode ser visto na Equação (7).

$$J_k = \sum_{c=N_1}^{N_2} \|\mathbf{y}_p(k+c|k) - \mathbf{y}_s(k+c)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{c=1}^{N_c} \|\Delta \mathbf{u}(k+c-1|k)\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (7)$$

em que N_1 e N_2 representam o início e o fim do horizonte de predição, \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes positivas definidas de ponderação, N_c é o horizonte de controle, $\mathbf{y}_p(k+c|k) - \mathbf{y}_s(k+c)$ representa o erro de rastreamento, \mathbf{y}_p é a predição de saída, \mathbf{y}_s é o *setpoint* da saída ou referência futura e $\Delta \mathbf{u}$ é o incremento de controle. A norma ponderada é calculada como $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{Q}}^2 \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v}$.

Para sistemas com atraso, costuma-se adotar $N_1 = 1 + d_i$ e $N_2 = N_p + d_i$, sendo N_p o horizonte de predição. O objetivo é considerar na função custo apenas os erros de rastreamento após o atraso, pois a ação de controle atual não tem efeito algum até se passar esse período. No entanto, em geral, como consequência dos

diferentes tempos mortos de cada saída do sistema, os horizontes devem ser tomados independentemente para cada entrada e saída. Assim, N_{i1} , N_{i2} são usados para as saídas e $N_{j,c}$ é usado para a entrada j .

Neste trabalho, com o objetivo de simplificar os cálculos e sem perda de generalidade, assume-se que o horizonte de controle N_c é o mesmo para todas as entradas e o horizonte de previsão N_p também se mantém para todas as saídas. Note que para sistemas com atraso é possível manter o mesmo N_p para todas as saídas por meio da escolha de diferentes N_1 e N_2 .

Como a matriz $\mathbf{A}(z^{-1})$ da Equação (6) é diagonal, as previsões de saída do processo para um instante de tempo $k + c$ podem ser obtidas de forma independente, utilizando um modelo CARIMA de uma saída e m entradas conforme pode ser visto na Equação (8).

$$A_i(z^{-1})y_i(k) = z^{-d_i}\mathbf{B}_i(z^{-1})\mathbf{u}(k-1) + \frac{1}{\Delta}e(k) \quad (8)$$

sendo $e(k)$ um ruído branco e $\mathbf{B}_i = [B_{i1} \ B_{i2} \ \dots \ B_{im}]$.

A partir da Equação (8), considerando que a esperança matemática do ruído branco é zero, se pode obter uma equação para o cálculo das previsões no horizonte conforme a Equação (9) (CAMACHO; BORDONS, 2007).

$$\tilde{A}_i(z^{-1})y_{p,i}(k+c) = z^{-d_i}\mathbf{B}_i(z^{-1})\Delta\mathbf{u}(k+c-1) \quad (9)$$

no qual $\tilde{A}_i(z^{-1}) = \Delta A_i(z^{-1})$ e $y_{p,i}$ é a previsão de cada uma das i saídas. A expansão de $\tilde{A}_i(z^{-1})$ é dada pela Equação (10).

$$\tilde{A}_i(z^{-1}) = 1 - \tilde{a}_1^i z^{-1} - \tilde{a}_2^i z^{-2} - \dots - \tilde{a}_{na_i+1}^i z^{-(na_i+1)} \quad (10)$$

A partir disso, a Equação Diophantina (11) é utilizada para o cálculo das previsões, sendo I_p a matriz identidade de dimensão p .

$$I_p = E_{ic}(z^{-1})\tilde{A}_i(z^{-1}) + z^{-c}F_{ic}(z^{-1}) \quad (11)$$

Combinando as Equações (10) e (11) e depois de alguns algebrismos conforme pode ser visto em Camacho e Bordons (2007), chega-se ao valor das saídas preditas dadas pela Equação (12).

$$y_{p,i}(k+c|k) = F_{ic}(z^{-1})y_i(k) + z^{-d_i}E_{ic}(z^{-1})\mathbf{B}_i(z^{-1})\Delta u(k-1) \quad (12)$$

com $E_{ic}(z^{-1})$ sendo da ordem $c-1$ e $F_{ic}(z^{-1})$ da ordem na_i .

A expressão da Equação (12) é utilizada para calcular todas as saídas preditas uma por uma. Conforme Normey-Rico e Camacho (2007), as previsões antes e depois do atraso podem ser calculadas separadamente. Note que as previsões para $c=1$ até $c=d_i$ não entram diretamente na função custo apresentada na Equação (7), mas são necessárias para os cálculos das previsões que entram. Assim, a i -ésima saída predita de $c=d_i+1$ até $c=d_i+N_{p,i}$ é dada na Equação (13).

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} y_{p,i}(k+d_i+1|k) \\ y_{p,i}(k+d_i+2|k) \\ \vdots \\ y_{p,i}(k+d_i+N_{p,i}|k) \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_{i1} \ \mathbf{G}_{i2} \ \cdots \ \mathbf{G}_{im}] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \\
& + [\mathbf{H}_{i1} \ \mathbf{H}_{i2} \ \cdots \ \mathbf{H}_{im}] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{p1} \\ \Delta \mathbf{u}_{p2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{pm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{N_{p,i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{p,i}(k+d_i|k) \\ y_{p,i}(k+d_i-1|k) \\ \vdots \\ y_{p,i}(k+d_i-na_i|k) \end{bmatrix} \quad (13)
\end{aligned}$$

nos quais as ações de controle futuras são dadas por:

$$\Delta \mathbf{u}_j = [\Delta u_j(k|k) \ \Delta u_j(k+1|k) \ \cdots \ \Delta u_j(k+N_{c,j}|k)]^T, \quad N_{c,j} = \max_i(N_{p,i} - d_{ij})$$

e as ações de controle passadas são:

$$\Delta \mathbf{u}_{pj} = [\Delta u_j(k-1) \ \Delta u_j(k-2) \ \cdots \ \Delta u_j(k-nb_{ij})]^T$$

Note que \mathbf{S}_i tem dimensão $1 \times na_i$, \mathbf{G}_{ij} é $N_{p,i} \times N_{c,j}$ e \mathbf{H}_{ij} é $N_{p,i} \times nb_{ij}$. Este procedimento pode ser aplicado a todas as saídas para obter uma expressão vetorial conforme a Equação (14).

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_p + \mathbf{S}\mathbf{y}_{p,d} \quad (14)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_p &= [\mathbf{y}_{p,1}, \mathbf{y}_{p,2}, \cdots, \mathbf{y}_{p,p}]^T \\
\Delta \mathbf{u} &= [\Delta \mathbf{u}_1, \Delta \mathbf{u}_2, \cdots, \Delta \mathbf{u}_m]^T \\
\Delta \mathbf{u}_p &= [\Delta \mathbf{u}_{p1}, \Delta \mathbf{u}_{p2}, \cdots, \Delta \mathbf{u}_{pm}]^T \\
\mathbf{y}_{p,d} &= [\mathbf{y}_{p,d1}, \mathbf{y}_{p,d2}, \cdots, \mathbf{y}_{p,dn}]^T
\end{aligned}$$

onde \mathbf{y}_p é o vetor de saídas preditas, \mathbf{G} é a matriz de resposta forçada e \mathbf{f} é o vetor de resposta livre.

Note que a Equação (12) pode ser usada para calcular as predições de sistemas sem atraso, chegando em uma formulação similar a Equação (14). Perceba também que a Equação (14) organiza as predições \mathbf{y}_p por blocos de saídas, empilhando-as ao final. De posse disso, pode-se rearranjar este vetor de forma a organizá-lo por instantes de tempo conforme utilizado na função custo do problema.

Ademais, perceba que conforme mostrado na Figura 1, o otimizador na estratégia MPC minimiza uma função custo levando em consideração restrições no problema. No caso GPC, o problema é de Programação Quadrática (QP). Este é um tipo especial de problema de otimização matemática que consiste em determinar os valores

de diversas variáveis reais sujeitas a restrições de desigualdade lineares. Os valores encontrados são os ótimos (valores extremos ou mínimos) de uma função quadrática (WOLFE, 1959).

Considerando a definição de um problema QP, pode-se reescrever a Equação (7) para apresentá-la na forma padrão. Combinando a Equação (14) com a Equação (7), e considerando $N_p = N_c$ para simplificar os cálculos, chega-se na forma QP padrão apresentada na Equação (15).

$$J_k = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_0 \quad (15)$$

onde

$$\mathbf{H} = 2 \left(\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G} + \hat{\mathbf{R}} \right)$$

$$\mathbf{b}^T = 2(\mathbf{f} - \mathbf{y}_s)^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}$$

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{y}_s)^T \hat{\mathbf{Q}} (\mathbf{f} - \mathbf{y}_s)$$

sendo

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Portanto, o problema a ser resolvido pelo GPC é dado na Equação (16).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} J_k &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_0 \\ &\text{sujeito a } \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{c} \end{aligned} \quad (16)$$

em que \mathbf{R} e \mathbf{c} são as variáveis que representam as restrições do problema. Note que \mathbf{f}_0 não depende da variável de decisão $\Delta \mathbf{u}$, o que significa que esta parte do problema não altera o valor mínimo a ser achado. A Subseção 2.2.1 trata das restrições no GPC e como colocá-las na forma padrão QP.

2.2.1 Restrições no GPC

Em aplicações práticas normalmente são encontradas três tipos principais de restrições: restrições nos incrementos de controle $\Delta \mathbf{u}$, nos controles \mathbf{u} e nas saídas preditas \mathbf{y}_p . Observe que essa lista não é exaustiva. Para as restrições nas entradas, deve-se considerar que cada entrada pode ter limites diferentes. Assim, as restrições na entrada j são apresentadas na Equação (17).

$$\begin{aligned} \mathbf{1} u_j^{\min} &\leq \mathbf{T}_{\mathbf{R} \mathbf{I}} \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{1} u_j(k-1) &\leq \mathbf{1} u_j^{\max} \\ \mathbf{1} \Delta u_j^{\min} &\leq \Delta u_j &\leq \mathbf{1} \Delta u_j^{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

nos quais (u_j^{min}, u_j^{max}) e $(\Delta u_j^{min}, \Delta u_j^{max})$ são os limites na amplitude e no incremento do sinal de controle j durante todo o horizonte, $\mathbf{1}$ é um vetor de uns de dimensão apropriada, e \mathbf{T}_{RI} é uma matriz de blocos triangular inferior cujas entradas de bloco não nulas são matrizes identidade de dimensão $m \times m$. Esse mesmo procedimento é utilizado para todas as entradas.

A Equação (14) é utilizada para passar as restrições nas saídas preditas. Note que os limites das saídas também podem ter valores diferentes entre si. Assim sendo, todas estas restrições podem ser expressas de forma condensada no formato $\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{c}$ (forma linear) conforme mostrado abaixo.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^a \\ -\mathbf{I}^a \\ \mathbf{T}_{RI}^a \\ -\mathbf{T}_{RI}^a \\ \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}^{max} \\ \Delta\mathbf{u}^{min} \\ \mathbf{u}^{max} \\ \mathbf{u}^{min} \\ \mathbf{y}^{max} - \mathbf{f} \\ -\mathbf{y}^{min} + \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^a &= [\mathbf{I}_{N_c}^T, \mathbf{I}_{N_c}^T, \dots, \mathbf{I}_{N_c}^T]^T \\ \Delta\mathbf{u}^{max} &= [\mathbf{1}\Delta u_1^{max}, \dots, \mathbf{1}\Delta u_j^{max}, \dots, \mathbf{1}\Delta u_m^{max}]^T \\ \Delta\mathbf{u}^{min} &= [\mathbf{1}\Delta u_1^{min}, \dots, \mathbf{1}\Delta u_j^{min}, \dots, \mathbf{1}\Delta u_m^{min}]^T \\ \mathbf{T}_{RI}^a &= [\mathbf{T}_{RI}^T, \mathbf{T}_{RI}^T, \dots, \mathbf{T}_{RI}^T]^T \\ \mathbf{u}^{max} &= [\mathbf{1}u_1^{max} - \mathbf{1}u_1(k-1), \dots, \mathbf{1}u_m^{max} - \mathbf{1}u_m(k-1)]^T \\ \mathbf{u}^{min} &= [\mathbf{1}u_1^{min} - \mathbf{1}u_1(k-1), \dots, \mathbf{1}u_m^{min} - \mathbf{1}u_m(k-1)]^T \\ \mathbf{y}^{max} &= [\mathbf{y}_1^{max}, \mathbf{y}_2^{max}, \dots, \mathbf{y}_p^{max}]^T \\ \mathbf{y}^{min} &= [\mathbf{y}_1^{min}, \mathbf{y}_2^{min}, \dots, \mathbf{y}_p^{min}]^T \end{aligned}$$

sendo (y_j^{min}, y_j^{max}) os limites na amplitude da saída predita.

Ademais, é digno de nota o fato de que as restrições podem tornar o problema infactível, ou seja, não há uma solução no problema de otimização que consiga satisfazer todas as restrições simultaneamente. Para evitar esse tipo de problema pode-se trabalhar com restrições relaxadas (*soft constraints*), na qual uma variável de folga deve ser usada. Uma restrição relaxada pode ser violada a fim de tornar o problema factível. A variável de folga presente em tal restrição torna-se uma variável de decisão do problema de otimização (assim como $\Delta\mathbf{u}$) de forma a ter seu valor minimizado e, por conseguinte, diminuir a magnitude da violação que ocorre. Mais informações sobre restrições *soft* podem ser encontradas em Prasath e Jørgensen (2009) e em Camacho e Bordons (2007).

Por fim, destaca-se novamente que o GPC utiliza um modelo em função de transferência para representar a dinâmica da planta. A Seção 2.3 discute uma formulação alternativa do MPC que utiliza uma representação por espaço de estado.

2.3 MPC EM ESPAÇO DE ESTADOS - SSMPC

Assim como funções de transferência, modelos de espaço de estado também podem ser usados para formular o problema de controle preditivo. De fato, os principais resultados teóricos do MPC relacionados a estabilidade e robustez utilizam essa formulação, que pode ser usada para processos monovariáveis e multivariáveis. Para o caso discreto, linear e invariante no tempo, o modelo é definido pela Equação (19).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_m \mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (19)$$

nos quais $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_m \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D}_m \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são respectivamente as matrizes de estado, entrada, saída e de transmissão direta, $\mathbf{x}(k)$ são os estados atuais, e $\mathbf{u}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$ continuam sendo as entradas e saídas do processo. Note que modelos instantâneos não são comuns na indústria, portanto \mathbf{D}_m será considerado nulo no resto dessa dissertação.

A predição deste modelo, conforme Maciejowski (2002), é dada pela Equação (20).

$$\mathbf{y}_p(k+c|k) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_p(k+c|k) = \mathbf{C}_m \left[\mathbf{A}_m^c \mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^c \mathbf{A}_m^{i-1} \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k+c-i|k) \right] \quad (20)$$

sendo \mathbf{x}_p o vetor de estados preditos.

Essa formulação pode ser usada para resolver o problema clássico de regulação, em que o estado deve ser direcionado para a origem, usando uma quantidade aceitável de esforço de controle. Assim, a função custo a ser minimizada considera os estados e o esforço de controle, conforme pode ser visto na Equação (21).

$$J_k = \sum_{c=1}^{N_p} \|\mathbf{x}_p(k+c|k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{c=0}^{N_c-1} \|\mathbf{u}(k+c|k)\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (21)$$

As predições dos estados podem ser reformuladas para obter um expressão vetorial similar a Equação (14), considerando $N_p = N_c$ na simplificação do problema, conforme a Equação (22).

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{F}_{es} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_{es} \mathbf{U} \quad (22)$$

sendo

$$\mathbf{F}_{es} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_m^2 \\ \mathbf{A}_m^3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m^{N_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{es} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m^2 \mathbf{B}_m & \mathbf{A}_m \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_m^{N_p-1} \mathbf{B}_m & \mathbf{A}_m^{N_p-2} \mathbf{B}_m & \mathbf{A}_m^{N_p-3} \mathbf{B}_m & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_p = \left[\mathbf{x}_p(k+1|k)^T, \mathbf{x}_p(k+2|k)^T, \dots, \mathbf{x}_p(k+N_p|k)^T \right]^T$$

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{u}(k|k)^T, \mathbf{u}(k+1|k)^T, \dots, \mathbf{u}(k+N_p-1|k)^T \right]^T$$

Tal qual foi feito para o GPC, pode-se combinar as Equações (21) e (22) para obter sua forma QP padrão apresentada na Equação (23).

$$J_k = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{b}^T \mathbf{U} + \mathbf{f}_0 \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{H} = 2 \left(\mathbf{G}_{es}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_{es} + \hat{\mathbf{R}} \right)$$

$$\mathbf{b}^T = 2 \left(\mathbf{F}_{es} \mathbf{x}(k) \right)^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_{es}$$

$$\mathbf{f}_0 = \left(\mathbf{F}_{es} \mathbf{x}(k) \right)^T \hat{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{F}_{es} \mathbf{x}(k) \right)$$

sendo $\hat{\mathbf{Q}}$ e $\hat{\mathbf{R}}$ construídos da mesma forma apresentada na formulação GPC.

Ademais, as restrições devem ser passadas da mesma maneira apresentada na Seção 2.2. Note que o problema regulatório não trabalha diretamente com as saídas da planta, portanto há restrições apenas nos estados e nas entradas. Para o problema de rastreamento, utiliza-se um espaço de estado aumentado para representar a dinâmica do sistema em relação ao incremento de controle $\Delta \mathbf{u}$ e não em relação a ação de controle \mathbf{u} em si. Isto é semelhante ao que faz o GPC ao representar uma função de transferência por meio de um modelo CARIMA. Os livros de Wang (2009) e de Camacho e Bordons (2007) mostram duas formas diferentes de como conseguir um espaço de estado incremental.

O MPC na forma incremental consegue garantir um erro nulo em estado estacionário e pode também rejeitar perturbações do tipo degrau em regime permanente. Além disso, este utiliza $\Delta \mathbf{u}$ como variável de decisão na função custo do problema. Perceba que o valor em regime permanente de $\Delta \mathbf{u}$ é sempre conhecido e igual a zero, o mesmo não pode ser dito do valor de \mathbf{u} .

Apesar de todas essas vantagens, o trabalho atual usará uma abordagem específica que não utiliza o modelo incremental. Para o caso regulatório, a Equação (20) é aplicada de forma direta conforme a Seção 2.4.3, e para o caso de rastreamento é feita uma modificação de maneira a não ser necessário um modelo incremental conforme explanado no Capítulo 4.

Por fim, é de suma importância frisar que para fazer as previsões e aplicar o SSMPC é necessário conhecer o valor dos estados $\mathbf{x}(k)$, de forma a aplicá-los na Equação (22). Caso contrário, observadores devem ser utilizados conforme explicado na Seção 2.3.1 .

2.3.1 Observadores de Estado

Para projetos de SSMPC, assume-se que as informações $\mathbf{x}(k)$ são medidas no instante k . Na prática, nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para medição ou sensores para fazê-la são caros ou não disponíveis (CHEN, 2013). Isso é verdade especialmente em indústrias de gás e petróleo nas quais existem estados que são impossíveis de medir como pode ser visto em Yang *et al.* (2018). Note que a maioria dos MPC utilizados nessa indústria são alimentados apenas por dados de entrada e saída conforme Campos, Gomes e Perez (2013) e Plucenio *et al.* (2017). Uma abordagem para contornar esse problema é estimar a variável de estado $\mathbf{x}(k)$ a partir da medição das saídas do processo por meio de observadores de estado e prever o comportamento deste sistema baseado nessas estimativas.

No caso do projeto de um SSMPC para sistemas lineares, pode-se utilizar um observador de Luenberger para fazer as estimativas. Perceba que existem outras técnicas para estimação de estados que, em sua maioria, possuem a mesma estrutura geral do observador de Luenberger (FRIEDLAND, 2012). Portanto, as conclusões tiradas para este observador podem ser estendidas para qualquer outro estimador.

Assim, na falta de medições do estado real, o estado estimado pode ser usado para um controle por realimentação de estados. O sistema estimado do observador de estados proposto por Luenberger (1971) é mostrado na Equação (24).

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k)), \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (24)$$

no qual $\hat{\mathbf{x}}$ é o estado estimado, \mathbf{L} é o ganho do observador, $\hat{\mathbf{y}}$ é a saída estimada e todas as outras variáveis são mantidas do sistema original (20).

Note que o ganho \mathbf{L} é um termo de correção que age na diferença entre a saída real e a saída estimada. Se esse erro é zero, nenhuma correção é necessária. Se a diferença não é zero, então um observador com um \mathbf{L} bem escolhido conduzirá o estado estimado para o real conforme mostrado na Equação (25). Para tanto, define-se o erro de estimação dado por $\mathbf{e}_e(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$. A dinâmica desse erro é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_e(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ &= [\mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k)] - [\mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k))] \\ &= (\mathbf{A}_m - \mathbf{L} \mathbf{C}_m)(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ &= \mathbf{A}_L \mathbf{e}_e(k) \end{aligned} \quad (25)$$

Conseqüentemente, é óbvio que o ganho L do observador é o que define a taxa de convergência do erro, onde a matriz $A_L = A_m - LC_m$ precisa ser estável. Perceba que a dinâmica do observador precisa ser bem mais rápida que a do controlador, pois o controlador toma decisões baseado no estado estimado e não no real. No entanto, uma dinâmica do observador muito rápida pode causar oscilações fazendo com que os estados estimados nunca convirjam rumo aos estados reais, e conseqüentemente a malha fechada do sistema também não convergirá. Além disso, para acelerar a dinâmica normalmente é escolhido um ganho L alto que pode causar um fenômeno de pico no qual o erro inicial do estimador pode ser proibitivamente grande (ou seja, impraticável ou inseguro de usar) (KHALIL, 2002). Portanto, se não for possível projetar um observador rápido e adequado, uma dinâmica não tão veloz deverá ser escolhida. O controlador então deverá levar em consideração que o estado estimado pode ser diferente do estado real. Em outras palavras, o projeto do controlador e do observador deve ser feito com cuidado.

Alternativamente, pode-se evitar o uso de observadores ao utilizar uma realização em espaço de estado especial chamada de Modelo Realinhado apresentada na Seção 2.3.2.

2.3.2 O Modelo Realinhado

Uma abordagem que evita o uso de observadores e ao mesmo tempo garante que todos os estados estão disponíveis para medição é usar as entradas e saídas do sistema como variáveis de estado. Tal abordagem é chamada de Modelo Realinhado ou Modelo em Espaços de Estados Não-Mínimo, do inglês *Non-Minimal State-Space* (NMSS), e foi proposta por Taylor, Chotai e Young (2000). É de suma importância deixar claro que assim como há várias formas de determinar um modelo por espaço de estado a partir de um sistema e várias maneiras de colocá-lo em sua forma incremental, há também diversos modelos que usam os dados de entrada e saída como estados. Entretanto, o formato que será apresentado nesta seção é aquele que será referido como modelo NMSS.

Para simplificação da explanação considera-se que o sistema não possui atrasos e que o modelo do distúrbio não é considerado. Assim, considere um modelo por equações à diferenças, conforme a Equação (26).

$$y(k) + \sum_{c=1}^{na} A_{r,c} y(k-c) = \sum_{c=1}^{nb} B_{r,c} u(k-c) \quad (26)$$

na qual $A_r(z^{-1})$ é uma matriz polinomial mônica de dimensão $p \times p$ de ordem nar e $B_r(z^{-1})$ é uma matriz polinomial de dimensão $p \times m$ e ordem nbr . Estas matrizes são

definidas conforme a Equação (27).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r(z^{-1}) &= \mathbf{I}_p + \mathbf{A}_{r1}z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{rc}z^{-c} + \dots + \mathbf{A}_{rna}z^{-na} \\ \mathbf{B}_r(z^{-1}) &= \mathbf{B}_{r1}z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{rc}z^{-c} + \dots + \mathbf{B}_{rnb}z^{-nb} \end{aligned} \quad (27)$$

É fácil mostrar que o modelo acima corresponde a uma matriz de funções de transferências com \mathbf{A}_r e \mathbf{B}_r representando a mesma dinâmica das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da Equação (6).

Por meio desta equação podem ser obtidas várias equivalências em espaço de estado (KAILATH, 1980). Neste trabalho, usa-se a forma proposta por Maciejowski (2002), na qual o estado $\mathbf{x}(k)$ do modelo é composto pelas entradas e saídas passadas conforme a Equação (28).

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{y}(k)^T \ \mathbf{y}(k-1)^T \ \dots \ \mathbf{y}(k-na+1)^T \ \mathbf{u}(k-1)^T \ \mathbf{u}(k-2)^T \ \dots \ \mathbf{u}(k-nb+1)^T]^T; \quad (28)$$

Assim, o novo modelo em espaço de estados equivalente a (26) tem suas matrizes (\mathbf{A}_m , \mathbf{B}_m , \mathbf{C}_m) definidas conforme as equações abaixo.

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{r1} & -\mathbf{A}_{r2} & \dots & -\mathbf{A}_{rna-1} & -\mathbf{A}_{rna} & \mathbf{B}_{r2} & \dots & \mathbf{B}_{rnb-1} & \mathbf{B}_{rnb} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \dots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \dots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{I}_p & \dots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \dots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \dots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \dots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \dots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \dots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \dots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \dots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \dots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{r1}^T & \mathbf{0}_{p \times m}^T & \mathbf{0}_{p \times m}^T & \dots & \mathbf{0}_{p \times m}^T & \mathbf{I}_m^T & \mathbf{0}_m^T & \dots & \mathbf{0}_m^T \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \dots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} & \dots & \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix} \quad (31)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(na \cdot p + (nb-1) \cdot m) \times 1}$, $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{(na \cdot p + (nb-1) \cdot m) \times (na \cdot p + (nb-1) \cdot m)}$,
 $\mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{(na \cdot p + (nb-1) \cdot m) \times m}$ e $\mathbf{C}_m \in \mathbb{R}^{p \times (na \cdot p + (nb-1) \cdot m)}$.

Procedimentos alternativos para conseguir uma equivalência em espaço de estados usando dados de entrada e saída incluem o trabalho de Young *et al.* (1987) que utiliza um estado de “integral do erro” para conseguir rastrear a referência desejada; os trabalhos de Wang (2009) e de González, Perez e Odloak (2009) que utilizam um modelo em Espaços de Estados Não-Mínimo em forma Incremental, do inglês *incremental Non-Minimal State-Space* (iNMSS), semelhante ao modelo CARIMA, em

que os estados são as saídas e os incrementos de entrada passados; e os trabalhos de Odloak (2004) e Maciejowski (2002) que utilizam a resposta ao degrau do sistema para montar as matrizes (A_m , B_m , C_m).

Todas essas representações são válidas, mas possuem desvantagens que serão comentadas nos próximos capítulos. Nesta seção é importante destacar as desvantagens do modelo NMSS. Primeiramente, este possui estados a mais quando comparado com a representação mínima. Além disso, para processos com tempo morto, junta-se a isso os estados adicionais para lidar com a dinâmica dos atrasos, o que deixa o modelo ainda maior e pode prejudicar a escalabilidade do MPC. Finalmente, o modelo NMSS trabalha com matrizes esparsas o que pode causar problemas numéricos nos algoritmos MPC.

Contudo, o grande benefício desse modelo é que permite realizar uma realimentação de saída por meio de uma realimentação de estados que possui como vantagem a facilidade de prova da estabilidade robusta e de implementação do controlador, dentre outras.

Nesse contexto, a Seção 2.4 discorre sobre robustez no MPC e introduz alguns algoritmos que garantem estabilidade robusta.

2.4 CONTROLADOR PREDITIVO ROBUSTO - RMPC

Condizente com o que foi apresentado até agora, sabe-se que o MPC é uma técnica poderosa para controle de processos industriais. A Seção 2.1 mostrou algumas características gerais deste controlador, mas este pode ainda ser classificado levando em consideração algumas características mais específicas do problema, como por exemplo a linearidade do modelo ou a forma como o problema de otimização é resolvido. Para este trabalho, o MPC será classificado levando em consideração como é feito o tratamento de incertezas, podendo ser MPC nominal ou MPC robusto.

Um MPC é dito nominal quando se assume que o modelo da planta utilizado é perfeito, ou seja, não há tratamento de incertezas. Como na prática isso não acontece devido às incertezas de modelo, um controle que garanta estabilidade mesmo com as incertezas deve ser usado, neste caso o controle se diz robusto.

Para projetar um RMPC normalmente se usa como ponto de partida o modelo linearizado da planta e a descrição das incertezas a serem tratadas pelo problema. Há, entretanto, diversas formas de projetá-lo. Geralmente, estabilidade robusta pode ser alcançada indiretamente, especificando a descrição do objetivo e da incerteza de uma maneira que os cálculos de controle ideais levem a uma estabilidade robusta; ou diretamente, impondo um tipo de restrição de contração robusta (BEMPORAD; MORARI, 1999).

Um método comum para garantir a estabilidade robusta de forma indireta é a abordagem min-max, que calcula a ação de controle para o pior cenário possível (SCO-

KAERT; MAYNE, 1998). No entanto, esse procedimento resulta em um desempenho de controle muito conservador e em um alto custo computacional. Portanto, não é uma abordagem ideal para fins práticos de implementação (RALHAN; BADGWELL, 2000).

Outras abordagens para o RMPC funcionam adicionando restrições de contração nos estados do sistema. Uma maneira de fazer isso é contrair esses estados ao longo de um horizonte infinito, como visto em Kothare, Balakrishnan e Morari (1996).

Como alternativa, uma estrutura dual de controle pode ser aplicada onde o RMPC empurra o sistema incerto, em um horizonte finito, em direção a um conjunto Robusto e Positivamente Invariável (RPI), e em seguida, um segundo controle mantém o sistema dentro desse conjunto. Pesquisas nessa área mostram resultados promissores, como pode ser visto em Ding (2010) e Limon *et al.* (2010).

Por fim, é possível usar uma abordagem denominada de custo contrativo, que impõe uma restrição diretamente à função de custo do MPC. Essa estratégia possui um custo computacional menor e parece ser aceitável para implementação prática (GESSER, 2018).

A partir disso, as estratégias escolhidas neste trabalho foram as que parecem ser mais promissoras. Ambas utilizam modelos lineares discretos, mas a forma com que a incerteza é passada ao controlador é diferente. Assim, as Subseções 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3 tratam da definição incertezas e da formulação das estratégias de custo contrativo e de uma técnica de RMPC dual conhecido como RMPC baseado em tubos.

2.4.1 Descrição das incertezas

A incerteza do sistema nada mais é do que a representação das incompatibilidades entre o sistema nominal e o sistema real. Essas incertezas podem ser causadas por diferentes fatores, como por exemplo: sensores defeituosos, ruídos na saída, perturbações no sistema, mudanças no ponto de operação, falhas na estimação dos estados, entre outras.

Assim, estas incertezas normalmente podem ser classificadas em três grupos, sendo eles: descrição da incerteza por politopo, incerteza multi-modelo e descrição da incerteza via distúrbios aditivos. A incerteza politópica não será utilizada neste trabalho, as outras são explicadas a seguir.

