



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Vinícius Gregory Gonçalves

***Proper Generalized Decomposition (PGD) aplicado ao problema de condução  
de calor em materiais heterogêneos***

Florianópolis  
2020

Vinícius Gregory Gonçalves

***Proper Generalized Decomposition (PGD) aplicado ao problema de condução de calor em materiais heterogêneos***

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.  
Orientador: Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, PhD.

Florianópolis  
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gonçalves, Vinícius Gregory

Proper Generalized Decomposition (PGD) aplicado ao  
problema de condução de calor em materiais heterogêneos /  
Vinícius Gregory Gonçalves ; orientador, Paulo de Tarso  
Rocha Mendonça, 2020.

160 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Proper Generalized  
Decomposition (PGD). 3. Condução de calor. 4. Materiais  
heterogêneos. I. Mendonça, Paulo de Tarso Rocha. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Vinícius Gregory Gonçalves

***Proper Generalized Decomposition (PGD) aplicado ao problema de condução de calor em materiais heterogêneos***

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. José Carlos de Carvalho Pereira, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Emilio Ernesto Paladino, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Jonny Carlos da Silva, Dr. Eng.  
Coordenador do Programa

---

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça,  
PhD.  
Orientador

Florianópolis, 15 de Maio de 2020.



Este trabalho é dedicado à minha mãe, à minha família e aos meus queridos amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, em especial à minha mãe, por todo o apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao professor Paulo de Tarso pela paciência, orientação, esclarecimentos e toda contribuição na minha formação acadêmica e profissional.

Agradeço aos professores Eduardo Fancello, José Carlos e Emilio Paladino por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e pelas contribuições à cerca dele.

Aos professores e servidores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Ao Gilson e ao Rafael, pessoas fundamentais no decorrer desta empreitada. Obrigado por serem à minha família em Florianópolis e por todo o suporte dado ao longo dessa caminhada.

Agradeço a todos do Grupo de Análise e Projeto Mecânico (GRANTE) que contribuíram no decorrer do mestrado, em especial ao André, Bruno, Dara, Hebert, Lucas, Luis Nicolini, Marx, Matheus, Paulo Bastos, Thayller e Wellington.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro concedido durante o mestrado.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, ajudaram na realização deste trabalho.

*“O que prevemos raramente ocorre;  
o que menos esperamos geralmente acontece”  
(Benjamin Disraeli)*

## RESUMO

Com o intuito de reduzir o tempo de processamento em simulações complexas, vários métodos de redução de ordem foram desenvolvidos. Um desses métodos é o de Decomposição Própria Generalizada, PGD (*Proper Generalized Decomposition*). O método PGD é baseado na decomposição dos campos desconhecidos em cada uma das coordenadas. O PGD é usado para resolver sequências de problemas unidimensionais do método de elementos finitos. Ao longo das iterações, as variáveis espaciais são separadas via o método PGD, resultando em uma sequência iterativa de soluções globais, mesmo em um problema linear. A literatura mostra que o número de iterações e modos necessários para a aproximação utilizando PGD é pequeno se comparado com uma análise tradicional por elementos finitos, resultando em um custo computacional menor. O presente trabalho visa avaliar o método PGD em problemas de condução de calor utilizando materiais heterogêneos. São apresentados diversos testes numéricos utilizando a formulação desenvolvida a fim de verificar o comportamento da solução aproximada utilizando o método PGD.

**Palavras-chave:** *Proper Generalized Decomposition* (PGD). Condução de calor. Materiais heterogêneos.

## ABSTRACT

In order to reduce processing time in complex simulations, several order reduction methods have been developed. One of these methods is the Proper Generalized Decomposition (PGD). The PGD method is based on the decomposition of unknown fields in each of the coordinates. PGD is used to solve sequences of one-dimensional problems of the finite element method. Throughout the iterations, the spatial variables are separated via the PGD method, resulting in an iterative sequence of global solutions, even in a linear problem. The literature shows that the number of iterations and modes required for the approximation using PGD is small when compared to a traditional finite element analysis, resulting in a lower computational cost. The present work aims to evaluate the PGD method in heat conduction problems using heterogeneous materials. Several numerical tests are presented using the formulation developed in order to verify the behavior of the approximate solution using the PGD method.

**Keywords:** Proper Generalized Decomposition (PGD). Heat Conduction. Heterogeneous materials.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Características da composição do FGM. . . . .	32
Figura 2 – Imagem representativa das características de tensões térmicas entre material composto em camadas e FGM. . . . .	32
Figura 3 – Gráficos da função $1/2x$ no intervalo de $(-\pi < x < \pi)$ . . . . .	34
Figura 4 – Ilustração das posições das inclusões $p$ , da coordenada $x_p$ e raio/lado $r_p$ . . . . .	52
Figura 5 – Polinómio cúbico de Hermite com $L = 1$ . . . . .	55
Figura 6 – Ilustração da pseudo região de aplicação da suavização. (a) Inclusão coincidente com os nós. (b) Inclusão anterior ao nós. (c) Inclusão posterior ao nós . . . . .	56
Figura 7 – Temperatura média do elemento obtida a partir dos quatro nós que compõem o elemento. . . . .	58
Figura 8 – Configuração adotada para o cálculo das normas. . . . .	58
Figura 9 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de $-4,0493$ . . . . .	61
Figura 10 – Propriedade do material ao longo do eixo $x$ para $y = 3$ e ao longo do eixo $y$ para $x = 3$ . . . . .	62
Figura 11 – Representação analítica da condutividade térmica do material - Variação harmônica. . . . .	62
Figura 12 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação harmônica. . . . .	63
Figura 13 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de $-4,0222$ . . . . .	65
Figura 14 – Propriedade do material ao longo do eixo $x$ para $y = 10,0$ e ao longo do eixo $y$ para $x = 10,0$ . . . . .	65
Figura 15 – Representação analítica do material - Variação polinomial. . . . .	66
Figura 16 – Representação PGD do material utilizando 500 nnd's - Variação polinomial. . . . .	66
Figura 17 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação polinomial. . . . .	67
Figura 18 – Configuração analítica da propriedade de material utilizando distribuição polinomial de primeiro grau. . . . .	69
Figura 19 – Representação PGD da propriedade de material utilizando 50 nnd's. . . . .	70
Figura 20 – Configuração analítica da propriedade de material utilizando distribuição polinomial de segundo grau. . . . .	71
Figura 21 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de $-0,0351$ . . . . .	72

Figura 22 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação polinomial. . . . .	73
Figura 23 – Configuração do caso - representação real da distribuição de material.	74
Figura 24 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de $-1,0255$ . . . . .	74
Figura 25 – Representação PGD utilizando 2 modos e 100 nnd's. . . . .	76
Figura 26 – Configuração do caso - representação real da inclusão. . . . .	77
Figura 27 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de $-1.0480$ . . . . .	78
Figura 28 – Representação PGD da inclusão para $y = L_y/2$ . . . . .	78
Figura 29 – Representação PGD da inclusão retangular em perspectiva sem suavização e representação do erro entre solução exata e aproximação PGD. . . . .	79
Figura 30 – Diferença entre a representação em $y = L_y/2$ e nos vértices da inclusão sem suavização. . . . .	80
Figura 31 – Diferença entre a representação aplicando suavização em $y = L_y/2$ , utilizando $fat = 1,5$ , $fat = 2$ , $fat = 2,5$ e $fat = 3$ . . . . .	80
Figura 32 – Vista frontal da representação PGD utilizando 100 nnd's aplicando suavização com fator $fat = 1,5$ e representação do erro absoluto entre solução exata e solução PGD. . . . .	82
Figura 33 – Configuração do caso - representação real das inclusões. . . . .	83
Figura 34 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência para cada uma das configurações: (a) 2 Modos. (b) 5 Modos. (c) 10 Modos. (d) 15 Modos. A taxa de convergência é de: (a) $-0,0144$ . (b) $-0,0751$ . (c) $-1,0114$ . (d) $-1,0114$ . . . . .	85
Figura 35 – Representação PGD da inclusão ao longo de $x$ em $y = 3$ metros, utilizando 10 modos. (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's. . . .	86
Figura 36 – Representação PGD do material utilizando 10 modos e 100 nnd's. .	86
Figura 37 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático e a curva de convergência, aplicando suavização e variando ndof-PGD - 10 modos e $fat = 1,10$ . A taxa de convergência é de $-1,0006$ . . . . .	88
Figura 38 – Representação PGD da inclusão ao longo de $x$ em $y = 3$ metros, utilizando 10 modos e fator $fat = 1,10$ . (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's. . . . .	88
Figura 39 – Representação PGD do caso utilizando 10 modos e 100 nnd's e fator $fat = 1,10$ . . . . .	89
Figura 40 – Configuração do caso - representação exata das inclusões. . . . .	90

Figura 41 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência para cada uma das configurações: (a) 10 Modos. (b) 15 Modos. (c) 20 Modos. (d) 25 Modos. A taxa de convergência é de: (a) $-0,2412$ . (b) $-0,7609$ . (c) $-0,9246$ . (d) $-0,9378$ . . . . .	92
Figura 42 – Representação PGD da inclusão ao longo de $x$ em $y = 2,1$ metros, utilizando 20 modos. (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's. . . .	93
Figura 43 – Representação PGD utilizando 20 modos e 500 nnd's da propriedade do material. . . . .	94
Figura 44 – Gráfico da norma $L_2$ do erro quadrático e a curva de convergência, aplicando suavização e variando ndof-PGD - 20 modos e $fat = 0,25$ . A taxa de convergência é de $-0,9722$ . . . . .	95
Figura 45 – Representação PGD da inclusão aplicando suavização ao longo de $x$ em $y = 2,1$ metros, utilizando 20 modos e fator $fat = 1,10$ . (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's. . . . .	96
Figura 46 – Representação PGD aplicando suavização utilizando 20 modos, 500 nnd's e com fator $fat = 0,25$ para a propriedade de material. . . . .	96
Figura 47 – Curva de convergência do método PGD utilizando 5 modos. (a) Temperatura na coordenada (2,2). (b) Fluxo de calor na direção $x$ , coordenada (0,2). A taxa de convergência é de: (a) $-0,1117$ . (b) $-0,1086$ . . . . .	99
Figura 48 – Variação da temperatura e do fluxo de calor na direção de $x$ ao longo da linha $y = L_y/2$ , variando a quantidade de nós utilizando 5 modos. . . . .	100
Figura 49 – Resultados obtidos de temperatura - caso 9. . . . .	100
Figura 50 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 9. . . . .	101
Figura 51 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 9. . . . .	101
Figura 52 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 9. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 6,7171E - 3$ . . . . .	102
Figura 53 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 5 modos. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} = 2,2366E - 2$ . . . . .	102
Figura 54 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 5 modos. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 2,6109E - 2$ . . . . .	103
Figura 55 – Configuração dos dados de fonte de calor - representação da região da fonte de calor no centro da placa. . . . .	104
Figura 56 – Curva de convergência utilizando 5 modos. (a) Temperatura na coordenada (2,2). (b) Fluxo de calor na direção $x$ , coordenada (0,2). A taxa de convergência é de: (a) $-0,0927$ . (b) $0,0727$ . . . . .	106
Figura 57 – Variação da temperatura e do fluxo de calor na direção de $x$ ao longo da linha $y = L_y/2$ , variando a quantidade de nós. . . . .	106
Figura 58 – Resultados obtidos de temperatura - caso 10. . . . .	107
Figura 59 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 10. . . . .	107



Figura 60 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 10. . . . .	108
Figura 61 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 1,8000E - 2$ . . . . .	108
Figura 62 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} =$ $1,9254E - 2$ . . . . .	108
Figura 63 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} =$ $2,3831E - 2$ . . . . .	109
Figura 64 – Configuração do Caso 3 - FGM. . . . .	110
Figura 65 – Convergência da temperatura no centro da placa e do fluxo de calor na borda da placa, coordenada (0,2), utilizando 5 modos e 100 nnd's. A taxa de convergência é de: (a) $-0,6332$ . (b) $-0,1530$ . . . . .	113
Figura 66 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	113
Figura 67 – Resultado do fluxo de calor na direção de $x$ utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	114
Figura 68 – Resultados obtidos de temperatura - caso 11. . . . .	115
Figura 69 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 11. . . . .	115
Figura 70 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 11. . . . .	116
Figura 71 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 0,000999$ . . . . .	116
Figura 72 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} = 0,0186$ . . . . .	116
Figura 73 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 0,0219$ . . . . .	117
Figura 74 – Configuração do Caso 3 - FGM. . . . .	118
Figura 75 – Convergência da temperatura no centro da placa e do fluxo de calor na borda da placa, coordenada (0,2), utilizando 5 modos e 100 nnd's. A taxa de convergência é de: (a) $-0,5427$ . (b) $-0,1562$ . . . . .	122
Figura 76 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	122
Figura 77 – Resultado do fluxo de calor na direção de $x$ utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	123
Figura 78 – Resultados obtidos de temperatura - caso 12. . . . .	124

Figura 79 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 12. . . . .	124
Figura 80 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 12. . . . .	125
Figura 81 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 0,001628$ . . . . .	125
Figura 82 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} = 0,0186$ .126	126
Figura 83 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 0,0252$ .126	126
Figura 84 – Curva de convergência do método PGD utilizando 10 modos. (a) Temperatura na coordenada (1,1). (b) Fluxo de calor na direção $x$ , coordenada (0,1). A taxa de convergência é de: (a) $-0,1478$ . (b) $0,4224$ .130	130
Figura 85 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 100, 500 e 2000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	130
Figura 86 – Resultado do fluxo de calor na direção de $x$ utilizando o método PGD com 5, 100, 500 e 2000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	131
Figura 87 – Resultados obtidos de temperatura - caso 13. . . . .	132
Figura 88 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 13. . . . .	132
Figura 89 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 13. . . . .	133
Figura 90 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 0,1005$ . . . . .	133
Figura 91 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} =$ $11,3984$ . . . . .	133
Figura 92 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 8,4607$ .134	134
Figura 93 – Curva de convergência do método PGD utilizando 10 modos. (a) Temperatura na coordenada (5,5). (b) Fluxo de calor na direção $x$ , coordenada (0,5). A taxa de convergência é de: (a) $-0,1435$ . (b) $0,0892$ .138	138
Figura 94 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD va- riando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	138
Figura 95 – Resultado do fluxo de calor na direção de $x$ utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos. . . . .	139
Figura 96 – Resultados obtidos de temperatura - caso 14. . . . .	139
Figura 97 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 14. . . . .	140
Figura 98 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 14. . . . .	140

Figura 99 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_T^{L_2} = 3,8592$ . . . . .	140
Figura 100–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_x}^{L_2} = 6,0660$ .	141
Figura 101–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma $L_2$ do erro para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 5,1228$ .	141
Figura 102–Curva de convergência do método utilizando 25 modos. (a) Temperatura. (b) Fluxo de calor na direção $x$ . A taxa de convergência é de: (a) 0,0951. (b) $-0,6334$ . . . . .	144
Figura 103–Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 10 modos e (b) 25 modos. . . . .	144
Figura 104–Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 10 modos e (b) 25 modos. . . . .	145
Figura 105–Resultados obtidos de temperatura - caso 15. . . . .	145
Figura 106–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ - caso 15. . . . .	146
Figura 107–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ - caso 15. . . . .	146
Figura 108–Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma $L_2$ do erro quadrático para este caso foi $E_T^{L_2} = 3,0343$ . . . . .	146
Figura 109–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $x$ via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma $L_2$ do erro quadrático para este caso é $E_{q_x}^{L_2} = 9,5282$ . . . . .	147
Figura 110–Resultados obtidos de fluxo de calor na direção $y$ via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma $L_2$ do erro quadrático para este caso é $E_{q_y}^{L_2} = 8,5324$ . . . . .	147
Figura 111–Representação em perspectiva da propriedade de material. . . . .	151
Figura 112–Norma $L_2$ do erro quadrático e a curva de convergência para temperatura e fluxo de calor na direção $x$ . (a) Temperatura. (b) Fluxo de calor na direção de $x$ . A taxa de convergência é de: (a) $-0,0339$ . (b) 0,0151. . . . .	152

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ , exata e PGD. . . . .	61
Tabela 2 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ , exata e PGD. . . . .	64
Tabela 3 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ , exata e PGD. . . . .	69
Tabela 4 – Quantidade de modos (Modos), quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma $L_2$ do erro quadrático, erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ e normas $L_2$ exata e PGD. . . . .	72
Tabela 5 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), a norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ , exata e PGD, utilizando 1 e 2 modos. . . . .	75
Tabela 6 – Quantidade de nós em cada direção, número de graus de liberdade, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas $L_2$ , exata e PGD. . . . .	77
Tabela 7 – Quantidade de modos, número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, para simulações com suavização. . . . .	81
Tabela 8 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 2 e 5 modos. . . . .	84
Tabela 9 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 10 e 15 modos. . . . .	84
Tabela 10 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), e norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização com os fatores $fat = 1, 10$ e $fat = 1, 25$ . . . . .	87
Tabela 11 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), e norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização com os fatores $fat = 1, 50$ e $fat = 1, 75$ . . . . .	87

Tabela 12 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo da norma $L_2$ ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 10 modos e 15 modos. . . . .	91
Tabela 13 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo da norma $L_2$ ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 20 modos e 25 modos. . . . .	91
Tabela 14 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo da norma $L_2$ ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização utilizando os fatores $fat = 0,25$ e $fat = 0,50$ . . . . .	93
Tabela 15 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo da norma $L_2$ ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização utilizando os fatores $fat = 0,75$ e $fat = 1,25$ . . . . .	95
Tabela 16 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 1 modo PGD. . . . .	98
Tabela 17 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 3 modo PGD. . . . .	99
Tabela 18 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 5 modo PGD. . . . .	99
Tabela 19 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos. . . . .	105
Tabela 20 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos. . . . .	105

Tabela 21 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.	105
Tabela 22 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 2 modos. . . . .	111
Tabela 23 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 5 modos. . . . .	111
Tabela 24 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 10 modos. . . . .	112
Tabela 25 – Temperatura máxima e o erro relativo $E_T$ utilizando 2, 5 e 10 modos.	114
Tabela 26 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos. . . . .	119
Tabela 27 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos. . . . .	120
Tabela 28 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 2$ e $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 2$ e $x = 4$ e $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção $x$ ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos. . . . .	121
Tabela 29 – Temperatura máxima e o erro relativo ( $E_T$ ) entre solução FEM e PGD utilizando 2, 5 e 10 modos. . . . .	123

Tabela 30 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 1$ e $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 1$ e $x = 2$ e $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos. . . . .	127
Tabela 31 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 1$ e $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 1$ e $x = 2$ e $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos. . . . .	128
Tabela 32 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 1$ e $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 1$ e $x = 2$ e $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos. . . . .	129
Tabela 33 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 5$ e $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 5$ e $x = 10$ e $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos. . . . .	135
Tabela 34 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 5$ e $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 5$ e $x = 10$ e $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos. . . . .	136
Tabela 35 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 5$ e $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 5$ e $x = 10$ e $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 20 modos. . . . .	137
Tabela 36 – Norma $L_2$ da temperatura $N_T^{L_2}$ , fluxo de calor na direção de $x$ ( $N_{q_x}^{L_2}$ ) e $y$ ( $N_{q_y}^{L_2}$ ) utilizando 2, 10 e 20 modos, juntamente com norma $L_2$ do erro quadrático ( $E_T^{L_2}$ , $E_{q_x}^{L_2}$ e $E_{q_y}^{L_2}$ ), respectivamente, e erro relativo entre as normas FEM e PGD ( $Erre_T^{L_2}$ , $Erre_{q_x}^{L_2}$ e $Erre_{q_y}^{L_2}$ ). . . . .	137
Tabela 37 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 5$ e $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 5$ e $x = 10$ e $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos. . . . .	142

Tabela 38 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada $x = 5$ e $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada $x = 0$ e $y = 5$ e $x = 10$ e $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura $E_T$ e fluxo de calor na direção $x$ $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 25 modos. . . . .	143
Tabela 39 – Norma $L_2$ dos resultados obtidos com FEM e PGD, utilizando 25 modos, e o erro relativo entre as normas. . . . .	145
Tabela 40 – Valores de nnd's entre 95 e 105, norma $L_2$ das simulações exata e PGD, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo entre as normas exata e PGD utilizando 10 modos da representação da propriedade de material. . . . .	148
Tabela 41 – Valores de nnd's entre 995 e 1005, norma $L_2$ das simulações exata e PGD, norma $L_2$ do erro quadrático e erro relativo entre as normas exata e PGD utilizando 10 modos da representação da propriedade de material. . . . .	149
Tabela 42 – Valores de nnd's entre 95 e 105, norma $L_2$ das simulações FEM e PGD, de temperatura ( $N_{Temp}^{L_2}$ ) e fluxo de calor ( $N_{Flux}^{L_2}$ e $N_{Fluy}^{L_2}$ ), e erro relativo entre as normas FEM e PGD utilizando 20 modos. . . . .	149
Tabela 43 – Valores de nnd's entre 995 e 1005, norma $L_2$ das simulações FEM e PGD, de temperatura ( $N_{Temp}^{L_2}$ ) e fluxo de calor ( $N_{Flux}^{L_2}$ e $N_{Fluy}^{L_2}$ ), e erro relativo entre as normas FEM e PGD utilizando 20 modos. . . . .	150
Tabela 44 – Norma $L_2$ do erro quadrático para temperatura e fluxo de calor na direção de $x$ e $y$ . . . . .	152



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PGD	<i>Proper Generalized Decomposition</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
ROM	<i>Reduced-Order Models</i>
SVD	<i>Single Value Decomposition</i>
POD	<i>Proper Ortogonal Decompostion</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Variáveis

$A_{Elem}$	Área do elemento
$b$	Fonte de calor
<b>B</b>	Gradiente das funções de forma
$c$	Calor específico
$E$	Erro
$E^{abs}$	Erro absoluto
$E_{Elem}^{abs}$	Erro absoluto para cada elemento
$E^{rel}$	Erro relativo
$\  E^{rel} \ _{L_2}$	Erro relativo entre as normas $L_2$
<b>F</b>	Vetor força
$I$	Domínio temporal
$H^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert
$h$	Fluxo de calor prescrito no contorno
$h_f$	Fluxo de calor prescrito em cada uma das seis faces
<b>k</b>	Matriz anisotrópica da propriedade de condutividade térmica
$k$	Condutividade térmica homogênea e isotrópica
$k(x)$	Propriedade de material fornecida ou conhecida
<b>K</b>	Matriz de rigidez
$nk$	Quantidade de modos PGD da condutividade térmica
<b>n</b>	Vetor normal à fronteira
<b>N</b>	Vetor com as funções de forma
$nb$	Quantidade de modos PGD da fonte de calor
$n$	Quantidade de nós na respectiva direção representação material
$P$	Quantidade de nós

$q$	Fluxo de calor
$\mathbf{Q}$	Vetor com os valores nodais da aproximação PGD da representação de material
$t$	Tempo
$t_{max}$	Tempo máximo
$T(\mathbf{x})$	Temperatura
$\hat{T}$	Varição da temperatura
$\bar{T}$	Temperatura prescrita no contorno
$\bar{T}_0$	Temperatura inicial prescrita no contorno
$\bar{T}_f$	Temperatura prescrita em cada uma das seis faces
$\hat{u}$	Função peso
$\mathbf{U}$	Vetor das temperaturas
$\hat{\mathbf{U}}$	Vetor das funções peso
$\mathbf{x}$	Coordenada espacial
$x$	Coordenada espacial ao longo da direção $x$
$y$	Coordenada espacial ao longo da direção $y$
$z$	Coordenada espacial ao longo da direção $z$

#### Letras gregas

$\Omega$	Domínio de um corpo material
$d\Omega$	Elemento diferencial do domínio espacial
$\rho$	Densidade do material
$\delta$	Varição
$\Gamma$	Contorno do domínio de um corpo material
$\Gamma_u$	Contorno do domínio de um corpo material - Temperatura
$\Gamma_q$	Contorno do domínio de um corpo material - Fluxo de calor
$d\Gamma_u$	Elemento diferencial do contorno - Temperatura

$d\Gamma_q$  Elemento diferencial do contorno - Fluxo de calor

$\theta(\mathbf{x}, t)$  Campo de temperatura

$\Phi$  Função de forma unidimensional

### Operadores

$\| \cdot \|_{L_2}$  Norma  $L_2$

$\nabla(\cdot)$  Gradiente

$\nabla \cdot (\cdot)$  Divergente

$\nabla^2(\cdot)$  Laplaciano

$\partial$  Derivada parcial

### Subescritos e Sobrescritos

$(\cdot)^T$  Transposto

$(\cdot)_x$  Respectivo à direção  $x$

$(\cdot)_y$  Respectivo à direção  $y$

$(\cdot)_z$  Respectivo à direção  $z$

$(\cdot)_{,x}$  Derivada em relação à  $x$

$(\cdot)_{,y}$  Derivada em relação à  $y$

$(\cdot)_{,z}$  Derivada em relação à  $z$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>26</b>
1.1	OBJETIVOS	27
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>29</b>
2.1	<i>PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION</i> - PGD (DECOMPOSIÇÃO PRÓPRIA GENERALIZADA)	29
2.2	<i>FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL</i> - FGM	31
2.3	FENÔMENO DE GIBBS	33
2.4	O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR	35
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS</b>	<b>37</b>
3.1	PGD NO ESPAÇO PARA O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR ESTACIONÁRIO	37
3.2	FORMAS FRACAS	40
<b>3.2.1</b>	<b>Caso I - somente <math>\hat{T}_x \neq 0</math>, dados <math>T_y(y)</math> e <math>T_z(z)</math></b>	<b>40</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Caso II - somente <math>\hat{T}_y \neq 0</math>, dados <math>T_x(y)</math> e <math>T_z(z)</math></b>	<b>40</b>
3.3	SEPARAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NAS MATRIZES DE RIGIDEZ	41
3.4	SEPARAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NO TERMO DE EXCITAÇÃO	42
<b>3.4.1</b>	<b>Termos da fonte de calor <math>b</math></b>	<b>42</b>
3.5	DETALHES PARA CONDUÇÃO DE CALOR 2D UTILIZANDO PGD	43
<b>3.5.1</b>	<b>Matriz de coeficientes</b>	<b>43</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Vetor força devido à modos anteriores</b>	<b>44</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Amplitude do modo</b>	<b>45</b>
3.6	ALGORITMO DA IMPLEMENTAÇÃO	47
3.7	GERAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO PGD DE DADOS ESCALARES	48
3.8	GERAÇÃO DE DADOS PARA TESTE	50
<b>3.8.1</b>	<b>Variação harmônica</b>	<b>50</b>
<b>3.8.2</b>	<b>Variação polinomial</b>	<b>51</b>
<b>3.8.3</b>	<b>Material com duas fases</b>	<b>51</b>
3.9	DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE DOS MODOS DE DADOS	53
3.10	SUAVIZAÇÃO DO EFEITO DE GIBBS.	54
3.11	CÁLCULO DO ERRO DA REPRESENTAÇÃO PGD DO MATERIAL, DA TEMPERATURA E DO FLUXO DE CALOR	56
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>59</b>
4.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	59
4.2	REPRESENTAÇÃO PGD PARA DADOS DE PROPRIEDADES DE MATERIAL E DADOS DE CARREGAMENTO	60
<b>4.2.1</b>	<b>Caso 1 - Propriedade com distribuição harmônica.</b>	<b>60</b>

4.2.2	Caso 2 - Propriedade com distribuição polinomial. . . . .	64
4.2.3	Caso 3 - FGM - <i>Functionally Graded Material</i> (Polinômio de primeira ordem). . . . .	68
4.2.4	Caso 4 - FGM - <i>Functionally Graded Material</i> (Polinômio de segunda ordem). . . . .	71
4.2.5	Caso 5 - Propriedades de material com variação discreta do domínio. . . . .	74
4.2.6	Caso 6 - Inclusão retangular. . . . .	77
4.2.7	Caso 7 - Múltiplas inclusões (25% da área total). . . . .	83
4.2.8	Caso 8 - Múltiplas inclusões (40% da área total). . . . .	90
4.3	REPRESENTAÇÃO PGD PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR . . . . .	97
4.3.1	Caso 9 - Condutividade térmica e fluxo de calor constantes com solução analítica conhecida. . . . .	97
4.3.2	Caso 10 - Fonte de calor localizada apenas em uma região delimitada no centro da placa. . . . .	104
4.3.3	Caso 11 - FGM - <i>Functionally Graded Material</i> Linear (polinômio de primeira ordem). . . . .	110
4.3.4	Caso 12 - FGM - <i>Functionally Graded Material</i> Polinomial (Polinômio de segunda ordem). . . . .	118
4.3.5	Caso 13 - Propriedades de material com variação discreta no domínio. . . . .	127
4.3.6	Caso 14 - Múltiplas inclusões (25% da área total). . . . .	135
4.3.7	Caso 15 - Múltiplas inclusões (40% da área total). . . . .	142
4.4	ASPECTOS GERAIS DO MÉTODO PGD. . . . .	148
5	CONCLUSÃO . . . . .	153
	REFERÊNCIAS . . . . .	156
	APÊNDICE A – TAXA DE CONVERGÊNCIA . . . . .	160

## 1 INTRODUÇÃO

Simulações numéricas complexas apresentam dificuldades para serem resolvidas devido ao grande número de sistemas de equações gerados. Essa situação não é conveniente para problemas de otimização, em que geralmente são necessárias várias soluções, ou para realimentação de problemas de controle, onde as soluções em tempo real são solicitadas, conforme (DUMON; ALLERY; AMMAR, 2011). A tecnologia desenvolvida recentemente na área da computação tem permitido resolver problemas com milhões de incógnitas, porém é necessário desenvolver técnicas que reduzam o tempo de processamento destas simulações.

Essas simulações tornam-se complexas devido ao grande número de variáveis a serem consideradas no problema, gerando um efeito colateral qualitativo chamado de maldição da dimensionalidade (Curse of Dimensionality), conforme (AMMAR; CHINESTA *et al.*, 2012) e (GONZÁLEZ *et al.*, 2010). O termo maldição da dimensionalidade é melhor empregado em situações com um número muito alto de dimensões, sendo assim aplicar este termo no presente trabalho, que utiliza no máximo três dimensões, não é o ideal. De fato, o termo maldição da dimensionalidade é empregado justamente por utilizar de um método numérico desenvolvido justamente para contornar problemática de problemas com elevado número de dimensões. Então a maldição da dimensionalidade pode ser facilmente ilustrada considerando um problema com  $D$  dimensões. Se utilizarmos um procedimento de malha padrão com  $M$  nós usados para a discretização, teremos a quantidade de números de nós dados por  $M^D$  para resolução do problema, conforme (PRULIERE; CHINESTA; AMMAR, 2010). Para (AMMAR; CHINESTA *et al.*, 2012) modelos que envolvem condutividade térmica do material, carregamentos aplicados, condições iniciais e/ou de contorno e parâmetros de geometria resultam em um modelo multidimensional que para ser solucionado, gera um custo computacional muito alto.

Para (HULBERT; HUGHES, 1990), além da maldição da dimensionalidade, as abordagens semidiscretas apresentam como desvantagem a dificuldade de produzir algoritmos que façam a captura de descontinuidade. Dentro da classe de problemas com descontinuidade podemos tratar materiais heterogêneos, que possuam inclusões internas de outros materiais.

Para resolver estes problemas, vários modelos de redução de ordem (ROM - *Reduced-Order Models*) têm sido propostos. ROM refere-se a um conjunto de técnicas capazes de resolver problemas numéricos complexos em espaços reduzidos, conforme (BARBARULO, 2012). Como exemplo destes métodos, têm-se os de separação de variáveis *à posteriori* e *à priori*. Dentro dos métodos *à posteriori* têm-se o SVD (*Single-Value Decomposition*) e POD (*Proper Orthogonal Decomposition*). Nos métodos *à priori*, pode-se citar *Radial Approximation* e PGD (*Proper Generalized Decomposition*).

O foco deste trabalho será o modelo de redução de ordem *à priori* PGD. Este método consiste em construir uma base reduzida sem conhecimento prévio, *à priori*, da solução. Basicamente é construído uma aproximação da solução por enriquecimento sucessivo. Esse enriquecimento é feito na forma de uma soma finita de  $N$  produtos funcionais, envolvendo as funções de cada coordenada.

Dentro deste contexto, têm-se interesse em relacionar à seguinte formulação em duas classes de problemas, são elas: representar o material via PGD, devido a necessidade de utilizar esta representação no problema seguinte, que é o problema de condução de calor. Essa representação é feita também com o intuito de poder executar as integrações da forma fraca do problema de maneira desacoplada, como será apresentado nas próximas seções, mais especificamente, na seção onde é apresentada a formulação numérica. O primeiro deles torna-se indispensável pela necessidade de representar o material via PGD, pois esta representação é utilizada no problema de condução de calor. Nos dois casos mencionados, o domínio físico é definido como ortogonal, com condições de contorno conhecidas ou arbitrárias. O método PGD visa lidar com as dificuldades numéricas, resultantes do grande número de dimensões.

O PGD baseia-se na decomposição/separação do campo desconhecido em cada uma das coordenadas. Ele tem sido usado na decomposição espaço-tempo de problemas parabólicos como nos trabalhos de (BOUCINHA; GRAVOUIL; AMMAR, 2013), (NOUY, 2010), reduzindo os esforços computacionais em várias ordens de grandeza. No trabalho de (BOUCINHA; GRAVOUIL; AMMAR, 2013), é desenvolvido uma formulação PGD para equações diferenciais hiperbólicas de segunda ordem, com ênfase nos modelos elastodinâmicos transitórios e testadas para problemas com uma dimensão no espaço (barra) e no tempo. O processo de solução em PGD pode seguir várias estratégias, porque o sistema algébrico é sempre não-linear.

Normalmente, em domínios 3D, o PGD é aplicado separando as variáveis no espaço, como no Método de Elementos Finitos, ou seja, uma somatória de produtos de funções desconhecidas dependentes das três dimensões espaciais,  $X(x, y, z)$ . No entanto, o procedimento iterativo torna-se muito caro em geometrias 3D com materiais não homogêneos, onde há necessidade de uma análise com discretização em todas as dimensões espaciais, que requerem malhas intensamente refinadas. Caso o domínio seja ortogonal, é possível formular o PGD separando também coordenadas físicas, como desenvolveremos neste trabalho, isto é, incógnitas na forma  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$ .

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é descrever as formulações necessárias, bem como implementar um programa para análise de problemas de condução de calor em materiais heterogêneos. O desenvolvimento da formulação será baseado em elementos finitos, com a aplicação do método de separação de variáveis PGD (*Proper Generalized*



*Decomposition*), com o intuito de reduzir a ordem do problema e conseqüentemente o tempo de processamento.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

Para atingir os objetivos descritos, é necessário cumprir alguns objetivos específicos, conforme listado:

- Formulação para a representação PGD de dados escalares, em particular, condutividade térmica e fonte de calor.
- Formulação do problema de condução de calor via separação de variáveis PGD.
- Implementação computacional de algoritmo para a solução numérica do problema de condução de calor utilizando PGD.
- Análise das soluções obtidas do problema de condução de calor, considerando a representação PGD de materiais heterogêneos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O presente capítulo apresenta uma revisão dos trabalhos relacionados ao tema proposto. São explanados os principais temas abordados no trabalho: utilização do método PGD (*Proper Generalized Decomposition*), FGM (*Functionally Graded Material*) e o fenômeno de Gibbs. O PGD é a principal ferramenta do trabalho e em dos casos propostos, utiliza de um material FGM como estudo para análise do método em discussão. Ao utilizar o método PGD em problemas que apresentam duas fases de material (inclusões), observou-se oscilações em torno da descontinuidade, semelhantes àqueles presentes nas séries de Fourier com descontinuidades. Esse fenômeno é chamado de fenômeno de Gibbs e será discutido posteriormente.

### 2.1 *PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION* - PGD (DECOMPOSIÇÃO PRÓPRIA GENERALIZADA)

De acordo com (NOUY; LADEVÈZE, 2004), simulações numéricas de problemas com heterogeneidade que exijam uma análise 3D necessitam de estratégias computacionais eficientes, pois, para que as repostas destas simulações sejam precisas, há necessidade de um grande número de graus de liberdade, gerando elevado custo computacional. Para contornar esse problema, várias ferramentas computacionais foram desenvolvidas com aplicabilidade na engenharia, conforme (GALLAND *et al.*, 2011).

Conforme (GHNATIOS *et al.*, 2012), quanto mais parâmetros forem considerados dimensões do problema, mais rapidamente o número de graus de liberdade em uma discretização em todas as dimensões, gerará o efeito colateral que é chamado na literatura como *maldição da dimensionalidade* (*curse of dimensionality*), que pode ser visto no trabalho (INDYK; MOTWANI, 1998). Ainda segundo (GHNATIOS *et al.*, 2012), esse efeito causa crescimento exponencial do número de graus de liberdade do problema, se o problema for discretizado com técnicas de malha padrão. A maldição da dimensionalidade pode ser facilmente ilustrada considerando o exemplo apresentado no trabalho de (PRULIERE; CHINESTA; AMMAR, 2010).

Então, para contornar a maldição da dimensionalidade foram propostos diversos métodos, entre eles os métodos chamados de *a priori*, como o *Proper Generalized Decomposition* (PGD). Segundo (LADEVÈZE; PASSIEUX; NÉRON, 2010), o método PGD é considerado como uma técnica de resolução verdadeiramente "a priori", pois ele obtém as repostas de todos os campos desconhecidos ao mesmo tempo, sem necessidade de uma solução de referência, como no método *Proper Orthogonal Decomposition* (POD). Segundo (FALCO; NOUY, 2011), o PGD foi primeiramente introduzido com o nome *Radial-type approximation* para solução de equações diferenciais parciais

dependentes do tempo, separando as variáveis do tempo e do espaço, utilizando o contexto do método LATIN (*Large Time Increment Method*) em mecânica dos sólidos computacional, como pode ser visto no trabalho de (LADEVÈZE, 1999).

O PGD surgiu então a partir da proposta de Ladevèze na década de 1980 de representar separadamente as coordenadas de espaço e tempo como apresentado na equação (1).

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{i=N} X_i(\mathbf{x}) T_i(t), \quad (1)$$

O método *Radial Approximation* foi desenvolvido para solucionar problemas complexos não-lineares de modelos termo-mecânicos. No artigo de (AMMAR; MOKDAD *et al.*, 2006), eles utilizaram uma representação separada das variáveis em problemas de fluídos complexos, para aproximar a solução de equações diferenciais multidimensionais. Na publicação de (NOUY, 2007) ele sugere a utilização da separação de variáveis como uma técnica alternativa para resolver problemas estocásticos, de modo que a aproximação se torna muito parecida com aquela mostrada na Eq. 1. Neste caso,  $X_i$  seria funções escalares estocásticas (por exemplo variáveis aleatórias) e  $T_i$  seriam as funções determinísticas.

Atualmente, além do POD, a técnica de separação de variáveis mais usada é o *Proper Generalized Decomposition* e sua forma geral pode ser colocada de maneira semelhante a Eq. (1), apresentado na Eq. (2)

$$u(x_1, x_2, \dots, x_Q) \simeq u^N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{q=1}^N u_q^1(x_1) \times u_q^2(x_2) \times \dots \times u_q^N(x_Q), \quad (2)$$

onde  $N$  é a ordem de aproximação, que adotaremos como sendo os modos PGD, e  $Q$  é a quantidade de dimensões associadas ao problema. O método então consiste em utilizar de todas as dimensões associadas ao problema de forma a gerar uma solução com base nos produtos entre os coeficientes de cada uma dessas dimensões, a partir de um somatório, que é a quantidade de modos PGD. Segundo (GHNATIOS *et al.*, 2012), o número de modos PGD,  $N$ , necessários para uma solução precisa, não é função da dimensão  $D$ , mas dependente da regularidade da solução, evitando assim a complexidade exponencial em relação à dimensão do problema.

Considerando um problema que apresente  $D$  dimensões e com  $M$  graus de liberdade na discretização de cada coordenada, o método de malha padrão tem a quantidade de graus de liberdade dado por  $M^D$ , enquanto no método PGD, que será utilizado neste trabalho, o número de incógnitas é  $N \times M \times D$ , considerando  $N$  a quantidade de modos PGD. Por exemplo se utilizarmos 1000 nós em cada direção em um problema 3D, teríamos em uma malha padrão  $(10^3)^3 = 10^6$  graus de liberdade. Já

utilizando a técnica PDG com 5 modos, por exemplo, teríamos  $5 \times 10^3 \times 3 = 15 \cdot 10^3$  incógnitas.

Nos casos que serão abordados neste trabalho, o domínio físico deve ser decomposto como ortogonal, com condições iniciais e de contorno conhecidas ou arbitrárias. A discretização usual pelo FEM torna-se limitada devido à tridimensionalidade do domínio físico e à dificuldade de ajustar os limites das heterogeneidades com precisão suficiente. O método PGD visa lidar com estes tipos de dificuldades numéricas, resultantes do grande número de dimensões.

## 2.2 FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL - FGM

Materiais compostos apresentam uma variedade de aplicações na engenharia devido à possibilidade de manipular os aspectos do material, enfatizando as características desejáveis de dois ou mais materiais, podendo então o engenheiro desenvolver um novo material (MENDONÇA, 2005). Porém, a acentuada descontinuidade das propriedades devido a incompatibilidade de propriedades mecânicas das interfaces, ocorre concentração de tensão que resulta em falhas no material e se os compostos forem submetidos a cargas térmicas extremamente altas são propensos à descolarem (WILLIAMSON; RABIN; DRAKE, 1993), (CHO; ODEN, 2000) e (REDDY, 2000).

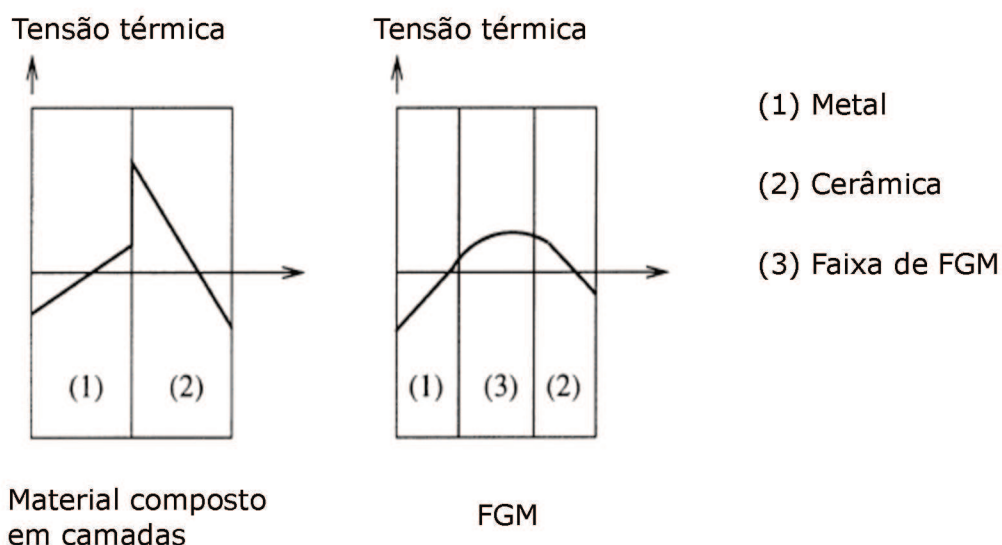
Para contornar este problema, em 1984, no Japão, foram iniciados os estudos do *Functionally Graded Material* (FGM) (CHO; ODEN, 2000) e (KOIZUMI, 1997). Naquela época o foco das pesquisas eram estruturas resistentes ao calor (CHO; ODEN, 2000), porém, posteriormente, várias pesquisas têm se desenvolvido para diversas aplicações em engenharia, entre elas os reservatórios de reatores, turbinas, materiais termoelétricos, entre outros (KOIZUMI, 1997) e (KASAEIAN; VATAN; DANESHMAND, 2011). No começo dos estudos do FGM tinha-se a ideia de desenvolver um composto que fosse resistente a altas temperaturas, de cerâmica em uma das faces, e na outra face de metal, com alta condutividade térmica, variando gradualmente a composição entre a cerâmica e o metal (KOIZUMI, 1997), como mostrado na Figura 1. Este material deveria ainda ter a propriedade de suportar à choques térmicos, ou seja, quando o corpo é submetido à uma temperatura muito alta e depois resfriado num curto intervalo de tempo (REDDY, 2000). Dependendo da aplicação, o material FGM apresenta propriedades superiores as propriedades de outros materiais, principalmente quanto a capacidade de suportar elevados gradientes térmicos. Logo, sendo o *Functionally Graded Material* amplamente utilizados em altas temperaturas, é então necessário analisar as características de distribuição de calor e também as características de condução de calor (TIAN; JIANG, 2017) em comparação com os outros materiais.

Figura 1 – Características da composição do FGM.



Conforme indicado no nome, o FGM varia continuamente a composição da microestrutura do material, que apresenta contínua e leve alteração da propriedade mecânica entre camadas ao longo da espessura, afim de obter as características desejadas (KASAEIAN; VATAN; DANESHMAND, 2011) e (REDDY, 2000). Uma comparação entre os materiais compostos clássicos em camadas e o FGM pode ser observado na Figura 2, que é apresentado no trabalho de (CHO; ODEN, 2000), onde a composição do FGM em uma das interfaces é 100% cerâmico, interface (2), em outra interface têm-se 100% metal, interface (1), e entre as duas interfaces há a composição gradual do material, interface (3), não havendo uma descontinuidade acentuada de um material para outro. Geralmente, a combinação mais usual do FGM é metal-cerâmica (KASAEIAN; VATAN; DANESHMAND, 2011).

Figura 2 – Imagem representativa das características de tensões térmicas entre material composto em camadas e FGM.



Fonte: (CHO; ODEN, 2000).

Observa-se então que as principais preocupações do FGM são: a composição interna do material e a espessura das camadas, pois o comportamento mecânico do material é sensivelmente afetado por estes dois fatores (VATANABE; RUBIO; SILVA, 2014). Existem diversos métodos para a fabricação do FGM, por exemplo: deposição química em fase e física de vapor, mostrado em (HABIG, 1986) e (HIRAI; SASAKI, 1991); metalurgia do pó, mostrado em (CHENGLIN *et al.*, 1999) e (ZHU *et al.*, 2001); processo de fundição, que pode ser visto em (EBHOTA; JEN, 2017); impressão tridimensional e impressão a jato de tinta cerâmica, sendo que estes dois métodos podem ser vistos em (MOTT; EVANS, 1999) e (WANG; SHAW, 2006); entre outros.

Neste trabalho será adotada como referência os materiais FGM utilizados no trabalho de (KASAEIAN; VATAN; DANESHMAND, 2011). O material usado é o Ti-ZrO<sub>2</sub>, devido à potencial aplicação deste na indústria aeroespacial.

### 2.3 FENÔMENO DE GIBBS

O fenômeno de Gibbs está presente no trabalho quanto tenta-se utilizar o método PGD para solucionar problemas com inclusões, onde surge oscilações em torno da descontinuidade semelhante as oscilações nas séries de Fourier com descontinuidade. Quando series de Fourier são utilizadas para aproximar uma função com descontinuidades, ocorrem oscilações que não convergem em torno desta descontinuidade, sendo este fenômeno chamado de Fenômeno de Gibbs (FOSTER; RICHARDS, 1991) (KELLY, 1996) (HEWITT; HEWITT, 1979) e (FAY; HENDRIK KLOPPERS, 2001). O Fenômeno de Gibbs foi observado no final século 19, mais precisamente 1898, quando Michelson e Stratton em (MICHELSON; STRATTON, 1898) construíram uma máquina capaz de produzir gráficos de séries trigonométricas finitas. Eles obtiveram diversos resultados com esta máquina que eles chamaram de analisador harmônico.

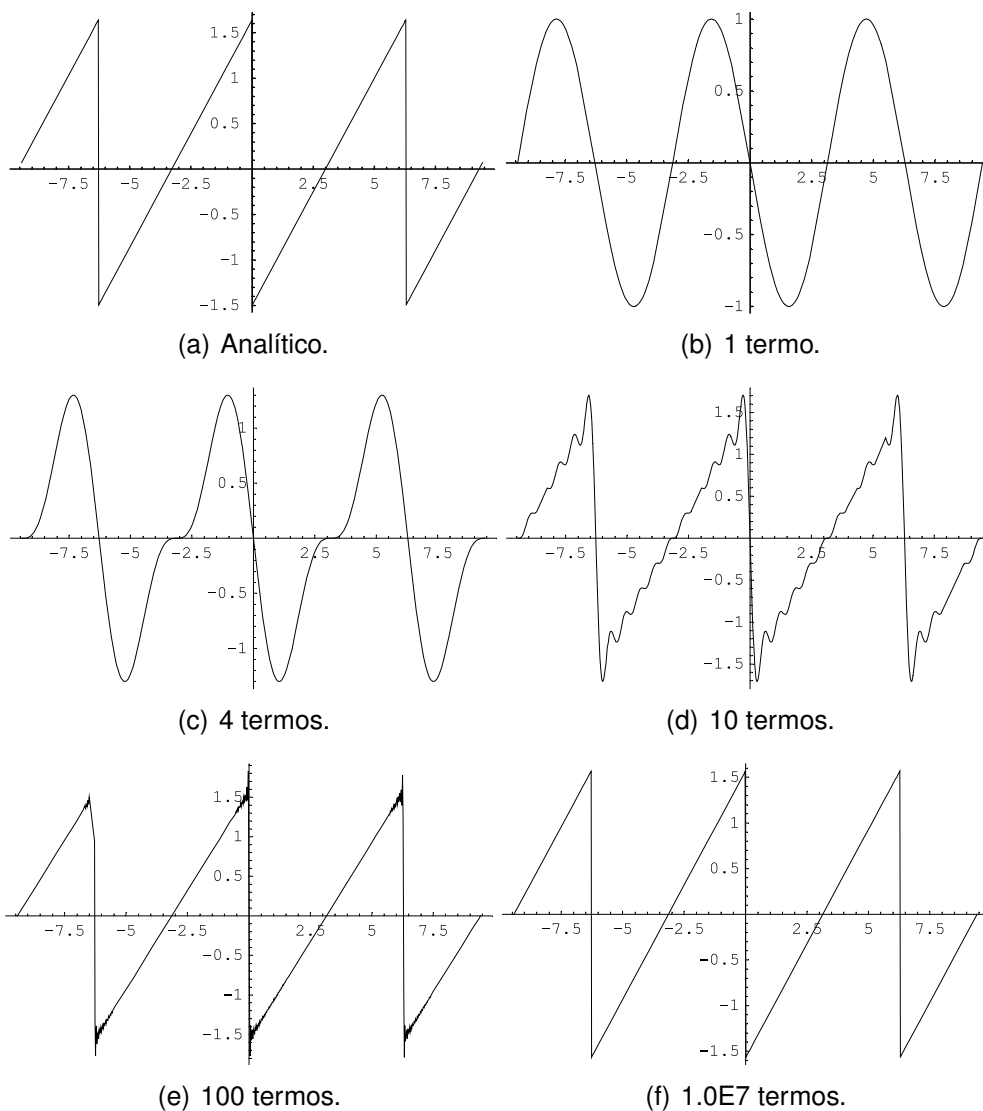
Uma das Séries de Fourier que eles testaram foi a seguinte

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sen}(kx)}{k} = \frac{1}{2}x \quad (-\pi < x < \pi); \quad (3)$$

que é apresentado na Figura 3.

O teste que eles fizeram apresentavam gráficos das somas parciais das séries com até 80 termos e não era suficientemente preciso para representar o Fenômeno de Gibbs. Mesmo assim, foi possível observar oscilações em torno das descontinuidades como apresentado em (HEWITT; HEWITT, 1979). Michelson com os resultados em mãos do analisador harmônico publicou um artigo ainda em 1898, referindo-se à série apresentada na Eq. 3 e apresentando críticas sobre a afirmação de que ela convergia para  $\frac{1}{2}x$  no intervalo  $(-\pi < x < \pi)$ . Outros pesquisadores condenaram as críticas que Michelson havia feito e sendo assim, ele voltou a testar a mesma série de forma

Figura 3 – Gráficos da função  $1/2x$  no intervalo de  $(-\pi < x < \pi)$



mais detalhada. Os erros foram atribuídos ao equipamento construído por Michelson e Stratton.

Ainda em 1898 Gibbs afirmou que se  $k$  tendesse ao infinito, então a Série de Fourier tenderia à  $\frac{1}{2}x$ . Então em 1899, Gibbs publicou um trabalho que explicava claramente a diferença entre

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sen}(kx)}{k} \quad \text{e} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\text{sen}(kx)}{k}.$$

Gibbs fez mais algumas descobertas sobre tal fenômeno e somente em 1906 uma publicação de Bôcher introduziu o termo Fênomeno de Gibbs. De fato, o importante é que há diferença entre a convergência de uma função descontínua e uma

função contínua, sendo que a função descontínua apresenta o Fenômeno de Gibbs, ou seja, uma dificuldade maior para a convergência se comparada com as funções contínuas.

## 2.4 O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

Vamos iniciar considerando um corpo sujeito à carregamentos adequados e condições de contorno, com a forma geométrica de um volume regular  $\Omega$  com dimensões  $\Omega = L_x \times L_y \times L_z$  ao longo das coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . O contorno  $\Gamma$  do corpo é composto por seis faces designadas como  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ , onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são normais à  $-x, +x$ ,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  são normais à  $-y, +y$ ,  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$  são normais à  $-z, +z$ .

