



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TAISA BEATRIZ PACHECO GREIN

**MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS PARA A SOLUÇÃO
DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS COM ACOPLAMENTO
GEOMECÂNICO**

FLORIANÓPOLIS

2019

Taisa Beatriz Pacheco Grein

**MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS PARA A SOLUÇÃO DO
ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS COM ACOPLAMENTO GEOMECÂNICO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós Graduação
em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Grein, Taisa Beatriz Pacheco Grein

Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos para a
solução do escoamento bifásico em meios porosos com
acoplamento geomecânico / Taisa Beatriz Pacheco Grein Grein
; orientador, Clovis Raimundo Maliska Maliska, 2019.

135 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Geomecânica. 3. Escoamento
bifásico. 4. EbFVM. 5. Malhas não estruturadas híbridas. I.
Maliska, Clovis Raimundo Maliska. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. III. Título.

Taisa Beatriz Pacheco Grein

**Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos para a solução do escoamento
bifásico em meios porosos com acoplamento geomecânico**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Clovis R. Maliska, Ph.D.

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jader R. Barbosa Jr., Ph.D.

Universidade Federal de Santa Catarina

Fernando S. V. Hurtado, Dr. Eng.

Engineering Simulation & Scientific Software

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado
adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Jonny Carlos da Silva, Dr. Eng.
Coordenador do Programa

Prof. Clovis R. Maliska, Ph.D.
Orientador

Florianópolis, 12 de Dezembro de 2019.

Ao Ederson, ao Pedro e a Deus,
que me dão forças todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu marido Ederson por todo carinho e por todos os ensinamentos pessoais e profissionais, sem os quais este trabalho não se concretizaria. Agradeço também ao meu filho Pedro, o qual mesmo antes de nascer já foi capaz de transmitir muita força para que eu pudesse continuar. Agradeço profundamente aos meus pais Sérgio e Tânia, por todos os ensinamentos e incentivo à educação. Também à minha irmã Carina, a qual sempre foi um exemplo pra mim, e ao meu irmão Rodrigo.

Agradeço especialmente ao professor Clovis Maliska, por ter dado a mim a oportunidade de trabalhar sob sua orientação, por confiar em mim e por todo o apoio e empatia transmitidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Também ao professor Antônio Fábio Carvalho da Silva, que foi muito importante na fase de capacitação para o desenvolvimento desta dissertação e à Tatiata, que sempre esteve por perto dando suporte.

Agradeço aos amigos e colegas de trabalho do laboratório SINMEC, em especial à Josiane, cuja amizade e prestatividade fizeram com que o meu caminho fosse mais leve e feliz. Também a todos os amigos da universidade que não foram citados. À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Departamento de Engenharia Mecânica, pela excelência do curso oferecido. Ainda, ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor – SINMEC – pelo ambiente de trabalho e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – pelo apoio financeiro. E, por fim, porém de extrema importância, agradeço muito à Deus.

“Everybody’s gotta learn, nobody’s born knowin’ ”
(HARPER LEE, 1960, p.43)

RESUMO

A simulação numérica é uma ferramenta de extrema importância à indústria de óleo e gás. Para que seus resultados sejam fidedignos é essencial o emprego de modelos físicos fiéis e de uma boa caracterização geométrica do reservatório. Nesse contexto, verifica-se a importância do comportamento mecânico de formações geológicas, conhecido como geomecânica. Esta dissertação apresenta uma metodologia numérica unificada para a solução acoplada do escoamento bifásico e da geomecânica. Nessa metodologia, tanto o escoamento quanto a geomecânica são resolvidos utilizando uma única malha e um único método numérico: o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM). Usualmente, essas equações são resolvidas empregando técnicas distintas – geralmente o Método dos Elementos Finitos (FEM) para o problema geomecânico e o Método dos Volumes Finitos (FVM) para o problema do escoamento. A principal vantagem em utilizar uma metodologia unificada está na dispensa da necessidade de interpolação entre malhas distintas. Além disso, o EbFVM é um Método dos Volumes Finitos, de forma que é conservativo em níveis discretos, característica indispensável aos problemas de escoamento. Esse método tem ainda um potencial de representação geométrica bastante acurado, sobretudo com o emprego de malhas não estruturadas híbridas. A estratégia de acoplamento sequencial *two-way* é empregada na solução das equações *i.e.*, os módulos de escoamento e geomecânico são resolvidos separadamente até o alcance da convergência. As equações não-lineares do modelo de escoamento são resolvidas utilizando o método de Newton. São apresentados a validação da metodologia proposta e alguns problemas teste para demonstrar a abrangência e as potencialidades do método na área de simulação de reservatórios.

Palavras-chave: Geomecânica. Escoamento bifásico. EbFVM. Malhas não estruturadas híbridas.

ABSTRACT

Numerical simulation stands as an extremely important tool to the oil and gas industry. In order to achieve reliability from the numerical results, it is essential to employ reliable numerical models and an accurate geometrical characterization of the reservoir. In this context, it is important to consider the mechanical behaviour of geological formations, as known as geomechanics. This study presents a unified numerical methodology for coupled two-phase flow and geomechanics solution. In this methodology, both flow and geomechanical models are solved by employing a single grid and a single numerical method: the Element based Finite Volume Method (EbFVM). These equations are usually solved by using different techniques – commonly the Finite Element Method (FEM) for the structural problem and the Finite Volume Method for fluid-flow equations. The main advantage in employing a unified technique lies in avoiding interpolation between distinct numerical grids. Besides, EbFVM is a Finite Volume Method. It is therefore conservative in discrete levels, which is an imperative feature for solving fluid-flow problems. EbFVM also provides a great potential regarding geometrical representation, notably achieved by using unstructured hybrid grids. The two-way coupling technique is used to solve the discretized set of equations, in which the equations of each phenomenon are solved separately, iterating until convergence. Non-linear fluid-flow equations are solved with Newton's Method. The proposed methodology is validated and then some test cases are presented with the aim of showing both comprehensiveness and potentiality of the method in numerical reservoir simulation.

Keywords: Geomechanics. Two-phase flow. EbFVM. Unstructured hybrid grids.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	Abordagem usual na solução do problema acoplado entre escoamento e geomecânica. a) Malha <i>corner-point</i> tipicamente utilizada para a solução do escoamento. b) Malha não estruturada tipicamente utilizada para a solução do problema geomecânico.c) Combinação de malhas distintas para resolver o problema acoplado.	2
Figura 1.2	Proposta de utilizar EbFVM como método único na solução do problema acoplado escoamento-geomecânica	3
Figura 2.1	Volume de controle em um meio poroso	13
Figura 3.1	Potencial geométrico da malha não-estruturada	21
Figura 3.2	Principais entidades de um elemento triangular	22
Figura 3.3	Construção do volume de controle	23
Figura 3.4	Mapeamento para um espaço transformado	23
Figura 3.5	Estêncil associado ao nó \mathcal{P}	27
Figura 3.6	Fluxograma do método de acoplamento simultâneo ou monolítico . .	34
Figura 3.7	Fluxograma do método de acoplamento sequencial em uma direção .	34
Figura 3.8	Fluxograma do método de acoplamento sequencial em duas direções	35
Figura 3.9	Fluxograma do método de acoplamento sequencial em duas direções tipo <i>fixed-stress</i>	36
Figura 4.1	Fluxograma de informações	37
Figura 4.2	Volume de controle adjacente ao contorno	40
Figura 4.3	Método de Newton para funções de uma variável	43
Figura 5.1	Configuração do problema de Buckley-Leverett	51
Figura 5.2	Curvas de permeabilidade e fluxo fracionário. a) Curva de permeabilidade relativa em função da saturação. b) Curva de fluxo fracionário em função da saturação.	52
Figura 5.3	Malhas bidimensionais não-estruturadas utilizadas na solução do problema de Buckley-Leverett	53

Figura 5.4	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha mais grosseira (M1)	54
Figura 5.5	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha intermediária (M2)	54
Figura 5.6	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha mais refinada (M3)	55
Figura 5.7	Campos de saturação e pressão obtidos com a malha M3	55
Figura 5.8	Configuração do problema de Terzaghi	56
Figura 5.9	Malhas bidimensionais não-estruturadas híbridas utilizadas na solução do problema de Terzaghi	58
Figura 5.10	Resultados obtidos para perfis de pressão em diferentes tempo utilizando a malha mais grosseira (M4) e $\Delta t = 0,1s$	60
Figura 5.11	Resultados obtidos para perfis de deslocamento vertical em diferentes tempo utilizando a malha mais grosseira (M4) e $\Delta t = 0,1s$	60
Figura 5.12	Resultados obtidos para a pressão na base da coluna ao longo do tempo empregando as malhas M4, M5, M6 e M7	61
Figura 5.13	Resultados obtidos para o deslocamento vertical no topo da coluna ao longo do tempo empregando as malhas M4, M5, M6 e M7	61
Figura 5.14	Campo de pressão obtido com a malha mais refinada (M7) para os instantes de tempo de 10, 100, 400, 800 e 1600s	62
Figura 5.15	Campo de deslocamento vertical obtido com a malha mais refinada (M7) para os instantes de tempo de 10, 100, 400, 800 e 1600s	62
Figura 5.16	Configuração do problema de acoplamento hidromecânico	63
Figura 5.17	Malha bidimensional não-estruturada utilizada na solução do problema de acoplamento hidromecânico	66
Figura 5.18	Perfis de saturação no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo da linha média $y = 25m$	67
Figura 5.19	Perfis de pressão no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo da linha média $y = 25m$	68