2.4.1.1 Incerteza Multi-Modelo

A incerteza multi-modelo é usada quando o comportamento dinâmico da planta pode ser bem representado por um modelo que pertence a família Ω formada por q possíveis sistemas lineares de mesma dimensão, no entanto não se sabe exatamente que modelo é esse.

Para o caso em função de transferência, cada um dos q modelos na família Ω

pode ser representado pelas matrizes $(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j)$ conforme a Equação (32).

$$(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j) \in \Omega = \{(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{A}_q, \mathbf{B}_q)\} \quad (32)$$

Similarmente, o sistema pode ser representado por um modelo em espaço de estados utilizando as matrizes $(\mathbf{A}_{m,j}, \mathbf{B}_{m,j})$ e conseqüentemente a incerteza multi-modelo é representada da mesma forma.

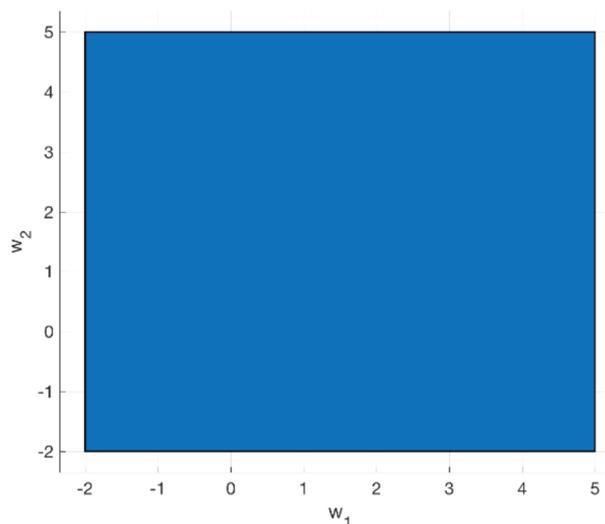
2.4.1.2 Incerteza via distúrbios aditivos

Neste trabalho a incerteza via distúrbios aditivos será utilizada apenas na representação do modelo em espaço de estado. Essa incerteza pode ser nos estados (\mathbf{w}) ou na saída (\mathbf{v}) do modelo, e apesar de ser desconhecida, seus limites são conhecidos e dados por $(\mathbf{w}_{max}, \mathbf{w}_{min})$ ou $(\mathbf{v}_{max}, \mathbf{v}_{min})$, conforme a Equação (33).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (33)$$

no qual \mathbf{w} é limitado por $\mathbf{w}_{min} \leq |\mathbf{w}| \leq \mathbf{w}_{max}$ e \mathbf{v} por $\mathbf{v}_{min} \leq |\mathbf{v}| \leq \mathbf{v}_{max}$. Perceba que variáveis limitadas deste jeito podem ser definidas por um poliedro convexo e compacto. Como exemplo, um sistema em que $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ com $[-2, -2]^T \leq [w_1, w_2]^T \leq [5, 5]^T$ pode ser representado pelo poliedro mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Poliedro de distúrbio.



Fonte: Autor.

O poliedro \mathcal{W} representa todas as realizações possíveis dos distúrbios w_1 e w_2 . Esta descrição é interessante porque pode ser facilmente usada para caracterizar qualquer tipo de incerteza e pode ser estendida para modelos não lineares sujeitos a distúrbios aditivos (MARTINS; YAMASHITA *et al.*, 2013).

2.4.2 RMPC com custo contrativo

Conforme citado anteriormente, o RMPC com custo contrativo foi originalmente proposto por Badgwell (1997b), e consiste de um algoritmo robusto para estabilizar sistemas lineares, discretos, invariantes no tempo e estáveis em malha aberta. A incerteza do modelo é parametrizada por uma lista de possíveis modelos, ou seja, incerteza multi-modelo. A descrição multi-modelo é particularmente interessante quando cada modelo da família Ω corresponde a um ponto de operação diferente da planta, permitindo que o RMPC com custo contrativo controle a planta não linear utilizada mesmo sem saber em qual ponto de operação o sistema se encontra. Ademais, a estabilidade robusta é alcançada através da adição de restrições que impedem que a sequência de custos ideais do controlador aumente para a planta.

Para uso dessa técnica, supõe-se que o sistema é representado por um modelo em espaço de estados tal qual o apresentado na Equação (19). Originalmente, o problema regulatório foi abordado por Badgwell (1997c), consistindo em levar os estados do sistema à origem. Assim, o sistema estudado é definido por $\Theta \triangleq (\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m)$. Adicionalmente, pelo fato de a incerteza ser multi-modelo, denota-se $\Theta_j \triangleq (\mathbf{A}_{m,j}, \mathbf{B}_{m,j})$ para identificar cada modelo presente em Ω . O modelo nominal representa a planta no ponto mais comum de operação, ou seja, o modelo mais provável de ser encontrado pelo controlador e é dado por Θ_N . Ademais, o modelo que realmente representa a planta, ou seja, que representa a planta no ponto operacional em que esta se encontra é dado por Θ_T e doravante chamado de modelo real. Note que Θ_T sempre se refere ao modelo que representa a planta fielmente, se o ponto de operação muda durante o uso da planta, Θ_T também muda.

Como segundo passo, seleciona-se então um modelo em Ω que será usado como modelo nominal do MPC. O objetivo do MPC é minimizar uma função custo para guiar os estados do sistema rumo a origem conforme a Equação (34).

$$J_k = \sum_{c=0}^{N_p-1} \left(\mathbf{x}(k+c|k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+c|k) + \mathbf{u}(k+c|k)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(k+c|k) \right) + J_\infty \quad (34)$$

$$\text{com} \quad J_\infty = \sum_{c=N_p}^{\infty} \mathbf{x}(k+c|k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+c|k)$$

sendo $\mathbf{x}(k+c|k)$ os estados preditos e $\mathbf{u}(k+c|k)$ os controles futuros. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} continuam sendo ponderações positivas definidas. Note que, para o problema regulatório, tanto os estados preditos quanto as ações de controle utilizam o mesmo horizonte que vai de zero a $N_p - 1$. O uso de um mesmo horizonte para ambas as variáveis é comum em RMPCs para simplificar a formulação do problema. Assim, há então uma pequena diferença entre as funções custo apresentadas nessa seção e as apresentadas na Seção 2.3. Note também que a soma J_∞ mostra a contribuição do estado em evolução livre, que pode ser aproximada como uma função do estado

terminal $\mathbf{x}(k + N_p|k)$ e da ponderação terminal $\bar{\mathbf{Q}}$, computada por meio da equação de Lyapunov conforme a Equação (35).

$$J_\infty = \mathbf{x}(k + N_p|k)^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(k + N_p|k) \quad \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_{m,i}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_{m,i} \quad (35)$$

A função custo presente na Equação (34) depende de uma sequência de ações de controle que pode ser estrategicamente representada por um vetor π_k conforme a Equação (36).

$$\pi_k = [\mathbf{u}(k|k)^T, \dots, \mathbf{u}(k + N_p - 1|k)^T]^T \quad (36)$$

Percebe-se então que a função custo do controlador pode ser representada por uma função que decorre dos valores dos estados \mathbf{x}_k , do controle π_k , do modelo Θ , das ponderações \mathbf{Q} e \mathbf{R} , e do horizonte N_p .

Assim sendo, a função custo a ser minimizada pode ser escrita como $J(\pi_k, \mathbf{x}_k, \Theta_N)$ e a função custo do modelo real é dada por $J(\pi_k, \mathbf{x}_k, \Theta_T)$, onde \mathbf{Q} , \mathbf{R} , N_p são constantes e não mudam entre instantes de tempo ou entre modelos.

De posse disso, percebe-se que esta formulação não é robustamente estabilizadora, já que a função a ser minimizada depende de Θ_N e não considera como a diferença entre Θ_N e Θ_T afetará o sistema. É necessário um componente extra que considere todos os modelos em Ω para introduzir referida robustez no controle.

Assim, considerando a função custo (34), pode-se definir a entrada ótima anterior π_{k-1}^* conforme a Equação (37).

$$\pi_{k-1}^* = [\mathbf{u}^*(k-1|k-1)^T, \dots, \mathbf{u}^*(k+N_p-2|k-1)^T]^T \quad (37)$$

Similarmente, uma versão deslocada da entrada ótima anterior π_{k-1}^* , chamada de restrição de entrada, também pode ser definida conforme a Equação (38).

$$\tilde{\pi}_k = [\mathbf{u}^*(k|k-1)^T, \dots, \mathbf{u}^*(k+N_p-2|k-1)^T, 0^T]^T \quad (38)$$

De forma a garantir que a função de custo (34) diminua ou permaneça constante para Θ_T , uma restrição de robustez no objetivo de controle deve ser incluída para cada modelo em Ω . Tal restrição é dada pela Equação (39).

$$J_k(\pi_k, \mathbf{x}_k, \Theta) \leq J_k(\tilde{\pi}_k, \mathbf{x}_k, \Theta) \quad \forall \Theta \in \Omega \quad (39)$$

Segundo Badgwell (1997c), restrições nos estados e entradas do sistema podem ser introduzidas sem prejudicar as propriedades de estabilidade do algoritmo. Assim, o problema de otimização a ser resolvido é mostrado na Equação (40).

$$\begin{aligned} & \min_{\pi_k} J_k(\pi_k, \mathbf{x}_k, \Theta_N) \\ \text{s.a.} \quad & J_k(\pi_k, \mathbf{x}_k, \Theta) \leq J_k(\tilde{\pi}_k, \mathbf{x}_k, \Theta) \quad \forall \Theta \in \Omega \\ & \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x}(k+c|k) \leq \mathbf{x}_{max}, \quad \forall c = 0, \dots, N_p \\ & \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+c|k) \leq \mathbf{u}_{max}, \quad \forall c = 0, \dots, N_p \end{aligned} \quad (40)$$

onde $(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})$, $(\mathbf{u}_{min}, \mathbf{u}_{max})$ são os limites mínimos e máximos dos estados e entradas, e define-se $\tilde{\pi}_k^*$ como a sequência ótima calculada pela minimização do problema (40).

Por fim é interessante expor duas características do algoritmo. Primeiramente, nota-se que no primeiro instante de tempo não existe resposta anterior ótima calculada, portanto ainda não existe um valor para $\tilde{\pi}_k$. Assim, para iniciar o algoritmo, a restrição na entrada é igualada a zero conforme a Equação (41).

$$\tilde{\pi}_0 = [0^T, \dots, 0^T, 0^T]^T \quad (41)$$

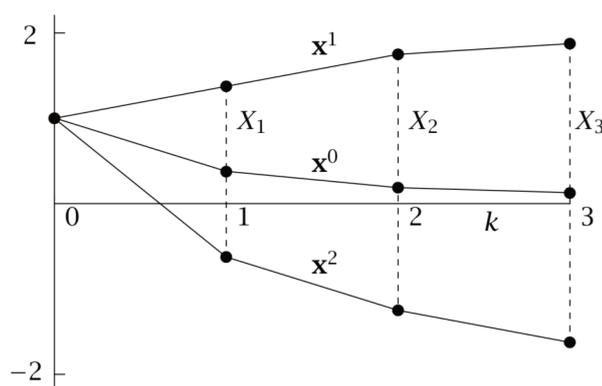
Segundamente, o algoritmo aqui descrito é um problema *quasi-QP* consistindo em um *QP* padrão sujeito a restrições quadráticas, ou seja, é um problema não linear estritamente convexo e deve ser resolvido utilizando um otimizador capaz de lidar com isso.

2.4.3 RMPC baseado em tubos - TRMPC

Conforme explanado anteriormente, o RMPC baseado em tubos, do inglês *Tube-based Robust Model Predictive Control* (TRMPC), foi originalmente proposto por Langson *et al.* (2004) e posteriormente descrito por Mayne, Seron e Raković (2005).

O TRMPC é o problema de controle na presença de incertezas que gera um tubo de trajetórias em que cada uma delas corresponde a uma realização particular da incerteza (RAWLINGS; MAYNE, 2009), conforme pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 – Trajetórias dos estados.



Fonte: Rawlings e Mayne (2009).

Na Figura 3, determinadas trajetórias de um sistema são simuladas por 3 instantes de tempo. A trajetória central equivale ao sistema nominal evoluindo sem perturbação presente, as linhas nas extremidades são as trajetórias máximas e mínimas quando consideradas os limites da perturbação. A idéia é usar um MPC convencional

para a trajetória nominal, usando restrições adequadamente apertadas e usar elementos de realimentação para direcionar todas as trajetórias dentro do tubo para perto da trajetória central.

Para aplicação da técnica considere inicialmente um sistema incerto sujeito a restrições nos estados e no controle conforme a Equação (42).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \text{s.a. } \mathbf{x}_{min} &\leq \mathbf{x}(k) \leq \mathbf{x}_{max} \\ \mathbf{u}_{min} &\leq \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{u}_{max} \end{aligned} \quad (42)$$

Assim como feito com o distúrbio na Seção 2.4.1.2, as restrições no estados e no controle podem ser representadas por meio de poliedros. Assumindo um conjunto \mathcal{U} como politopo compacto e convexo, e \mathcal{X} um politopo fechado e convexo, as restrições do problema podem ser representadas conforme a Equação (43).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &\in \mathcal{X} \\ \mathbf{u}(k) &\in \mathcal{U} \\ \mathbf{w}(k) &\in \mathcal{W} \end{aligned} \quad (43)$$

Considere também que o sistema nominal é dado pela Equação (44).

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_m \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}}(k) \quad (44)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}$ é o estado nominal e $\bar{\mathbf{u}}$ é o controle nominal.

Para o caso regulatório, o controle para o sistema incerto (42) baseia-se na sequência de ações de controle para o sistema nominal ($\bar{\pi}_k$) e no tubo de trajetórias. Como o sistema real pode sentir os efeitos de distúrbios, o RMPC utiliza a estratégia de controle mostrada na Equação (45).

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{K}_{dr}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (45)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ é o controle para o sistema nominal calculado por um MPC convencional e $\mathbf{K}_{dr} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho para rejeição de distúrbio que age na discrepância entre $\mathbf{x}(k)$ (estado atual) e $\bar{\mathbf{x}}(k)$ (estado nominal), que normalmente é escolhido como ganho de um Regulador Linear Quadrático, do inglês *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

O ganho \mathbf{K}_{dr} deve ser escolhido de forma que $\mathbf{A}_K = (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_{dr})$ seja estável e atenuar adequadamente a perturbação. A partir disso, define-se o sinal de erro e sua dinâmica como mostrado na Equação (46).

$$\mathbf{e}(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k), \quad \mathbf{e}(k+1) = \mathbf{A}_K \mathbf{e}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (46)$$

Considerando o ganho \mathbf{K}_{dr} , a dinâmica do erro (46) e as suposições feitas anteriormente, tem-se que a evolução de $\mathbf{e}(k)$ é limitada e a trajetória real $\mathbf{x}(k)$ deve ficar

próxima da predita. Para tanto, é utilizada a noção de conjuntos RPI¹ desenvolvida por Kolmanovsky e Gilbert (1998) e simplificada para aplicação nesta técnica por Raković *et al.* (2005).

Sendo o estado incerto governado pela Equação (42), então um conjunto ϕ_K é RPI para este sistema se $\mathbf{A}_K \phi_K \oplus \mathcal{W} \subseteq \phi_K$, onde \oplus representa a soma de Minkowski. Se \mathbf{A}_K é estável, então existe um conjunto RPI para esse sistema (KOLMANOVSKY; GILBERT, 1998).

Como é mostrado na Equação (50), usa-se ϕ_K para apertar as restrições do sistema nominal. Por este motivo, desde já aconselha-se a escolha do menor RPI possível para reduzir a conservatividade do problema.

Tendo isso em mente, um conjunto F_∞ é dito RPI mínimo se e somente se $F_\infty \subseteq \phi_K$ para todo ϕ_K . Segundo Kolmanovsky e Gilbert (1998), F_∞ é dado pela Equação (47).

$$F_\infty = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}_K)^k \mathcal{W} \quad (47)$$

O conjunto F_∞ é a representação do efeito do distúrbio na malha fechada do sistema e depende do somatório de Minkowski representado por \bigoplus . Infelizmente, na prática não é possível utilizar essa equação devido à sua complexidade. Faz-se necessário encontrar soluções alternativas para cálculo de ϕ_K .

Uma dessas soluções é aproximar o valor F_∞ conforme mostrado em (RAKOVIĆ *et al.*, 2005). Alternativamente, Rawlings e Mayne (2009) sugerem que se não for possível calcular nem a aproximação de ϕ_K pode-se truncar a Equação (47) ao final do horizonte N do problema², conforme mostrado na Equação (48).

$$\phi_K \approx \bigoplus_{k=0}^N (\mathbf{A}_K)^k \mathcal{W} \quad (48)$$

Assim, apenas o efeito do distúrbio dentro do horizonte é calculado. De posse disso, tem-se que a função custo do TRMPC leva em consideração o custo dos estados, da ação de controle e um custo terminal conforme pode ser visto na função custo da Equação (49).

$$V_N(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{c=0}^{N-1} \left(\|\bar{\mathbf{x}}_p(k+c|k)\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(k+c|k)\|_R^2 \right) + \|\bar{\mathbf{x}}_p(k+N|k)\|_P^2 \quad (49)$$

onde a matriz \mathbf{P} é a matriz de ponderação do custo terminal, normalmente associado ao ganho do LQR. Atente para o fato de que a ponderação terminal do RMPC com

¹ Para este trabalho, um conjunto RPI refere-se a um conjunto invariante de controle robusto positivo. Um conjunto Ω é dito RPI para o sistema (42) se e somente se existe um $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{w}(k) \in \mathcal{W}$ que garanta que $\mathbf{x}(k+1) \in \Omega, \forall k \geq 0$.

² Quando se utiliza espaço de estado, é comum utilizar um mesmo horizonte ($N_p = N_c$) para simplificar os cálculos. Para o problema TRMPC, esse horizonte é chamado apenas de N .

custo contrativo \bar{Q} tem a mesma função que P tem no TRMPC, mas a primeira é computada por meio da equação de Lyapunov, já P é computada usando a equação de Riccati.

Ademais, como o MPC considera apenas o problema nominal é necessário usar restrições apertadas nos estados e no controle de forma a compensar o efeito do distúrbio. Portanto, o problema de otimização a ser resolvido é dado pela Equação (50).

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\mathbf{u}}} V_N(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \\ \text{s.a. } & \bar{\mathbf{x}}_p(k+c|k) \in (\mathcal{X} \ominus \phi_K), \quad \forall c = 0, \dots, N-1 \\ & \bar{\mathbf{u}}(k+c|k) \in (\mathcal{U} \ominus \mathbf{K}_{dr}\phi_K), \quad \forall c = 0, \dots, N-1 \\ & \bar{\mathbf{x}}(k+N|k) \in \mathcal{X}_f \end{aligned} \quad (50)$$

onde \mathcal{X}_f é um conjunto RPI terminal para o problema regulatório que deve satisfazer $\bar{\mathbf{x}}(N) \in \mathcal{X}_f \subseteq (\mathcal{X} \ominus \phi_K)$, e \ominus representa a subtração de Minkowski.

De forma simplificada, para o sistema nominal se subtrai o efeito dos distúrbios nos estados do poliedro \mathcal{X} . Além disso, sabendo que para um controle por realimentação de estados tem-se que $\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x}$, a restrição no controle nominal considera os efeitos do distúrbio dados por $\mathbf{K}_{dr} \phi_K$.

O resultado do problema de otimização (50) é aplicado na lei de controle dual da Equação (45). Isso implica que, forçando um conjunto adequado e com restrições apertadas para o sistema nominal, a evolução do sistema incerto mantém-se próxima à evolução do sistema nominal.

Para finalizar essa seção, algumas observações devem ser feitas. Primeiramente, para o caso regulatório, Rawlings e Mayne (2009) propõem que o estado nominal inicial $\bar{\mathbf{x}}(0)$ fosse utilizado como um grau de liberdade a mais. Dessa forma, é necessário apenas saber qual é o estado inicial real da planta. O controlador proposto modifica o problema (50) acrescentando a restrição $\mathbf{x}(0) \in \bar{\mathbf{x}}(0) \oplus \phi_K$.

Segundamente, foi provado que para o regulador a trajetória nominal não precisa ser calculada a cada tempo de amostragem (RAWLINGS; MAYNE, 2009). Entretanto, é importante frisar que o horizonte N tem que ser grande o suficiente para permitir que o sistema entre dentro do conjunto \mathcal{X}_f .

Por fim, enfatiza-se que a escolha do valor de \mathbf{K}_{dr} exige cautela. Perceba que um ganho grande rejeita melhor o distúrbio, mas diminui o tamanho da área de atuação do controle nominal. Assim, nem sempre o ganho LQR é o melhor a ser escolhido.

Observe que todos os resultados obtidos aqui são para o caso regulatório, mas são estendidos para o caso de seguimento de referência no Capítulo 4.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo resumiu os principais conceitos a respeito dos controladores preditivos e as duas formulações utilizadas: Controlador Preditivo Generalizado e o MPC por espaço de estados. Em seguida, dois métodos foram apresentados para garantir a estabilidade robusta das plantas controladas pelo MPC: RMPC com custo-contrativo e RMPC baseado em tubo. Embora a ideia básica de ambos seja semelhante, seus algoritmos são distintos e requerem conhecimentos diferentes do sistema. Os próximos capítulos apresentam as contribuições desta dissertação, que são as adaptações feitas nestas técnicas para atingir os objetivos deste trabalho. São analisadas as vantagens e dificuldades de aplicação de cada uma delas para alguns cenários.

3 CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO ROBUSTO -RGPC

Neste capítulo, é desenvolvido um RMPC para sistemas lineares e estáveis baseado no algoritmo GPC apresentado na Seção 2.2. Para lidar com a incerteza multi-modelo, o GPC é adaptado utilizando como base o regulador de estabilização robusta apresentado na Seção 2.4.2. Ademais, os trabalhos de González e Odloak (2010) e Scokaert (1997) foram usados para lidar com o problema de seguimento de referência. O objetivo aqui é desenvolver um GPC Robusto (RGPC), evitando o uso de observadores e ao mesmo tempo utilizando um esquema MPC já bem conhecido sem alterar bruscamente o problema de otimização padrão.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Primeiramente é apresentado um histórico dos diversos algoritmos que utilizam o custo contrativo desenvolvidos até agora, incluindo as vantagens e desvantagens de cada um deles. O RGPC é definido logo após, começando pelo desenvolvimento da formulação para estabilidade nominal e avançando para as propriedades de estabilidade robusta. A seguir, as propriedades que garantem a estabilidade assintótica do sistema são demonstradas. Finalmente, um sistema multivariável não linear é usado como um estudo de caso para ilustrar a aplicação do controlador robusto proposto.

3.1 RMPC COM CUSTO CONTRATIVO: HISTÓRICO

Como já explanado anteriormente, Badgwell (1997b) foi quem desenvolveu a estrutura (*framework*) de controle robusto para o caso multi-modelo. Posteriormente, ele estendeu seus resultados para sistemas não lineares estáveis (BADGWELL, 1997a) e para sistemas lineares estáveis sujeitos a incertezas contínuas (RALHAN; BADGWELL, 2000).

Perceba que todas essas abordagens foram desenvolvidas sob a premissa de que o sistema é estável e o modelo do sistema é tal que uma entrada nula produz uma saída do sistema que converge assintoticamente para a origem. Como resultado, supõe-se implicitamente que o objetivo do problema é limitado para a entrada nula e que, para a sequência de entrada calculada, o estado eventualmente chegaria a zero para todos os possíveis modelos de plantas.

Tais premissas são vantagens que o projetista tem ao desenvolver um controlador para o problema regulatório. Entretanto, estas suposições não são verdadeiras para o problema de rastreamento de saída, onde o estado estacionário do sistema normalmente não é conhecido. Conseqüentemente, o custo do problema pode não ser limitado para todos os modelos de Ω .

Além disso, o problema de rastreamento é de maior relevância para as áreas de engenharia. Com a intenção de resolver este problema, Odloak (2004) apresentou um MPC para plantas estáveis e lineares que lida com incertezas multi-modelo e com

perturbações não medidas. Este método utiliza um MPC com horizonte infinito, do inglês *Infinite Horizon Model Predictive Control* (IHMPC), para garantir estabilidade nominal do sistema e acrescenta restrições para garantir que o custo do problema seja limitado. Esta formulação foi estendida para plantas integradoras em González, Marchetti e Odloak (2007), para plantas integradoras e com atraso em Martins, Yamashita *et al.* (2013), para plantas com polos instáveis e estáveis em Martins e Odloak (2016) e para plantas com polos integradores repetidos em Pataro, Lima e Martins (2019).

Todos os trabalhos desenvolvidos a partir da formulação de Odloak (2004) baseiam-se em uma modelagem de espaço de estado baseado na resposta ao degrau do sistema em que os estados descrevem a relação entrada-saída da planta.

Essa representação apresenta diversas vantagens quando comparada com um modelo em espaços de estados comum (ver a Equação (20)). Entre elas, frisa-se:

- é uma proposta baseada numa formulação incremental das entradas do sistema, o que elimina o erro de regime estacionário;
- melhora a representação do sistema geralmente adotada na literatura do MPC. Como resultado, o cálculo da aproximação do IHMPC sai de maneira direta e é possível separar o vetor de estados do sistema de forma a conseguir componentes representando a parte estável, instável, integradora e incremental do sistema. Essa separação nos permite impor restrições terminais adequadas para cada parte da planta de forma quase independente, o que não é trivial num espaço de estados padrão;
- a função de custo do MPC é modificada para garantir que o custo permaneça limitado para todos os modelos possíveis do processo. Isso é feito através da inclusão de variáveis de folga no erro de seguimento. Com essa abordagem, o domínio de atração do controlador é amplificado e a factibilidade da solução é garantida.

Entretanto, tal formulação também possui diversas desvantagens que não podem ser ignoradas. São elas:

- o modelo tem um número maior de estados, pois modos de integração são introduzidos no modelo devido ao uso do incremento de controle no problema. Essa desvantagem é de menor importância visto que a maioria dos MPCs para seguimento de trajetória usam dessa estratégia para garantir erro de seguimento nulo. Além disso, o número de estados extras é pequeno e igual ao número de saídas do sistema, portanto não é uma desvantagem tão problemática;
- é irreal supor que os estados desse modelo estejam disponíveis para medição. Os estados relacionados com a parte incremental do sistema correspondem à

saída predita do sistema em regime permanente, e é óbvio que não é possível medir uma predição. Ademais, os estados relacionados com os modos estáveis e instáveis não tem interpretação física direta, o que significa que também não há como medi-los;

- a estrutura do modelo final depende das características dos polos de cada função de transferência (polos associados a modos estáveis, integradores ou instáveis) o que pode gerar uma formulação complexa. De fato, a formulação é tão entrelaçada que Martins e Odloak (2016) pedem atenção especial na hora de montar o modelo. O trabalho de Sencio e Odloak (2018) vai mais a fundo e afirma que diferentes estruturas de modelos geralmente levam a formulações MPC distintas, tornando uma padronização do método difícil.

Percebe-se que embora esta formulação seja um grande avanço em comparação ao método original, ainda parte da suposição que os estados estão disponíveis para medição (como a maioria dos RMPC faz). Além disso, sua formulação é de difícil padronização. Portanto, este modelo não cumpre os objetivos do trabalho.

O trabalho de Sencio e Odloak (2018) utiliza uma formulação alternativa para padronizar a estrutura utilizada para garantia de estabilidade nominal. Entretanto, esta ainda assume que os estados do sistema estão disponíveis para medição.

Para lidar com o problema dos estados indisponíveis, pode-se utilizar a modelagem iNMSS na qual os estados são as saídas passadas e os incrementos de entradas passadas do sistema. O trabalho de González e Odloak (2010) utiliza este modelo para garantir robustez de plantas estáveis. Posteriormente, esta formulação foi estendida para plantas estáveis e integradoras (PEREZ; ODLOAK; LIMA, 2014).

O modelo iNMSS mantém todas as vantagens do modelo baseado na resposta a degrau. O iNMSS tem forma incremental, permite realizar transformações a fim de trabalhar com cada parte do sistema de forma separada, e o custo do MPC permanece limitado. Além disso, a consideração de que todos os estados são medidos é sempre verdade para esse modelo.

Entretanto, o iNMSS também possui desvantagens. São elas:

- o modelo é não-mínimo. O número de estados extras depende do número de saídas, de polos e de zeros da planta. Perceba então que quanto maior a ordem da planta ou quanto mais saídas ela tiver, maior será o número de estados e maior será o fardo computacional para cálculo. Segundo Perez (2006), esse fato é amplificado quanto maior for o horizonte. Ademais, uma representação não-mínima dificulta a escalabilidade do problema;
- a formulação MPC muda dependendo dos polos das funções de transferência (sistema ter polos estáveis, integradores ou instáveis). De fato, não é trivial visua-

lizar os diferentes modos da planta. Isso explica por que, até o fechamento deste trabalho, este método ainda não havia sido estendido para plantas instáveis. Explica também o porquê de Perez, Odloak e Lima (2014) utilizarem uma planta na qual algumas saídas tinham comportamento integrador e outras eram estáveis de forma que o MPC consiga trabalhá-las de forma separada.

Tendo como objetivo manter as vantagens do iNMSS e mitigar suas desvantagens, um RGPC para plantas estáveis foi desenvolvido. O restante deste Capítulo mostra como funciona o método, depois mostra como este atenua as desvantagens acima e por fim alguns exemplos de seu funcionamento são apresentados.

3.2 GPC NOMINALMENTE ESTÁVEL

Embora o GPC seja muito bom devido à sua generalidade, ele tem uma grande fraqueza: a falta de uma garantia geral de estabilidade. Embora a estabilidade ainda possa ser alcançada ajustando os parâmetros de custo e horizonte adequadamente, essa abordagem não é ideal e foi fortemente criticada desde os trabalhos de (BITMEAD, R.; GEVERS, M.; WERTZ, V., 1990) e (SOETERBOEK, 1992). Consequentemente, vários trabalhos foram propostos para combater esse problema, como mostrado em (KOUVARITAKIS; ROSSITER; CHANG, 1992), (ROSSITER; GOSSNER; KOUVARITAKIS, 1996) e (STOICA; RODRÍGUEZ-AYERBE; DUMUR, 2007).

A maneira mais comum de garantir a estabilidade é impor uma restrição terminal ou um custo terminal. Neste trabalho, um MPC com restrição de igualdade terminal será usado de maneira semelhante à proposta por Kwon e Pearson (1977) para o problema regulatório em espaço de estados. Esta condição foi posteriormente estendida por Bemporad, Chisci e Mosca (1994) a sistemas lineares descritos por um modelo de Média Móvel Auto-Regressiva Controlada, do inglês *Controlled Auto-Regressive Moving Average* (CARMA), obtendo uma restrição equivalente nas entradas e saídas do sistema. As restrições modificadas usadas neste trabalho são dadas por:

$$\Delta \mathbf{u}(k + c|k) = 0, \quad \forall c > N_c \quad (51)$$

$$\mathbf{e}_{N_p} = 0 \quad (52)$$

com

$$\mathbf{e}_{N_p} = \boldsymbol{\nu}_k - \mathbf{y}_p(k + N_p + N_{\bar{Q}} + 1|k) \quad (53)$$

onde $\mathbf{y}_p(k + N_p + N_{\bar{Q}} + 1|k)$ é a predição das saídas após o horizonte $N_p + N_{\bar{Q}}$, $N_{\bar{Q}}$ é o tamanho da matriz \bar{Q} a ser explicada posteriormente, $\boldsymbol{\nu}_k$ é um vetor de referências artificiais para cada saída e \mathbf{e}_{N_p} é o erro de rastreamento artificial.