A forma local da primeira lei da termodinâmica e os contornos e valores iniciais correspondentes, considerando a densidade do material e o calor específico constantes, são:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} &= b, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t \in I \equiv (0, t_{\max}], \\ \theta(\mathbf{x}, t) &= \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, t \in I, \\ q(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{k} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = h(\mathbf{x}, t), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_q, t \in I, \\ \theta(\mathbf{x}, 0) &= \bar{T}_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\theta(\mathbf{x}, t)$  é o campo de temperatura,  $\rho$  a densidade do material, em  $\text{kg/m}^3$ ,  $c$  é o calor específico, em  $\text{Joules/kg}^\circ\text{C}$ ,  $b(\mathbf{x})$  é a fonte de calor gerada por unidade de volume, em  $\text{W/m}^3$  e  $q$  é o fluxo de calor por unidade de área, em  $\text{W/m}^2$ , normal ao contorno.  $\bar{T}$  e  $h$  são a temperatura e o fluxo de calor nas partes  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_q$  do contorno. A relação constitutiva considerada é a Lei de Fourier, que é colocada da seguinte forma:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla \theta \quad (6)$$

e  $\mathbf{k}$  é a matriz anisotrópica da propriedade de condutividade térmica do material, em  $\text{W/m}^\circ\text{C}$ . Em geral,  $\mathbf{k}$  é considerado ser uma matriz simétrica positiva e, em um meio heterogêneo,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ . Em um material não linear,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \theta)$ .

Em caso de um problema estacionário, ou seja, a variação da temperatura ao longo do tempo é nula, (5) simplifica para

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta) &= -b, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \theta(\mathbf{x}) &= \bar{T}(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ q(\mathbf{x}) &= (\mathbf{k} \nabla \theta) \cdot \mathbf{n} = h(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_q. \end{aligned} \quad (7)$$



No caso em que o material for homogêneo e isotrópico, o problema estacionário, (7), simplifica para

$$\begin{aligned} k\nabla^2\theta &= -b, \quad \text{isto é, } kT_{,jj} = -b, \\ \theta(\mathbf{x}) &= \bar{T}(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ q &= k\nabla T = h(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_q. \end{aligned} \quad (8)$$

Considera-se a decomposição do campo da temperatura como

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{onde} \\ T(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ G(\mathbf{x}) &= \bar{T}(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, \end{aligned} \quad (9)$$

A forma fraca do problema (7) (problema estacionário com material heterogêneo) é: Encontrar  $T \in Var$  de tal modo que

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot (\mathbf{k}\nabla T) \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u}b \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \hat{u}h \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot (\mathbf{k}\nabla G) \, d\Omega, \quad \text{para } \forall \hat{u} \in Var, \quad (10)$$

onde  $\hat{u}$  é a função peso.

A solução aproximada do método de elementos finitos é obtida pela discretização

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{U} \quad \text{e} \quad \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{U}}, \quad (11)$$

onde  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  é uma matriz das funções de forma de elementos finitos,  $\mathbf{U}$  e  $\hat{\mathbf{U}}$  são correspondentes aos vetores com os valores nodais da temperatura e das funções peso. Assim, os gradientes são discretizados por

$$\nabla T = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U} \quad \text{e} \quad \nabla \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{U}} \quad (12)$$

onde  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  é a derivada das funções de forma ( $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ ).

Portanto, a Eq. (10) resulta nas seguintes equações do sistema algébrico

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} \, d\Omega}_{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T h \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \nabla G \, d\Omega}_{\mathbf{F}} \quad (13)$$

isto é,

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

onde a matriz do problema algébrico  $\mathbf{K}$  é no presente trabalho é chamada de matriz de rigidez e  $\mathbf{F}$ , a excitação, o vetor do lado direito do problema é chamado de força e  $\mathbf{U}$  é o vetor solução do problema.

### 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS

Neste capítulo será descrita as formulações desenvolvidas para a solução aproximada do problema de condução de calor e também da representação PGD dos dados escalares utilizando o *Proper Generalized Decomposition* (PGD). Toda a formulação considera a separação de variáveis entre as coordenadas do espaço em cada uma das dimensões associadas. A formulação descrita aqui generaliza a ideia explorada nos trabalhos de (BOGNET *et al.*, 2012) e (MENDONÇA, 2017).

#### 3.1 PGD NO ESPAÇO PARA O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR ESTÁCIONÁRIO

Vamos iniciar considerando um corpo sujeito a carregamentos adequados e condições de contorno, com a forma geométrica de um volume regular  $\Omega$  com dimensões  $\Omega = L_x \times L_y \times L_z$  ao longo das coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Essa forma do domínio é adequada ao PGD e aplica-se a volumes representativos em análises de homogeneidade de propriedades de material em meios heterogêneos. O contorno  $\Gamma$  do corpo é composto por seis faces,  $f_1$  à  $f_6$ , designadas como  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ , onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são normais orientadas ao longo de  $-x, +x$ ,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  normais orientadas ao longo de  $-y, +y$ , e similarmente para  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ . As coordenadas das faces  $f = 1$  e  $2$  são  $x_f = 0$  e  $L_x$ , para as faces  $f = 3$  e  $4$  as coordenadas são  $y_f = 0$  e  $L_y$ . Nesta seção vamos considerar a forma forte (8) com a decomposição (9) e a seguinte forma: dado  $G \in Kin$ , encontrar  $T \in Var$

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot (\mathbf{k} \nabla T) \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} b \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \hat{u} h \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot (\mathbf{k} \nabla G) \, d\Omega, \quad \text{para } \forall \hat{u} \in Var, \quad (15)$$

onde o conjunto de funções de solução e de variação admissíveis são iguais, definidos por

$$Kin = Var = \{f \in H^1(\Omega), \text{ de modo que } f(\mathbf{x}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Gamma_u\}. \quad (16)$$

Quanto aos conjuntos  $Kin$  e  $Var$ , e principalmente ao termo variação, estes podem ser vistos no trabalho de (MENDONÇA; FANCELLO, 2019).

Considerar válida a representação PGD de  $k(\mathbf{x})$  e  $b(\mathbf{x})$  como,

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{nb} L_j b_{xj}(x) b_{yj}(y) b_{zj}(z), \\ k(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{nk} D_l k_{xl}(x) k_{yl}(y) k_{zl}(z), \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $nb$  e  $nk$  são os modos necessários para a representação PGD da fonte de calor e da condutividade térmica, respectivamente. Considerar também a representação da temperatura prescrita e o fluxo de calor nas seis faces,  $f = 1, 2, \dots, 6$ , no contorno:

$$\begin{aligned}\bar{T}_f(\mathbf{x}) &= \delta_{Tf} \sum_{s=1}^{ns} J_s G_{fxs}(x) G_{fys}(y) G_{fzs}(z), \\ h_f(\mathbf{x}) &= \delta_{hf} \sum_{r=1}^{nh} H_r h_{fxr}(x) h_{fyr}(y) h_{fzr}(z),\end{aligned}\quad (18)$$

onde  $ns$  e  $nh$  são os modos necessários para a representação PGD da temperatura e do fluxo de calor prescritos, respectivamente.  $\delta_{Tf} = 1$  se  $\Gamma_f \in \Gamma_u$  e  $\delta_{Tf} = 0$  senão  $\delta_{hf} = 1$  se  $\Gamma_f \in \Gamma_q$  e  $\delta_{hf} = 0$ . Observa-se que, como cada face é ortogonal a uma das direções cartesianas, em cada face das representações (18) uma das funções está ausente. Por exemplo, se a face  $f = 1$  teve a temperatura prescrita,  $T_{fxp}(\mathbf{x}) = 1$ , e  $\bar{T}_f(\mathbf{x})$  depende apenas de  $(y, z)$ . Em geral, se  $f = 1$  ou  $2$ ,  $G_{fxs}(x) = h_{fxr}(x) = 1$ . Se  $f = 3$  ou  $4$ ,  $G_{fys}(y) = h_{fyr}(y) = 1$ .

Considera-se que existam  $nu - 1$  modos PGD disponíveis, e procura-se o próximo modo  $T_{nu}(\mathbf{x})$ . Então, têm-se a seguinte representação:

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{m=1}^{nu} T_{xm}(x) T_{ym}(y) T_{zm}(z)}_{T_0(\mathbf{x})} + \underbrace{T_x(x) T_y(y) T_z(z)}_{T_{nu}(\mathbf{x})}, \quad \text{isto é, } T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) + T_{nu}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

onde  $T_0(\mathbf{x})$  é conhecido e procura-se  $T_{nu}(\mathbf{x})$ . Busca-se uma discretização espacial para  $T_{nu}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}T_x(x) &= \sum_{p=1}^{px} T_{xp} \phi_{xp}(x) = \Phi_x(x) \mathbf{T}_x, \quad \text{para } x \in [0, L_x], \\ T_y(y) &= \sum_{p=1}^{py} T_{yp} \phi_{yp}(y) = \Phi_y(y) \mathbf{T}_y, \quad \text{para } y \in [0, L_y], \\ T_z(z) &= \sum_{p=1}^{pz} T_{zp} \phi_{zp}(z) = \Phi_z(z) \mathbf{T}_z, \quad \text{para } z \in [0, L_z].\end{aligned}\quad (20)$$

Estas funções devem satisfazer:

$$T_x(x) \in Var_x, \quad T_y(y) \in Var_y, \quad T_z(z) \in Var_z,$$

onde os espaços são  $Var_x$ ,  $Var_y$  e  $Var_z$  são definidos como:

$$\begin{aligned}
 Var_x &= \{f \in H^1(\Omega_x), \text{ isto é } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \Gamma_x\}, \\
 Var_y &= \{f \in H^1(\Omega_y), \text{ isto é } f(y) = 0 \text{ para todo } y \in \Gamma_y\}, \\
 Var_z &= \{f \in H^1(\Omega_z), \text{ isto é } f(z) = 0 \text{ para todo } z \in \Gamma_z\}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

$\Omega_x = (0, L_x)$  e  $\Gamma_x = \{0, L_x\}$  são o domínio em  $x$  no domínio e no contorno. Similarmente para  $\Omega_y, \Omega_z, \Gamma_y$  e  $\Gamma_z$ . Cada conjunto de funções  $\phi_{xp}(x), \phi_{yp}(y)$ , etc é um conjunto de funções básicas de elementos finitos, contínuos por partes, unidimensional, associado com uma determinada malha na direção de  $x, y$  ou  $z$ , e  $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y$  etc, são os coeficientes nodais desconhecidos para o  $nu$ -ésimo modo PGD da temperatura, nas malhas das direções  $x, y, z$ , respectivamente. Nota-se que essas funções  $\phi_{xp}(x), \phi_{yp}(y)$  e  $\phi_{zp}(z)$  poderiam ser quaisquer funções adotadas em elementos finitos, lineares, quadráticas, cúbicas, porém no trabalho será adotado as funções lineares. Na presente formulação,  $T_x(x) \in Var_x$ , mas nem todos os componentes  $\phi_{xp}(x)$  devem pertencer ao  $Var_x$ .  $p$  nós abrangem todo o domínio  $\bar{\Omega}_x$ . Então a condição  $T_x(x) = 0$  em  $x \in \Gamma_x$  é satisfeita ajustando adequadamente o valor nodal em  $\mathbf{T}_x$  e sua variação  $\hat{\mathbf{T}}_x$ . O mesmo vale para  $\phi_{yp}(y)$  e  $\phi_{zp}(z)$ .

O gradiente de temperatura é discretizado por

$$\begin{aligned}
 \nabla T &= \nabla T_0 + \nabla T_n, \text{ i.e.,} \\
 \nabla T &= \nabla T_0 + \left\{ \begin{array}{l} (\Phi_{x,x} \mathbf{T}_x) (\Phi_y \mathbf{T}_y) (\Phi_z \mathbf{T}_z) \\ (\Phi_x \mathbf{T}_x) (\Phi_{y,y} \mathbf{T}_y) (\Phi_z \mathbf{T}_z) \\ (\Phi_x \mathbf{T}_x) (\Phi_y \mathbf{T}_y) (\Phi_{z,z} \mathbf{T}_z) \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

A variação espacial da temperatura aplicado na forma fraca é

$$\hat{T}(\mathbf{x}) = \hat{T}_n(\mathbf{x}) = \hat{T}_x T_y T_z + T_x \hat{T}_y T_z + T_x T_y \hat{T}_z, \tag{23}$$

Utilizando as variações separadamente, têm-se os seguintes casos.

**Caso I - somente  $\hat{T}_x \neq 0$ , isto é,  $\hat{T}_y = \hat{T}_z = 0$ .** De (23),

$$\begin{aligned}
 \hat{T}(\mathbf{x}) &= \hat{T}_n(\mathbf{x}) = \hat{T}_x T_y T_z = [T_y T_z \Phi_x]_{1 \times P_x} \hat{\mathbf{T}}_x = \mathbf{N}_x \hat{\mathbf{T}}_x, \\
 \delta \nabla T &= \left[ \begin{array}{l} T_y T_z \Phi_{x,x} \\ T_{y,y} T_z \Phi_x \\ T_y T_{z,z} \Phi_x \end{array} \right]_{3 \times P_x} \hat{\mathbf{T}}_x = \mathbf{B}_x \hat{\mathbf{T}}_x.
 \end{aligned} \tag{24}$$

onde  $T_{y,y} = \Phi_{y,y} \mathbf{T}_y$  e  $T_{z,z} = \Phi_{z,z} \mathbf{T}_z$ .

**Caso II - somente  $\hat{T}_y \neq 0$ , isto é,  $\hat{T}_x = \hat{T}_z = 0$ .** De (23),

$$\begin{aligned}\hat{T}(\mathbf{x}) &= \hat{T}_n(\mathbf{x}) = T_x \hat{T}_y T_z = [T_x T_z \Phi_y]_{1 \times P_y} \hat{\mathbf{T}}_y = \mathbf{N}_y \hat{\mathbf{T}}_y, \\ \delta \nabla T &= \begin{bmatrix} T_{x,x} T_z \Phi_y \\ T_x T_z \Phi_{y,y} \\ T_x T_{z,z} \Phi_y \end{bmatrix}_{3 \times P_y} \hat{\mathbf{T}}_y = \mathbf{B}_y \hat{\mathbf{T}}_y.\end{aligned}\quad (25)$$

onde  $T_{x,x} = \Phi_{x,x} \mathbf{T}_x$ .

**Caso III - somente**  $\hat{T}_z \neq 0$ , isto é,  $\hat{T}_x = \hat{T}_y = 0$ . De (23),

$$\begin{aligned}\hat{T}(\mathbf{x}) &= \hat{T}_n(\mathbf{x}) = T_x T_y \hat{T}_z = [T_x T_y \Phi_z]_{1 \times P_z} \hat{\mathbf{T}}_z = \mathbf{N}_z \hat{\mathbf{T}}_z, \\ \delta \nabla T &= \begin{bmatrix} T_{x,x} T_y \Phi_z \\ T_x T_{y,y} \Phi_z \\ T_x T_y \Phi_{z,z} \end{bmatrix}_{3 \times P_z} \hat{\mathbf{T}}_z = \mathbf{B}_z \hat{\mathbf{T}}_z.\end{aligned}\quad (26)$$

## 3.2 FORMAS FRACAS

### 3.2.1 Caso I - somente $\hat{T}_x \neq 0$ , dados $T_y(y)$ e $T_z(z)$

A partir de (19), a temperatura aproximada do novo modo  $n$  está na forma

$$\begin{aligned}T(\mathbf{x}) &= T_0(\mathbf{x}) + [T_y T_z \Phi_x] \mathbf{T}_x, \\ &= T_0(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_x \mathbf{T}_x.\end{aligned}$$

e o gradiente

$$\nabla T = \nabla T_0 + \begin{bmatrix} T_y T_z \Phi_{x,x} \\ T_{y,y} T_z \Phi_x \\ T_y T_{z,z} \Phi_x \end{bmatrix}_{3 \times P_x} \mathbf{T}_x = \nabla T_0 + \mathbf{B}_x \mathbf{T}_x.\quad (27)$$

A forma fraca aproximada (15) torna-se

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}_x^T \left( \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \mathbf{B}_x d\Omega \right) \mathbf{T}_x &= \hat{\mathbf{T}}_x^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_x^T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_x^T h d\Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \nabla T_0 d\Omega - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \nabla G d\Omega \right),\end{aligned}\quad (28)$$

isto é,  $\mathbf{K}_x \mathbf{T}_x = \mathbf{F}_x$ , onde  $\mathbf{K}_x$  tem dimensão  $P_x \times P_x$ .

### 3.2.2 Caso II - somente $\hat{T}_y \neq 0$ , dados $T_x(y)$ e $T_z(z)$

Usando expressões análogas à (27), têm-se

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T_0(\mathbf{x}) + [T_x \ T_z \ \Phi_y] \mathbf{T}_y, \\ &= T_0(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_y \mathbf{T}_y. \end{aligned}$$

e o gradiente

$$\nabla T = \nabla T_0 + \begin{bmatrix} T_{x,x} T_z \Phi_y \\ T_x T_z \Phi_{y,y} \\ T_x T_{z,z} \Phi_y \end{bmatrix}_{3 \times P_x} \mathbf{T}_y = \nabla T_0 + \mathbf{B}_y \mathbf{T}_y. \quad (29)$$

A forma fraca aproximada (15) torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_y^T \left( \int_{\Omega} k \mathbf{B}_y^T \mathbf{B}_y \right) \mathbf{T}_y &= \hat{\mathbf{T}}_y^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_y^T b + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_y^T h \, d\Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} k \mathbf{B}_y^T \nabla T_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_y^T \nabla G \, d\Omega \right) \end{aligned} \quad (30)$$

isto é,  $\mathbf{K}_y \mathbf{T}_y = \mathbf{F}_y$ , onde  $\mathbf{K}_y$  tem dimensão  $P_y \times P_y$ .

Analogamente, para o caso III, têm-se somente  $\hat{T}_z \neq 0$ , dados  $T_x(y)$  e  $T_y(z)$ , a forma fraca (15) torna-se (com  $T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) + [T_x \ T_y \ \Phi_z] \mathbf{T}_z$ )

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_z^T \left( \int_{\Omega} k \mathbf{B}_z^T \mathbf{B}_z \right) \mathbf{T}_z &= \hat{\mathbf{T}}_z^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_z^T b + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_z^T h \, d\Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} k \mathbf{B}_z^T \nabla T_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_z^T \nabla G \, d\Omega \right) \end{aligned} \quad (31)$$

isto é,  $\mathbf{K}_z \mathbf{T}_z = \mathbf{F}_z$ , onde  $\mathbf{K}_z$  tem dimensão  $P_z \times P_z$ .

### 3.3 SEPARAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NAS MATRIZES DE RIGIDEZ

Utilizando a matriz de rigidez da Eq. (28) e a composição de  $\mathbf{B}_x$  de (24), têm-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x &= \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \mathbf{B}_x \, d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} (k T_y^2 T_z^2 \Phi_{x,x}^T \Phi_{x,x} + k T_{y,y}^2 T_z^2 \Phi_x^T \Phi_x + k T_y^2 T_{z,z}^2 \Phi_x^T \Phi_x) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (32)$$

e introduzindo a decomposição PGD em  $k$  da Eq. (17), obtém-se  $\mathbf{K}_x$  como um somatório:

$$\mathbf{K}_x = \sum_{l=1}^{nk} D_l \mathbf{K}_x^l \quad (33)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x^l = & \left( \int_x k_{xl} \Phi_{x,x}^T \Phi_{x,x} dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_z^2 dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} \Phi_x^T \Phi_x dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_{y,y}^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_z^2 dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} \Phi_{x,x}^T \Phi_{x,x} dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_{z,z}^2 dz \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Analogamente, têm-se

$$\mathbf{K}_y^l = \sum_{l=1}^{nk} D_l \mathbf{K}_y^l \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_z^l = \sum_{l=1}^{nk} D_l \mathbf{K}_z^l, \quad (35)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_y^l = & \left( \int_x k_{xl} T_{x,x}^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_y^T \Phi_y dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_z^2 dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} T_x^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_{y,y}^T \Phi_{y,y} dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_z^2 dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} T_x^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_y^T \Phi_y dy \right) \left( \int_z k_{zl} T_{z,z}^2 dz \right) \end{aligned} \quad (36)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_z^l = & \left( \int_x k_{xl} T_{x,x}^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} \Phi_z^T \Phi_z dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} T_x^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_{y,y}^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} \Phi_z^T \Phi_z dz \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} T_x^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y^2 dy \right) \left( \int_z k_{zl} \Phi_{z,z}^T \Phi_{z,z} dz \right). \end{aligned} \quad (37)$$

### 3.4 SEPARAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NO TERMO DE EXCITAÇÃO

#### 3.4.1 Termos da fonte de calor $b$

O vetor força devido à fonte de calor  $b$  Eq. (28), usando  $\mathbf{N}_x = [T_y T_z \Phi_x]$  de (24), é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_x^T b d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} T_y T_z \Phi_x^T b d\Omega \end{aligned}$$

e usando a decomposição PGD de  $b$  da Eq. (17), têm-se

$$\mathbf{F}_x = \sum_{j=1}^{nb} L_j \mathbf{F}_x^j, \quad (38)$$

onde

$$\mathbf{F}_x^j = \left( \int_x b_{xj} \Phi_x^T dx \right) \left( \int_y b_{yj} T_y dy \right) \left( \int_z b_{zj} T_z dz \right). \quad (39)$$

Analogamente para as outras partes, com  $\mathbf{N}_y = [T_x \ T_z \ \Phi_y]$  e  $\mathbf{N}_z = [T_x T_y \ \Phi_z]$ ,

$$\mathbf{F}_y = \sum_{j=1}^{nb} L_j \mathbf{F}_y^j \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_z = \sum_{j=1}^{nb} L_j \mathbf{F}_z^j \quad (40)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_y^j &= \left( \int_x b_{xj} T_x dx \right) \left( \int_y b_{yj} \Phi_y^T dy \right) \left( \int_z b_{zj} T_z dz \right), \\ \mathbf{F}_z^j &= \left( \int_x b_{xj} T_x dx \right) \left( \int_y b_{yj} T_y dy \right) \left( \int_z b_{zj} \Phi_z^T dz \right). \end{aligned} \quad (41)$$

### 3.5 DETALHES PARA CONDUÇÃO DE CALOR 2D UTILIZANDO PGD

Nesta seção será detalhado o caso bidimensional, incluindo apenas a excitação pela fonte  $b(\mathbf{x})$ , com temperatura ou fluxo nulos prescritos em cada lado do contorno.

#### 3.5.1 Matriz de coeficientes

As matrizes  $\mathbf{K}_x$  e  $\mathbf{K}_y$  das Eqs. (33)-(36) são reduzidas para um domínio 2D e também é considerado o coeficiente  $D_l$  da representação PGD de condutividade térmica  $k$  previamente incorporado em seus valores, de modo que  $D_l$  possa ser eliminado da formulação. Assim, têm-se

$$\mathbf{K}_x = \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{K}_x^l \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_y = \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{K}_y^l \quad (42)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x^l &= \left( \int_x k_{xl} \Phi_{x,x}^T \Phi_{x,x} dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y^2 dy \right) \\ &+ \left( \int_x k_{xl} \Phi_x^T \Phi_x dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_{y,y}^2 dy \right) \end{aligned} \quad (43)$$

e



$$\begin{aligned} \mathbf{K}_y^l = & \left( \int_x k_{xl} T_{x,x}^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_y^T \Phi_y dy \right) \\ & + \left( \int_x k_{xl} T_x^2 dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_{y,y}^T \Phi_{y,y} dy \right) \end{aligned} \quad (44)$$

### 3.5.2 Vetor força devido à modos anteriores

A aproximação PGD com o conjunto de  $nu$  modos convergidos é

$$T_0 = \sum_{m=1}^{nu} c_m T_{xm}(x) T_{ym}(y). \quad (45)$$

e o gradiente é

$$\nabla T_0 = \sum_{m=1}^{nu} c_m \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{xm}}{dx} T_{ym}(y) \\ T_{xm}(x) \frac{dT_{ym}}{dy} \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{nu} c_m \left\{ \begin{array}{l} (\Phi_{x,x} \mathbf{T}_{xm}) (\Phi_y \mathbf{T}_{ym}) \\ (\Phi_x \mathbf{T}_{xm}) (\Phi_{y,y} \mathbf{T}_{ym}) \end{array} \right\}. \quad (46)$$

Então o vetor força associado é colocado como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \nabla T_0 d\Omega, \\ &= - \sum_{m=1}^{nu} \int_{\Omega} k \mathbf{B}_x^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{xm}}{dx} T_{ym}(y) \\ T_{xm}(x) \frac{dT_{ym}}{dy} \end{array} \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (47)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_y^l &= - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_y^T \nabla T_0 d\Omega, \\ &= - \sum_{m=1}^{nu} c_m \int_{\Omega} k \mathbf{B}_y^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{xm}}{dx} T_{ym}(y) \\ T_{xm}(x) \frac{dT_{ym}}{dy} \end{array} \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (48)$$

onde, em 2D, as Eqs (27)-(29) 'e

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} T_y \Phi_{x,x} \\ T_{y,y} \Phi_x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} T_{x,x} \Phi_y \\ T_x \Phi_{y,y} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Usando a representação PGD de  $k$  da Eq (17)

$$\mathbf{F}_x = - \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{F}_x^l \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_y = - \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{F}_y^l \quad \text{onde} \quad (50)$$

$$\mathbf{F}_x^l = \sum_{m=1}^{nu} c_m \left\{ \left( \int_x k_{xl} \Phi_{x,x}^T \frac{dT_{xm}}{dx} dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_y T_{ym}(y) dy \right) + \left( \int_x k_{xl} \Phi_x^T T_{xm}(x) dx \right) \left( \int_y k_{yl} T_{y,y} \frac{dT_{ym}}{dy} dy \right) \right\}. \quad (51)$$

e

$$\mathbf{F}_y^l = \sum_{m=1}^{nu} c_m \left\{ \left( \int_x k_{xl} T_{x,x} \frac{dT_{xm}}{dx} dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_y^T T_{ym}(y) dy \right) + \left( \int_x k_{xl} T_x T_{xm} dx \right) \left( \int_y k_{yl} \Phi_{y,y}^T \frac{dT_{ym}}{dy} dy \right) \right\}. \quad (52)$$

### 3.5.3 Amplitude do modo

Depois que um conjunto de modos  $nu$  é obtido, é preciso procurar uma representação na forma

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{nu} c_j T_{xj}(x) T_{yj}(y) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{C} \in Var, \quad (53)$$

onde os coeficientes  $c_j$ , coletado na matriz  $\mathbf{C}$ , deve ser determinado para resolver o seguinte problema variacional: encontre  $\mathbf{C}$  de modo que

$$\int_{\Omega} k \nabla \delta_c T \cdot \nabla T d\Omega = \int_{\Omega} \delta_c T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta_c T h d\Gamma, \quad \text{para } \forall \delta_c T \text{ admissível}, \quad (54)$$

$\delta_c T$  é variacional de  $T$  em relação à  $\mathbf{C}$ . No trabalho de (LANCZOS, 2012) pode-se encontrar mais a respeito do conceito de variacional.

Considerando a discretização,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{C}, & \delta_c T(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta_c \mathbf{C}, \\ \nabla T(\mathbf{x}) &= \underbrace{\nabla \mathbf{N}(\mathbf{x})}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \mathbf{C}, & \nabla \delta_c T(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta_c \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (55)$$

Assim, o problema variacional resulta no problema algébrico

$$\left[ \int_{\Omega} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega \right] \mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T h d\Gamma, \quad \text{isto é, } \mathbf{RC} = \mathbf{F}. \quad (56)$$

Pode-se detalhar ainda mais a notação:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}) &= \left\{ T_{1x}(x) T_{1y}(y) \quad T_{2x}(x) T_{2y}(y) \quad \dots \quad T_{nux}(x) T_{nu y}(y) \right\}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} T'_{1x}(x) T_{1y}(y) & T'_{2x}(x) T_{2y}(y) & \dots & T'_{nux}(x) T_{nu y}(y) \\ T_{1x}(x) T'_{1y}(y) & T_{2x}(x) T'_{2y}(y) & \dots & T_{nux}(x) T'_{nu y}(y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

Os componentes  $\mathbf{R}$  em (56) são

$$R_{ij} = \int_{\Omega} k \left[ (T'_{ix}(x)T'_{jx}(x)) (T_{iy}(y)T_{jy}(y)) + (T_{ix}(x)T_{jx}(x)) (T'_{iy}(y)T'_{jy}(y)) \right] d\Omega$$

Considera-se  $k$  em (56) representado em modos PGD como

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{nk} k_{xl}(x)k_{yl}(y), \quad (58)$$

onde anteriormente foi incorporado os coeficientes do modo nos componentes  $k_{xl}(x)$  or  $k_{yl}(y)$ . Portanto, a matriz  $\mathbf{R}$  torna-se

$$\mathbf{R} = \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{R}^l, \quad (59)$$

onde

$$R_{ij}^l = \underbrace{\left[ \int_x k_{xl}(x) (T'_{ix}(x)T'_{jx}(x)) dx \right]}_{R_{ij}^{Xl}} \underbrace{\left[ \int_y k_{yl}(y) (T_{iy}(y)T_{jy}(y)) dy \right]}_{R_{ij}^{yl}} + \underbrace{\left[ \int_x k_{xl}(x) (T_{ix}(x)T_{jx}(x)) dx \right]}_{R_{ij}^{xl}} \underbrace{\left[ \int_y k_{yl}(y) (T'_{iy}(y)T'_{jy}(y)) dy \right]}_{R_{ij}^{Yl}}. \quad (60)$$

Portanto

$$R_{ij}^l = R_{ij}^{Xl} R_{ij}^{yl} + R_{ij}^{xl} R_{ij}^{Yl}, \quad i, j = 1, \dots, nu, \quad l = 1, nk. \quad (61)$$

Para o vetor de carga  $\mathbf{F}$  (56), limitado à fonte de calor, têm-se

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b d\Omega. \quad (62)$$

Consideraremos  $b(\mathbf{x})$  em (56) representado nos modos PGD como

$$b(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{nB} b_{xj}(x)b_{yj}(y), \quad (63)$$

onde anteriormente foi incorporado os coeficientes do modo nos componentes  $b_{xj}(x)$  or  $b_{yj}(y)$ . Portanto, o vetor  $\mathbf{F}$  torna-se

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{nB} \mathbf{F}^j, \quad (64)$$

onde

$$F_i^j = \underbrace{\left[ \int_x b_{xj}(x) T_{ix}(x) dx \right]}_{F_i^{xj}} \underbrace{\left[ \int_y b_{yj}(y) T_{iy}(y) dy \right]}_{F_i^{yj}}, \quad i = 1, \dots, nu \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, nB. \quad (65)$$

### 3.6 ALGORITMO DA IMPLEMENTAÇÃO

Existem três sistemas algébricos de equações para os coeficientes nodais de um novo modo PGD  $T_n(\mathbf{x})$  discretizado como nas Eqs. (19)-(20):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x \mathbf{T}_x &= \mathbf{F}_x, \\ \mathbf{K}_y \mathbf{T}_y &= \mathbf{F}_y, \\ \mathbf{K}_z \mathbf{T}_z &= \mathbf{F}_z, \end{aligned} \quad (66)$$

de dimensões  $P_x$ ,  $P_y$  e  $P_z$ , onde essas dimensões representam as quantidades de números de graus de liberdade em cada malha 1D e pode-se considera-la pequena, quando comparado com uma malha 3D completa. As matrizes  $\mathbf{K}_x$ ,  $\mathbf{K}_y$  e  $\mathbf{K}_z$  são matrizes tri-diagonais, ou seja, utilizando o método PGD é preciso resolver sucessivamente três problemas com matrizes tri-diagonais. Todos os três sistemas são acoplados em rigidez e força, ou seja,  $\mathbf{K}_x = \mathbf{K}_x(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z)$  e  $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_x(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z)$ , etc. É um sistema não linear de equações em termos das incógnitas ( $P_x + P_y + P_z$ ). Um método possível de solução que a prática tem mostrado ser adequada em diversas classes de problemas, é o método por iterações sucessivas:

1. Começa com uma tentativa inicial  $\mathbf{T}^i = (\mathbf{T}_x^i, \mathbf{T}_y^i, \mathbf{T}_z^i)$ ,  $i = 0$ ;
2. Calcula  $\mathbf{K}_x^i$  e  $\mathbf{F}_x^i$  a partir de  $\mathbf{T}^i$ . Resolve  $\mathbf{K}_x^i \mathbf{T}_x^{i+1} = \mathbf{F}_x^i$ , e modifica  $\mathbf{T}^i = (\mathbf{T}_x^{i+1}, \mathbf{T}_y^i, \mathbf{T}_z^i)$ ;
3. Calcula  $\mathbf{K}_y^i$  e  $\mathbf{F}_y^i$  a partir de  $\mathbf{T}^i$ . Resolve  $\mathbf{K}_y^i \mathbf{T}_y^{i+1} = \mathbf{F}_y^i$ , e modifica  $\mathbf{T}^i = (\mathbf{T}_x^{i+1}, \mathbf{T}_y^{i+1}, \mathbf{T}_z^i)$ ;
4. Calcula  $\mathbf{K}_z^i$  e  $\mathbf{F}_z^i$  a partir de  $\mathbf{T}^i$ . Resolve  $\mathbf{K}_z^i \mathbf{T}_z^{i+1} = \mathbf{F}_z^i$ , e gera  $\mathbf{T}^{i+1} = (\mathbf{T}_x^{i+1}, \mathbf{T}_y^{i+1}, \mathbf{T}_z^{i+1})$ ;
5. Teste de convergência da iteração  $i$  do presente modo:
  - a) Se não convergiu,  $i = i + 1$  e *GOTO* etapa 2;
  - b) Se convergiu,
    - i. Normalizar  $\mathbf{T}^{i+1}$  pelo máximo de  $\mathbf{T}_x^{i+1}$ ,  $\mathbf{T}_y^{i+1}$  e  $\mathbf{T}_z^{i+1}$ ;
    - ii. Fazer  $nu = nu + 1$ ;
    - iii. Considerar o novo modo PGD sendo:  $T_{nu}(\mathbf{x}) = T_x^{i+1}(x)T_y^{i+1}(y)T_z^{i+1}(z)$ ;

- iv. Determinar as amplitudes  $c_m$  do conjunto de modos  $nu$ ;
- v. Teste de convergência do conjunto de modos  $nu$ . Se convergiu, *STOP*.
- vi. Se não convergiu, procurar um novo modo PGD  $T_n(\mathbf{x})$ : *GOTO* etapa 1

As funções base podem ser funções 1D lineares contínuas por partes. A experiência mostra que para as suposições na etapa 1 do algoritmo, os vetores unitários são suficientes:  $\mathbf{T}_x = \mathbf{T}_y = \mathbf{T}_z = \{1, 1, 1, \dots, 1\}^T$ , modificados para atender às condições de contorno de Dirichlet.

### 3.7 GERAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO PGD DE DADOS ESCALARES

Considera-se um campo escalar, como uma propriedade de material (componente de condutividade térmica  $k_{ij}(\mathbf{x})$  e/ou componente do módulo de elasticidade  $E_{ij}(\mathbf{x})$  e/ou um carregamento térmico  $b(\mathbf{x})$ , fluxo de calor no contorno  $h(x)$ , etc). Considere a variação num domínio altamente oscilatório ou aleatório, como em um material heterogêneo. Busca-se nessa parte da formulação representar um dado conhecido num formato de separação de variáveis PGD. Essa representação é necessária para utilizar no problema, no caso deste trabalho, condução de calor, mas de forma semelhante pode-se aplicar em problemas de elasticidade. A representação num formato PGD possibilita também fazer as integrações da forma fraca do problema em formato desacoplado. Então a representação PGD para  $k(\mathbf{x})$  é colocada como:

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{l=1}^{nk} D_l k_{xl}(x) k_{yl}(y) k_{zl}(z)}_{k_0(\mathbf{x})} + \underbrace{k_x(x) k_y(y) k_z(z)}_{k_n(\mathbf{x})}, \quad \text{isto é, } \tilde{k}(\mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}) + k_n(\mathbf{x}), \quad (67)$$

onde  $k_0(\mathbf{x})$  é conhecido e procura-se  $k_n(\mathbf{x})$ . Os coeficientes  $D_l$  são determinados em um segundo passo do método, depois de cada modo já determinado. No primeiro passo,  $k_0(\mathbf{x})$  é omitido. Define-se o erro como

$$E(k_x, k_y, k_z) = \int_{\Omega} [k(\mathbf{x}) - (k_0 + k_x k_y k_z)]^2 d\Omega, \quad (68)$$

onde  $k(\mathbf{x})$  são os dados fornecidos da propriedade. As variações do erro são

$$\begin{aligned} \delta E_x(k_x, k_y, k_z) &= \frac{\partial E}{\partial k_x} \delta k_x = 2 \int_{\Omega} [k(\mathbf{x}) - \tilde{k}] \delta k_x k_y k_z d\Omega = 0, \\ \delta E_y(k_x, k_y, k_z) &= \frac{\partial E}{\partial k_y} \delta k_y = 2 \int_{\Omega} [k(\mathbf{x}) - \tilde{k}] \delta k_y k_x k_z d\Omega = 0, \\ \delta E_z(k_x, k_y, k_z) &= \frac{\partial E}{\partial k_z} \delta k_z = 2 \int_{\Omega} [k(\mathbf{x}) - \tilde{k}] \delta k_z k_x k_y d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (69)$$

A discretização espacial para  $k_n(\mathbf{x})$  é:

$$\begin{aligned}
k_x(x) &= \sum_{p=1}^{nx} Q_{xp} \phi_{xp}(x) = \Phi_x(x) \mathbf{Q}_x, \\
k_y(y) &= \sum_{p=1}^{ny} Q_{yp} \phi_{yp}(y) = \Phi_y(y) \mathbf{Q}_y, \\
k_z(z) &= \sum_{p=1}^{nz} Q_{zp} \phi_{zp}(z) = \Phi_z(z) \mathbf{Q}_z.
\end{aligned} \tag{70}$$

onde  $\mathbf{Q}_x$ ,  $\mathbf{Q}_y$  e  $\mathbf{Q}_z$  são vetores com os valores nodais da aproximação. Eq.(69)<sub>1</sub> fornece

$$\int_{\Omega} [k(\mathbf{x}) - k_0] k_y k_z \delta k_x d\Omega = \int_{\Omega} k_x k_y^2 k_z^2 \delta k_x d\Omega. \tag{71}$$

A variação  $\delta k_x$  é representada a partir da Eq. (70)<sub>1</sub>

$$\delta k_x = \Phi_x(x) \hat{\mathbf{Q}}_x. \tag{72}$$

Portanto, a Eq. (71) torna-se

$$\hat{\mathbf{Q}}_x^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_x^T [k(\mathbf{x}) - k_0] k_y k_z d\Omega}_{\mathbf{F}_x} = \hat{\mathbf{Q}}_x^T \underbrace{\left[ \int_x \Phi_x^T \Phi_x dx \int_y k_y^2 dy \int_z k_z^2 dz \right]}_{\mathbf{K}_x} \mathbf{Q}_x, \tag{73}$$

$$\mathbf{K}_x \mathbf{Q}_x = \mathbf{F}_x, \tag{74}$$

onde  $\mathbf{K}_x$  é uma matriz simétrica semelhante a matriz massa conhecida de elementos finitos, que é obtida a partir de três integrais 1D independentes. De qualquer maneira, neste ponto,  $\mathbf{F}_x$  exige integração acoplada nas três direções, devido aos dados físicos de  $k(\mathbf{x})$ .

Analogamente, obtêm-se os sistemas para  $y$  e  $z$ :

$$\mathbf{K}_y \mathbf{Q}_y = \mathbf{F}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_z \mathbf{Q}_z = \mathbf{F}_z, \tag{75}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_y &= \int_x k_x^2 dx \int_y \Phi_y^T \Phi_y dy \int_z k_z^2 dz & \mathbf{F}_y &= \int_{\Omega} \Phi_y^T [k(\mathbf{x}) - k_0] k_x k_z d\Omega, \\
\mathbf{K}_z &= \int_x k_x^2 dx \int_y k_y^2 dy \int_z \Phi_z^T \Phi_z dz & \mathbf{F}_z &= \int_{\Omega} \Phi_z^T [k(\mathbf{x}) - k_0] k_x k_y d\Omega.
\end{aligned} \tag{76}$$

Os sistemas algébricos (74)-(75) são acoplados e não lineares. As soluções para eles podem ser obtidas usando o método de iterações sucessivas descrita na Seção 3.6.

O termo da força em (73) pode ser decomposto usando a representação separada PGD de  $k_0 = \sum_{l=1}^{nk} D_l k_{xl}(x) k_{yl}(y) k_{zl}(z)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_x &= \int_{\Omega} \Phi_x^T [k(\mathbf{x}) - k_0] k_y k_z d\Omega, \\
&= \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{F}_x^T k_0 k_y k_z d\Omega, \\
&= \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega - \sum_{l=1}^{nk} D_l \left( \int_x \Phi_x^T k_{xl} dx \right) \left( \int_y k_{yl} k_y dy \right) \left( \int_z k_{zl} k_z dz \right), \quad (77) \\
&= \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega - \sum_{l=1}^{nk} \mathbf{F}_x^l, \\
&= \mathbf{F}_x^k - \mathbf{F}_z^0.
\end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_y &= \int_{\Omega} \Phi_y^T k(\mathbf{x}) k_x k_z d\Omega - \sum_{l=1}^{nk} D_l \left( \int_x k_{xl} k_x dx \right) \left( \int_y \Phi_y^T k_{yl} dy \right) \left( \int_z k_{zl} k_z dz \right), \\
\mathbf{F}_z &= \int_{\Omega} \Phi_z^T k(\mathbf{x}) k_x k_y d\Omega - \sum_{l=1}^{nk} D_l \left( \int_x k_{xl} k_x dx \right) \left( \int_y k_{yl}^2 dy \right) \left( \int_z \Phi_z^T k_{zl} dz \right), \quad (78)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{F}_y^k - \mathbf{F}_y^0 \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_z = \mathbf{F}_z^k - \mathbf{F}_z^0, \quad (79)$$

Portanto, as partes  $\mathbf{F}_x^0$ ,  $\mathbf{F}_y^0$  e  $\mathbf{F}_z^0$  podem ser integradas separadamente em cada direção, e somente  $\mathbf{F}_x^k$ ,  $\mathbf{F}_y^k$  e  $\mathbf{F}_z^k$  devem ser integradas de forma acoplada.

### 3.8 GERAÇÃO DE DADOS PARA TESTE

Considera-se aqui dois tipos de dados de propriedade usados nos testes PGD: funções harmônicas contínuas e duas fases de material (que é dada por uma distribuição descontínua da propriedade). As duas formas podem ser geradas randômicas ou podem ser geradas com gradientes.

#### 3.8.1 Variação harmônica

Considera-se a seguinte descrição

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} \left( A_m \text{sen} \frac{i_m \pi x}{L_x} \text{sen} \frac{j_m \pi y}{L_y} \text{sen} \frac{k_m \pi z}{L_z} + B_m \cos \frac{i_m \pi x}{L_x} \cos \frac{j_m \pi y}{L_y} \cos \frac{k_m \pi z}{L_z} \right), \quad (80)$$

com  $m, i_m, j_m, k_m \in \mathbb{N}$ , e  $L_x, L_y, L_z \in \mathbb{R}$ , são as dimensões do domínio.  $A_m, B_m$  and  $i_m, j_m, k_m$  podem ser arbitrários ou obtidos a partir de um gerador de números aleatórios.

Essa representação possui coordenadas desacopladas, ou seja, as integrais podem ser calculadas de forma separada para cada uma das dimensões associadas. Substituindo em  $\mathbf{F}_x^k = \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega$  de (77) obtém-se

$$\mathbf{F}_x^k = \sum_{m=1}^{nm} A_m \left( \int_x \Phi_x^T \text{sen} \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y k_y \text{sen} \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z k_z \text{sen} \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right) + \sum_{m=1}^{nm} B_m \left( \int_x \Phi_x^T \cos \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y k_y \cos \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z k_z \cos \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right), \quad (81)$$

e de forma semelhante,

$$\mathbf{F}_y^k = \sum_{m=1}^{nm} A_m \left( \int_x k_x \text{sen} \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y \Phi_y^T \text{sen} \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z k_z \text{sen} \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right) + \sum_{m=1}^{nm} B_m \left( \int_x k_x \cos \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y \Phi_y^T \cos \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z k_z \cos \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right), \quad (82)$$

$$\mathbf{F}_z^k = \sum_{m=1}^{nm} A_m \left( \int_x k_x \text{sen} \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y k_y \text{sen} \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z \Phi_z^T \text{sen} \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right) + \sum_{m=1}^{nm} B_m \left( \int_x k_x \cos \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \right) \left( \int_y k_y \cos \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \right) \left( \int_z \Phi_z^T \cos \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \right) \quad (83)$$

### 3.8.2 Variação polinomial

Considera-se a seguinte descrição

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} A_m x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m}, \quad (84)$$

com  $m, i_m, j_m, k_m \in \mathbb{N}$ .  $A_m$  e  $i_m, j_m, k_m$  podem ser arbitrários ou obtidos a partir de um gerador de números aleatórios.

Essa representação possui coordenadas desacopladas. Substituindo em  $\mathbf{F}_x^k = \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega$  de (77) obtém-se

$$\mathbf{F}_x^k = \sum_{m=1}^{nm} A_m \left( \int_x \Phi_x^T x^{i_m} dx \right) \left( \int_y k_y y^{j_m} dy \right) \left( \int_z k_z z^{k_m} dz \right), \quad (85)$$

e de forma similar para  $\mathbf{F}_y^k$  e  $\mathbf{F}_z^k$ .

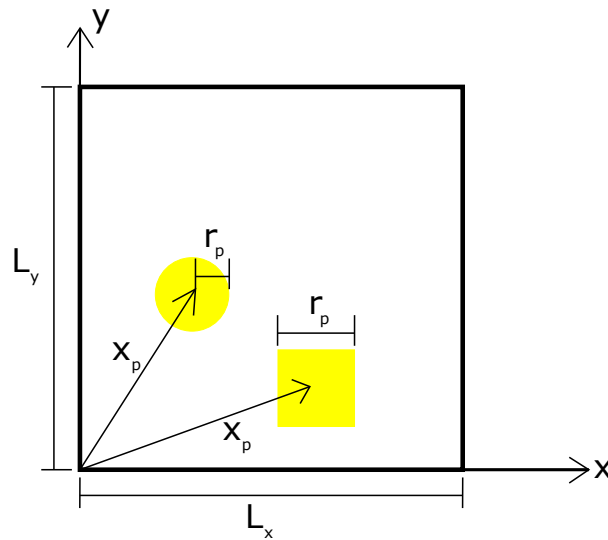
### 3.8.3 Material com duas fases

Considere um material heterogêneo constituído por uma matriz de propriedade  $k^m$  e inclusões de propriedade  $k^i$ . Ambas, matriz e inclusão, são consideradas isotrópicas homogêneas. Considere que cada inclusão  $p$  tem seu centro geométrico localizado



na coordenada  $x_p$  e possa ser esférica ou cúbica de raio/lado  $r_p$  como ilustrado na Figura 4. Para simplificar o subseqüente uso, as inclusões cúbicas são restritas ao caso em que seus lados são paralelos aos eixos cartesianos globais. Considere que a posição e a dimensão possam ser determinadas randomicamente. Neste caso, superposição parcial ou total das inclusões é possível. Uma maneira possível de evitar que isso aconteça, consiste em pós-processamento dos dados, testando cada par de inclusão e eliminando aquelas que apresentam superposição parcial ou total.

Figura 4 – Ilustração das posições das inclusões  $p$ , da coordenada  $x_p$  e raio/lado  $r_p$ .



Considera-se o caso da inclusão em um **caso**  $n$ -dimensional com as propriedades decompostas como

$$k^i = k^m + \Delta k. \quad (86)$$

Portanto,  $\mathbf{F}_x^k = \int_{\Omega} \Phi_x^T k(\mathbf{x}) k_y k_z d\Omega$  da Eq. (77) torna-se

$$\mathbf{F}_x^k = k^m \int_{\Omega} \Phi_x^T k_y k_z d\Omega + \Delta k \int_{\Omega_i} \Phi_x^T k_y k_z d\Omega \quad (87)$$

onde  $\Omega_i$  é a união do domínio da inclusão.  $k^m$  é uma constante em  $\Omega$  e  $\Delta k$  é constante em toda inclusão. Se a inclusão for cúbica com as faces paralelas aos eixos globais, ambas as integrais podem ser desacopladas nas direções cartesianas:

$$\mathbf{F}_x^k = k^m \int_x \Phi_x^T dx \int_y k_y dy \int_z k_z dz + \Delta k \sum_{p=1}^{n_i} \int_{x \in \Omega_p} \Phi_x^T dx \int_{y \in \Omega_p} k_y dy \int_{z \in \Omega_p} k_z dz \quad (88)$$

$n_i$  é o número de inclusões e  $\Omega_p$  é o domínio da  $p$ -ésima inclusão. De forma similar

$$\mathbf{F}_y^k = k^m \int_x k_x dx \int_y \Phi_y^T dy \int_z k_z dz + \Delta k \sum_{p=1}^{n_i} \int_{x \in \Omega_p} k_x dx \int_{y \in \Omega_i} \Phi_y^T dy \int_{z \in \Omega_p} k_z dz$$

$$\mathbf{F}_z^k = k^m \int_x k_x dx \int_y k_y dy \int_z \Phi_z^T dz + \Delta k \sum_{p=1}^{ni} \int_{x \in \Omega_p} k_x dx \int_{y \in \Omega_p} k_y dy \int_{z \in \Omega_p} \Phi_z^T dz \quad (89)$$

Desta maneira, nos testes para a representação PGD, todas as integrais podem ser desacopladas nas direções cartesianas se os dados gerados forem harmônicos ou com duas fases de material. De qualquer maneira, para um material real, os vetores força na Eq. (77) terá de ser obtido por integrais 3D acopladas. No caso de inclusões esféricas, por exemplo, a segunda integral na Eq. (87) também tem de ser obtida de forma acoplada entre as dimensões.

### 3.9 DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE DOS MODOS DE DADOS

Considera-se que, em um determinado ponto do cálculo, existe um conjunto de modos  $nk$ ,  $k_{xl}(x)k_{yl}(y)k_{zl}(z)$ . Cada função  $k_{xl}(x)k_{yl}(y)k_{zl}(z)$ , foi normalizada pelo seu valor máximo ou não. Nesta etapa, é útil gerar uma nova determinação de coeficientes  $D_l$ , considerando os modos fixos, ou seja, determinar  $D_l$  de modo que

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{nk} D_l k_{xl}(x)k_{yl}(y)k_{zl}(z) \quad (90)$$

melhora a aproximação da função dada  $k(\mathbf{x})$ . Normalmente, uma vez que cada modo é convergido, eles são normalizados. A normalização pode ser feita pelo valor nodal máximo em cada direção, para cada modo. Por exemplo, para um determinado modo  $l$  na Eq. (90),

$$\mathbf{Q}_x = \frac{1}{\max_j \mathbf{Q}_{xj}} \mathbf{Q}_x, \quad \mathbf{Q}_y = \frac{1}{\max_j \mathbf{Q}_{yj}} \mathbf{Q}_y, \quad \text{etc}, \quad (91)$$

onde  $\max_j \mathbf{Q}_{xj}$  é o valor máximo absoluto das entradas em  $\mathbf{Q}_x$ .

Define-se o erro funcional como

$$E(D_l) = \int_{\Omega} \left[ k(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{nk} D_l k_{xl}(x)k_{yl}(y)k_{zl}(z) \right]^2 d\Omega. \quad (92)$$

A variação do erro em relação à  $D_s$  gera um conjunto de  $nk$  equações  $\partial E / \partial D_s = 0$ , para  $s = 1, \dots, nk$ . Cada equação tem a forma

$$\underbrace{\int_{\Omega} k(\mathbf{x})k_{xs}(x)k_{ys}(y)k_{zs}(z)d\Omega}_{G_*} = \sum_{l=1}^{nk} \underbrace{\left( \int_x k_{xs}k_{xl}dx \int_y k_{ys}k_{yl}(y)dy \int_z k_{zs}k_{zl}(z)dz \right)}_{\sigma_{*l}} D_l, \quad (93)$$

para  $s, l = 1, \dots, nk$ . Isso produz o sistema algébrico

$$CD = G, \quad (94)$$

onde  $C$  é uma matriz simétrica de tamanho  $nk \times nk$ . O termo da força depende dos dados. No caso de os dados serem gerados a partir da variação harmônica (80), está pode ser integrada separadamente como

$$\begin{aligned} G_s &= \int_{\Omega} k(\mathbf{x})k_{xs}(x)k_{ys}(y)k_{zs}(z)d\Omega \\ &= \sum_{m=1}^{nm} A_m \int_x k_{xs} \sin \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \int_y k_{ys} \sin \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \int_z k_{zs} \sin \frac{k_m \pi z}{L_z} dz + \\ &\quad \sum_{m=1}^{nm} B_m \int_x k_{xs} \cos \frac{i_m \pi x}{L_x} dx \int_y k_{ys} \cos \frac{j_m \pi y}{L_y} dy \int_z k_{zo} \cos \frac{k_m \pi z}{L_z} dz \end{aligned} \quad (95)$$

### 3.10 SUAUIZAÇÃO DO EFEITO DE GIBBS.

Aplicações do método PGD ao problema de volume representativo, em um meio com duas ou mais fases, mostraram que os resultados apresentam as mesmas oscilações em torno das interfaces de material, que aquele que são típicos do fenômeno de Gibbs em séries de Fourier. Assim, buscou-se elaborar nesse trabalho um procedimento para atenuar esse efeito no PGD. Então, para contornar o efeito de Gibbs apresentado na Seção 2.3, foi proposto um procedimento para gerar uma suavização controlada, localizada em torno de cada descontinuidade da propriedade do material.