Figura 5.20 Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo do topo $y = 50\text{m}$	68
Figura 5.21 Perfis de saturação no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	69
Figura 5.22 Perfis de pressão no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	70
Figura 5.23 Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$	70
Figura 5.24 Perfis de saturação no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	71
Figura 5.25 Perfis de pressão no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	72
Figura 5.26 Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$	72
Figura 5.27 Perfis de saturação no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	73
Figura 5.28 Perfis de pressão no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$	74
Figura 5.29 Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$	74
Figura 5.30 Taxa de produção de óleo ao longo do tempo	76
Figura 5.31 Produção de óleo acumulada ao longo do tempo	76
Figura 5.32 Campo de saturação e pressão para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias	77
Figura 5.33 Campo de deslocamentos horizontal e vertical para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias	78
Figura 5.34 Campo de porosidade e permeabilidade absoluta para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias	78
Figura 5.35 Domínio tridimensional e trajetória do poço	79
Figura 5.36 Configuração do problema tridimensional	80

Figura 5.37 Malha tridimensional não estruturada híbrida utilizada na solução do problema tridimensional	83
Figura 5.38 Campos médios de saturação de água e pressão ao longo do domínio .	84
Figura 5.39 Deslocamento vertical médio ao longo do eixo z na fronteira superior do domínio	84
Figura 5.40 Vazão volumétrica de água e óleo no poço produtor durante a produção primária	85
Figura 5.41 Vazão volumétrica de água e óleo no poço produtor durante a produção secundária	86
Figura 5.42 Volume produzido de água e óleo no poço produtor ao longo do tempo	86
Figura 5.43 Evolução temporal do campo de saturação de água no contorno exterior do domínio	87
Figura 5.44 Evolução temporal do campo de pressão no contorno exterior do domínio	88
Figura 5.45 Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo x no contorno exterior do domínio	89
Figura 5.46 Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo y no contorno exterior do domínio	90
Figura 5.47 Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo z no contorno exterior do domínio	91
Figura 5.48 Campo de saturação em um plano de corte próximo ao poço	92
Figura 5.49 Campo de pressão em um plano de corte próximo ao poço	93
Figura 5.50 Campo de deslocamento ao longo do eixo z em um plano de corte próximo ao poço	94
Figura B.1 Configuração da malha em torno a um elemento de poço	108
Figura B.2 Volume de controle que contém uma porção de um poço formada pela união das metades de elementos de poços adjacentes	108
Figura B.3 Domínio e fronteiras para o problema auxiliar	110
Figura B.4 Esquema do arranjo de elementos de poço e volumes de controle ao longo de um poço	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Dados de entrada para o problema de Buckley-Leverett	52
Tabela 5.2	Conjunto de malhas bidimensionais não-estruturadas triangulares . .	53
Tabela 5.3	Dados de entrada para o problema de Terzaghi	58
Tabela 5.4	Conjunto de malhas bidimensionais não-estruturadas híbridas	59
Tabela 5.5	Dados de entrada para o problema de acoplamento hidromecânico . .	65
Tabela 5.6	Conjunto de casos considerados na solução do acoplamento hidro- mecânico	66
Tabela 5.7	Produção acumulada de óleo ao final de 3000 dias de simulação do problema de acoplamento hidromecânico	75
Tabela 5.8	Dados de entrada para o problema de tridimensional	82

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

(x, y, z)	Coordenadas globais	m
\mathcal{N}_f	Vetor de funções de forma avaliado na face f	
$\check{\mathcal{D}}$	Tensor rigidez	Pa
Δt	Passo de tempo	s
$\Delta V_{\mathcal{P}}$	Volume do volume de controle associado ao nó \mathcal{P}	m^3
$\Delta \mathbf{A}_f$	Vetor área associado à face f	m^2
$\Delta \mathbf{x}_k$	Vetor incremento da solução da k -ésima iteração do método de Newton	
\dot{m}_f	Fluxo de massa que atravessa uma face f do volume de controle	kg s^{-1}
$\check{\mathbf{I}}$	Tensor identidade	
$\hat{\mathbf{e}}_j$	Vetor unitário com a componente j unitária	
\mathcal{N}_i	Função de forma do i -ésimo vértice do elemento	
$\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$	Conjunto dos elementos que compartilham o nó \mathcal{P}	
$\mathcal{F}^{\mathcal{P}}$	Conjunto das faces do volume de controle associado ao nó \mathcal{P}	
\mathcal{M}	Malha	
\mathcal{N}^e	Conjunto dos nós associados ao elemento e	
$\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$	Estêncil associado ao nó \mathcal{P}	
$\check{\mathbf{K}}$	Tensor permeabilidade absoluta do meio	m^2
\mathbf{g}	Vetor gravidade	m s^{-2}
\mathbf{P}_e	Vetor de pressões nos nós do elemento que contém a face f	Pa
\mathbf{R}	Função resíduo	

\mathbf{u}^s	Vetor de deslocamento do sólido	m
\mathbf{v}	Velocidade do fluido	m s^{-1}
\mathbf{v}^p	Velocidade da fase p	m s^{-1}
\mathbf{v}^s	Vetor velocidade do sólido	m s^{-1}
\mathbf{v}^{ps}	Velocidade relativa entre a fase p e o sólido	m s^{-1}
\mathbf{V}_D^p	Velocidade de Darcy da fase p	m s^{-1}
\mathbf{x}	Vetor posição	m
\mathbf{x}_k	Vetor solução da k -ésima iteração do método de Newton	
WI	Índice de poço	m^3
B^p	Fator volume de formação da fase p	
C^f	Compressibilidade do fluido	Pa^{-1}
C^p	Compressibilidade da fase p	Pa^{-1}
C_0	Constante empírica da relação de Kozeny-Carman	
C_b	Compressibilidade <i>bulk</i>	Pa^{-1}
C_s	Compressibilidade do sólido	Pa^{-1}
E	Módulo de elasticidade	Pa
e_i	i -ésimo elemento da malha	
F	Termo fonte	
F_f	Fluxo fracionário	
G	Módulo de elasticidade transversal	Pa
J	Matriz jacobiana	
$J^{-1}D$	Operador gradiente discreto	m^{-1}
K	Valor representativo do tensor esférico permeabilidade absoluta do meio	m^2

k_r^p	Permeabilidade relativa da fase p	
M_p	Massa contida no volume de controle associado ao nó \mathcal{P}	kg
M_s	Constante empírica da relação de Kozeny-Carman	m^{-2}
n^p	Expoente de Corey para a fase p	
n_v	Número de vértices do elemento	
p	Pressão de poro	Pa
p^p	Pressão da fase p	Pa
p_c	Pressão capilar	Pa
Q	Vazão volumétrica de fluido	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
Q^p	Taxa de geração ou extinção de massa da fase p por unidade de volume	$\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$
Q^p	Vazão volumétrica da fase p	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
q^p	Taxa de geração ou extinção do volume da fase p por unidade de volume	s^{-1}
S^p	Saturação da fase p	
t_{final}	Tempo final da simulação	s
u	Deslocamento do sólido ao longo da direção x	m
v	Deslocamento do sólido ao longo da direção y	m
v^T	Velocidade total	m s^{-1}
w	Deslocamento do sólido ao longo da direção z	m

Símbolos Gregos

(ξ, η, ζ)	Coordenadas locais	m
α	Coefficiente de Biot	
α^p	Multiplicador de Corey para a fase p	

β	Compressibilidade	Pa^{-1}
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker	
ϵ	Perturbação na variável do método de Newton	Pa
Γ	Coefficiente difusivo	
λ^p	Mobilidade da fase p	$\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}$
λ_l	Segunda constante de Lamè	Pa
μ^p	Viscosidade da fase p	Pa s
μ_l	Primeira constante de Lamè	Pa
ν	Coefficiente de Poisson	
Ω	Domínio fechado	
$\overline{\psi}_p$	Média do valor de ψ em \mathcal{P}	
ϕ	Porosidade do meio	
ψ	Função definida nos nós de uma malha	
Ψ_e	Vetor com os valores de ψ nos nós do elemento	
ρ	Densidade média do meio	kgm^{-3}
ρ^f	Densidade média do fluido	kgm^{-3}
ρ^p	Densidade da fase p	kgm^{-3}
ρ^s	Densidade média do sólido	kgm^{-3}
$\check{\sigma}'$	Tensor de tensões efetivas	Pa
σ_v	Tensão total volumétrica	Pa
$\check{\sigma}$	Tensor tensão total	Pa
$\check{\epsilon}$	Tensor deformação	
Υ	Função potencial gravitacional	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
ϵ_v	Deformação volumétrica	

Subíndices

0	Inicial
\mathcal{P}	Nó da malha
e	Elemento
f	Face
f_e	Face externa
f_i	Face interna
i	Índice da linha da matriz jacobiana
j	Índice da coluna da matriz jacobiana
k	Índice da iteração do método de Newton
r	Relativo
acc	Acumulação
ew	Elemento de poço
flux	Fluxo
fon	Fonte
max	Máximo
min	Mínimo
pr	Produção
pres	Pressão
ten	Tensão total volumétrica
well	Poço

Superíndices

b	<i>Bulk</i>
o	Óleo

p	Fase p
r	Referência
s	Sólido
w	Água
old	Antigo
STD	Condições padrão de temperatura e pressão

Operadores Matemáticos

$\nabla \cdot \check{\mathbf{T}}$	Divergente de um tensor $\check{\mathbf{T}}$
$\nabla \cdot \mathbf{v}$	Divergente de um vetor \mathbf{v}
$\nabla \mathbf{v}$	Gradiente de um vetor \mathbf{v}
∇f	Gradiente de um escalar f
$\text{tr}(\check{\mathbf{T}})$	Traço de um tensor $\check{\mathbf{T}}$
$\check{\mathbf{T}}_a : \check{\mathbf{T}}_a$	Contração tensorial entre $\check{\mathbf{T}}_a$ e $\check{\mathbf{T}}_a$