O objetivo de (52) é fazer com que a saída do sistema atinja a referência artificial antes ou ao final do horizonte, que é a última vez em que os movimentos de controlador

ainda afetam o modelo de predição. Uma vez atingido o objetivo, o sistema deve permanecer lá. Em outras palavras, queremos forçar um estado estacionário assim que o erro de rastreamento for zerado. Isso é alcançado considerando $\Delta \mathbf{u} = 0$ após o horizonte de controle (N_c), como mostrado em (51). Perceba que esse controlador assume que as referências são constantes por partes, ou seja, do tipo degrau.

Lembre-se de que, em uma situação ideal, o sistema alcançaria a referência real antes do final de N_p . No entanto, talvez não seja possível fazer isso. Portanto, ν_k funciona como uma variável de folga (tratada como variável de decisão pelo problema de otimização) usada para garantir a factibilidade das restrições terminais. Além disso, para que a referência artificial seja o mais próxima possível da referência real, a distância entre elas deve ser penalizada na função de custo do MPC.

Assim, a nova função de custo que deve ser minimizada pode ser formulada como

$$J_k = \sum_{c=1}^{N_p} \|\mathbf{y}_p(k+c|k) - \nu_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{c=1}^{N_c} \|\Delta \mathbf{u}(k+c-1|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\nu_k - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 + J_\infty \quad (54)$$

onde \mathbf{S} é a matriz de ponderação penalizando a diferença entre as referências reais e artificiais, e J_∞ é a contribuição do estado em evolução livre para a função de custo do controlador, ou seja, a representação das predições de N_p em diante, conforme mostrado na Equação (55).

$$\begin{aligned} J_\infty &= \sum_{c=N_p+1}^{\infty} \|\mathbf{y}_p(k+c|k) - \nu_k\|_{\mathbf{Q}}^2 \\ &\cong \|\mathbf{e}_{\text{inf}}\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 \end{aligned} \quad (55)$$

onde \mathbf{e}_{inf} o vetor de erro de rastreamento após o horizonte de predição e $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz de ponderação terminal.

Para calcular o valor de $\bar{\mathbf{Q}}$, é usada uma realização auxiliar em espaço de estado, conforme mostrado (SCOKAERT, 1997). Essa realização consiste das matrizes Φ e Λ que são determinadas usando os coeficientes de cada A_i mostrada na Equação (5). Cada saída tem seu par (Φ, Λ) com valores dados conforme a Equação (56).

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{na-1,1} & & \mathbf{I}_{na-1} \\ -a_{na}^i & -a_{na-1}^i & \dots & -a_1^i \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

onde $\mathbf{0}_{na-1,1}$ denota a matriz de zeros com dimensão $(na-1 \times 1)$ e \mathbf{I}_{na-1} uma matriz identidade quadrada com a dimensão $na-1$.

Portanto, a ponderação terminal para cada saída $\bar{\mathbf{Q}}_i$ pode ser calculada como a solução para uma equação de Lyapunov discreta conforme a Equação (58).

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \Lambda_i^T \Lambda_i + \Phi_i^T \bar{\mathbf{Q}}_i \Phi_i \quad (58)$$

Assim, cada saída tem uma matriz de ponderação dependendo do seu número de polos e o custo terminal do sistema é dado pela Equação (59).

$$\begin{aligned} J_\infty &\cong \sum_{i=1}^{ny} \|\mathbf{e}_{\text{inf},i}\|_{\bar{\mathbf{Q}}_i}^2 \\ &= \|\mathbf{e}_{\text{inf}}\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 \end{aligned} \quad (59)$$

com

$$\mathbf{e}_{\text{inf},i} = [y_{p,i}(k + N_p + 1|k) - \nu_i, \dots, y_{p,i}(k + N_p + na|k) - \nu_i]^T$$

onde $\mathbf{e}_{\text{inf},i}$ é o erro de rastreamento após o horizonte de cada saída, $y_{p,i}$ são as previsões de cada saída e $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_{ny}]$ são as referências artificiais.

Ademais, perceba que as restrições (51) e (52) forçam os efeitos dos modos incrementais da planta a desaparecer. Perceba que em regime permanente não há necessidade de correção do erro. Assim, apenas os modos estáveis da planta ficam ativos e conseqüentemente apenas seus efeitos devem ser ponderados. É por isso que o cálculo de $\bar{\mathbf{Q}}_i$ utiliza apenas o polinômio $A_i(z^{-1})$ e não o polinômio $\tilde{A}_i(z^{-1})$ da planta. Além disso, perceba também que a dimensão da matriz quadrada $\bar{\mathbf{Q}}_i$ depende do valor de na e são necessárias previsões extras para cálculo de $\mathbf{e}_{\text{inf},i}$.

Finalmente, o problema de controle para o GPC nominalmente estável pode ser formulado como mostra a Equação (60).

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \nu_k} J_k \quad (60)$$

sujeito a

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u}(k + c|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad \forall c = 0, \dots, N_c \quad (61)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(k + c|k) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \forall c = 0, \dots, N_c \quad (62)$$

$$\Delta \mathbf{u}(k + c|k) = 0, \quad \forall c > N_c$$

$$\mathbf{e}_{N_p} = 0$$

onde (61) e (62) são restrições na variável de controle e seu incremento, representando limites físicos do processo.

Perceba que o método apresentado aqui foca apenas nas plantas estáveis em malha aberta, pois o custo contrativo foi originalmente proposto apenas para estas. Segundo Carrapiço e Odloak (2005), a função custo mostrada na Equação (54) com $N_1 = 1$ e $N_2 \cong \infty$ será sempre ilimitada se a restrição apresentada na Equação (52) não for imposta. Perceba que para sistemas instáveis, é necessário utilizar essa restrição para que os modos estáveis da planta garantam o seguimento de referência e uma segunda restrição deve ser imposta para que seus modos instáveis sejam zerados ao final do horizonte. A tarefa fica mais complicada se a planta possui apenas modos

instáveis ou modos integradores repetidos, por exemplo. Portanto, o problema deve ser adaptado para cada caso de forma a manter objetivo de controle limitado. Novamente, este trabalho só garante isso para o caso de plantas estáveis em malha aberta.

Na Seção 3.3, o GPC nominalmente estável desenvolvido aqui é usado como ponto de partida para reforçar a estabilidade robusta para incertezas multi-modelo.

3.3 CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO ROBUSTO - RGPC

Embora a formulação GPC nominalmente estável seja de importância significativa, ela não considera como as incertezas podem modificar a resposta do sistema. Para levar em conta essas incertezas, um RGPC é proposto.

Portanto, as ideias de Badgwell (1997b) podem ser usadas no GPC apresentado na Seção 3.2 para resolver o problema de estabilidade robusta. Para caracterizar a incerteza do modelo, supõe-se que os polinômios A e B do modelo não sejam exatamente conhecidos, no entanto, eles se encontram dentro de Ω conforme mostrado na Seção 2.4.1.1. Portanto, o problema considera a incerteza multi-modelo.

Lembra-se que para o caso GPC, cada modelo em Ω é definido por $\Theta_j \triangleq (A_j, B_j)$. Adicionalmente, denota-se Θ_N para o modelo nominal a ser minimizado e Θ_T para o modelo que realmente representa a planta.

A sequência de entradas futuras será representada novamente pelo vetor π_k e, da mesma forma, uma versão deslocada da entrada ótima passada será representada por π_{k-1}^* .

Portanto, o objetivo agora é uma função que depende dessa sequência de ações futuras (π_k), da referência artificial (ν_k^Θ) e do modelo usado. O sobrescrito Θ em ν_k^Θ significa que há uma referência artificial para cada modelo no conjunto a qualquer instante k . Similarmente, $\nu_k^{\Theta_N}$ refere-se à referência do modelo nominal e assim por diante.

Para garantir que a função de custo diminua ou permaneça constante para a planta, uma restrição de robustez no objetivo de controle pode ser incluída para cada modelo no conjunto fornecido pela Equação (63).

$$J_k(\pi_k, \nu_k^\Theta, \Theta) \leq J_k(\tilde{\pi}_k, \tilde{\nu}_k^\Theta, \Theta) \quad \forall \Theta \in \Omega \quad (63)$$

onde $\tilde{\nu}_k^\Theta$ tem que satisfazer:

$$\tilde{e}_{N_p}^\Theta = 0 \quad \forall \Theta \in \Omega \quad (64)$$

com

$$\tilde{e}_{N_p}^\Theta = \tilde{\nu}_k^\Theta - \tilde{\mathbf{y}}_p^\Theta(k + N_p + N_Q | k) \quad (65)$$

onde $\tilde{\mathbf{y}}_p^\Theta$ é a previsão de saída calculada para cada modelo usando $\tilde{\pi}_k$, e $\tilde{\nu}_k^\Theta$ é uma pseudo-folga associada à solução ótima passada do problema.

Portanto, o RGPC com custo contrativo é a solução do problema de otimização mostrado na Equação (66).

$$\min_{\pi_k, \nu_k^{\Theta_N}} J_k(\pi_k, \nu_k^{\Theta_N}, \Theta_N) \quad (66)$$

sujeito a

$$\mathbf{e}_{Np}^{\Theta} = 0 \quad \forall \Theta \in \Omega \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{min} &\leq \Delta \mathbf{u}(k+c|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max}, & \forall c = 0, \dots, N_c \\ \mathbf{u}_{min} &\leq \mathbf{u}(k+c|k) \leq \mathbf{u}_{max}, & \forall c = 0, \dots, N_c \\ J_k(\pi_k, \nu_k^{\Theta}, \Theta) &\leq J_k(\tilde{\pi}_k, \tilde{\nu}_k^{\Theta}, \Theta) & \forall \Theta \in \Omega \\ \tilde{\mathbf{e}}_{Np}^{\Theta} &= 0 & \forall \Theta \in \Omega \end{aligned}$$

Portanto, o algoritmo RGPC minimiza a função de custo do modelo nominal, assegurando que o modelo verdadeiro mantenha um custo não crescente.

Observe que cada uma das funções custos J_k dependem das predições das respectivas saídas, o que significa que os modelos estão implícitos no problema de otimização. Note ainda que as restrições para seguimento (67-64) trabalham com predições além dos horizontes, o que significa que essas predições são calculadas considerando $\Delta \mathbf{u} = 0$ e portanto não é necessário impor a restrição (51). Perceba também que $\tilde{\pi}_k$ continua sendo a versão deslocada da resposta ótima passada conforme a Equação (38) e deve ser utilizada para todos os modelos.

Ademais, assim como o problema original, o problema (66) também é não linear. Assim, este deve ser resolvido por algum otimizador capaz de lidar com isso. Alternativamente, é possível substituir as restrições quadráticas por meio de Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês *Linear matrix inequality* (LMI), transformando o problema em um problema quadrático sujeito a restrições lineares (GONZÁLEZ; ODLOAK, 2010).

Perceba também que caso a referência real do problema (66) não seja alcançável, seu custo convergirá para $\|\nu_{\infty}^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_S^2$, onde $\nu_{\infty}^{\Theta_T}$ é a referência artificial de estado estacionário para o modelo verdadeiro e $[\nu_{\infty}^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s] \neq 0$. Isso significa que a resposta em malha fechada será a mais próxima possível da referência real, pois não pode alcançá-la.

Por fim, observe que o algoritmo RGPC consegue mitigar as desvantagens do MPC utilizando o modelo iNMSS. Para comparação o MPC-iNMSS é apresentado no Anexo A. As principais diferenças entre os modelos são:

- o RGPC utiliza uma representação mínima da planta. Suas predições são o equivalente do primeiro bloco de linhas da variável A_n na Equação (142). Isso facilita a escalabilidade do sistema;

- para o caso com plantas estáveis em malha aberta (tratado neste trabalho) não é necessário usar decomposições e transformações de variáveis para explicitar os diferentes modos do sistema conforme Equações (144-150). Entretanto, um espaço de estado auxiliar é usado para cálculo do IHMPC;
- o GPC trabalha de forma natural com plantas com tempo-morto. Essa propriedade é herdada pelo RGPC. No modelo iNMSS, atrasos significariam mais estados o que complicaria ainda mais o problema.

Perceba que essas vantagens são todas para cálculos realizados *a priori* ou *offline*, ou seja, cálculos realizados para configurar o controlador antes de iniciá-lo. O trabalho de Taylor, Chotai e Young (2000) mostrou que o modelo iNMSS foi formulado de forma a se obter uma estrutura equivalente à do GPC, e o problema de controle é exatamente igual desde que as ponderações entre ambos sejam justas. Assim, o RGPC e o MPC-iNMSS produzem respostas equivalentes do ponto de vista de performance.

Portanto, uma das contribuições desta dissertação é propor um controlador robusto baseado no algoritmo GPC de forma a permitir que qualquer projetista que conheça o GPC-padrão possa torná-lo robusto. Note que o controle proposto possui diversas vantagens em relação ao estado da arte.

3.3.1 Estabilidade Assintótica do RGPC

O teorema desenvolvido neste trabalho mostra que o RGPC estabiliza assintoticamente a malha fechada do sistema incerto. Esse teorema foi adaptado de um algoritmo similar desenvolvido por González e Odloak (2010) e sua prova é similar àquela desenvolvida por Ralhan (2000).

Teorema: Considere um sistema estável cujo modelo real é desconhecido, mas este está dentro de um conjunto Ω . Considere também que S , Q e R são matrizes positivas definidas. Suponha que o problema (66) seja resolvido durante sucessivos instantes de tempo e que as entradas do sistema não fiquem saturadas. Então, a lei de controle obtida como uma solução para (66) direciona a saída real do sistema para o valor de referência de maneira estável e assintoticamente convergente ¹.

Prova: Para comprovar que o sistema é assintoticamente estável, primeiro prova-se que a planta verdadeira converge para a referência e , depois, prova-se que o regime permanente do sistema é um ponto de equilíbrio estável. A combinação de convergência e estabilidade é igual a estabilidade assintótica.

¹ Para que o sistema consiga rastrear a referência é necessário supor que as suas entradas não saturem. Caso essa suposição não seja válida, a resposta ótima calculada ($[\pi_k^*, \nu_k^\ominus]$) levará a malha fechada do sistema para o mais próximo possível das referências, mas sem alcançá-las.

Convergência: Primeiramente considere a função custo utilizada pelo RGPC.

$$J_k = \sum_{c=1}^{N_p} \|\mathbf{y}_p(k+c|k) - \nu_k\|_Q^2 + \sum_{c=1}^{N_c} \|\Delta \mathbf{u}(k+c-1|k)\|_R^2 + \|\nu_k - \mathbf{y}_s\|_S^2 + J_\infty \quad (68)$$

Suponha que no instante k , o problema (66) seja resolvido e a solução ótima resultante seja representada por $[\pi_k^*, \nu_k^{\Theta}]$. Suponha ainda que a primeira ação de controle ótima $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)$ seja aplicada na planta. Sabe-se que $[\tilde{\pi}_{k+1}, \nu_k^{\Theta}]$ é uma solução factível no instante $k+1$, dado o fato que $\tilde{\pi}_{k+1}$ depende dos valores de π_k^* . Além disso, perceba que para o modelo verdadeiro $\tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T} = \nu_k^{\Theta_T}$. Assim, para o sistema sem distúrbios no instante $k+1$, o valor de $J_{k+1}(\tilde{\pi}_{k+1}, \tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T)$ do modelo real é dado pela Equação (69).

$$J_{k+1}(\tilde{\pi}_{k+1}, \tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) = J_k(\pi_k^*, \nu_k^{\Theta_T}, \Theta_T) - \|\Delta \mathbf{u}^*(k|k)\|_R^2 - \|\mathbf{y}_p(k+1|k) - \nu_k^{\Theta_T}\|_Q^2 \quad (69)$$

Portanto, pela Equação (69), pode-se concluir que:

$$J_{k+1}(\tilde{\pi}_{k+1}, \tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) \leq J_k(\pi_k^*, \nu_k^{\Theta_T}, \Theta_T) \quad (70)$$

Além disso, como a restrição (63) tem que ser respeitada, tem-se também que:

$$J_{k+1}(\pi_{k+1}^*, \nu_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) \leq J_{k+1}(\tilde{\pi}_{k+1}, \tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) \quad (71)$$

Consequentemente, a combinação das Equações (70) e (71) retorna a Equação (72).

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\pi_{k+1}^*, \nu_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) &\leq J_{k+1}(\tilde{\pi}_{k+1}, \tilde{\nu}_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) \leq J_k(\pi_k^*, \nu_k^{\Theta_T}, \Theta_T) \\ J_{k+1}(\pi_{k+1}^*, \nu_{k+1}^{\Theta_T}, \Theta_T) &\leq J_k(\pi_k^*, \nu_k^{\Theta_T}, \Theta_T) \end{aligned} \quad (72)$$

O mesmo argumento pode ser usado para os próximos instantes de tempo, o que significa que a malha fechada do sistema eventualmente convergirá e que o custo não cresce e converge para zero.

Estabilidade: Para demonstrar a estabilidade do algoritmo, mostra-se que se as condições iniciais do sistema estiverem limitadas à uma determinada região então todos os instantes subsequentes do sistema também estarão limitados. Para tanto, considere que o vetor de predição e o de resposta livre podem ser representados como a seguir.

$$\mathbf{y}_p(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_p(k+c|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_p(k+N_p+N_{\bar{Q}}|k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(k+1-1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(k+c-1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(k+N_p+N_{\bar{Q}}-1|k) \end{bmatrix} \quad (73)$$

onde c denota qual a predição dentro do horizonte pertence determinada resposta.

Considere agora que o sistema se encontra no instante de tempo $k = 0$. Isso implica dizer que $\tilde{\pi}_0 = 0$. A função custo dada pela Equação (68) então assume o valor mostrado na Equação (74).

$$\begin{aligned} J_0(\tilde{\pi}_0, \tilde{\nu}_0^{\Theta_T}, \Theta_T) &= \sum_{c=1}^{\infty} \|\mathbf{f}(0+c-1|0) - \tilde{\nu}_0^{\Theta_T}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\tilde{\nu}_0^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 \\ &\cong \|\mathbf{f}(0) - \tilde{\nu}_{0,a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2 + \|\tilde{\nu}_0^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 \end{aligned} \quad (74)$$

sendo

$$\tilde{\nu}_{0,a} = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_0^{\Theta_T} \\ \tilde{\nu}_0^{\Theta_T} \\ \vdots \\ \tilde{\nu}_0^{\Theta_T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}$$

Perceba que no instante $k = 0$ a função custo depende apenas da resposta livre inicial do problema, que representa suas condições iniciais, ou seja, $\tilde{\mathbf{y}}_p(0) = \mathbf{f}(0)$.

A restrição de robustez da Equação (63) garante que o custo ótimo neste instante não excede o custo acima conforme a Equação (75).

$$J_0(\pi_0^*, \nu_0^{*\Theta_T}, \Theta_T) \leq J_0(\tilde{\pi}_0, \tilde{\nu}_0^{\Theta_T}, \Theta_T) \quad (75)$$

Tem-se também que o custo nos próximos instantes é não crescente (conforme demonstrado na prova de convergência), ou seja, o custo é representado pela Equação (76).

$$J_k(\pi_k^*, \nu_k^{*\Theta_T}, \Theta_T) \leq J_0(\pi_0^*, \nu_0^{*\Theta_T}, \Theta_T) \quad \forall k \quad (76)$$

A partir disso, utilizando a definição da função custo apresentada na Equação (68), é simples demonstrar que a Equação (77) é verdadeira.

$$\|\mathbf{y}_p^*(k+1|k) - \nu_k^{*\Theta_T}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\nu_k^{*\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 \leq J_k(\pi_k^*, \nu_k^{*\Theta_T}, \Theta_T) \quad \forall k \quad (77)$$

onde

$$J_k(\pi_k^*, \nu_k^{*\Theta_T}, \Theta_T) = \sum_{c=1}^{N_p} \|\mathbf{y}_p(k+c|k) - \nu_k^{*\Theta_T}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{c=1}^{N_c} \|\Delta \mathbf{u}^*(k+c-1|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\nu_k^{*\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 + J_{\infty}$$

Combinando as Equações (74) a (77) chega-se ao resultado mostrado na Equação (78).

$$\|\mathbf{y}_p^*(k+1|k) - \nu_k^{*\Theta_T}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\nu_k^{*\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 \leq \|\mathbf{f}(0) - \tilde{\nu}_{0,a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2 + \|\tilde{\nu}_0^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s\|_{\mathbf{S}}^2 \quad \forall k \quad (78)$$

Como todas as matrizes de ponderação são positivas e definidas, a Equação (78) pode ser simplificada pelo mesmo princípio utilizado em Ralhan (2000), conforme mostrado na Equação (79).

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p^*(k+1|k) - \nu_k^{*\Theta_T} \\ \nu_k^{*\Theta_T} - \mathbf{y}_s \end{bmatrix} \right\| \leq \alpha \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{0}) - \tilde{\nu}_{0,a} \\ \tilde{\nu}_0^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s \end{bmatrix} \right\| \quad (79)$$

onde $\|[\dots]\|$ é a norma euclidiana, com

$$\alpha = \left[\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_a)}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_b)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

sendo λ_{\max} o autovalor máximo da matriz \mathbf{M}_a e λ_{\min} o autovalor mínimo de \mathbf{M}_b .

Se as condições iniciais do sistema forem restringidas por ρ , o que na prática quer dizer que estas estão limitadas a determinada região, então a Equação (80) é verdadeira.

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{0}) - \tilde{\nu}_{0,a} \\ \tilde{\nu}_0^{\Theta_T} - \mathbf{y}_s \end{bmatrix} \right\| \leq \rho \quad (80)$$

Como resultado tem-se que o sistema livre também é restrito conforme Equação (81).

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p^*(k+1|k) - \nu_k^{*\Theta_T} \\ \nu_k^{*\Theta_T} - \mathbf{y}_s \end{bmatrix} \right\| \leq \alpha\rho \quad (81)$$

Portanto, a estabilidade é comprovada. A combinação de convergência mais estabilidade é igual a estabilidade assintótica.

3.4 SÍNTESE DO CONTROLADOR RGPC

O ajuste do MPC para problemas mais complexos não é trivial, sua sintonia normalmente depende do conhecimento prévio dos processos e, muitas vezes, encontra-se a sintonia via tentativa e erro. Este problema ocorre também nos controladores robustos. Para o caso RGPC sugere-se escolher os parâmetros conforme segue.

- horizonte de controle (N_c): seu tamanho dita quantas variáveis de decisão tem o problema, o que influencia diretamente no custo computacional. Observe que um N_c grande sugere um $\tilde{\pi}$ maior em tamanho o que é melhor do ponto de vista de controle, há portanto um *trade off*. Sugere-se então, escolher um N_c relativamente pequeno, respeitando $N_c \geq 2$;
- horizonte de predição (N_p): como trabalha-se apenas com plantas estáveis sugere-se escolher um N_p que enxergue o regime permanente da planta nominal.

Um horizonte muito pequeno piora a performance do controlador deixando-a mais oscilatória;

- matrizes de ponderação Q e R : devem ser escolhidas de acordo com o processo;
- matriz de ponderação S : de forma a não aumentar o custo computacional do problema, há apenas uma variável de folga a cada instante de tempo. Portanto, para dar importância para o rastreamento, S tem que ter magnitude elevada. Perceba que se esta for pequena o sistema não seguirá a referência real e sim a artificial escolhida pelo otimizador.

Após as escolhas dos horizontes e das ponderações, pode-se utilizar o *software Matlab* em conjunto com o solver *IPOPT* (WÄCHTER; BIEGLER, 2006) e o *parser YALMIP* (LÖFBERG, 2004). O *YALMIP* é utilizado para modelar o problema de otimização e resolvê-lo através de um *solver* externo. Perceba que a tarefa de transformar os modelos obtidos do sistema, suas restrições e funções objetivos nas formas padrões de problemas de otimização é por si só um tópico de alta complexidade e assunto de inúmeras pesquisas e artigos. Assim, o *YALMIP* age como o intermediário transformando o problema (66) em um problema de otimização apto a ser entregue a um *solver*, tornando o algoritmo RGPC ainda mais simples. O *IPOPT* foi o *solver* externo escolhido, pois este lida com otimização de problemas não lineares (incluindo sistemas sujeito a restrições não lineares) em larga escala. Note ainda que ambas as ferramentas foram escolhidas por serem gratuitas e estarem disponíveis para uso de todos.

Para finalizar este capítulo dois exemplos de aplicação do algoritmo RGPC são discutidos a seguir.

3.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesta seção dois exemplos são discutidos de forma a mostrar que a técnica proposta pode ser usada para plantas estáveis lineares com atraso e para plantas não lineares linearizadas em diversos pontos de operação.

3.5.1 Sistema SISO com erro de modelagem no atraso

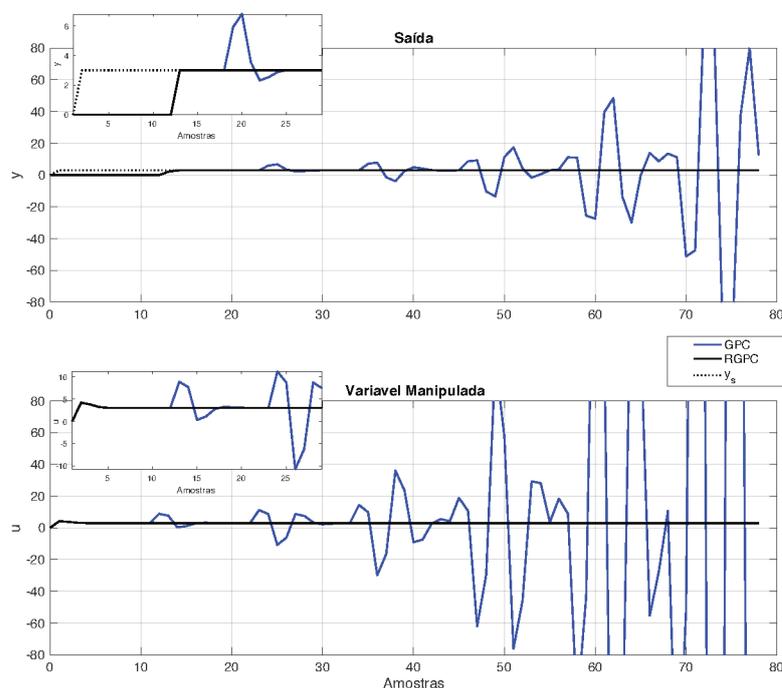
O processo considerado é uma planta de primeira ordem com atraso que possui um erro de modelagem no próprio atraso conforme a Equação (82).

$$P = \frac{0,5}{z - 0,5} z^{-d} \quad (82)$$

Assume-se que o modelo nominal tem atraso de dez amostras ($d = 10$), mas a planta tem atraso desconhecido assumindo um dos valores do conjunto $D = \{9, 10, 11, 12\}$. Portanto, a entrada ótima terá que satisfazer as restrições de robustez de quatro modelos.

O objetivo desta simulação é comparar as respostas do GPC e do RGPC utilizando a mesma sintonia. Para tanto, as ponderações assumem valores de $Q = 10$, $R = 1$ e $S = 10^3$, o tamanho dos horizontes assumem valores de $N_p = 20$ e $N_c = 5$. O cenário simulado parte da origem considerando o modelo nominal e modelo real iguais. Em $k = 0$, altera-se o valor da referência para $y_s = 3$. Ambos os controladores minimizam o modelo nominal com $d = 10$, entretanto o modelo real agora tem atraso de $d = 12$ e só é considerado pelo RGPC. A Figura 4 mostra a resposta temporal destes controladores na presença desse erro no modelo.

Figura 4 – Resposta temporal com erro de modelo no atraso.



Fonte: Autor.

Percebe-se então que um erro de modelagem de 20% no atraso foi suficiente para que o algoritmo GPC instabilizasse a malha fechada do sistema devido à incompatibilidade de modelos. Em contraste, o RGPC faz a saída do sistema seguir a referência de valor $y_s = 3$.

Atente-se também para a ampliação dos primeiros instantes de tempo das respostas. Perceba que a ação de controle inicial é exatamente a mesma para ambos os algoritmos, o que é esperado, pois ambos estão tentando minimizar o mesmo custo. Elas começam a divergir assim que o atraso da planta real acaba no instante $k = 12$, já que o controlador GPC percebe um erro em suas previsões e tenta consertá-las sem sucesso. Já o RGPC, por meio da restrição de robustez, já sabe que todos os modelos presentes em seu conjunto já assumiram seus valores mínimos e portanto mantém a ação de controle parada.

Assim, o objetivo desse exemplo é mostrar que o RGPC funciona bem com um

erro de modelagem no atraso. Observe que a resposta GPC tem oscilações, que vão aumentando com um período de aproximadamente $k = 12$ devido ao erro no atraso.

Por fim, esta comparação não usou restrições no controle. Esta foi uma escolha proposital para enfatizar o erro no GPC padrão sem saturá-lo. No caso do RGPC, restrições na ação de controle podem ser usadas sem prejudicar a estabilidade do algoritmo como mostrado no próximo exemplo.

3.5.2 Sistema MIMO: Coluna Debutanizadora

Este exemplo utiliza os modelos de um processo de uma coluna debutanizadora estudada por (RODRIGUES; ODLOAK, 2000). O objetivo desta coluna é produzir Gás Liquefeito de Petróleo (GLP), constituído basicamente por propano e butanos (C3, C4 e iC4), usando nafta não estabilizada advinda da coluna de destilação atmosférica, e constituída por hidrocarbonetos contendo de 5 a 10 átomos de carbono (C5+). O processo simulado possui duas saídas controladas: o teor C5 + do fluxo superior de GLP (y_1) e a pressão de vapor de Reid da gasolina do fluxo inferior (y_2). As entradas manipuladas são a vazão de refluxo superior (u_1) e a carga térmica do *reboiler* (u_2). Esse processo tem resposta lenta e existem grandes diferenças entre os modelos correspondentes a diferentes condições operacionais. A matriz de função de transferência que corresponde a esses pontos é de segunda ordem e possui uma função de transferência com polos complexos.