O método consiste em determinar uma função de interpolação e encontrar valores intermediários nos pontos de integração próximos às arestas da inclusão. Dentre as várias fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio interpolador pode ser expresso, foi escolhido a interpolação de Hermite.

A interpolação de Hermite tem como objetivo representar uma função por um polinômio que interpole a função e também a sua primeira derivada. A interpolação consiste em aproximar uma função contínua e definida no intervalo  $[0, 1]$ ,  $f(x)$ , por um polinômio.

Então, para interpolar a função, foi adotado o polinômio cúbico de Hermite, que é mostrado no trabalho de (AUGARDE, 1998) como

$$H_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \quad (96)$$

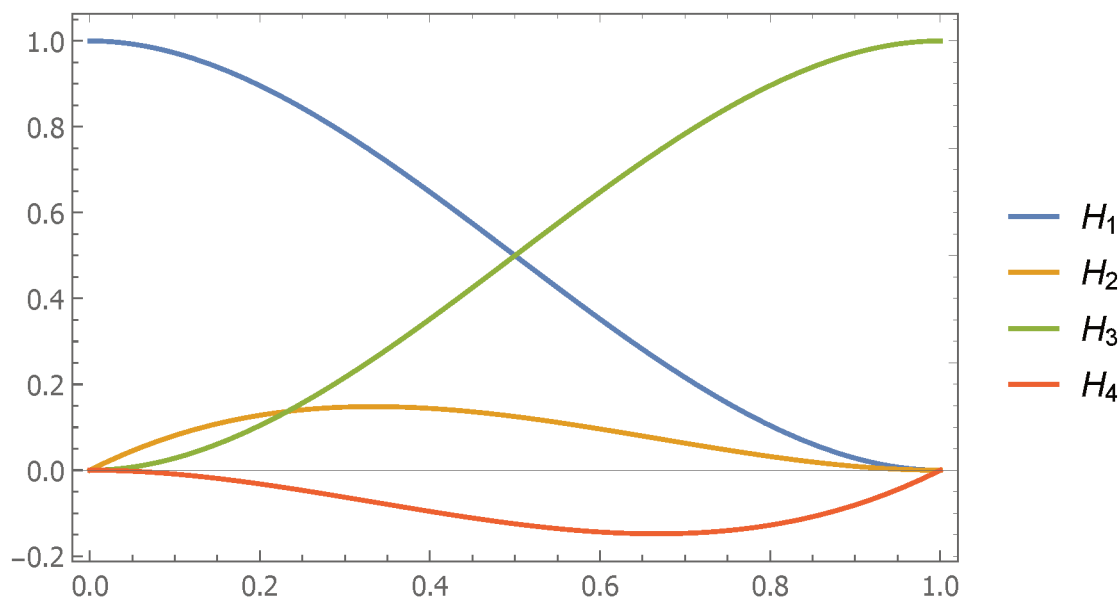
$$H_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3); \quad (97)$$

$$H_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3; \quad (98)$$

$$H_4 = L(-\xi^2 + \xi^3). \quad (99)$$

onde  $L$  é comprimento do que está sendo analisado, por exemplo, o tamanho do elemento ou comprimento de uma barra. A ilustração do polinômio cúbico de Hermite é apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Polinômio cúbico de Hermite com  $L = 1$ .



O objetivo de utilizar o polinômio de Hermite neste trabalho é construir uma função rampa, onde o valor inicial da rampa é o valor da propriedade da matriz e o valor final é o valor da propriedade da inclusão, e por este motivo, apenas a  $H_3$  (Eq. (98)) foi utilizada.

Para aplicar o método é necessário determinar uma variável designada como *fat*. Essa variável é um fator multiplicador do tamanho do elemento (*del*), criando uma pseudo região da inclusão. Essa pseudo região é determinada como  $\pm fat \cdot del/2$ , e qualquer ponto de integração ( $x_{pi}$ ) que esteja dentro desta pseudo região, é utilizado como ponto de interpolação da função, neste caso, a propriedade de material. Para melhor entendimento, a Figura 6 apresenta ilustração simplificada do método de suavização, onde os pontos em vermelho,  $x_{pi}$ , são os pontos de integração, a região em azul representa a inclusão, as linhas em verde ilustram a suavização e a região entre as linhas amarelas representa a pseudo região ( $\pm fat \cdot del/2$ ). Sendo assim, ao aplicar a suavização, é preciso seguir as seguintes etapas:

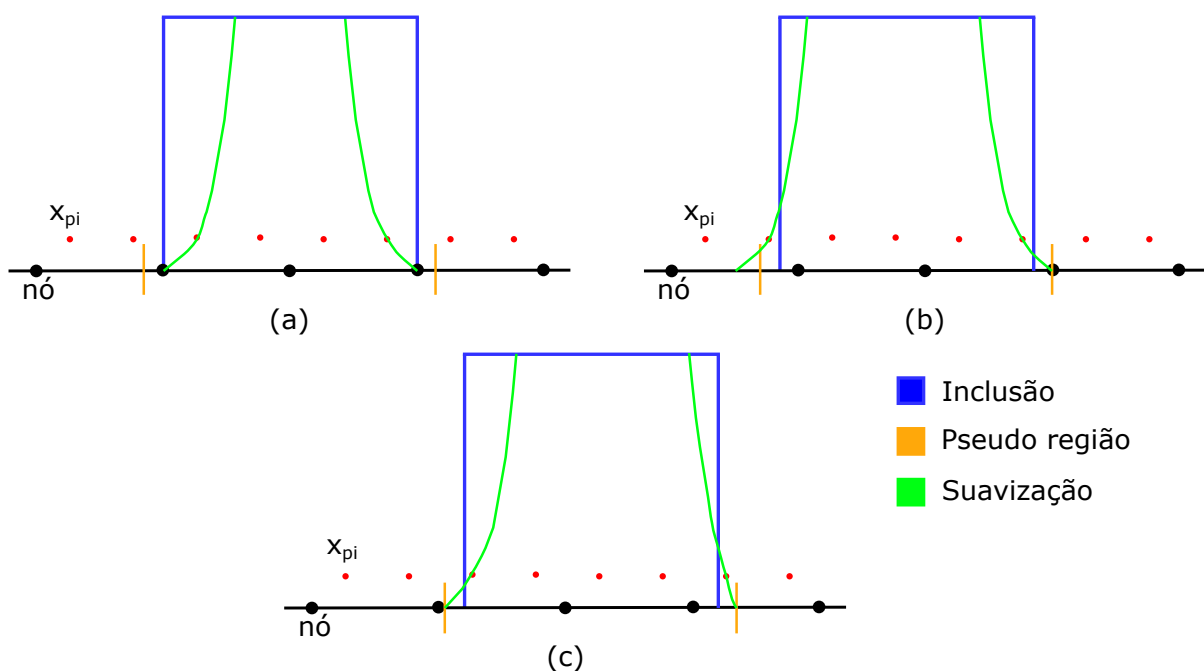
1. Verificar quais os elementos da malha virtual que compõem a inclusão;
2. Para cada elemento, determinar as coordenadas dos pontos de integração,  $x_{pi}$ , para cada uma das direções,  $x$  e  $y$ ;

3. Verificar se a coordenada de  $x_{pi}$  está dentro da pseudo região  $\pm fat \cdot del/2$ :

- Se  $x_{pi}$  estiver fora da pseudo região, não faz suavização;
- Se  $x_{pi}$  estiver dentro da pseudo região, faz a interpolação da propriedade do material, utilizando a Eq. (98).

Observa-se que a malha virtual é gerada a partir de uma grade formada pelas malhas unidimensionais em cada direção do PGD.

Figura 6 – Ilustração da pseudo região de aplicação da suavização. (a) Inclusão coincidente com os nós. (b) Inclusão anterior ao nós. (c) Inclusão posterior ao nós



### 3.11 CÁLCULO DO ERRO DA REPRESENTAÇÃO PGD DO MATERIAL, DA TEMPERATURA E DO FLUXO DE CALOR

Para avaliar a qualidade da resposta do método PGD, empregam-se os erros absoluto e relativo, a norma  $L_2$  e a norma  $L_2$  do erro quadrático, que são definidos subsequentemente. Desse modo, tornou-se necessário um valor de referência para analisar a eficácia do método proposto, e para isso, utilizaram-se resultados obtidos analiticamente ou via aproximação pelo método de elementos finitos.

O **erro absoluto** é a diferença entre o resultado calculado e o valor de referência da grandeza. Designando-se por  $x_{ref}$  o valor de referência e  $x_{PGD}$  o valor obtido via

PGD, então o erro absoluto é dado por

$$\begin{aligned} E^{abs}(x, y) &= \|x_{ref} - x_{PGD}\|, \quad \text{para valores nodais e} \\ E_{Elem}^{abs} &= \|x_{ref}^{Elem} - x_{PGD}^{Elem}\|, \quad \text{para valores de cada elemento.} \end{aligned} \quad (100)$$

Já o **erro relativo** é definido pelo quociente entre o erro absoluto e o valor de referência do objeto em análise

$$E^{rel} = \frac{\|x_{ref} - x_{PGD}\|}{\|x_{ref}\|} = \frac{\|E^{abs}\|}{\|x_{ref}\|}. \quad (101)$$

Outras métricas importantes e que são utilizadas para a avaliação do método PGD são a norma  $L_2$  da grandeza analisada e a norma  $L_2$  do erro quadrático, onde a primeira delas é dada por

$$\|x\|_{L_2} = \sum_{i=1}^{nelem} ((x_i^{elem})^2 A_{Elem})^{1/2}, \quad (102)$$

onde  $x_i^{elem}$  é o valor da grandeza e  $A_{Elem}$  é a área do elemento. Caso esteja calculando a norma  $L_2$  PGD,  $x_i^{elem}$  são os valores dos elementos obtidos via PGD, caso seja a norma  $L_2$  FEM,  $x_i^{elem}$  são os valores obtidos via método FEM. A **norma  $L_2$  do erro quadrático** é calculada por

$$\|x\|_{L_2} = \sum_{i=1}^{nelem} (((E_{Elem}^{abs})_i)^2 A_{Elem})^{1/2}. \quad (103)$$

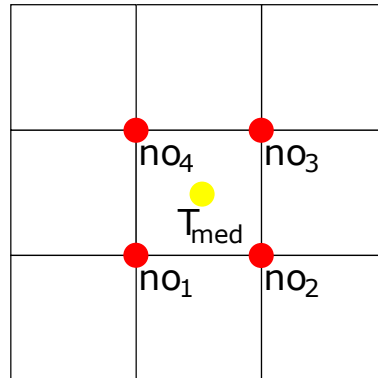
A malha unidimensional em cada direção do PGD pode ser usada para identificar uma grade de elementos 2D, como na Figura 7. Calcula-se a temperatura e o fluxo de calor nos quatro nós de cada elemento e em seguida realiza-se a média, que passam a ser valores representativos do elemento, conforme (104).

$$\begin{aligned} T_{med} &= \frac{T_{no1} + T_{no2} + T_{no3} + T_{no4}}{4}, \\ q_{med} &= \frac{q_{no1} + q_{no2} + q_{no3} + q_{no4}}{4}, \end{aligned} \quad (104)$$

Porém, como a malha espacial PGD é criada a partir das duas malhas unidimensionais, observou-se a convergência da norma considerando apenas a soma dos valores nodais multiplicados pela área do elemento plano, como ilustrado na Figura 8. Portanto, foi adotado para cálculo da norma as seguintes equações:

$$\|x\|_{L_2} = \sum_{i=1}^{nos} ((x_i)^2 A_{Elem})^{1/2}, \quad (105)$$

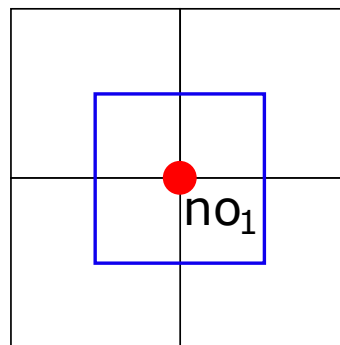
Figura 7 – Temperatura média do elemento obtida a partir dos quatro nós que compõem o elemento.



onde  $x_i$  é o valor nodal da grandeza. A norma  $L_2$  do erro quadrático é calculada por

$$\| x \|_{L_2} = \sum_{i=1}^{nos} \left( (E_i^{abs})^2 A_{Elem} \right)^{1/2}. \quad (106)$$

Figura 8 – Configuração adotada para o cálculo das normas.



A partir destas duas últimas métricas apresentadas, pode-se calcular o erro relativo da norma  $L_2$  como:

$$\| E^{rel} \|_{L_2} = \frac{\| E^{abs} \|_{L_2}}{\| x_{ref} \|_{L_2}}, \quad (107)$$

Todas essas variáveis são utilizadas no decorrer do texto para a validação/avaliação dos resultados. Em alguns casos, como nas seções que tratam da representação PGD do material, é utilizada apenas a norma  $L_2$  do erro quadrático e o erro absoluto, porém nas seções que são tratados os problemas de transferência de calor, seja temperatura ou fluxo de calor, são utilizadas todas estas variáveis, tornando as avaliações mais rigorosas, acumulando mais critérios à serem discutidos.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na formulação apresentada na Seção 2.4 definimos a modelagem matemática que foi implementada para determinar propriedades do material, dados de carregamento, temperatura e fluxo de calor no domínio estudado. Neste capítulo são definidos aspectos gerais utilizados nas simulações e as seções a seguir apresentam alguns dos resultados obtidos, visando avaliar a utilização do método PGD.

A avaliação utiliza como base a verificação dos erros e o comportamento do método PGD para cada uma das configurações apresentadas. A comparação é feita a partir das respostas analíticas dos problemas, e quando não for possível, é feita a partir da resposta utilizando a análise de elementos finitos. Para tal, as próximas seções deste capítulo apresentam as comparações mencionadas.

### 4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Tendo em vista o método apresentado, propõem-se casos de testes que possuam soluções analíticas conhecidas. Quando não for possível soluções analíticas, a avaliação do erro e dos aspectos gerais do PGD são feitas em relação às simulações feitas com o método de elementos finitos. A medida que os testes forem apresentados, há discussões a respeito de cada um dos casos. Diferentes geometrias, malhas e configurações foram utilizadas para as análises. Logo, as duas seções a seguir apresentam as discussões a respeito do método PGD: 1<sup>o</sup> - para a representação de dados de propriedade de material e dados de carregamento; 2<sup>o</sup> - para obter solução aproximada via PGD do problema de transferência de calor (temperatura e fluxo de calor).

No decorrer do texto apresenta-se variáveis indispensáveis para o entendimento do método PGD, entre elas nnd's que correspondem à quantidade de nós em cada direção. Por exemplo, se a simulação apresentar 100 nnd's, significa que se tem 100 nós na direção de  $x$  e 100 nós na direção de  $y$ . Todas as simulações foram feitas com quantidade de nós iguais nas duas direções, porém é possível realizar as simulações com quantidade diferentes de nós em cada direção, tanto na formulação apresentada, quanto no programa implementado.

Outro termo que se deve destacar é o ndof-PGD, consequência direta da variável nnd e do método PGD. ndof-PGD é a quantidade de incógnitas a serem calculadas e equivale ao número de graus de liberdade no MEF. Entretanto, o número ndof-PGD não é a quantidade associada diretamente ao esforço computacional, como no caso do MEF.

Para os casos de representação de material foi especificada tolerância de 1E-6 e para transferência de calor 1E-4, tanto para as iterações, quanto para os modos. Caso a tolerância não fosse alcançada, foi determinado quantidades máximas de iterações e



modos. Em ambos os casos a quantidade máxima de iterações foi fixada em 5 iterações por modo e a quantidade de modos foi variada para cada uma das simulações. A taxa de convergência de cada um dos casos foi obtida a partir do Apêndice A.

## 4.2 REPRESENTAÇÃO PGD PARA DADOS DE PROPRIEDADES DE MATERIAL E DADOS DE CARREGAMENTO

São abordados casos variando a quantidade de nós e também a quantidade de modos, afim de verificar a influência destes na representação dos dados escalares utilizando o método PGD, seja de dados de propriedades de material e/ou dados de carregamento. Nesta seção, todos os casos serão comparados com soluções analíticas propostas na seção 3.8. Tanto a formulação, quanto a implementação, da parte de representação de dados escalares via PGD, estão desenvolvidos para um domínio 3D. Porém o problema de condução de calor está posto apenas para domínios 2D e por este motivo todas as distribuições dos dados escalares serão abordados visando uma distribuição 2D do, sendo assim, para todos os casos tratados será desconsiderado a parcela da direção  $z$ .

### 4.2.1 Caso 1 - Propriedade com distribuição harmônica.

Primeiramente, toma-se um domínio de dimensões  $L_x = L_y = 10, 0$ , no qual a propriedade exata do material foi gerada numa forma harmônica, como apresentado na Seção 3.8.1. Então considera-se a seguinte forma geral para a distribuição de  $k$

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} \left( A_m \operatorname{sen} \left( \frac{i_m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{j_m \pi y}{L_y} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k_m \pi z}{L_z} \right) \right) + \sum_{m=1}^{nm} \left( B_m \cos \left( \frac{i_m \pi x}{L_x} \right) \cos \left( \frac{j_m \pi y}{L_y} \right) \cos \left( \frac{k_m \pi z}{L_z} \right) \right). \quad (108)$$

Usaremos para os testes de representação PGD um caso da Equação (108), definido pelos parâmetros  $A_1 = 3$ ,  $i_1 = 2$ ,  $j_1 = 1$ ,  $A_2 = 3$ ,  $i_2 = 2$ ,  $j_2 = 2$  e todos os  $B_m = 0$ . Isso significa  $k$  variando da seguinte forma

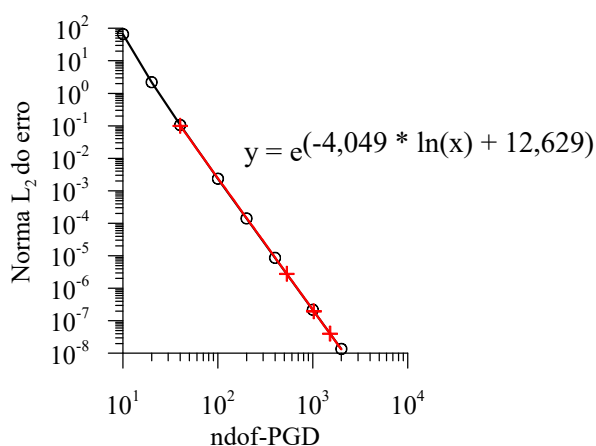
$$k(\mathbf{x}) = 3 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{L_y} \right) + 3 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi y}{L_y} \right). \quad (109)$$

Sendo assim, foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e todas elas convergiram com apenas 1 modo, pois a Equação (109) apresenta curva suave, não sendo necessário a contribuição de mais modos para a convergência do método. A norma  $L_2$  do erro quadrático é apresentada na Tabela 1 e a Figura 9 apresenta a curva de convergência deste caso.

Tabela 1 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$ , exata e PGD.

Modos	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
1	5	10	6,5710E+01	8,4979E-01
1	10	20	2,1982E+00	1,4053E-01
1	20	40	1,0555E-01	3,0063E-02
1	50	100	2,3554E-03	4,4634E-03
1	100	200	1,4110E-04	1,0915E-03
1	200	400	8,6389E-06	2,7003E-04
1	500	1000	2,1848E-07	4,2941E-05
1	1000	2000	1,3600E-08	1,0714E-05

Figura 9 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de  $-4,0493$ .



Os pontos de máximos e mínimos da Equação (109) apresentam valores que estão localizados ao longo das linhas  $x = 3$  e  $y = 3$ . Então, afim de comparar o comportamento do método ao longo dessas linhas é apresentada a Figura 10 que mostra a representação analítica, dada pela Equação (109), e a representação PGD utilizando 20 nnd's. Os gráficos das Figuras 11 e 12 apresentam as visualizações plana e em perspectiva no domínio obtidas analiticamente e via representação PGD. A Figura 12 (c) apresenta o erro absoluto entre a solução analítica e PGD.

Figura 10 – Propriedade do material ao longo do eixo  $x$  para  $y = 3$  e ao longo do eixo  $y$  para  $x = 3$ .

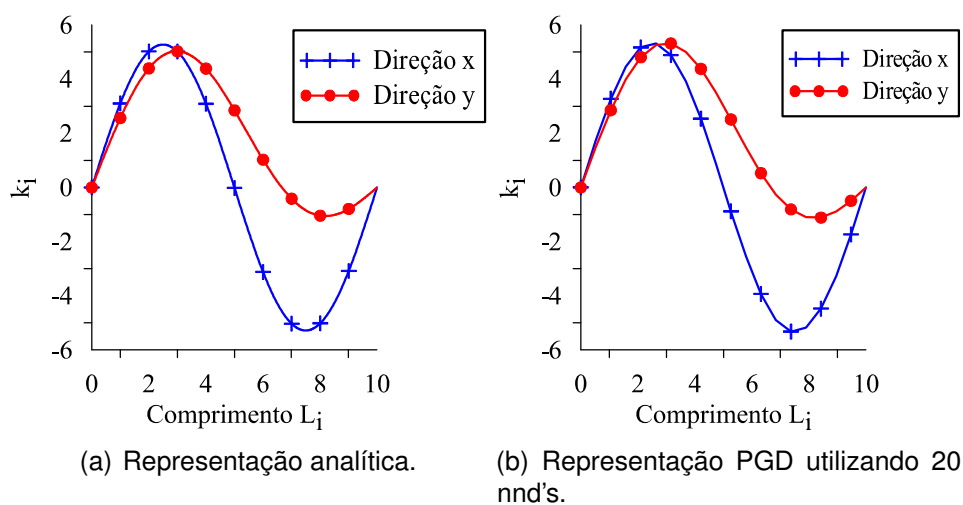


Figura 11 – Representação analítica da condutividade térmica do material - Variação harmônica.

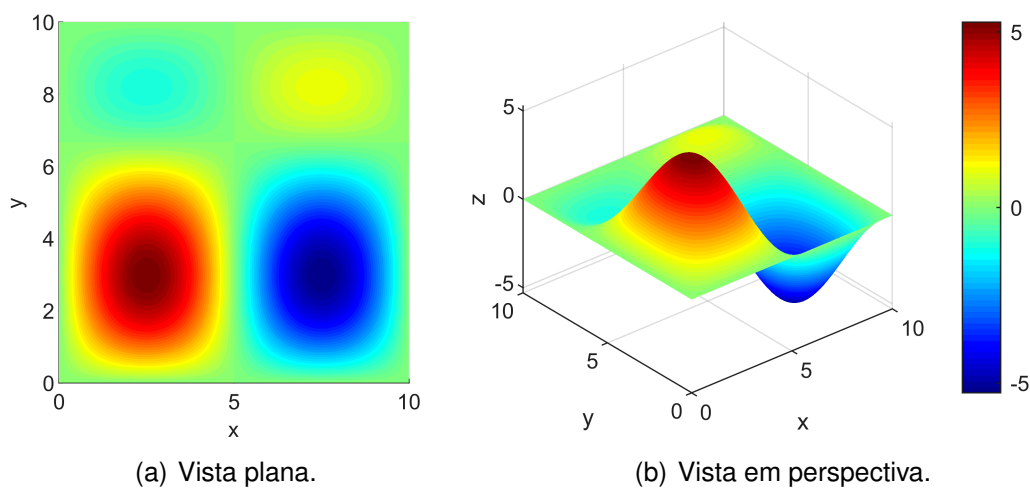
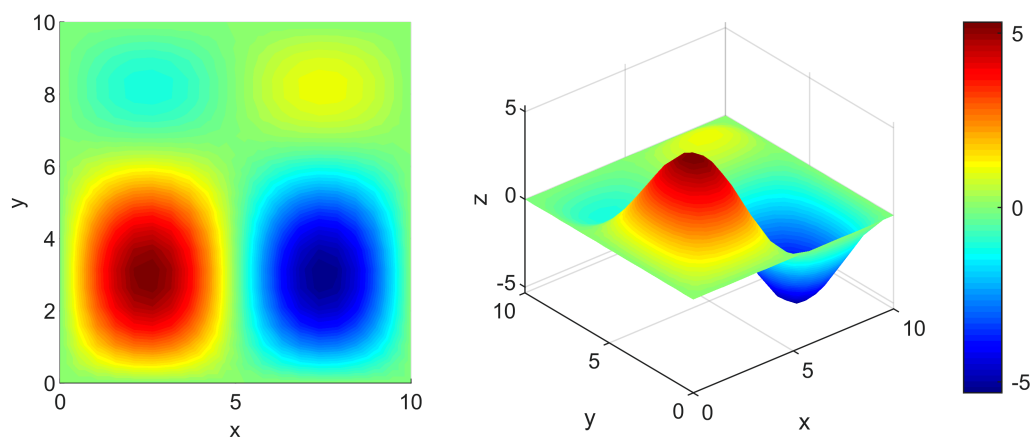
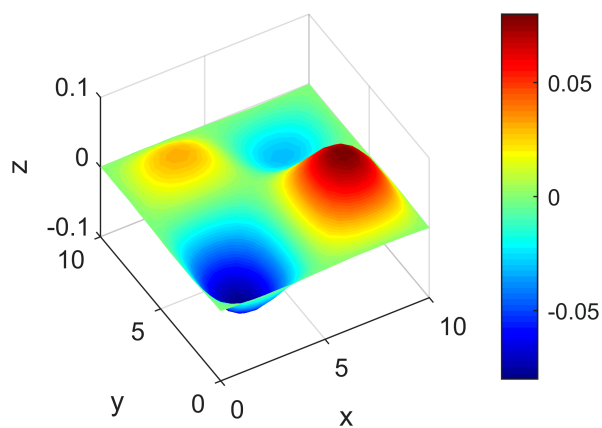


Figura 12 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação harmônica.



(a) Vista plana.

(b) Vista em perspectiva.



(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.

#### 4.2.2 Caso 2 - Propriedade com distribuição polinomial.

Neste caso também se utiliza um domínio de dimensões  $L_x = L_y = 10,0$  no qual a propriedade exata do material é dada por uma variação polinomial, como foi apresentado na Seção 3.8.2. Então considera-se a seguinte equação:

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} A_m x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m}. \quad (110)$$

Utilizando os termos  $A_1 = 3$ ,  $i_1 = 2$ ,  $j_1 = 1$ ,  $A_2 = 3$ ,  $i_2 = 2$  e  $j_2 = 2$ , obtemos o caso que será aproximado por PGD:

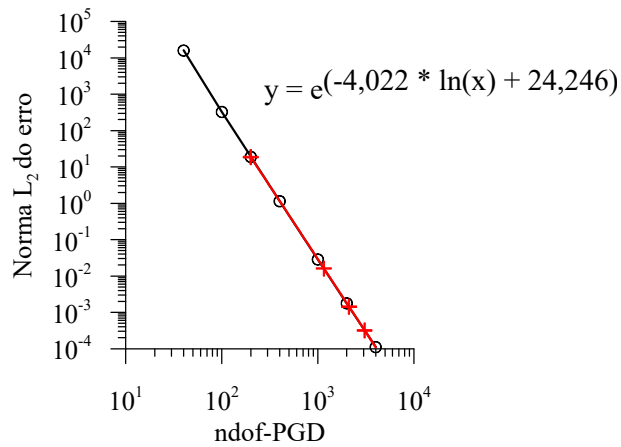
$$k(\mathbf{x}) = 3 x^2 y + 3 x^2 y^2. \quad (111)$$

Sendo assim, foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e para este caso, todas convergiram com apenas 1 modo. A norma  $L_2$  do erro quadrático é apresentada na Tabela 2 e a Figura 13 apresenta a curva de convergência.

Tabela 2 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$ , exata e PGD.

Modos	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
1	20	40	1,6057E+04	2,7910E-03
1	50	100	3,2828E+02	4,3279E-04
1	100	200	1,9062E+01	1,0709E-04
1	200	400	1,1487E+00	2,6635E-05
1	500	1000	2,8770E-02	4,2484E-06
1	1000	2000	1,7851E-03	1,0610E-06
1	2000	4000	1,1117E-04	2,6512E-07

Figura 13 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de  $-4,0222$ .



A Figura 14 apresenta a representação analítica e a PGD utilizando 500 nnd's ao longo do eixo  $x$  em  $y = L_y$  e ao longo do eixo  $y$  para  $x = L_x$ . Os gráficos da Figuras 15 e 16 apresentam a visualização plana e em perspectiva da solução analítica e via representação PGD utilizando 500 nnd's.

Figura 14 – Propriedade do material ao longo do eixo  $x$  para  $y = 10,0$  e ao longo do eixo  $y$  para  $x = 10,0$ .

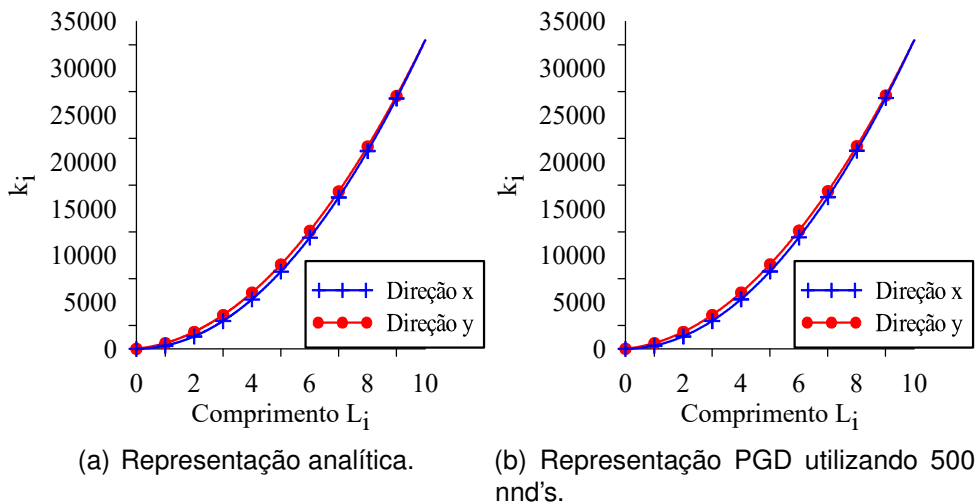


Figura 15 – Representação analítica do material - Variação polinomial.

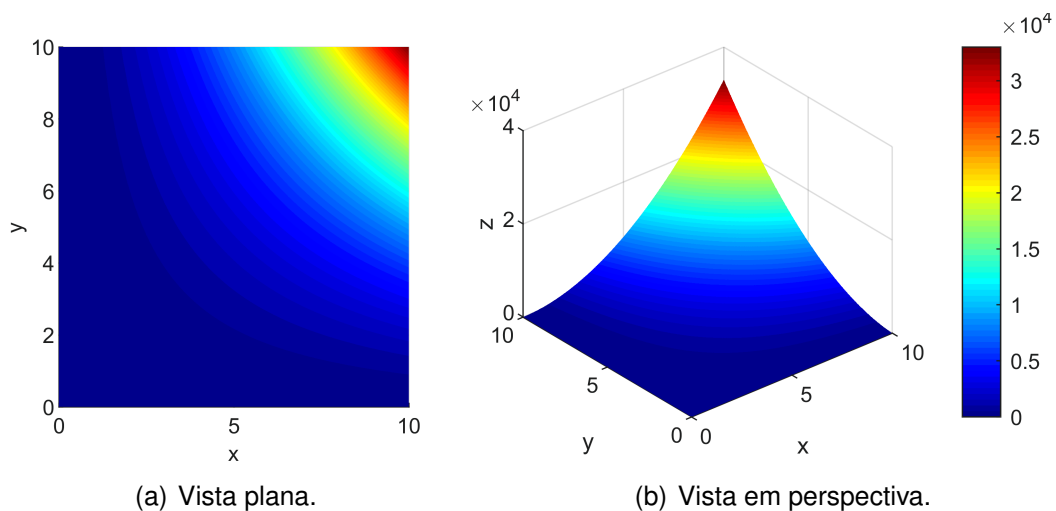
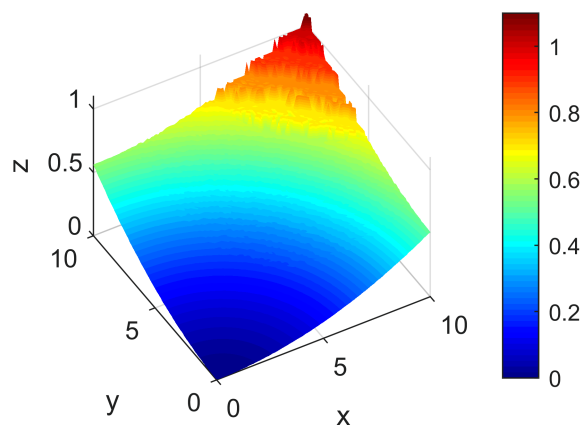
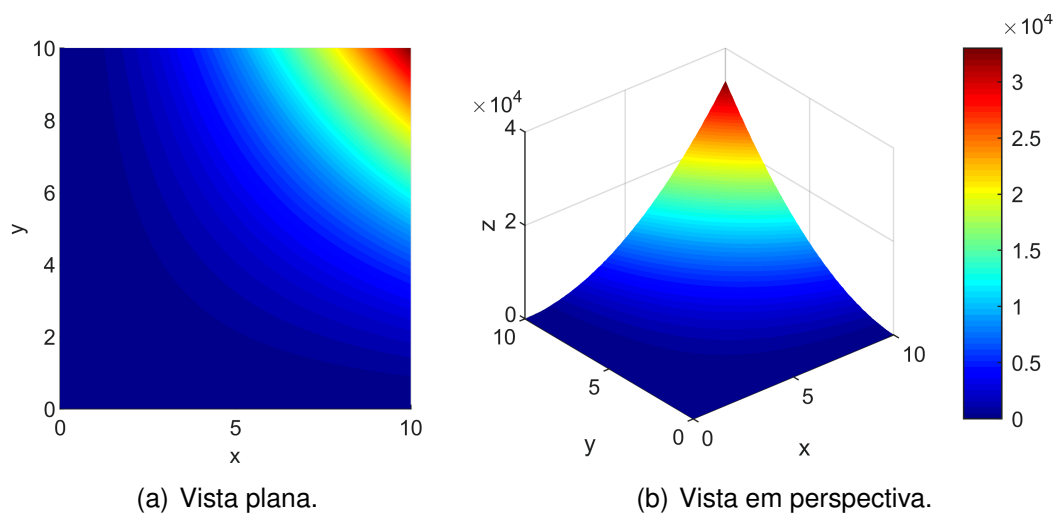


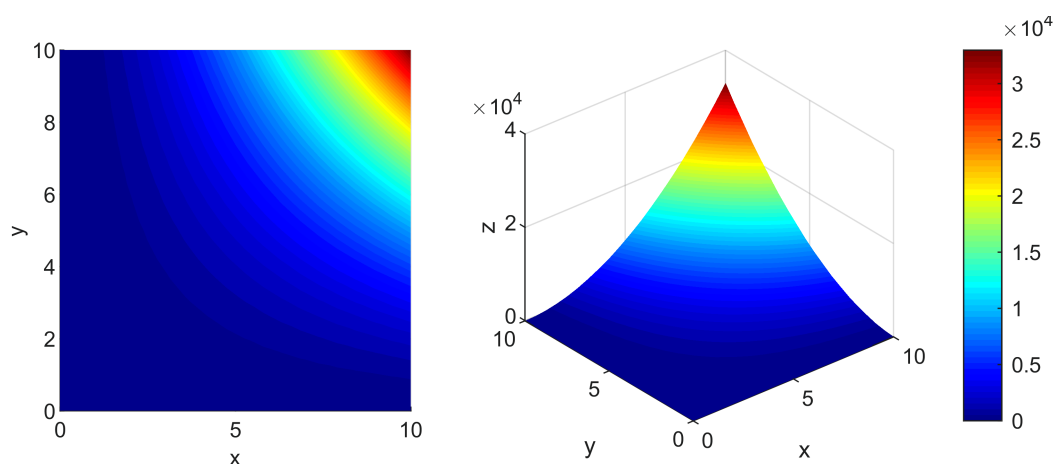
Figura 16 – Representação PGD do material utilizando 500 nnd's - Variação polinomial.



(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.

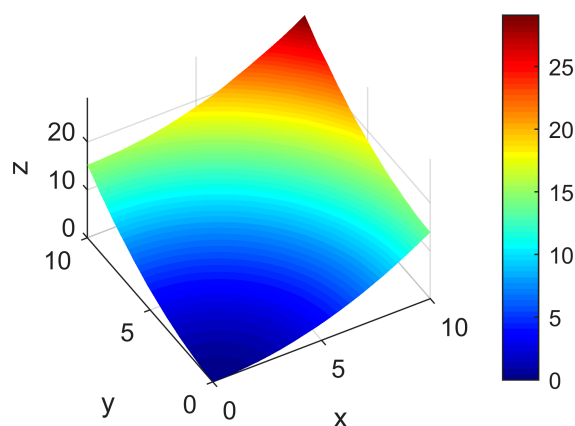
Nota-se na Tabela 2 que o método PGD utilizando 500 nnd's representa a propriedade de material com erro relativamente baixo, quando comparado com os resultados obtidos com 20 nnd's. Porém, qualitativamente, a representação utilizando 20 nnd's já se mostra suficiente, como mostrado na Figura 17, onde é mostrada a representação plana, em perspectiva e o erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD com esta configuração.

Figura 17 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação polinomial.



(a) Vista plana.

(b) Vista em perspectiva.



(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.



### 4.2.3 Caso 3 - FGM - *Functionally Graded Material* (Polinômio de primeira ordem).

Functionally Graded Material - FGM são materiais caracterizados por variação gradual na sua composição ao longo da espessura do corpo, resultando em alterações nas propriedades do material. Este método permite fabricar um composto variando a microestrutura de um material para outro com um gradiente específico, fazendo com que este composto apresente as melhores características dos dois materiais envolvidos no processo. Por exemplo, alta condutividade térmica de um metal e baixa condução de calor nas cerâmicas. Na presente simulação, consideramos um composto que varia sua propriedade linearmente em  $x$ , iniciando com dióxido de zircônio em uma das extremidades e na outra extremidade, titânio. Estes dois materiais são utilizados em (KASAEIAN; VATAN; DANESHMAND, 2011) e os valores da condutividade térmica dos dois materiais foram retirados de (MARTIENSSEN; WARLIMONT, 2006). Diversas outras leis de variação podem ser construídas e simuladas, como variação parabólica ou exponencial, mostrado em (BEN-OUMRANE *et al.*, 2009) e (BOUCHAFA *et al.*, 2010).

Considera-se um domínio em duas dimensões, 4x4 metros, onde a propriedade do material é  $k_{x=0} = 1,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $k_{x=L_x} = 21 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Logo pode-se tratar este caso como uma representação polinomial, como a forma geral apresentada na Seção 4.2.2, cujo polinômio pode ser colocado como

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} A_m x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m}. \quad (112)$$

Usando  $A_1 = 4,8$ ;  $i_1 = 1$ ;  $j_1 = 0$ ;  $k_1 = 0$ ;  $A_2 = 1,8$ ;  $i_2 = 0$ ;  $j_2 = 0$  e  $k_2 = 0$ . Portanto, aproxima-se a seguinte função de condutividade térmica no material:

$$k(\mathbf{x}) = 4,8 x + 1,8. \quad (113)$$

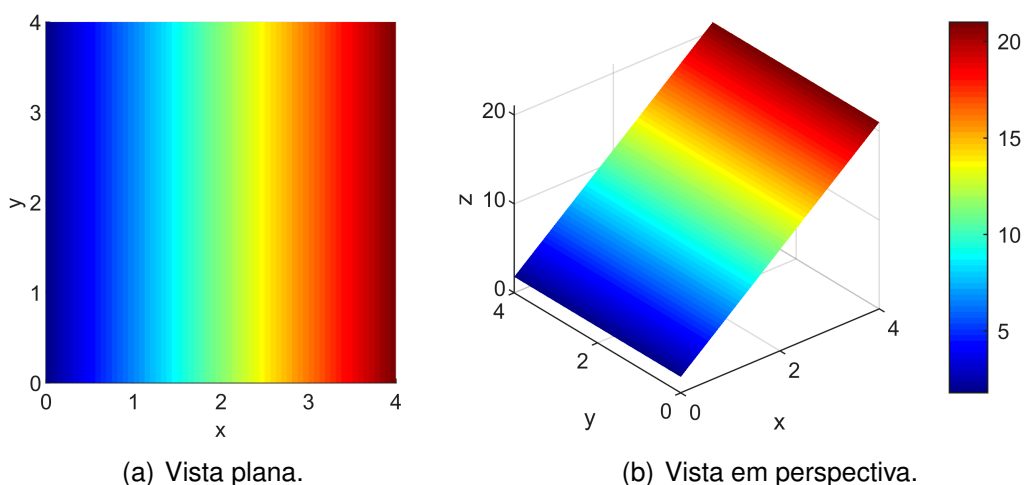
A representação polinomial já foi abordada anteriormente, porém o caso que é tratado nesta seção é utilizado posteriormente no problema de transferência de calor e por isso é dado uma atenção especial aos resultados obtidos.

A configuração real tratada é apresentada na Figura 18. A Tabela 3 apresenta a norma  $L_2$  do erro quadrático, juntamente com o ndof-PGD de oito simulações que foram realizadas. Todas as simulações convergiram com apenas 1 modo.

Tabela 3 – Quantidade de modos, quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$ , exata e PGD.

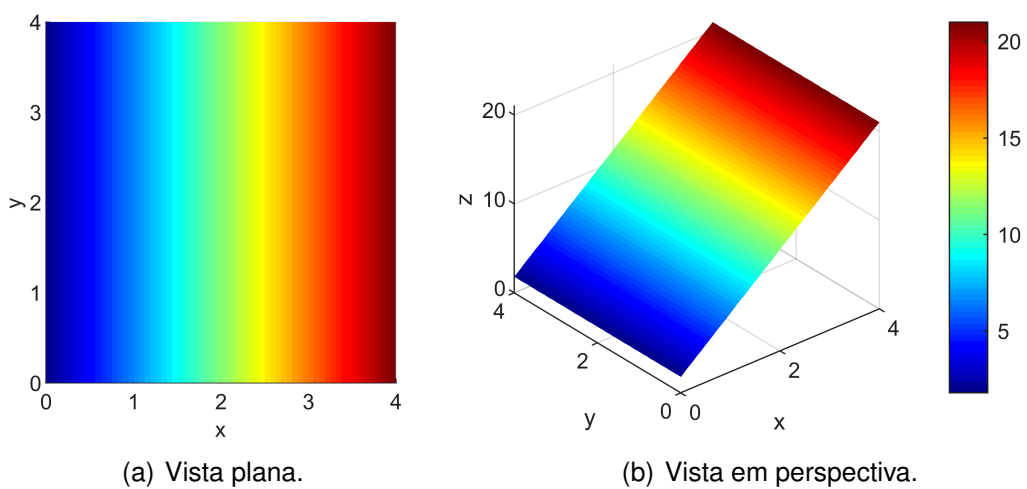
Modos	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
1	2	4	3,9443E-29	0,0000E+00
1	5	10	1,3271E-27	0,0000E+00
1	10	20	1,3271E-27	0,0000E+00
1	20	40	8,6993E-27	3,4427E-15
1	50	100	6,2512E-26	1,1125E-14
1	100	200	1,3858E-25	7,5987E-15
1	500	1000	3,2799E-24	4,6475E-14
1	1000	2000	6,5211E-23	1,5529E-13

Figura 18 – Configuração analítica da propriedade de material utilizando distribuição polinomial de primeiro grau.



Nota-se na Tabela 3 que o erro obtido entre a representação PGD e a solução analítica obtida a partir da Equação (113), em todas as simulações apresentadas, é muito baixo e, portanto, qualquer uma delas se mostra adequada. A Figura 19 apresenta a representação PGD utilizando 50 nnd's.

Figura 19 – Representação PGD da propriedade de material utilizando 50 nnd's.



#### 4.2.4 Caso 4 - FGM - *Functionally Graded Material* (Polinômio de segunda ordem).

Neste caso também é tratado um material FGM, porém o polinômio é de segundo grau. Utiliza-se um domínio em duas dimensões 4x4 metros, onde a propriedade do material é  $k_{x=0} = 1,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $k_{x=L_x} = 21 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Logo pode-se tratar este caso como sendo uma representação polinomial, como apresentado no Seção 4.2.2 pelo polinômio geral

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{nm} A_m x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m}. \quad (114)$$

Particularizando para  $A_1 = 1,1$ ;  $i_1 = 2$ ;  $j_1 = 0$ ;  $k_1 = 0$ ;  $A_2 = 0,4$ ;  $i_2 = 1$ ;  $j_2 = 0$ ;  $k_2 = 0$ ,  $A_3 = 1,8$ ;  $i_3 = 0$ ;  $j_3 = 0$  e  $k_3 = 0$ , obtemos a variação de propriedade a ser aproximada:

$$k(\mathbf{x}) = 1,1 x^2 + 0,4 x + 1,8. \quad (115)$$

A configuração real tratada é apresentada na Figura 20 e a Tabela 4 apresenta a norma  $L_2$  do erro quadrático, juntamente com o ndof-PGD das simulações que foram realizadas. Todas as simulações convergiram com apenas 1 modo e a Figura 21 apresenta a curva de convergência.

Figura 20 – Configuração analítica da propriedade de material utilizando distribuição polinomial de segundo grau.

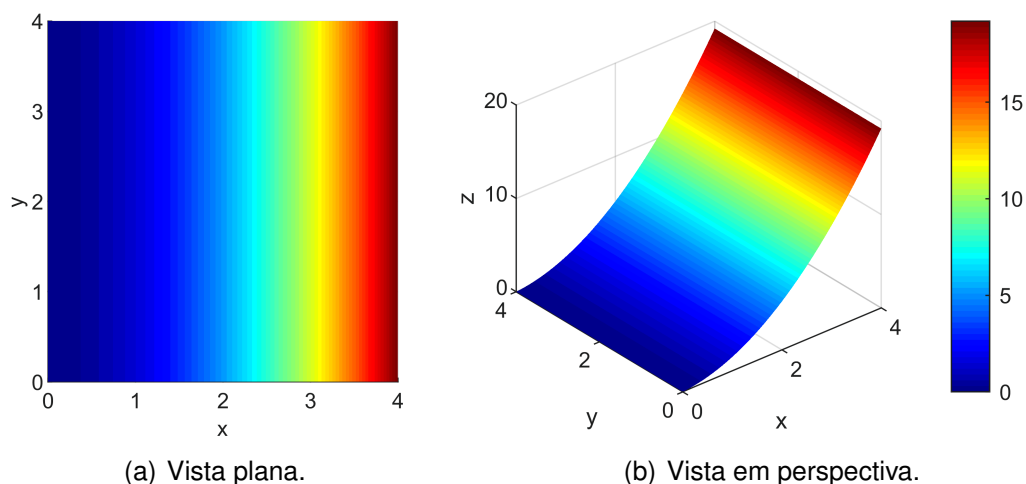
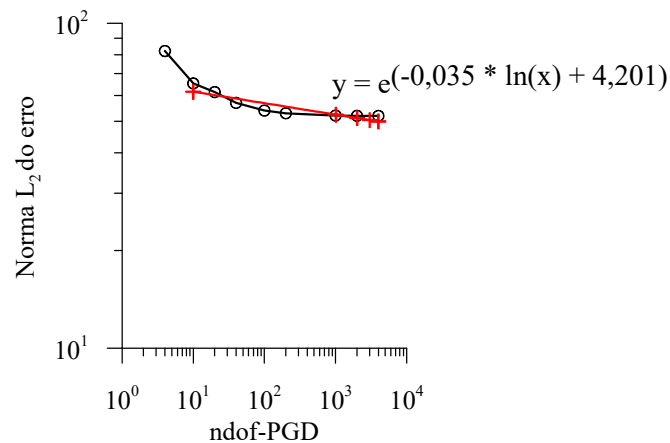


Tabela 4 – Quantidade de modos (Modos), quantidade de nós em cada direção, ndof-PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático, erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$  e normas  $L_2$  exata e PGD.

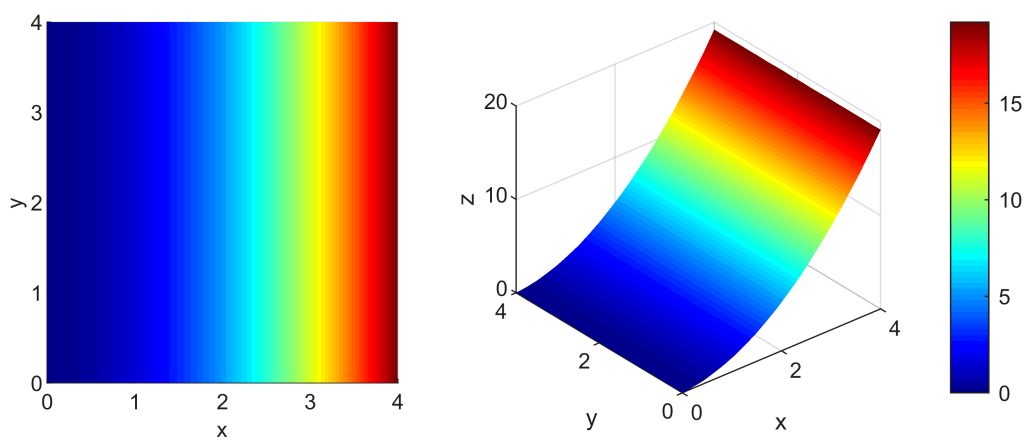
Modos	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	$N_{PGD}^{L_2}$	$N_{Ex}^{L_2}$
1	2	4	82,20446	1.1109E-01	10486.0444	11796.4800
1	5	10	65,34027	2.5464E-01	3269.2069	2605.7000
1	10	20	61,45069	3.1234E-01	2305.4547	1756.7571
1	20	40	56,92302	3.3495E-01	1954.0856	1463.7897
1	50	100	53,90426	3.4691E-01	1774.5401	1317.4859
1	100	200	52,87497	3.5066E-01	1719.2230	1272.8754
1	500	1000	52,04730	3.5358E-01	1676.4854	1238.5601
1	1000	2000	51,94367	3.5394E-01	1671.2353	1234.3536
1	2000	4000	51,89184	3.5411E-01	1668.6178	1232.2572

Figura 21 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de  $-0,0351$ .



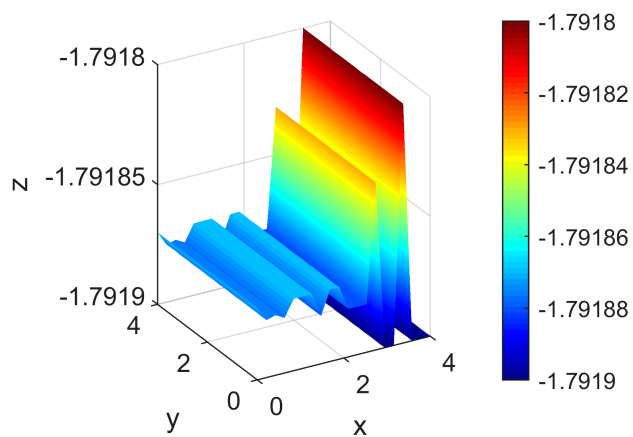
Nota-se na Tabela 4 a norma  $L_2$  do erro quadrático e também o erro relativo entre as normas  $L_2$  das soluções exata e PGD. É possível observar que ao aumentar a quantidade de modos, não necessariamente houve redução do erro relativo. A Figura 22 apresenta a representação para o caso com 20 nnd's.

Figura 22 – Representação PGD do material utilizando 20 nnd's - Variação polinomial.



(a) Vista plana.

(b) Vista em perspectiva.

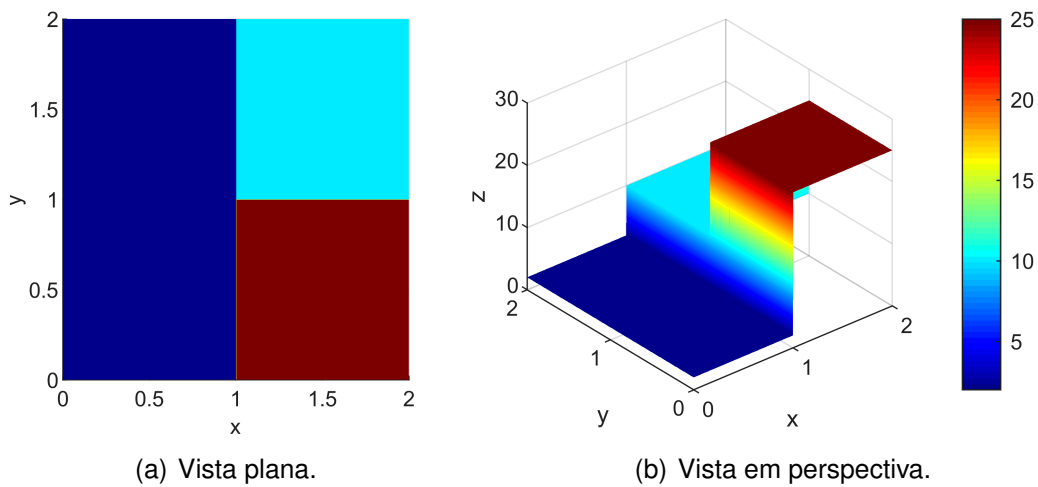


(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.