Abreviações

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
EbFVM	<i>Element-based Finite Volume Method</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FVM	<i>Finite Volume Method</i>
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>
VPI	Volume Poroso Injetado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	O PROBLEMA GEOMECÂNICO	1
1.2	O PROBLEMA ACOPLADO ESCOAMENTO-GEOMECÂNICA	1
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
1.3.1	Teoria matemática da geomecânica	4
1.3.2	Solução do escoamento monofásico com geomecânica	4
1.3.3	Solução do escoamento bifásico com geomecânica	6
1.4	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES	8
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	9
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	10
2.1	MODELO GEOMECÂNICO	10
2.1.1	Equilíbrio de forças	11
2.1.2	Equação constitutiva	11
2.2	MODELO DE ESCOAMENTO	12
2.2.1	Balanço de massa da fase sólida	12
2.2.2	Balanço de massa de uma fase fluida	13
2.3	SUMÁRIO DAS EQUAÇÕES	18
3	ABORDAGEM NUMÉRICA	20
3.1	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS	20
3.1.1	Entidades geométricas da malha	21
3.1.2	Transformação de coordenadas	23
3.1.3	Aproximação do gradiente	24
3.1.4	Discretização de uma equação de conservação de uma variável genérica	25
3.2	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES MODELO	28

3.2.1 Modelo geomecânico	28
3.2.2 Modelo de escoamento	30
3.2.3 Sumário das equações discretizadas	32
3.3 ACOPLAMENTO NUMÉRICO	33
4 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES	37
4.1 MÓDULO GEOMECÂNICO	38
4.1.1 Aplicação das condições de contorno	40
4.1.2 Cálculo da deformação e tensão total volumétricas	41
4.2 MÓDULO DE ESCOAMENTO	42
4.2.1 Método de Newton	42
4.2.2 Cômputo do vetor de resíduos	46
4.2.3 Cômputo da matriz jacobiana	47
4.3 ACOPLAMENTO ENTRE OS MÓDULOS DE GEOMECÂNICA E DE ESCOAMENTO	49
5 RESULTADOS	50
5.1 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT	50
5.1.1 Malhas empregadas	52
5.1.2 Resultados obtidos	53
5.2 PROBLEMA DE TERZAGHI	56
5.2.1 Malhas empregadas	58
5.2.2 Resultados obtidos	59
5.3 SIMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO HIDROMECAÂNICO	63
5.3.1 Malhas utilizadas	65
5.3.2 Resultados obtidos	66
5.4 DESLOCAMENTO TRIDIMENSIONAL EM MALHA HÍBRIDA	79
5.4.1 Malha utilizada	82
5.4.2 Resultados obtidos	83

6	CONCLUSÕES	95
6.1	SUMÁRIO E CONCLUSÕES	95
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	97
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A - SOLUÇÕES ANALÍTICAS	103
A.1	PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT	104
A.2	PROBLEMA DE TERZAGHI	105
	APÊNDICE B – MODELO DE POÇO	107
B.1	DETERMINAÇÃO DOS ÍNDICES DE POÇO	109

1 INTRODUÇÃO

1.1 O PROBLEMA GEOMECÂNICO

O comportamento mecânico de formações geológicas é conhecido como geomecânica. Dentre os fenômenos físicos envolvidos na exploração de reservas petrolíferas, os efeitos geomecânicos têm sido objeto de crescente interesse devido ao seu alto poder de influência na produção de petróleo, na manutenção da integridade física do reservatório e no estudo de danos em poços. A exploração de reservatórios induz o surgimento de gradientes de pressão os quais se estabelecem por toda a rocha reservatório. Essa condição provoca um desequilíbrio de forças que pode causar deslocamentos significativos na rocha e, por conseguinte, influenciar a produção.

O campo de tensões induzido no reservatório devido ao escoamento de hidrocarbonetos pode ocasionar situações desfavoráveis à atividade de exploração da reserva. Dentre eles, podem ser citados como exemplos danos à integridade física dos poços, reativação de falhas geológicas, compactação da rocha-reservatório, subsidência na superfície e atividade sísmica induzida. Por outro lado, os efeitos geomecânicos podem apresentar consequências positivas. É o caso do fraturamento hidráulico, uma técnica amplamente utilizada em reservatórios de baixa permeabilidade e que consiste em induzir fraturas em regiões próximas ao poço. De qualquer forma, é evidente a necessidade de entender e controlar o comportamento mecânico de formações geológicas a fim de explorar seus efeitos positivos e evitar situações em que esse comportamento compromete a produção petrolífera. Devido à dificuldade de reproduzir esse problema em experimentos de laboratório ou de realizar medições em altas pressões e profundidades, a simulação numérica ascende como uma das ferramentas mais importantes de que os engenheiros e geólogos dispõem para prever a influência dos efeitos geomecânicos na produção.

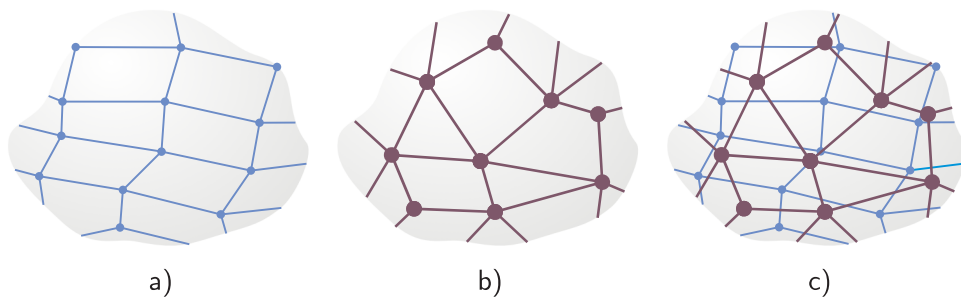
1.2 O PROBLEMA ACOPLADO ESCOAMENTO-GEOMECÂNICA

Tradicionalmente, o desenvolvimento de simuladores de reservatório concentrou esforços na solução de escoamentos multifásicos em meios porosos. Uma vez que, em problemas de escoamento de fluidos, a conservação da massa em nível discreto é de extrema importância para qualidade dos resultados, e essa é justamente a premissa básica do Método dos Volumes Finitos (FVM), tem-se um uso bastante intensivo do FVM em simulado-

res de reservatório comerciais e acadêmicos. Além disso, as malhas do tipo *corner-point* também conquistaram espaço nessa área devido à sua facilidade de construção e economia de recursos computacionais. Sendo assim, o Método dos Volumes Finitos empregando malhas *corner-point* configura o cenário predominante em simuladores de reservatórios.

Já os problemas de mecânica dos sólidos, os quais contemplam os problemas geomecânicos, são tradicionalmente resolvidos por meio do Método dos Elementos Finitos (FEM), que é naturalmente aplicável a malhas não estruturadas. Nesse tipo de malha as incógnitas são armazenadas nos nós, ao passo que em malhas *corner-point* as pressões e saturações estão localizadas no centroide das células. Logo, a solução tradicional acoplada do problema escoamento-geomecânica apresenta algumas dificuldades na obtenção de bons resultados. Em primeiro lugar, tem-se a complexidade de implementação de dois métodos distintos e adaptação das formulações numéricas para que essas sejam eficazes como um conjunto. Além disso, tratar separadamente, e em duas malhas computacionais distintas, dois problemas que são naturalmente acoplados e que estão definidos em um mesmo domínio físico ocasiona a necessidade adicional de interpolar dados entre as malhas, conforme ilustrado na figura 1.1. Tem-se assim uma fonte extra de erros numéricos e um incremento do custo computacional.

Figura 1.1: Abordagem usual na solução do problema acoplado entre escoamento e geomecânica. a) Malha *corner-point* tipicamente utilizada para a solução do escoamento. b) Malha não estruturada tipicamente utilizada para a solução do problema geomecânico. c) Combinação de malhas distintas para resolver o problema acoplado.



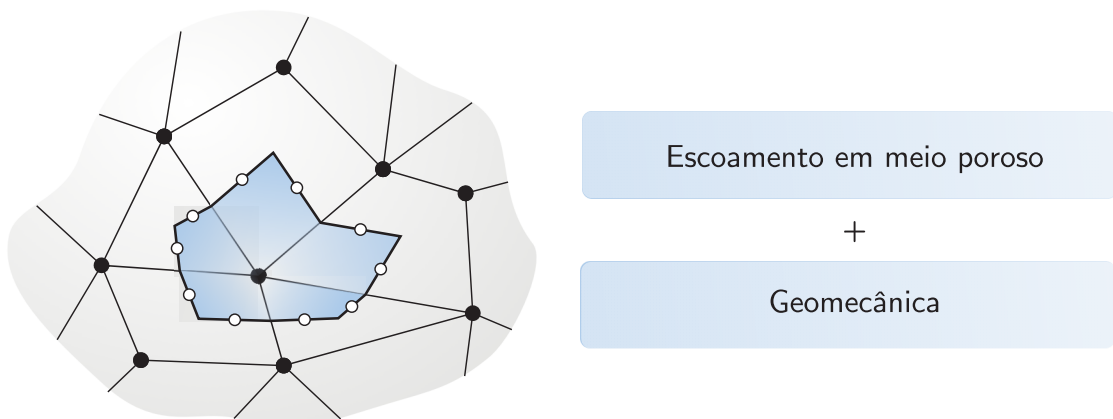
Fonte: do autor

Fica evidente, portanto, a necessidade de um esquema numérico que, além de permitir o uso de uma única malha computacional, apresente um bom desempenho para a solução de escoamentos multifásicos em meios porosos e de problemas de mecânica dos sólidos. Nesse contexto, diversos autores propuseram utilizar o Método dos Elementos Finitos como método único para resolver o problema acoplado entre escoamento e geomecânica (Chin *et al.*, 2000a,b, Ferronato *et al.*, 2010, Gai, 2004, Gutierrez & Lewis, 2002,

Gutierrez *et al.*, 1998, 2001, Mendes, 2008, Minkoff *et al.*, 2003, Murad *et al.*, 2012, White, 2009, Yang *et al.*, 2014). De fato, o FEM é a escolha natural para a solução da geomecânica e fornece excelentes resultados. Em problemas de escoamento, entretanto, além de não preservar a conservação da massa em nível discreto, o Método dos Elementos Finitos apresenta algumas dificuldades para tratar os termos hiperbólicos da equação da saturação. Esses problemas são facilmente contornados pela utilização do Método dos Volumes Finitos.