As condições operacionais relacionadas a esses modelos são as seguintes: P_{cd1} corresponde a uma condição operacional em que se possui um alto fluxo de refluxo superior (400 m³/dia) e uma alta carga térmica (1.9 · 10⁶ kcal/h). P_{cd2} corresponde a uma condição com fluxo baixo (150 m³/dia) e baixa carga térmica (1.3 · 10⁶ kcal/h). P_{cd3} corresponde a uma condição operacional com alto fluxo (400 m³/dia) e carga de calor intermediária (1.75 · 10⁶ kcal/h). Os modelos estão contidos no conjunto Ω apresentado na Equação (83).

$$\Omega = (P_{cd1}, P_{cd2}, P_{cd3}) \quad (83)$$

com

$$P_{cd1} = \begin{bmatrix} \frac{-0,2623}{60s^2 + 59,2s + 1} & \frac{0,1368}{1164s^2 + 99,7s + 1} \\ \frac{0,1242}{218,7s^2 + 16,2s + 1} & \frac{-0,1351}{70s^2 + 20s + 1} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$P_{cd2} = \begin{bmatrix} \frac{-0,3544}{218,6s^2 + 59,2s + 1} & \frac{0,2044}{1150,2s^2 + 93,86s + 1} \\ \frac{0,0685}{100,2s^2 + 11,32s + 1} & \frac{-0,1256}{20s^2 + 15s + 1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$P_{cd3} = \begin{bmatrix} \frac{-0,2790}{59,77s^2 + 99,61s + 1} & \frac{0,050}{499,8s^2 + 73,77s + 1} \\ \frac{0,1950}{220,1s^2 + 18,93s + 1} & \frac{-0,1722}{29,74s^2 + 20,71s + 1} \end{bmatrix} \quad (86)$$

O objetivo aqui é controlar todos os modelos em Ω utilizando apenas P_{cd1} como modelo nominal. Para tanto, os modelos foram discretizados com um tempo de amostragem de $T_s = 5$ horas e os parâmetros de ajuste são mostrados na Equação (87).

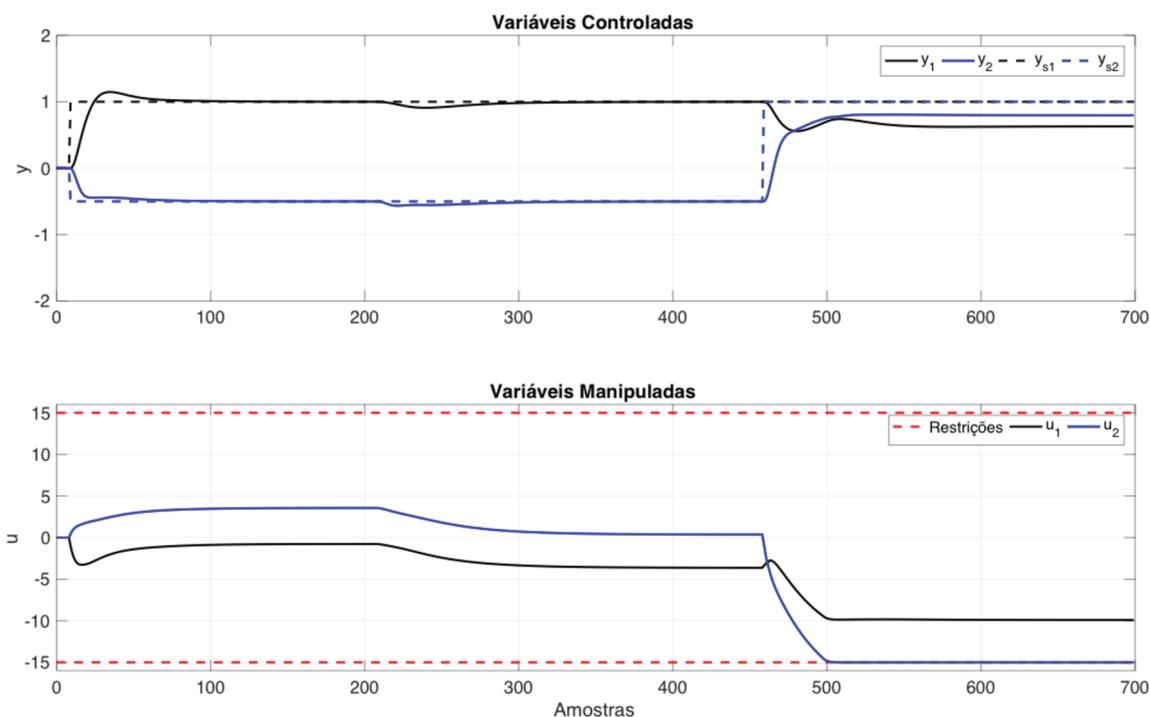
$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{I}_2, & \mathbf{R} &= 100 * \mathbf{I}_2, & \mathbf{S} &= 10^4 * \mathbf{I}_2, & N_p &= 5, & N_c &= 3, \\ [-15; -15]^T &\leq \mathbf{u} \leq [15; 15]^T, & [-5; -5]^T &\leq \Delta \mathbf{u} \leq [5; 5]^T \end{aligned} \quad (87)$$

Perceba que o valor de \mathbf{R} foi escolhido de forma a deixar a resposta temporal mais suave, já que uma das desvantagens da técnica desde que foi originalmente proposta é o comportamento oscilatório do controle. Além disso, note que $\bar{\mathbf{Q}}$ necessita de quatro predições extras, ou seja, neste problema nove predições de y_p são calculadas. Para este exemplo, vários parâmetros de ajuste diferentes foram testados, e os da Equação (87) apresentaram melhores resultados. Note que a literatura não mostra nenhuma métrica para a escolha da melhor sintonia, dado que diferentes plantas necessitam diferentes parâmetros, entretanto a Seção 3.4 pode ser usada como ponto de partida. Ademais, para este sistema apenas as restrições no controle são usadas, já que estas garantem saídas factíveis na planta real.

Para esta simulação, o sistema começa na origem e com o modelo 2 sendo o modelo nominal usado na função custo que é minimizada pelo controlador. A planta começa sendo também representada pelo modelo 2 e a referência de saída é alterada da origem para $\mathbf{y}_s = [1; -0,5]^T$. Este alvo é alcançável e corresponde ao estado estacionário de entrada $\mathbf{u}_{ss} = [-0,767; 3,565]^T$. A parte superior da Figura 5 mostra que as saídas alcançam as referências rapidamente, enquanto a sua parte inferior mostra que as entradas tendem aos seus estados estacionários esperados. No instante de tempo $k = 210$, o modelo que representa a planta é alternado do modelo 2 para o modelo 1 (mudança no ponto de operação), enquanto as referências são mantidas. Não há mudanças bruscas na saída do sistema, entretanto perceba a mudança na ação de controle que vai tendendo ao seu novo estado estacionário de entrada $\mathbf{u}_{ss} = [-3,616; 0,3768]^T$.

Conclui-se pela Figura 5 que o controlador proposto é robusto a essa mudança de modelo. Note também que no instante $k = 460$, altera-se as referências

Figura 5 – Resposta temporal do RGPC para coluna debutanizadora.

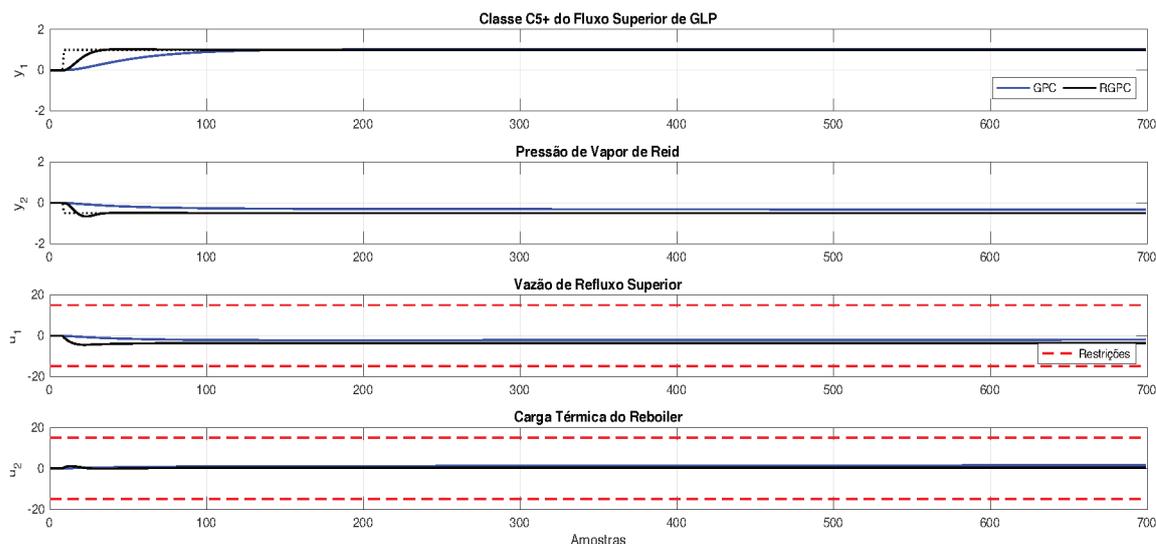


Fonte: Autor.

para $y_s = [1; 1]^T$ que para o modelo 1 (modelo verdadeiro) corresponderia a $u_{ss} = [-14, 74; -20, 953]^T$ inacessível por causa das restrições de entrada. Nesse caso, o controlador proposto ainda é capaz de estabilizar a planta, mas as saídas não atingem os objetivos. Isso ocorre porque uma das entradas satura no limite mínimo ($u \geq [-15; -15]^T$).

Para enfatizar a vantagem do controlador robusto proposto, um segundo teste é feito de forma a comparar o método RGPC com um GPC padrão conforme mostrado na Figura 6. O modelo real da planta é representado pelo modelo 1 e o modelo nominal é o modelo 2. Os mesmos parâmetros de ajuste definidos em (87) são usados nos dois controladores. Perceba que a ponderação R usada torna o GPC padrão mais conservador e portanto mais robusto. Entretanto, o preço a ser pago é a resposta do sistema que fica demasiadamente lenta. A Figura 6 mostra um pequeno erro em regime permanente no GPC, mas na verdade é que este está lentamente se dirigindo à referência e a simulação foi parada antes disso ocorrer. Conclui-se então que o controlador robusto tem um desempenho melhor que o controlador nominal. Isso se deve ao fato de que o GPC padrão depende unicamente dos ajustes das ponderações e das horizontes. Em contrapartida o RGPC, mesmo com uma restrição de robustez conservadora, possui restrições que forçam a resposta do sistema a seguir a referência rapidamente. Note que a ponderação S utilizada pelo RGPC tem valor altíssimo e não tem equivalente no GPC.

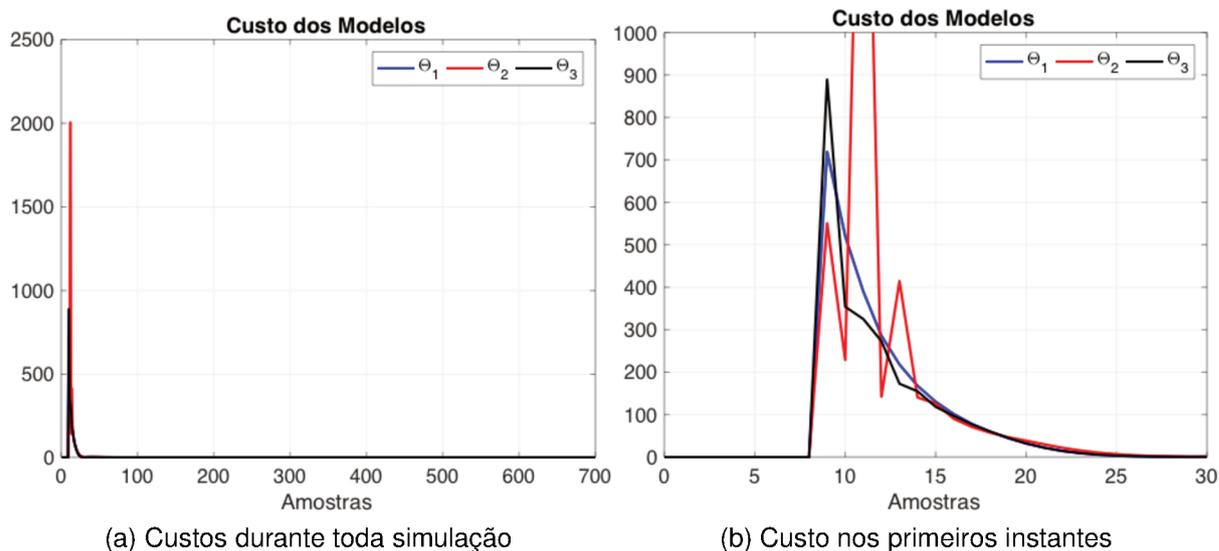
Figura 6 – Comparação resposta temporal: GPC e RGPC.



Fonte: Autor.

A Figura 7 mostra os custos referentes a cada modelo durante essa simulação para o algoritmo RGPC. Na parte (b) enfatiza-se os instantes iniciais da simulação em que os custos dos modelos 1 e 3 decrescem, o que não acontece para o modelo 2.

Figura 7 – Valor da função objetivo dos modelos.



(a) Custos durante toda simulação

(b) Custo nos primeiros instantes

Fonte: Autor.

Note que a restrição (63) garante a robustez comparando o custo no instante atual com o planejamento feito no instante passado. Essa comparação é feita em todos os instantes para todos os modelos, mas não há garantias que esse custo decresça em instantes não consecutivos (decréscimo assintótico) exceto para o modelo real e por consequência para planta. É importante notar que a cada instante de tempo uma ação

de controle que satisfaça essa restrição é calculada e aplicada na planta. Portanto, para o modelo real, o planejamento feito no instante anterior sempre se cumpre dado que o modelo real e a planta em si são iguais. Assim, o modelo verdadeiro diminui assintoticamente e chega a zero.

Perceba que apesar de não haver garantias para os outros modelos do conjunto, o modelo 3 também decresceu assintoticamente neste exemplo. Assim, apenas Θ_2 ficou oscilatório. A Figura 7 tem como objetivo mostrar que nem todos os modelos do conjunto tem esse decrescimento suave, apesar de todos eventualmente convergirem a zero se a referência for alcançável.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo mostrou um RGPC, capaz de obter estabilidade robusta em malha fechada para processos incertos representados por um conjunto de modelos de funções de transferência estáveis.

Apesar de promissora, a técnica ainda pode ser melhorada. Conforme explicado anteriormente, não há extensões de nenhum MPC com custo-contrativo, que utilize apenas dados de entrada e saída, para plantas instáveis ou apenas com polos integradores. Acontece que é complicado separar os efeitos dos diferentes modos se estes afetam uma mesma saída. Perceba que se um sistema SISO tem modos instáveis e estáveis não é possível determinar o comportamento deles separadamente apenas com a informação da saída.

Além disso, na prática pode não ser possível obter vários modelos para a planta. Sistemas de grande porte demandam tempo e dinheiro para identificação de modelos, o que é multiplicado no caso multi-modelo. Ademais, se for possível conseguir vários modelos para planta, ainda há a limitação prática de assumir que a planta tem que ser representada exatamente por algum dos modelos do conjunto Ω . Isso não é necessariamente verdade já que os modelos podem sofrer mudanças (podem degradar, por exemplo). O ideal, então, seria sintonizar o controlador de forma a garantir certa margem de estabilidade em torno desses modelos locais. Perceba também que a planta não muda bruscamente entre pontos de operação, e o controlador também precisa lidar com isso.

Por outro lado, é de suma importância mostrar que toda técnica robusta tem suas limitações e que os exemplos demonstraram que o método pode ser utilizado para diversos erros de modelagem e em conjunto com restrições de controle. Frisa-se aqui que não é necessário o uso de observadores.

Ademais, perceba que, para incertezas multi-modelo, o uso de observadores lineares é uma tarefa sem sentido. Sabe-se que existe um conjunto de modelos o que significa que um conjunto de observadores teria que ser projetado (um para cada modelo) e uma heurística teria que ser utilizada para escolher que observador seria

usado. Se essa situação se confirma, então um controlador adaptativo, usando a mesma heurística projetada para os observadores, seria mais indicado e usaria um controle para cada planta no conjunto.

Alternativamente, um estimador não linear pode ser desenvolvido. Um Filtro Estendido de Kalman, do inglês *Extended Kalman Filter* (EKF), pode ser aplicado diretamente na função não linear do problema. Este filtro é um observador ótimo conforme mostrado em Friedland (2012), portanto deveria funcionar bem. Porém, dado que cada planta linearizada tem uma entrada diferente que a leva a saída desejada, apenas estimar os estados usando a saída não é suficiente. Seria necessário estimar também o que causa a mudança no ponto de operação. Feito isso, o projeto desse estimador teria que ser considerado nas provas de robustez, visto que agora o controlador garante rastreamento para o estado estimado e não o real.

De qualquer maneira, o projeto de controle e o problema de otimização a ser resolvido ficariam ainda mais complexos. Este fato pode ser um problema principalmente para plantas de grande porte.

No Capítulo 5 é analisado um estudo de caso MIMO, simulado diretamente numa planta não linear sujeita a incerteza multi-modelo e distúrbios persistentes. Alguns comentários a respeito do EKF são discutidos para o sistema estudado e fica claro como o uso de estimadores aumenta a complexidade de projeto.

4 CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM TUBOS -TRMPC

Este capítulo continua o levantamento bibliográfico iniciado na Seção 2.4.3. Para esse trabalho, o problema de rastreamento é de maior relevância do que o regulatório, e, portanto, será explanado nesse capítulo.

O passo a passo utilizado aqui teve como base os trabalhos de Limon *et al.* (2005), Limon *et al.* (2008), Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2008), Alvarado, Limon, Alamo, Fiacchini *et al.* (2007) e Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2007).

Observe que a técnica TRMPC pode ser estendida para diferentes casos como em Cannon, Kouvaritakis *et al.* (2011) para sistemas estocásticos, e em Cannon, Burger *et al.* (2010) para sistemas não lineares. Além disso, esta continua a ser desenvolvida por meio de novas parametrizações, flexibilizações ou generalizações (RAKOVIC; KOUVARITAKIS; CANNON; PANOS *et al.*, 2012), (RAKOVIC; KOUVARITAKIS; CANNON; FINDEISEN, 2012), (RAKOVIC; LEVINE; ACIKMESE, 2016), (FONTES; RAKOVIĆ; KOLMANOVSKY, 2017).

O Capítulo começa discorrendo sobre o seguimento de referência quando todos os estados estão disponíveis, depois o caso do TRMPC com observadores é explicado, passando para o caso usando o modelo NMSS e por fim a Seção 4.3 descreve como sintonizar este controlador.

4.1 MPC ROBUSTO PARA RASTREAMENTO DE SISTEMAS LINEARES RESTRI- TOS COM DISTÚRBIOS ADITIVOS.

Nesta seção, um RMPC capaz de estabilizar com robustez um sistema linear incerto restrito, mantendo a factibilidade do problema quando o *setpoint* muda, é apresentado.

Para tanto, considere o sistema incerto sujeito a restrições nos estados e no controle e sujeito a distúrbios aditivos limitados, conforme a Equação (88).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_m \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } \mathbf{x}(k) &\in \mathcal{X} \\ \mathbf{u}(k) &\in \mathcal{U} \\ \mathbf{w}(k) &\in \mathcal{W} \end{aligned} \tag{88}$$

Considere também que o sistema nominal é dado pela Equação (89).

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_m \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}}(k), \\ \bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}_m \bar{\mathbf{u}}(k) \end{cases} \tag{89}$$

Frisa-se que sistemas industriais geralmente não tem transmissão direta, portanto a matriz \mathbf{D}_m poderia ser desconsiderada. Assim, pode-se utilizar esse modelo para reescrever os estados estacionários do sistema conforme descrito na Subseção 4.1.1.

4.1.1 Caracterização dos estados estacionários do sistema linear

O procedimento para alcançar a referência desejada (y_s) consiste em parametrizar o sistema de tal forma que, para um determinado ponto y_s , qualquer estado estacionário admissível $\mathbf{z}_s = [\mathbf{x}_s; \mathbf{u}_s]$ deve satisfazer a Equação (90).

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_m - \mathbf{I}_n) & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n,1} \\ y_s \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{E} \mathbf{z}_s = \mathbf{F} y_s$$

onde \mathbf{x}_s e \mathbf{u}_s são os estados e controle alvos. Nota-se então que a Equação (90) é uma parametrização de forma a garantir que $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_s$ e que $\mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) = y_s$.

A controlabilidade do par $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m)$ é necessária para garantir que a solução para (90) não seja trivial. A solução desta equação produz a Equação (91).

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_s &= \mathbf{M}_\theta \theta \\ y_s &= \mathbf{N}_\theta \theta \end{aligned} \quad (91)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ é um vetor que caracteriza qualquer solução e \mathbf{M}_θ e \mathbf{N}_θ são matrizes adequadamente escolhidas. Segundo Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2008), \mathbf{M}_θ e \mathbf{N}_θ devem ser definidas usando a Decomposição de Valor Singular, do inglês *Singular Value Decomposition* (SVD), da matriz \mathbf{E} . Ademais, Buckner (2017) afirma que este método tem a vantagem de produzir uma caracterização mínima de θ , mas existem outros métodos aceitáveis para determinar essas matrizes.

Sendo r o posto da matriz \mathbf{E} , considerando a decomposição SVD da matriz \mathbf{E} definida por $\mathbf{E} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times r}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é uma matriz diagonal não singular e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times r}$ tal que $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Então as matrizes \mathbf{M}_θ e \mathbf{N}_θ são dadas por:

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{cases} [\mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{F}\mathbf{G}_t & \mathbf{V}_\perp] & \text{se } r < n + m \\ \mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{F}\mathbf{G}_t & & \text{se } r = n + m \end{cases} \quad (92)$$

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{cases} [\mathbf{G}_t & \mathbf{0}_{p, n+m-r}] & \text{se } r < n + m \\ & \mathbf{G}_t & \text{se } r = n + m \end{cases} \quad (93)$$

com

$$\mathbf{G}_t = \begin{cases} \mathbf{I}_p & \text{se } r = n + p \\ (\mathbf{F}^T \mathbf{U}_\perp)_\perp & \text{se } r < n + p \end{cases}$$

O subscrito \perp indica que o parâmetro associado é escolhido de forma que $\mathbf{V}^T \mathbf{V}_\perp = 0$, e $[\mathbf{V} \ \mathbf{V}_\perp]$ não seja singular, por exemplo.

A matriz \mathbf{G}_t tem posto coluna completo dado por $r_g \leq p$. A dimensão de θ é $(r_g + n + m - r)$ e é a dimensão do subespaço dos pontos de equilíbrio do sistema (\mathbf{z}_s) e portanto $n_\theta \leq n$. Isso é importante pois mostra que a caracterização escolhida tem menos parâmetros do que o sistema original.

Além disso, se $r < n + p$ então nem todas as referências do sistema podem ser alcançadas e o sistema precisa ser redefinido. Isso não ocorre neste trabalho onde a referência só não é alcançada caso o controle ou estados saturarem.

4.1.2 Cálculo do conjunto invariante para rastreamento

Relembre pela Equação (50) que para o caso regulatório, o sistema precisa entrar dentro de um conjunto RPI \mathcal{X}_f ao final do horizonte. Esse conjunto fica ao redor da origem e possibilita que um ganho estável \mathbf{K} mantenha o sistema real em seu interior. Para o caso de rastreamento, não se sabe a priori qual será o valor em equilíbrio do sistema, então calcular um RPI terminal para cada referência toda vez que o *setpoint* muda não é viável. Assim, um conjunto RPI para rastreamento, que englobe todos os possíveis alvos de saída, pode ser calculado.

Considere a mesma lei de controle dada pela Equação (45) para qualquer \mathbf{z}_s .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{K}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_s) \quad (94)$$

Combinando a Equação (91) com a Equação (94) resulta na Equação (95).

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{K}\mathbf{x} + [-\mathbf{K} \ \mathbf{I}_m] \mathbf{M}_\theta \theta \\ &= \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_\theta \theta \end{aligned} \quad (95)$$

Considerando um estado aumentado do tipo $\mathbf{x}_a = (\mathbf{x}, \theta)$, então a malha fechada do sistema é dada pela Equação (96).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K} & \mathbf{B}_m \mathbf{K}_\theta \\ 0 & \mathbf{I}_{n_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} \quad (96)$$

Considerando ainda as seguintes restrições para este sistema estendido.

$$\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{X}}, \quad \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_\theta \theta \in \bar{\mathcal{U}}, \quad \mathbf{z}_s \in \bar{\mathcal{X}} \times \bar{\mathcal{U}} \quad (97)$$

Tem-se então que, para o sistema (96) sujeito as restrições (97), o conjunto $\Omega_t^a \in \mathbb{R}^{n \times n_\theta}$ é um conjunto invariante admissível se $\forall \mathbf{x}_a \in \Omega_t^a$ então $\mathbf{A}_a^i \mathbf{x}_a \in \Omega_t^a, \forall i \geq 0$.

Assim, para o ganho associado com o distúrbio (\mathbf{K}_{dr}), pode-se calcular um conjunto terminal $\Omega_{t, K_{dr}}^a$. De posse disso e do conjunto RPI $\phi_{K_{dr}}$, pode-se descrever o problema de otimização a ser resolvido conforme a Seção 4.1.3.

4.1.3 Problema de otimização

Antes de apresentar a função custo e o problema de otimização em si, algumas suposições devem ser feitas:

- o par $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m)$ é controlável;
- a referência (\mathbf{y}_s) é passada ao controlador por meio de θ ;
- $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ são matrizes definidas positivas;
- os estados estão disponíveis;
- $\mathbf{K}_{dr} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho de controle estabilizador tal que $(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_{dr})$ é estável;
- a matriz $(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{K}})$ é estável e $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz definida positiva tal que $(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{K}})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{K}}) - \mathbf{P} = -(\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}})$;
- a parametrização em θ garante que cada valor de θ é associado a um único valor de \mathbf{z}_s . Portanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s &= \mathbf{M}_x \theta \\ \mathbf{u}_s &= \mathbf{M}_u \theta\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_x &= [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n,m}] \mathbf{M}_\theta \\ \mathbf{M}_u &= [\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{I}_m] \mathbf{M}_\theta\end{aligned}$$

Esse controlador baseia-se na adição de um estado estacionário artificial $\bar{\mathbf{z}}_s = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}$ como variável de decisão. A convergência para o estado estacionário desejado é assegurada adicionando o termo $\|\bar{\theta} - \theta\|_{\mathbf{T}}^2$ na função de custo tal qual ocorre no RGPC. A função custo então possui forma semelhante ao caso regulatório e é dada pela Equação (98).

$$\begin{aligned}V_N(x, \theta; \bar{\pi}, \bar{x}, \bar{\theta}) &= \sum_{c=0}^{N-1} \left(\|\bar{\mathbf{x}}_p(k+c|k) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(k+c|k) - \bar{\mathbf{u}}_s\|_R^2 \right) \\ &\quad + \|\bar{\mathbf{x}}_p(k+N|k) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_P^2 + \|\bar{\theta} - \theta\|_T^2\end{aligned}\tag{98}$$

onde $\bar{\pi}$ a sequência das ações futuras do sistema nominal.

Assim, o problema de otimização a ser resolvido é dado pela Equação (99).

$$\begin{aligned}\min_{\bar{\pi}, \bar{x}, \bar{\theta}} & V_N(\mathbf{x}, \theta, \bar{\pi}, \bar{x}_p, \bar{\theta}) \\ \text{s.a.} \quad & \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x} \oplus (-\phi_{\mathbf{K}_{dr}}) \\ & (\bar{\mathbf{x}}_p(k+c|k), \bar{\mathbf{u}}(k+c|k)) \in \bar{\mathcal{Z}}, \quad \forall c = 0, \dots, N-1 \\ & (\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}_s) = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} \\ & (\bar{\mathbf{x}}_p(k+N|k), \bar{\theta}) \in \Omega_{t, \bar{\mathbf{K}}}^a\end{aligned}\tag{99}$$

onde $\bar{\mathcal{Z}} \triangleq \mathcal{Z} \ominus (\phi_K \times K_{dr}\phi_K)$, e $\mathcal{Z} \triangleq \mathcal{X} \times \mathcal{U}$.

Observe que o projeto deste controlador é baseado em dois ganhos locais de controle K_{dr} e \bar{K} . O primeiro permite minimizar o tamanho do conjunto RPI $\phi_{K_{dr}}$ e, portanto, otimizar a resposta de rejeição de perturbações. O segundo é calculado para maximizar o tamanho do conjunto $\Omega_{t,\bar{K}}^a$, melhorando o desempenho da malha fechada e ampliando o domínio de atração do MPC (ALVARADO; LIMON; ALAMO; CAMACHO, 2008).

Perceba também que o controlador rastreia diferentes *setpoints* para qualquer valor de N , até mesmo $N = 1$. Conforme explanado anteriormente, conjunto terminal para rastreamento engloba todas as possíveis referências do sistema. Adicionalmente, o MPC é chamado a cada instante de tempo (controlador *online*). Note que para o caso regulatório o conjunto terminal sempre está próximo da origem (única referência do sistema) e é menor que o conjunto para rastreamento, portanto o ganho associado a esse conjunto deve agir numa área menor. Para o regulatório, o MPC pode ser resolvido de forma *offline* (RAWLINGS; MAYNE, 2009). Todos esses fatores então contribuem para que o TRMPC para rastreamento possua um domínio de atração maior que o TRMPC regulatório (ALVARADO, 2007).

Ademais, perceba que o problema de otimização dado pela Equação (99) utiliza a Equação (90) para levar o sistema nominal à referência requerida. Acontece que se a incerteza do modelo tende a um valor diferente de zero no estado estacionário então a saída do sistema real pode ter um erro de seguimento, mesmo estando dentro do tubo e portanto próximo à saída nominal. Para lidar com isso, um *loop* externo composto por um estimador de perturbações, que não depende do MPC, pode ser usado conforme Equação (100).

$$\mathbf{y}_s(k) = \mathbf{y}_d - (\mathbf{C}_m + \mathbf{D}_m \mathbf{K}_{dr}) (\mathbf{I}_n - (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_{dr}))^{-1} \hat{\mathbf{w}}(k) \quad (100)$$

onde \mathbf{y}_s é a referência passada para o MPC, \mathbf{y}_d é a nova referência desejada, e $\hat{\mathbf{w}}$ é a estimação do distúrbio.

Por fim, perceba que uma das suposições feitas foi que o controlador tem todos os estados disponíveis, o que dificilmente é verdade. Assim, a Seção 4.2 discorre a respeito do uso de observadores no sistema.

4.2 MPC ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA RASTREAMENTO DE SISTEMAS LINEARES RESTRITOS COM DISTÚRBIOS ADITIVOS

O TRMPC para rastreamento de saída utiliza um observador de Luenberger, conforme Seção 2.3.1, diretamente na formulação do controlador para garantir estabilidade robusta. Para tanto, considere o sistema linear incerto e invariante no tempo em tempo discreto mostrado na Equação (101).

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \\
\text{s.a. } \mathbf{x}(k) &\in \mathcal{X} \\
\mathbf{u}(k) &\in \mathcal{U} \\
\mathbf{w}(k) &\in \mathcal{W} \\
\mathbf{v}(k) &\in \mathcal{V}
\end{aligned} \tag{101}$$

onde \mathbf{x} são os estados, \mathbf{u} é a ação de controle, \mathbf{w} é um distúrbio de estado desconhecido, \mathbf{y} é a saída atual medida, \mathbf{v} é um distúrbio de saída desconhecido e $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{p \times n}$. Assume-se que o par $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m)$ é controlável e $(\mathbf{A}_m, \mathbf{C}_m)$ é observável.