### 4.2.5 Caso 5 - Propriedades de material com variação discreta do domínio.

Propõe-se um domínio quadrado, de dimensão 2x2 metros, que apresenta três regiões bem definidas de propriedade de material como mostrado na Figura 23. A região com coordenadas  $(0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 2)$  apresenta a propriedade de material  $k_1 = 2,0$ , a região cuja coordenadas  $(1 \leq x \leq 2$  e  $1 \leq y \leq 2)$  apresenta propriedade de material  $k_2 = 10,00$  e a região com coordenadas  $(1 \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq 1)$  apresenta propriedade  $k_3 = 25,00$ .

Figura 23 – Configuração do caso - representação real da distribuição de material.



As simulações foram feitas variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos. A Tabela 5 apresenta a norma  $L_2$  do erro quadrático e o número de graus de liberdade PGD para cada uma das configurações. Todas as simulações convergiram com 2 modos. A Figura 5 apresenta a curva de convergência quando se utiliza dois modos.

Figura 24 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de  $-1,0255$ .

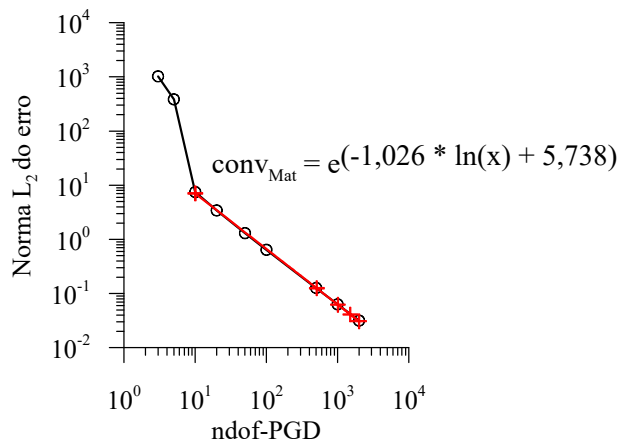


Tabela 5 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), a norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$ , exata e PGD, utilizando 1 e 2 modos.

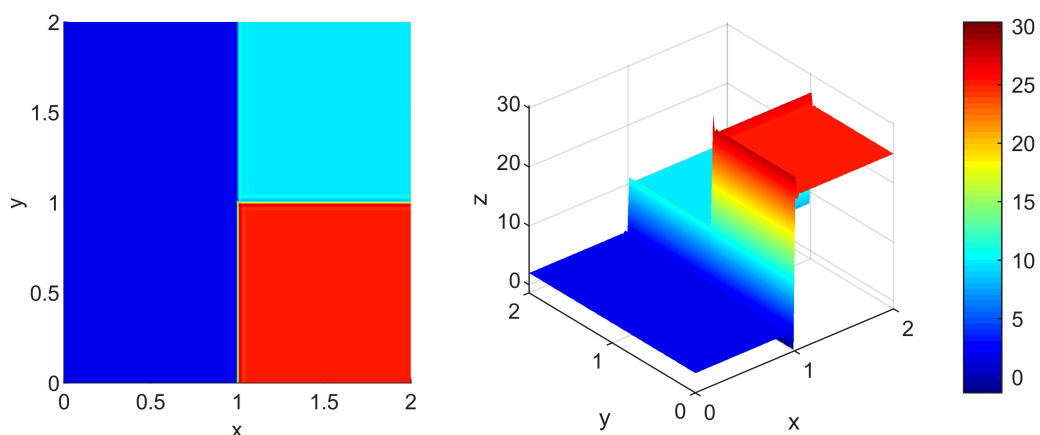
1 Modo				2 Modos			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
3	6	1016,83620	6,0282E-01	3	12	1022,47656	5,9877E-01
5	10	386,14771	5,1224E-01	5	20	385,41530	5,1124E-01
10	20	8,56262	6,0042E-02	10	40	7,47839	6,2218E-02
20	40	4,61999	2,7641E-02	20	80	3,43028	2,9498E-02
50	100	2,52676	9,6794E-03	50	200	1,30633	1,1415E-02
100	200	1,86898	3,9391E-03	100	400	0,64280	5,6434E-03
500	1000	1,35625	5,6432E-04	500	2000	0,12694	1,1185E-03
1000	2000	1,29298	1,1217E-03	1000	4000	0,06337	5,5862E-04
2000	4000	1,26142	1,4000E-03	2000	8000	0,03166	2,7915E-04

Nota-se na Tabela 5 que a representação com 100 nós em cada direção, utilizando 2 modos, apresenta a norma  $L_2$  do erro quadrático consideravelmente baixo e por isso adota-se esta configuração para posteriores considerações. A Figura 25 mostra a representação PGD utilizando 100 nós em cada direção, onde é possível observar a região de maior erro absoluto.

Observa-se que nesse caso que há descontinuidade do material de uma região para outra, há a presença do efeito de Gibbs apresentado na Seção 2.3. É justamente nestas regiões que há as maiores parcelas do erro, como observado na Figura 25 (c). No decorrer do trabalho propõem-se um método de suavização do efeito de Gibbs, porém os resultados para este caso não foram satisfatórios. Quanto a suavização é aplicada o erro tende a aumentar, logo aplica-se a suavização apenas em casos que trata-se de descontinuidades.

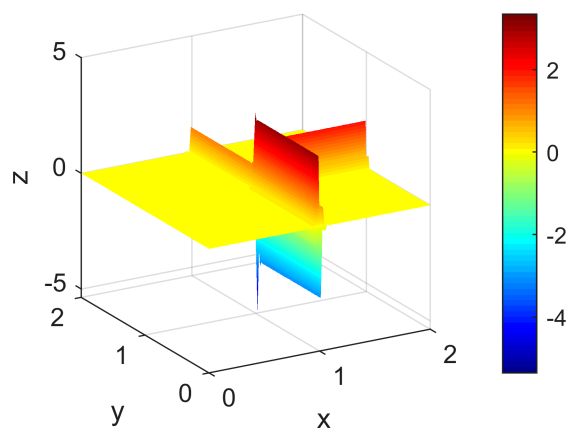


Figura 25 – Representação PGD utilizando 2 modos e 100 nnd's.



(a) Vista plana.

(b) Vista em perspectiva.

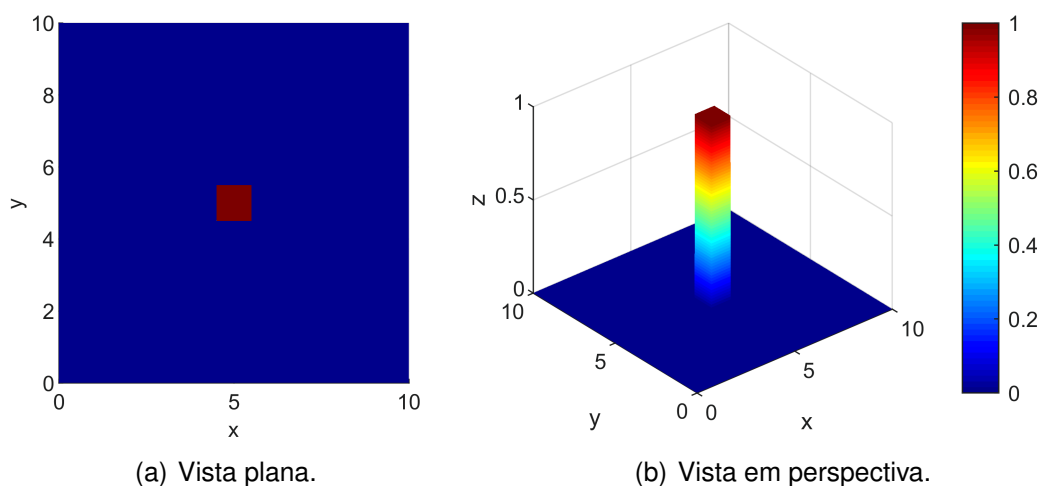


(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.

#### 4.2.6 Caso 6 - Inclusão retangular.

Como primeira aplicação da teoria que foi analisada na Seção 3.8.3 sobre inclusões retangulares, propõe-se um caso de inclusão quadrada de dimensão 1x1 metro no centro de um domínio de 10x10 metros, conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26 – Configuração do caso - representação real da inclusão.



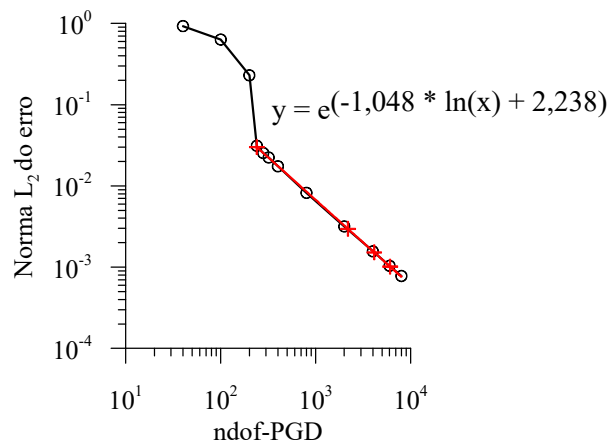
Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e a Tabela 6 apresenta a norma  $L_2$  do erro quadrático e o número de graus de liberdade PGD para cada uma destas configurações. A Figura 27 apresenta a curva de convergência deste caso, sendo que todas as simulações convergiram com apenas 2 modos.

Tabela 6 – Quantidade de nós em cada direção, número de graus de liberdade, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre as normas  $L_2$ , exata e PGD.

nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad. ( $\times 10^{-2}$ )	$E_{L_2}^{rel}$
10	40	92,630	-
25	100	63,300	5,2307E-01
50	200	22,960	5,6034E-01
60	240	3,116	1,7344E-01
70	280	2,541	3,6098E-01
80	320	2,240	1,2890E-01
100	400	1,742	1,0250E-01
200	800	0,821	5,0625E-02
500	2000	0,317	2,0100E-02
1000	4000	0,156	1,0025E-02
1500	6000	0,104	6,6778E-03
2000	8000	0,077	5,0062E-03

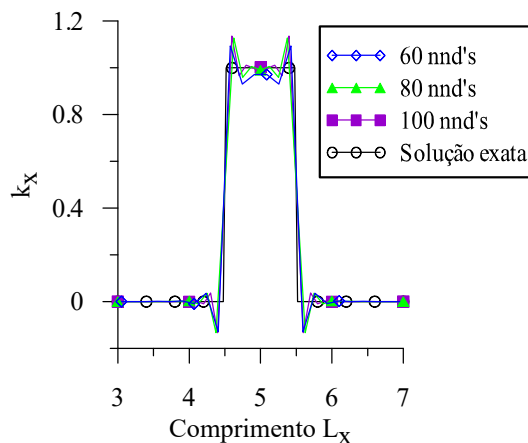
Nota-se na Tabela 6 que somente a partir de 60 nós em cada direção é que os valores do erro se tornam aceitáveis. Este fato deve-se a quantidade de elementos

Figura 27 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência. A taxa de convergência é de  $-1.0480$ .



que o método exige para representar a inclusão, sendo que para uma representação mais adequada, são necessários pelo menos 6 elementos internos em cada direção. A Figura 28 mostra a representação da inclusão para  $y = L_y/2$  das simulações feitas com 60, 80 e 100 nós em cada direção e também a representação real da inclusão nessa mesma região, afim de comparar o comportamento do método.

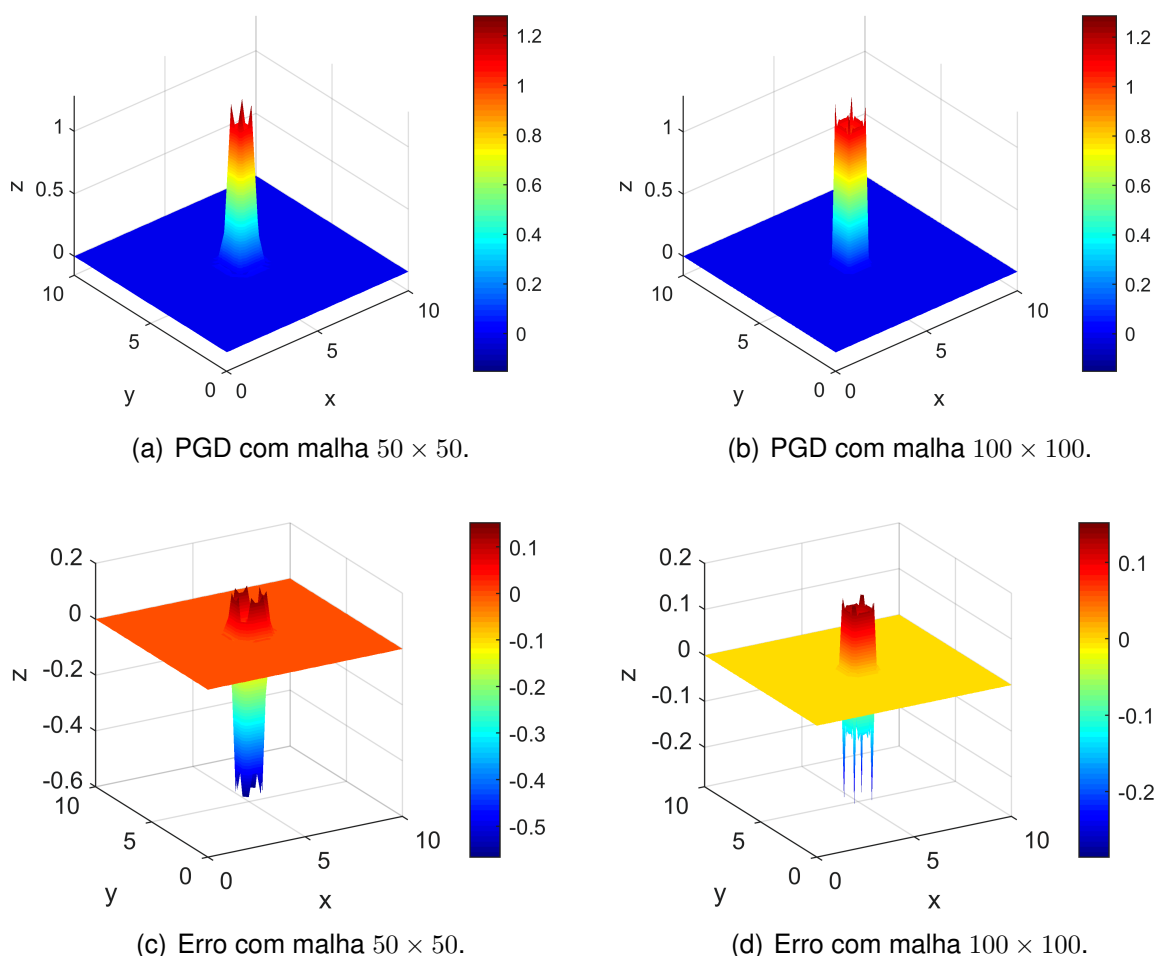
Figura 28 – Representação PGD da inclusão para  $y = L_y/2$ .



Mesmo que 60 nós consigam representar adequadamente a inclusão, nas simulações a seguir são utilizados 80 e 100 nós, pois posteriormente será aplicada a suavização e nela a representação fica mais adequada com malha que contenha pelo menos 7 elementos internos à inclusão em cada direção. A Figura 29 mostra a representação PGD em perspectiva da inclusão utilizando 50 e 100 nós em cada direção, onde é possível observar a diferença entre as duas representações.

É possível observar na Figura 28, bem como na Figura 29, a presença de picos na região da inclusão (ou região da descontinuidade) que são ocasionadas pelo efeito

Figura 29 – Representação PGD da inclusão retangular em perspectiva sem suavização e representação do erro entre solução exata e aproximação PGD.

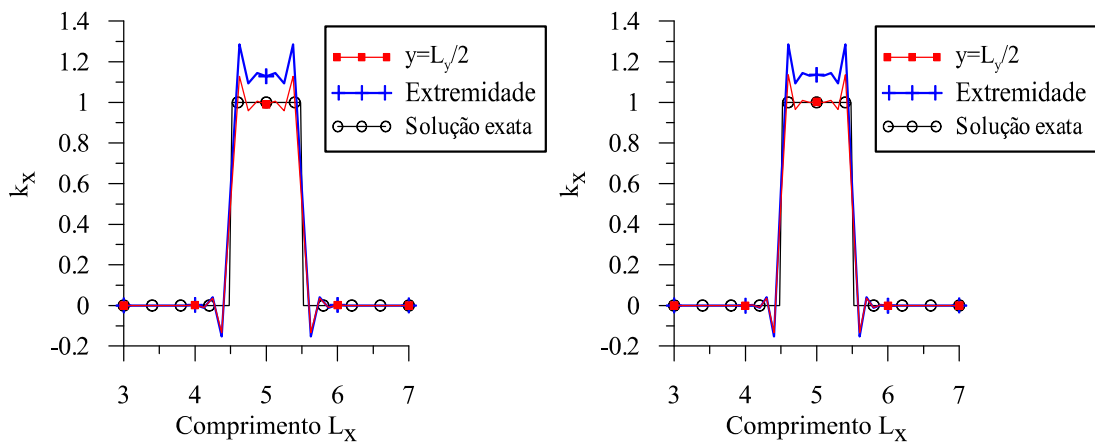


de Gibbs mencionado na Seção 3.10. Na Figura 29 verifica-se ainda que nos vértices da inclusão há picos maiores do que aqueles apresentados para  $y = L_y/2$ . A Figura 30 apresenta a diferença da representação na região dos vértices e a região de  $L_y/2$ .

Ao utilizar o método PGD em dados de propriedades de material e/ou dados de carregamento, busca-se que a representação seja a mais fiel possível ao dado real. Porém, como visto, em dados de propriedade que contenham inclusões (descontinuidades) ocorre o fenômeno de Gibbs. Então emprega-se a suavização apresentada na Seção 3.10 nas regiões de interferência do efeito, exatamente onde ocorre as singularidades, e os resultados da norma  $L_2$  do erro quadrático aplicando este artifício são apresentados na Tabela 7.

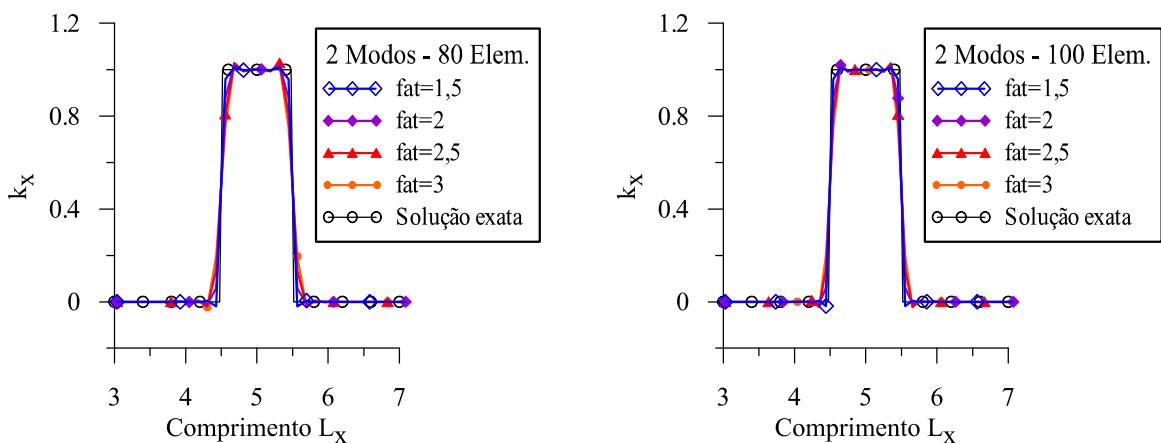
Como se pode observar na Tabela 7, os melhores resultados foram obtidos para  $fat = 1, 5$ . Observa-se também que, ao aumentar a quantidade de modos, não houve redução significativa na norma do erro. A Figura 31 apresenta os resultados somente para  $y = L_y/2$  utilizando 2 modos, onde é possível observar que a aplicação a suavização, torna a aproximação localmente mais adequada.

Figura 30 – Diferença entre a representação em  $y = L_y/2$  e nos vértices da inclusão sem suavização.



(a) Representação com malha  $80 \times 80$ . (b) Representação PGD com malha  $100 \times 100$ .

Figura 31 – Diferença entre a representação aplicando suavização em  $y = L_y/2$ , utilizando  $fat = 1,5$ ,  $fat = 2$ ,  $fat = 2,5$  e  $fat = 3$ .



(a) Representação PGD com malha  $80 \times 80$ . (b) Representação PGD com malha  $100 \times 100$ .

Percebe-se que em ambas as malhas, 80 e 100 elementos em cada direção, a suavização utilizando o fator  $fat = 1,5$  torna a representação mais próxima do real. A Figura 32 apresenta a representação PGD em perspectiva da inclusão na malha com 100 elementos numa vista frontal, onde é possível observar a diferença entre as representações. Estas diferenças são mais nítidas no topo e na base da descontinuidade.

Também não foram adotadas malhas mais refinadas pois o ganho em relação ao acréscimo de graus de liberdade PGD não foi vantajoso, pois os picos nos vértices da inclusão continuam aparecendo com amplitudes muito próximas as amplitudes apresentadas com 80 e 100 nós em cada direção. Além disso, o ajuste para obter o melhor fator  $fat$  para malhas refinadas passa a ser mais complexo.

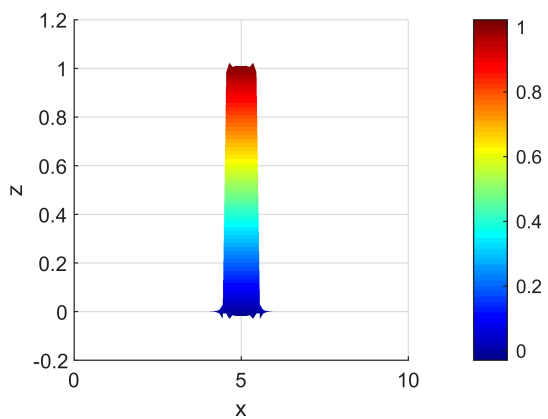
Neste caso foi aplicada a suavização apenas nas configurações com 80 e 100

Tabela 7 – Quantidade de modos, número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, para simulações com suavização.

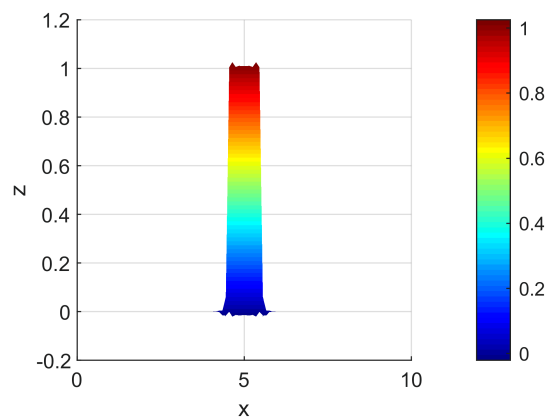
80x80				
$fat$	Modos	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
1,5	2	320	1,1542E-03	2,7233E-02
	5	800	1,3074E-03	2,6747E-02
	6	960	1,3074E-03	2,6747E-02
2	2	320	1,0732E-02	8,4906E-02
	5	800	1,0702E-02	8,3945E-02
	7	1120	1,0702E-02	8,3945E-02
2,5	2	320	3,1858E-02	1,2321E-01
	5	800	3,1362E-02	1,2175E-01
	7	1120	3,1362E-02	1,2175E-01
3	2	320	5,5936E-02	1,5239E-01
	5	800	5,4846E-02	1,5070E-01
	6	960	5,4846E-02	1,5070E-01
100x100				
$fat$	Modos	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
1,5	2	400	9,1617E-04	2,2923E-02
	5	1000	1,0147E-03	2,2606E-02
	10	2000	1,0147E-03	2,2606E-02
2	2	400	8,5573E-03	7,0296E-02
	5	1000	8,5330E-03	6,9671E-02
	10	2000	8,5330E-03	6,9671E-02
2,5	2	400	2,5365E-02	1,0205E-01
	5	1000	2,5030E-02	1,0111E-01
	9	1800	2,5030E-02	1,0111E-01
3	2	400	4,4521E-02	1,2681E-01
	5	1000	4,3792E-02	1,2571E-01
	9	1800	4,3792E-02	1,2571E-01

ndof's variando a quantidade de modos e o fator  $fat$ . Porém testes com outras configurações foram realizadas variando a quantidade de nós em cada direção e mantendo o mesmo fator mostram que o erro pode aumentar. Configurações em que os vértices coincidem com os nós têm-se erros pequenos, caso contrário, a representação se torna inadequada, apresentando erros maiores.

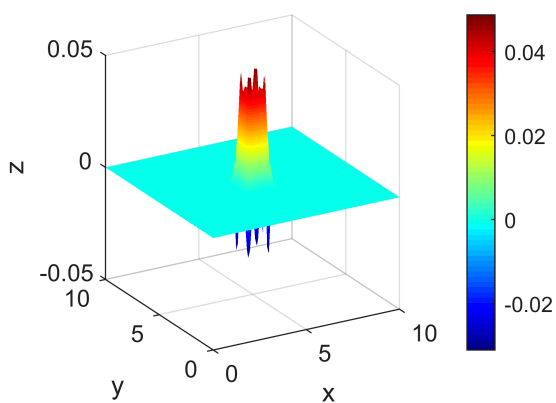
Figura 32 – Vista frontal da representação PGD utilizando 100 nnd's aplicando suavização com fator  $fat = 1,5$  e representação do erro absoluto entre solução exata e solução PGD.



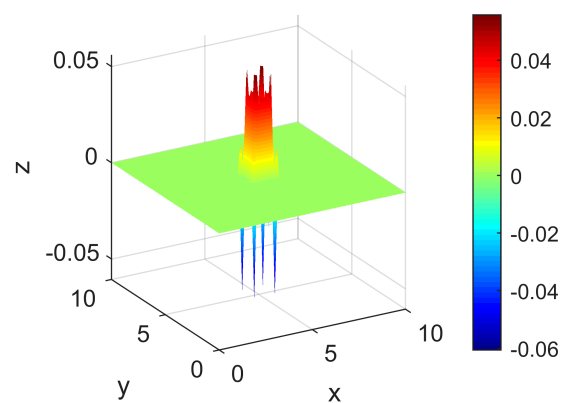
(a) Representação com 2 modos.



(b) Representação com 10 modos.



(c) Erro absoluto 2 modos.

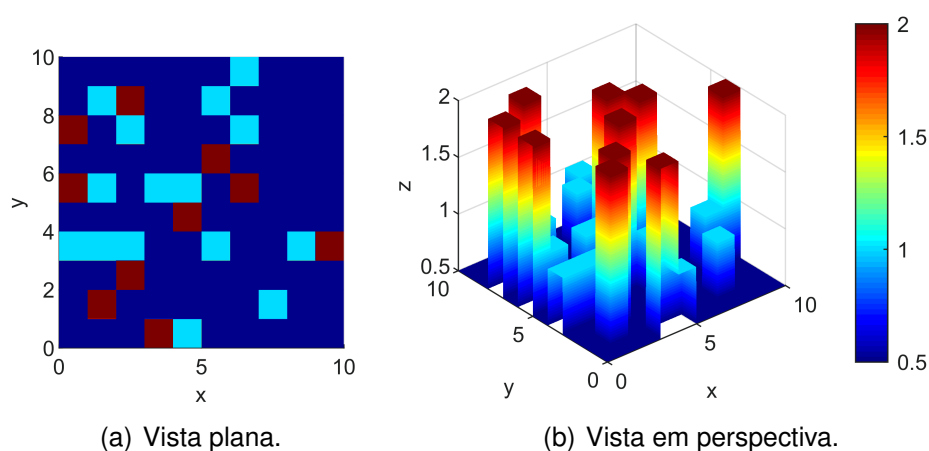


(d) Erro absoluto 10 modos.

#### 4.2.7 Caso 7 - Múltiplas inclusões (25% da área total).

Nesta seção propõe-se um caso com várias inclusões representando dois tipos de materiais diferentes, o material iA, com propriedade de material  $k_1$ , e o material iB, com propriedade de material  $k_2$ , em um domínio de 10x10 m. Neste caso as inclusões são quadradas e tem dimensão 1x1 m. A Figura 33 apresenta a configuração deste problema onde todo o domínio apresenta propriedades genéricas, sendo a matriz com  $k_m = 0,5$  e inclusões  $k_1 = 1,0$  e  $k_2 = 2,0$ .

Figura 33 – Configuração do caso - representação real das inclusões.



Nota-se na Figura 33 a posição das inclusões. O material iA ocupa 15% da área total e o material iB ocupa 10% da área total, sendo então que as duas juntas representam 25% do total da área do domínio descrito.

As inclusões foram geradas aleatoriamente utilizando um programa desenvolvido para tal função. Neste programa são inseridos a quantidade de materiais que representam as inclusões, a densidade delas requeridas no domínio e o tamanho das inclusões. Para este caso foi determinado: dois materiais, densidade de 15% e 10% e inclusões quadradas de tamanho 1x1 m.

Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos PGD. As Tabelas 8 e 9 apresentam a norma  $L_2$  do erro quadrático e o número de nós em cada direção para cada uma das configurações testadas. A Figura 34 apresenta a curva de convergência para cada um dos modos testados.



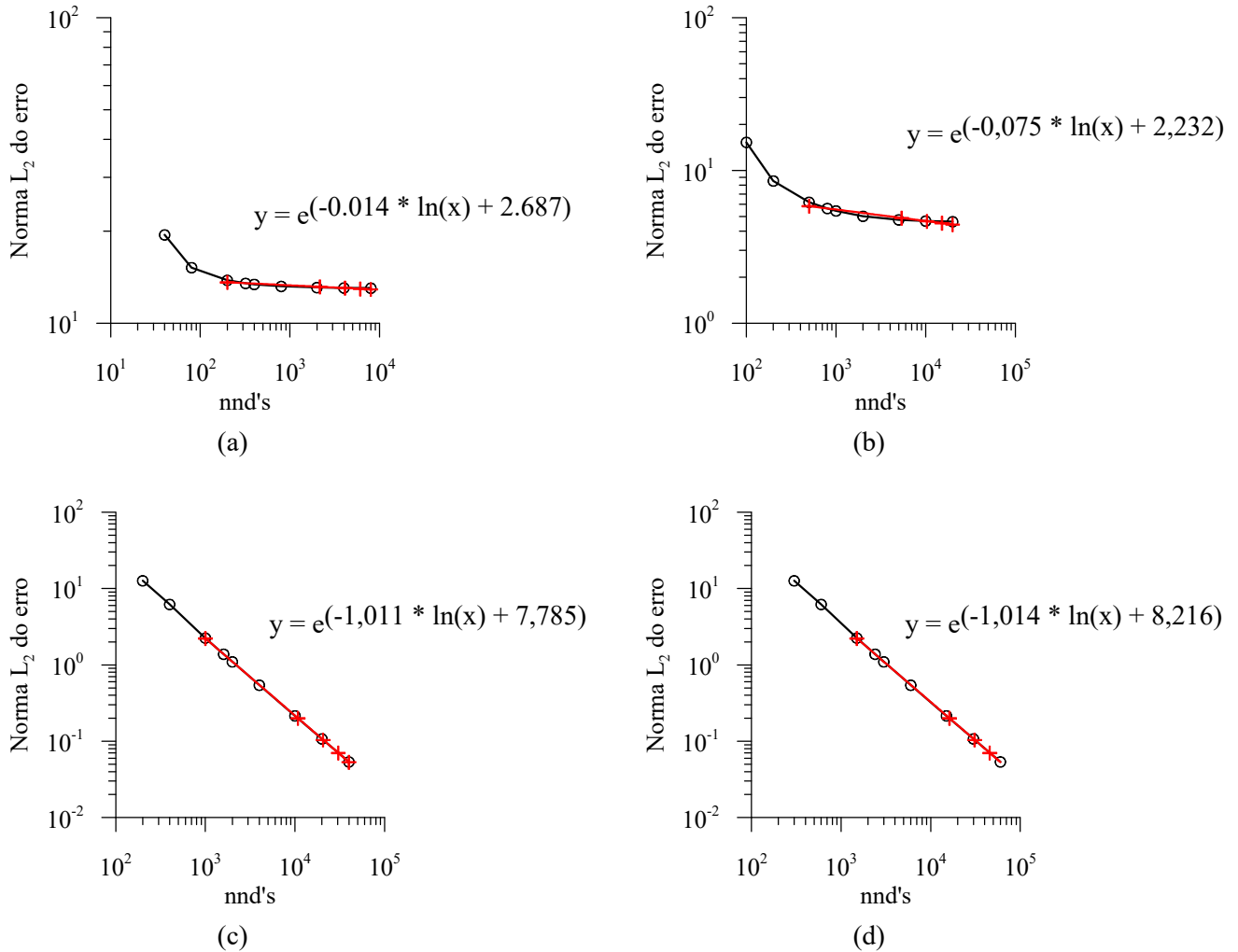
Tabela 8 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 2 e 5 modos.

2 Modos				5 Modos			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	40	19,4585	1,3541E-02	10	100	15,2939	2,3007E-01
20	80	15,1997	1,3308E-01	20	200	8,5440	1,6463E-02
50	200	13,8171	1,6177E-01	50	500	6,1999	3,4038E-02
80	320	13,4985	1,6780E-01	80	800	5,6394	4,5566E-02
100	400	13,3960	1,6965E-01	100	1000	5,4375	4,9128E-02
200	800	13,1964	1,7312E-01	200	2000	5,0164	5,5842E-02
500	2000	13,0798	1,7507E-01	500	5000	5,5092	5,9637E-02
1000	4000	13,0414	1,7570E-01	1000	10000	4,6669	6,0866E-02
2000	8000	13,0223	1,7601E-01	2000	20000	4,6227	6,1475E-02

Tabela 9 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 10 e 15 modos.

10 Modos				15 Modos			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	12,6751	2,9674E-01	10	300	12,6712	2,9675E-01
20	400	6,2045	1,0466E-01	20	600	6,2042	1,0465E-01
50	1000	2,2476	3,6981E-02	50	1500	2,2477	3,6981E-02
80	1600	1,3818	2,2436E-02	80	2400	1,3818	2,2436E-02
100	2000	1,0986	1,7761E-02	100	3000	1,0986	1,7761E-02
200	4000	0,5426	8,6959E-03	200	6000	0,5426	8,6959E-03
500	10000	0,2155	3,4346E-03	500	15000	0,2155	3,4346E-03
1000	20000	0,1075	1,7100E-03	1000	30000	0,1075	1,7100E-03
2000	40000	0,0537	8,5306E-04	2000	60000	0,0537	8,5306E-04

Figura 34 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência para cada uma das configurações: (a) 2 Modos. (b) 5 Modos. (c) 10 Modos. (d) 15 Modos. A taxa de convergência é de: (a)  $-0,0144$ . (b)  $-0,0751$ . (c)  $-1,0114$ . (d)  $-1,0114$ .



Nota-se nas tabelas apresentadas que há pouca diferença entre a utilização de 10 e 15 modos, portanto é utilizado para as considerações a seguir as simulações utilizando 10 modos. A Figura 35 mostra a representação PGD ao longo de  $x$  em  $y = 3$  metros e a Figura 36 evidencia a representação PGD em todo domínio utilizando 10 modos com 100 ndof's.

Figura 35 – Representação PGD da inclusão ao longo de  $x$  em  $y = 3$  metros, utilizando 10 modos. (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's.

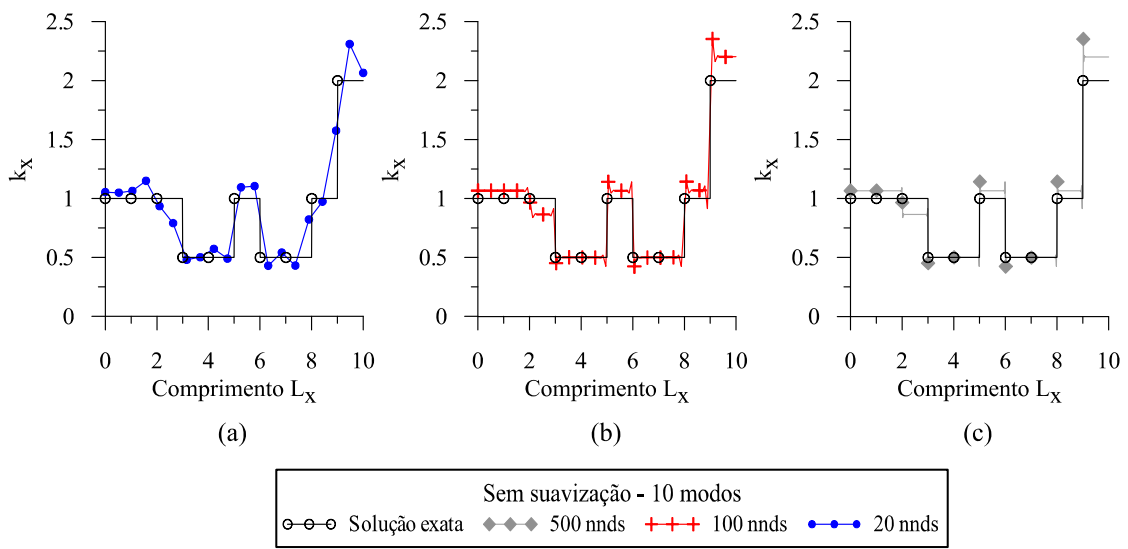
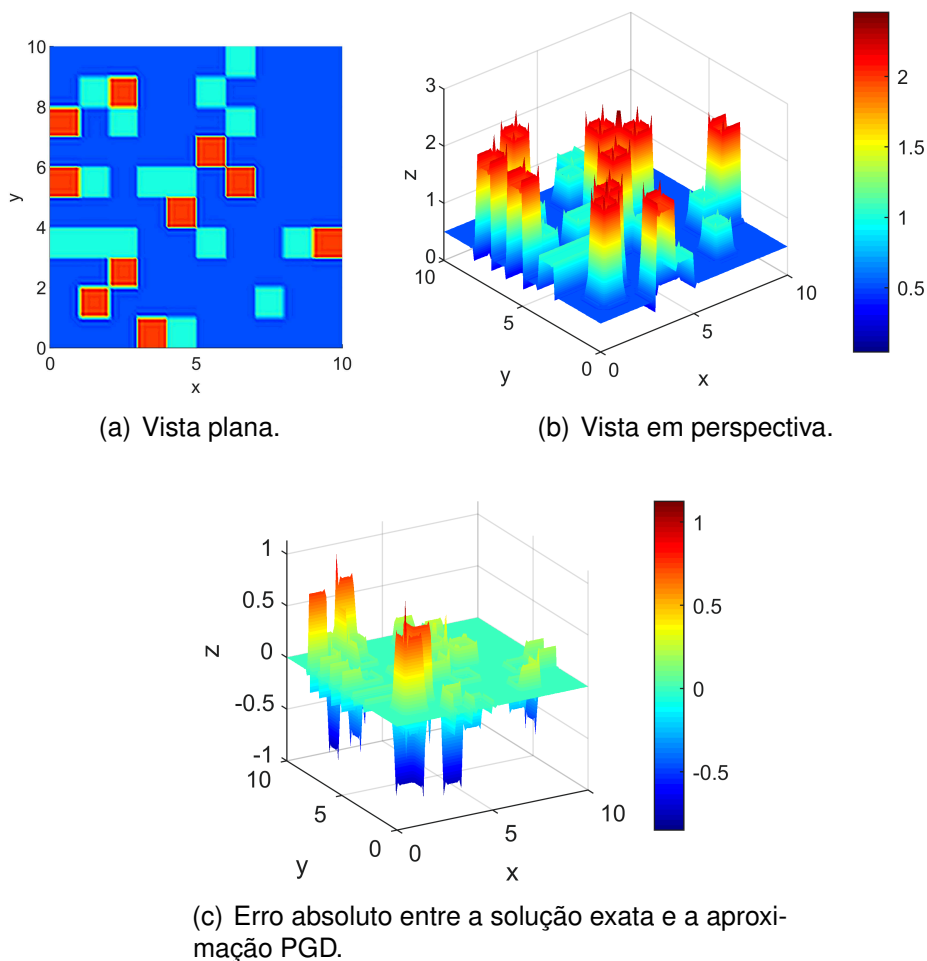


Figura 36 – Representação PGD do material utilizando 10 modos e 100 nnd's.



É possível observar na Figura 36 (b) os picos nas regiões dos vértices das inclusões. Então, de modo análogo a Seção 4.2.6, aplica-se a suavização. As Tabelas 10 e 11 apresentam os resultados obtidos aplicando diferentes fatores de suavização em busca de uma melhor representação, isto é, uma menor norma  $L_2$  do erro quadrático utilizando 10 modos.

Tabela 10 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), e norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização com os fatores  $fat = 1, 10$  e  $fat = 1, 25$ .

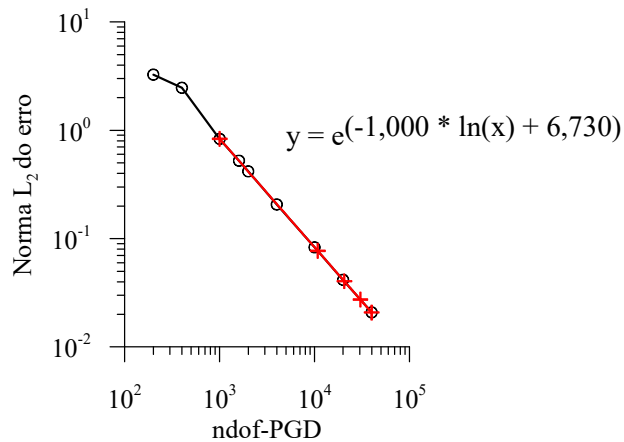
$fat = 1, 10$				$fat = 1, 25$			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	3,4713	1,5786E-01	10	200	3,2614	1,5266E-01
20	400	2,5269	2,5637E-02	20	400	2,4691	1,2941E-02
50	1000	0,8313	1,4262E-03	50	1000	0,8331	8,7141E-03
80	1600	0,5189	2,1999E-03	80	1600	0,5238	7,0423E-03
100	2000	0,4121	2,1379E-03	100	2000	0,4176	6,0811E-03
200	4000	0,2043	1,4173E-03	200	4000	0,2066	3,4801E-03
500	10000	0,0819	6,4387E-04	500	10000	0,0831	1,4858E-03
1000	20000	0,0410	3,3468E-04	1000	20000	0,0416	7,5833E-04
2000	40000	0,0205	1,7062E-04	2000	40000	0,0208	3,8312E-04

Tabela 11 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), e norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização com os fatores  $fat = 1, 50$  e  $fat = 1, 75$ .

$fat = 1, 50$				$fat = 1, 75$			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	3,2688	1,5754E-01	10	200	3,4994	1,7131E-01
20	400	2,4021	6,2014E-03	20	400	2,3955	2,2235E-02
50	1000	0,8623	2,0696E-02	50	1000	0,9214	3,2392E-02
80	1600	0,5456	1,5177E-02	80	1600	0,5856	2,3313E-02
100	2000	0,4354	1,2770E-02	100	2000	0,4707	1,9464E-02
200	4000	0,2176	6,9831E-03	200	4000	0,2372	1,0535E-02
500	10000	0,0875	2,9262E-03	500	10000	0,0948	4,4023E-03
1000	20000	0,0439	1,4844E-03	1000	20000	0,0477	2,2299E-03
2000	40000	0,0220	7,4757E-04	2000	40000	0,0239	1,1222E-03

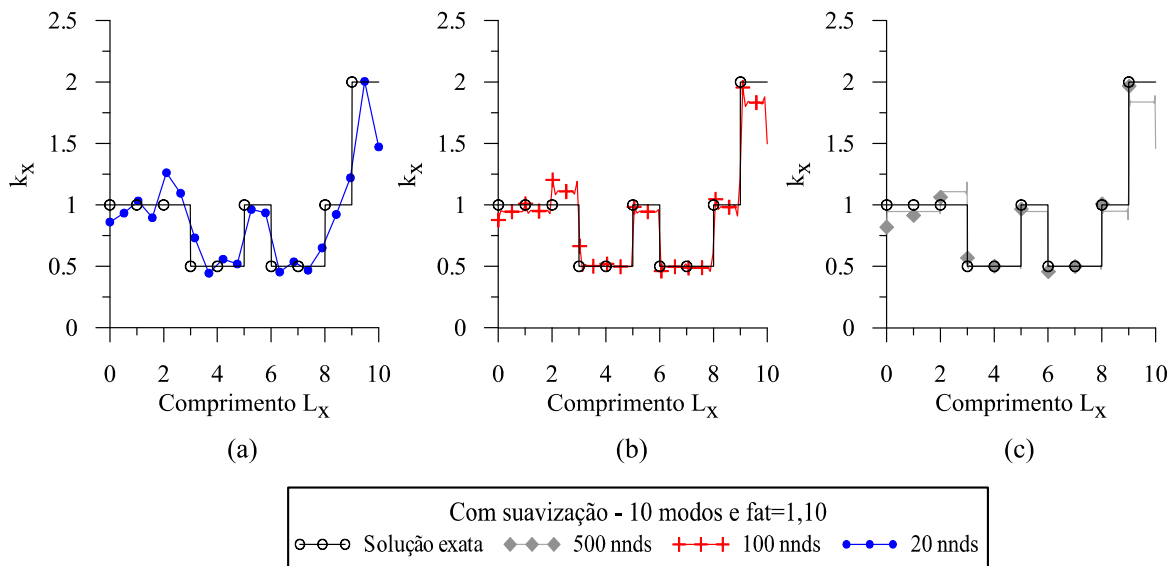
Observa-se nas tabelas apresentadas que os melhores resultados foram obtidos com o fator  $fat = 1, 10$  e apenas este será considerado para as próximas abordagens. A Figura 37 apresenta a curva de convergência utilizando 10 modos com fator  $fat = 1, 10$ .

Figura 37 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático e a curva de convergência, aplicando suavização e variando ndof-PGD - 10 modos e  $fat = 1,10$ . A taxa de convergência é de  $-1,0006$ .



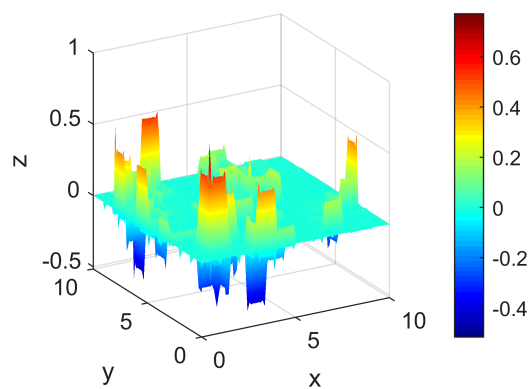
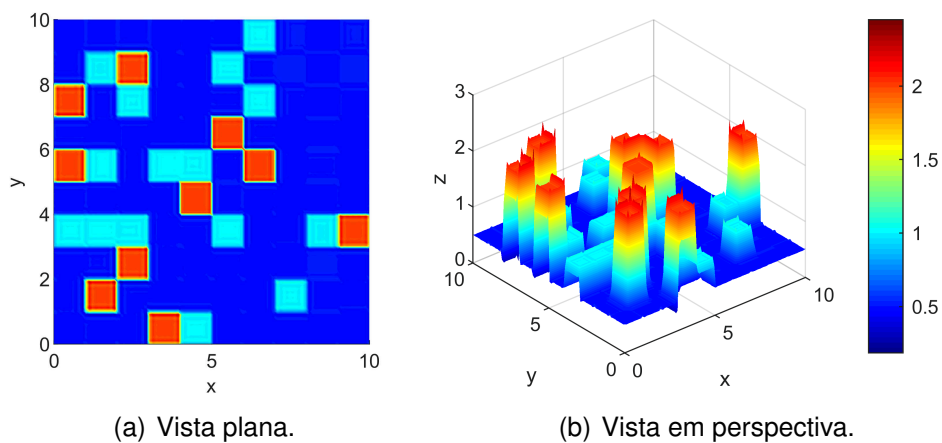
A Figura 38 mostra a representação ao longo de  $x$  em  $y = 3$  metros, utilizando o fator  $fat = 1,10$  e a Figura 39 evidencia a representação PGD utilizando 10 modos, 100 nnd's e fator  $fat = 1,10$ , apresentando vistas plana, em perspectiva e o erro absoluto entre as representações analítica e PGD.

Figura 38 – Representação PGD da inclusão ao longo de  $x$  em  $y = 3$  metros, utilizando 10 modos e fator  $fat = 1,10$ . (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's.



Observando as Figuras 36 (c), 39 (c) e também as tabelas apresentadas nesta seção, nota-se que a utilização do fator de suavização torna as representações mais adequadas, apresentando menor norma  $L_2$  do erro quadrático, quando comparados com os resultados obtidos sem suavização.

Figura 39 – Representação PGD do caso utilizando 10 modos e 100 nnd's e fator  $fat = 1, 10$ .

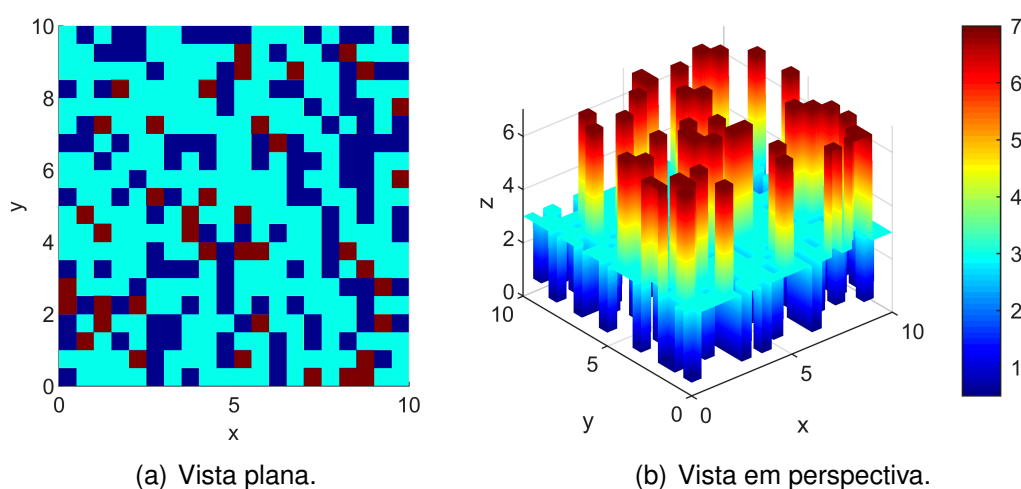


(c) Erro absoluto entre a solução exata e a aproximação PGD.

#### 4.2.8 Caso 8 - Múltiplas inclusões (40% da área total).

Nesta seção propõe-se um caso com várias inclusões representando dois tipos de materiais diferentes, o material iA, com propriedade de material  $k_1$ , e o material iB, com propriedade de material  $k_2$ , em um domínio de 10x10 m. Neste caso as inclusões são quadradas e tem dimensão 0,5x0,5 m. A Figura 40 apresenta a configuração do problema onde todo o domínio apresenta propriedades genéricas da matriz iguais a  $k_m = 3,0$ ; e das inclusões  $k_1 = 0,5$  e  $k_2 = 7,0$ .

Figura 40 – Configuração do caso - representação exata das inclusões.



Nota-se na Figura 40 a posição das inclusões. O material iA ocupa 30% da área total e o material iB ocupa 10% da área total, sendo então que as duas juntas representam 40% do total da área do domínio descrito. As posições das inclusões foram geradas aleatoriamente utilizando o mesmo programa já mencionado na Seção 4.2.7, alterando apenas os dados de entrada.

Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos PGD. As Tabelas 12 e 13 apresentam a norma  $L_2$  do erro quadrático e o número de nós em cada direção para cada uma das configurações testadas. A Figura 41 apresenta a curva de convergência para cada um dos modos testados.

Tabela 12 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo da norma  $L_2$  ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 10 modos e 15 modos.

10 Modos				15 Modos			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	262,6280	5,4670E-02	10	300	259,0792	5,4020E-02
20	400	264,7408	1,8703E-01	20	600	251,3120	2,1786E-01
50	1000	99,4831	3,3141E-02	50	1500	73,5876	7,4253E-02
80	1600	84,1643	1,7434E-03	80	2400	53,3768	3,9145E-02
100	2000	75,7183	1,1206E-02	100	3000	42,7605	2,9975E-02
200	4000	58,0484	2,5433E-02	200	6000	22,6179	1,3171E-02
500	10000	47,1714	3,3393E-02	500	15000	10,7829	3,4480E-03
1000	20000	43,6426	3,5962E-02	1000	30000	6,8920	2,4369E-04
2000	40000	41,7365	3,7227E-02	2000	60000	4,9614	1,3453E-03

Tabela 13 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo da norma  $L_2$  ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD utilizando 20 modos e 25 modos.