Neste trabalho almeja-se aplicar o EbFVM como metodologia única de solução do problema acoplado escoamento bifásico-geomecânica, conforme ilustrado na figura 1.2. Além de eliminar as dificuldades provenientes da utilização de duas formulações distintas, ter-se-á, assim, a garantia da conservação da massa e do balanço de forças em níveis discretos e um adequado tratamento de termos hiperbólicos da equação, o que é fundamental para a obtenção de soluções estáveis em problemas de escoamento bifásico. Ademais, dar-se-á seguimento ao trabalho de Ribeiro (2016), o qual utilizou EbFVM como método único para a solução do problema acoplado escoamento monofásico-geomecânica. Este trabalho pretende considerar agora o modelo de escoamento bifásico – o modelo mais básico que leva em conta os efeitos mais significativos ao fenômeno físico (Aziz & Settari, 1979).

Figura 1.2: Proposta de utilizar EbFVM como método único na solução do problema acoplado escoamento-geomecânica



Fonte: do autor

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Apresentar-se-á primeiramente, na revisão bibliográfica, os trabalhos que identificaram a importância da geomecânica no escoamento em meios porosos e os desenvolvimentos iniciais de sua teoria matemática. Posteriormente, discorrer-se-á brevemente sobre como o problema acoplado entre escoamento monofásico e geomecânica tem sido resolvido na literatura. A partir desse panorama geral bem consolidado o entendimento da revisão bibliográfica do problema acoplado entre escoamento bifásico e geomecânica pode ser alcançado com mais facilidade. Apresentar-se-á, então, como a teoria matemática da geomecânica foi estendida para abranger escoamentos multifásicos e, por fim, como o problema acoplado entre escoamento bifásico e geomecânica tem sido resolvido na literatura.

1.3.1 Teoria matemática da geomecânica

A solução numérica do escoamento em meios porosos é crucial às simulações numéricas realizadas na área de engenharia de reservatórios. Ainda que o efeito geomecânico tenha significativa importância nos resultados obtidos, seus efeitos foram tradicionalmente tratados com demasiada simplificação. Esse tratamento simplificado consiste em considerar que a porosidade do meio varia em função da pressão de poro e de uma porosidade de referência (Aziz & Settari, 1979, Mattax & Dalton, 1990, Peaceman, 1977). Essa prática é, evidentemente, inadequada, tendo em vista que as propriedades variam de acordo com o estado de tensões da rocha e com o movimento dos grãos que a compõem (Chin *et al.*, 2000a). Por outro lado, apesar de tradicionalmente negligenciada a teoria matemática da geomecânica já tinha sido consolidada nos anos 40 com a teoria da poroelasticidade (Biot, 1941) e com o conceito de tensões efetivas (Terzaghi, 1943).

1.3.2 Solução do escoamento monofásico com geomecânica

A teoria matemática da geomecânica e a identificação da importância dos efeitos geomecânicos na solução de escoamento em meios porosos (Chin *et al.*, 2000a) motivaram um crescente interesse em resolver o problema acoplado entre o escoamento de um fluido em um meio poroso e a deformação desse meio. Nas últimas décadas, muitos trabalhos foram realizados com o intuito de considerar o acoplamento entre a fenomenologia do

escoamento e os efeitos provenientes da deformabilidade da rocha. Muitos desses trabalhos propuseram acoplar algoritmos de elementos finitos para o problema geomecânico a simuladores de reservatórios comerciais (Li *et al.*, 2006, Settari & Mourits, 1998, Settari & Walters, 1999). Outros propuseram estratégias similares porém utilizando algoritmos em diferenças finitas para a simulação do escoamento (Chin *et al.*, 2002, Ji *et al.*, 2006, 2009, Thomas *et al.*, 2003). Também houve tentativas de resolver tanto o escoamento quanto a geomecânica utilizando o método dos elementos finitos (FEM) como única metodologia numérica (Chin *et al.*, 2000a,b, Gutierrez & Lewis, 2002, Gutierrez *et al.*, 1998, 2001). Devido a eventuais oscilações nos campos de pressão encontradas ao resolver o escoamento utilizando FEM, alguns autores propuseram o acoplamento de algoritmos de elementos finitos mistos para a solução do escoamento a algoritmos de elementos finitos tradicionais para a solução do módulo geomecânico (Ferronato *et al.*, 2010, Gai, 2004, Lha & Juanes, 2007, Minkoff *et al.*, 2003, Yang *et al.*, 2014).

Não obstante o esforço empregado para resolver o problema acoplado de escoamento monofásico e geomecânica utilizando elementos finitos clássico para ambos os problemas ou combinando elementos finitos clássicos para o problema de geomecânica com elementos finitos mistos para a solução do escoamento, ainda é bastante usual acoplar um simulador em volumes finitos ou diferenças finitas para resolver o escoamento a um simulador em elementos finitos para resolver a geomecânica. É o caso dos principais simuladores comerciais de reservatório que possuem módulo geomecânico, como o STARS e o GEM da *Computer Modelling Group* e o ECLIPSE da *Schlumberger*. Essa forma de tratar separadamente dois problemas naturalmente acoplados e que estão definidos em um mesmo domínio físico ocasiona dificuldades como a complexidade de implementação de dois métodos distintos e adaptação das formulações para que essas sejam eficazes como um conjunto. Além disso, essa abordagem introduz uma fonte extra de erros numéricos, tendo em vista a necessidade de interpolação de dados entre malhas distintas.

Na última década foram realizados trabalhos em que o método dos volumes finitos (FVM) é o único método numérico adotado na solução do problema acoplado entre escoamento monofásico e geomecânica. Shaw & Stone (2005) acoplou um código em FVM que resolve deformação linear-elástica da rocha acoplada ao *software* ECLIPSE, o qual provê a solução das equações de fluxo. Bijelonja (2011) apresenta uma formulação em que um problema puramente estrutural de deformação elastoplástica é resolvido com volumes finitos empregando malhas poliédricas. Dal Pizzol & Maliska (2012), Dal Pizzol (2014) e Tonelli (2016) apresentaram a solução do problema acoplado de escoamento monofásico e deformação linear-elástica da rocha utilizando volumes finitos e arranjo desencontrado.

Ribeiro (2016) apresentou a solução do mesmo problema porém utilizando o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM), o qual possibilita a utilização de malhas não estruturadas com significativo potencial de representação geométrica acurada do domínio aliada a refinamentos locais de malha (LGR). Ribeiro (2016) mostrou que, quando escoamento monofásico é considerado, o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos apresenta as mesmas vantagens do Método dos Elementos Finitos para a solução do problema estrutural.

1.3.3 Solução do escoamento bifásico com geomecânica

Embora o princípio das tensões efetivas tenha sido bem estabelecido para o escoamento monofásico na década de 40, alguns anos se passaram sem que essa teoria fosse aplicada a escoamentos multifásicos. Bishop (1959) generalizou a forma do princípio das tensões efetivas de Terzaghi postulando a dependência do coeficiente de Biot-Willis com a saturação. Dentre as propostas de modificação da teoria de Bishop destaca-se o trabalho de Fredlund & Morgenstern (1977), o qual propõe uma dependência da deformação da matriz porosa em duas variáveis termodinamicamente independentes: a tensão líquida, definida pela diferença entre a tensão total e a pressão do ar, e a pressão capilar. Essa proposta representou um avanço significativo no desenvolvimento de relações constitutivas entre tensão e deformação para meios porosos não saturados (Fredlund & Rahardjo, 1993).

O princípio de Terzaghi estendido para escoamentos multifásicos conjuntamente com as equações de fluxo compõem o sistema de equações modelo do problema acoplado de escoamento multifásico e geomecânica. Devido a características bastante distintas entre as equações que modelam cada um dos fenômenos, o conjunto de equações é usualmente segmentado em dois subsistemas – um correspondente às equações de fluxo; outro, às equações de deformação da rocha (Chavent & Jaffré, 1986). Utilizar uma metodologia acurada para tratar o acoplamento entre esses dois subsistemas é imprescindível à obtenção de resultados aceitáveis, tendo em vista que o problema é naturalmente acoplado, isto é, os efeitos do escoamento e da geomecânica não apenas se dão simultaneamente e em um mesmo domínio, mas também interferem uns nos outros.