A dinâmica do sistema estimado é mostrada na Equação (102).

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)) \\
\hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k)
\end{aligned} \tag{102}$$

onde $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é o estado atual do observador, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^p$ é a saída atual do observador e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é o ganho do observador.

As Subseções 4.1.1, 4.1.2 serão usadas para caracterização dos equilíbrios do sistema e para cálculos dos conjuntos RPI respectivamente. Observe que todas as suposições feitas na Seção 4.1 ainda precisam ser verdadeiras (com exceção dos estados estarem disponíveis).

Além disso, a matriz \mathbf{A}_L precisa ser estável. Esta matriz ajuda a definir o comportamento em malha fechada do erro de estimação $\mathbf{e}_e \triangleq \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. A dinâmica deste pode ser calculada conforme a Equação (103).

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_e(k+1) &= \mathbf{A}_L \mathbf{e}_e(k) + \mathbf{w}_{ee} \\
\mathbf{w}_{ee} &= (\mathbf{w} - \mathbf{L}\mathbf{v}), \\
\mathbf{A}_L &= (\mathbf{A}_m - \mathbf{L}\mathbf{C}_m)
\end{aligned} \tag{103}$$

O distúrbio \mathbf{w}_{ee} então está num conjunto compacto, convexo e não vazio definido conforme a Equação (104).

$$\mathcal{W}_{ee} \triangleq \mathcal{W} \oplus (-\mathbf{L}\mathcal{V}) \tag{104}$$

O ganho \mathbf{L} deve ser escolhido de tal forma que a matriz \mathbf{A}_L seja estável. Como \mathbf{A}_L é estável, existe um RPI para o sistema (102) que satisfaz $\mathbf{A}_L \phi_{ee} \oplus \mathcal{W}_{ee} \subseteq \phi_{ee}$. O conjunto RPI mínimo para essa dinâmica pode ser calculado usando a Equação (105).

$$\phi_{ee} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}_L)^k \mathcal{W}_{ee} \tag{105}$$

Perceba que o conjunto ϕ_{ee} não depende do ganho \mathbf{K}_{dr} do sistema original. O objetivo deste conjunto é garantir que se $\hat{\mathbf{x}}$ está dentro do conjunto $(\mathcal{X} - \phi_{ee})$ então o estado real \mathbf{x} está dentro de \mathcal{X} , ou seja $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \in \phi_{ee}$.

Merece destaque o fato de que o erro de estimação inicial ($\mathbf{e}_e(0)$) também precisa pertencer a ϕ_{ee} . Isso é necessário pois o estado real e o observado precisam estar limitados pelo tubo de observação em todos os instantes. Pressupõe-se então que o observador esteja funcionando por um tempo suficientemente grande para garantir que o erro de estimativa inicial esteja no conjunto definido.

A partir daí, a trajetória estimada é confinada, pela lei de controle, a outro tubo (tubo de controle), cujo centro é a trajetória nominal e sua seção é um conjunto invariável robusto conforme será mostrado a seguir.

Considere novamente um sistema nominal desconsiderando os distúrbios \mathbf{w} e \mathbf{v} , conforme a Equação (106).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}_m \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\tag{106}$$

Usando o mesmo princípio da Seção 4.1, um ganho \mathbf{K}_{dr} pode ser escolhido de forma a forçar a trajetória do observador a se aproximar da trajetória nominal. Definindo \mathbf{e}_c como o erro de controle entre o estado estimado e o estado nominal, a ação de controle da Equação (107) deve ser usada.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{dr} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{e}_c &\triangleq (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{107}$$

onde a dinâmica do erro \mathbf{e}_c satisfaz a Equação (108).

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_c(k+1) &= \mathbf{A}_K \mathbf{e}_c + \mathbf{w}_{ec} \\ \mathbf{w}_{ec} &= (\mathbf{L} \mathbf{C}_m \mathbf{e}_e + \mathbf{L} \mathbf{v}) \\ \mathbf{A}_K &= (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_{dr})\end{aligned}\tag{108}$$

Assim sendo, como \mathbf{e}_e é limitado pelo conjunto ϕ_{ee} , o distúrbio \mathbf{w}_{ec} encontra-se no conjunto \mathcal{W}_{ec} definido conforme a Equação (109).

$$\mathcal{W}_{ec} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{C}_m \phi_{ee} \oplus \mathbf{L} \mathcal{V}\tag{109}$$

Ademais, se o ganho \mathbf{K}_{dr} escolhido é tal que a matriz \mathbf{A}_K é estável, então existe um conjunto RPI para o sistema (108) que satisfaz $\mathbf{A}_K \phi_{ec} \oplus \mathcal{W}_{ec} \subseteq \phi_{ec}$. O conjunto RPI mínimo para essa dinâmica pode ser calculado usando a Equação (110).

$$\phi_{ec} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}_K)^k \mathcal{W}_{ec}\tag{110}$$

Note que \mathcal{W}_{ec} depende do ganho L e do conjunto ϕ_{ee} mRPI (RPI mínimo), e que ϕ_{ec} calcula os efeitos desse distúrbio na malha fechada do sistema. Isso significa dizer que para que o tubo de controle possa manter os estados do sistema próximo aos estados nominais é necessário que este englobe o tubo de estimação. Em outras palavras, o tubo de estimação força o sistema real a ficar próximo do estimado e o tubo de controle força o sistema estimado a ficar próximo do nominal.

Por fim, a função custo então é dada pela Equação (111).

$$V_N(\hat{\mathbf{x}}, \theta; \bar{\mathbf{x}}_p, \bar{\pi}, \bar{\theta}) = \sum_{c=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{x}}(k+c|k) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(k+c|k) - \bar{\mathbf{u}}_s\|_R^2 + \|\bar{\mathbf{x}}(k+N|k) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_P^2 + \|\bar{\theta} - \theta\|_T^2 \quad (111)$$

O problema de otimização a ser resolvido é mostrado na Equação (112).

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\pi}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}} V_N(\mathbf{x}, \theta, \bar{\pi}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}) \\ \text{s.a. } & \bar{\mathbf{x}} \in \hat{\mathbf{x}} \oplus (-\phi_{ec}) \\ & \bar{\mathbf{x}}_p(k+c|k) \in \bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \ominus \phi_o, \quad \forall c = 0, \dots, N-1 \\ & \bar{\mathbf{u}}(k+c|k) \in \bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \ominus \mathbf{K}_{dr}\phi_{ec}, \quad \forall c = 0, \dots, N-1 \\ & (\bar{\mathbf{x}}(k+N|k), \bar{\theta}) \in \Omega_{t, \bar{K}}^a \\ & (\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}_s) = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} \end{aligned} \quad (112)$$

onde $(\phi_o \triangleq \phi_{ee} \oplus \phi_{ec})$.

Perceba que, assim como para o caso sem observador, pode haver um erro de seguimento se alguma das incertezas tende a um valor em regime $\mathbf{w}_\infty, \mathbf{v}_\infty$. Para lidar com isso, um novo *setpoint* pode ser usado conforme a Equação (113).

$$\bar{\mathbf{y}}_s(k) = \bar{\mathbf{y}}_d - \mathbf{F}_a(\mathbf{C}_m \mathbf{e}_e(\infty) + \mathbf{v}(\infty)) \quad (113)$$

sendo

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{I} + \mathbf{C}_m(\mathbf{I} - \mathbf{A}_m \mathbf{K}_{dr})^{-1} \mathbf{L}, \quad e \quad \mathbf{e}_e(\infty) = \mathbf{w}(\infty) - \mathbf{L}\mathbf{v}(\infty)$$

onde $\bar{\mathbf{y}}_s$ é a referência transferida para o MPC, $\bar{\mathbf{y}}_d$ é a nova referência desejada, e $\hat{\mathbf{v}}$ é a estimação do ruído de saída.

Como o valor em regime $\mathbf{C}_m \mathbf{e}_e(\infty) + \mathbf{v}(\infty)$ não é conhecido, ele deve ser estimado. De forma a simplificar os cálculos, observe que o sinal $\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k)$ é igual a $\mathbf{C}_m \mathbf{e}_e(k) + \mathbf{v}(k)$. Assim, a Equação (113) pode ser substituída pela Equação (114).

$$\bar{\mathbf{y}}_s(k) = \bar{\mathbf{y}}_d - \mathbf{F}_a(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_m \hat{\mathbf{x}}(k)) \quad (114)$$

Perceba que se os distúrbios $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}(k)$ estiverem sempre variando (não tem dinâmica definida ou valores em regime) então não faz sentido estimá-los, pois sempre haverá um erro de seguimento causado pelo distúrbio atual.

Alternativamente, pode-se evitar a análise de duas dinâmicas de erro se o modelo realinhado for usado em conjunto com o *framework* apresentado na Seção 4.1. Esta adaptação, doravante chamada de TRMPC com modelo não mínimo (TRMPC-NMSS), é analisada na Seção 4.4. Antes disso, um resumo a respeito da sintonia do TRMPC é feito na seção a seguir.

4.3 SÍNTESE DO CONTROLADOR BASEADO EM TUBOS

Nesta seção, um breve resumo a respeito dos efeitos de cada parâmetro dos controladores é apresentado.

Primeiramente, sabe-se que as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} definem o desempenho da otimização do algoritmo. O horizonte de predição N deve ser escolhido o maior possível, pois oferece um domínio maior de atração e, em geral, um melhor desempenho em malha fechada. No entanto, um N muito grande requer maior tempo de computação. Assim, deve-se ponderar entre desempenho e custo para escolha de N .

As próximas subseções resumem como obter as matrizes \mathbf{T} , \mathbf{K}_{dr} , $\bar{\mathbf{K}}$, \mathbf{P} , o conjunto RPI mínimo $\phi_{K_{dr}}$ e o conjunto RPI $\Omega_{t,\bar{\mathbf{K}}}^a$.

4.3.1 Escolha da matriz \mathbf{T}

De acordo com Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2008), um valor de \mathbf{T} de magnitude elevada faz com que a convergência de θ para $\bar{\theta}$ seja mais rápida, de forma com que a perda de otimalidade seja minúscula. Além disso, permite priorizar o rastreamento de algumas saídas em detrimento das outras (escolhendo valores diferentes em sua diagonal). Ademais, o valor de \mathbf{T} é independente do restante dos parâmetros, ou seja, ele pode ser ajustado *on-line*.

4.3.2 Escolha das matrizes $\bar{\mathbf{K}}$, \mathbf{P} e $\Omega_{t,\bar{\mathbf{K}}}^a$

Dado o fato de que o sistema aumentado da Equação (96) é usado para cálculo do conjunto terminal, tem-se que o conjunto Ω_t^a já é um conjunto com um domínio de atração grande que abrange todas as possíveis referências do sistema. Assim, não é necessário escolher um ganho que o maximize, pois o conjunto não vai aumentar significativamente. Sugere-se então escolher o ganho utilizando como critério o custo ao longo do horizonte N . Por conseguinte, é interessante que $\bar{\mathbf{K}}$ seja escolhido como o ganho de LQR e \mathbf{P} a solução da equação de Riccati associada ao mesmo. Feito isto, $\Omega_{t,\bar{\mathbf{K}}}^a$ pode ser calculado conforme pode ser visto em Kerrigan (2001) e em Gilbert e Tan (1991).

4.3.3 Escolha da matriz \mathbf{K}_{dr}

Esse é o ganho de rejeição de distúrbio, que caracteriza a dinâmica do sistema de malha fechada na presença de distúrbios. Consequentemente, a matriz \mathbf{K}_{dr} deve ser projetada de acordo com um critério de robustez ou rejeição de perturbações. Perceba que o ganho do LQR não leva em consideração nem o distúrbio nem a robustez do sistema, portanto recomenda-se não usá-lo.

Assim, \mathbf{K}_{dr} é escolhido para garantir a existência de $\phi_{\mathbf{K}_{dr}}$, de modo que os conjuntos $\bar{\mathcal{X}} \triangleq \mathcal{X} \ominus \phi_{\mathbf{K}_{dr}}$ e $\bar{\mathcal{U}} \triangleq \mathcal{U} \ominus (\mathbf{K}_{dr} \phi_{\mathbf{K}_{dr}})$ não sejam conjuntos vazios e, ao mesmo tempo, deve minimizar o tamanho de $\phi_{\mathbf{K}_{dr}}$.

Aplicando os procedimentos mostrados na literatura, o valor de \mathbf{K}_{dr} para o caso quando todos os estados estão disponíveis é dado pela minimização do seguinte problema de otimização baseado em LMI para um dado $\lambda \geq 0$.

$$\begin{aligned} & \min_{s, \mathbf{W}, \gamma} \gamma \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{W} & * & * \\ 0 & 1 - \lambda & * \\ \mathbf{A}_m \mathbf{W} + \mathbf{B}_m \mathbf{Y} & w & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall w \in \text{vert}(\mathcal{W}) \\ & \begin{bmatrix} \rho_i^2 & * \\ \mathbf{Y}^\top \ell_i & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_{ru} \\ & \begin{bmatrix} \gamma & * \\ \mathbf{W} h_i & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_{rx} \end{aligned} \quad (115)$$

onde a variável a ser minimizada é $\gamma > 0$, \mathbf{P} é o custo terminal, $\text{vert}(\mathcal{W})$ indicam os vértices do poliedro de distúrbio, \mathbf{Y} e \mathbf{W} são transformações dadas por $\mathbf{W} = \gamma \mathbf{P}^{-1}$ e por $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_{dr} \mathbf{W}$, $\rho_i \in (0, 1]$ é escolhido para restringir o tamanho do conjunto de entradas admissíveis, h_i^T e ℓ_i^T são as representações das restrições do sistema e do controle em sua forma H-normalizada com n_{rx} e n_{ru} sendo o número de inequações necessárias para representar esse poliedros na forma H. Além disso, restrições simétricas são indicadas por * na matriz.

Note que a escolha deste ganho considera o distúrbio, o custo de controle e as restrições nos estados e nas saídas. Outros critérios de robustez que possam ser colocados como LMIs podem ser adicionados a esse problema.

O trabalho de Buckner e Lampariello (2018) sugere usar a ferramenta CVX para resolver este problema. Entretanto, o CVX não pode resolver otimizações quando dois dos parâmetros de otimização são multiplicados juntos, logo λ é determinado por experimentação e externamente à otimização.

Para o caso onde os estados não estão disponíveis, pode-se adaptar o problema (115) para os cálculos do par $(\mathbf{K}_{dr}, \mathbf{L})$ para o problema (112). O problema é um pouco

mais complexo, pois passa a depender de W_{ee} e W_{ec} , onde este último depende do primeiro. Em outras palavras, a escolha de K_{dr} depende de L .

Para mais informações sobre o passo a passo utilizado até se chegar no problema (115) direciona-se o leitor aos trabalhos de Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2008). Para cálculos ligados a esse passo a passo sugere-se a leitura dos trabalhos de Jönsson (2001) sobre o procedimento-S, Boyd *et al.* (1994) sobre o uso de LMIs e Grant e Boyd (2014) sobre a ferramenta CVX. Complementarmente, Buckner (2017) mostra um pseudo-algoritmo sobre como resolver isto.

4.3.4 Cálculo do conjunto $\phi_{K_{dr}}$

De posse do ganho K_{dr} , um conjunto admissível RPI deve ser calculado. Relembrando da Seção 2.4.3, tem-se que esse deve ser o menor possível e que se A_K é estável então este conjunto existe. Este pode ser aproximado utilizando um valor de s conforme mostrado na Equação (116).

$$F_s = \bigoplus_{k=0}^s (A_K)^k \mathcal{W}, \quad \text{com } s \rightarrow \infty \quad (116)$$

Infelizmente, realizar operações de soma de Minkowski até o infinito é computacionalmente impossível. Durante o desenvolvimento desse trabalho três abordagens para simplificar os cálculos de $\phi_{K_{dr}}$ foram encontradas. São elas:

1. Simplificação de Rawlings e Mayne (2009): baseia-se em escolher um horizonte de predição pequeno e definir $s \triangleq N - 1$ na expressão (116). É utilizado no TRMPC caso regulatório, pois um horizonte que garanta que o sistema chegue no conjunto terminal garante que todos os distúrbios necessários foram contabilizados.
2. Simplificação de Raković *et al.* (2005): sugere que o conjunto $\phi_{K_{dr}}$ seja estimado utilizando um valor máximo de erro (e). Com esse propósito, as funções da Equação (117) são calculadas por meio de vários problemas de programação linear para encontrar um valor suficientemente grande de s .

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \min \alpha & \text{s.a.} & \quad A_K^s \mathcal{W} \subseteq \alpha \mathcal{W} \\ \beta(s) &= \min \beta & \text{s.a.} & \quad F_s \subseteq \beta B^n \end{aligned} \quad (117)$$

O valor de s é dito grande o suficiente quando o erro entre o RPI mínimo e RPI aproximado é menor do que o valor e pré-determinado conforme $(1 - \alpha(s))^{-1} \alpha(s) \beta(s) \leq e$. Se isso acontece, então $\phi_{K_{dr}} = (1 - \alpha(s))^{-1} F_s$. Entretanto, há duas desvantagens no uso dessa técnica: é necessário ter uma estimativa *a priori* do tamanho do conjunto invariável para escolha o erro associado; e pode

acontecer que o menor s que garanta este erro não seja computacionalmente viável.

3. Simplificação de Alvarado (2007): evolui a simplificação anterior, utiliza um limite de erro relativo, $\lambda_e \in (0, 1)$, que não precisa ser conhecido *a priori* de forma que $F_\infty \subseteq \phi_K \subseteq (1 + \lambda_e)F_\infty$.

Esse resultado pode ser ainda mais simplificado para o caso em que o conjunto de incertezas (\mathcal{W}) é um zonotopo (mapa afim de uma caixa unitária, por exemplo). Se isso acontece então $\mathcal{W} = \mathbf{H}\mathcal{B}^n \oplus w_0$, onde w_0 é o centro do poliedro de distúrbio, \mathcal{B}^n é uma caixa unitária e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz geradora não singular do zonotopo.

A expressão (116) pode ser substituída conforme a Equação (118).

$$\bigoplus_{k=0}^{s-1} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K})^k \mathbf{H} \mathcal{B}^n = \mathbf{H}_z(s) \mathcal{B}^{sn} \quad (118)$$

com $\mathbf{H}_z(s) = [(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K})^{s-1} \mathbf{H}, (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K})^{s-2} \mathbf{H}, \dots, \mathbf{H}]$.

Assim, seja um s tal que $\hat{\alpha}(s) \leq \frac{\lambda_e}{1+\lambda_e}$ para um determinado erro relativo λ_e com $\hat{\alpha}(s) = \|\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K})^s \mathbf{H}\|_\infty$, então o RPI ϕ_K pode ser aproximado por:

$$\phi_K = (1 - \hat{\alpha}(s))^{-1} \mathbf{H}_z(s) \mathcal{B}^{sn} \oplus (\mathbf{I}_n - (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}))^{-1} w_0 \quad (119)$$

Observe que os zonotopos são uma maneira compacta de representar conjuntos em altas dimensões. A vantagem de usá-los aqui é a simplificação dos cálculos para as restrições apertadas do problema (que só necessitam da matriz \mathbf{H}_z). Entretanto, a restrição $\bar{\mathbf{x}} \in \oplus (-\phi_{Kdr})$ requer o cálculo do conjunto de desigualdades (forma H do problema) que representam esse zonotopo que só é computável para dimensões reduzidas.

Assim, deve-se escolher o maior valor de s computacionalmente viável. Porém, assim como a técnica anterior, este s pode não garantir o erro requerido. Sugere-se então em escolher um valor suficientemente grande de s e calcular um casco politópico de baixa complexidade do zonotopo encontrado.

Alternativamente, o cálculo dos RPI's pode ser feito utilizando a metodologia apresentada por Darup e Teichrib (2019). Essa abordagem tenta simplificar os cálculos dos conjuntos precisamente para serem utilizados em um TRMPC utilizando um limite de erro e calculando um RPI máximo de conjunto suficientemente pequeno, numa técnica similar a de Alvarado (2007). Entretanto, essa não foi utilizada neste trabalho devido à dificuldade de cálculo causada exatamente pela restrição ($\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \in \phi_{Kdr}$). Note então que todas as abordagens citadas encontram problemas para o cálculo eficiente

de $\phi_{K_{dr}}$, e um método para achar um conjunto computacionalmente viável ainda é algo que vem sendo estudado.

Ademais, perceba que a única variável que pode ser alterada para cálculo do conjunto $\phi_{K_{dr}}$ é o ganho K_{dr} . Este ganho modifica o valor considerado suficientemente grande de s e deve ser escolhido com cautela. Note também que o uso de zonotos para facilitar trabalhar com dimensões elevadas contrabalança uma das desvantagens do modelo realinhado (mais estados). Ademais, perceba que os cálculos e problemas descritos aqui podem ser replicados para cálculos de ϕ_{ee} e ϕ_{ec} . Entretanto, ϕ_{ec} depende de ϕ_{ee} , e conseqüentemente parte da simplificação 3 não pode ser usada. Além do mais, se o problema for complexo deve-se calcular um casco politópico de baixa complexidade para os dois conjuntos a serem calculados, o que não é trivial.

Por fim, frisa-se que os cálculos de K_{dr} e $\phi_{K_{dr}}$ exigem um conhecimento prévio sobre LMIs e conjuntos RPIs. No caso de K_{dr} , a utilização da ferramenta *CVX* mostra que um problema de otimização com uma multiplicação de dois parâmetros precisa ser resolvido. Assim sendo, é preciso um conhecimento não tão básico sobre otimização convexa.

Já para os cálculos de $\phi_{K_{dr}}$ é necessário saber como o valor do ganho escolhido altera o resultado da soma de Minkowski. Além disso, o projetista precisa escolher a melhor forma de realizar os cálculos em si, o que envolve resolver vários problemas de programação linear ou trabalhar com zonotos. Portanto, independentemente da escolha, é fundamental entender como cada simplificação funciona. Assim, ao contrário do RGPC que tem sintonia relativamente intuitiva, para o caso TRMPC é indispensável compreender vários detalhes ímpares sobre a técnica e tudo isso antes mesmo de invocar o MPC. Do ponto de vista prático, isso significa que o ajuste do TRMPC é complicado devido à quantidade de parâmetros e de cálculos. Conclui-se então que essa abordagem não é tão intuitiva para aplicação industrial.

4.3.5 Implementação do Controlador

As implementações apresentadas neste trabalho foram desenvolvidas no *Matlab* usando o solver *Gurobi* (GUROBI OPTIMIZATION, 2020) e o parser *YALMIP* (LÖFBERG, 2004). Como o problema TRMPC é QP, não é necessário utilizar um *solver* que lide com restrições não lineares e por isso escolheu-se o *Gurobi* que é mundialmente reconhecido por sua performance e bastante difundido na academia. Para lidar com os cálculos de inicialização do controlador, a ferramenta *MPT3* (HERCEG *et al.*, 2013) é utilizada. O *MPT3* é um *software* de código aberto que lida com otimização paramétrica e com a geometria computacional dos conjuntos a serem calculados. Portanto, é utilizado para calcular os politopos e as somas de Minkowski. Note que se esses cálculos forem complexos demais, simplificações são feitas utilizando a ferramenta *CVX*. As desigualdades que representam os conjuntos podem ser passadas como

restrições ao MPC via *YALMIP* sem maiores dificuldades.

As provas de convergência e estabilidade podem ser encontradas nos trabalhos citados ao longo deste capítulo. Assim, finaliza-se este capítulo com alguns exemplos ilustrativos para comparar o TRMPC-NMSS com o TRMPC explanado na Seção 4.2 que utiliza observadores.

4.4 EXEMPLOS

Nesta seção dois exemplos são discutidos de forma a comparar os diferentes TRMPC. Para facilitar a compreensão, todas as variáveis referentes ao modelo realinhado estarão acompanhadas do subscrito r .

4.4.1 Sistema Duplo-Integrador

O sistema duplo integrador é um dos sistemas mais fundamentais em aplicações de controle e é usado, frequentemente, como uma tarefa experimental na literatura. Este modelo pode representar uma ampla variedade de processos, desde um pêndulo duplo até um sistema aeroespacial. Assim, considere o sistema linear apresentado na Equação (120).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (120)$$

Considere também que os estados desse sistema não estão disponíveis para medição, de fato apenas tem-se acesso às entradas e saídas do mesmo. Assim, para aplicar a técnica TRMPC é necessário utilizar o esquema apresentado na Seção 4.2. Alternativamente, pode-se construir um modelo NMSS usando apenas as entradas e saídas da planta como estados conforme a Seção 2.3.2. Esse modelo é apresentado na Equação (121).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_p(k+1) \\ y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} w_{r1}(k) \\ w_{r2}(k) \\ w_{r3}(k) \end{bmatrix} \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (121)$$

4.4.1.1 Restrições do Problema

As restrições nos estados e nas entradas dos modelos dados nas Equações (120) e (121) podem ser vistas na Tabela 1.

Tabela 1 – Restrições de entrada e estados.

	Modelo (120)	Modelo (121)
Restrições nos Estados	$-50 \leq x_1 \leq 10$ $-50 \leq x_2 \leq 10$	$-100 \leq x_1 \leq 20$ $-100 \leq x_2 \leq 20$ $-10 \leq x_3 \leq 10$
Restrições nas Entradas	$-10 \leq u_1 \leq 10$	$-10 \leq u_1 \leq 10$

Fonte: Autor.

A primeira grande diferença entre os modelos se dá no fato de que o modelo da Equação (120) deve atender a restrições nos estados e entradas do sistema, sem se importar diretamente com restrições na saída. Já o modelo da Equação (121) tem restrições nas entradas e saídas. Observe que é possível, por meio dos estados, garantir que as saídas sejam limitadas. O oposto também é verdade, podendo-se limitar os estados da planta por meio das saídas e entradas. Entretanto, esses limites não entram diretamente no problema de otimização.

Para o TRMPC-NMSS, perceba que as restrições também são impostas para as saídas e entradas passadas. Isso é necessário uma vez que o controlador fará predições desses estados e essas predições dizem respeito ao futuro. Por fim, de forma a fazer uma comparação justa entre os controladores, as restrições para a saída do sistema foram escolhidas de maneira a serem equivalentes às restrições de estados e portanto seus limites são dados por $C_m \mathcal{X}$.

Observe que ambos os sistemas são suscetíveis a distúrbios limitados conforme mostrado na Tabela 2. Os valores máximos e mínimos desses distúrbios foram escolhidos com o objetivo de se fazer uma comparação honesta entre os controladores dos dois modelos.

Tabela 2 – Limites dos distúrbios.

Modelo (120)	Modelo (121)
$-0,001 \leq w_1 \leq 0,001$	$-2,5 \leq w_{r1} \leq 2,5$
$-0,001 \leq w_2 \leq 0,001$	$-2,5 \leq w_{r2} \leq 2,5$
$-0,4 \leq v \leq 0,4$	$-0,001 \leq w_{r3} \leq 0,001$

Fonte: Autor.

Perceba que para o caso do modelo da Equação (120), doravante chamado de modelo O , os estados não podem ser medidos e portanto não há informação a respeito do distúrbio que entra nesses estados. Pressupõe-se aqui que os seus efeitos serão sentidos na saída em malha fechada, e assim w e v podem ser unificados em v .

Já para o modelo da Equação (121), ou modelo R , observe que não há distúrbios na ação de controle e os distúrbios nas saídas passadas são os distúrbios atuais deslocados no tempo. Frisa-se que a forma de construção das matrizes $(\mathbf{A}_{m,r}, \mathbf{B}_{m,r})$ garante que o distúrbio na saída atual será propagado para os outros estados em instantes de tempo futuro. Em outras palavras, um distúrbio em $k = j$ será sentido no segundo estado da planta em $k = j + 1$.

Ainda sobre o modelo R , perceba que há um número maior de estados no sistema o que aumenta a complexidade do problema. Entretanto, a maior parte dos distúrbios considerados é nulo, o que pode facilitar os cálculos de $\mathbf{K}_{dr,r}$ e $\phi_{Kdr,r}$.

Por fim, sabe-se que a técnica aqui testada utiliza poliedros para representar as restrições, assim são necessárias restrições de desigualdade para retratá-lo e portanto aproxima-se os distúrbios nulos por valores bem pequenos. Por exemplo, $w = 0$ é substituído por $|w| \leq 0.001$. Ademais, escolheu-se $|w_r| \leq 2,5$ (um valor 6,25 vezes maior que v) por motivos que ficarão claros posteriormente.

4.4.1.2 Inicialização do Problema

Para o sistema representado pelo modelo O , a matriz de controle por realimentação \mathbf{K}_{dr} e o ganho do observador \mathbf{L} são retirados de Alvarado, Limon, Alamo e Camacho (2007) e são mostrados na Equação (122).

$$\mathbf{K}_{dr} = [-1; -1] \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

A função de custo é definida conforme a Equação (112) com $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$, $R = 0.01$, \mathbf{P} é a matriz associada ao sistema controlado por $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{LQR}\mathbf{x}$, em que $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{LQR}$ é a solução de um LQR com os valores de \mathbf{Q} e R de antes. O conjunto RPI terminal é $\Omega_{t,\bar{\mathbf{K}}}^a$ é calculado usando $\bar{\mathbf{K}}$ e o horizonte é $N = 5$.

Sendo $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m\mathbf{K}_{dr}$ e $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_m - \mathbf{L}\mathbf{C}_m$, tem-se que os autovalores de malha fechada de ambas as dinâmicas são iguais a zero. Perceba que isso nos dá uma dinâmica rápida porém bastante brusca. Para o sistema realinhado R , escolhe-se a matriz $\mathbf{K}_{dr,r}$ de forma a alocar os autovalores do sistema também em zero. Assim, o ganho é mostrado na Equação (123).

$$\mathbf{K}_{dr} = [-1; 0; 0] \quad (123)$$

A função de custo é definida conforme a Equação (99) com $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{I}_2, R)$, $R = 0.01$, $\bar{\mathbf{K}}$ é calculado como a solução de um LQR e \mathbf{P} é a matriz associada a ele. O conjunto RPI terminal é $\Omega_{t,\bar{\mathbf{K}}}^a$ é calculado usando $\bar{\mathbf{K}}$ e o horizonte é $N = 5$.