20 Modos				25 Modos			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	400	258,7313	5,4028E-02	10	500	258,2994	5,4106E-02
20	800	252,6720	2,2029E-01	20	1000	252,5532	2,2032E-01
50	2000	71,4991	7,7250E-02	50	2500	71,1880	7,7546E-02
80	3200	51,2437	4,1975E-02	80	4000	51,0677	4,2211E-02
100	4000	40,7695	3,2433E-02	100	5000	40,7679	3,2410E-02
200	8000	20,3931	1,5606E-02	200	10000	20,3932	1,5607E-02
500	20000	8,4598	5,7889E-03	500	25000	8,4173	5,8510E-03
1000	40000	4,5363	2,5644E-03	1000	50000	4,0313	3,0632E-03
2000	80000	2,5896	9,6610E-04	2000	100000	2,5895	9,6607E-04

Nota-se nas tabelas apresentadas que há pouca diferença entre a utilização de 20 e 25 modos sem aplicar a suavização, portanto é utilizado para as considerações a seguir as simulações utilizando 20 modos. A Figura 35 mostra a representação PGD ao longo de  $x$  em  $y = 2,1$  metros e a Figura 36 evidencia a representação PGD em todo domínio utilizando 20 modos com 500 nnd's.



Figura 41 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático variando ndof-PGD e a curva de convergência para cada uma das configurações: (a) 10 Modos. (b) 15 Modos. (c) 20 Modos. (d) 25 Modos. A taxa de convergência é de: (a)  $-0,2412$ . (b)  $-0,7609$ . (c)  $-0,9246$ . (d)  $-0,9378$ .

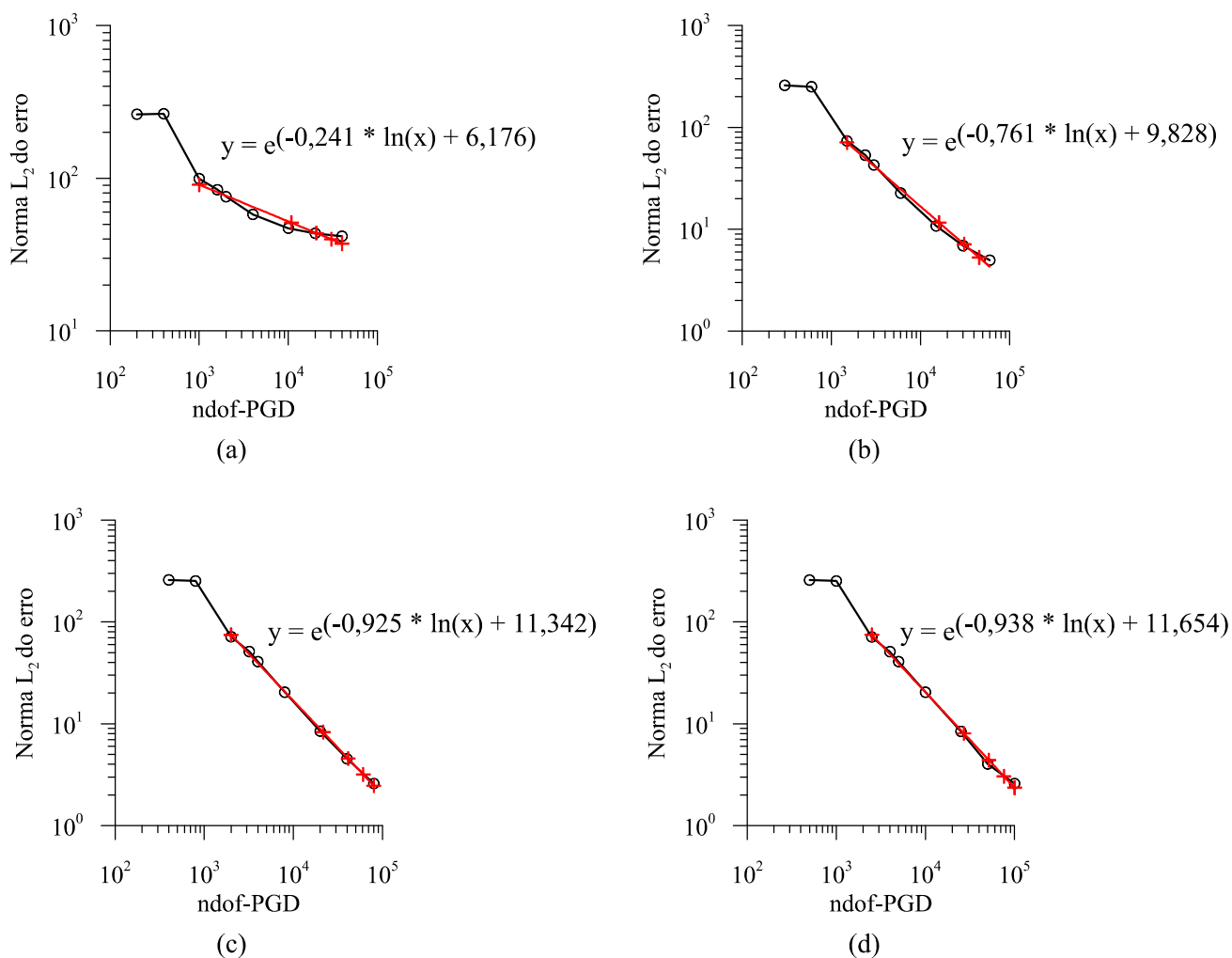
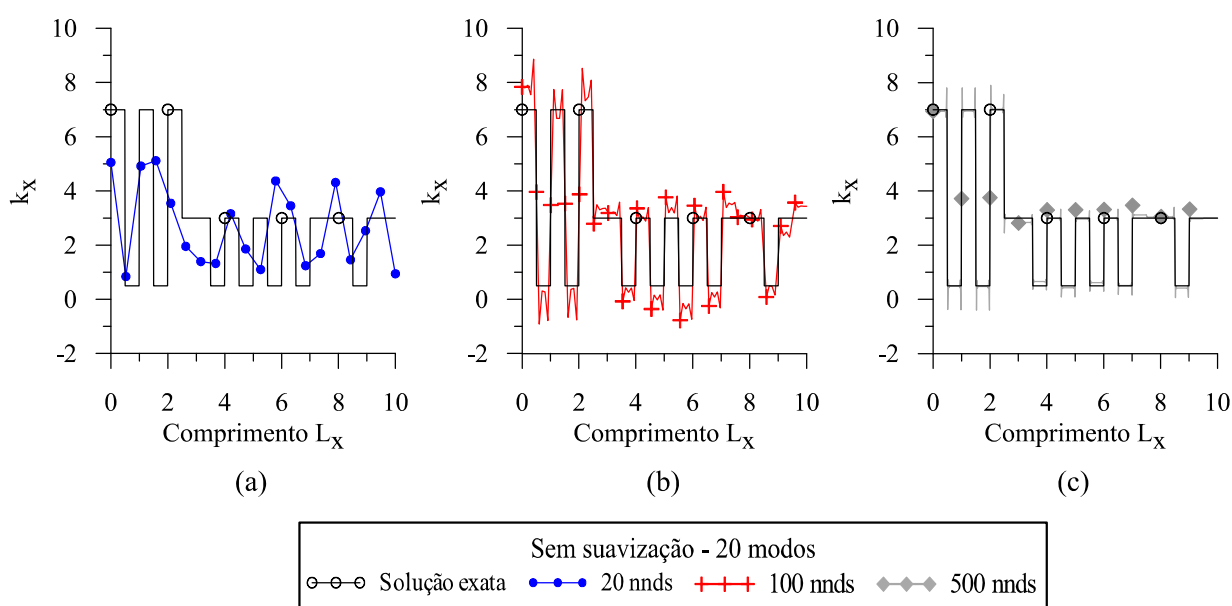


Figura 42 – Representação PGD da inclusão ao longo de  $x$  em  $y = 2,1$  metros, utilizando 20 modos. (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's.

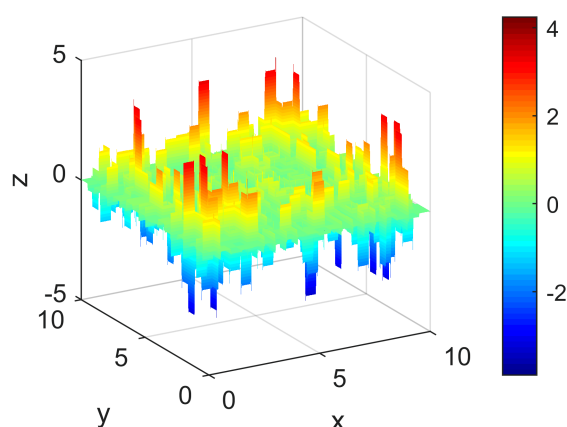
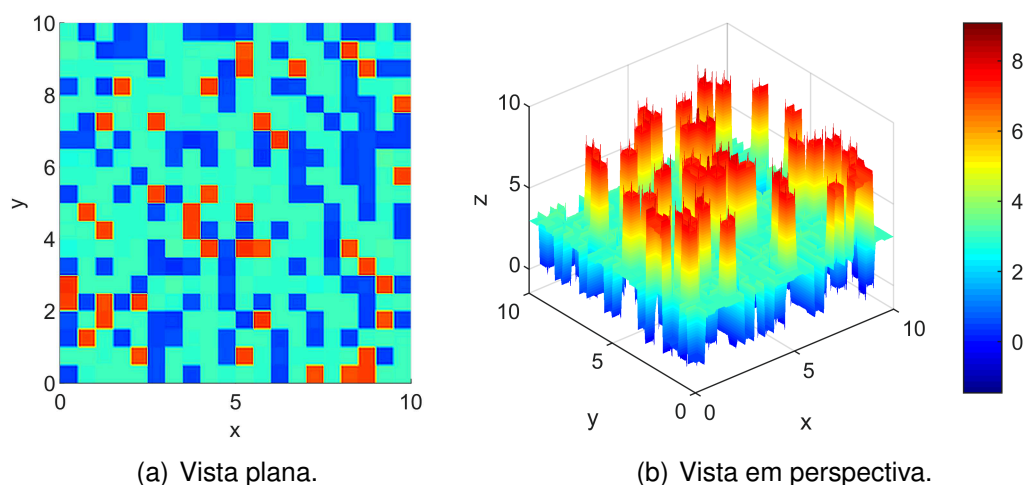


É possível observar na Figura 43 (b) os picos nas regiões dos vértices das inclusões. Então de modo análogo a Seção 4.2.6, aplica-se a suavização. As Tabelas 14 e 15 apresentam os resultados obtidos aplicando diferentes fatores de suavização em busca de uma melhor representação, isto é, um menor erro utilizando 20 modos.

Tabela 14 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo da norma  $L_2$  ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização utilizando os fatores  $fat = 0,25$  e  $fat = 0,50$ .

$fat = 0,25$				$fat = 0,50$			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	355,8267	1,5429E-01	10	200	511,4110	9,8113E-02
20	400	254,8549	1,6482E-01	20	400	270,2387	1,1512E-01
50	1000	70,9272	3,8800E-02	50	1000	77,9206	1,0213E-02
80	1600	45,7898	1,4518E-02	80	1600	48,8942	4,8314E-03
100	2000	36,0126	1,0824E-02	100	2000	38,5999	4,9856E-03
200	4000	17,8086	4,5385E-03	200	4000	18,8378	3,4768E-03
500	10000	7,1493	1,6699E-03	500	10000	7,8318	2,1367E-03
1000	20000	3,7223	6,1922E-04	1000	20000	4,2262	1,4172E-03
2000	40000	2,0576	1,1448E-04	2000	40000	2,4389	1,0350E-03

Figura 43 – Representação PGD utilizando 20 modos e 500 nnd's da propriedade do material.



Observa-se nas tabelas apresentadas que os melhores resultados foram obtidos com o fator  $fat = 0,25$  e apenas este será considerado para as próximas representações deste caso. A Figura 44 apresenta a curva de convergência utilizando 20 modos com fator  $fat = 0,25$ .

A Figura 45 mostra a representação ao longo de  $x$  em  $y = 2,1$  metros, utilizando o fator  $fat = 1,10$  e a Figura 39 evidencia a representação PGD utilizando 20 modos, 500 nnd's e fator  $fat = 0,25$ .

Observando as Figuras 43 (c), 46 (c) e também as tabelas apresentadas nesta seção, nota-se que a utilização do fator de suavização torna as representações mais adequadas, apresentando menor norma  $L_2$  do erro quadrático.

Tabela 15 – Quantidade de nós em cada direção (nnd), número de graus de liberdade PGD (ndof-PGD), norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo da norma  $L_2$  ( $E_{L_2}^{rel}$ ) entre solução exata e PGD, aplicando suavização utilizando os fatores  $fat = 0,75$  e  $fat = 1,25$ .

$fat = 0,75$				$fat = 1,25$			
nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$	nnd	ndof-PGD	Norma $L_2$ do erro quad.	$E_{L_2}^{rel}$
10	200	258,7313	5,4028E-02	10	200	792,7372	2,8345E-01
20	400	252,6719	2,2029E-01	20	400	230,8673	1,6649E-01
50	1000	71,4991	7,7250E-02	50	1000	91,8552	1,0514E-01
80	1600	51,2437	4,1975E-02	80	1600	58,3164	7,6386E-02
100	2000	40,7695	3,2433E-02	100	2000	47,3744	6,1838E-02
200	4000	20,3930	1,5606E-02	200	4000	23,6629	3,3219E-02
500	10000	8,4598	5,7889E-03	500	10000	9,6385	1,3813E-02
1000	20000	4,5363	2,5644E-03	1000	20000	5,2554	7,4803E-03
2000	40000	2,5896	9,6610E-04	2000	40000	2,9605	4,0722E-03

Figura 44 – Gráfico da norma  $L_2$  do erro quadrático e a curva de convergência, aplicando suavização e variando ndof-PGD - 20 modos e  $fat = 0,25$ . A taxa de convergência é de  $-0,9722$ .

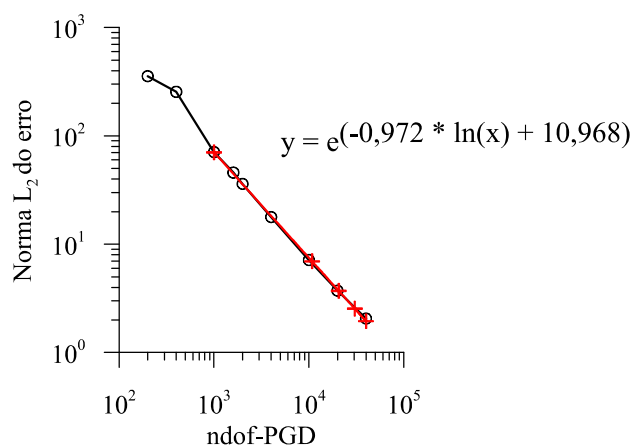


Figura 45 – Representação PGD da inclusão aplicando suavização ao longo de  $x$  em  $y = 2,1$  metros, utilizando 20 modos e fator  $fat = 1,10$ . (a) 20 nnd's. (b) 100 nnd's. (c) 500 nnd's.

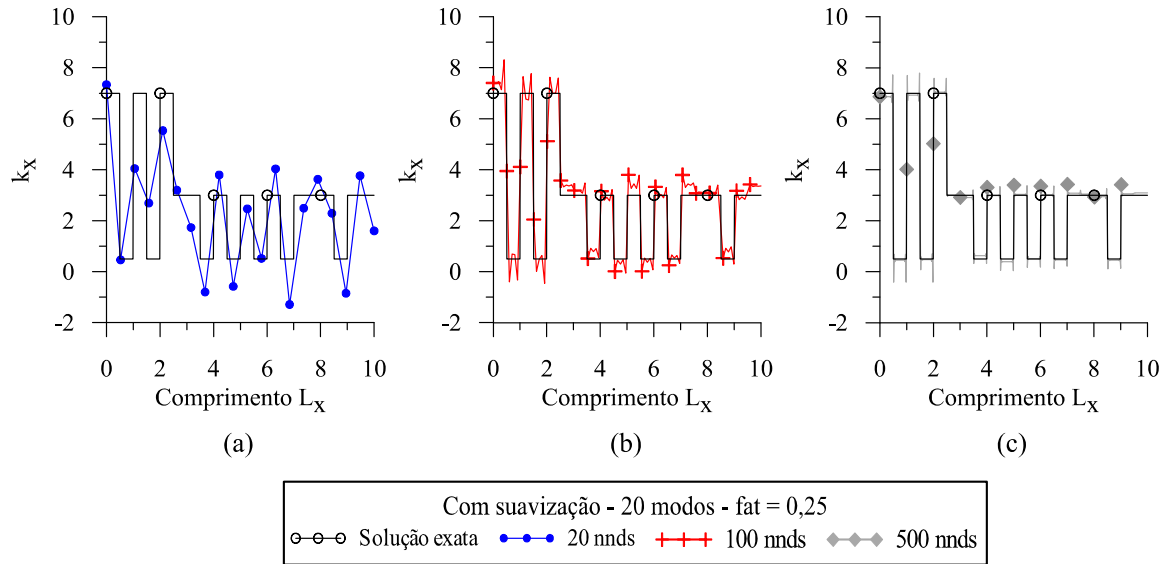
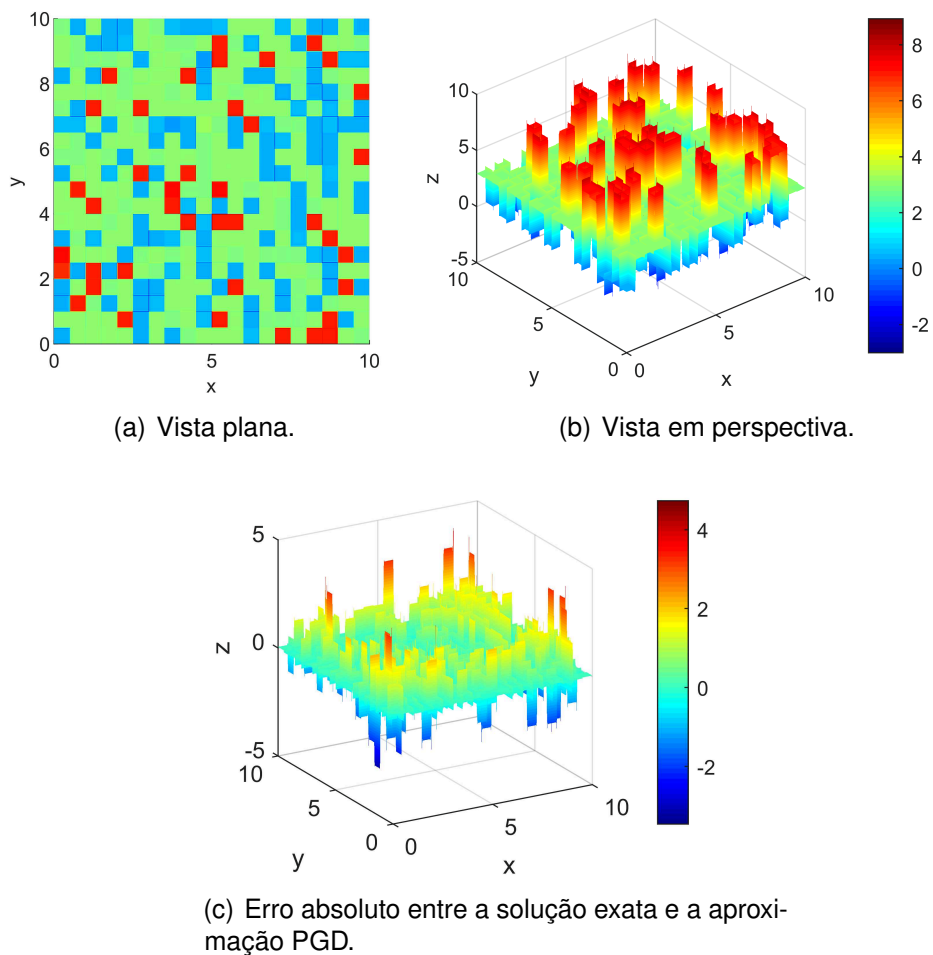


Figura 46 – Representação PGD aplicando suavização utilizando 20 modos, 500 nnd's e com fator  $fat = 0,25$  para a propriedade de material.



### 4.3 REPRESENTAÇÃO PGD PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Nesta seção serão abordados casos variando a quantidade de nós e também modos, a fim de verificar a influência destes na estimativa de solução do problema de condução de calor para os dados de temperatura e fluxo de calor utilizando o método PGD. Com exceção do primeiro caso, que é comparado com uma solução analítica, todos os outros são comparados com resultados obtidos a partir do método de elementos finitos. Também é importante destacar que em todas as simulações considera-se temperatura prescrita  $T = 0,0$  em todo o contorno do domínio. Destaca-se também que todas as simulações que utilizaram FEM como referência foram executadas com elementos quadriláteros.

#### 4.3.1 Caso 9 - Condutividade térmica e fluxo de calor constantes com solução analítica conhecida.

Considera-se aqui o primeiro teste da aproximação PGD para a solução do problema de condução de calor, é definido por  $\nabla^2 u = -b$  em  $\Omega$ , com  $u = 0,0$  no contorno. Esse problema tem solução analítica para fonte de calor  $b$  constante em todo o domínio e esta solução é dada por:

$$T(x, y) = \frac{px}{2}(L_x - x) - \frac{2p}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_y}{L_x}\right)} \left[ \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(L_y - y)}{L_x}\right) \right], \quad (116)$$

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}(x, y),$$

$$q_x = k \frac{p}{2}(2x - L_x) + k p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_y}{L_x}\right)} \left[ \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(L_y - y)}{L_x}\right) \right], \quad (117)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2 k p L_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_y}{L_x}\right)} \left[ \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right) - \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi(L_y - y)}{L_x}\right) \right], \quad (118)$$

onde  $p = b/k$ . Os coeficientes  $R_n$ ,  $S_n$  e  $T_n$  são:

$$R_n = \left(\frac{L_x}{n\pi}\right)^3 [1 - \cos(n\pi)], \quad (119)$$

$$S_n = 2L_x \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - \cos(n\pi)], \quad (120)$$

$$T_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - \cos(n\pi)], \quad (121)$$

Considera-se o problema de transmissão de calor definido por

$$\begin{aligned}\nabla^2 T &= -p \text{ em } \Omega, \\ T &= 0, 0 \text{ em } \Gamma.\end{aligned}\tag{122}$$

Foi adotado um domínio retangular de tamanho 4x4 metros, com condutividade térmica  $k = 1,0 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$  e fonte de calor  $b = 1,0 \text{ W/m}^3$ . Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e a quantidade de modo. As Tabelas 16, 17 e 18 apresentam o erro relativo da temperatura e do fluxo de calor para cada uma das configurações testadas. Foram realizadas simulações com 1, 3 e 5 modos e o erro relativo é calculado utilizando a solução analítica apresentada, que neste caso é:  $T = 1,17874 \text{ } ^\circ\text{C}$  no centro da placa, na coordenada (2,2), e  $q_x = -1,35063 \text{ W/m}^2$  na borda da placa na coordenada (0,2). A Figura 47 apresenta a curva de convergência para cada destas variáveis utilizando 5 modos. Nota-se que devido ao produto entre os coeficientes  $T_x$  e  $T_y$  apresentado nas formulações desvios muito acentuados quanto a convergência. Além disso, a análise foi realizada pontualmente, estando sujeita a uma variação maior quanto nas análises de convergências mostradas.

Tabela 16 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 1 modo PGD.

nnd	ndof-PGD	T [ $^\circ\text{C}$ ]	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ]	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
5	10	1,2313	0,8691	44,6054	35,6490
10	20	1,1579	1,1427	17,7237	15,3960
25	50	1,1715	1,3114	6,12662	2,9060
50	100	1,1695	1,3613	7,82334	0,7871
100	200	1,1698	1,3865	7,56035	2,6537
200	400	1,1699	1,3989	7,49248	3,5754
500	1000	1,1699	1,4063	7,48400	4,1248
1000	2000	1,1699	1,4088	7,47551	4,3055

Na Figura 48 visualiza-se o comportamento da temperatura e do fluxo de calor ao longo do eixo  $x$  em  $y = L_y/2$  utilizando 10, 50 e 100 nnd's usando 5 modos.

Tabela 17 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 3 modo PGD.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ]	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
5	30	1,2304	0,8691	43,8260	35,6490
10	60	1,1666	1,1469	10,2836	16,5090
25	150	1,1812	1,3195	2,1195	4,9946
50	300	1,1792	1,3708	3,8032	1,6390
100	600	1,7952	1,3968	6,6028	0,0538
200	1200	1,1796	1,4096	7,2815	0,8850
500	3000	1,1796	1,4173	7,4512	1,3790
1000	6000	1,1796	1,3714	7,4918	1,5430

Tabela 18 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , do fluxo de calor na borda, coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e erros relativos entre FEM e PGD de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ) nestes pontos, utilizando 5 modo PGD.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ]	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
5	50	1,2313	0,8691	44,6054	35,6490
10	100	1,1683	1,1250	8,83280	16,7070
25	250	1,1837	1,2747	4,16402	5,6188
50	500	1,1816	1,3183	2,43336	2,3914
100	1000	1,1820	1,3402	2,73028	0,7743
200	2000	1,1820	1,3509	2,79815	0,0230
500	5000	1,1820	1,3574	2,82360	0,4976
1000	10000	1,1820	1,3595	2,82360	0,6553

Figura 47 – Curva de convergência do método PGD utilizando 5 modos. (a) Temperatura na coordenada (2,2). (b) Fluxo de calor na direção  $x$ , coordenada (0,2). A taxa de convergência é de: (a)  $-0,1117$ . (b)  $-0,1086$ .

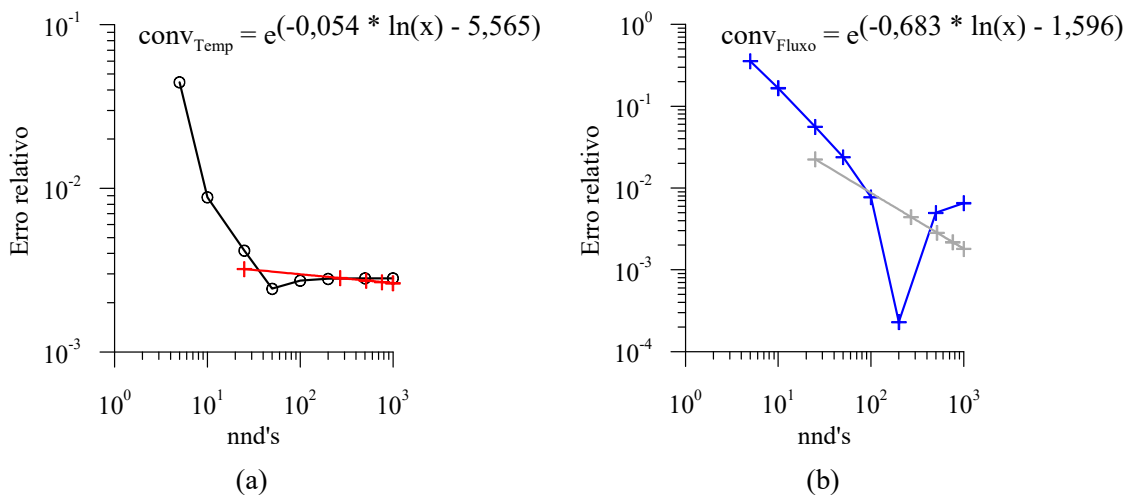
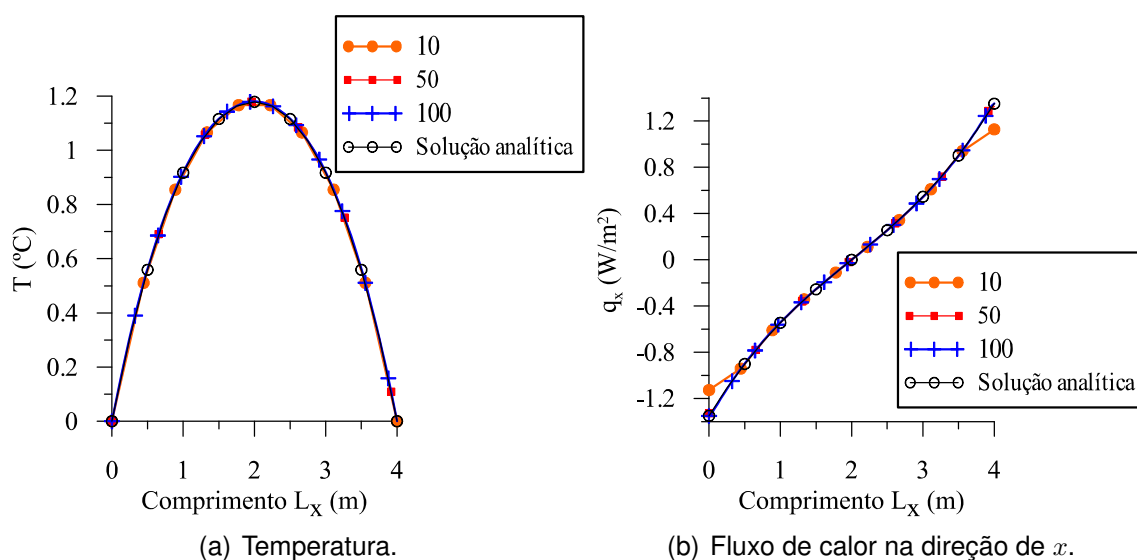




Figura 48 – Variação da temperatura e do fluxo de calor na direção de  $x$  ao longo da linha  $y = L_y/2$ , variando a quantidade de nós utilizando 5 modos.



Verifica-se na Figura 48 (a) que utilizando as configurações apresentadas de 10, 50 e 100 nnd's, todas elas se mostraram satisfatórias, porém, quanto ao fluxo de calor, a representação utilizando apenas 10 nós em cada direção não se mostrou adequada, apresentando um pequeno desvio nas proximidades da borda da placa.

As Figuras 49, 50 e 51 apresentam a visualização da temperatura e do fluxo de calor em duas dimensões, obtidos a partir das soluções analíticas e PGD. A solução PGD foi gerada utilizando 50 nnd's e percebe-se que, com esta configuração, o PGD foi capaz de aproximar a temperatura e o fluxo de calor de forma adequada.

Figura 49 – Resultados obtidos de temperatura - caso 9.

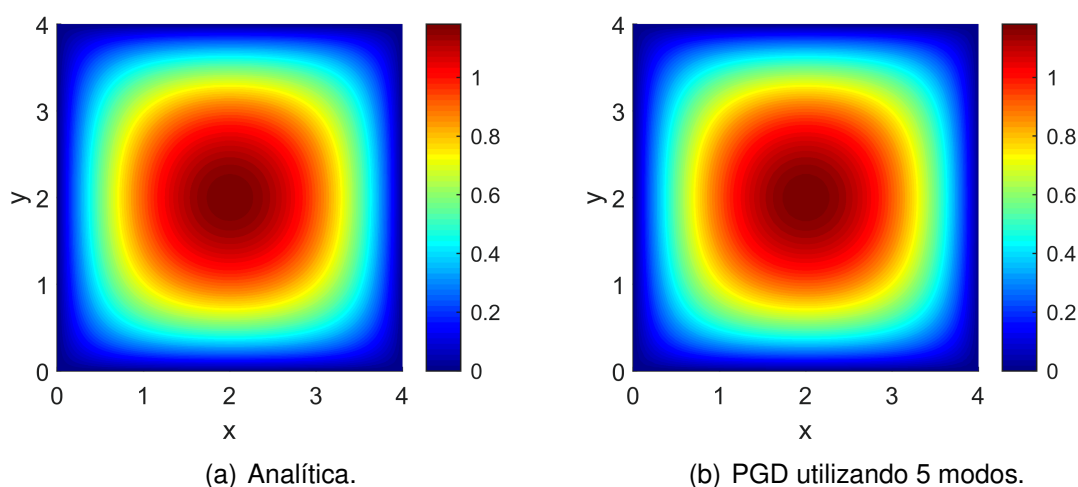
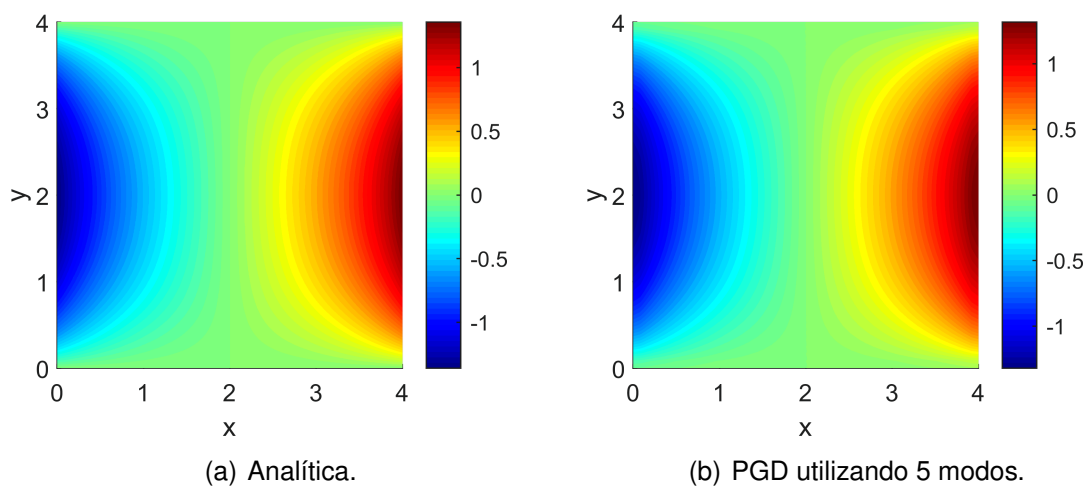
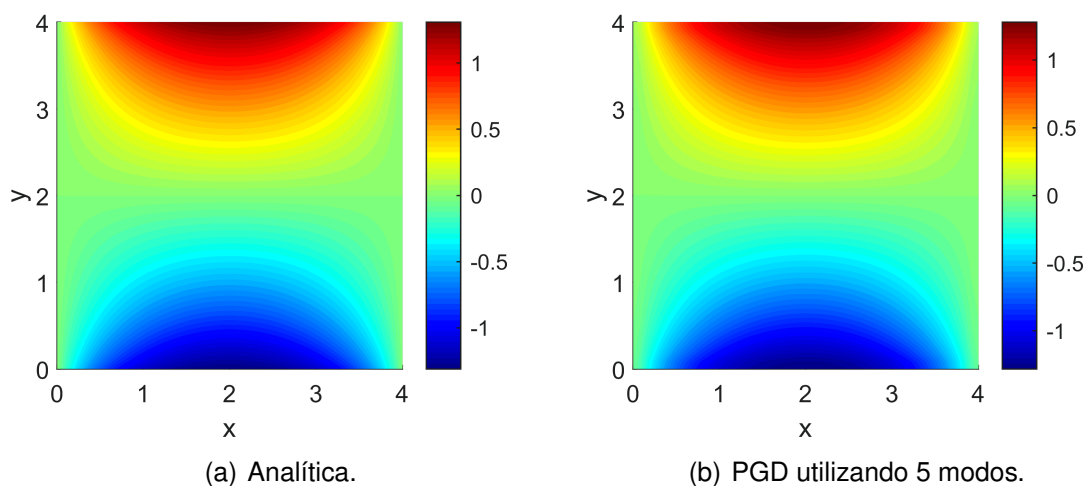


Figura 50 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 9.Figura 51 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 9.

As Figuras 52, 53 e 54 mostram a visualização em perspectiva da solução PGD para temperatura e fluxo de calor, juntamente com o erro absoluto entre as duas soluções.

Figura 52 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 9. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 6,7171E - 3$ .

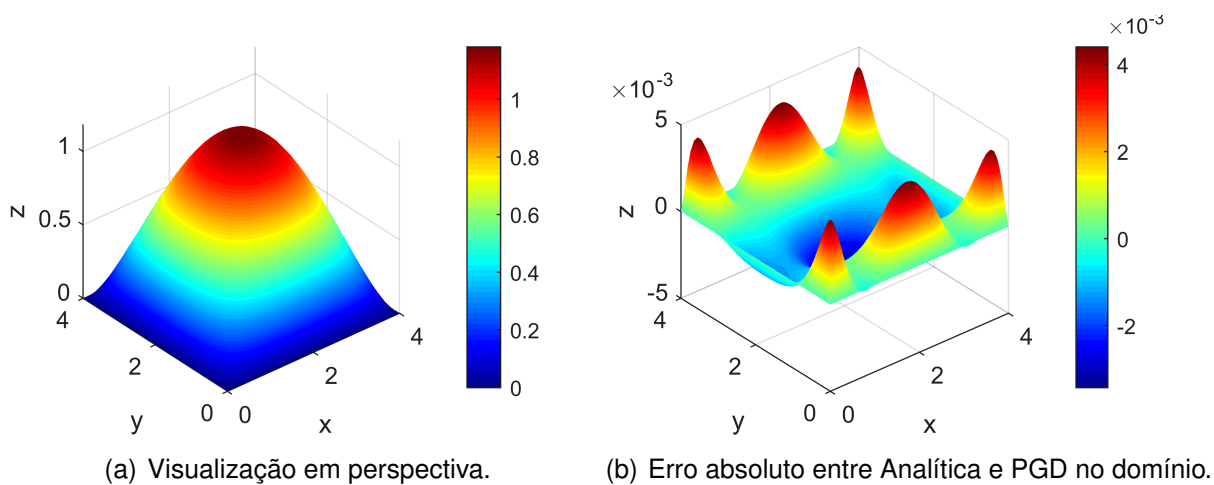


Figura 53 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 5 modos. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 2,2366E - 2$ .

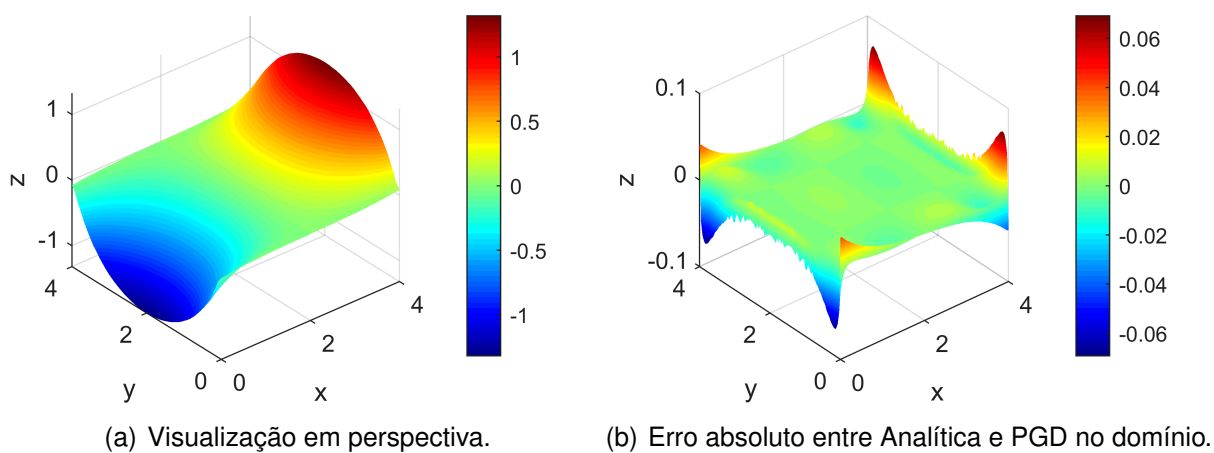
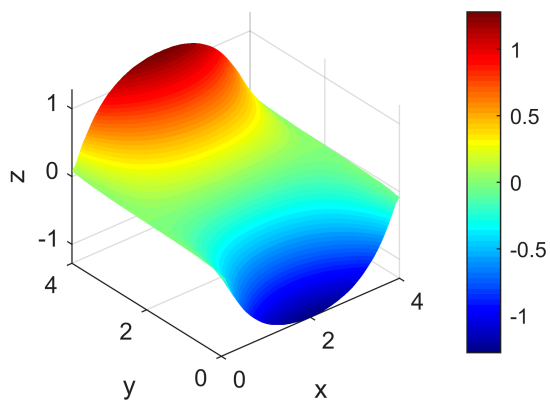
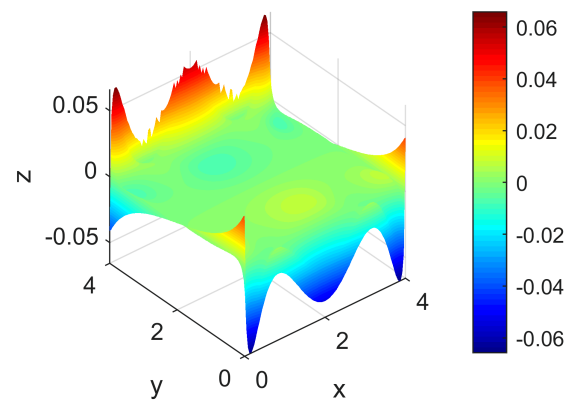


Figura 54 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 5 modos. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 2,6109E - 2$ .



(a) Visualização em perspectiva.



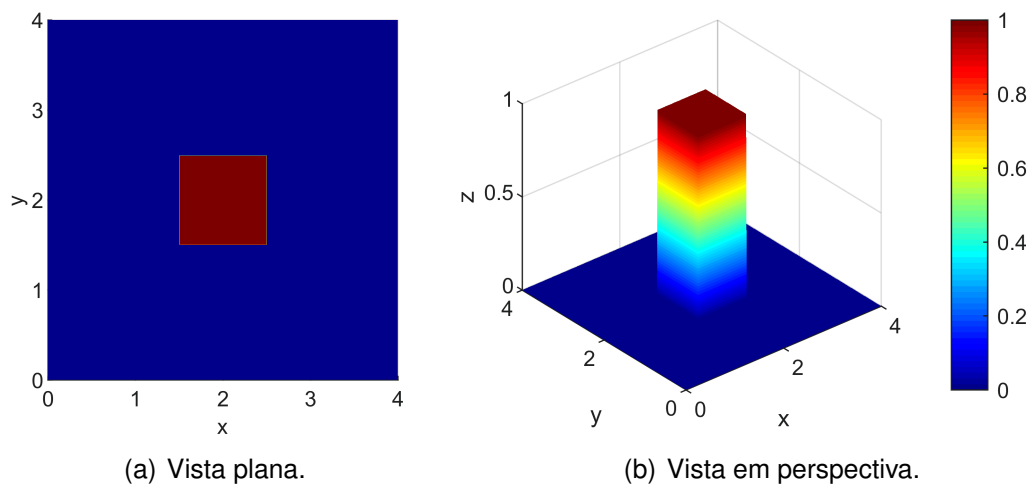
(b) Erro absoluto entre Analítica e PGD no domínio.

### 4.3.2 Caso 10 - Fonte de calor localizada apenas em uma região delimitada no centro da placa.

Neste caso é adotada uma placa de dimensões 4x4 metros, com condutividade térmica constante  $k = 1,0 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$  e fonte de calor localizada apenas no centro da placa, numa região delimitada de tamanho 1x1 metro, com valor constante  $b = 1,0 \text{ W/m}^3$  e temperatura  $T = 0,0$  no contorno. A Figura 55 representa a configuração dos dados da fonte de calor usada no problema, ou seja:

$$\begin{aligned}\nabla^2 T &= -1,0 \text{ em } 1,5 \leq x \leq 2,5 \text{ e } 1,5 \leq y \leq 2,5, \\ T &= 0,0 \text{ em } \Gamma.\end{aligned}$$

Figura 55 – Configuração dos dados de fonte de calor - representação da região da fonte de calor no centro da placa.



Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos. As Tabelas 19, 20 e 21 apresentam os resultados obtidos e o erro relativo em relação ao resultado obtido com FEM. As simulações com o método FEM foram realizadas com  $400 \times 400$  elementos e os resultados obtidos que serviram como referência são:  $T = 0,29135 \text{ } ^\circ\text{C}$  no centro da placa, coordenada  $(2,2)$ ,  $q_x = -0,1042 \text{ W/m}^2$  na borda da placa na coordenada  $(0,2)$ . Para cada uma das configurações utilizadas, foi gerado uma representação PGD da fonte de calor  $b$  utilizando como base o que foi apresentado na Seção 4.2.6, com o fator  $fat = 1,5$  para a suavização, pois este fator apresentou os melhores resultados.

Comparando as três tabelas apresentadas, nota-se que os melhores valores para a temperatura foram obtidos utilizando 10 modos, como mostrado na Tabela 21, os melhores valores para o fluxo de calor foram obtidos utilizando 2 modos, como mostrado na Tabela 19, e os valores obtidos utilizando 5 modos se mostram adequados

Tabela 19 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] ( $\times 10^{-1}$ )	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
10	40	0,271862	-1,07360	66,8880	3,03260
20	80	0,288875	-1,02147	8,4949	1,97020
40	160	0,282739	-1,04216	29,5555	0,01535
50	200	0,282462	-1,03856	30,5063	0,33013
60	240	0,28332	-1,03969	27,5614	0,22169
100	400	0,28315	-1,03838	28,1311	0,34741
200	800	0,283103	-1,03806	28,3062	0,37812
500	2000	0,283119	-1,03790	28,2512	0,39347

Tabela 20 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] ( $\times 10^{-1}$ )	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
10	100	0,27729	-1,0884	48,23230	4,4530
20	200	0,29394	-1,0254	8,88622	1,5931
40	400	0,28921	-1,0295	7,33132	1,1996
50	500	0,28898	-1,0259	8,14141	1,5461
60	600	0,28989	-1,0268	5,02488	1,4568
100	1000	0,28973	-1,0257	5,57062	1,5643
200	2000	0,28968	-1,0255	5,74223	1,5825
500	5000	0,28970	-1,0254	5,67016	1,5960

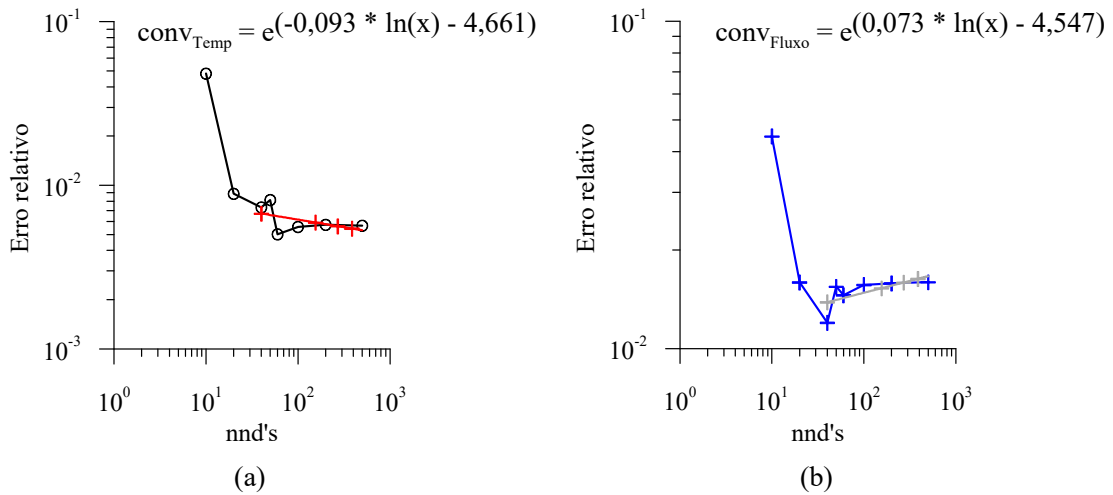
Tabela 21 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] ( $\times 10^{-1}$ )	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-3}$ )	Erro $E_{q_x}$ ( $\times 10^{-2}$ )
10	200	0,278270	-1,08877	44,87450	4,4884
20	400	0,295387	-1,03272	13,85620	0,8906
40	800	0,291078	-1,02777	0,9358	1,3656
50	1000	0,290934	-1,02472	1,42784	1,6583
60	1200	0,291885	-1,02569	1,83628	1,5653
100	2000	0,290296	-1,02601	3,61764	4,5345
200	4000	0,291081	-1,02780	0,92328	1,3628
500	10000	0,291217	-1,03866	0,45649	0,3205

tanto para temperatura quanto para fluxo de calor, apresentando valores intermediários de erro relativo. Por essa razão adota-se a representação utilizando 5 modos para as

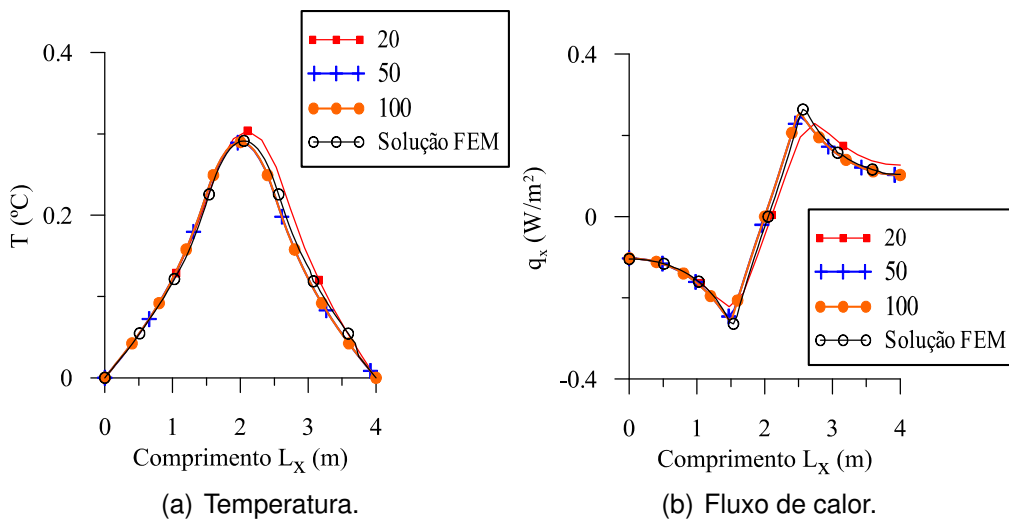
discussões a seguir. A Figura 56 apresenta a convergência do método utilizando 5 modos.

Figura 56 – Curva de convergência utilizando 5 modos. (a) Temperatura na coordenada (2,2). (b) Fluxo de calor na direção  $x$ , coordenada (0,2). A taxa de convergência é de: (a)  $-0,0927$ . (b)  $0,0727$ .



Foram determinados o valor nodal da temperatura e do fluxo de calor nas linhas centrais da placa e a Figura 57 apresenta o comportamento destas variáveis na direção de  $x$ ,  $x \in (0; 4)$  metros, ao longo da linha  $y = L_y/2$ .

Figura 57 – Variação da temperatura e do fluxo de calor na direção de  $x$  ao longo da linha  $y = L_y/2$ , variando a quantidade de nós.



Percebe-se na Tabela 20 que a representação utilizando 20 nnd's já apresenta valores de erros satisfatórios, porém observa-se na Figura 57 que a representação em  $y = L_y/2$  utilizando esta configuração, não representou de maneira adequada, havendo pequenos desvios na representação, tanto na temperatura, quanto no fluxo de calor.

Já as outras duas configurações, com 50 e 100 nnd's, apresentam menores valores de erro e também se mostrou mais adequado quanto à representação da Figura 57.

As Figuras 58, 59 e 60 apresentam os resultados da temperatura e do fluxo de calor em duas dimensões obtidos utilizando FEM e utilizando a aproximação PGD com 50 nnd's e 5 modos, respectivamente. As Figuras 61, 62 e 63 apresentam visualizações da temperatura e do fluxo de calor da aproximação PGD em uma vista em perspectiva, juntamente com o erro absoluto entre ambas as simulações.

Figura 58 – Resultados obtidos de temperatura - caso 10.

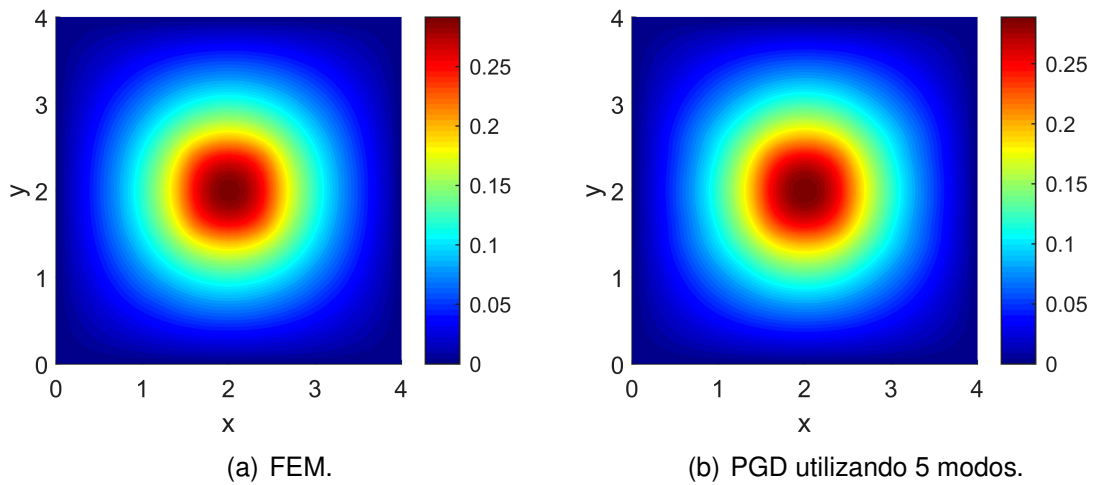


Figura 59 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 10.