Friedrich *et al.* (2000) apresenta um procedimento para obter a solução em volumes finitos para escoamento bifásico ou trifásico utilizando o *software* MORE e para obter a solução do problema geomecânico para grandes deformações utilizando o método dos elementos finitos implementado no código JAS3D. Nesse caso é proposto um acoplamento do

tipo iterativo em uma direção ou *one-way coupling*. Gutierrez *et al.* (2001) formula o equacionamento do problema acoplado entre a geomecânica e o escoamento bifásico imiscível e isotérmico. Os resultados apresentados no trabalho, contudo, são mais gerais: consideram o modelo black-oil 3D para o escoamento e a rocha é modelada com modelos constitutivos linear elástico e elastoplástico. O sistema de equações é resolvido de forma simultânea utilizando o método dos elementos finitos. Wan (2002) resolve o problema acoplado entre escoamento bifásico e geomecânica utilizando duas abordagens diferentes. Uma delas consiste em utilizar FEM para discretizar as equações da geomecânica e a conservação da massa total e FVM utilizando o esquema *upwind* para a conservação da massa da água. Na segunda abordagem, o autor propõe utilizar FEM estabilizado para o balanço de forças e conservação da massa total e EbFVM com o esquema *upwind* para a conservação da massa da água a fim de contornar os problemas de instabilidade numérica e oscilações da pressão encontradas na primeira abordagem. O modelo constitutivo considerado é linear elástico. As equações são resolvidas de forma simultânea. Shaw & Stone (2005) apresentaram um esquema em que o método dos volumes finitos é a metodologia única empregada na solução do problema acoplado entre escoamento em geomecânica. Para as equações do escoamento, foi utilizado o *software* ECLIPSE. As equações da geomecânica foram implementadas considerando que a deformação da rocha é linear elástica. As equações são resolvidas de forma simultânea aplicando o método de Newton. O procedimento apresentado no trabalho de Shaw & Stone (2005) foi patenteado no ano seguinte (Shaw, 2006). Mendes (2008) apresenta a solução do problema acoplado entre escoamento bifásico imiscível e geomecânica utilizando o método dos elementos finitos. O autor propõe o desenvolvimento de métodos numéricos para a computação da velocidade de Darcy baseados em técnicas de pós-processamento de Petrov-Galerkin em conjunção com métodos localmente conservativos para a equação de conservação da massa. Nesse trabalho, o autor considera a deformação linear elástica da rocha e utiliza um acoplamento do tipo sequencial. O foco do trabalho é considerar meios porosos altamente heterogêneos. White (2009) propõe utilizar elementos finitos mistos estabilizados para a solução simultânea do sistema de equações obtidas ao modelar escoamento bifásico em um meio poroso deformável. A deformação da rocha é considerada elastoplástica. O autor salienta que o sistema de equações é bastante mal condicionado quando deseja-se resolvê-lo de forma simultânea. O trabalho propõe um pré-condicionador estruturado em blocos específico para este problema. Pettersen (2012) propõe resolver de forma segregada o acoplamento entre escoamento bifásico imiscível sem efeito de capilaridade e geomecânica considerando deformações elastoplásticas. O método das diferenças finitas é aplicado para a solução do escoamento; o método dos elementos finitos, para a geomecânica. A mesma malha é utili-

zada para a solução das duas físicas. O autor ainda propõe a construção de um parâmetro que possibilite resolver o modelo da geomecânica utilizando menos iterações a fim reduzir o custo computacional. Murad *et al.* (2012) apresentou a solução para o problema de escoamento bifásico imiscível em um meio poroelástico fortemente heterogêneo. A fim de explorar as diferentes escalas de tempo associadas ao escoamento e à geomecânica, os autores optaram por utilizar um acoplamento do tipo sequencial, discretizando ambos os sistemas de equações por meio do método dos elementos finitos mistos.

1.4 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver e validar uma metodologia numérica para a solução do problema acoplado entre escoamento bifásico em meios porosos e geomecânica. Nessa metodologia, tanto as equações que modelam o escoamento, quanto as que modelam a geomecânica serão resolvidas utilizando um único método numérico e empregando malhas não estruturadas híbridas. Para esse fim, propõe-se a utilização do Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM), tendo em vista que se trata de um método conservativo, aplicável a malhas não estruturadas e apto para ser aplicado à solução de ambos os problemas envolvidos.

Um dos principais desafios – e contribuições – desta pesquisa está em utilizar o EbFVM como único método numérico na solução do problema acoplado escoamento bifásico-geomecânica. Este trabalho almeja expandir a aplicabilidade do Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos, o qual apesar de não ser tradicionalmente utilizado em problemas que envolvem escoamento e geomecânica, recentemente tem sido apontado como um método promissor e que apresenta significativas vantagens nesse contexto. Anteriormente, o EbFVM foi utilizado para resolver o problema acoplado entre escoamento monofásico e geomecânica. Contudo, ainda não foi proposta uma formulação em que o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos é utilizado para resolver um problema acoplado escoamento-geomecânica que considere um modelo de escoamento mais complexo que o modelo monofásico. Além das mudanças na modelagem matemática do problema, a solução das equações do escoamento bifásico também é mais complexa, tendo em vista que requer a solução de um sistema de equações não lineares.

O modelo constitutivo aplicado na modelagem geomecânica da rocha será o elástico linear, enquanto o modelo do escoamento será o modelo bifásico imiscível e isotérmico. O método de acoplamento empregado nas simulações será sequencial do tipo *two-way*. Isso

significa que os módulos de escoamento e geomecânico serão resolvidos separadamente em cada nível de tempo tantas vezes quantas foram necessárias ao alcance da convergência. O módulo de escoamento requer a solução de um sistema não linear, o qual será resolvido de forma simultânea utilizando o método de Newton. A validação numérica da metodologia proposta será realizada buscando comprovar a eficácia do EbFVM na solução do problema. Após a validação, serão apresentados problemas teste para demonstrar a abrangência e as potencialidades do método na área de simulação de reservatórios.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 é apresentada a formulação matemática do problema. São expostos e descritos os conceitos fundamentais à caracterização do modelo e é deduzido o conjunto de equações diferenciais que modelam o problema acoplado do escoamento bifásico geomecânica em um meio poroso deformável.

No capítulo 3 são realizadas as aproximações numéricas que permitem a obtenção da solução do problema por meio de rotinas computacionais. São apresentados o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos e as discretizações das equações conservativas. Ainda, as possíveis escolhas para tratar o acoplamento entre o modelo geomecânico e o modelo de escoamento são apresentadas e discutidas.

A seguir, no capítulo 4 tem-se uma breve descrição da etapa procedimento de soluções das equações apresentadas e discretizadas previamente. São descritos alguns aspectos importantes quanto à maneira com a qual são abordadas as soluções do sistema não linear do módulo de escoamento e do sistema linear do módulo de geomecânica. Ainda, é discutido como o acoplamento é tratado de forma a resolver o problema proposto satisfazendo todos os requerimentos já elucidados.

O capítulo 5 se destina à validação do simulador implementado e à apresentação dos resultados obtidos por meio das formulações propostas.

Por fim, no capítulo 6 estão dispostos um sumário deste trabalho, as conclusões obtidas a partir de seus resultados e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A obtenção da solução numérica de qualquer problema físico requer sua prévia modelagem matemática. Nessa etapa, aspectos físicos e matemáticos são integrados a fim de que um fenômeno natural possa ser descrito com um certo grau de acurácia, por meio de equações diferenciais (Maliska, 2004). Ao longo deste capítulo apresentar-se-á a modelagem matemática do deslocamento bifásico imiscível em um meio poroso deformável. Para isso, serão apresentados o modelo geomecânico e o modelo de escoamento.

2.1 MODELO GEOMECÂNICO

O modelo geomecânico descreve o comportamento mecânico de um meio poroso deformável sob ações de forças externas e de um escoamento de fluido ao longo de sua estrutura. A fim de iniciar a modelagem matemática do modelo geomecânico introduz-se o conceito de tensão efetiva descrito por Terzaghi (1943), a qual é a tensão efetivamente suportada pela matriz porosa, que está em equilíbrio com as forças externas. Sendo assim, pode-se expressar a tensão efetiva como soma de duas parcelas. A primeira é a contribuição poroelástica ou tensor tensão total, o qual é um tensor cheio. A segunda parcela é contribuição da pressão do escoamento. Trata-se de um tensor esférico relacionado com a pressão de poro exercida pelo fluido na matriz porosa (Wang, 2000). Dessa forma, o tensor de tensões efetivas é o tensor simétrico dado por

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \alpha p \mathbf{I}, \quad (2.1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total que age sobre o conjunto formado tanto pela matriz porosa quanto pelo fluido, \mathbf{I} é o tensor identidade, p é a pressão de poro e α é o coeficiente de Biot, o qual relaciona o quanto o volume do conjunto ou *bulk* é alterado quando se injeta fluido à pressão constante (Wang, 2000). Esse coeficiente pode ser definido como uma relação entre as compressibilidades do sólido e *bulk* por meio da expressão

$$\alpha = 1 - \frac{C^s}{C^b}, \quad (2.2)$$

em que C^s e C^b são as compressibilidades do sólido e *bulk*, respectivamente. O coeficiente de Biot pode ter valor entre a porosidade ϕ e o valor unitário (Berryman, 1992). Quanto mais esse coeficiente se aproxima do valor unitário, menor a compressibilidade dos grãos da matriz porosa (Detournay & Cheng, 1992). Neste trabalho, será considerado

que os grãos da matriz sólida são incompressíveis, *i.e.*, que a deformação do meio poroso se dá por rearranjo de seus grãos, de forma que a compressibilidade do sólido C_s é nula e portanto a constante de Biot assume o valor unitário. O tensor de tensões efetivas é, portanto, dado por

$$\check{\sigma}' = \check{\sigma} + p\check{\mathbf{I}}. \quad (2.3)$$

2.1.1 Equilíbrio de forças

A forma diferencial do equilíbrio de forças no meio poroso é

$$\nabla \cdot (\check{\sigma}' - p\check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.4)$$

em que \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade e ρ é a densidade média, definida como

$$\rho = \phi \rho^f + (1 - \phi) \rho^s, \quad (2.5)$$

em que ρ^f e ρ^s são as densidades do fluido e dos grãos da matriz porosa. A densidade do fluido é dada por

$$\rho^f = S^w \rho^w + (1 - S^w) \rho^o, \quad (2.6)$$

em que S^w é a saturação da água e ρ^w e ρ^o são as densidades da água e do óleo, respectivamente.