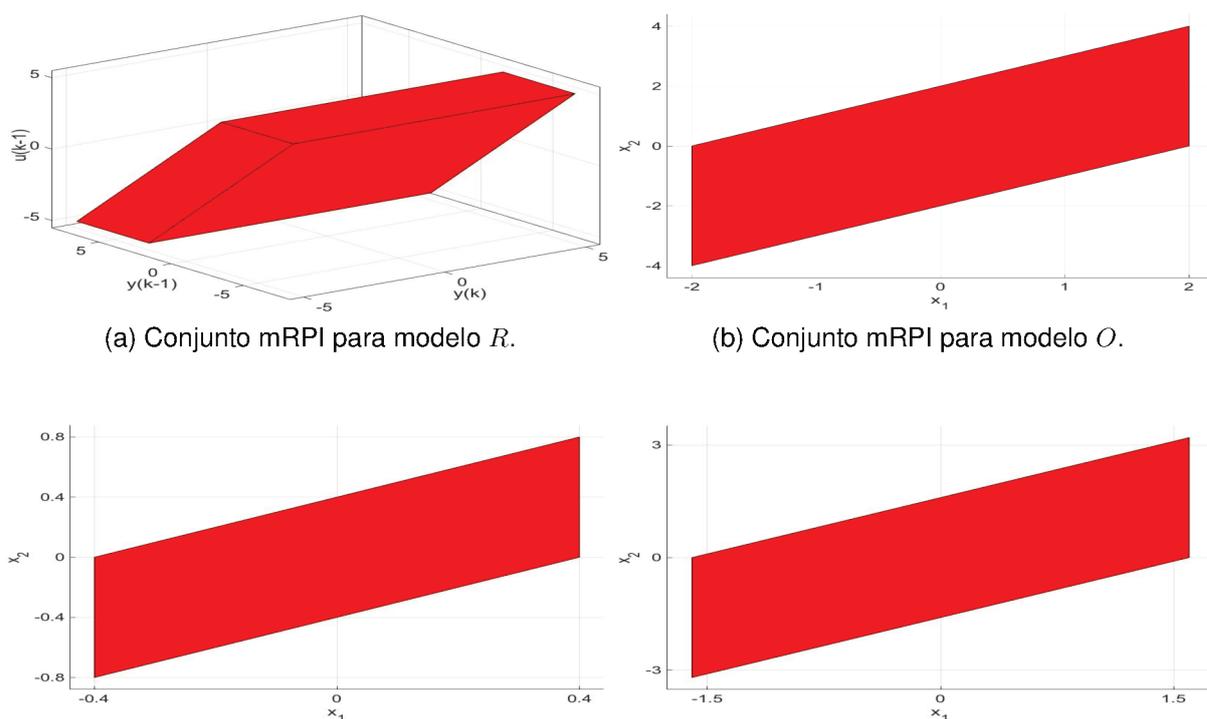
É fato de que $\mathbf{K}_{dr,r}$ também dará uma resposta brusca e rápida, isso foi feito propositalmente de forma a comparar ambos os modelos mais igualmente.

4.4.1.3 Cálculo do Conjunto mRPI

De posse disso, calcula-se os conjuntos RPIs. Lembre-se que o conjunto mRPI é o menor conjunto possível e é definido pelo somatório de Minkowski e depende da dinâmica do sistema e dos limites do distúrbio. Para este exemplo, o s que garante um limite de erro (e) suficientemente pequeno para as três dinâmicas de erro calculadas é $s = 3$ para o sistema realinhado e $s = 2$ para as dinâmicas do modelo O .

Note que para o modelo O normalmente não é possível usar a simplificação por zonotopos. Neste exemplo não é possível achar uma matriz H não singular que represente o distúrbio da dinâmica e_e ($\mathcal{W}_{e_e} = \mathcal{W} \oplus (-L\mathcal{V})$). Como este é um exemplo simples de dimensões reduzidas é possível utilizar a simplificação de Raković *et al.* (2005) para os cálculos. Alternativamente, pode-se calcular diretamente as somas de Minkowski para todas as dinâmicas por meio da ferramenta *MPT3*. Frisa-se que isso não é possível para sistemas com dimensões maiores devido ao alto custo computacional envolvido. Os conjuntos calculados são apresentados na Figura 8.

Figura 8 – Conjuntos ϕ_s calculados.



(a) Conjunto mRPI para modelo R . (b) Conjunto mRPI para modelo O . (c) Conjunto mRPI para dinâmica e_e do modelo O . (d) Conjunto mRPI para dinâmica e_c do modelo O .

Fonte: Autor.

A Tabela 3 mostra algumas das características dos conjuntos encontrados.

Primeiramente, note que os conjuntos ϕ_o e ϕ_{ee} são representados por seis desigualdades, o que não é possível observar pela Figura 8 devido à proximidade de alguns dos vértices desses poliedros. Perceba que essa é a representação mínima desses conjuntos, ou seja, não há vértices ou desigualdades redundantes. Isso não é

Tabela 3 – Características dos conjuntos mRPIs calculados.

	Dimensão	Nº Desigualdades	Nº Vértices
ϕ_{Kdr}	03	08	12
ϕ_{ee}	02	06	06
ϕ_{ec}	02	04	04
$\phi_o = \phi_{ee} \oplus \phi_{ec}$	02	06	06

Fonte: Autor.

um problema para um sistema simples de dimensão dois, mas quanto maior o número de estados mais complicado fica calcular a representação H do sistema. Observe que neste exemplo é fácil notar que os conjuntos podem ser simplificados utilizando apenas quatro desigualdades, mas para um sistema de dimensão maior essa tarefa não é trivial.

Observe que essas desigualdades extras aparecem devido à complexidade nos cálculos dos conjuntos, note pela Equação (105) que a dinâmica de ϕ_{ee} depende tanto de w quanto de v , além de usar o ganho L duas vezes. Para sistemas maiores pode não ser possível encontrar um s computacionalmente acessível para calcular esse conjunto, sendo necessário aproximá-lo (por meio de um casco politópico, por exemplo). Nesse caso, é interessante encontrar o máximo RPI contido no conjunto encontrado de forma a eliminar algumas dessas desigualdades extras. A principal desvantagem do sistema com observadores é que o conjunto ϕ_{ee} é usado nos cálculos de ϕ_{ec} e ϕ_o . Assim, é necessário cautela pois ϕ_{ec} e ϕ_o serão calculados utilizando uma aproximação de ϕ_{ee} o que pode produzir conjuntos errôneos.

Para o caso TRMPC-NMSS, a Tabela 3 mostra que ϕ_{Kdr} é representado por doze vértices e oito desigualdades. Note que esse conjunto considera as entradas do sistema como estados e portanto sempre terá dimensão maior, o que significa mais vértices/desigualdades. A vantagem aqui se dá no fato que o sistema possui apenas o distúrbio w que normalmente pode ser representado por um zonotopo. Assim, as restrições apertadas para o problema nominal podem ser calculadas sem precisar da representação H (por desigualdades) de ϕ_{Kdr} . Para esse exemplo, o poliedro encontrado é mais complexo do que ϕ_o pelo simples fato de ter três dimensões. Porém, a projeção de ϕ_{Kdr} nas saídas do sistema possui apenas quatro vértices, sendo portanto mais simples do que o primeiro.

Ademais, mesmo para o caso TRMPC-NMSS ainda pode acontecer de o conjunto ϕ_{Kdr} possuir muitas desigualdades ou pode não ser possível encontrar um s computacionalmente acessível para seus cálculos. Como as restrições apertadas podem ser calculadas de forma simplificada, pode-se aproximar esse conjunto conforme Seção 4.3.4. Ao contrário do que acontece para o caso com observadores, esse conjunto é usado apenas uma vez e portanto um eventual erro de aproximação não é

propagado.

4.4.1.4 Restrições Apertadas do Problema

As restrições apertadas se aplicam apenas ao sistema nominal, descrevendo as regiões nas quais os estados nominais podem existir. Devem, portanto, ser menores do que as restrições originais do sistema, para que o sistema perturbado ainda as satisfaça de maneira robusta. Para o modelo realinhado essas restrições são dadas por:

$$\bar{\mathcal{X}}_r = \mathcal{X}_r \ominus \phi_{Kdr}, \quad \bar{\mathcal{U}}_r = \mathcal{U}_r \ominus K\phi_{Kdr}$$

Para o modelo O as restrições apertadas são representadas por:

$$\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \ominus \phi_o, \quad \bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \ominus K\phi_{ec}$$

Os conjuntos que as representam são obtidos usando a ferramenta *MPT3* e são mostrados na Equação (124).

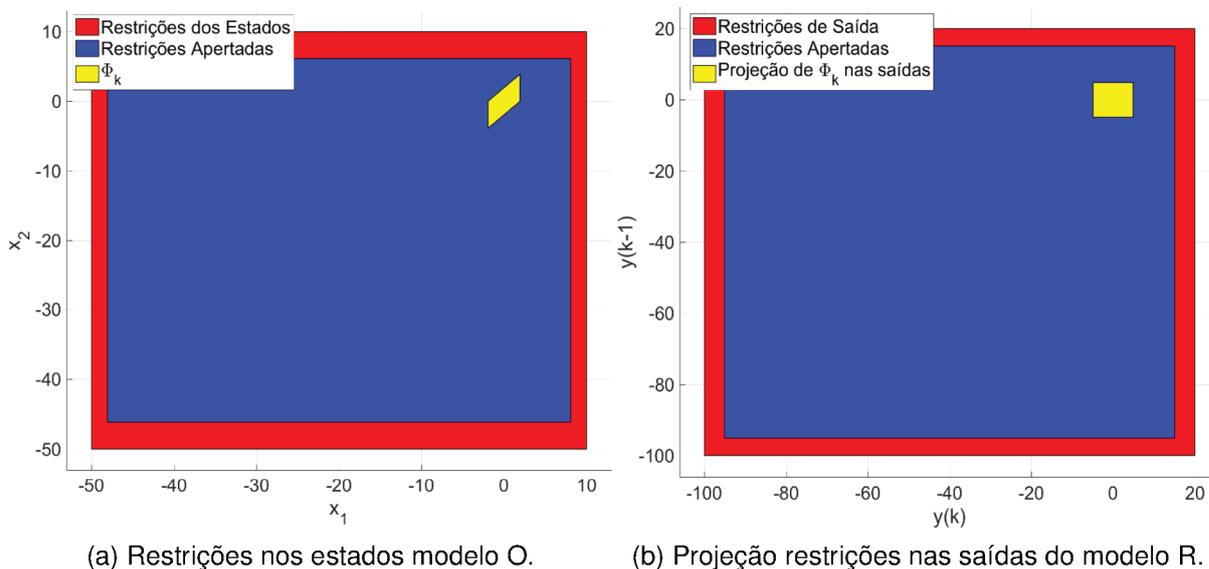
$$\begin{bmatrix} -48,0631 \\ -46,1263 \\ -5,3657 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathcal{X}} \leq \begin{bmatrix} 8,0631 \\ 6,1263 \\ 5,3687 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -95,099 \\ -92,649 \\ -5,098 \\ -5,099 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathcal{X}}_r \leq \begin{bmatrix} 15,0990 \\ 12,649 \\ 5,098 \\ 5,099 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Perceba que as restrições na saída nominal do modelo R são aproximadamente o dobro das restrições nos estados. Isso se deve ao fato de que a saída é dada por $y = [1 \ 1] x$ e que neste exemplo busca-se mostrar que há diferença entre preocupar-se apenas com as restrições nas saídas e não nos estados em si. A Figura 9 mostra uma comparação entre as restrições originais e as apertadas de cada um dos sistemas.

Considerado que os estados do modelo realinhado são formados por $[y(k); y(k-1); u(k-1)]^T$, faria sentido dizer que os dois primeiros estados tem restrições similares já que ambos são saídas. Note que a diferença se dá para restringir a dinâmica da planta de um instante a outro. Pelo mesmo princípio, os estados que representam as entradas devem ter os mesmos limites de \mathcal{U}_r . Pela Equação (124) percebe-se que esses valores são aproximadamente iguais. O motivo para a discrepância entre eles é o fato dos distúrbios entrando nas saídas passadas e nas ações de controle não serem nulos, assumindo valores próximos de zeros conforme a Tabela 2.

Ademais, perceba também que as restrições nas entradas nominais em ambos os modelos são representadas por poliedros parecidos. O objetivo aqui era justamente encontrar um par $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{U}})$ parecido para os dois modelos, de forma que ambos os problemas de otimização fossem similares. Tenha em mente que apenas as restrições apertadas são passadas para o problema de otimização. Essa é a razão para a escolha $|w_{r1}| \leq 2.5$.

Figura 9 – Restrições apertadas para ambos os problemas.

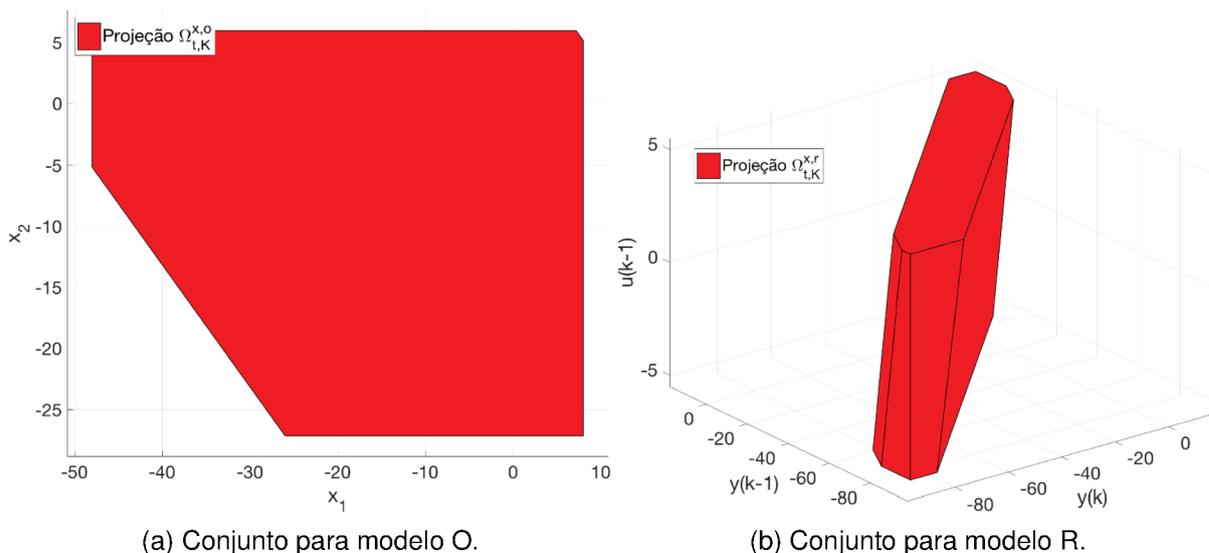


Fonte: Autor.

4.4.1.5 Cálculo do conjunto terminal para rastreamento

Conforme Seção 4.1.2, para o cálculo do conjunto terminal $\Omega_{t,K}^a$ considera-se a malha fechada do sistema aumentado $x_a = (x, \theta)$ dado pela Equação (96). A Figura 10 apresenta a projeção nos estados deste conjunto para cada um dos modelos.

Figura 10 – Conjuntos invariantes para rastreamento - Projeção nos estados.



Fonte: Autor.

Perceba que para este exemplo o conjunto para o modelo realinhado possui quatro dimensões (3 para os estados e 1 para o valor de θ). O número total de estados no NMSS depende do número de zeros e de polos da planta, e isso influencia diretamente

na complexidade dos cálculos do conjunto terminal. Note que o conjunto terminal do modelo R tem mais faces do que o do modelo O e portanto mais desigualdades. Essa é uma das principais desvantagens do modelo realinhado, pois este conjunto afeta o custo computacional *offline* do problema e o número elevado de desigualdades a serem passadas ao MPC afeta também o custo computacional *online*. Como ponto positivo tem-se que este conjunto normalmente é mais simples de calcular, do ponto de vista computacional, do que os conjuntos ϕ_s .

Para este exemplo, a principal diferença entre o uso do modelo O e do modelo R se dá pela caracterização dos pontos de equilíbrio do sistema. Lembrando da Equação (90), os pontos de equilíbrio do modelo tem que satisfazer:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_m - \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_s + \mathbf{B}_m u_s &= \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{C}_m \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_m u_s &= y_s \end{aligned}$$

É importante notar que para uma realimentação por variáveis de estado, u_s é normalmente igual a zero, fato que concorda com a equação acima. Resta achar um \mathbf{x}_s que leve $((\mathbf{A}_m - \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_s)$ a zero enquanto leva $\mathbf{C}_m \mathbf{x}_s$ a y_s . Para o modelo O , é obrigatório que $\mathbf{x}_s = [y_s \ 0]^T$. Isso implica dizer que o controlador sempre tenderá a levar o segundo estado a zero para que o seguimento de referência seja alcançado.

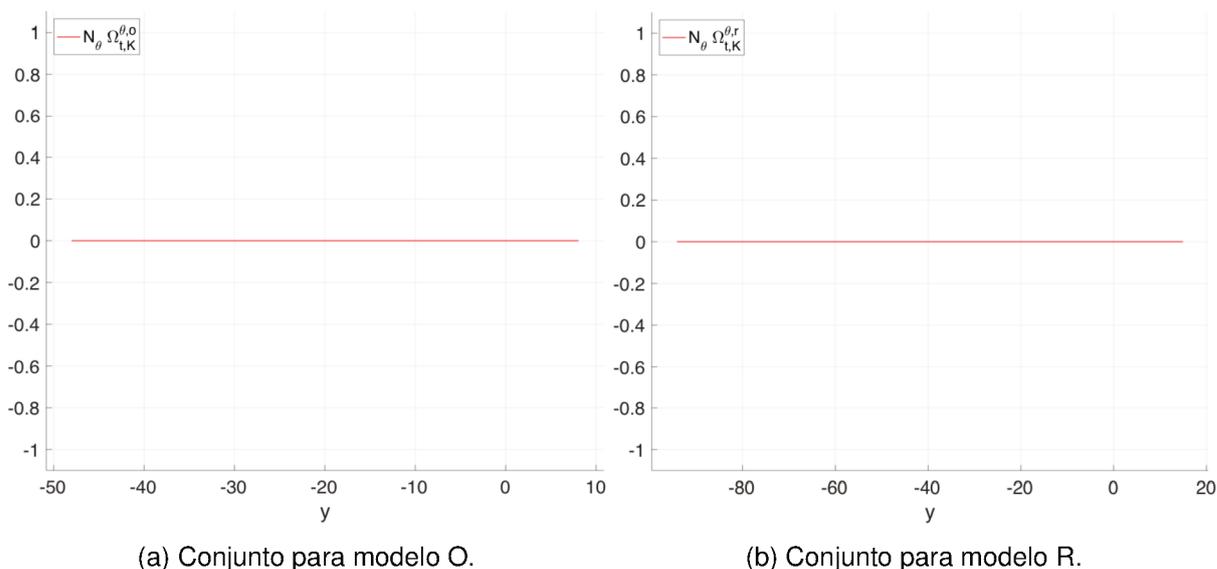
Já para o modelo R , os estados em equilíbrio devem ser $\mathbf{x}_s = [y_s \ y_s \ 0]^T$. Como os dois primeiros estados representam as saídas atual e passada, faz sentido que em regime ambas tenham o mesmo valor. Além disso, isso nos mostra que para o primeiro modelo $x_s(1)$ deve ir a y_s e para o segundo y deve ir a y_s . A diferença entre os dois é que um força um dos estados à referência (e assim leva a saída de forma indireta até lá) e o outro força diretamente a saída rumo à referência. Assim, o modelo realinhado não se preocupa em como casar os estados de forma a atingir a referência, apenas tenta levar a saída até lá.

Ainda nesse contexto, sabendo que $y_s = \mathbf{N}_\theta \theta$ e de posse do conjunto terminal para $\mathbf{x}_a = (\mathbf{x}, \theta)$, pode-se projetar o conjunto Ω_t^a na saída do sistema de cada um dos modelos conforme Figura 11.

A projeção mostrada nada mais é do que os valores que a saída y pode assumir. Em outras palavras, a referência do problema deve estar dentro dessa projeção ou então não é possível rastreá-la. Será mostrado posteriormente que quando isso acontece o controlador leva o sistema o mais próximo possível do alvo. Por enquanto, atente-se para o fato que o conjunto do modelo O é menor do que o conjunto do modelo R .

A diferença entre os conjuntos é uma grande vantagem do modelo realinhado. Perceba que o sistema O só pode ter como saída desejada valores entre $-48,02$ e $8,055$, enquanto o sistema R alcança os valores entre $-91,72$ e $12,52$. A razão se dá no fato de que o valor alvo do segundo estado do modelo O é sempre zero então a saída

Figura 11 – Conjuntos invariantes para rastreamento - Projeção na saída.



Fonte: Autor.

fica confinada às restrições do primeiro estado. Isso não ocorre no modelo R que tem restrições próprias para as saídas.

Como observação final, repare que as restrições iniciais \mathcal{X}_r foram escolhidas sendo $[C_m \mathcal{X}, \mathcal{U}]$. O fato da saída depender dos dois estados aumentou o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio. Entretanto, nada impede que se defina $\mathcal{X}_r = [\mathcal{X}, \mathcal{U}]$ o que nos daria o mesmo conjunto para ambos os modelos.

O ponto a ser destacado aqui é que quando não há preocupação com valores dos estados em si, o modelo realinhado é mais vantajoso. É particularmente melhor quando o número de polos é menor que o número de estados e/ou quando os estados não tem significado físico (e portanto não possuem restrições).

4.4.1.6 Simulação dos Controladores

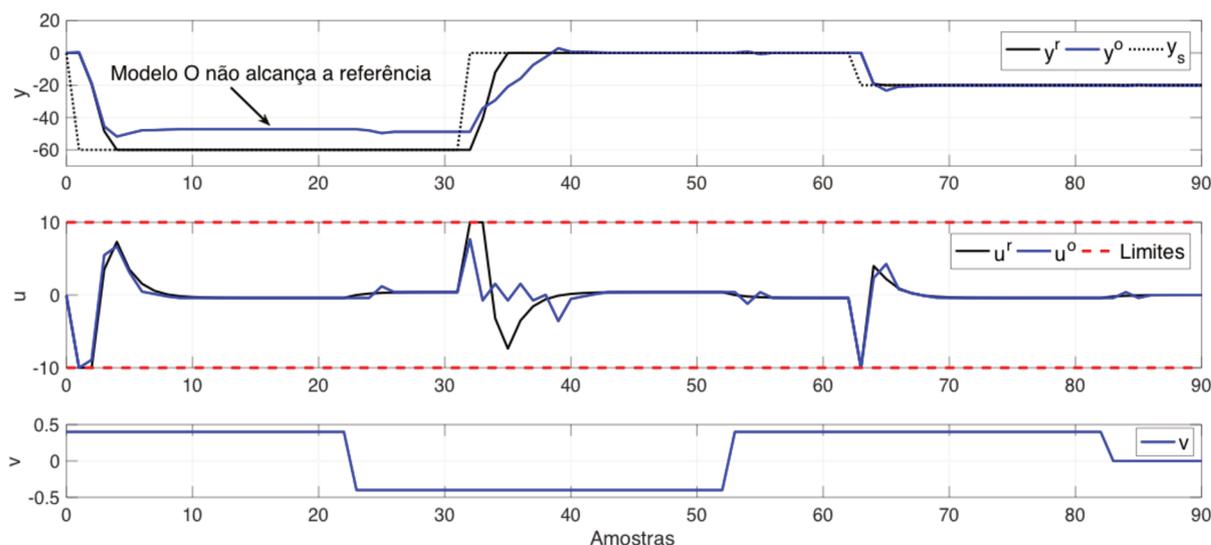
Para comparar e mostrar as propriedades de ambos os controladores, uma simulação foi realizada partindo do sistema com estados iniciais iguais a zero ($\mathbf{x}(0) = [0; 0]$, $u(0) = [0]$ e $\mathbf{x}_r(0) = [0; 0; 0]$). A referência então é deslocada para $y_s = -60$ no instante $k = 2$, depois para $y_s = 0$ no instante $k = 32$ e a seguir para $y_s = -20$ no instante $k = 64$. Essas mudanças ocorrem enquanto os sistemas estão sujeitos a mesma realização do distúrbio v , e para os dois casos tem-se $\mathbf{T} = 10^5 \mathbf{I}_{n_\theta}$. A planta é simulada usando a função de transferência apresentada na Equação (125).

$$P_D(z) = \frac{2z - 1}{z^2 - 2z + 1} \quad (125)$$

A resposta temporal é apresentada na Figura 12. Note que a resposta do modelo

R é mais agressiva do que a resposta para o modelo O , o que faz sentido já que o sistema com observadores considera duas dinâmicas de erro. O modelo O deve limitar o erro entre o sistema nominal e o sistema estimado baseando-se no erro entre o sistema estimado e o sistema real, em outras palavras o tubo de estimação deve estar contido no tubo de controle e portanto o sistema tem menos liberdade e tende a ser mais conservador.

Figura 12 – Resposta temporal dos TRMPC para duplo integrador.



Fonte: Autor.

Ademais, observe que próximo ao instante $k = 32$ o controle do modelo R satura, mas as restrições permaneceram respeitadas. Além disso, as mudanças bruscas no distúrbio não foram tão sentidas na saída do sistema em nenhum dos casos, mas podem ser percebidas na ação de controle.

Note ainda que o sistema O não conseguiu alcançar a primeira referência tal qual esperado conforme Seção 4.4.1.5, mas o controlador leva o sistema o mais próximo possível da mesma. Por fim, ambos conseguem rejeitar o distúrbio e rastrear mudanças nos *setpoints*.

4.4.2 Sistema CSTR

O sistema do Reator Continuamente Agitado, do inglês *Continuous Stirred-Tank Reactor* (CSTR), é outro processo amplamente utilizado na literatura de controle, pois reúne as principais características da maioria dos reatores. O objetivo aqui é apresentar um exemplo em que a aplicação da técnica RMPCT-NMSS falha, mas o TRMPC original pode ser aplicado. Aqui denota-se como original a técnica que assume todos os estados disponíveis. Para tanto considere um sistema formado por um tanque no qual ocorre uma reação exotérmica irreversível de decomposição. O objetivo do

controle é manter a concentração do reagente do produto C_A e a temperatura do tanque T_e no ponto de operação determinado. Para isso, a temperatura do líquido de refrigeração T_c é manipulada, modificando a temperatura do tanque e, portanto, a temperatura na qual a reação é realizada. Conseqüentemente, a reação é acelerada ou desacelerada e a concentração C_A é controlada.

Os estados do modelo são $\mathbf{x} = [C_A; T_e]$ e a entrada do mesmo é dada por $u = T_c$. Considere então modelo proposto por Limón (2002) discretizado em torno da origem dado pelas matrizes da Equação (126).

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 0,9385 & -0,0443 \\ 0,1624 & 1,1365 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} -0,0013 \\ 0,0668 \end{bmatrix} \quad (126)$$

Assumindo que os estados estão disponíveis para medição, ou seja, $\mathbf{C}_m = \mathbf{I}_p$ pode-se aplicar tranquilamente TRMPC. Para teste da técnica TRMPC-NMSS utiliza-se o modelo realinhado desse sistema que é dado pelas matrizes da Equação (127).

$$\mathbf{A}_{m,r} = \begin{bmatrix} 2,0750 & 0 & -1,0738 & 0 & -0,0015 \\ 0 & 2,0750 & 0 & -1,0738 & -0,0629 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{m,r} = \begin{bmatrix} -0,0013 \\ 0,0668 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (127)$$

com $\mathbf{x}_r = [y_1(k); y_2(k); y_1(k-1); y_2(k-1); u(k-1)]^T$.

Perceba que o sistema realinhado possui 5 estados, sendo quatro deles relacionados com as saídas e apenas um relacionado com as entradas. Note ainda que o modelo da Equação (126) controla dois estados com uma ação de controle, já no modelo da Equação (127) seria necessário controlar quatro estados (o último estado é o próprio controle).

Assim, antes de aplicar a técnica TRMPC-NMSS é necessário fazer uma verificação no posto da matriz de controlabilidade do sistema. Sabendo que para o modelo realinhado a matriz $\mathbf{A}_{m,r}$ é dada pela Equação (29), rerepresentada baixo.

$$\mathbf{A}_{m,r} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{r,1} & -\mathbf{A}_{r,2} & \cdots & -\mathbf{A}_{r,na-1} & -\mathbf{A}_{r,na} & \mathbf{B}_{r,2} & \cdots & \mathbf{B}_{r,nb-1} & \mathbf{B}_{r,nb} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{I}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \end{bmatrix}$$

Pode-se dividi-la em blocos para construção de uma matriz auxiliar conforme mostrado na Equação (128).

$$\mathbf{A}_{m,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_{\Delta u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (128)$$

Sendo $\mathbf{Co} \triangleq [\mathbf{B}_{m,r}, \underline{\mathbf{A}}\mathbf{B}_{m,r}, \underline{\mathbf{A}}^2\mathbf{B}_{m,r}, \dots]$, a matriz de controlabilidade do sistema realinhado, então só é possível aplicar o RMPCT-NMSS para sistemas nos quais a Equação (129) é verdadeira.

$$\text{posto}(\mathbf{Co}) \geq \text{posto}(\mathbf{A}_y) \quad (129)$$

Perceba que os valores dos postos de \mathbf{Co} e \mathbf{A}_y dependem da dinâmica da planta e não necessariamente do número de estados do modelo realinhado. De fato, o estudo de caso que será mostrado no próximo capítulo tem um modelo realinhado de seis estados, sendo quatro relacionados com as saídas. Ainda assim, a aplicação do RMPCT-NMSS foi feita com sucesso. A Tabela 4 mostra uma comparação entre os sistemas exemplificados neste capítulo.

Tabela 4 – Comparação entre sistemas.

	Duplo Integrador	CSTR
Número de Estados	3	5
Estados relativos as saídas	2	4
Estados relativos as entradas	1	1
Posto (\mathbf{A}_y)	2	4
Posto (\mathbf{Co})	3	3

Fonte: Autor.

Assim, $\text{posto}(\mathbf{A}_y)$ nada mais é do que uma representação do número de estados relativos às saídas. É necessário ter graus de liberdade suficientes para que seja possível controlar pelo menos esses estados, fato que não acontece neste CSTR.

4.5 ESCOLHA DO CONTROLADOR

A escolha entre qual técnica aplicar deve ser feita caso a caso a depender do sistema a ser controlado. De forma geral, o modelo realinhado é particularmente melhor quando há uma preocupação com as saídas do sistema e não com seus estados. Um resumo para auxiliar nesta decisão é mostrado a seguir.

1. Restrições:

- modelo R : impõe restrições nas saídas e nas entradas. Recomendado para sistemas em que os estados não tenham significado físico ou não haja preocupação direta com os valores dos mesmos;
- modelo O : impõe restrições nos estados e nas entradas. Recomendado para sistemas em que existam limites (normalmente físicos) nos estados que precisam ser contidos.

2. Escolha dos Ganhos:

- modelo R : só é preciso escolher um ganho $\mathbf{K}_{dr,r}$, que lida com um distúrbio w_r . Recomenda-se escolher o ganho utilizando as LMIs apresentadas na Equação (115). A complexidade do problema aumenta em sistemas de grande porte ou sistemas que ganhem muitos estados extras. Alternativamente, qualquer ganho que estabilize o sistema pode ser escolhido. Isso não é recomendado, pois estes não levam os efeitos do distúrbio em consideração;
- modelo O : necessário a escolha de dois ganhos \mathbf{K}_{dr} e \mathbf{L} para lidar com os distúrbios w e v . Deve-se escolher o valor de \mathbf{L} primeiro, pois este afeta as duas dinâmicas do sistema. Posteriormente, escolhe-se o ganho de rejeição \mathbf{K}_{dr} . Novamente, quaisquer ganhos estabilizantes podem ser escolhidos, mas recomenda-se utilizar ganhos robustos. As LMIs na Equação (115) podem ser utilizadas, mas devem ser modificadas para se adequar ao problema.