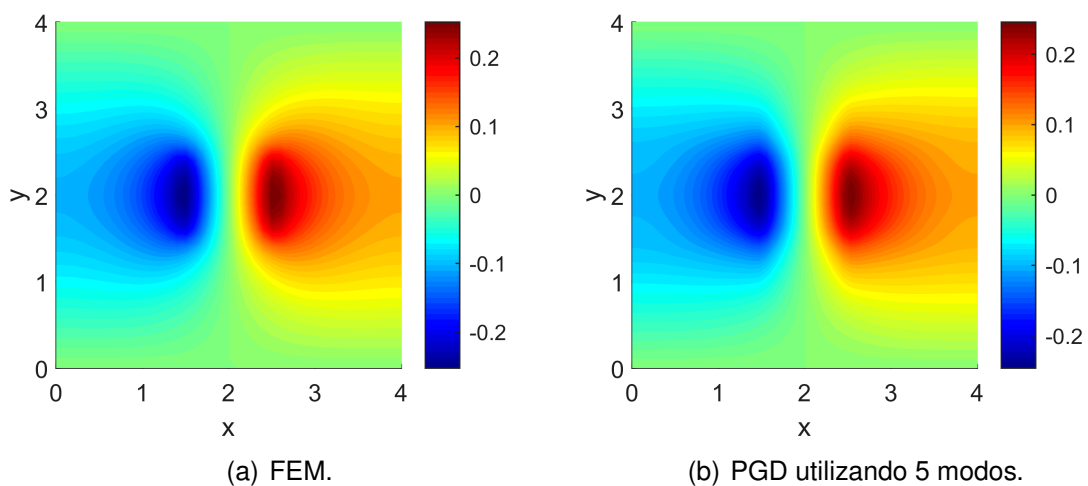




Figura 60 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 10.

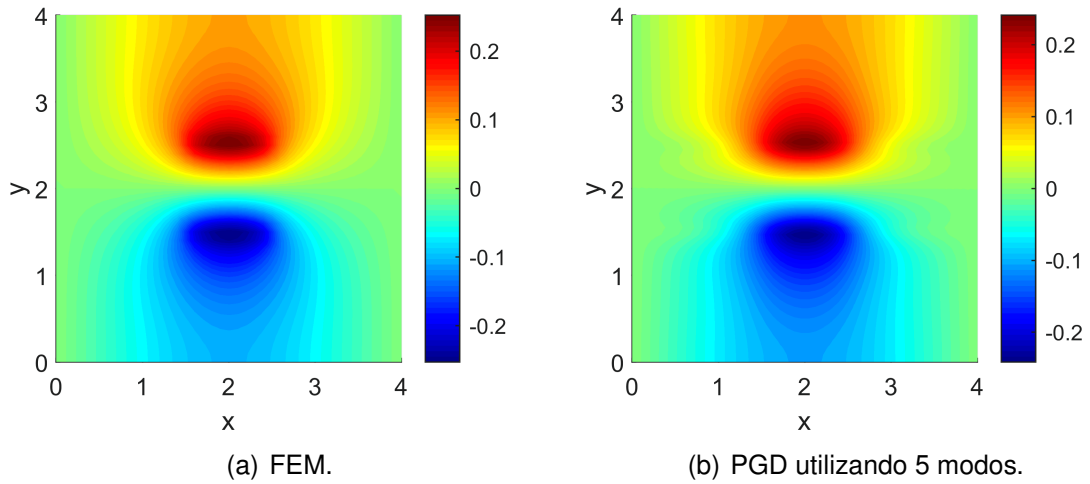


Figura 61 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 1,8000E - 2$ .

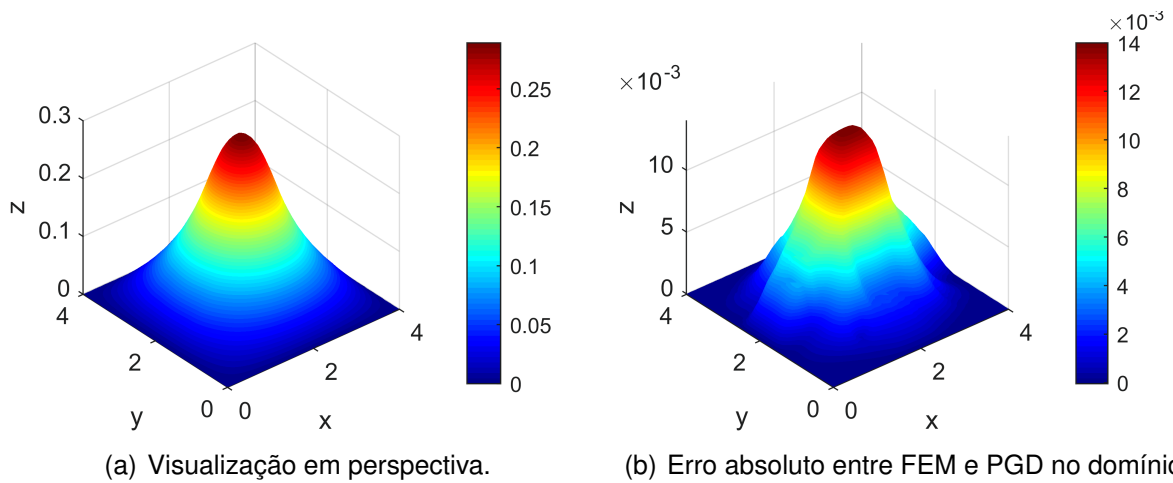


Figura 62 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 1,9254E - 2$ .

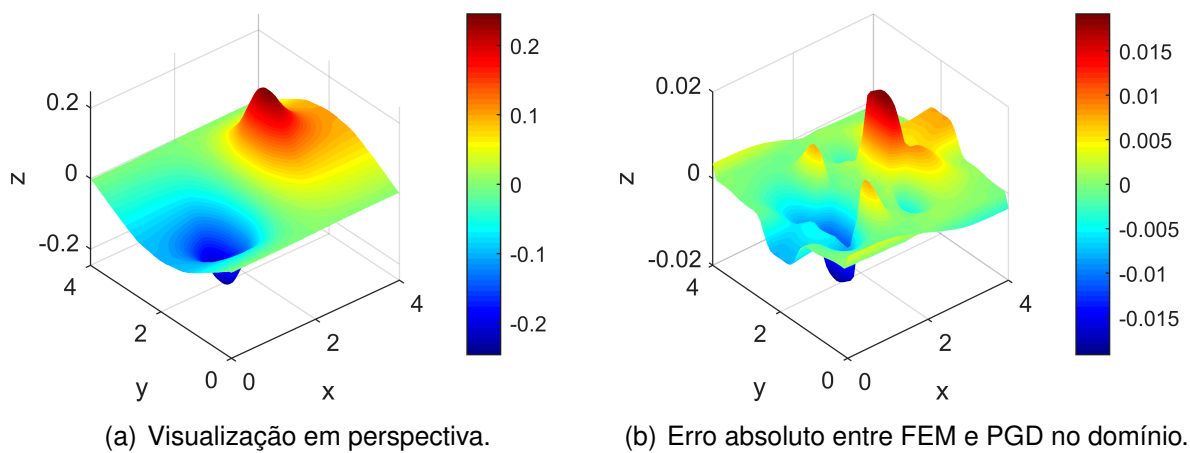
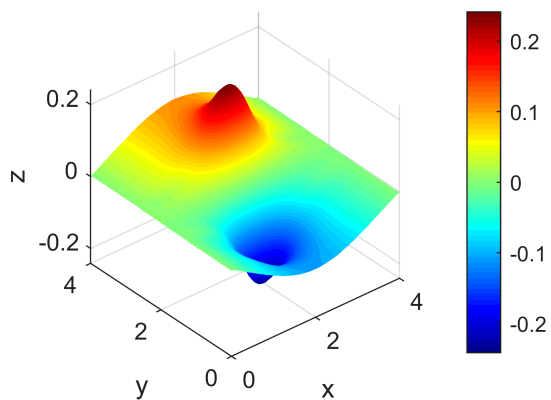
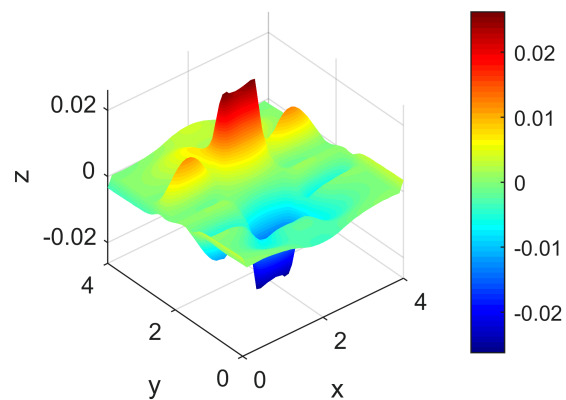


Figura 63 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 5 modos - caso 10. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 2,3831E - 2$ .



(a) Visualização em perspectiva.

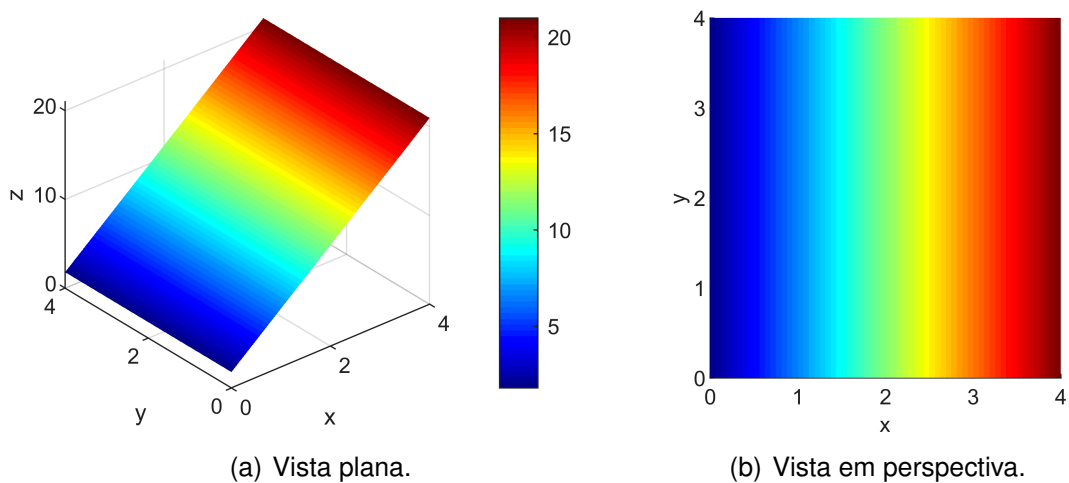


(b) Erro absoluto entre FEM e PGD no domínio.

### 4.3.3 Caso 11 - FGM - *Functionally Graded Material* Linear (polinômio de primeira ordem).

Propõe-se utilizar a representação PGD da condutividade térmica apresentados na Seção 4.2.3. O domínio tem dimensões 4x4 metros, com condutividade térmica variando linearmente na direção de  $x$ , segundo a Equação (113), e fonte de calor constante  $b = 1,0 \text{ W/m}^3$  em todo domínio. A Figura 64 mostra a configuração da condutividade térmica.

Figura 64 – Configuração do Caso 3 - FGM.



As Tabelas 22, 23 e 24 apresentam os resultados obtidos e os erros relativos em relação ao FEM, variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos. As simulações com o método FEM foram realizadas com  $400 \times 400$  elementos e os resultados obtidos que serviram como referência são:  $T = 0,11608 \text{ }^\circ\text{C}$  no centro da placa, coordenada (2,2),  $q_x = -0,86314 \text{ W/m}^2$  na borda esquerda da placa, coordenada (0,2), e  $q_x = 1,6613 \text{ W/m}^2$  na borda direita da placa, coordenada (4,2). Para cada uma das configurações utilizadas foi gerado uma representação PGD da condutividade térmica utilizando como base o que foi apresentado na Seção 4.2.3.

Tabela 22 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 2 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	8	-	-	-
5	20	0,115238	-0,513263	1,131970
10	40	0,121308	-0,701786	1,435180
20	80	0,118098	-0,814074	1,587460
50	200	0,115846	-0,885301	1,669940
100	400	0,117129	-0,862956	1,667290
500	2000	0,114405	-0,929817	1,716510
1000	4000	0,114323	-0,932328	1,719040
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	8	-	-	-
5	20	7,25362E-03	4,05354E-01	3,18624E-01
10	40	4,50379E-02	1,86938E-01	1,36110E-01
20	80	1,73846E-02	5,68459E-02	4,44471E-02
50	200	2,01585E-03	2,56749E-02	5,20075E-03
100	400	9,03687E-03	2,13175E-04	3,60561E-03
500	2000	1,44297E-02	7,72493E-02	3,32330E-02
1000	4000	1,51361E-02	8,01585E-02	3,47559E-02

Tabela 23 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 5 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	20	-	-	-
5	50	0,116507	-0,511095	1,133280
10	100	0,122876	-0,683427	1,432140
20	200	0,120039	-0,780891	1,571950
50	500	0,117902	-0,841941	1,644660
100	1000	0,117129	-0,862956	1,667290
500	5000	0,116492	-0,880020	1,684860
1000	10000	0,116411	-0,882169	1,687020
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	20	-	-	-
5	50	3,67850E-03	4,07865E-01	3,17835E-01
10	100	5,85458E-02	2,08208E-01	1,37940E-01
20	200	3,41058E-02	9,52905E-02	5,37832E-02
50	500	1,56961E-02	2,45603E-02	1,00163E-02
100	1000	9,03687E-03	2,13175E-04	3,60561E-03
500	5000	3,54928E-03	1,95565E-02	1,41817E-02
1000	10000	2,85148E-03	2,20462E-02	1,54819E-02

Tabela 24 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e do erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção, utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	40	-	-	-
5	100	0,116495	-0,511086	1,133310
10	200	0,122429	-0,679813	1,422260
20	400	0,119731	-0,775706	1,556410
50	1000	0,117448	-0,839329	1,626450
100	2000	0,116299	-0,842712	1,643520
500	10000	0,115856	-0,872065	1,664010
1000	20000	0,115808	-0,875685	1,669530
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	40	-	-	-
5	100	5,46950E-02	4,07876E-01	3,17817E-01
10	200	5,46950E-02	2,12395E-01	1,43887E-01
20	400	3,14524E-02	1,01298E-01	6,31373E-02
50	1000	1,17850E-02	2,75865E-02	2,09775E-02
100	2000	1,88663E-03	2,36671E-02	1,07025E-02
500	10000	1,92970E-03	1,03402E-02	1,63125E-03
1000	20000	2,34321E-03	1,45341E-02	4,95395E-03

Observa-se nas Tabelas 22, 23 e 24 que os resultados obtidos com o PGD são satisfatórios em relação ao FEM. A Figura 65 apresenta a curva de convergência da temperatura e do fluxo de calor utilizando 5 modos e 100 nnd's, e nas Figuras 66 e 67 é possível observar o comportamento da temperatura e fluxo de calor na direção  $x$ , respectivamente, nas linhas centrais da placa, utilizando o método PGD.

Figura 65 – Convergência da temperatura no centro da placa e do fluxo de calor na borda da placa, coordenada (0,2), utilizando 5 modos e 100 nnd's. A taxa de convergência é de: (a)  $-0,6332$ . (b)  $-0,1530$ .

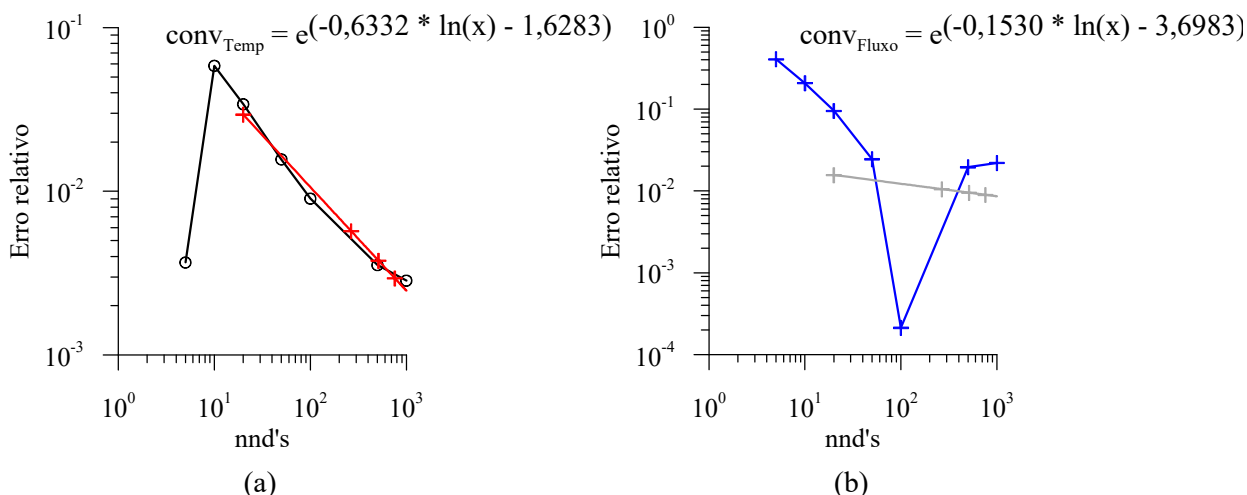
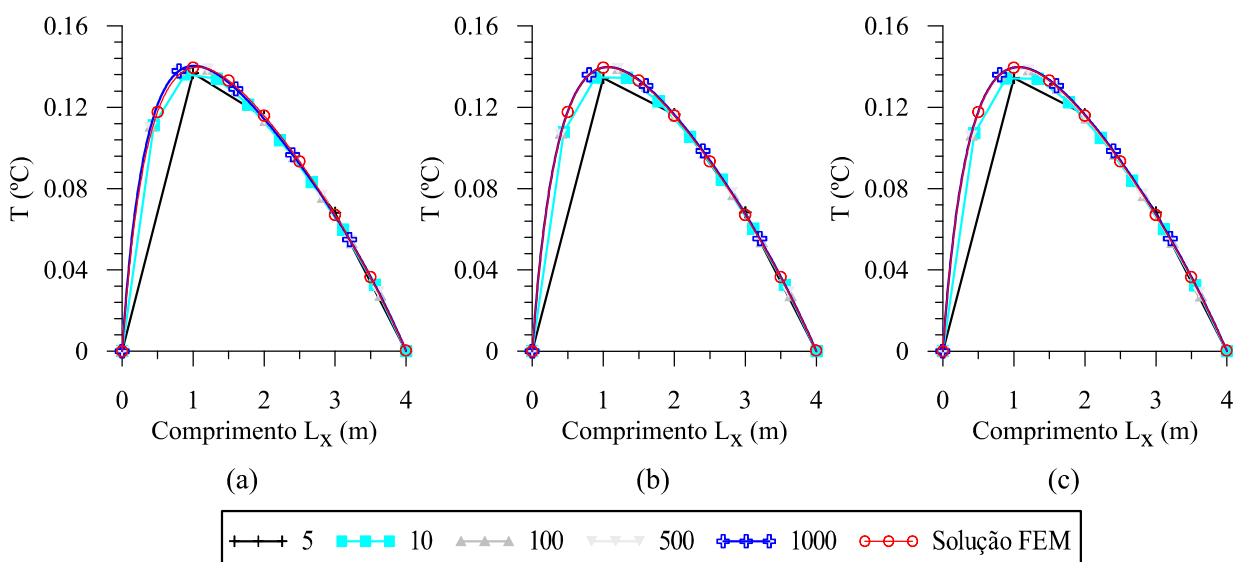
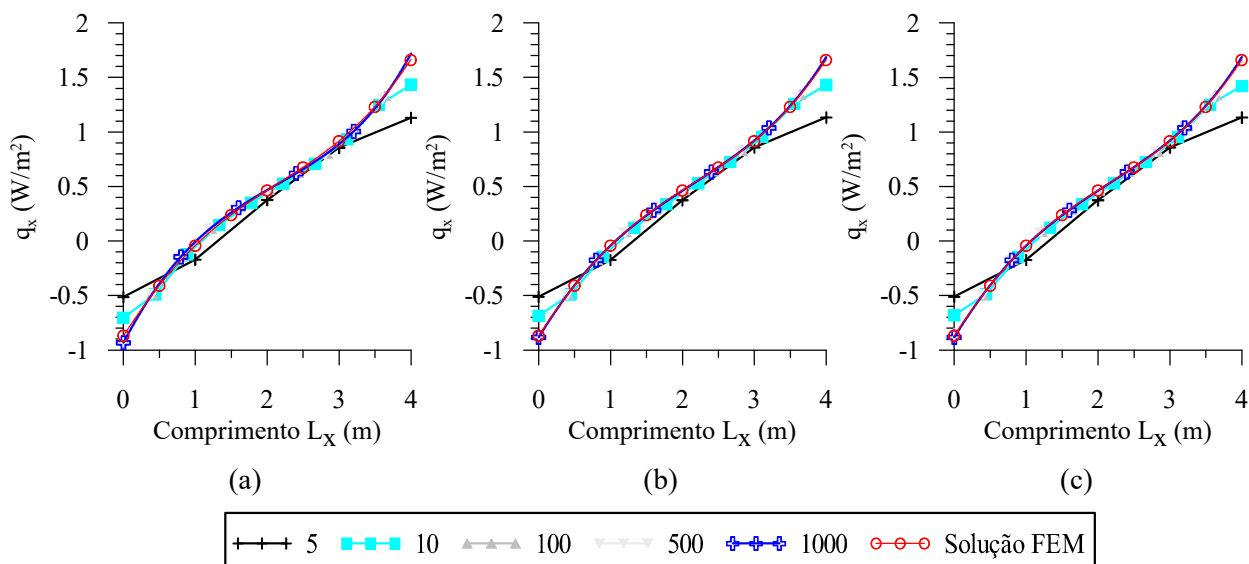


Figura 66 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.



A Tabela 25 apresenta o erro relativo entre a temperatura máxima obtida com FEM e com PGD utilizando 2, 5 e 10 modos. A temperatura máxima dos resultados de referência é  $T = 0,139676$  °C. Nota-se que há pouca diferença entre os valores de temperatura máxima obtidos com PGD variando a quantidade de modos, porém, quando trata-se de todo o domínio, o incremento de modos torna-se significativo, principalmente na região próximo ao contorno. As Figuras 68, 69 e 70 apresentam os gráficos dos resultados obtidos com ambos os métodos, FEM e PGD, sendo o PGD

Figura 67 – Resultado do fluxo de calor na direção de  $x$  utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.

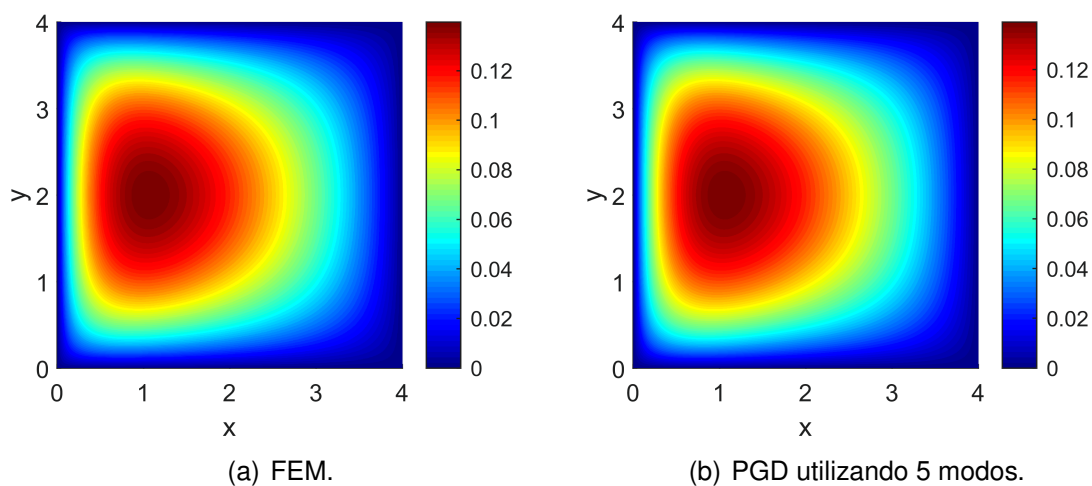
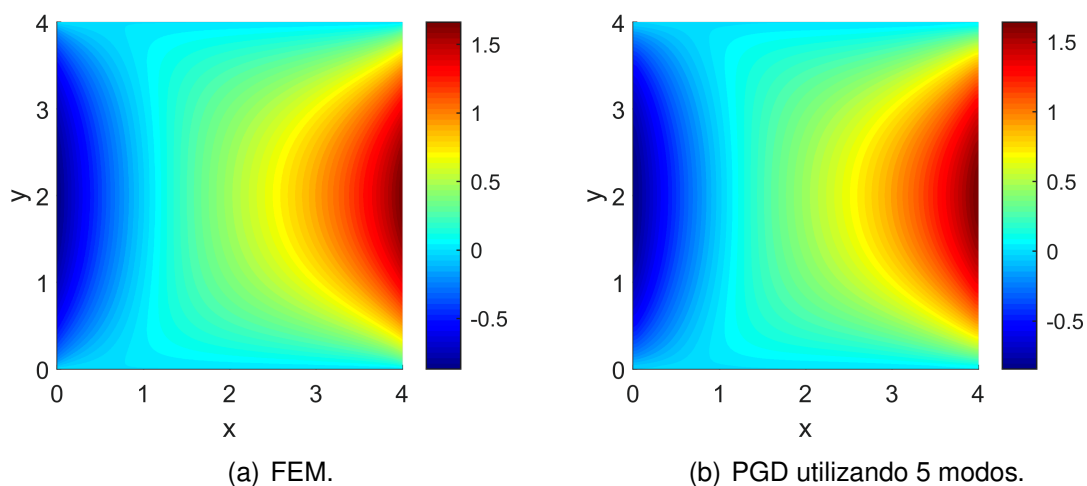


com 5 modos e 100 nnd's.

Tabela 25 – Temperatura máxima e o erro relativo  $E_T$  utilizando 2, 5 e 10 modos.

nnd	T [°C] - 2 M	T [°C] - 5 M	T [°C] - 10 M	Erro $E_T$ - 2 M	Erro $E_T$ - 5 M	Erro $E_T$ - 10 M
2	-	-	-	-	-	-
5	0,136731	0,134430	0,134420	2,10845E-02	3,75583E-02	3,76299E-02
10	0,136190	0,134652	0,134179	2,49578E-02	3,59690E-02	3,93554E-02
20	0,139504	0,138925	0,138764	1,23142E-03	5,37673E-03	6,52940E-03
50	0,140149	0,139243	0,139080	3,38641E-03	3,10003E-03	4,26702E-03
100	0,140296	0,139695	0,139187	4,43884E-03	1,36029E-04	3,50096E-03
500	0,139216	0,138662	0,138018	3,29334E-03	7,25966E-03	1,18703E-02
1000	0,140327	0,139740	0,139084	4,66079E-03	4,58203E-04	4,23838E-03

Figura 68 – Resultados obtidos de temperatura - caso 11.

Figura 69 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 11.

Este caso apresenta uma função polinomial simplificada da distribuição da propriedade de material, fazendo com que exija menos do método, logo os resultados obtidos foram satisfatórios em relação ao FEM e as Figuras 71, 72 e 73 apresentam visualização em perspectiva dos resultados obtidos com o PGD utilizando 5 modos e 100 nnd's, em conjunto com o erro absoluto entre os métodos.



Figura 70 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 11.

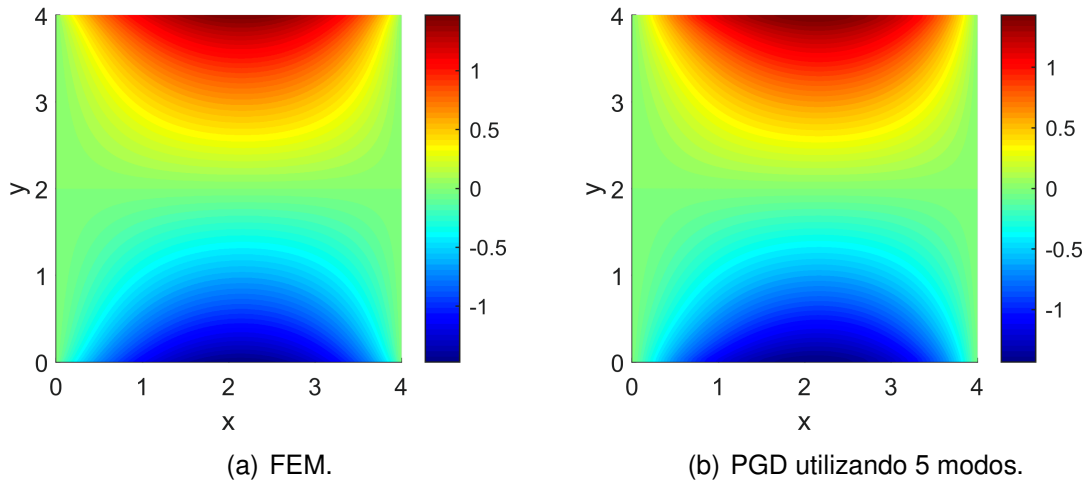


Figura 71 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 0,000999$ .

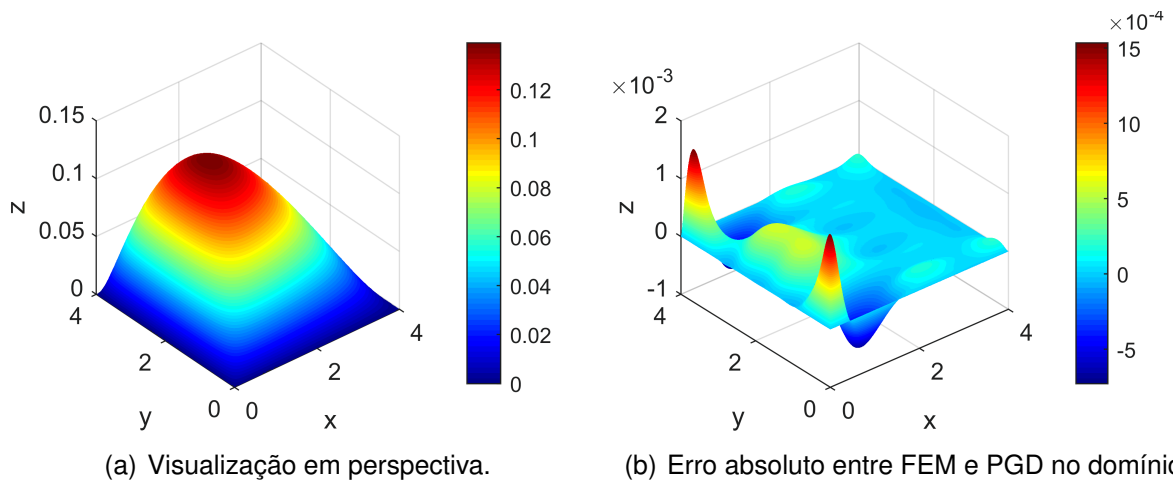


Figura 72 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 0,0186$ .

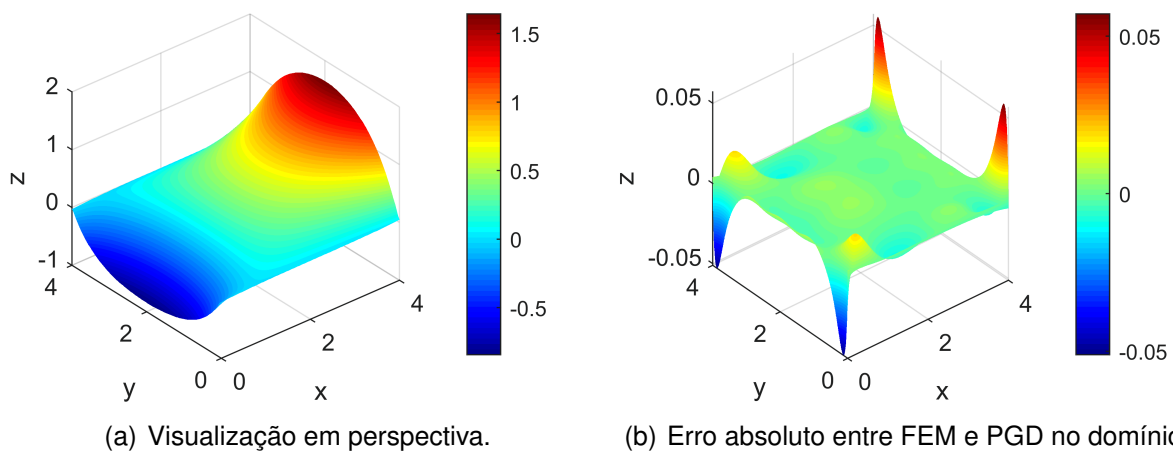
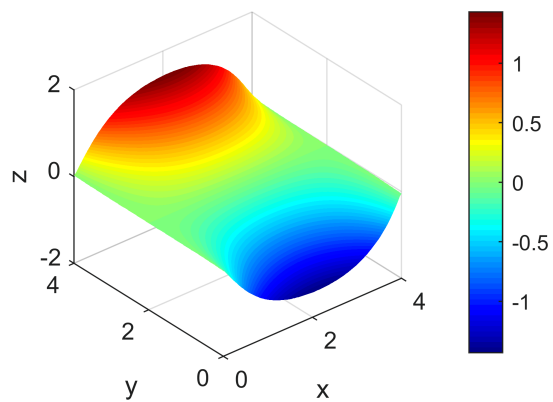
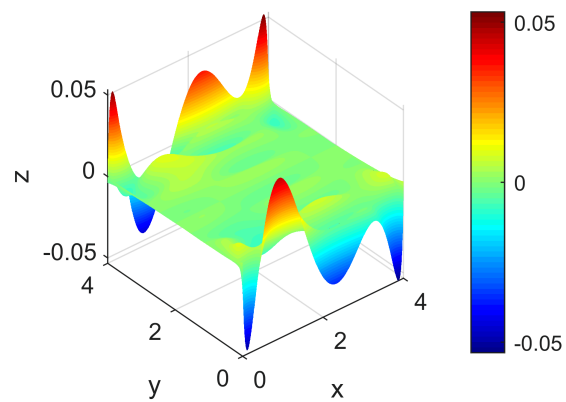


Figura 73 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 5 modos - caso 11. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 0,0219$ .



(a) Visualização em perspectiva.

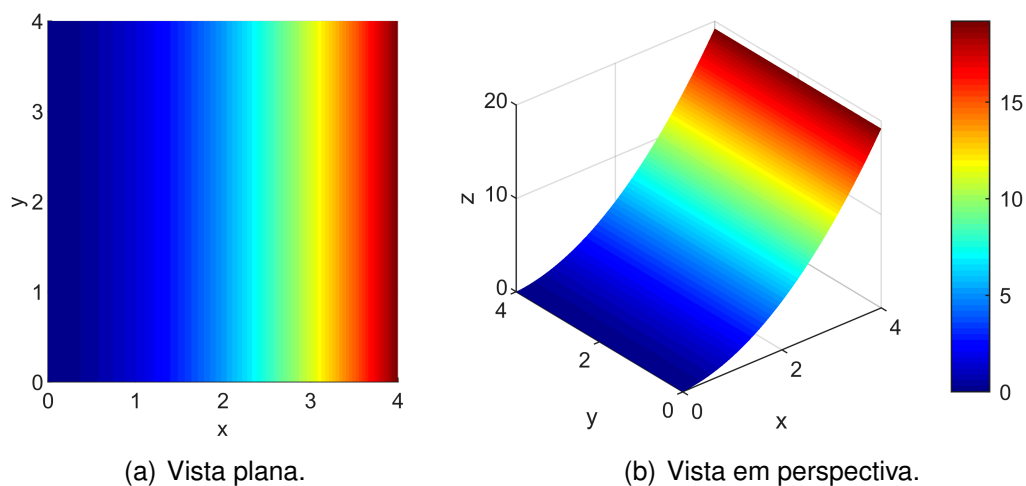


(b) Erro absoluto entre FEM e PGD no domínio.

#### 4.3.4 Caso 12 - FGM - *Functionally Graded Material* Polinomial (Polinômio de segunda ordem).

Para este caso foram utilizados os dados obtidos na Seção 4.2.4 para a representação PGD da condutividade térmica. Como o problema é adaptado ao que já foi gerado, o domínio tem dimensões  $4 \times 4$  metros, com condutividade térmica variando na direção de  $x$ , segundo a Equação 113, e fonte de calor constante  $b = 1 \text{ W/m}^3$  em todo domínio. A Figura 74 mostra a configuração da condutividade térmica.

Figura 74 – Configuração do Caso 3 - FGM.



Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e também a quantidade de modos. As Tabelas 26, 27 e 28 apresentam os resultados obtidos e o erro relativo em relação ao FEM. As simulações com o método FEM foram realizadas com  $400 \times 400$  elementos e os resultados obtidos que serviram como referência obtidos com FEM são:  $T = 0,16742 \text{ }^\circ\text{C}$  no centro da placa, coordenada (2,2),  $q_x = -0,914746 \text{ W/m}^2$  na borda esquerda da placa, coordenada (0,2), e  $q_x = 1,8091 \text{ W/m}^2$  na borda direita da placa, coordenada (4,2). Para cada uma das configurações utilizadas, foi gerado uma representação PGD da condutividade térmica utilizando como base o que foi apresentado na Seção 4.2.4.

Tabela 26 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	8	-	-	-
5	20	0.168733	-0.485678	1.275900
10	40	0.181755	-0.729256	1.569090
20	80	0.131140	-0.862117	1.717330
50	200	0.168013	-0.939444	1.798240
100	400	0.166337	-0.964784	1.824040
500	2000	0.165009	-0.984894	1.844300
1000	4000	0.164843	-0.987401	1.846800
2000	8000	0.164760	-0.988655	1.848050
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	8	-	-	-
5	20	7.84255E-03	4.69057E-01	2.94732E-01
10	40	8.56230E-02	2.02778E-01	1.32668E-01
20	80	2.16701E-01	5.75340E-02	5.07269E-02
50	200	3.54199E-03	2.69998E-02	6.00298E-03
100	400	6.46876E-03	5.47015E-02	8.25825E-03
500	2000	1.44009E-02	7.66858E-02	1.94572E-02
1000	4000	1.53924E-02	7.66858E-02	2.08391E-02
2000	8000	1.53924E-02	8.07973E-02	2.15300E-02

Tabela 27 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	20	-	-	-
5	50	0.170829	-0.083094	1.280540
10	100	0.184284	-0.707727	1.583370
20	200	0.176229	-0.824144	1.723750
50	500	0.171318	-0.891041	1.796370
100	1000	0.169685	-0.912834	1.818870
500	5000	0.168382	-0.930347	1.836680
1000	10000	0.168219	-0.932505	1.838840
2000	20000	0.168138	-0.933582	1.839920
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	20	-	-	-
5	50	2.03620E-02	9.09162E-01	2.92167E-01
10	100	1.00729E-01	2.26313E-01	1.24775E-01
20	200	5.26162E-02	9.90461E-02	4.71782E-02
50	500	2.32828E-02	2.59143E-02	7.03665E-03
100	1000	1.35288E-02	2.09020E-03	5.40048E-03
500	5000	5.74603E-03	1.70550E-02	1.52451E-02
1000	10000	4.77243E-03	1.94141E-02	1.64391E-02
2000	20000	4.28862E-03	2.05915E-02	1.70361E-02

Tabela 28 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 2$  e  $y = 2$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 2$  e  $x = 4$  e  $y = 2$ , e dos erros relativos de temperatura ( $E_T$ ) e fluxo de calor na direção  $x$  ( $E_{q_x}$ ), variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,2)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (4,2)
2	40	-	-	-
5	100	0.170835	-0.483096	1.280530
10	200	0.183127	-0.698985	1.558100
20	400	0.175205	-0.812365	1.700630
50	1000	0.170264	-0.876988	1.770430
100	2000	0.168540	-0.900465	1.794850
500	10000	0.167217	-0.914826	1.808680
1000	20000	0.167182	-0.934233	1.828680
2000	40000	0.167010	-0.916642	1.811440
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$	Erro $E_{q_x}$ (2,2)	Erro $E_{q_z}$ (4,2)
2	40	-	-	-
5	100	2.03978E-02	4.71880E-01	2.92173E-01
10	200	9.38179E-02	2.35870E-01	1.38743E-01
20	400	4.64998E-02	1.11923E-01	5.99580E-02
50	1000	1.69872E-02	4.12770E-02	2.13753E-02
100	2000	6.68976E-03	1.56120E-02	7.87684E-03
500	10000	1.21252E-03	8.74560E-05	2.32160E-04
1000	20000	1.42157E-03	2.13032E-02	1.08231E-02
2000	40000	2.44893E-03	2.07271E-03	1.29346E-03

Observa-se nas Tabelas 26, 27 e 28 que os resultados obtidos utilizando 10 modos tornaram-se mais próximos do esperado, nos pontos em questão. A Figura 75 apresenta a curva de convergência da temperatura e do fluxo de calor utilizando 10 modos e 100 nnd's e nas Figuras 76 e 77 é possível observar o comportamento da temperatura e fluxo de calor na direção  $x$ , respectivamente, utilizando o método PGD, variando-se a quantidade de modos em  $y = L_y/2$ . É nítido nas figuras supracitadas, que o método PGD foi capaz de representar o caso adequadamente, quando comparado com FEM. Observa-se também que os resultados para temperatura com 10 nnd's já são satisfatórios, porém o fluxo de calor na direção de  $x$  há desvios nas bordas da placa.

Figura 75 – Convergência da temperatura no centro da placa e do fluxo de calor na borda da placa, coordenada (0,2), utilizando 5 modos e 100 nnd's. A taxa de convergência é de: (a)  $-0,5427$ . (b)  $-0,1562$ .

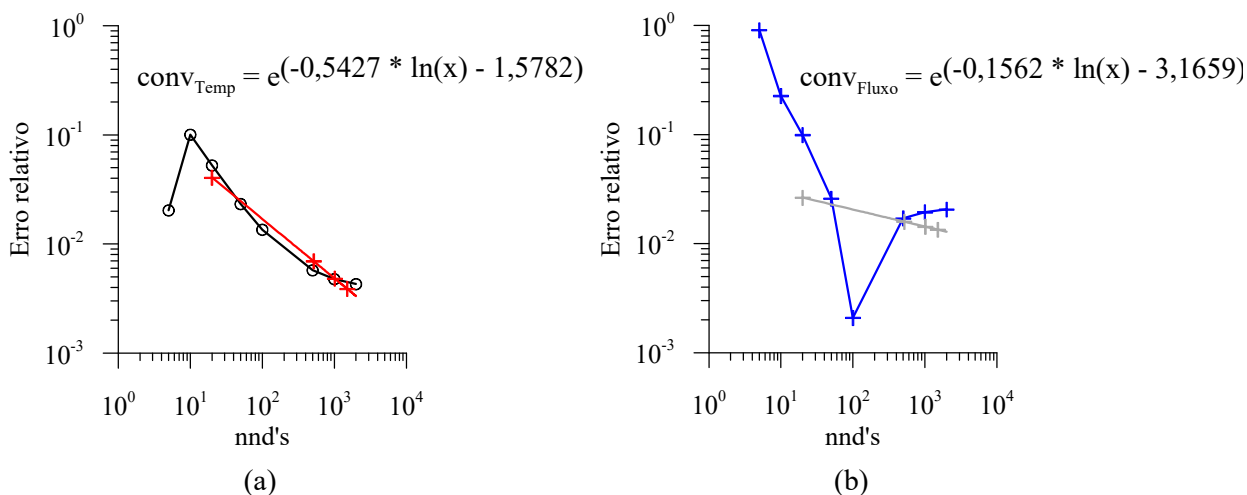
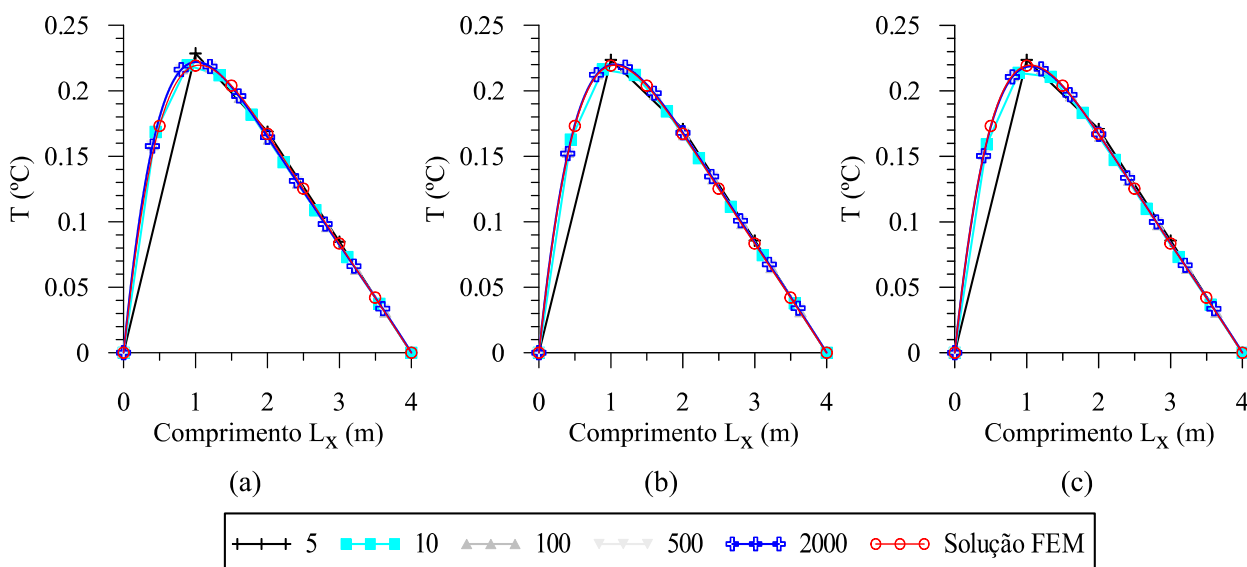


Figura 76 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.



A Tabela 29 apresenta o erro relativo entre a temperatura máxima obtida com FEM e com PGD utilizando 2, 5 e 10 modos, sendo que a temperatura máxima obtida com FEM é  $T = 0,219715$  °C. As Figuras 78, 79 e 80 apresentam os gráficos dos resultados obtidos com ambos os métodos, FEM e PGD, sendo o PGD com 5 modos e 100 nnd's.

Figura 77 – Resultado do fluxo de calor na direção de  $x$  utilizando o método PGD com 5, 10, 100, 500 e 1000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.

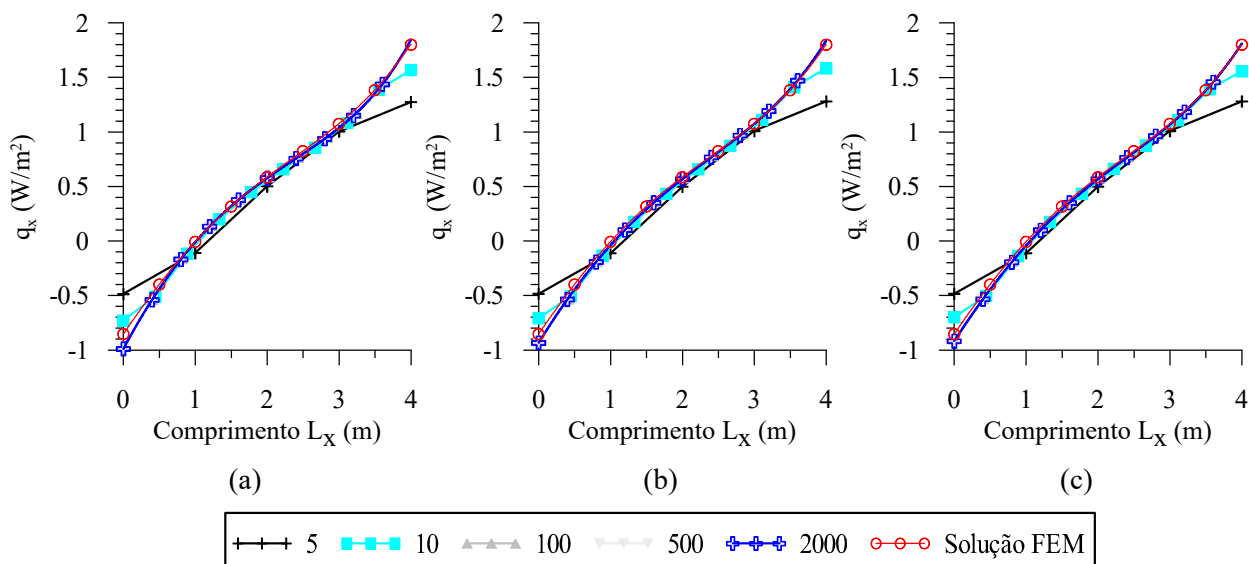


Tabela 29 – Temperatura máxima e o erro relativo ( $E_T$ ) entre solução FEM e PGD utilizando 2, 5 e 10 modos.

nnd	T [°C] - 2 M	T [°C] - 5 M	T [°C] - 10 M
2	-	-	-
5	0,228560	0,223684	0,223687
10	0,219554	0,216275	0,213731
20	0,221693	0,219971	0,218599
50	0,221897	0,220183	0,218135
100	0,218800	0,220183	0,218917
500	0,220383	0,218447	0,217065
1000	0,222047	0,220017	0,219557
2000	0,222047	0,220013	0,218532
nnd	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ ) - 2 M	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ ) - 5 M	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ ) - 10 M
2	-	-	-
5	4,02567	1,80643	1,80780
10	0,07327	1,56566	2,72353
20	0,90026	0,11652	0,50793
50	0,99311	0,06918	0,71911
100	0,41645	0,21300	0,36319
500	0,30403	0,57711	1,20611
1000	1,06137	0,13745	0,07191
2000	1,06137	0,13563	0,53842

É possível observar que em alguns casos, como em 2 modos com 10 nnd's, 5 modos com 50 nnd's e 10 modos com 1000 nnd's, apresentam valores muito próximos



de erro. Ao mesmo tempo, esses são os valores mais baixos de erro relativo encontrados na tabela. Com isso percebe-se que o PGD é muito sensível a quantidade de nós em cada direção e modos.

Figura 78 – Resultados obtidos de temperatura - caso 12.

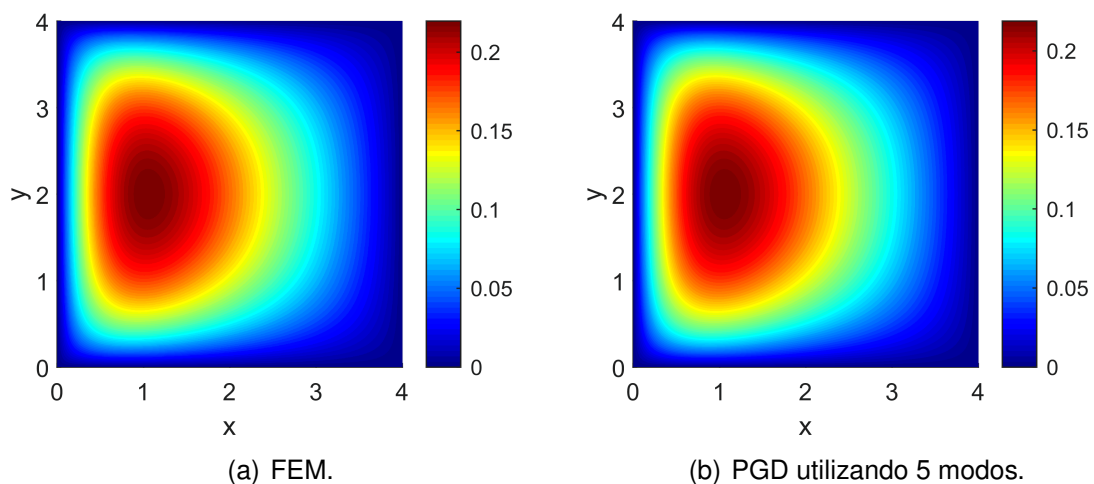


Figura 79 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 12.