2.1.2 Equação constitutiva

Em se tratando de um problema de proelasticidade, especifica-se uma relação constitutiva linear elástica para a matriz porosa. Essa relação pode ser escrita na forma da lei generalizada de Hooke:

$$\check{\sigma}' = f(\check{\epsilon}) = \check{\mathcal{D}} : \check{\epsilon}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) indica que os componentes do tensor de tensões efetivas são funções lineares dos componentes do tensor deformação $\check{\epsilon}$ e essa relação linear é dado pelo tensor rigidez, o qual é um tensor de quarta ordem $\check{\mathcal{D}}$. Devido à simetria dos tensores tensão efetiva e deformação, o tensor $\check{\mathcal{D}}$, que originalmente apresenta 81 componentes, passa a ser satisfatoriamente representado por 36 componentes. Considerando-se ainda um material isotrópico o tensor passa a ter 12 componentes não nulas e apenas dois graus de liberdade. Sendo assim, basta representá-lo utilizando a primeira e a segunda constante de Lamè. Assim procedendo e realizando a operação indicada na equação (2.7), a expressão

para o tensor tensão efetiva, em função das deformações fica

$$\check{\boldsymbol{\sigma}}' = 2\mu_l \check{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda_l \text{tr}(\check{\boldsymbol{\epsilon}}) \check{\mathbf{I}}, \quad (2.8)$$

em que μ_l é a primeira constante de Lamè e λ_l , a segunda. A segunda constante de Lamè também é conhecida como módulo de elasticidade transversal, denotado usualmente por G . Seu valor está relacionado à primeira constante de Lamè por

$$\mu_l = G = \frac{\lambda_l(1-2\nu)}{2\nu}, \quad (2.9)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson.

Ainda, o tensor de deformação pode ser escrito em função do vetor de deslocamento do sólido \mathbf{u}^s por meio da relação cinemática

$$\check{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\nabla \mathbf{u}^s + \nabla^T \mathbf{u}^s}{2}. \quad (2.10)$$

2.2 MODELO DE ESCOAMENTO

O modelo de escoamento em meio poroso deformável considerado é tridimensional bifásico compressível, isotérmico, imiscível água-óleo e desconsidera a pressão capilar. A fim de chegar às equações do modelo são necessários os balanços de massa da fase sólida e das fases fluidas.

2.2.1 Balanço de massa da fase sólida

A forma diferencial do balanço de massa do sólido poroso é

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^s(1-\phi)] + \nabla \cdot [(1-\phi)\rho^s \mathbf{v}^s] = 0, \quad (2.11)$$

em que ϕ é a porosidade, ρ^s é a densidade do sólido e \mathbf{v}^s sua velocidade. Considerando que os grãos da matriz sólida são incompressíveis, *i.e.*, que a deformação do meio poroso se dá por rearranjo de seus grãos, a densidade do sólido ρ^s pode ser considerada constante, de forma que a equação (2.11) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-\phi) + \nabla \cdot [(1-\phi)\mathbf{v}^s] = 0, \quad (2.12)$$

Introduzindo a deformação volumétrica como o traço do tensor tensão, tem-se a relação

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\check{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \nabla \cdot \mathbf{u}^s. \quad (2.13)$$

Utilizando a definição de derivada material em relação ao sólido dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}^s \cdot \nabla f, \quad (2.14)$$

e observando que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^s = \nabla \cdot \frac{d\mathbf{u}^s}{dt} = \frac{d\varepsilon_v}{dt}, \quad (2.15)$$

a equação (2.12) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}(1-\phi) + (1-\phi) \frac{d\varepsilon_v}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

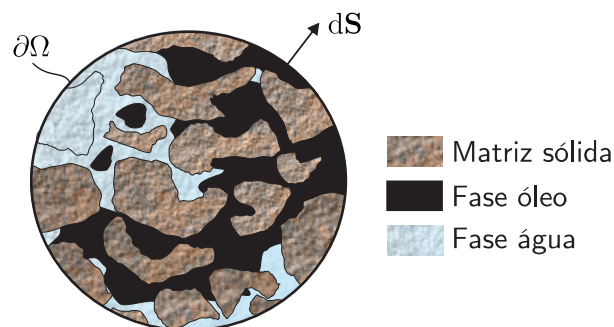
Rearranjando os termos da equação (2.16) pode-se escrever

$$-\frac{1}{(1-\phi)} \frac{d}{dt}(1-\phi) = \frac{d\varepsilon_v}{dt}. \quad (2.17)$$

2.2.2 Balanço de massa de uma fase fluida

A figura 2.1 representa um volume de controle Ω , de volume V , fixo no espaço, extraído de um meio poroso. O vetor área é representado por $d\mathbf{S}$ e a fronteira do volume, por $\partial\Omega$. O volume é composto por uma matriz sólida deformável e por duas fases fluidas: água e óleo.

Figura 2.1: Volume de controle em um meio poroso



Fonte: modificado de (Hurtado, 2005)

Uma vez que o modelo é imiscível, o balanço de massa de um componente coincide com o balanço de massa da fase associada a esse componente. Sendo assim, pode-se efe-

tuar o balanço de massa de uma fase p . A forma diferencial desse balanço de massa é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S^p \rho^p) + \nabla \cdot (\phi S^p \rho^p \mathbf{v}^p) = Q^p, \quad (2.18)$$

em que o S^p , ρ^p e \mathbf{v}^p são, respectivamente, a saturação, a densidade e a velocidade da fase p . Já o termo do membro direito da equação (2.18), Q^p , é a taxa de geração ou extinção de massa da fase p por unidade de volume. Considerando o movimento do sólido como referência, pode-se reescrever a velocidade da fase p como

$$\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^s + \mathbf{v}^{ps}, \quad (2.19)$$

em que \mathbf{v}^{ps} é a velocidade relativa entre a fase p e o sólido. Substituindo a equação (2.19) na equação (2.18) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S^p \rho^p) + \nabla \cdot (\phi S^p \rho^p \mathbf{v}^s) + \nabla \cdot (\phi S^p \rho^p \mathbf{v}^{ps}) = Q^p. \quad (2.20)$$

Neste caso a velocidade de Darcy da fase p é

$$\mathbf{V}_D^p = \phi S^p \mathbf{v}^{ps} = \frac{\check{\mathbf{K}} k_r^p}{\mu^p} (-\nabla p^p + \rho^p \mathbf{g}), \quad (2.21)$$

em que p^p , k_r^p e μ^p são a pressão, a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase p , respectivamente. Já $\check{\mathbf{K}}$ é o tensor permeabilidade absoluta do meio poroso. Definindo a mobilidade da fase p como

$$\lambda_p := \frac{k_r^p}{\mu^p}, \quad (2.22)$$

a velocidade de Darcy da fase p fica

$$\mathbf{V}_D^p = \phi S^p \mathbf{v}^{ps} = \lambda^p \check{\mathbf{K}} (-\nabla p^p + \rho^p \mathbf{g}). \quad (2.23)$$

Substituir a equação (2.23) na equação (2.20) fornece

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S^p \rho^p) + \nabla \cdot (\phi S^p \rho^p \mathbf{v}^s) + \nabla \cdot [\rho^p \lambda^p \check{\mathbf{K}} (-\nabla p^p + \rho^p \mathbf{g})] = Q^p. \quad (2.24)$$

Procedendo como (Aziz & Settari, 1979) e utilizando o fator volume de formação da fase p

$$B^p = \frac{\rho^{p,STD}}{\rho^p}, \quad (2.25)$$

em que o superíndice STD indica as condições padrão de temperatura e pressão, a equação (2.24) toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \mathbf{v}^s \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p^p + \rho^p \mathbf{g}) \right] = q^p, \quad (2.26)$$

em que o termo fonte é dado por

$$q^p = \frac{Q^p}{\rho^{p,STD}}. \quad (2.27)$$

Ressalta-se que pela hipótese de escoamento isotérmico o fator volume de formação é função exclusiva da pressão, *i.e.*,

$$B^p = B^p(p). \quad (2.28)$$

Ainda, as viscosidades dos fluidos são consideradas constantes, já que usualmente a variação dessa propriedade tem uma parcela dominante associada à variação da temperatura.

A fim de completar o sistema de equações que modelam o escoamento dever-se-ia ainda relacionar as pressões da água e do óleo termodinamicamente por meio da equação de estado que introduz a pressão capilar p_c como função da saturação da água (Chavent & Jaffré, 1986)

$$p_c(S^w) = p^o - p^w. \quad (2.29)$$

Neste trabalho, contudo, os efeitos de capilaridade são desprezados, de forma que se tem uma única pressão ao longo das duas fases, isto é, vale a igualdade

$$p^w = p^o = p. \quad (2.30)$$

O efeito de capilaridade desempenha um papel importante no âmbito de resistência de solos (Fredlund & Morgenstern, 1977). Na maioria dos casos envolvendo meios rochosos, entretanto, os efeitos da pressão capilar sobre a tensão efetiva, embora não desprezíveis, são de menor intensidade (Fredlund & Rahardjo, 1993). Por simplicidade, assim como Mendes (2008), considera-se neste modelo que a influência da pressão capilar sobre o regime elástico é fraca, de forma que as tensões efetivas no meio poroso são definidas somente pelo estado de deformação da matriz porosa. Sendo assim, a equação de conservação da massa da fase p é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \mathbf{v}^s \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p + \rho^p \mathbf{g}) \right] = q^p, \quad (2.31)$$

Aplicando a regra do produto no primeiro termo da equação (2.31) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right) = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \frac{S^p}{B^p} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.32)$$

Da conservação da massa do sólido, pode-se reescrever a equação (2.12) na forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v}^s - \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}^s). \quad (2.33)$$

Substituindo a equação (2.33) na equação (2.32), chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right) = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \frac{S^p}{B^p} \nabla \cdot \mathbf{v}^s - \frac{S^p}{B^p} \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}^s). \quad (2.34)$$