3. Cálculo da aproximação do conjunto RPI mínimo ϕ : para sistemas de médio e grande porte com número de estados $n > 5$, o s mais acessível normalmente está entre um e três. Esse valor pode não ser grande o suficiente para garantir que o RPI calculado seja uma aproximação boa do RPI mínimo. Qualquer valor maior de s já tem custo elevado (o *Matlab* pede aproximadamente 48 Gigabytes(Gb) de memória *RAM* para o problema de tanque quádruplo quando $s = 5$ para determinados ganhos, o que torna a resolução do problema inviável). Assim:

- modelo R : para o modelo realinhado, qualquer sistema um pouco mais complexo já possui 5 estados, ou seja, é necessário calcular o casco do zonotópo encontrado e depois encontrar o RPI máximo contido dentro deste de forma a

encontrar um conjunto mais simples. As restrições apertadas saem de forma mais fácil devido ao uso dos zonotopos;

- modelo O : para sistemas pequenos, com poucos estados, pode-se encontrar um valor de s suficientemente grande. Entretanto, é necessário calcular dois conjuntos, sendo que o segundo depende do primeiro. Além disso, não é possível usar zonotopos e conseqüentemente o cálculo das restrições apertadas é mais complexo. Para sistemas maiores é necessário cautela ao aproximar o valor desses conjuntos pois o erro será propagado.

4. **Cálculo do Conjunto para Rastreamento**: a mesma estratégia é usado para ambos os problemas. Portanto, as diferenças entre as técnicas são:

- modelo R : tem número maior de estados, o que aumenta o tempo computacional e aumenta o número de desigualdades representando o conjunto;

- modelo O : normalmente tem o mesmo número de desigualdades do TRMPC original (original refere-se a técnica quando todos os estados estão disponíveis). É mais simples de ser calculado quando comparado ao modelo realinhado.

5. **MPC**: ambos utilizam uma caracterização em θ o que permite resolver o problema de otimização com o menor número de variáveis de decisão possíveis. Em geral, a única diferença entre os dois está no número de desigualdades representando os diferentes conjuntos. Assim, tem-se que:

- modelo R : quanto mais estados, mais estados preditos. Um conjunto terminal mais complexo significa mais tempo para resolver o problema de otimização, o mesmo se diz de ϕ_{Kdr} ;

- modelo O : tem menos estados, entretanto possui mais restrições e mais conjuntos a serem utilizados o que aumenta a complexidade do problema.

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

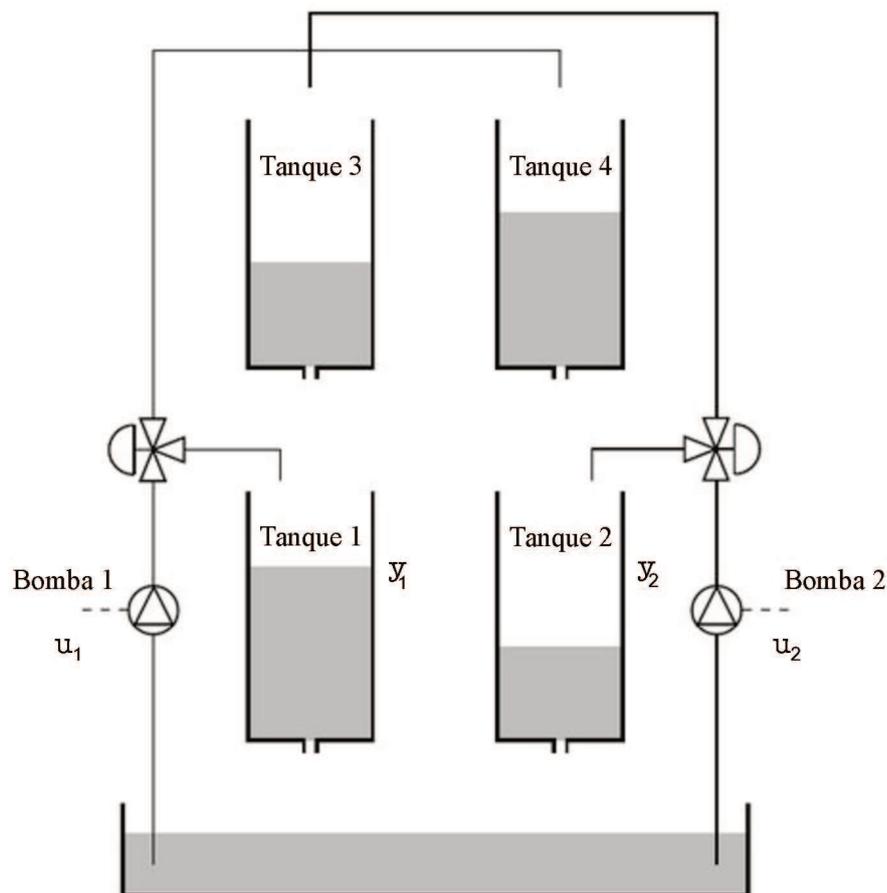
Tem-se então que o TRMPC-NMSS parece uma alternativa válida ao uso do TRMPC com observadores. Entretanto, como resultado mostrou-se que nem sempre é possível ou interessante aplicá-lo. A escolha entre qual técnica aplicar deve ser feita caso a caso a depender do sistema a ser controlado.

5 ESTUDO DE CASO - SISTEMA DE TANQUE QUÁDRUPLO

Este capítulo aplica ambos os RMPCs desenvolvidos nos capítulos anteriores a um estudo de caso particular. O sistema adotado é o processo de tanque quádruplo apresentado em (JOHANSSON, 2000).

Esse processo é uma planta multivariável de tanques interconectados que podem ser modelados por um sistema dinâmico não linear sujeito a restrições nos estados e nas entradas. Uma propriedade importante desta é que ela pode ser configurada para funcionar em pontos de operação caracterizados por zeros multivariáveis (fase mínima e não mínima). A Figura 13 mostra um diagrama esquemático do processo. O objetivo é controlar o nível nos dois tanques inferiores (variáveis de processo y_1 e y_2) usando os fluxos das duas bombas manipuladas (u_1 , u_2).

Figura 13 – O processo do tanque quádruplo.



Fonte: Johansson (2000).

As equações diferenciais ordinárias que governam o sistema são dadas na

Equação (130).

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} u_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} u_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} u_2 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} u_1
 \end{aligned} \tag{130}$$

sendo A_1, A_2, A_3, A_4 as seções transversais de cada tanque, a_1, a_2, a_3, a_4 as seções transversais do orifício de saída de cada tanque, h_1, h_2, h_3, h_4 os níveis de cada tanque, k_1, k_2 os ganhos da bomba, γ_1, γ_2 parâmetros da válvula e g a aceleração da gravidade.

Os valores dos parâmetros do processo são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros do processo.

A_1, A_3	$[cm^2]$	28
A_2, A_4	$[cm^2]$	32
a_1, a_3	$[cm^2]$	0,071
a_2, a_4	$[cm^2]$	0,057
g	$[cm/s^2]$	981

Fonte: Johansson (2000).

O sistema foi linearizado em dois pontos operacionais diferentes, um com características de fase mínima e um com características de fase não mínima. Os pontos operacionais escolhidos correspondem aos valores de parâmetros mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros de linearização.

		Ponto 1 (P1)	Ponto 2 (P2)
(h_1^0, h_2^0)	$[cm]$	(12, 4; 12, 7)	(12, 6; 13, 0)
(h_3^0, h_4^0)	$[cm]$	(1, 8; 1, 4)	(4, 8; 4, 9)
(u_1^0, u_2^0)	$[V]$	(3, 00; 3, 00)	(3, 15; 3, 15)
(k_1, k_2)	$[cm^3/(V \cdot s)]$	(3, 33; 3, 35)	(3, 14; 3, 29)
(γ_1, γ_2)		(0, 70; 0, 60)	(0, 43; 0, 34)

Fonte: Johansson (2000)

O sistema é estável em malha aberta com dois zeros multivariáveis em qualquer ponto de operação. A natureza desses zeros é determinada pelos parâmetros das válvulas (γ_1 e γ_2). Este sistema foi escolhido como estudo de caso pois é um *benchmark* para testes de controladores. Perceba que o tanque quádruplo possui vários aspectos que o tornam interessantes para fins de pesquisa, entre eles:

- o modelo linearizado do processo possui zeros multivariáveis que podem ter fase mínima ou não mínima, bastando trocar as válvulas de três vias;
- todos as variáveis são mensuráveis;
- as saídas são fortemente acopladas;
- é uma planta modelada como um sistema não linear incerto;
- possui restrições nos estados e nas entradas da planta.

Assim, é possível usar esta planta para testar os algoritmos RGPC e o NMSS-TRMPC propostos nesse trabalho. Para um teste mais realístico, a função *ode45* do *Matlab* foi usada para simular o comportamento do processo não linear de acordo com a Equação (130).

5.1 RGPC APLICADO AO TANQUE QUÁDRUPLO

Pode-se linearizar o modelo da Equação (130) utilizando os dados mostrados na Tabelas (5) e (6). Assim, chega-se nas matrizes de funções de transferência em tempo contínuo correspondentes a esses pontos. Essas são dadas pelas Equações (131) e (132).

$$P1(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,6}{1+62s} & \frac{1,5}{(1+23s)(1+62s)} \\ \frac{1,4}{(1+30s)(1+90s)} & \frac{2,8}{1+90s} \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$P2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{1+63s} & \frac{2,5}{(1+39s)(1+63s)} \\ \frac{1,5}{(1+56s)(1+91s)} & \frac{1,6}{1+91s} \end{bmatrix} \quad (132)$$

com

$$\Omega = (P1, P2) \quad (133)$$

Assim, as constantes de tempo dominantes são semelhantes para ambos os pontos operacionais. Além disso, há uma pequena diferença entre os ganhos estáticos de $P1$ e $P2$ condições de operação.

O cenário escolhido para simulação iniciou o sistema precisamente no ponto de operação 1, com os níveis iniciais do tanque dados na Tabela 6. Após cerca de 100 segundos, os dois parâmetros da válvula foram alterados abruptamente para coincidir com os do ponto de operação 2, o que significa que os ganhos da bomba também diminuiram levemente. Ao mesmo tempo, alterou-se as referências do sistema,

requerendo-o a elevar o nível no primeiro tanque e reduzi-lo no segundo. A referência foi definida como $y_s = [14; 12, 2]$ centímetros. Note que para essa situação, os algoritmos aqui testados devem lidar com uma mudança de ponto de operação e de referência ao mesmo tempo. Tal mudança é demasiadamente brusca, numa situação mais realística o ponto de operação seria alterado e depois uma nova referência seria passada ao controlador. O objetivo aqui é demonstrar que mesmo para um cenário pessimista o RGPC funciona.

Para testar os algoritmos GPC e RGPC, Ω apresentado na Equação (133) foi escolhido como o conjunto de modelos, com $P1$ como modelo nominal θ_N e o sistema real passando de um ponto de operação para o outro (equivalente a mudar $P1$ para $P2$). Um tempo de amostragem de 10 segundos foi usado para discretizar as duas plantas. As restrições na ação de controle foram escolhidas para serem representativas do modelo não linear. Portanto, as restrições para o controlador são representadas por $[0, 15; 0, 15] \leq \mathbf{u} \leq [9, 85; 9, 85]$ na ação de controle e por $[-0, 35; -0, 35] \leq \Delta \mathbf{u} \leq [0, 35; 0, 35]$ em seu incremento.

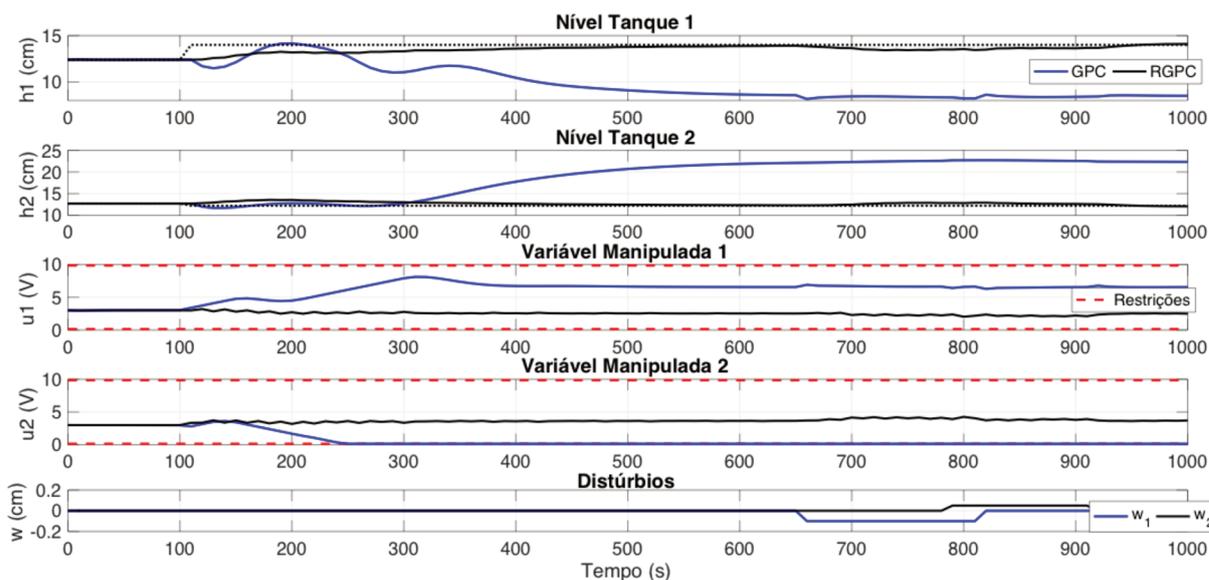
Primeiramente, um GPC padrão foi projetado. As matrizes de ponderação foram escolhidas como $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, com o horizonte de predição sendo $N_p = 50$ e o horizonte de controle $N_c = 10$. Em seguida, o RGPC foi testado usando os mesmos parâmetros que o GPC padrão, com a adição dos pesos $\mathbf{S} = 10^3 \mathbf{I}_2$ e as restrições apresentadas no Capítulo 3. Faz-se necessário usar duas referências artificiais, uma para cada saída da planta. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 14, onde a resposta RGPC é representada pelas linhas pretas, o GPC pelas azuis, as referências pelas linhas pontilhadas e os limites do controle pelas linhas tracejadas.

Pela Figura 14 fica claro que o algoritmo GPC padrão falha e não consegue rastrear a referência. Além disso, observe que uma de suas entradas rapidamente fica saturada. A razão disso reside nas diferenças entre os dois modelos, com o modelo verdadeiro tendo características de fase não mínima. De fato, $P2$ tem um zero de transmissão no semiplano direito, o que deteriora consideravelmente o desempenho do sistema em malha fechada, como mostrado em Johansson (2000). Tais características não estão presentes no modelo nominal.

Portanto, devido ao erro de modelagem, o GPC padrão faz o oposto do que deve ser feito, diminuindo o nível no Tanque 1 e aumentando no Tanque 2, o que indica um comportamento instável. Note que a única razão pela qual a ação de controle não vai ao infinito é devido aos limites físicos da planta. Se as bombas tivessem capacidade ilimitada e os tanques tivessem altura ilimitada, o GPC padrão conduziria a saída de malha fechada ao infinito. Assim, um GPC padrão com esta sintonia não é robusto o suficiente para esta planta.

É interessante mostrar que ambos os algoritmos fazem previsões corretamente, mas o GPC falha pois não tem acesso ao modelo que corresponde à planta no ponto

Figura 14 – Comparação da saída da planta e sinal de controle entre GPC e RGPC.



Fonte: Autor.

operacional 2. A Tabela 7 mostra os pontos de equilíbrio de ambos os modelos. Sabe-se que o sistema parte de $\mathbf{u} = [3; 3]$ (controle no ponto de operação), e portanto os valores de \mathbf{u}_s dos modelos vão em direções opostas devido aos zeros de transmissão do sistema. Esses valores explicam o porquê de o GPC mandar ações de controle que fazem o oposto do que deveria ser feito.

Tabela 7 – Pontos de equilíbrio no conjunto Ω .

	P1(s)	P2(s)
\mathbf{y}_s	[14,000; 12,200]	[14,000; 12,200]
\mathbf{u}_s	[3,500; 2,662]	[2,514, 3,659]

Fonte: Autor.

Em contraste, o RGPC consegue eventualmente rastrear as referências. No entanto, devido às diferenças entre modelos usados para projeto, a ação de controle se torna um pouco conservadora. Como resultado, a resposta de malha fechada vai lentamente para o estado estacionário, com oscilações na ação de controle, especialmente no início da simulação. Em outras palavras, há uma perda de desempenho para garantir estabilidade robusta.

Ademais, testou-se também a rejeição a distúrbios persistentes no algoritmo RGPC. Para tanto, próximo a 660 segundos um distúrbio entra na primeira saída da planta e permanece por 150 segundos. Concomitantemente, um distúrbio na segunda saída aparece em $t = 780$ segundos e permanece por 130 segundos. Como o RGPC é

baseado no GPC, este consegue rejeitar ambas as perturbações sem maiores dificuldades.

É importante frisar que para esse sistema o otimizador deve ser capaz de prover uma ação de controle em um tempo hábil de dez segundos (tempo de amostragem da planta). Assim, a sintonia do controlador deve levar isto em consideração. Tenha em mente que valores de N_u ou S elevados podem aumentar o custo computacional do problema e assim aumentar o tempo computacional para resolvê-lo.

Vale ressaltar que o método proposto é especialmente vantajoso quando apenas as entradas e saídas do sistema podem ser medidas. Se um controlador com realimentação de estados for aplicado e nem todos os estados estiverem disponíveis para medição, um observador deverá ser utilizado.

Conforme explanado no Capítulo 3, o projeto de observadores para o caso multi-modelo não é trivial. Para o caso estudado aqui, como se lida com um sistema não linear, seria necessário projetar um estimador para a função da Equação (130). Perceba pela Tabela 7 que este não pode simplesmente usar as saídas para estimar os estados da planta, pois uma mesma saída equivale a diferentes entradas dependendo das aberturas das válvulas manuais. Assim, o estimador de estados deve ser projetado em função das saídas da planta, das entradas, dos parâmetros das válvulas e dos distúrbios presentes nas saídas.

Um EKF pode ser usado para tal fim, mas é necessário cuidado principalmente para que o mesmo não confunda um distúrbio grande nas saídas com uma mudança no ponto de operação. Perceba que ambos devem ser estimados e que ambos causam alterações nas saídas da planta. Assim, um total de seis variáveis ($w_1, w_2, \gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$) devem ser estimadas usando as informações a respeito de outras quatro ($u_1, u_2, y_1 = h_3, y_2 = h_4$). Esse projeto pode ser ainda mais complexo a depender do sistema utilizado.

Depois disso, deve-se atentar para o fato de que as provas de robustez agora dependeriam dos estados estimados e não dos estados reais (ou das saídas, no caso do RGPC). Assim, a dinâmica do EKF deve ser considerada pelo controlador.

Neste exemplo, novamente utilizou-se o *solver IPOPT* para resolver o problema de otimização e o *parser YALMIP* para lidar com as restrições. O algoritmo GPC padrão utilizou o *GUROBI* como *solver*.

5.2 RMPCT-NMSS APLICADO AO TANQUE QUÁDRUPLO

Primeiramente, utiliza-se a matriz de funções de transferência da Equação (132) discretizada com $T_s = 10$ segundos para conseguir o modelo realinhado da planta. A planta $P2$ foi escolhida, em detrimento de $P1$, pois esta possui um zero de transmissão de fase não-mínima. Portanto, é mais interessante testar a técnica neste ponto de operação.

O modelo original (mínimo) em espaço de estados possui quatro estados. Já o modelo realinhado possui seis estados (4 estados relacionados com as saídas e 2 relacionados com as entradas) e é representado pelas matrizes $(\mathbf{A}_{m,r}, \mathbf{B}_{m,r}, \mathbf{C}_{m,r})$ dadas pelas Equações (134-136).

$$\mathbf{A}_{m,r} = \begin{bmatrix} 1,628 & 0 & -0,6606 & 0 & -1,726 & 0,3603 \\ 0 & 1,733 & 0 & -0,75 & 0,2157 & -1,385 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

$$\mathbf{B}_{m,r} = \begin{bmatrix} 2,23 & 0,2374 & 0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0,4137 & 1,656 & 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}^T \quad (135)$$

$$\mathbf{C}_{m,r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Observe que para evitar possíveis problemas de condicionamento numérico, o modelo dado pelas Equações (134-136) é o modelo realinhado normalizado. Assim, os estados considerados são mostrados a seguir:

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^o}{10}, \quad \mathbf{y}_r = \mathbf{y} - \mathbf{y}^o. \quad (137)$$

em que \mathbf{u}_r e \mathbf{y}_r são vetores representando as entradas e saídas do modelo realinhado com estados dados por $\mathbf{x}_r = [y_1(k); y_2(k); y_1(k-1); y_2(k-1); u_1(k-1); u_2(k-1)]$, \mathbf{u} são as entradas do processo real, \mathbf{y} suas saídas, e por fim, \mathbf{u}^o e $\mathbf{y}^o = [h_1^o; h_2^o]$ representam o ponto onde o sistema foi linearizado conforme Tabela 6.

É de suma importância comentar que essa normalização não foi feita para a abordagem RGPC e que a técnica TRMPC-NMSS pode ser aplicada sem seu uso. Todavia, o modelo foi normalizado para facilitar os cálculos do ganho de controle e do conjunto RPI associado a este enquanto evita erros de condicionamento numérico (principalmente durante a resolução das LMIs apresentadas na Equação (115)). Note também que as matrizes do modelo realinhado são esparsas, o que pode amplificar ainda mais o problema de condicionamento numérico.

Assim, a aplicação da técnica TRMPC-NMSS para rastreamento apresentada no Capítulo 4, precisa que o modelo linear acima esteja sujeito a distúrbios aditivos. Neste modelo, as principais fontes de distúrbios são: o erro de aproximação da linearização e as possíveis dinâmicas dos atuadores que não foram consideradas. Os distúrbios nas saídas foram retirados de Alvarado (2007) e são dados por $|w_y| \leq 5 \cdot 10^{-3}$.

Note que a planta utilizada aqui é de escala reduzida, ou seja, possui tanques e bombas menores do que a de Alvarado (2007), e portanto o distúrbio real deveria ser menor.

O controlador foi projetado seguindo o método proposto na Seção 4.3. As ponderações foram escolhidas como $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_m^T \mathbf{C}_m$ e $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2 \cdot 10^{-2}$. Para o cálculo de \mathbf{K}_{dr} , a Equação (115) foi utilizada para um $\rho = 0.99$ e um $\lambda = 0.9$. O valor de \mathbf{K}_{dr} usado é dado na Equação (138).

$$\mathbf{K}_{dr} = \begin{bmatrix} 3,35 & -6,055 & -2,494 & 3,93 & -7,644 & 8,619 \\ -1,637 & 2,994 & 0,7453 & -2,883 & 2,775 & -5,73 \end{bmatrix} \quad (138)$$

Note que existem vários ganhos \mathbf{K}_{dr} para rejeição de distúrbio, mas aqui os valores de ρ e de λ foram escolhidos de forma a encontrar um ganho que implique em um s pequeno. Para este estudo de caso, $s = 10$. Já o ganho $\bar{\mathbf{K}}$ foi determinado por meio de um LQR que estabiliza o sistema incerto, utilizando as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} . Este ganho é mostrado na Equação (139). A matriz \mathbf{T} assume valor de $\mathbf{T} = 10^4 \mathbf{I}_{n\theta}$ e o horizonte de controle tem um valor $N = 5$.

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0,002815 & 1,078 & 0,1667 & -0,8059 & 0,6672 & -1,579 \\ 0,8855 & -0,6267 & -0,5831 & 0,7225 & -1,731 & 1,652 \end{bmatrix} \quad (139)$$

Com $s = 10$ não foi possível calcular o conjunto $\phi_{K_{dr}}$, apenas uma aproximação. Para garantir que essa aproximação, doravante chamado de ϕ_a , é suficientemente parecida com $\phi_{K_{dr}}$ os efeitos de ambos os conjuntos nas restrições apertadas foram comparados. Recorde que não é necessário ter o conjunto $\phi_{K_{dr}}$ para conhecer seus efeitos, já que a matriz \mathbf{H}_z do zonotopo é conhecida conforme pode ser visto no capítulo seis da tese de Alvarado (2007). Essa comparação foi feita para se ter uma métrica a respeito de ϕ_a . Assim, este conjunto será utilizado pelo MPC na restrição $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in (\phi_{K_{dr}} \cong \phi_a)$. O objetivo dessa aproximação é também diminuir o número de desigualdades representando tal conjunto.

Utilizando o zonotopo, tem-se $[-0,1544; -0,2173] \leq \bar{\mathbf{u}}_r \leq [0,8694; 0,9323]$. Para o conjunto ϕ_a tem-se $[-0,1427; -0,2115] \leq \bar{\mathbf{u}}_r \leq [0,8577; 0,9265]$. Note que os valores são para o sistema linear e são levemente diferentes. Frisa-se que durante a realização deste trabalho foram achadas métricas de erro para valores de s computacionalmente viáveis, mas nenhuma para quando não for.

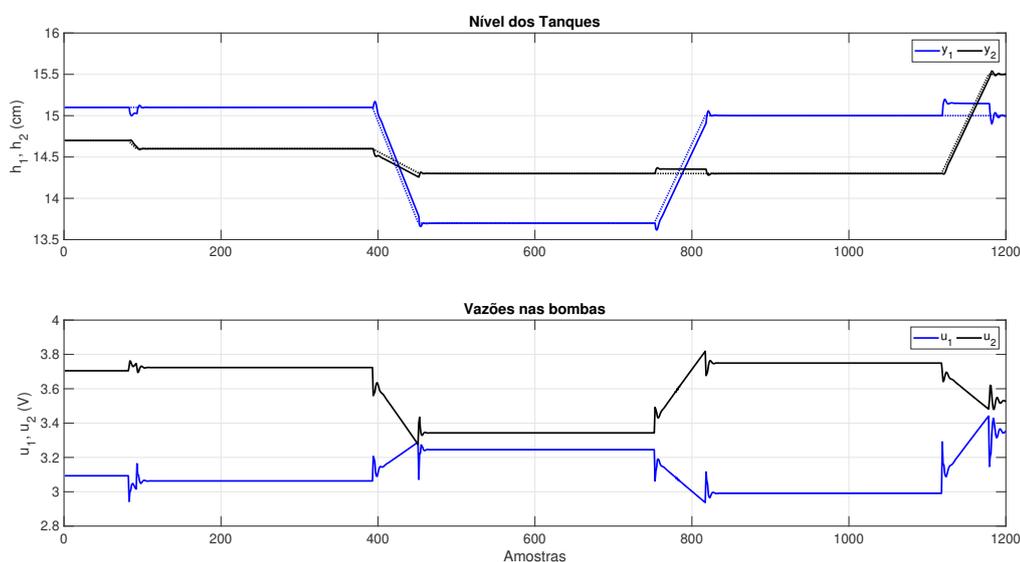
Por fim, como o distúrbio neste caso é persistente, é necessário utilizar um estimador para lidar com os erros de seguimento no sistema real. Para este caso, o estimador é dado por uma combinação convexa mostrada na Equação (140).

$$\hat{\mathbf{w}}(k) = \lambda_c \hat{\mathbf{w}}(k-1) + (1 - \lambda_c) (\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}_{m,r} \mathbf{x}(k-1) - \mathbf{B}_{m,r} \mathbf{u}(k-1)) \quad (140)$$

sendo $\lambda_c = 0,98$.

A Figura 15 mostra as trajetórias de saída da simulação (linhas sólidas) rastreando as referências (linhas pontilhadas) e a evolução temporal das ações de controle. Primeiramente, pode-se observar o efeito dos zeros de transmissão de fase não-mínima na saída do sistema. Além disso, observe que o controlador deve rejeitar perturbações enquanto leva a saída da planta para o *setpoint* desejado. Entretanto, o ganho K_{dr} é escolhido apenas visando a resposta aos distúrbios do sistema. Neste exemplo, o ganho utilizado rejeita rapidamente qualquer distúrbio, mas causa picos na resposta ao degrau do sistema. Essa situação é típica de qualquer controle clássico e ocorre também com o controle TRMPC, já que este controlador utiliza uma realimentação de estados clássica como lei de controle auxiliar. Assim, para suavizar a agressividade do ganho K_{dr} na resposta ao degrau, um filtro de referência do tipo rampa é usado neste exemplo. Tem-se então um controlador com dois graus de liberdade que utiliza esse filtro para atenuar a influência de alterações no sinal de referência no sinal de controle. Note que, para um caso prático, se não for possível colocar tal filtro, então a resposta em malha fechada da planta apresentaria picos bruscos mas ainda respeitaria todas as restrições do problema.

Figura 15 – Resposta temporal dos TRMPC para o tanque quádruplo.



Fonte: Autor.

Ademais, mudanças bruscas nos distúrbios também podem ser suavizadas utilizando a Equação (140). Perceba que o distúrbio aqui é causado principalmente pela diferença entre a planta não linear, apresentada na Equação (130), e o modelo

utilizado no MPC. Assim, conforme explanado na Equação (100), a estimação do distúrbio é feita para corrigir o erro em regime permanente causado por essa diferença.

5.2.1 Considerações Gerais sobre a técnica TRMPC

Para esse estudo de caso, a incerteza utilizada no algoritmo RGPC poderia ser passada como distúrbio aditivo a fim de utilizar o TRMPC para o caso multi-modelo conforme pode ser visto em Gesser (2018). No entanto, essa incerteza não poderia ser transformada em zonotopo, o que dificulta o cálculo do conjunto ϕ_{Kdr} . Ainda assim, foi testado o que aconteceria se o conjunto fosse calculado baseado em um s que garanta um limite de erro pequeno. O resultado foi que o *software MATLAB* e a ferramenta *MPT3* retornam mensagens de erro com estimativas da quantidade de memória *RAM* necessária para realizar os cálculos requeridos. Normalmente, essas estimativas variavam entre 9 Gb e 50 Gb. Mas, para o caso específico da incerteza multi-modelo, a memória requerida chegou a 60000 Gb. Isso acontece pois o distúrbio causado pelo uso de um modelo diferente é bem maior do que o aplicado anteriormente e portanto demanda mais poder computacional.

O mesmo problema ocorreu quando se utilizou o TRMPC com observador apresentado na Seção 4.2: a incerteza não pode ser simplificada por um zonotopo (devido ao acoplamento das dinâmicas de erro) e o valor de s requerido não é computacionalmente viável. Portanto, também não foi possível calcular o conjunto para o caso com observador.