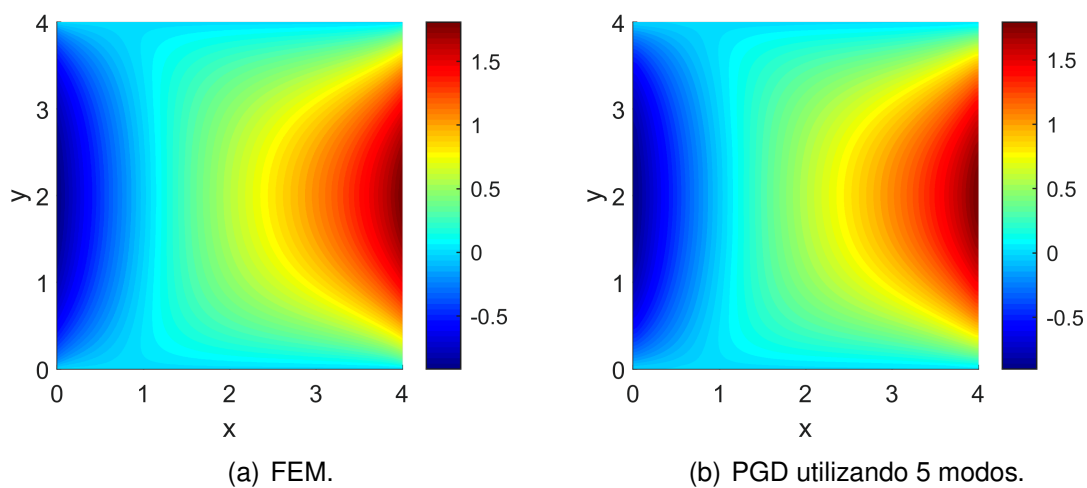
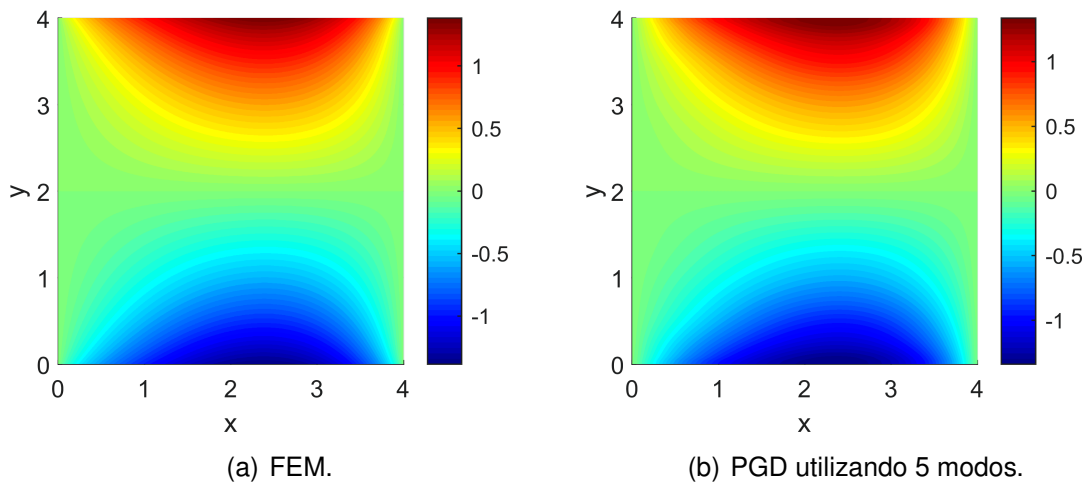


Figura 80 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 12.



Por se tratar de um caso sem descontinuidades, ou seja, uma função contínua da propriedade do material, o método PGD não apresenta problemas para a representação do material, como já mostrado na Seção 4.2.4, o que acarreta em um resultado satisfatório em comparação com o FEM. As Figuras 81, 82 e 83 apresenta visualização em perspectiva dos resultados obtidos, em conjunto com o erro entre FEM e PGD, com 5 modos e 100 nnd's.

Figura 81 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 0,001628$ .

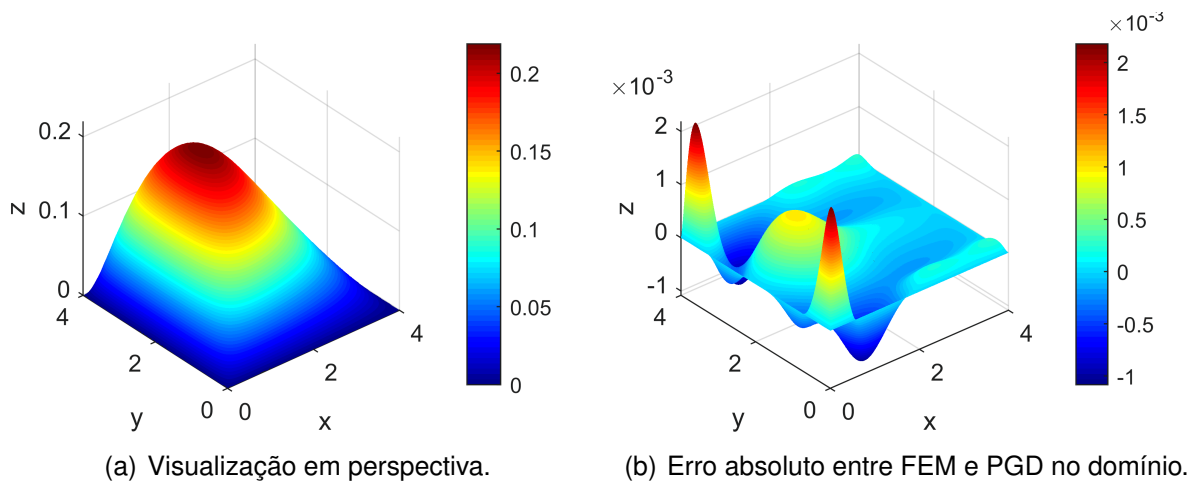


Figura 82 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 0,0186$ .

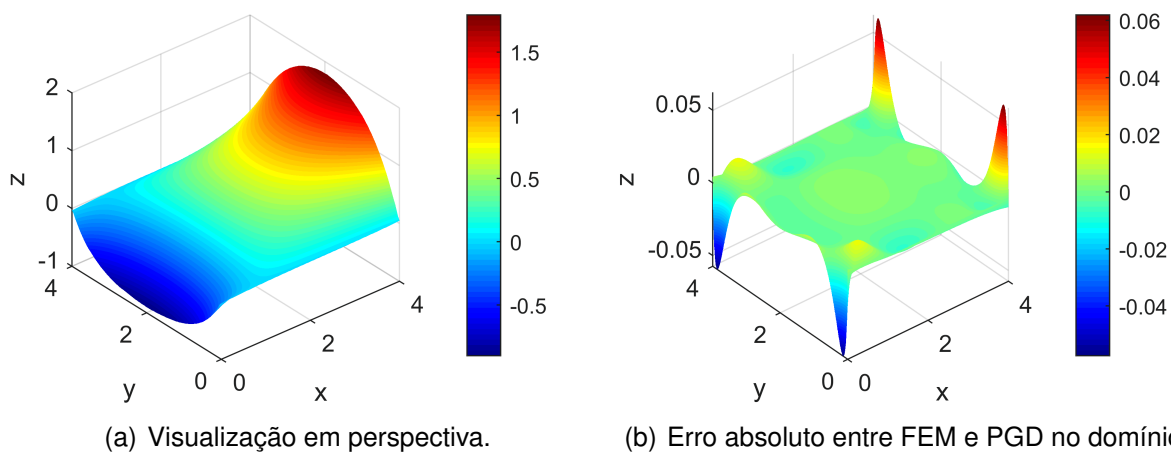
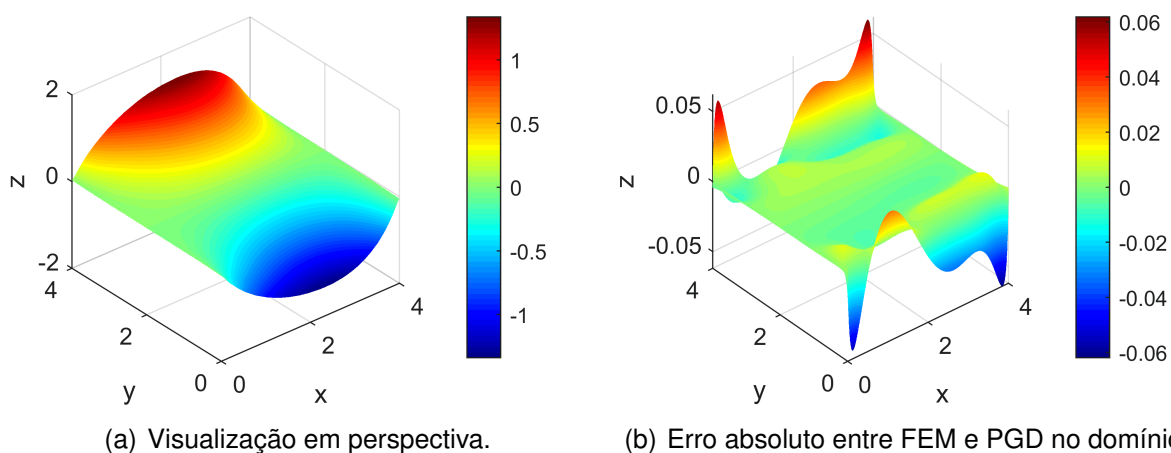


Figura 83 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 5 modos - caso 12. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 0,0252$ .



### 4.3.5 Caso 13 - Propriedades de material com variação discreta no domínio.

Propõe-se utilizar a representação da condutividade térmica apresentada na Seção 4.2.5, em um domínio de dimensões  $2 \times 2$  metros e fonte de calor  $b = 100,0$   $\text{W/m}^3$  constante em todo o domínio. A configuração da condutividade térmica aqui utilizada é a mesma apresentada na Figura 23.

Foram realizadas simulações variando a quantidade de nós em cada direção e a quantidade de modos. As Tabelas 30, 31 e 32 apresentam os resultados obtidos utilizando o método PGD e o erro relativo entre as simulações utilizando PGD e FEM. As simulações com o método FEM foram realizadas com  $200 \times 200$  elementos e os resultados obtidos que serviram como referência obtidos com FEM são:  $T = 6,9483$   $^{\circ}\text{C}$  no centro da placa, coordenada  $(1,1)$ ,  $q_x = -50,8410$   $\text{W/m}^2$  na coordenada  $(0,1)$  e  $q_x = 110,4000$   $\text{W/m}^2$  na coordenada  $(2,1)$ .

Tabela 30 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 1$  e  $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 1$  e  $x = 2$  e  $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos.

nnd	ndof-PGD	T [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (0,1)	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (2,1)
3	12	-	-	-
5	20	6,83634	-14,3921	64,1500
10	40	6,76707	-42,2725	83,9942
20	80	7,15828	-50,1675	92,2688
50	200	7,06955	-54,3264	98,1641
100	400	7,09365	-55,5670	100,5730
500	2000	7,05912	-56,4666	102,7990
1000	4000	7,05398	-56,5712	103,0980
2000	8000	7,05142	-56,6232	103,2500
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,1)	Erro $E_{q_x}$ (2,1)
3	12	-	-	-
5	20	1,61133	7,16919E-01	4,18931E-01
10	40	2,60826	1,68535E-01	2,39183E-01
20	80	3,02203	1,32472E-02	1,64232E-01
50	200	17,4503	6,85549E-02	1,10832E-01
100	400	2,09188	9,29565E-02	8,90127E-02
500	2000	1,59492	1,10651E-01	6,88496E-02
1000	4000	1,52095	1,12708E-01	6,61413E-02
2000	8000	1,48410	1,13731E-01	6,47645E-02

Tabela 31 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 1$  e  $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 1$  e  $x = 2$  e  $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 5 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,1)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (2,1)
3	30	-	-	-
5	50	6,63448	-14,38700	66,51000
10	100	6,92113	-42,87540	87,33070
20	200	7,25917	-50,34800	98,06710
50	500	7,11412	-54,17330	104,82000
100	1000	7,12480	-55,32420	107,18600
500	5000	7,07838	-56,18810	109,13500
1000	10000	7,06642	-56,29190	109,37700
2000	20000	7,06880	-56,34380	109,49700
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,1)	Erro $E_{q_x}$ (2,1)
3	30	-	-	-
5	50	4,51650	7,17020E-01	3,97554E-01
10	100	0,39103	1,56677E-01	2,08961E-01
20	200	4,47404	9,69690E-03	1,11711E-01
50	500	2,38648	6,55436E-02	5,05435E-02
100	1000	2,54019	8,81808E-02	2,91123E-02
500	5000	1,87211	1,05173E-01	1,14583E-02
1000	10000	1,69998	1,07215E-01	9,26630E-03
2000	20000	1,73424	1,08235E-01	8,17935E-03

Tabela 32 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 1$  e  $y = 1$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 1$  e  $x = 2$  e  $y = 1$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,1)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (2,1)
3	60	-	-	-
5	100	6,56370	-14,3665	65,3728
10	200	6,86758	-42,5034	86,8767
20	400	7,24820	-50,3253	97,8946
50	1000	7,10022	-53,6930	102,9940
100	2000	7,14413	-55,1920	105,7940
500	10000	7,09662	-56,2958	107,7390
1000	20000	7,08448	-56,5025	108,0240
2000	40000	7,07384	-56,6612	108,0150
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,1)	Erro $E_{q_x}$ (2,1)
3	60	-	-	-
5	100	5,53517	7,17423E-01	4,07855E-01
10	200	1,16172	1,63994E-01	2,13073E-01
20	400	4,31616	1,01434E-02	1,13274E-01
50	1000	2,18643	5,60965E-02	6,70833E-02
100	2000	2,81839	8,55805E-02	4,17210E-02
500	10000	2,13462	1,07291E-01	2,41033E-02
1000	20000	1,95990	1,11357E-01	2,15217E-02
2000	40000	1,80677	1,14478E-01	2,16033E-02

Nota-se nas Tabelas 30, 31 e 32, que ao aumentar a quantidade de modos, o erro relativo não apresenta uma diferença significativa entre os valores nos pontos analisados, seja para temperatura ou fluxo de calor. A Figura 84 apresenta a curva de convergência da temperatura e fluxo de calor com as simulações utilizando 10 modos. Com o interesse de verificar o comportamento do método PGD, é apresentado nas Figuras 85 e 86 a temperatura e o fluxo de calor na direção de  $x$ , respectivamente, variando a quantidade de modos em  $y = L_y/2$ .

Figura 84 – Curva de convergência do método PGD utilizando 10 modos. (a) Temperatura na coordenada (1,1). (b) Fluxo de calor na direção  $x$ , coordenada (0,1). A taxa de convergência é de: (a)  $-0,1478$ . (b)  $0,4224$ .

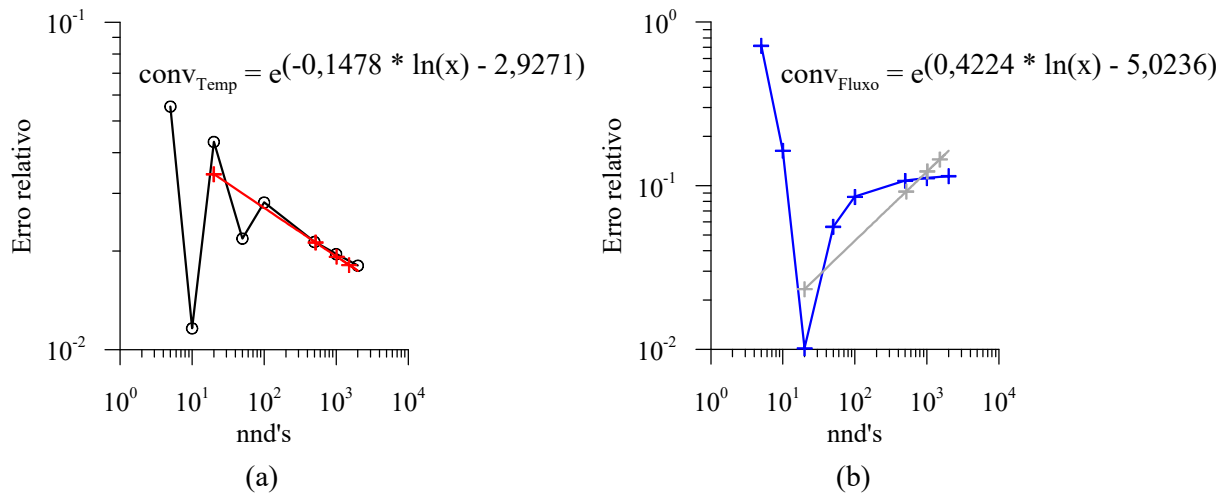


Figura 85 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD com 5, 100, 500 e 2000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.

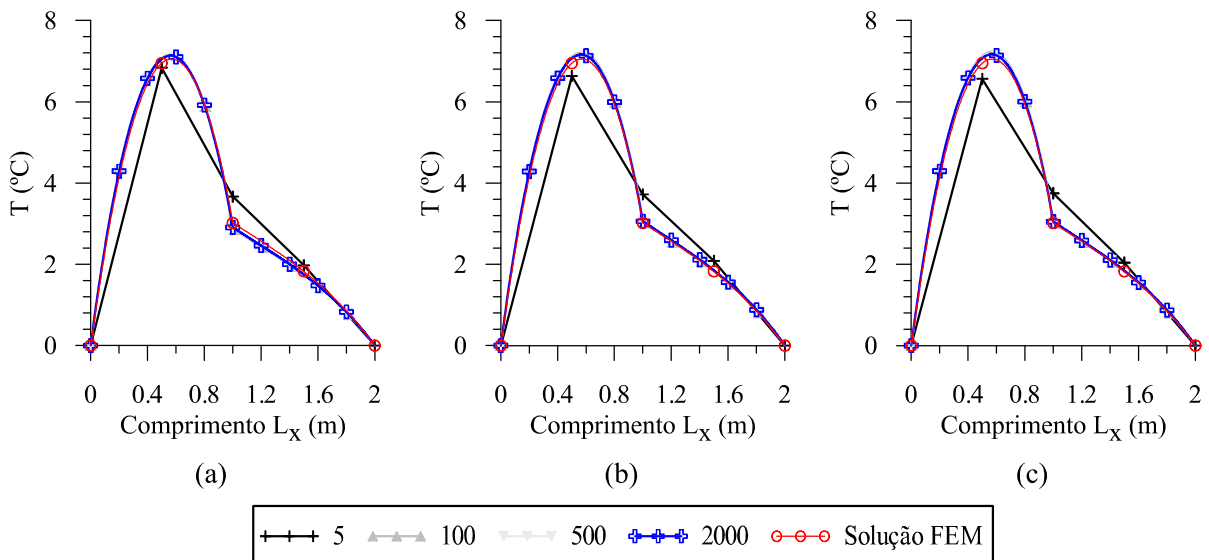
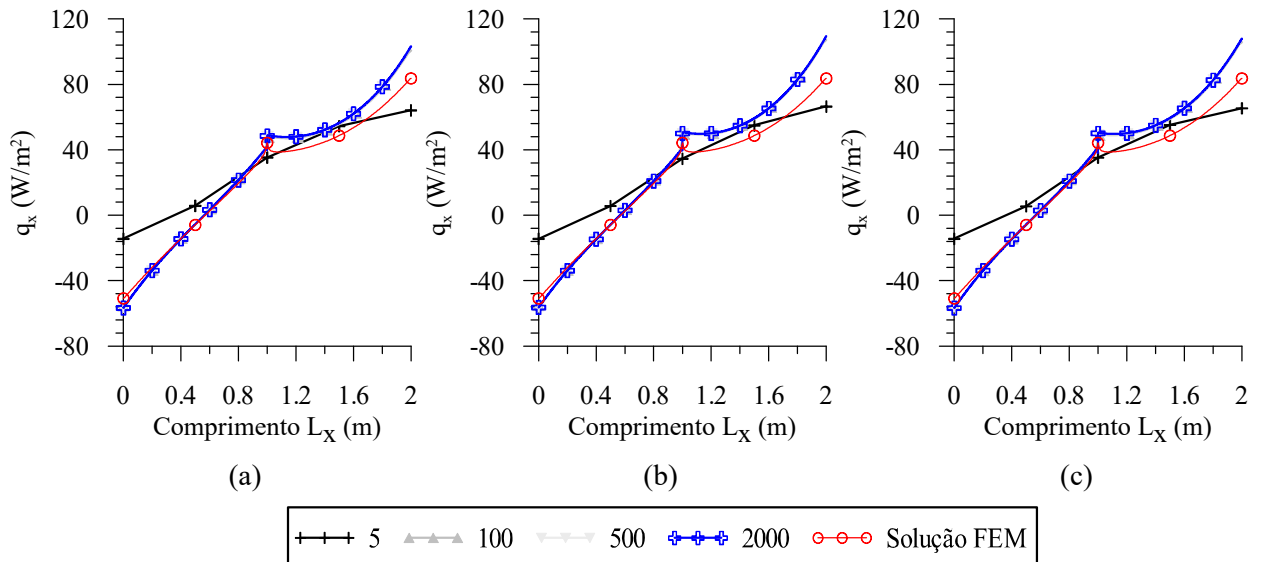


Figura 86 – Resultado do fluxo de calor na direção de  $x$  utilizando o método PGD com 5, 100, 500 e 2000 nnd's, variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.

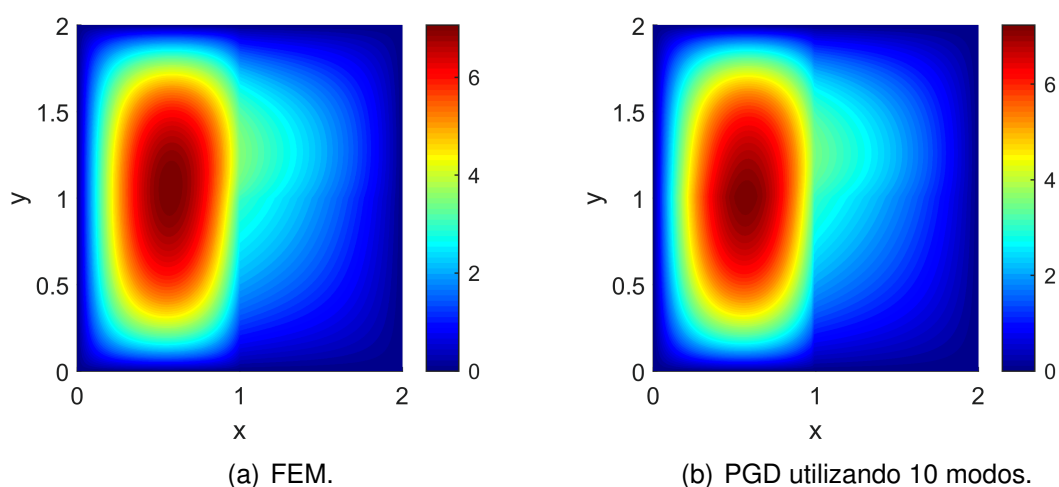
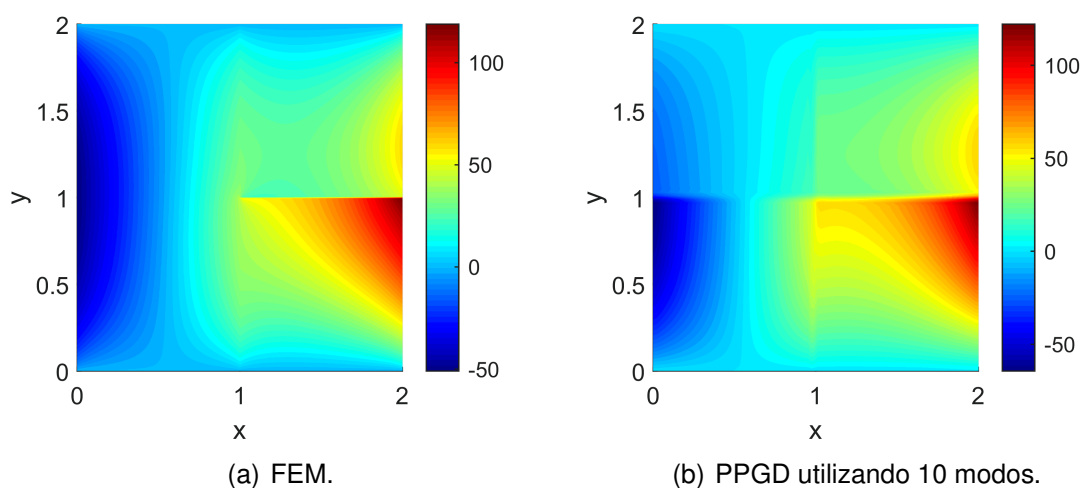


Observa-se que o comportamento do PGD é semelhante ao comportamento utilizando o FEM, porém há maior desvio do resultado PGD na borda esquerda da placa. Isto deve-se ao fato de existir uma descontinuidade de material, transversal ao fluxo na direção de  $x$ , exatamente nesta região, como pode ser visualizado na Figura 23. Esta descontinuidade provoca erro na representação PGD da condutividade térmica e pode ser visualizada na Figura 25 (b) e (c), gerando o desvio observado.

As Figuras 87, 88 e 89 apresentam os gráficos dos resultados obtidos com ambos os métodos. É possível observar que o PGD apresenta resultados satisfatórios tanto para temperatura, quanto para fluxo de calor com um número reduzido de operações. Neste caso foram utilizados 100 nnd's, que resultaria em 2000 operações para convergência dos modos, utilizando PGD ( $10 \times 2 \times 100 = 2000$ , 10 modos, 2 dimensões e 100 nnd's), enquanto utilizando FEM são necessárias 10000 operações ( $100^2 = 1E4$  ndof).



Figura 87 – Resultados obtidos de temperatura - caso 13.

Figura 88 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 13.

Observa-se que nas descontinuidades do material há maior dificuldade para o método PGD atingir os valores obtidos com FEM. Tal fato está associado à representação PGD da propriedade do material, isto é, da condutividade térmica apresentar maiores discrepâncias exatamente nestas regiões, como visto na Seção 4.2.5. Nas Figuras 90, 91 e 92 são apresentados os resultados em perspectiva, em conjunto com erro entre FEM e PGD.

Figura 89 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 13.

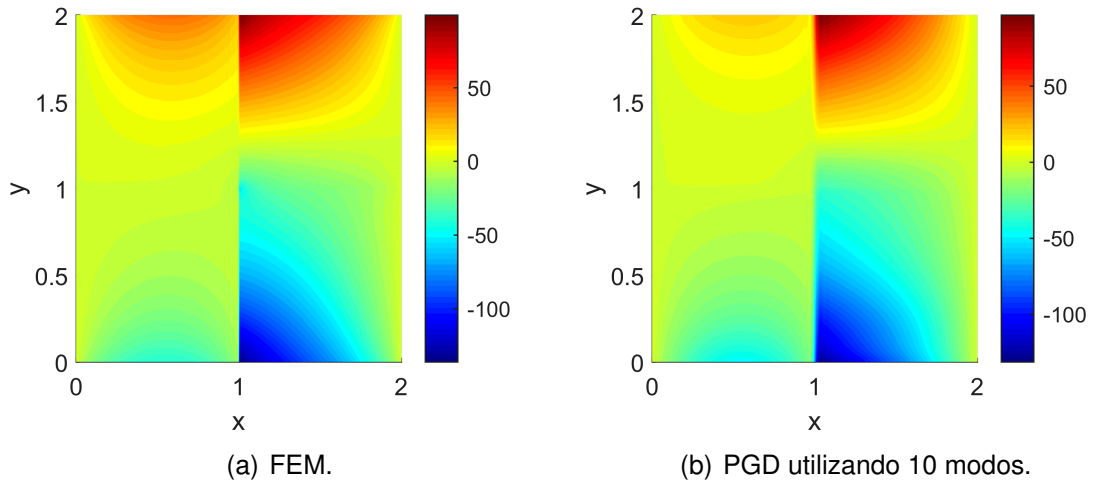


Figura 90 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 0,1005$ .

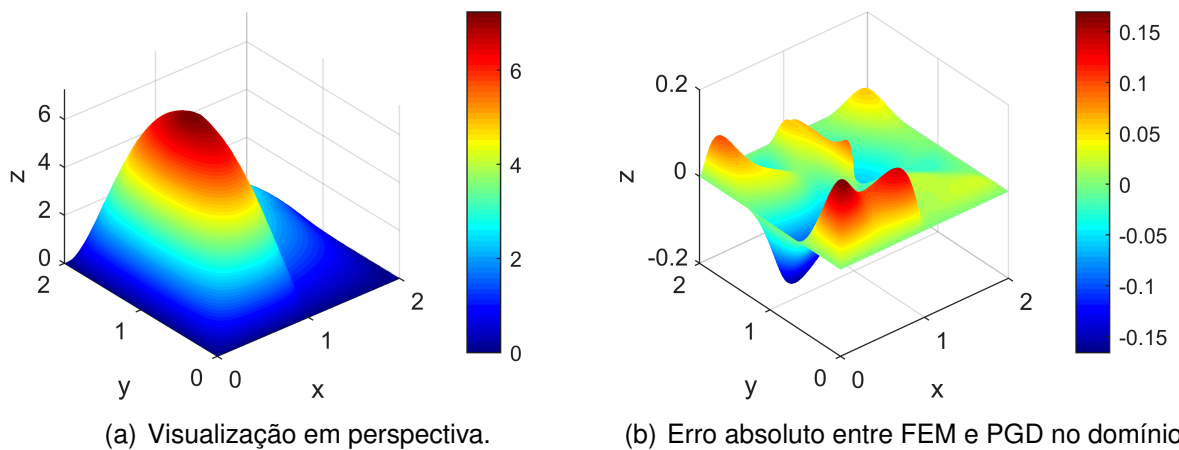


Figura 91 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 11,3984$ .

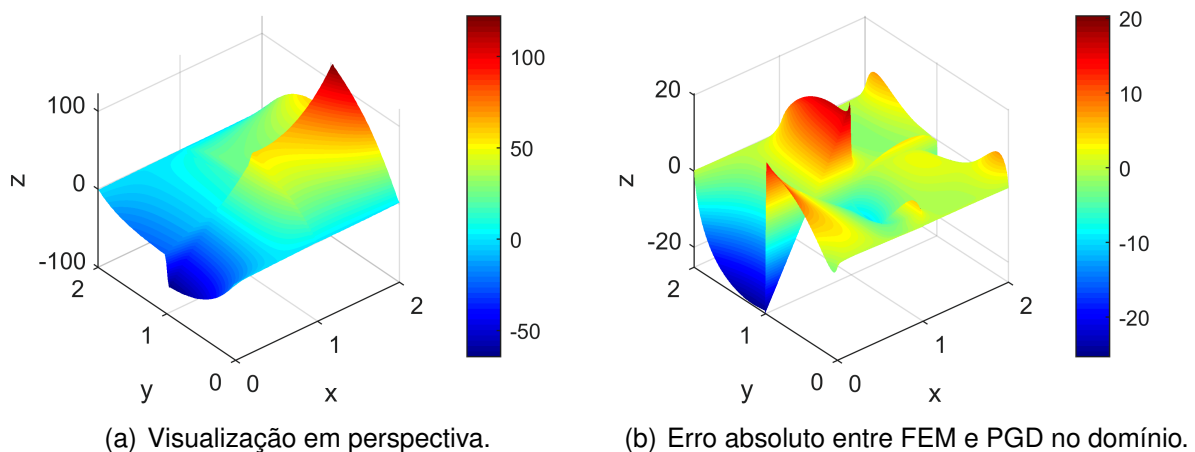
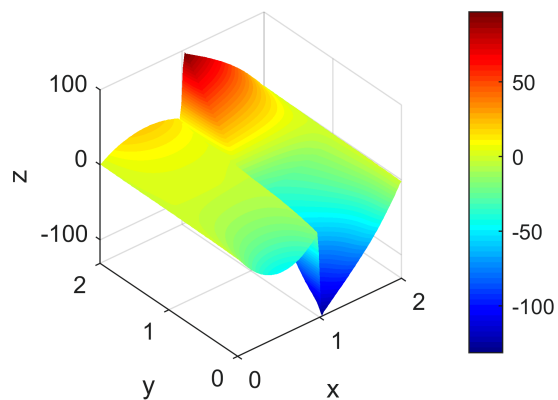
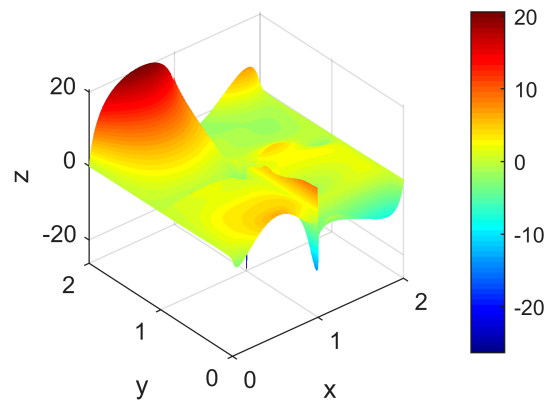


Figura 92 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 10 modos - caso 13. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 8,4607$ .



(a) Visualização em perspectiva.



(b) Erro absoluto entre FEM e PGD no domínio.

### 4.3.6 Caso 14 - Múltiplas inclusões (25% da área total).

Neste caso é tratado o problema de transferência de calor para a representação PGD da condutividade térmica apresentada na Seção 4.2.7, cujo domínio tem dimensões  $10 \times 10$  metros e fonte de calor constante em todo o domínio  $b = 1 \text{ W/m}^3$ . Os resultados obtidos com o método PGD foram comparados com resultados obtidos via elementos finitos utilizando  $1000 \times 1000$  elementos. A representação PGD da propriedade do material é apresentada na Figura 33.

Foram realizadas simulações variando a quantidade de modos e a quantidade de nós em cada direção. As Tabelas 33, 34 e 35 apresentam os resultados obtidos utilizando o método PGD e o erro relativo entre PGD e FEM. Neste caso os resultados que serviram de referência são:  $T = 11,200 \text{ }^\circ\text{C}$  no centro da placa, coordenada (5,5),  $q_x = -4,0768 \text{ W/m}^2$  na coordenada (0,5) e  $q_x = 2,6818 \text{ W/m}^2$  na coordenada (10,5).

Tabela 33 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 5$  e  $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 5$  e  $x = 10$  e  $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 2 modos.

nnd	ndof-PGD	T [ $^\circ\text{C}$ ]	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (0,5)	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (10,5)
10	40	9,44235	-3,02469	2,75555
20	80	9,92284	-3,33258	2,97274
50	200	10,32250	-3,62214	3,22579
80	320	10,41710	-3,59823	3,25933
100	400	10,44830	-3,58447	3,26863
200	800	10,49840	-3,58551	3,28635
500	2000	10,52930	-3,59915	3,29494
1000	4000	10,34100	-3,38481	3,22409
2000	8000	10,42930	-3,39412	3,25514
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,5)	Erro $E_{q_x}$ (10,5)
10	40	15,569330	2,58073E-01	2,75002E-02
20	80	11,40320	1,82550E-01	1,08487E-01
50	200	7,83482	1,11524E-01	2,02845E-01
80	320	6,99018	1,17389E-01	2,15352E-01
100	400	6,71161	1,20764E-01	2,18819E-01
200	800	6,26429	1,20509E-01	2,25427E-01
500	2000	5,98839	1,17163E-01	2,28630E-01
1000	4000	7,66964	1,69739E-01	2,02211E-01
2000	8000	6,88125	1,67455E-01	2,13789E-01

Tabela 34 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 5$  e  $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 5$  e  $x = 10$  e  $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,5)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (10,5)
10	200	9,59581	-2,86339	2,70484
20	400	10,34820	-3,15394	2,97454
50	1000	10,26550	-3,69321	3,18152
80	1600	10,31910	-3,44495	3,39398
100	2000	10,44050	-3,45046	3,33673
200	4000	10,40920	-3,42647	3,34583
500	10000	10,42140	-3,08562	3,63356
1000	20000	10,68770	-3,16325	3,18207
2000	40000	10,75830	-3,15912	3,14539
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,5)	Erro $E_{q_x}$ (10,5)
10	200	14,32310	2,97638E-01	8,59124E-03
20	400	7,60536	2,26369E-01	1,09158E-01
50	1000	8,34375	9,40910E-02	1,86338E-01
80	1600	7,86518	1,54987E-01	2,65560E-01
100	2000	6,78125	1,53635E-01	2,44213E-01
200	4000	7,06071	1,59520E-01	2,47606E-01
500	10000	6,95179	2,43127E-01	3,54896E-01
1000	20000	4,57411	2,24085E-01	1,86543E-01
2000	40000	3,94375	2,25098E-01	1,72865E-01

Tabela 35 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 5$  e  $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 5$  e  $x = 10$  e  $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 20 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,5)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (10,5)
10	400	9,39612	-2,90797	2,66111
20	800	10,40270	-3,00910	2,83418
50	2000	10,57610	-3,49505	2,83418
80	3200	10,43250	-3,15439	3,33173
100	4000	10,67460	-3,19806	3,16776
200	8000	10,70230	-3,37948	3,26014
500	20000	10,50790	-3,06867	3,48795
1000	40000	10,84590	-3,17924	3,19739
2000	80000	10,80510	-3,09648	3,15392

nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-2}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,5)	Erro $E_{q_x}$ (10,5)
10	400	16,10610	2,86703E-01	7,71497E-03
20	800	7,11875	2,61897E-01	5,68200E-02
50	2000	5,57054	1,42698E-01	1,94918E-01
80	3200	6,85268	2,26258E-01	2,42348E-01
100	4000	4,69107	2,15547E-01	1,81207E-01
200	8000	4,44375	1,71046E-01	2,15654E-01
500	20000	6,17946	2,47285E-01	3,00600E-01
1000	40000	3,16161	2,20163E-01	1,92255E-01
2000	80000	3,52589	2,40463E-01	1,76046E-01

Nota-se que ao aumentar a quantidade de modos, os erros relativos nos pontos analisados diminuem marginalmente, porém observa-se que não há convergência do fluxo de calor na direção  $x$ , na borda direita da placa, coordenada (10,5). Ressalva-se que nas tabelas é apresentado apenas o erro relativo dos pontos em questão, então não há uma diferença significativa entre a resposta utilizando 10 e 20 modos, porém a norma  $L_2$  do erro quadrático em todo o domínio tem um impacto significativo, como mostrado na Tabela 36.

Tabela 36 – Norma  $L_2$  da temperatura  $N_T^{L_2}$ , fluxo de calor na direção de  $x$  ( $N_{q_x}^{L_2}$ ) e  $y$  ( $N_{q_y}^{L_2}$ ) utilizando 2, 10 e 20 modos, juntamente com norma  $L_2$  do erro quadrático ( $E_T^{L_2}$ ,  $E_{q_x}^{L_2}$  e  $E_{q_y}^{L_2}$ ), respectivamente, e erro relativo entre as normas FEM e PGD ( $Ere_T^{L_2}$ ,  $Ere_{q_x}^{L_2}$  e  $Ere_{q_y}^{L_2}$ ).

	$N_T^{L_2}$	$N_{q_x}^{L_2}$	$N_{q_y}^{L_2}$	$E_T^{L_2}$	$E_{q_x}^{L_2}$	$E_{q_y}^{L_2}$	$Ere_T^{L_2}$	$Ere_{q_x}^{L_2}$	$Ere_{q_y}^{L_2}$
2 Modos	58,0218	15,2258	13,2044	6,5092	5,1658	4,4234	0,0809	0,0689	0,0808
10 Modos	60,3004	14,9275	12,8818	4,3992	5,8925	5,1627	0,0449	0,0196	0,0244
20 Modos	60,6310	15,1096	12,9189	3,8592	6,0660	5,1228	0,0396	0,0076	0,0216
FEM	63,1336	15,2258	13,2044	Referência					

A Figura 93 apresentam as curvas de convergências da temperatura e do fluxo

de calor na direção  $x$  utilizando 20 modos. Além disso, a fim de verificar o comportamento do método PGD, são apresentadas nas Figuras 94 e 95, as variáveis temperatura e fluxo de calor na direção de  $x$ , ao longo de  $x$  na coordenada  $y = L_y/2$ .

Figura 93 – Curva de convergência do método PGD utilizando 10 modos. (a) Temperatura na coordenada (5,5). (b) Fluxo de calor na direção  $x$ , coordenada (0,5). A taxa de convergência é de: (a)  $-0,1435$ . (b)  $0,0892$ .

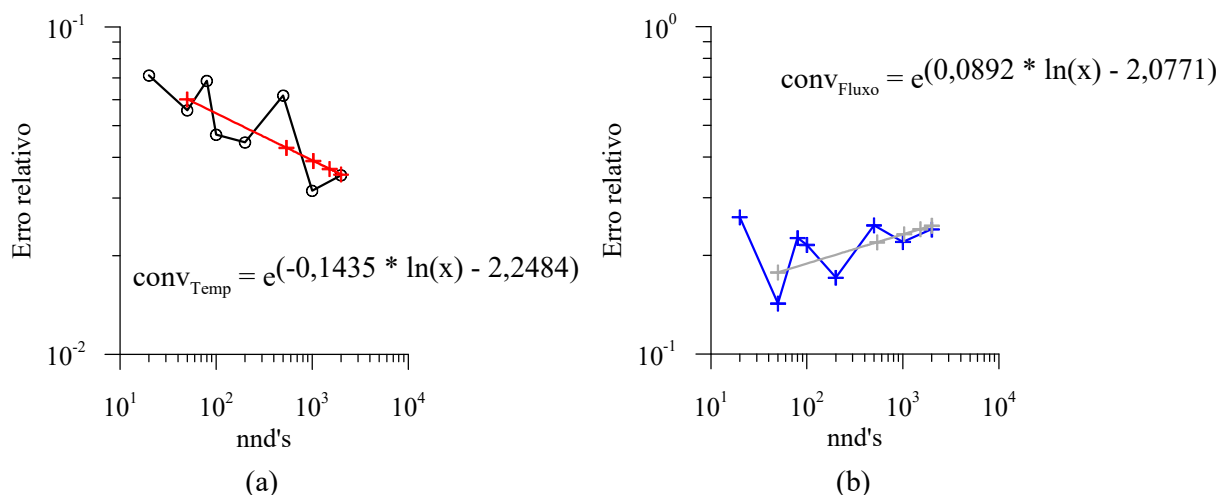


Figura 94 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.

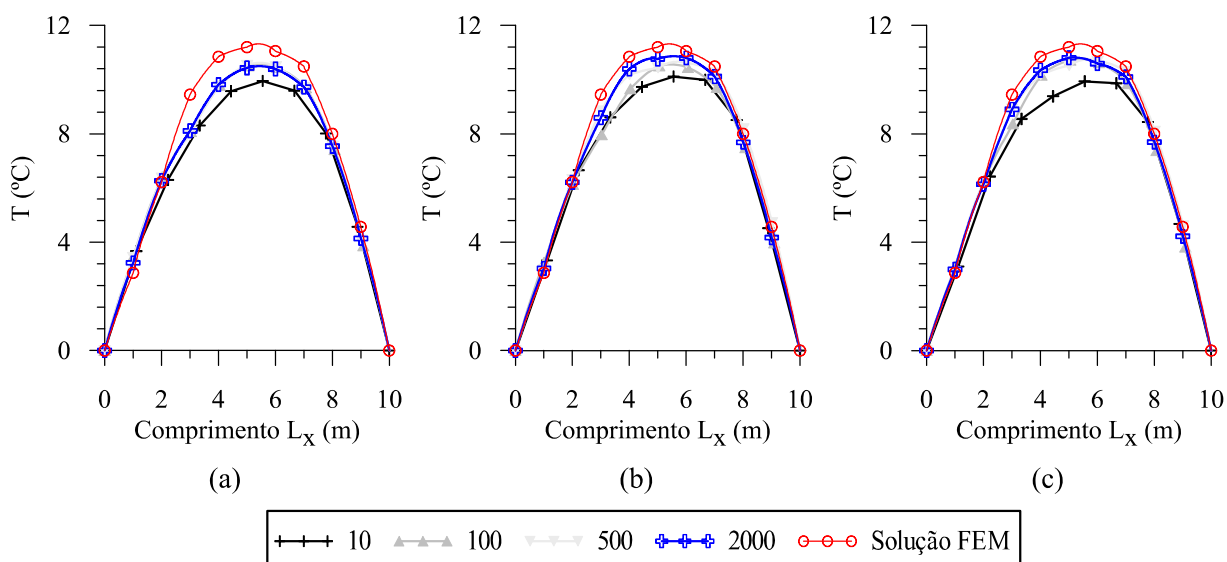
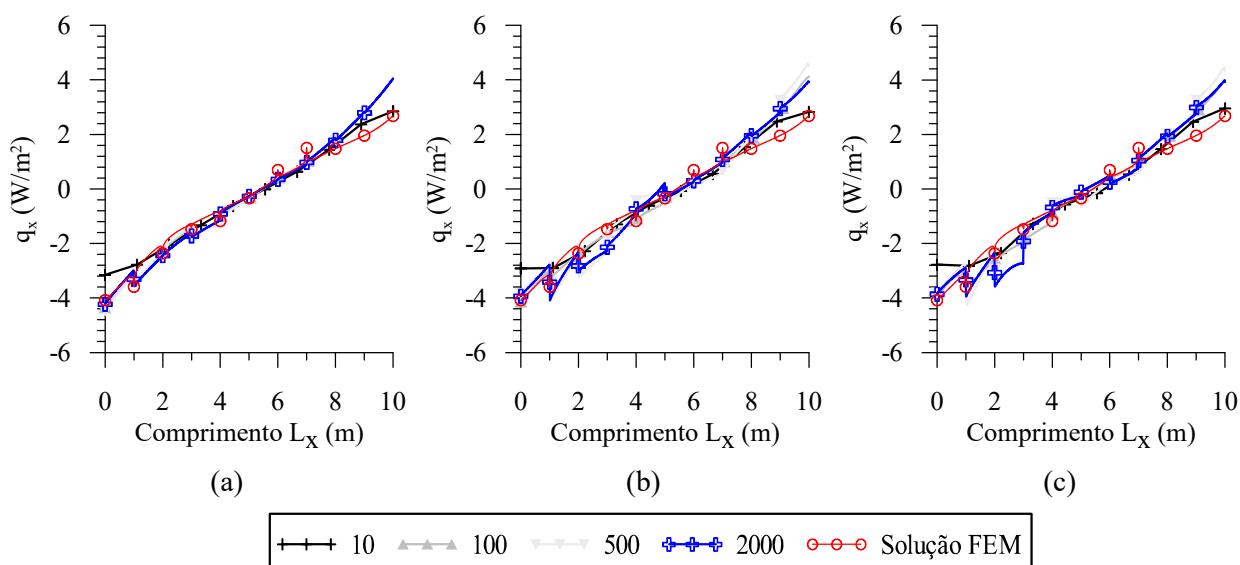


Figura 95 – Resultado do fluxo de calor na direção de  $x$  utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 2 modos, (b) 5 modos e (c) 10 modos.



Nota-se que, qualitativamente, o comportamento do método PGD é similar ao comportamento do FEM. É visível que ao aumentar a quantidade de modos, os resultados PGD aproximam-se dos resultados obtidos com FEM na região analisada. As Figuras 96, 97 e 98 apresentam visualização gráfica dos resultados obtidos com ambos os métodos e as Figuras 99, 100 e 101 apresentam a visualização em perspectiva dos resultados obtidos com o PGD, em conjunto com o erro entre FEM e PGD, para melhor percepção das regiões com maiores erros.

Figura 96 – Resultados obtidos de temperatura - caso 14.

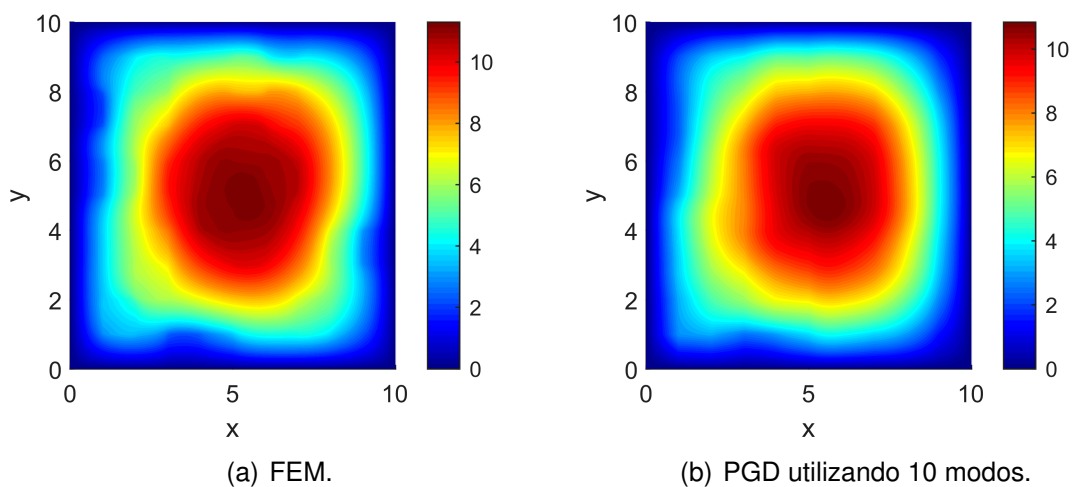




Figura 97 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 14.

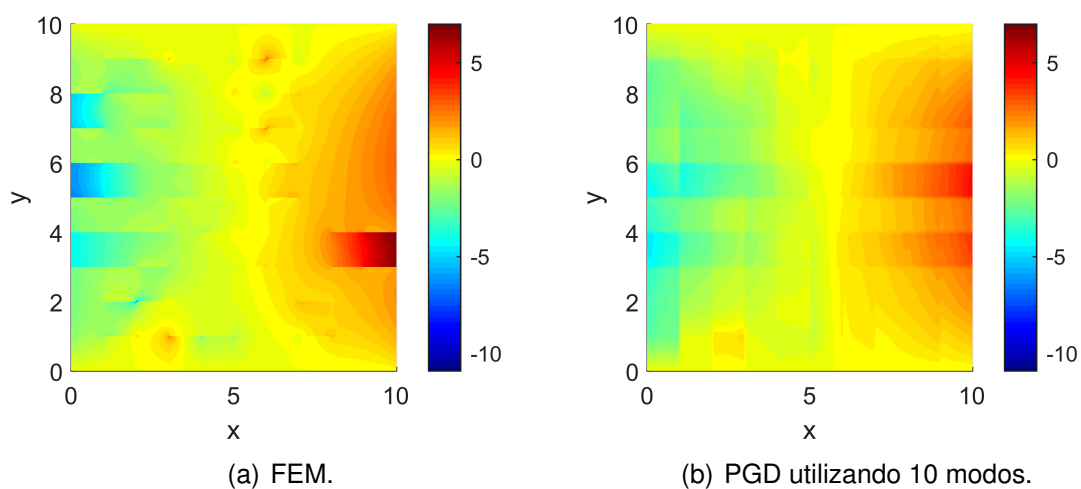


Figura 98 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 14.

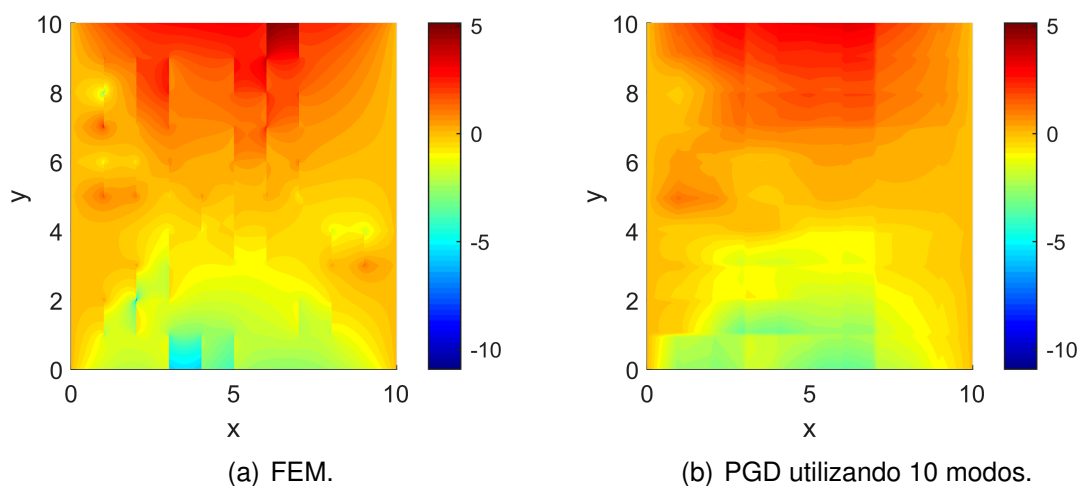


Figura 99 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_T^{L_2} = 3,8592$ .

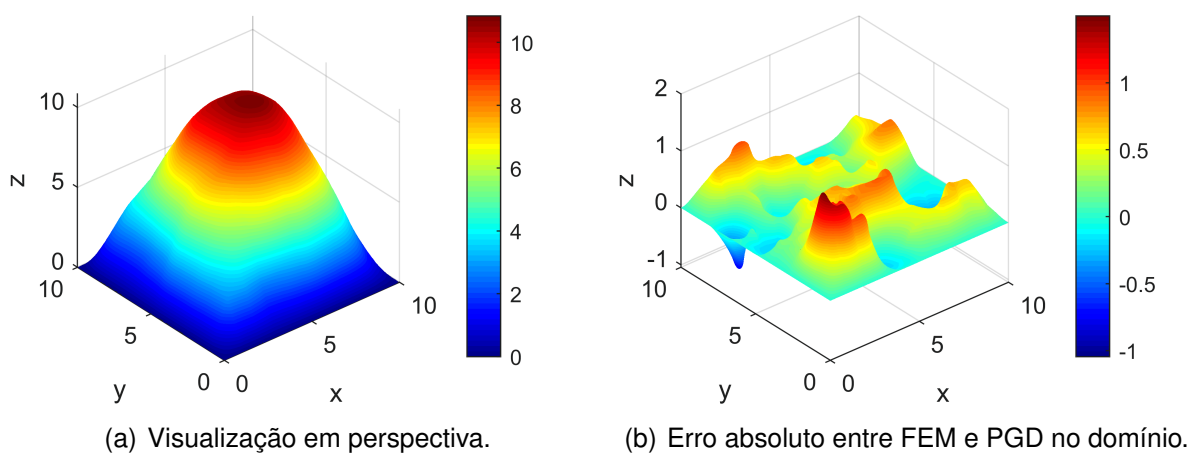


Figura 100 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 6,0660$ .