Já o segundo termo da equação (2.31) pode ser reescrito como

$$\nabla \cdot \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \mathbf{v}^s \right) = \frac{S^p}{B^p} \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}^s) + \phi \mathbf{v}^s \cdot \nabla \left(\frac{S^p}{B^p} \right). \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.34) e (2.35) na equação (2.31) tem-se pois

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p^p + \rho^p \mathbf{g}) \right] + \frac{S^p}{B^p} \nabla \cdot \mathbf{v}^s + \phi \mathbf{v}^s \cdot \nabla \left(\frac{S^p}{B^p} \right) = q^p. \quad (2.36)$$

Comumente é empregada a hipótese de que a velocidade de deformação da rocha é baixa Wan (2002). Assim, pode-se desprezar o termo

$$\phi \mathbf{v}^s \cdot \nabla \left(\frac{S^p}{B^p} \right). \quad (2.37)$$

Além disso, essa hipótese permite fazer a simplificação

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^s = \frac{d\varepsilon_v}{dt} \approx \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}, \quad (2.38)$$

de forma que a equação (2.36) toma a forma

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p + \rho^p \mathbf{g}) \right] + \frac{S^p}{B^p} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = q^p. \quad (2.39)$$

A fim de alcançar uma maior implicitude da pressão na equação de conservação da massa do fluido, pode-se ainda substituir o termo que envolve a deformação volumétrica pela tensão total volumétrica, chegando-se à modelagem do tipo *fixed-stress*. Para tal, parte-se da definições de tensão total volumétrica:

$$\sigma_v = \text{tr}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{tr}(\check{\boldsymbol{\sigma}}' - p\check{\mathbf{I}}). \quad (2.40)$$

Substituindo a equação constitutiva, dada pela equação (2.8), e rearranjando os termos da equação, chega-se a

$$\sigma_v = (2\mu_l + 3\lambda_l)\varepsilon_v - 3p. \quad (2.41)$$

Derivando em relação ao tempo, chega-se a

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = (2\mu_l + 3\lambda_l) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - 3 \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Assim, pode-se escrever a derivada temporal da deformação volumétrica em função da

derivada temporal da tensão total volumétrica:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{(2\mu_l + 3\lambda_l)} \left(\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + 3 \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (2.43)$$

Definindo ainda a compressibilidade β como o inverso do módulo volumétrico (Murad *et al.*, 2012)

$$\beta = \frac{3}{2\mu_l + 3\lambda_l} = \frac{3(1-2\nu)}{E}, \quad (2.44)$$

em que ν e E são os coeficientes de Poisson e módulo de Young, respectivamente, a equação (2.43) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \beta \left(\frac{1}{3} \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (2.45)$$

Substituindo a equação (2.45) na equação (2.39) tem-se, por fim,

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \mathbf{K}}{B^p} (-\nabla p + \rho^p \mathbf{g}) \right] + \left(\frac{\beta S^p}{3B^p} \right) \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \left(\frac{\beta S^p}{B^p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = q^p. \quad (2.46)$$

Ressalta-se que utilizando a modelagem do tipo *fixed-stress* o coeficiente do termo de pressão passa a ter um peso maior na equação, de forma que o sistema de equações passa a ser mais bem condicionado. Além disso, Kim (2010) aponta essa formulação como incondicionalmente estável. É importante destacar ainda que, no escoamento multifásico em meio poroso, faz-se necessária a introdução da permeabilidade relativa na Lei de Darcy no intuito de considerar as interações entre os fluidos (Peaceman, 1977). Foi observado, experimentalmente, que a permeabilidade relativa é função das saturações – seu valor decresce com a diminuição da saturação da fase (Archer & Wall, 1986). Trangenstein & Bell (1989) afirmam que a permeabilidade relativa depende do volume ocupado por cada fase, da rocha, do histórico do escoamento e da tensão interfacial entre as fases. Essas interações complexas ainda não são totalmente entendidas e dominadas. Pode-se afirmar, contudo, que a movimentação de uma fase também tende à zero conforme sua saturação tende à zero. Ainda, sabe-se que a fase deve alcançar o estado imóvel antes que sua saturação seja nula (Trangenstein & Bell, 1989). Neste trabalho considera-se que a permeabilidade relativa é função apenas da saturação, isto é, tem-se a relação

$$k_r^p = k_r^p(S^w). \quad (2.47)$$

É possível expressar todas as permeabilidades relativas em função de uma única saturação porque o escoamento é bifásico e portanto as saturações da água e do óleo estão relacionadas de forma linear pela equação de fechamento

$$S^w + S^o = 1. \quad (2.48)$$

Quanto à permeabilidade absoluta, considera-se que o meio é isotrópico e portanto o tensor permeabilidade absoluta do meio é esférico. Sendo assim, o tensor $\check{\mathbf{K}}$ pode ser representado por um único valor K . É importante ressaltar que esse valor depende da estrutura interna da matriz sólida, *i.e.*, a permeabilidade absoluta tem magnitude alterada em função do estado de deformação da rocha. Optou-se por considerar essa dependência incorporando-a ao modelo de forma simplificada por meio da relação de Kozeny-Carman, apresentada por Carman (1937). Essa relação expressa a permeabilidade em função da porosidade utilizando a equação

$$K = C_0 \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2 M_s^2}, \quad (2.49)$$

em que as constantes C_0 e M_s são usualmente obtidas de forma experimental. Neste trabalho, as constantes são calculadas relacionando os valores iniciais especificados para K e ϕ . A lei de Kozeny-Carman foi deduzida de forma teórica considerando que o meio poroso é formado por grãos esféricos separados por caminhos de percolação com seção transversal constante. Posteriormente, a relação foi verificada utilizando experimentação por diversos autores (Mendes, 2008).

2.3 SUMÁRIO DAS EQUAÇÕES

A fim de verificar o modelo matemático completo com maior clareza, dispôs-se, a seguir, um breve sumário das equações modelo deduzidas previamente.

EQUILÍBRIO DE FORÇAS

$$\nabla \cdot (\check{\boldsymbol{\sigma}}' - p\check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{\boldsymbol{\sigma}}' = 2\mu_l \check{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda_l \text{tr}(\check{\boldsymbol{\epsilon}})\check{\mathbf{I}} \\ \check{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\nabla \mathbf{u}^s + \nabla^T \mathbf{u}^s}{2} \end{array} \right. \quad (2.50)$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DA FASE ÁGUA

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^w}{B^w} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^w \check{\mathbf{K}}}{B^w} (-\nabla p + \rho^w \mathbf{g}) \right] + \left(\frac{\beta S^w}{3B^w} \right) \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \left(\frac{\beta S^w}{B^w} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = q_w. \quad (2.51)$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DA FASE ÓLEO

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^o}{B^o} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^o \check{\mathbf{K}}}{B^o} (-\nabla p + \rho^o \mathbf{g}) \right] + \left(\frac{\beta S^o}{3B^o} \right) \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \left(\frac{\beta S^o}{B^o} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = q^o. \quad (2.52)$$

EQUAÇÃO DE FECHAMENTO

$$S^w + S^o = 1. \quad (2.53)$$

VARIAÇÃO DA POROSIDADE

$$-\frac{1}{(1-\phi)} \frac{d}{dt} (1-\phi) = \frac{d\varepsilon_v}{dt}. \quad (2.54)$$

VARIAÇÃO DA PERMEABILIDADE ABSOLUTA

$$K = C_0 \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2 M_s^2}. \quad (2.55)$$

Tem-se, assim, uma equação vetorial – (2.50) – e cinco equações escalares – (2.51), (2.52), (2.53), (2.54) e (2.55). Há uma incógnita vetorial – o vetor de deslocamento da rocha \mathbf{u}^s – e cinco escalares – a pressão p , a saturação da água S^w , a saturação do óleo S^o , a porosidade ϕ e a permeabilidade absoluta K –, de forma que o sistema de equações está fechado. É evidente, contudo, que substituindo a equação (2.53) na equação (2.52) pode-se escrever o modelo de escoamento em função de uma única saturação – a saturação da água S^w e eliminar uma incógnita – a saturação do óleo S^o . Além disso, as equações de variação da porosidade e da permeabilidade absoluta são equações simples que podem ser facilmente consideradas na forma de atualização de valores.

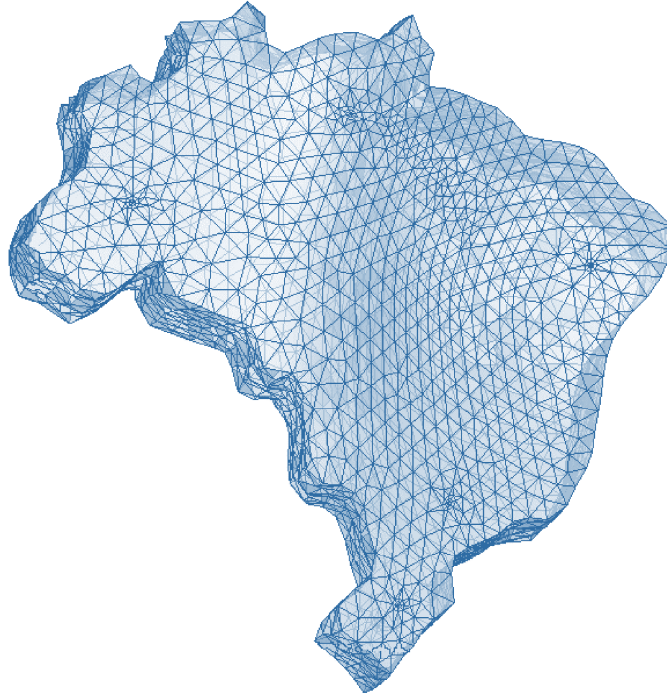
3 ABORDAGEM NUMÉRICA

Uma vez que o conjunto de equações modelo é demasiadamente complexo para que o problema físico possa ser solucionado analiticamente, tem-se a necessidade de introduzir uma formulação numérica que permita escrever as equações em um formato possível de ser resolvido por rotinas computacionais (Aziz & Settari, 1979). Maliska (2004) afirma que a tarefa do método numérico é resolver um conjunto de equações diferenciais, substituindo as derivadas por expressões algébricas que envolvam a função incógnita. Nesse procedimento, obtém-se a solução do problema para um número discreto de pontos, com um determinado erro. Se o método adotado for consistente, quanto maior o número de pontos, mais perto da solução exata estará a solução aproximada. Este capítulo é destinado a apresentar o método numérico utilizado: o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos. Também apresentar-se-á a discretização das equações modelo e o esquema adotado para tratar o acoplamento entre os modelos geomecânico e de escoamento.