Apesar da técnica TRMPC-NMSS ter sido aplicada ao modelo com sucesso, nota-se que o distúrbio considerado é bem pequeno quando comparado com a magnitude das saídas do sistema e que distúrbios maiores requerem um valor de s maior. Soma-se a isso o fato do modelo realinhado ter mais estados do que um modelo mínimo. Para o sistema estudado aqui não houve diferença significativa de tamanho entre o modelo mínimo e o não-mínimo, mas para outras plantas esse pode não ser o caso (a coluna debutanizadora pode ser representada por um espaço de estados de dimensão oito e seu modelo realinhado tem catorze estados).

Note que o tanque quádruplo é um modelo interessante para testes de laboratório. Porém, numa situação prática, os distúrbios não são tão pequenos e o modelo possui mais estados. Ambos os fatores contribuem para um aumento no nível de complexidade do conjunto mRPI requerido. Perceba que a literatura atual utiliza apenas sistemas com um número bem limitado de estados e com distúrbios usualmente pequenos. O sistema linear mais interessante encontrado durante a realização deste trabalho foi o de Buckner e Lampariello (2018), este possui seis estados e sujeito a vários distúrbios. Entretanto, tem-se acesso a todos os estados do sistema o que torna o projeto de controle um pouco mais fácil visto que não é necessário projetar um observador.

Conclui-se então que em teoria a técnica é elegante e funcional sempre com garantias de robustez. Na prática ainda não é possível aplicá-la, necessitando de mais estudos e formas mais simples para cálculo do conjunto ϕ_{Kdr} . Note que a dinâmica da planta utilizada, suas restrições e seus distúrbios ditam a forma desse conjunto. Além disso, a dimensão do mRPI é equivalente ao número de estados do sistema, o que significa um nível de complexidade computacional elevadíssimo para plantas com muitos estados. Portanto, o cálculo desse conjunto é mais complexo quando não se tem acesso a seus estados, seja pelo aumento do número de estados quando se usa o modelo realinhado ou pela dinâmica de erro extra quando se usa um observador. Perceba que a técnica não pode ser usada sem o valor de ϕ_{Kdr} , deixando explícito que esse conjunto é ao mesmo tempo a parte mais importante (representando o tubo em si) e a principal fraqueza da técnica.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram aplicadas duas abordagens de RMPCs com o objetivo de testar quais poderiam ser usados em aplicações mais práticas. Os métodos escolhidos foram o RMPC com custo contrativo e o RMPC baseado em tubos.

O trabalho começa introduzindo os controladores preditivos e as duas formulações de modelo utilizadas aqui. A seguir define-se o que é um controlador robusto. Notou-se então que a maioria destes controladores assume que a planta é representada por um modelo em espaço de estados e que todos esses estão disponíveis para medição. Isso não acontece na prática e é o *gap* na literatura que este trabalho tenta explorar. Para tanto, uma adaptação desses RMPCs foi feita de forma a alimentar os algoritmos apenas com dados mensuráveis, usualmente dados de entrada e saída, mantendo as garantias de estabilidade robusta.

O capítulo 3 apresentou um controlador robusto para plantas estáveis em malha aberta utilizando a formulação GPC, acrescentando uma restrição de custo contrativo e descrevendo a incerteza como multi-modelo. Desta forma, este controlador pode ser utilizado em diferentes pontos de operação de uma planta não linear sem necessidade de resintonia. Nos exemplos apresentados neste documento diferentes erros nos modelos foram testados, como erro no atraso, no ganho e na dinâmica das plantas. Notou-se também que a adaptação proposta apresenta diversas vantagens sobre as formulações utilizadas na literatura, que facilitariam a escalabilidade do algoritmo. No geral, este método aparenta estar num nível de desenvolvimento avançado o suficiente para sua aplicação prática.

O capítulo 4 apresentou um controlador robusto usando a formulação NMSS, utilizando a abordagem de robustez baseada em tubos e descrevendo a incerteza como incerteza aditiva. Conclui-se que este controlador tem um nível de complexidade similar quando comparado com esta mesma abordagem utilizando estimadores de estados. Entretanto, a adaptação apresentada permite utilizar várias das simplificações utilizadas no método original, o que não ocorre com a presença dos estimadores supracitados. Assim, se os estados do problema não estão disponíveis então a adaptação feita é vantajosa. Apesar disso, como se comenta na sequência, ainda existem dificuldades para sua utilização prática.

Para o teste das duas técnicas apresentadas em um sistema mais próximo da realidade industrial, o capítulo 5 apresentou um estudo de caso baseado em um sistema não linear multivariável para controle de nível em um processo de tanque quádruplo. Notou-se que, conforme esperado, o RPGC não teve dificuldades para controlar a planta mesmo na presença de um erro de modelo complicado. No caso do TRMPC-NMSS, a incerteza é bem menor que a do RGPC. Apesar disso, houve várias complicações para resolução do problema. Observou-se que o cálculo do conjunto RPI

é a principal fraqueza da técnica, pois demanda um alto custo computacional. Ademais, o cálculo do ganho de rejeição do sistema é utilizado no RPI, portanto deve levar em consideração os distúrbios. Todavia, mesmo para distúrbios pequenos, esse ganho e consequentemente o RPI não são calculados de forma direta. Conclui-se então que o TRMPC-NMSS tem sintonia complexa e custo computacional elevado, pelo menos na inicialização do controlador. Assim, essa abordagem ainda não está em um nível adequado para aplicação prática.

Por fim, este trabalho mostrou que, para plantas estáveis, o RGPC leva vantagem sobre o TRMPC-NMSS quando não se tem acesso aos estados do sistema. Isso se deve principalmente ao custo elevado para cálculos dos conjuntos RPIs e pela dificuldade em sintonizar o algoritmo TRMPC. Por outro lado, o RGPC desenvolvido aqui não pode ser aplicado a plantas instáveis, o que é uma vantagem do TRMPC. Apesar disso, as desvantagens relacionadas com os conjuntos ainda se fazem presentes independente do tipo de planta.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos neste trabalho trouxeram adaptações a técnicas de controle robusto de forma a tentar aplicá-las em uma situação mais prática utilizando apenas dados mensuráveis de entrada e saída no modelo do sistema. Com o objetivo de explorar ainda mais os benefícios do controle robusto para aplicá-los em diversos problemas, alguns trabalhos podem ser propostos, a fim de enfrentar as limitações vistas nesta dissertação. A seguir estão elencados alguns deles:

- expandir a técnica RGPC: a principal limitação do RGPC é justamente não poder ser usado para sistemas instáveis, portanto é interessante tentar aplicá-lo para este tipo de planta. Entretanto, observe que a técnica do custo-contrativo foi originalmente proposta apenas para plantas estáveis de forma a manter a função custo limitada. Para manter esta função sempre limitada para sistemas que utilizam apenas dados de entrada e saída é necessário saber que parte da resposta em malha fechada é causada pelos modos instáveis, o que não é tarefa trivial;
- desenvolver métricas para sintonia dos controladores propostos: conforme mostrado neste trabalho, o controle robusto tende a se preocupar demasiadamente com a estabilidade robusta em detrimento do desempenho da malha fechada do sistema. Pode-se então criar métricas de sintonia que suavizem esse comportamento e torne o uso destas abordagens mais simples e menos dependentes da sintonia via tentativa e erro;

- combinar as formulações robustas com outros controladores: o objetivo seria criar um controle que considerasse tanto a estabilidade quanto o desempenho do sistema. Pode-se desenvolver um controlador que aproxime uma incerteza politépica por uma multi-modelo de forma a enfrentar a fraqueza do RGPC (modelos próximos, mas não pertencente a família de modelos Ω);
- simplificar os cálculos do conjunto mRPI: para o caso do TRMPC-NMSS é necessário simplificar este cálculo. Note que ainda há pesquisas recentes nesse ponto, o que mostra que não é uma tarefa trivial.

REFERÊNCIAS

ALESSIO, Alessandro; BEMPORAD, Alberto. A survey on explicit model predictive control. *In: Nonlinear Model Predictive Control: Towards New Challenging Applications*, 2009. ISSN 01708643. DOI: 10.1007/978-3-642-01094-1_29.

ALVARADO, I.; LIMON, D.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. F. On the design of robust tube-based MPC for tracking. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2008. ISSN 14746670.

ALVARADO, I.; LIMON, D.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. F. Output feedback Robust tube based MPC for tracking of piece-wise constant references. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2007. ISSN 01912216. DOI: 10.1109/CDC.2007.4434772.

ALVARADO, I.; LIMON, D.; ALAMO, T.; FIACCHINI, M. *et al.* Robust tube based MPC for tracking of piece-wise constant references. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2007. ISSN 01912216. DOI: 10.1109/CDC.2007.4434775.

ALVARADO, Ignacio. **Model predictive control for tracking constrained linear systems**. 2007. Tese (Doutorado) – University of Sevilla.

ÅSTRÖM, K.J.; HÄGGLUND, T. **Advanced PID Control**. [S.l.]: ISA-The Instrumentation, Systems, e Automation Society, 2006. ISBN 9781556179426. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XcseAQAAIAAJ>.

BADGWELL, Thomas A. A robust model predictive control algorithm for stable nonlinear plants. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 30, n. 9, p. 535–539, 1997.

BADGWELL, Thomas A. Robust model predictive control algorithm for stable linear plants. *Proceedings of the American Control Conference*, 1997. ISSN 07431619. DOI: 10.1109/acc.1997.610857.

BADGWELL, Thomas A. Robust model predictive control of stable linear systems. *International Journal of Control*, 1997. ISSN 13665820. DOI: 10.1080/002071797223343.

BEMPORAD, A.; CHISCI, L.; MOSCA, E. On the stabilizing property of SIORHC. *Automatica*, 1994. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/0005-1098(94)90064-7.

BEMPORAD, Alberto; MORARI, Manfred. Robust model predictive control: A survey. *In: Robustness in identification and control*, 1999. DOI: 10.1007/bfb0109870.

BITMEAD, R; GEVERS, M; WERTZ, V. Optimal control redesign of generalized predictive control. *In: Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1989*, 1990. DOI: 10.1016/b978-0-08-035727-0.50013-5.

BITMEAD, R.; GEVERS, M.; WERTZ, V. **Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC**. [S.l.]: Prentice Hall, 1990. ISBN 9780139468230. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=SZ4eAQAIAAJ>.

BOYD, Stephen *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: Siam, 1994. v. 15.

BRANDÃO, Adriano Silva Martins. **Controle preditivo com geração de código: um estudo comparativo**. 2018. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina. <http://tede.ufsc.br/teses/PEAS0292-D.pdf>.

BUCKNER, Caroline. **Tube-based model predictive control for the approach maneuver of a spacecraft to a free-tumbling target satellite**. 2017. Diss. (Mestrado) – Technische Universität München. https://elib.dlr.de/111203/1/BucknerCE_MasterThesisDLRFormat.pdf.

BUCKNER, Caroline; LAMPARIELLO, Roberto. Tube-Based Model Predictive Control for the Approach Maneuver of a Spacecraft to a Free-Tumbling Target Satellite. **Proceedings of the American Control Conference**, 2018. ISSN 07431619. DOI: 10.23919/ACC.2018.8431558.

CAMACHO, Eduardo F; BORDONS, Carlos. **Model predictive control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

CAMPOS, Mario Cesar M. Massa; GOMES, Marcus de Carvalho; PEREZ, Jose M. Gonzalez T. **Controle avançado e otimização na indústria do petróleo**. [S.l.: s.n.], 2013.

CANNON, Mark; BUERGER, Johannes *et al.* Robust tubes in nonlinear model predictive control. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, 2010. ISSN 14746670. DOI: 10.3182/20100901-3-IT-2016.00202.

CANNON, Mark; KOUVARITAKIS, Basil *et al.* Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2011. ISSN 00189286. DOI: 10.1109/TAC.2010.2086553.

CARRAPIÇO, O. L.; ODLOAK, D. A stable model predictive control for integrating processes. **Computers and Chemical Engineering**, 2005. ISSN 00981354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2004.11.008.

CHEN, C.T. **Linear System Theory and Design**. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. (Oxford series in electrical and computer engineering). ISBN 9780199959570. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=UTNcNAEACAAJ>.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm. **Automatica**, 1987. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/0005-1098(87)90087-2.

DARUP, Moritz Schulze; TEICHRIB, Dieter. Efficient computation of RPI sets for tube-based robust MPC. **2019 18th European Control Conference**, 2019. DOI: 10.23919/ECC.2019.8796265.

DING, Baocang. Properties of parameter-dependent open-loop MPC for uncertain systems with polytopic description. **Asian Journal of Control**, 2010. ISSN 15618625. DOI: 10.1002/asjc.162.

FONTES, F. A.C.C.; RAKOVIĆ, S. V.; KOLMANOVSKY, I. V. Rigid Tube Model Predictive Control for Linear Sampled-data Systems. **IFAC-PapersOnLine**, 2017. ISSN 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.903.

FRIEDLAND, B. **Control System Design: An Introduction to State-Space Methods**. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Electrical Engineering). ISBN 9780486135113. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=9WRKZ1aCnF8C>.

GESSER, Rodrigo da Silva. **Robust model predictive control: a comparative study considering implementation issues**. 2018. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina. <https://bu.ufsc.br/teses/PEAS0293-D.pdf>.

GILBERT, Elmer G.; TAN, Kok Tin. Linear Systems with State and Control Constraints: The Theory and Application of Maximal Output Admissible Sets. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1991. ISSN 15582523. DOI: 10.1109/9.83532.

GONZÁLEZ, A. H.; ODLOAK, D. Robust model predictive controller with output feedback and target tracking. **IET Control Theory and Applications**, 2010. ISSN 17518644. DOI: 10.1049/iet-cta.2009.0316.

GONZÁLEZ, Alejandro H.; MARCHETTI, Jacinto L.; ODLOAK, Darci. Extended robust model predictive control of integrating systems. **AIChE Journal**, 2007. ISSN 00011541. DOI: 10.1002/aic.11196.

GONZÁLEZ, Alejandro H.; PEREZ, José M.; ODLOAK, Darci. Infinite horizon MPC with non-minimal state space feedback. **Journal of Process Control**, 2009. ISSN 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2008.06.001.

GRANT, Michael; BOYD, Stephen. **CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1**. [S.l.: s.n.], mar. 2014. <http://cvxr.com/cvx>.

GUROBI OPTIMIZATION, LLC. **Gurobi Optimizer Reference Manual**. [S.l.: s.n.], 2020. Disponível em: <http://www.gurobi.com>.

HERCEG, M. *et al.* **Multi-Parametric Toolbox 3.0**. Zürich, Switzerland: [s.n.], jul. 2013. P. 502–510. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>.

JALALI, Ali A.; NADIMI, Vahid. A survey on robust model predictive control from 1999-2006. **CIMCA 2006: International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, Jointly with IAWTIC 2006: International Conference on Intelligent Agents Web Technologies**, 2006. DOI: 10.1109/CIMCA.2006.29.

JOHANSSON, Karl Henrik. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2000. ISSN 10636536. DOI: 10.1109/87.845876.

JÖNSSON, Ulf T. A lecture on the S-procedure. **Lecture Note at the Royal Institute of technology, Sweden**, v. 23, p. 34–36, 2001.

KAILATH, T. **Linear Systems**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1980. (Information and System Sciences Series). ISBN 9780135369616. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ggYqAQAAMAAJ>.

KERRIGAN, Eric Colin. **Robust constraint satisfaction: Invariant sets and predictive control**. 2001. Tese (Doutorado) – University of Cambridge. https://spiral.imperial.ac.uk/bitstream/10044/1/4346/1/cued_control_155.pdf.

KHALIL, H.K. **Nonlinear Systems**. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. (Pearson Education). ISBN 9780130673893. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=t%5C_d1QgAACAAJ.

KOLMANOVSKY, Ilya; GILBERT, Elmer G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. **Mathematical Problems in Engineering**, 1998. ISSN 1024123X. DOI: 10.1155/S1024123X98000866.

KOTHARE, Mayuresh V.; BALAKRISHNAN, Venkataramanan; MORARI, Manfred. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, 1996. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/0005-1098(96)00063-5.

KOUVARITAKIS, B.; ROSSITER, J. A.; CHANG, A. O.T. Stable generalised predictive control. An algorithm with guaranteed stability. **IEE Proceedings D: Control Theory and Applications**, 1992. ISSN 01437054. DOI: 10.1049/ip-d.1992.0047.

KWON, W. H.; PEARSON, A. E. A Modified Quadratic Cost Problem and Feedback Stabilization of a Linear System. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1977. ISSN 15582523. DOI: 10.1109/TAC.1977.1101619.

LANGSON, W. *et al.* Robust model predictive control using tubes. **Automatica**, 2004. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2003.08.009.

LIMON, D. *et al.* MPC for tracking of piece-wise constant references for constrained linear systems. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, 2005. ISSN 14746670.

LIMON, D. *et al.* MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. **Automatica**, 2008. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.01.023.

LIMON, D. *et al.* Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. **Journal of Process Control**, 2010. ISSN 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2009.11.007.

LIMÓN, Daniel. **Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez**. 2002. Tese (Doutorado) – Universidad de Sevilla. <http://www.esi2.us.es/limon/papers/LimonPHD02.pdf>.

LÖFBERG, Johan. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design**, 2004. DOI: 10.1109/cacsd.2004.1393890.

LUENBERGER, David G. An Introduction to Observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1971. ISSN 15582523. DOI: 10.1109/TAC.1971.1099826.

MACIEJOWSKI, J.M. **Predictive Control: With Constraints**. [S./]: Prentice Hall, 2002. ISBN 9780201398236. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=HV%5C_Y58c7KiwC.

MARTINS, Márcio A.F.; ODLOAK, Darci. A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. **Automatica**, 2016. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.01.046.

MARTINS, Márcio A.F.; YAMASHITA, André S. *et al.* Robust model predictive control of integrating time delay processes. **Journal of Process Control**, 2013. ISSN 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2013.05.002.

MAYNE, D. Q.; SERON, M. M.; RAKOVIĆ, S. V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. **Automatica**, 2005. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.08.019.

NORMEY-RICO, J.E.; CAMACHO, Eduardo. **Control of Dead-time Processes**. [S./]: Springer London, 2007. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9781846288289. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=EwnJDQ8jyJgC>.

ODLOAK, D. Extended robust model predictive control. **AIChE Journal**, 2004. ISSN 00011541. DOI: 10.1002/aic.10175.

PATARO, Igor Mendes Lima; LIMA, Rafael; MARTINS, Marcio. Controlador preditivo robustamente estável para processos com polos integradores repetidos. **14^o Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2019**, 2019. DOI: 10.17648/sbai-2019-111116.

PEREZ, J. M.; ODLOAK, D.; LIMA, E. L. Multi-model mpc with output feedback. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, 2014. ISSN 01046632. DOI: 10.1590/S0104-66322014000100013.

PEREZ, José Manuel Gonzalez Tubio. **Controle preditivo robusto com realimentação de saída**. 2006. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3137/tde-08052006-091853/pt-br.php>.

PLUCENIO, A. *et al.* MPC advanced control of an offshore gas compression system. **OTC Brasil 2017**, 2017.

PRASATH, Guru; JØRGENSEN, John Bagterp. Soft constraints for robust MPC of uncertain systems. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, 2009. ISSN 14746670. DOI: 10.3182/20090712-4-tr-2008.00034.

QIN, S. Joe; BADGWELL, Thomas. A survey of industrial model predictive control technology. **Control Engineering Practice**, 2003. ISSN 09670661. DOI: 10.1016/S0967-0661(02)00186-7.

RAKOVIC, Sasa V.; LEVINE, William S.; ACIKMESE, Behcet. Elastic tube model predictive control. **Proceedings of the American Control Conference**, 2016. ISSN 07431619. DOI: 10.1109/ACC.2016.7525471.

RAKOVIC, Saša V.; KOUVARITAKIS, Basil; CANNON, Mark; FINDEISEN, Rolf. Homothetic tube model predictive control. **Automatica**, 2012. ISSN 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2012.05.003.

RAKOVIC, Saša V.; KOUVARITAKIS, Basil; CANNON, Mark; PANOS, Christos *et al.* Parameterized tube model predictive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2012. ISSN 00189286. DOI: 10.1109/TAC.2012.2191174.

RAKOVIĆ, Sasa V *et al.* Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2005. ISSN 00189286. DOI: 10.1109/TAC.2005.843854.

RALHAN, Sameer. **Robust model predictive control of stable and integrating linear systems**. 2000. Tese (Doutorado) – Rice University. <https://scholarship.rice.edu/bitstream/handle/1911/19549/9969309.PDF?sequence=1&isAllowed=y>.

RALHAN, Sameer; BADGWELL, Thomas A. Robust control of stable linear systems with continuous uncertainty. **Computers and Chemical Engineering**, 2000. ISSN 00981354. DOI: 10.1016/S0098-1354(00)00612-8.

RAWLINGS, J.B.; MAYNE, D.Q. **Model Predictive Control: Theory and Design**. [S.l.]: Nob Hill Pub., 2009. ISBN 9780975937709. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=3%5C_rfQAACAAJ.

RODRIGUES, M. A.; ODLOAK, D. Output feedback MPC with guaranteed robust stability. **Journal of Process Control**, 2000. ISSN 09591524. DOI: 10.1016/S0959-1524(99)00051-7.

ROSSITER, J. A.; GOSSNER, J. R.; KOUVARITAKIS, B. Infinite horizon stable predictive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1996. ISSN 00189286. DOI: 10.1109/9.539437.

SCOKAERT, P. O.M.; MAYNE, D. Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1998. ISSN 00189286. DOI: 10.1109/9.704989.

SCOKAERT, Pierre O.M. Infinite horizon generalized predictive control. **International Journal of Control**, 1997. ISSN 13665820. DOI: 10.1080/002071797224874.

SENCIO, Rafael R; ODLOAK, Darci. An infinite horizon model predictive control for stable, integrating and unstable systems. **Proceedings XXII Congresso Brasileiro de Automática**, 2018. DOI: 10.20906/cps/cba2018-0942.

SOETERBOEK, R. **Predictive Control: A Unified Approach**. [S.l.]: Prentice Hall, 1992. (Ellis Horwood Series in Applied Science and Industrial Techn). ISBN 9780136783503. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XN1SAAAAMAAJ>.

STOICA, C.; RODRÍGUEZ-AYERBE, P.; DUMUR, D. Off-line robustness improvement of predictive control laws in state-space description. **2007 Mediterranean Conference on Control and Automation, MED**, 2007. DOI: 10.1109/MED.2007.4433817.

TAYLOR, C. James; CHOTAI, Arun; YOUNG, Peter C. State space control system design based on non-minimal state-variable feedback: Further generalization and unification results. **International Journal of Control**, 2000. ISSN 00207179. DOI: 10.1080/002071700421727.

TENNY, Matthew J.; RAWLINGS, James B.; WRIGHT, Stephen J. Closed-loop behavior of nonlinear model predictive control. **AIChE Journal**, 2004. ISSN 00011541. DOI: 10.1002/aic.10177.

WÄCHTER, Andreas; BIEGLER, Lorenz T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, 2006. ISSN 00255610. DOI: 10.1007/s10107-004-0559-y.

WANG, L. **Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®**. [S.l.]: Springer London, 2009. (Advances in Industrial Control). ISBN 9781848823303. Disponível em:
<https://books.google.com.br/books?id=PphumLcKPi4C>.

WANG, Liuping; YOUNG, Peter C. An improved structure for model predictive control using non-minimal state space realisation. **Journal of Process Control**, 2006. ISSN 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2005.06.016.

WOLFE, Philip. The Simplex Method for Quadratic Programming. **Econometrica**, 1959. ISSN 00129682. DOI: 10.2307/1909468.

YANG, Bryant Bruce Picon *et al.* Controle Regulatório PI+Feedforward Antisurge Aplicado a Compressores para Plataformas de Produção de Petróleo e Gás. **XXII Congresso Brasileiro de Automática**, set. 2018. DOI: 10.20906/CPS/CBA2018-0636.

YOUNG, Peter *et al.* Direct digital and adaptive control by input-output state variable feedback pole assignment. **International Journal of Control**, 1987. ISSN 00207179. DOI: 10.1080/00207178708934021.

ANEXO A – DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE NOMINAL USANDO O MODELO INMSS

O modelo iNMSS considerado aqui foi apresentado no trabalho de González e Odloak (2010). Este surge de um modelo de entrada exógena auto-regressiva (ARX) conforme a Equação (141).

$$\mathbf{y}(k) = - \sum_{i=1}^{na} \mathbf{A}_i \mathbf{y}(k-i) + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k-i) \quad (141)$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nu}$.

A Equação (141) é equivalente a um modelo por função de transferência e é a mesma apresentada na Equação (26). A forma com entrada incremental desse modelo não-mínimo pode ser escrita conforme a Equação (142).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_n \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_n \Delta \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_n \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (142)$$

sendo

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_{\Delta u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Delta u} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_{\Delta u} \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} - \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{na-1} - \mathbf{A}_{na} & \mathbf{A}_{na} \\ \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{ny} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(na+1)ny \times (na+1)ny}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{nb-1} & \mathbf{B}_{nb} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(na+1)ny \times (nb-1)nu}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{nu} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{nu} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(nb-1)nu \times (nb-1)nu}$$

$$\mathbf{B}_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nu} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

sendo \mathbf{I}_{ny} e \mathbf{I}_{nu} matrizes de identidade de dimensões $ny \times ny$ e $nu \times nu$, respectivamente.

Além disso, é conveniente separar os estados \mathbf{x} em componentes de estado relacionados às saídas passadas do sistema, dos componentes de estado relacionados às entradas passadas. Assim, o estado \mathbf{x} é representado pela Equação (143).

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_y(k) \\ \mathbf{x}_{\Delta u}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nx} \quad (143)$$

com

$$\mathbf{x}_y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k)^T & \mathbf{y}(k-1)^T & \cdots & \mathbf{y}(k-na+1)^T & \mathbf{y}(k-na)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(na+1)ny}$$

$$\mathbf{x}_{\Delta u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k-1)^T & \Delta \mathbf{u}(k-2)^T & \cdots & \Delta \mathbf{u}(k-nb+1)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(nb-1)nu}$$

$$nx = (na+1)ny + (nb-1)nu$$

Como forma de garantir a estabilidade do sistema e a factibilidade do problema de otimização para seguimento de referência, um IHMPC com restrições relaxadas baseado no modelo acima pode ser utilizado. Perceba que a matriz \mathbf{A}_n não tem posto completo, portanto não é possível utilizá-la para o cálculo do IHMPC. Entretanto, como posto $(\mathbf{A}_n) = \text{posto}(\mathbf{A}_y)$, pode-se usar esta última.

Para sistemas estáveis em malha aberta é interessante separar os efeitos dos modos estáveis e dos modos incrementais. Perceba que a razão para isso é não permitir que os modos incrementais continuem a agir durante um intervalo de tempo ilimitado sem ação de controle. Uma alternativa direta é adotar a decomposição autovalor - autovetor de Jordan conforme a Equação (144).

$$\mathbf{A}_y \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{A}_d \quad (144)$$

com

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{st} \end{bmatrix} \quad (145)$$

é uma matriz diagonal de bloco que explicita os diferentes modos do sistema. Os modos de integração representados por \mathbf{I}_{ny} resultam da forma incremental do modelo e \mathbf{F}^{st} representa os modos estáveis. As colunas de \mathbf{V} são os autovetores de \mathbf{A}_y .

Utilizando o auto-vetor \mathbf{V} , pode-se fazer a seguinte transformação.

$$\mathbf{x}_y = \mathbf{V}\mathbf{z} \quad (146)$$

e conseqüentemente

$$\mathbf{z} = (\mathbf{V})^{-1}\mathbf{x}_y \quad (147)$$

Assim como ocorre com \mathbf{A}_d , o vetor \mathbf{V} e os estados \mathbf{z} também podem ser decompostos conforme mostrado no par de Equações (148).

$$\mathbf{x}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^i & \mathbf{V}^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^i \\ \mathbf{z}^{st} \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}^i \\ \mathbf{z}^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{in}^i \\ \mathbf{V}_{in}^{st} \end{bmatrix} \mathbf{x}_y$$

Considerando que em regime permanente deseja-se anular o comportamento dos polos integrativos, pode-se calcular o valor da matriz de ponderação $\bar{\mathbf{Q}}$ utilizando apenas os modos estáveis da planta. Assume-se que apenas estes precisam ser ponderados já que os polos incrementais estão sem efeito. A Equação (149) é usada para este fim.

$$\mathbf{F}^{stT} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^{st} - \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{stT} \mathbf{V}^{stT} \mathbf{C}_y^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_y \mathbf{V}^{st} \mathbf{F}^{st} \quad (149)$$

Por fim, a restrição que garante a estabilidade nominal e a factibilidade do problema é dada pela Equação (150).

$$\mathbf{C}_y \mathbf{V}^i \tilde{\mathbf{V}}_{in}^i (\mathbf{A}^N \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{aug} \pi_k) - \mathbf{y}^{sp} - \delta = 0 \quad (150)$$

com

$$\tilde{\mathbf{V}}_{in}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{in}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n^{N-1} \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n^{N-2} \mathbf{B}_n & \cdots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{x}(k+N) = \mathbf{A}_n^N \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{\text{aug}} \Delta u_k$ é a predição dos estados do sistema no instante N , \mathbf{y}^{sp} é a referência para a saída, δ é uma variável de folga para garantir a factibilidade do problema.

Definindo,

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\text{in}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\text{in}}^{\text{st}} \end{bmatrix} \quad (151)$$

Tem-se que o problema de otimização a ser resolvido para garantir estabilidade nominal do sistema (142) é mostrado na Equação (152)

$$\begin{aligned} \min_{\pi, \delta} J'_k = & \sum_{j=0}^N (\mathbf{C}_n \mathbf{x}(k+j|k) - \mathbf{y}^{\text{sp}} - \delta)^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}_n \mathbf{x}(k+j|k) - \mathbf{y}^{\text{sp}} - \delta) \\ & + \sum_{j=0}^{Nc-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \\ & + \mathbf{x}(k+n|k)^T \tilde{\mathbf{V}}_{\text{in}}^{\text{st}T} \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{V}}_{\text{in}}^{\text{st}} \mathbf{x}(k+n|k) + \delta^T \mathbf{S} \delta \end{aligned} \quad (152)$$

sujeito a (150).

A descrição do significado de cada vetor e de cada matriz utilizada aqui é mostrada no trabalho citado ao início do anexo. Neste, a extensão do problema para o caso de estabilidade robusta a incertezas multi-modelo também é deduzido. Aqui, basta saber que a restrição de robustez de Badgwell (1997b) é utilizada. Para tanto, cada modelo tem uma função custo do tipo (152) e cada modelo deve satisfazer a restrição (150) com um δ para cada.

Para o caso robusto faz-se necessário também usar a Equação (153) para cômputo da pseudo-folga $\tilde{\delta}$ associada a solução ótima passada do problema.

$$\mathbf{C}_y \mathbf{V}^i(\Theta_i) \tilde{\mathbf{V}}_{\text{in}}^i(\Theta_i) (\mathbf{A}_n^N(\Theta_i) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{\text{aug}}(\Theta_i) \tilde{\pi}_k) - \mathbf{y}^{\text{sp}} - \tilde{\delta}_k(\Theta_i) = 0, \quad \forall \Theta \in \Omega \quad (153)$$