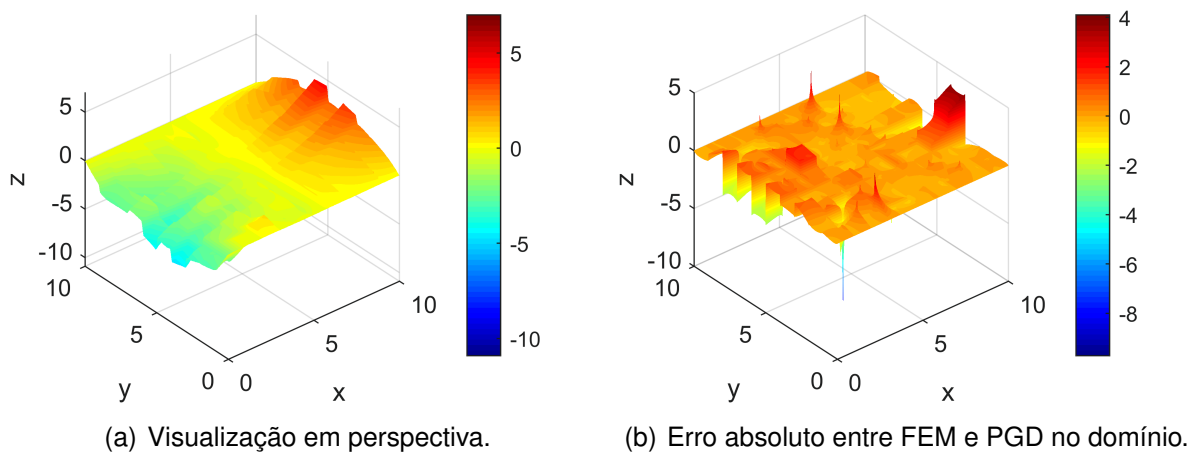
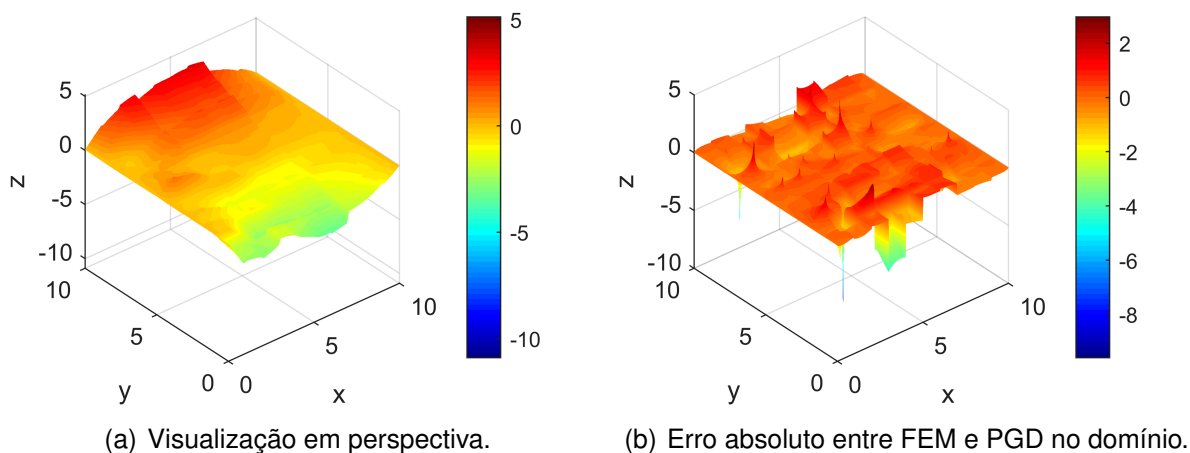


Figura 101 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 10 modos - caso 14. A norma  $L_2$  do erro para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 5,1228$ .



### 4.3.7 Caso 15 - Múltiplas inclusões (40% da área total).

Neste caso foi utilizado a representação da condutividade térmica apresentada na Seção 4.2.8, em um domínio de dimensões  $10 \times 10$  metros e fonte de calor constante em todo o domínio  $b = 1 \text{ W/m}^3$ . A configuração da condutividade térmica pode ser observada na Figura 40, já apresentada anteriormente.

As Tabelas 37 e 38 apresentam os resultados obtidos via PGD e o erro relativo entre as simulações utilizando ambos os métodos. Os resultados de referência foram obtidos com FEM utilizando  $1000 \times 1000$  elementos e apresentam os seguintes valores:  $T = 3,5910 \text{ }^\circ\text{C}$  no centro da placa, coordenada (5,5),  $q_x = -3,2527 \text{ W/m}^2$  na coordenada (0,5) e  $q_x = 2,2757 \text{ W/m}^2$  na coordenada (10,5).

Tabela 37 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 5$  e  $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 5$  e  $x = 10$  e  $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 10 modos.

nnd	ndof-PGD	T [ $^\circ\text{C}$ ]	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (0,5)	$q_x$ [ $\text{W/m}^2$ ] (10,5)
10	200	11,4441	48,45800	-61,80830
20	400	5,89883	-6,37674	4,13056
50	1000	3,18534	-4,66493	3,23703
80	1600	3,06367	-4,59999	3,12112
100	2000	3,05221	-4,57791	3,46078
200	4000	3,01643	-4,60100	3,45797
500	10000	2,94221	-4,17089	3,59453
1000	20000	2,93389	-4,01267	3,49559
2000	40000	2,98881	-3,31739	2,38722
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-1}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,5)	Erro $E_{q_x}$ (10,5)
10	200	21,87330	1,58978E+01	2,81601E+01
20	400	6,42899	9,60445E-01	8,15072E-01
50	1000	1,12842	4,34172E-01	4,22433E-01
80	1600	1,46729	4,14207E-01	3,71499E-01
100	2000	1,49921	4,07418E-01	5,20754E-01
200	4000	1,59886	4,14517E-01	5,19519E-01
500	10000	1,80557	2,82285E-01	5,79527E-01
1000	20000	1,82874	2,33643E-01	5,36050E-01
2000	40000	1,67578	1,98881E-02	4,90047E-02

Tabela 38 – Valores da temperatura no centro da placa, coordenada  $x = 5$  e  $y = 5$ , fluxo de calor, na coordenada  $x = 0$  e  $y = 5$  e  $x = 10$  e  $y = 5$ , e dos erros relativos de temperatura  $E_T$  e fluxo de calor na direção  $x$   $E_{q_x}$ , variando a quantidade de nós em cada direção e utilizando 25 modos.

nnd	ndof-PGD	T [°C]	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (0,5)	$q_x$ [W/m <sup>2</sup> ] (10,5)
10	500	-40,6413	-177,88200	-44,44270
20	1000	2,97467	-2,37568	1,79449
50	2500	3,15935	-4,63814	3,19360
80	4000	3,15602	-4,48752	3,09024
100	5000	3,03523	-4,62200	3,75825
200	10000	2,99053	-4,56101	3,64690
500	25000	3,04559	-4,61692	3,27510
1000	50000	3,06965	-4,52269	2,96549
2000	100000	4,26860	-4,41608	3,50022
nnd	ndof-PGD	Erro $E_T$ ( $\times 10^{-1}$ )	Erro $E_{q_x}$ (0,5)	Erro $E_{q_x}$ (10,5)
10	500	12,31910	5,36875E+01	2,05292E+01
20	1000	1,71517	2,69628E-01	2,11456E-01
50	2500	1,20081	4,25935E-01	3,03812E+00
80	4000	1,21008	3,79629E-01	3,57929E-01
100	5000	1,54650	4,20973E-01	6,51470E-01
200	10000	1,67099	4,02223E-01	6,02540E-01
500	25000	1,51764	4,19412E-01	4,39162E-01
1000	50000	1,45063	3,90442E-01	3,03111E-01
2000	100000	1,88859	3,57666E-01	5,38085E-01

A Figura 102 apresentam as curvas de convergências da temperatura e do fluxo de calor na direção  $x$  utilizando 25 modos e nas Figuras 103 e 104 é apresentado o comportamento dos resultados obtidos com o método PGD para as variáveis temperatura e fluxo de calor na direção  $x$ , ao longo de  $x$  na coordenada  $y = L_y/2$ .

Figura 102 – Curva de convergência do método utilizando 25 modos. (a) Temperatura. (b) Fluxo de calor na direção  $x$ . A taxa de convergência é de: (a) 0,0951. (b) -0,6334.

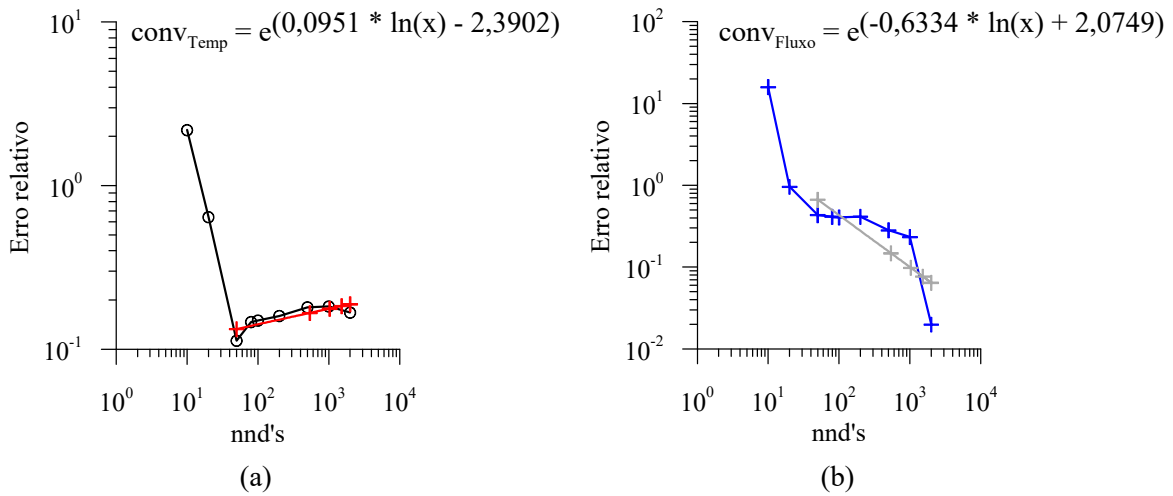
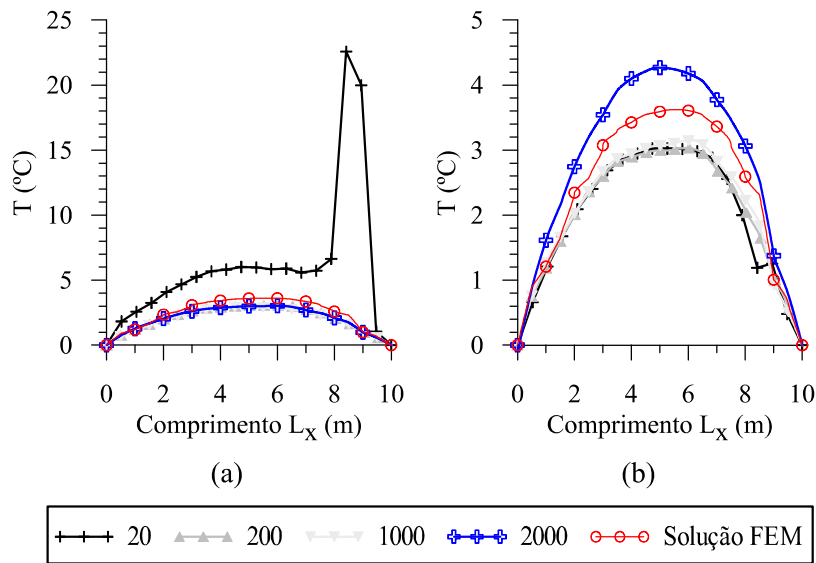


Figura 103 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 10 modos e (b) 25 modos.



Nota-se que, ao aumentar a quantidade de modos, os resultados PGD tornam-se mais próximos dos resultados utilizando FEM. Este fato fica evidenciado observando as figuras que representam o comportamento da temperatura e do fluxo de calor ao longo de  $x$  em  $y = L_y/2$ . Quando se utiliza 10 modos, a representação apresenta maiores discrepâncias quando comparado com a utilização de 25 modos. As Figuras 105, 106 e 107 apresentam visualização gráfica dos resultados obtidos com ambos os métodos. As Figuras 108, 109 e 110 mostram visualização em perspectiva dos resultados obtidos com PGD, em conjunto com o erro entre FEM e PGD, para melhor percepção da diferença entre os resultados.

Figura 104 – Resultado do campo de temperatura utilizando o método PGD variando a quantidade de modos: (a) 10 modos e (b) 25 modos.

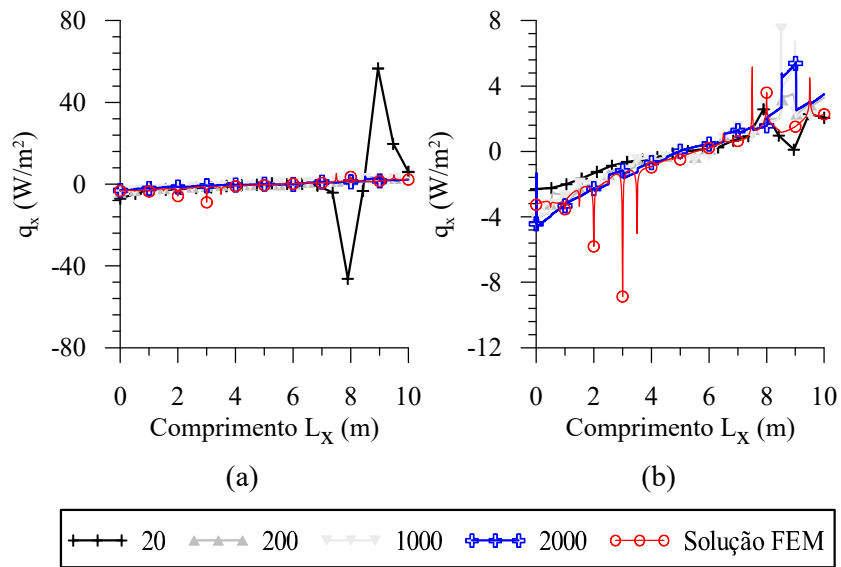
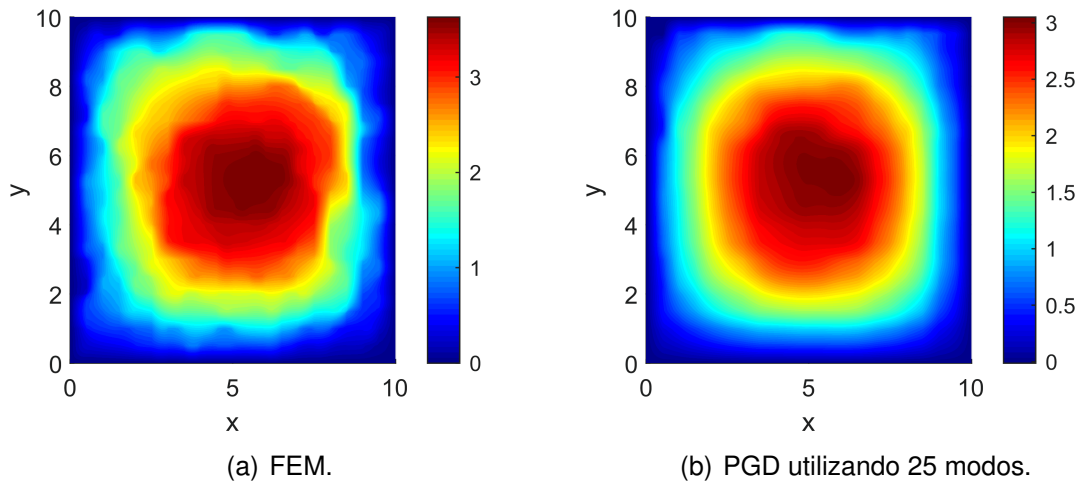


Figura 105 – Resultados obtidos de temperatura - caso 15.



A Tabela 39 apresenta a norma  $L_2$  e o erro relativo entre as normas  $L_2$  dos resultados FEM e PGD.

Tabela 39 – Norma  $L_2$  dos resultados obtidos com FEM e PGD, utilizando 25 modos, e o erro relativo entre as normas.

	FEM- $L_2$	PGD- $L_2$	Erro Relativo
Temp	20,4908	17,6295	0,1396
Flux <sup>x</sup>	15,0050	15,8999	0,0596
Fluxo <sup>y</sup>	16,0496	14,7739	0,0794

Figura 106 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  - caso 15.

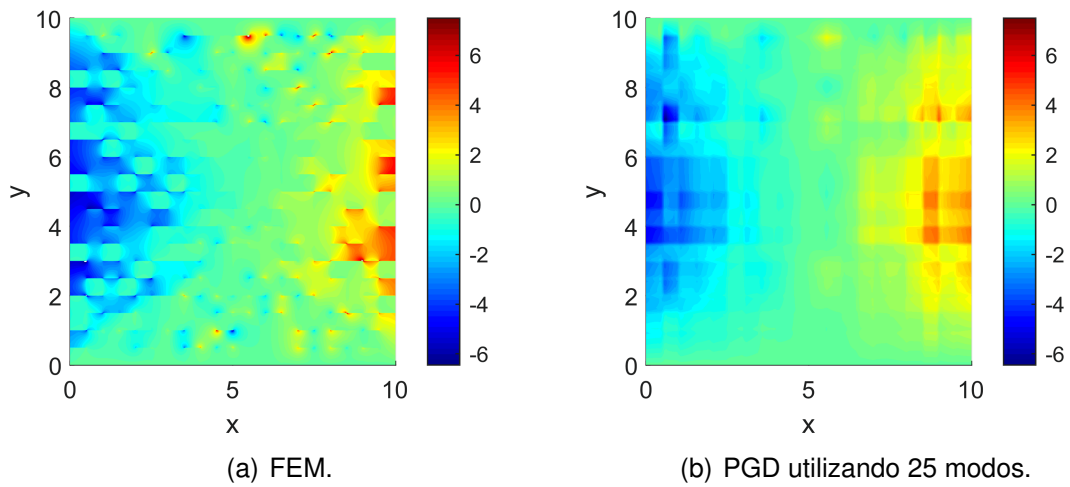


Figura 107 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  - caso 15.

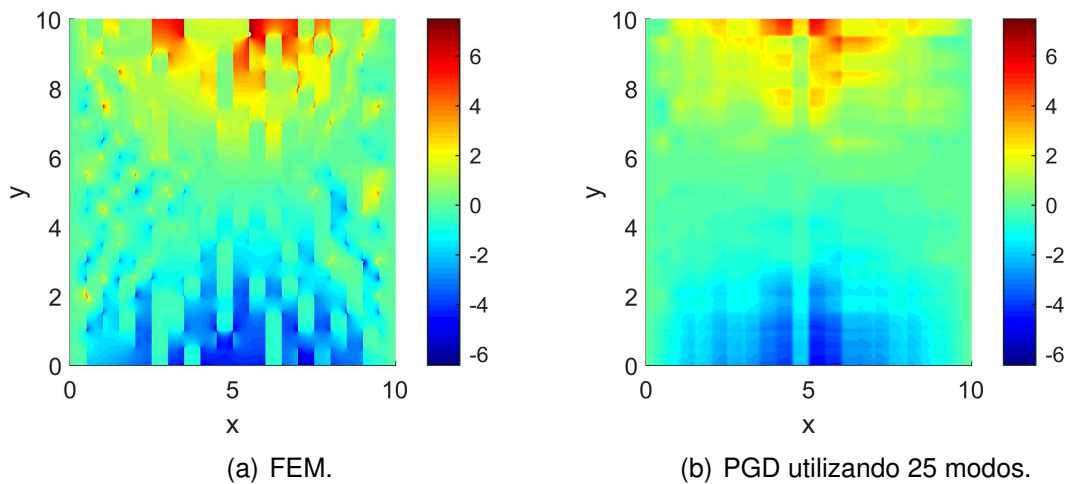


Figura 108 – Resultados obtidos de temperatura via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma  $L_2$  do erro quadrático para este caso foi  $E_T^{L_2} = 3,0343$ .

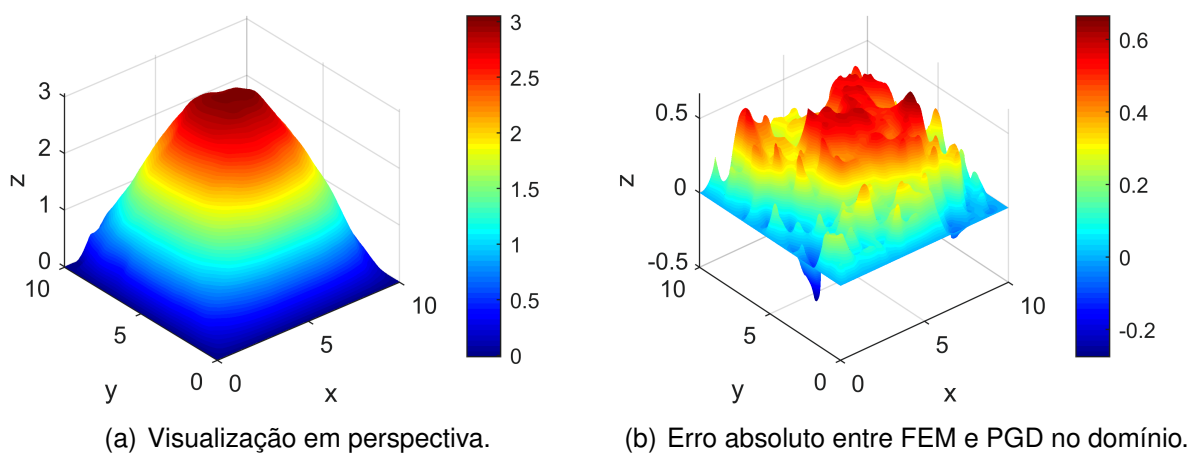


Figura 109 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $x$  via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma  $L_2$  do erro quadrático para este caso é  $E_{q_x}^{L_2} = 9,5282$ .

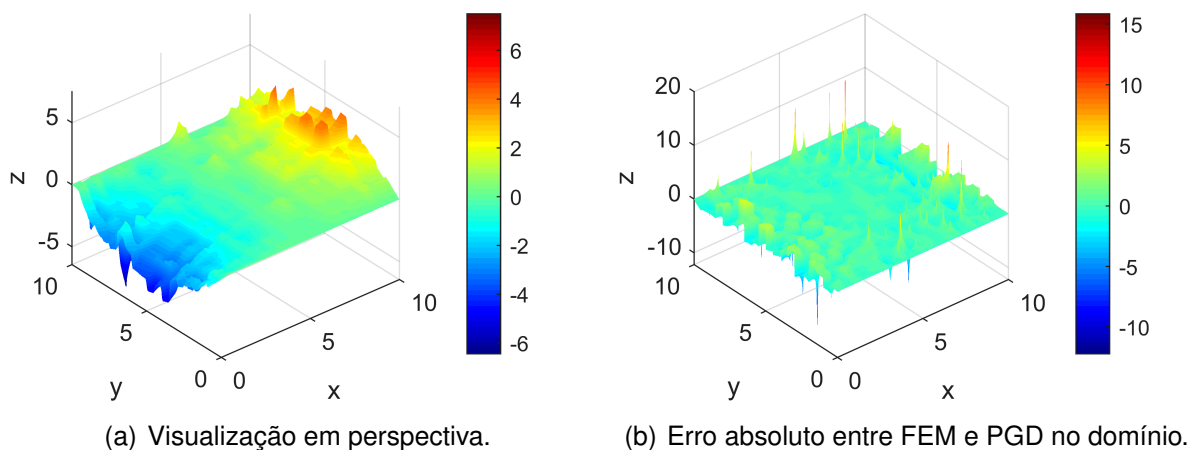
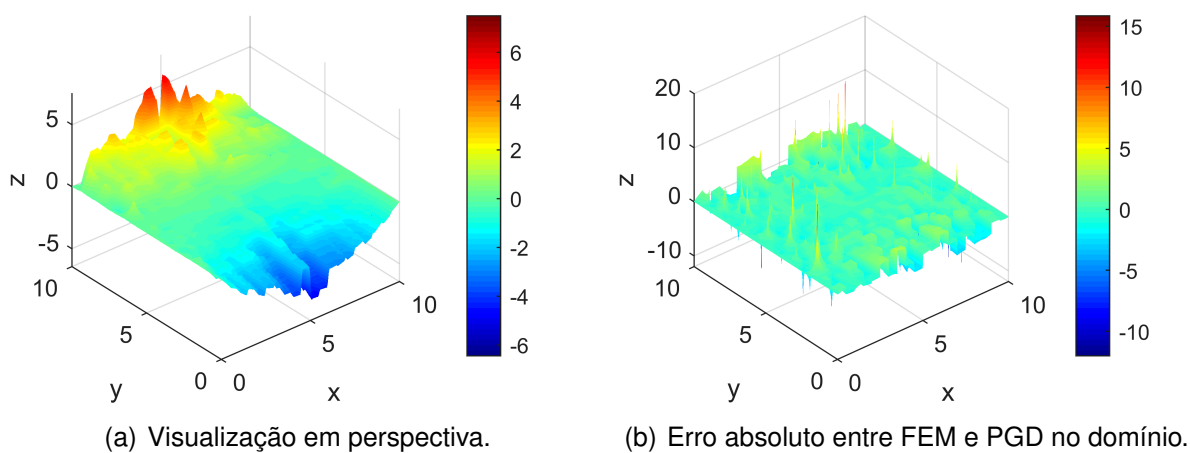


Figura 110 – Resultados obtidos de fluxo de calor na direção  $y$  via PGD utilizando 25 modos - caso 15. A norma  $L_2$  do erro quadrático para este caso é  $E_{q_y}^{L_2} = 8,5324$ .





#### 4.4 ASPECTOS GERAIS DO MÉTODO PGD.

No decorrer dos testes e simulações executadas, percebe-se que o método PGD não apresenta dificuldades para solução de funções contínuas, seja para problemas de representação de material ou solução de condução de calor. Entretanto, em presença de descontinuidades, o método PGD apresenta algumas particularidades. Por exemplo a escolha da quantidade de nós PGD internos à inclusão. Para reduzir os erros no caso de inclusões retangulares, é necessário que os nós da malha PGD coincidam com os vértices da inclusão. Então, com o propósito de investigar estas características, propõe-se analisar o caso 4.2.7, com 25% da área total em inclusões, verificando a influência da quantidade de nós e também uma análise mais criteriosa quanto ao erro obtido no problema de calor.

Primeiramente, foram realizadas simulações utilizando 10 modos e fator  $fat = 1$ , 10 para a representação do material e 20 modos para o problema de condução de calor, cobrindo duas faixas de nnd's, são elas: de 95 a 105 nnd's e de 995 a 1005 nnd's. As Tabelas 40 e 41 apresentam os valores obtidos para representação de material para as duas faixas, respectivamente, e as Tabelas 42 e 43 apresentam os resultados obtidos para condução de calor, apresentando valores de temperatura e fluxo.

Tabela 40 – Valores de nnd's entre 95 e 105, norma  $L_2$  das simulações exata e PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo entre as normas exata e PGD utilizando 10 modos da representação da propriedade de material.

nnd	$N_{PGD}^{L_2}$	$N_{Ex}^{L_2}$	$N_{Eq}^{L_2}$	$E_N^{rel}$ (%)
95	73,42703	75,24332	0,99251	2,4139
96	72,85731	78,77562	2,38918	7,5129
97	73,42577	75,16140	0,98593	2,3092
98	73,58403	73,71400	0,50616	0,1763
99	73,40601	75,02082	0,96194	2,1525
100	73,70445	73,86236	0,41207	0,2138
101	73,75240	84,54875	3,42581	15,6249
102	73,68466	73,63739	0,40353	0,0642
103	73,43541	75,21867	0,94114	2,3708
104	73,59163	73,78876	0,47941	0,2672
105	73,44672	75,09823	0,89605	2,1991

Tabela 41 – Valores de nnd's entre 995 e 1005, norma  $L_2$  das simulações exata e PGD, norma  $L_2$  do erro quadrático e erro relativo entre as normas exata e PGD utilizando 10 modos da representação da propriedade de material.

nnd	$N_{PGD}^{L_2}$	$N_{Ex}^{L_2}$	$N_{Eq}^{L_2}$	$E_N^{rel}$ (%)
995	73,71000	73,88974	0,09451	0,2433
996	73,65587	74,21058	0,21881	0,7475
997	73,71007	73,88219	0,09438	0,2330
998	73,72473	73,74626	0,04941	0,092
999	73,70775	73,87408	0,09489	0,2251
1000	73,73656	73,76125	0,04100	0,0335
1001	73,75000	74,76586	0,30458	1,3587
1002	73,73489	73,73875	0,04124	0,0052
1003	73,70951	73,89632	0,09496	0,2528
1004	73,72542	73,75376	0,04931	0,0384
1005	73,71039	73,88835	0,09357	0,2408

Tabela 42 – Valores de nnd's entre 95 e 105, norma  $L_2$  das simulações FEM e PGD, de temperatura ( $N_{Temp}^{L_2}$ ) e fluxo de calor ( $N_{Flux}^{L_2}$  e  $N_{Fluy}^{L_2}$ ), e erro relativo entre as normas FEM e PGD utilizando 20 modos.

nnd	$N_{Temp}^{L_2}$	$N_{Flux}^{L_2}$	$N_{Fluy}^{L_2}$	$E_{NTemp}^{rel}$	$E_{NFlux}^{rel}$	$E_{NFluy}^{rel}$
95	31,1517	8,0923	7,7617	50,6397	46,4879	40,9956
96	31,4424	8,1091	7,8004	50,1791	46,3771	40,7011
97	30,6516	7,8828	7,5360	51,5320	47,8734	42,7110
98	30,7906	7,9570	7,5504	51,2118	47,3829	42,6019
99	31,5790	8,1169	7,6245	50,4380	46,3257	42,0385
100	59,9430	14,8501	12,8242	5,0194	1,8011	2,5099
101	58,9084	14,6179	12,5247	6,6588	3,3362	4,7870
102	33,1797	8,7214	8,7714	47,4262	42,3279	33,3194
103	33,2486	8,8346	8,9162	47,3172	41,5795	32,2189
104	33,0999	8,8344	8,8203	47,5527	41,5807	32,9480
105	33,0115	8,8160	8,8993	47,6928	41,7026	32,3477
FEM	63,1108	15,1224	13,1544	Referência		

Tabela 43 – Valores de nnd's entre 995 e 1005, norma  $L_2$  das simulações FEM e PGD, de temperatura ( $N_{Temp}^{L_2}$ ) e fluxo de calor ( $N_{Flux}^{L_2}$  e  $N_{Fluy}^{L_2}$ ), e erro relativo entre as normas FEM e PGD utilizando 20 modos.

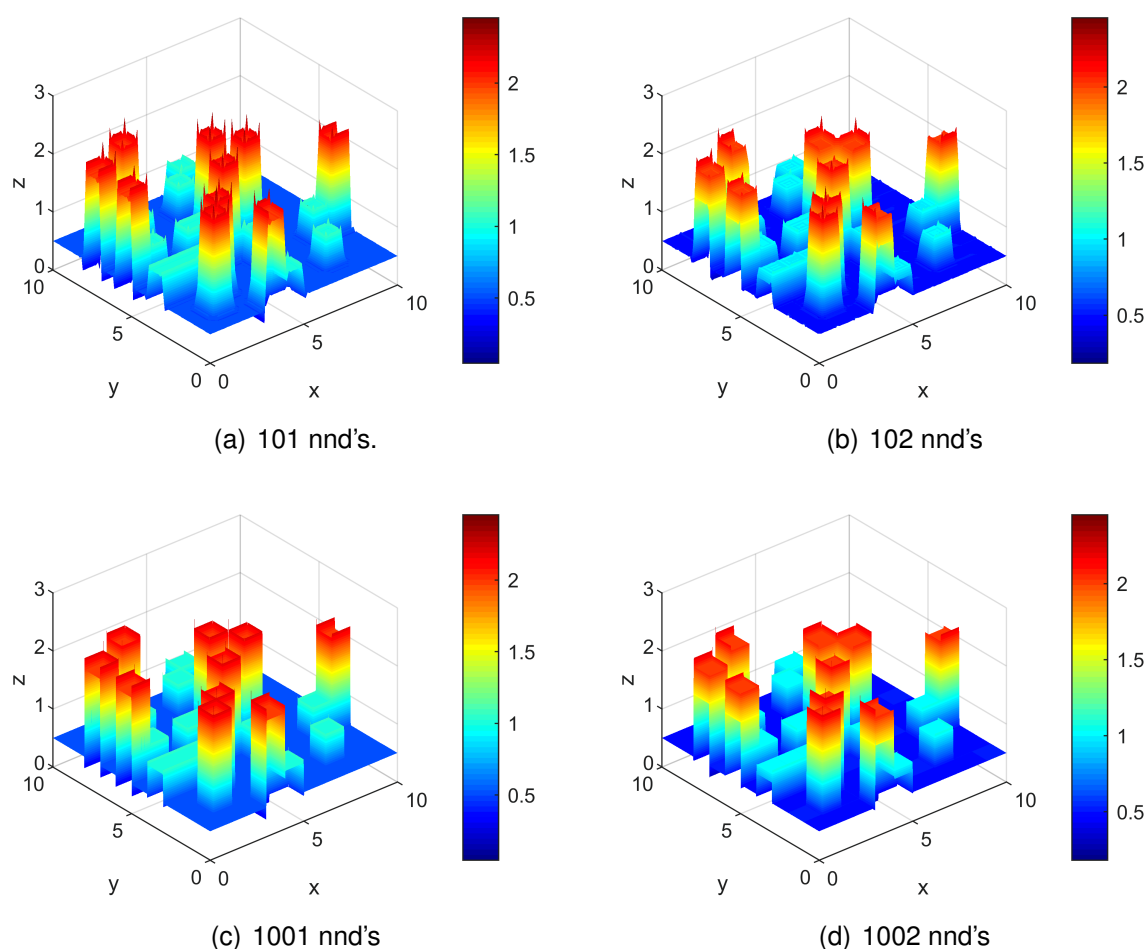
nnd	$N_{Temp}^{L_2}$	$N_{Flux}^{L_2}$	$N_{Fluy}^{L_2}$	$E_{NTemp}^{rel}$	$E_{NFlux}^{rel}$	$E_{NFluy}^{rel}$
995	60,3224	15,0339	12,8469	4,4183	0,5854	2,3376
996	60,2942	14,9595	12,8214	4,4630	1,0775	2,5317
997	59,9963	14,8970	12,7748	4,9350	1,4905	2,8858
998	59,9098	14,8604	12,7303	5,0720	1,7325	3,2236
999	60,0587	14,8577	12,7806	4,8360	1,7503	2,8415
1000	59,8668	14,8204	12,7490	5,1402	1,9976	3,0821
1001	60,0261	14,7526	12,8035	4,8878	2,4458	2,6672
1002	60,0623	14,8204	12,7852	4,8304	1,9972	2,8064
1003	59,9894	14,8599	12,7409	4,9458	1,7362	3,1434
1004	60,2851	14,9811	12,8629	4,4773	0,9349	2,2158
1005	60,3193	14,9347	12,8530	4,4232	1,2415	2,2916
FEM	63,1108	15,1224	13,1544	Referência		

Observando a Tabela 40, nota-se que o menor erro relativo entre as normas é a que possui 102 nnd's com valor 0,0642 e a que possui o maior valor é a com 101 nnd's, com valor 15,6249. Analisando a Tabela 41, que faz referência à propriedade de material, obtemos um espectro com menores valores de erro relativo, porém ainda com margem muito grande de valores, sendo o menor valor 0,0052, com 1002 nnd's e o maior valor 1,3587, obtido com 1001 nnd's. Para estas quatro configurações, é apresentada a visualização em perspectiva nas Figuras 111, onde é possível observar a diferença entre cada uma delas. Nota-se que a diferença está localizada nas arestas e nos vértices das inclusões. Se compararmos a representação com 101 e 102 nnd's, observamos que a primeira delas apresenta maiores picos nos vértices das inclusões enquanto a segunda, menores picos, conseqüentemente, na segunda obtêm-se os menores erros. Agora comparando a representação com 1001 e 1002 nnd's, tanto nos vértices, quanto nas arestas da inclusão, observamos diferenças. Na primeira, com 1001 nnd's, têm-se maiores valores em ambas regiões, enquanto com 1002 estes valores são menores, acarretando em menores erros.

Outra discussão plausível de ser feita é que a representação material utilizando 101 nnd's apresentou o maior erro na Tabela 40, porém esta mesma configuração apresentou um dos menores erros relativos no problema de condução de calor, na Tabela 42. Isto implica que o erro adquirido no problema de condução de calor não está diretamente relacionado com o erro obtido na representação PGD do material.

Afim de melhor adequar a solução, utilizou-se a representação com 101 e com 1001, as duas que apresentaram os piores resultados, em suas respectivas faixas de dados e aplicou um fator diferente de  $fat = 1, 10$  e não houve qualquer ganho em relação ao erro relativo obtido.

Figura 111 – Representação em perspectiva da propriedade de material.



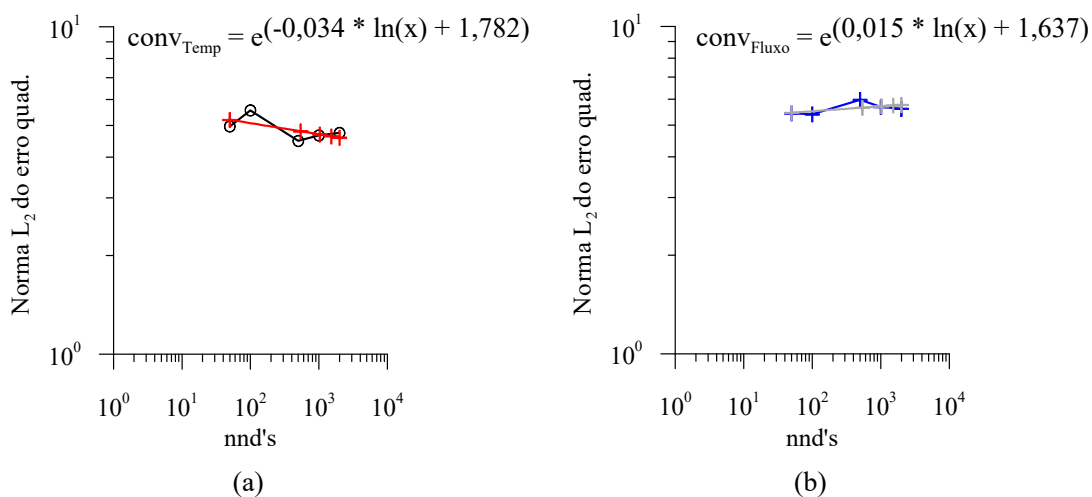
Quanto aos resultados obtidos do problema de condução de calor, nota-se um grande desvio na primeira faixa de resultados, onde em geral o erro relativo da temperatura está entre 47,3172 e 51,5320, porém, duas configurações apresentam grandes diferenças, são elas com 100 e 101 nnd's, que apresentam respectivamente os valores de erro relativo de 5,0194% e 6,6588%. Na segunda faixa de valores não há uma discrepância tão grande, havendo apenas uma pequena variação dos valores, onde pode-se observar a convergência com o incremento de nnd's. Foi colocado em questão apenas os valores de temperatura, porém os resultados de fluxo de calor seguem as mesmas características, como apresentado nas tabelas.

Outra métrica adotada para analisar as tendências do método é a convergência. Na seção 4.3.6 foi adotado como critério para a curva de convergência o erro relativo em pontos específicos do domínio, na Tabela 44 é apresentado a norma  $L_2$  do erro quadrático e a Figura 112 apresenta a curva de convergência utilizando estes valores. Nesta análise, trataremos da quantidade de elementos em cada direção, pois para cada uma das configurações testadas, foi gerado também, resultados via FEM, tornando a comparação mais criteriosa.

Tabela 44 – Norma  $L_2$  do erro quadrático para temperatura e fluxo de calor na direção de  $x$  e  $y$ .

nnd	$N_{Eq}^{L_2}$ -Temp	$N_{Eq}^{L_2}$ -Flux	$N_{Eq}^{L_2}$ -Fluy
50	4,9696	5,4356	4,4040
100	5,5634	5,3950	4,5502
500	4,4852	5,9709	4,8890
1000	4,6634	5,6785	5,1244
2000	4,7459	5,6108	5,1303

Figura 112 – Norma  $L_2$  do erro quadrático e a curva de convergência para temperatura e fluxo de calor na direção  $x$ . (a) Temperatura. (b) Fluxo de calor na direção de  $x$ . A taxa de convergência é de: (a)  $-0,0339$ . (b)  $0,0151$ .



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um estudo do comportamento do método *Proper Generalized Decomposition* (PGD) em problemas de condução de calor utilizando materiais heterogêneos. Dessa forma, foi considerada a representação separada típica do PGD tanto para as propriedades de material e fonte de calor ( $k$  e  $b$ ), quanto para a temperatura ( $T$ ), na forma  $X_i(x) \cdot Y_i(y)$ , considerando um domínio bidimensional. Os domínios das análises foram definidos quadrados, com diversos exemplos de materiais e com condições de contorno homogêneas.

Para avaliação do PGD, verificou-se o comportamento do método a partir da influência da quantidade de nós em cada direção, do fator de suavização  $fat$  e heterogeneidade do material nos problemas propostos. A partir dos resultados obtidos, verifica-se a capacidade do método PGD aproximar as respostas às soluções de referências apresentadas, seja a referência analítica ou via FEM.

Os exemplos numéricos abordados neste trabalho são simples, de cunho numérico e foram abordados sem interesse prático, pois o objetivo era analisar o potencial do PGD como um método de redução de ordem, ou seja, a capacidade deste de contornar a maldição da dimensionalidade. Por meio destes exemplos verifica-se que os resultados obtidos foram precisos e com baixo custo computacional. A complexidade numérica do PGD escala linearmente com a quantidade de dimensões do espaço, já as representações baseadas em malhas padrão, escalam de forma exponencial.

É importante destacar que ao utilizar o método PGD existem duas possibilidades de refino, a primeira delas com relação a quantidade de nós em cada direção, e a segunda com relação a quantidade de modos a serem considerados nas simulações. Por exemplo, é necessário avaliar os resultados obtidos utilizando 20 modos e 500 nós em cada direção e também 10 modos e 1000 nós em cada direção e ponderar qual delas causa mais efeito. Essa é uma característica que não foi abordada no trabalho e necessita de uma averiguação mais aprofundada, sendo de suma importância para caracterizar o uso do método PGD.

Os resultados referentes à representação do material via PGD se mostram bem precisos, principalmente quando a distribuição do material é suave, precisando de poucos nós em cada direção e poucos modos para a representação. Quando se trata de problemas com inclusões, ou seja, com descontinuidades, a representação ainda se mostra adequada, porém apresenta muita dependência da quantidade de nós em cada direção.

Ainda sobre a representação do material, é preciso salientar que o método de suavização aplicado neste trabalho, para contornar o efeito de Gibbs, se mostrou uma ferramenta eficiente para diminuir o erro entre a representação real e a representação PGD nas proximidades das interfaces de material.

Com relação à solução obtida via PGD para o problema de condução de calor, percebe-se a mesma tendência da representação de material, ou seja, para casos em que há distribuição suave do material, a solução via PGD apresenta erros baixos relativos à solução via FEM, enquanto que quando há presença de inclusões, esses erros tendem a se tornarem maiores. Ainda é importante discutir quanto as curvas de convergências apresentadas no problema de condução de calor, pois as análises foram executadas pontualmente, atribuindo então o comportamento apresentado. Além da análise pontual, o comportamento da convergência também pode ser atribuído quanto a multiplicação dos coeficientes da representação de separação de variáveis PGD.

Na Seção 4.4 nota-se, nas tabelas apresentadas, que as soluções dos problemas de condução de calor também são muito dependentes da quantidade de nós em cada direção. Essa dependência fica bastante evidenciada quando se observa os resultados obtidos na faixa de valores das simulações com 95 até 105 nnd's.

Então, ao avaliar os resultados obtidos a partir da implementação computacional proposta, verifica-se que o método PGD foi capaz de representar o material de maneira eficiente e a partir desta, as soluções do problema de condução de calor, também foram satisfatórios, principalmente relacionando a capacidade das respostas obtidas com a redução do processamento das simulações.

Em vista dos fatos apresentados neste trabalho, bem como os resultados obtidos, sugere-se como forma de continuação deste trabalho os seguintes tópicos:

- Utilização de outros formatos de inclusão, como circulares e elípticas;
- Malhas com quantidade de número de nós diferentes em cada direção e malha não regular em cada direção;
- Variar o fator  $f_{at}$  para cada configuração testada, seja variando a quantidade de modos ou nnd's;
- Avaliar a influência do refino com relação a quantidade de nós em cada direção e também quanto ao acréscimo de mais modos PGD nas simulações;
- Avaliar de forma mais objetiva a comparação do tempo de processamento utilizando os métodos de malha padrão e PGD;
- Implementar ao problema de condução de calor condições de contorno não nulas, possibilitando a homogeneização da condutividade térmica;
- Implementar algoritmo de otimização para o fator de suavização  $f_{at}$ ;
- Aplicar o presente trabalho em geometrias mais complexas como: lacunas, furos e cantos vivo (geometrias em L);
- Aplicar o método PGD em problemas de elasticidade;

- 
- Aplicar o presente trabalho para explorar aplicações de casos de materiais heterogêneos reais.



## REFERÊNCIAS

- AMMAR, Amine; CHINESTA, Francisco *et al.* Proper generalized decomposition of time-multiscale models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 90, n. 5, p. 569–596, 2012.
- AMMAR, Amine; MOKDAD, Béchir *et al.* A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 139, n. 3, p. 153–176, 2006.
- AUGARDE, Charles E. Generation of shape functions for straight beam elements. **Computers & structures**, Elsevier, v. 68, n. 6, p. 555–560, 1998.
- BARBARULO, Andrea. **On a PGD model order reduction technique for mid-frequency acoustic**. 2012. Tese (Doutorado).
- BEN-OUMRANE, Sallai *et al.* A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams. **Computational Materials Science**, Elsevier, v. 44, n. 4, p. 1344–1350, 2009.
- BOGNET, Brice *et al.* Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3D solutions with 2D computational complexity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 201, p. 1–12, 2012.
- BOUCHAFA, Ali *et al.* Analytical modelling of thermal residual stresses in exponential functionally graded material system. **Materials & Design**, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 560–563, 2010.
- BOUCINHA, Lucas; GRAVOUIL, Anthony; AMMAR, Amine. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 255, p. 67–88, 2013.
- CHENGLIN, Chu *et al.* Hydroxyapatite–Ti functionally graded biomaterial fabricated by powder metallurgy. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 271, n. 1-2, p. 95–100, 1999.
- CHO, JR; ODEN, J Tinsley. Functionally graded material: a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank–Nicolson–Galerkin scheme. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 188, n. 1-3, p. 17–38, 2000.
- DUMON, Antoine; ALLERY, Cyrille; AMMAR, Amine. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 230, n. 4, p. 1387–1407, 2011.

EBHOTA, Williams S; JEN, Tien-Chien. Casting and applications of functionally graded metal matrix composites. *In: ADVANCED Casting Technologies*. [S.l.]: IntechOpen, 2017.

FALCO, Antonio; NOUY, Anthony. A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart–Young approach. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 376, n. 2, p. 469–480, 2011.

FAY, Temple H; HENDRIK KLOPPERS, P. The Gibbs' phenomenon. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taylor & Francis, v. 32, n. 1, p. 73–89, 2001.

FOSTER, J; RICHARDS, FB. The Gibbs phenomenon for piecewise-linear approximation. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 98, n. 1, p. 47–49, 1991.

GALLAND, Florent *et al.* A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 200, n. 5-8, p. 699–716, 2011.

GHNATIOS, Ch *et al.* Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 213, p. 29–41, 2012.

GONZÁLEZ, David *et al.* Recent advances on the use of separated representations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 81, n. 5, p. 637–659, 2010.

HABIG, K.-H. Chemical vapor deposition and physical vapor deposition coatings: Properties, tribological behavior, and applications. **Journal of Vacuum Science & Technology A**, v. 4, n. 6, p. 2832–2843, 1986.

HEWITT, Edwin; HEWITT, Robert E. The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis. **Archive for history of Exact Sciences**, JSTOR, p. 129–160, 1979.

HIRAI, Toshio; SASAKI, Makoto. Vapor - Deposited Functionally Gradient Materials. **JSME International Journal, Series 1: Solid Mechanics, Strength of Materials**, v. 34, p. 123–129, abr. 1991.

HULBERT, Gregory M; HUGHES, Thomas JR. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. Elsevier, 1990.

INDYK, Piotr; MOTWANI, Rajeev. Approximate nearest neighbors: towards removing the curse of dimensionality. *In: PROCEEDINGS of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing.* [S.l.: s.n.], 1998. p. 604–613.

KASAEIAN, AB; VATAN, SH Nasiri; DANESHMAND, S. FGM materials and finding an appropriate model for the thermal conductivity. **Procedia engineering**, Elsevier, v. 14, p. 3199–3204, 2011.

KELLY, Susan E. Gibbs phenomenon for wavelets. **Applied and Computational Harmonic Analysis**, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 72–81, 1996.

KOIZUMI, MFGM. FGM activities in Japan. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 28, n. 1-2, p. 1–4, 1997.

LADEVÈZE, Pierre. **Nonlinear computational structural mechanics: new approaches and non-incremental methods of calculation.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.

LADEVÈZE, Pierre; PASSIEUX, J-C; NÉRON, David. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 21-22, p. 1287–1296, 2010.

LANCZOS, Cornelius. **The variational principles of mechanics.** [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

MARTIENSSEN, Werner; WARLIMONT, Hans. **Springer handbook of condensed matter and materials data.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

MENDONÇA, Paulo de Tarso R. 4-D for elastodynamic in highly heterogeneous materials by the Proper Generalized Decomposition (PGD) - times continuous formulation. UFSC, 2017.

MENDONÇA, Paulo de Tarso R. **Materiais compostos e estruturas-sanduíche: projeto e análise.** [S.l.]: Manole, 2005.

MENDONÇA, Paulo de Tarso R.; FANCELLO, Eduardo A. **O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos.** [S.l.]: Orsa Maggiore, 2019.

MICHELSON, Albert A; STRATTON, Samuel Wesley. VI. A new harmonic analyser. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 45, n. 272, p. 85–91, 1898.

MOTT, M; EVANS, JRG. Zirconia/alumina functionally graded material made by ceramic ink jet printing. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 271, n. 1-2, p. 344–352, 1999.

- NOUY, Anthony. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 196, n. 45-48, p. 4521–4537, 2007.
- NOUY, Anthony. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 23-24, p. 1603–1626, 2010.
- NOUY, Anthony; LADEVÈZE, Pierre. Multiscale computational strategy with time and space homogenization: a radial-type approximation technique for solving microproblems. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, Begel House Inc., v. 2, n. 4, 2004.
- PRULIERE, Etienne; CHINESTA, Francisco; AMMAR, Amine. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. **Mathematics and Computers in Simulation**, Elsevier, v. 81, n. 4, p. 791–810, 2010.
- REDDY, JN. Analysis of functionally graded plates. **International Journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 47, n. 1-3, p. 663–684, 2000.
- TIAN, JH; JIANG, K. Heat conduction investigation of functionally graded material plates under the exponential heat source load. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, Taylor & Francis, v. 72, n. 2, p. 141–152, 2017.
- VATANABE, SL; RUBIO, WM; SILVA, ECN. Modeling of functionally graded materials. Elsevier, 2014.
- WANG, Jiwen; SHAW, Leon L. Fabrication of functionally graded materials via inkjet color printing. **Journal of the American Ceramic Society**, Wiley Online Library, v. 89, n. 10, p. 3285–3289, 2006.
- WILLIAMSON, RL; RABIN, BH; DRAKE, JT. Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects. **Journal of Applied Physics**, American Institute of Physics, v. 74, n. 2, p. 1310–1320, 1993.
- ZHU, Jingchuan *et al.* Fabrication of ZrO<sub>2</sub>–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. **Materials chemistry and physics**, Elsevier, v. 68, n. 1-3, p. 130–135, 2001.

## APÊNDICE A – TAXA DE CONVERGÊNCIA

Todas as taxas de convergências dos gráficos apresentados ao longo do texto foram calculadas a partir da curva de convergência. Em todos os gráficos foram exibidas as curvas de convergência juntamente com a equação que rege esta curva.

No geral, as equações seguem a forma

$$y = e^{\alpha \ln(x) + \beta}, \quad (123)$$

rearranjando a Equação 123, temos

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \alpha \ln(x) + \beta, \text{ onde } \beta = \ln(b), \text{ logo} \\ \ln(y) &= \alpha \ln(x) + \ln(b). \end{aligned} \quad (124)$$

Definimos  $\ln(x) = u$  e  $\ln(y) = v$ . Substituindo então em 124 e rearranjando têm-se

$$\begin{aligned} v &= \alpha u + \ln(b), \\ v &= \alpha u + \beta. \end{aligned} \quad (125)$$

Está é a equação da reta. Podemos então observar que a inclinação da curva de convergência é o  $\alpha$ , ou seja, é o coeficiente que acompanha o  $\ln(x)$  na Equação 123.

Em suma, podemos utilizar qualquer uma das relações das curvas de convergência apresentadas, que seguem a forma 123, e obtêm-se a taxa de convergência a partir do valor de  $\alpha$ .