3.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS

O Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) é um Método dos Volumes Finitos que explora alguns conceitos provenientes do Método dos Elementos Finitos (FEM) a fim de prover maior flexibilidade geométrica e possibilidade de refinamentos localizados de malha. Por conseguinte, consegue-se alcançar elevada acurácia de representação do domínio mantendo a característica fundamental do método dos volumes finitos – o caráter conservativo (Hurtado, 2011). A formulação adotada permite empregar triângulos e quadriláteros em malhas bidimensionais; hexaedros, tetraedros, prismas e pirâmides, em malhas tridimensionais. Essas malhas são não-estruturadas, o que significa que não há um padrão predefinido que possa descrever a configuração dos vizinhos de um dado elemento (Maliska, 2004). O potencial de discretização geométrica de malhas não-estruturadas está ilustrada na figura 3.1, a qual ilustra uma malha de 36950 elementos no formato aproximado do território brasileiro.

Figura 3.1: Potencial geométrico da malha não-estruturada



Fonte: do autor

3.1.1 Entidades geométricas da malha

A fim de caracterizar completamente uma malha associada a um determinado domínio, deve-se definir o que é uma malha e descrever as entidades que a compõem. Uma malha \mathcal{M} é a coleção de elementos e_i tais que para um domínio fechado Ω tem-se

$$\Omega = \bigcup_{e \in \mathcal{M}} e. \quad (3.1)$$

Cada e deve possuir um interior não vazio. Ainda, deve-se satisfazer

$$\text{Int}(e_i) \cap \text{Int}(e_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j. \quad (3.2)$$

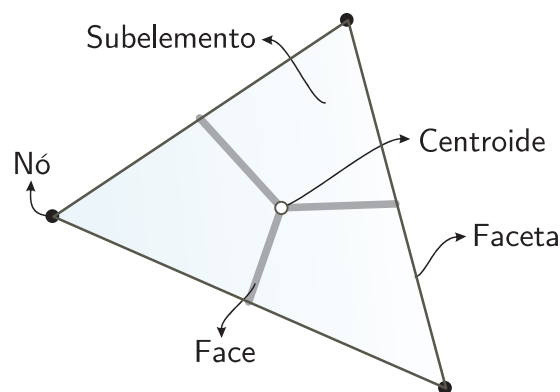
Isto é, a interseção dos interiores dos elementos deve ser um conjunto vazio (Hurtado, 2011). De forma mais simples, pode-se afirmar que os elementos devem cobrir completamente o domínio sem que ocorra superposição ou espaços vazios.

As superfícies que delimitam os elementos são chamadas de facetas. Tratam-se de arestas em elementos 2D e superfícies, em 3D. Cada faceta que não esteja no contorno

do domínio é necessariamente compartilhada por dois elementos. Isso significa que não é possível contato parcial entre as facetas e por conseguinte, a malha é conforme (Hurtado, 2011). As faces dos elementos bidimensionais são definidas como os segmentos que conectam os pontos médios das arestas ao centroide do elemento. A definição para o caso tridimensional é análoga. Essas faces subdividem o elemento em porções denominadas subelementos, os quais estão associados a duas das faces do elemento – com exceção do elemento tridimensional pirâmide, no qual cada subelemento pode estar associado a quatro faces do elemento.

O campo de uma variável do modelo diferencial é aproximado no EbFVM pelos valores discretos em locais coincidentes com os vértices dos elementos da malha, denominados nós. A figura 3.2 ilustra as principais entidades de uma malha para o elemento mais simples: o triângulo. As definições para os demais elementos são similares e podem ser encontradas em (Hurtado, 2011).

Figura 3.2: Principais entidades de um elemento triangular



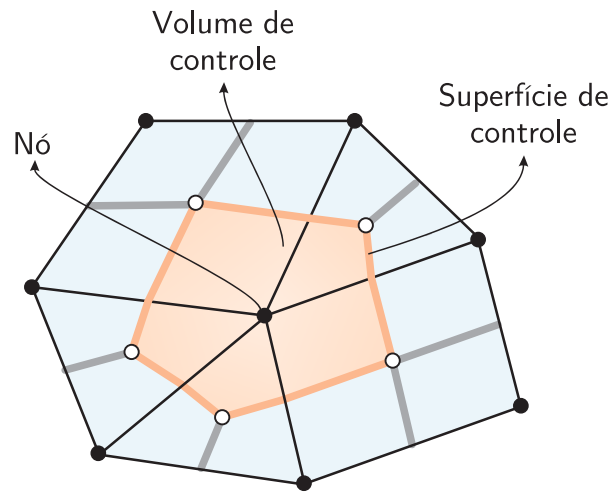
Fonte: do autor

A construção do volume de controle se dá a partir dos elementos dispostos ao redor dos nós, conforme ilustrado na figura 3.3. Logo, a superfície de controle é composta por faces de elementos.

Em virtude da disposição geométrica, é conveniente que propriedades físicas tais como a permeabilidade absoluta sejam homogêneas no domínio de um elemento. Assim, não ascende necessidade de adotar qualquer esquema de interpolação a fim de avaliá-los na superfície do volume de controle (Cordazzo, 2006).

Mais informações acerca das entidades geométricas consideradas no Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos, sobretudo em relação às malhas tridimensionais podem ser encontradas em Hurtado (2011).

Figura 3.3: Construção do volume de controle

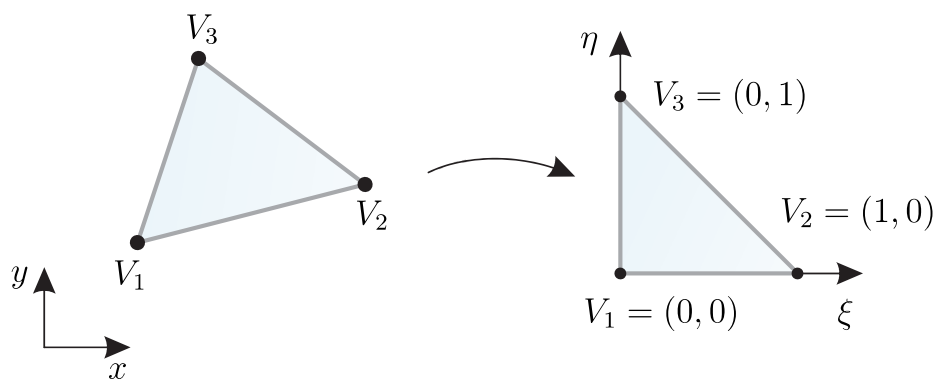


Fonte: do autor

3.1.2 Transformação de coordenadas

A estratégia adotada a fim de lidar com a distorção geométrica dos elementos contidos em uma malha não estruturada é uma transformação denominada mapeamento. Trata-se de uma função bijetora por meio da qual os pontos no espaço físico são representados na forma de elementos regulares em espaços transformados (Hurtado, 2011). Nesse procedimento, um ponto definido em coordenadas globais (x, y, z) no caso tridimensional – passa a ser descrito em termos de coordenadas locais (ξ, η, ζ) . A figura 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento triangular para o espaço transformado. Conforme será verificado posteriormente, essa transformação facilita a discretizações das equações modelo.

Figura 3.4: Mapeamento para um espaço transformado



Fonte: do autor

O mapeamento das coordenadas locais para as globais é realizado empregando funções de forma de primeira ordem, as quais também são utilizadas pelo Método dos Ele-

mentos Finitos. Para cada vértice i pertencente a um elemento, há uma função de forma \mathcal{N}_i , a qual assume valor 1 em i e 0 em todos os outros vértices. Sendo assim, cada ponto $p = (x, y, z)$ pode ser representado segundo a expressão

$$p = \sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) p_i, \quad (3.3)$$

em que p_i , $i = 1, \dots, n_v$, representam os vértices dos elementos; n_v , o número de vértices e (ξ, η, ζ) , as coordenadas locais de P .

As funções de forma devem ser contínuas, diferenciáveis e partições da unidade, de forma que sejam valores positivos e satisfaçam a equação

$$\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) = 1. \quad (3.4)$$

para qualquer ponto (ξ, η, ζ) no sistema local de coordenadas Zienkiewicz & Taylor (2000).

Seja ψ uma função definida nos nós de uma malha. O EbFVM propõe que o valor de ψ dentro do elemento seja dado pela relação

$$\psi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \psi_i. \quad (3.5)$$

Portanto, o valor de ψ dentro do elemento é uma média ponderada de seus valores nos vértices desse elemento. Já o peso dessa média é dado pela função de forma.

3.1.3 Aproximação do gradiente

Uma vez que funções de forma são diferenciáveis, o gradiente de ψ no sistema de coordenadas global pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \nabla \left(\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \psi_i \right) = \sum_{i=1}^{n_v} \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_i \\ \partial_y \mathcal{N}_i \\ \partial_z \mathcal{N}_i \end{pmatrix} \psi_i \\ &\Rightarrow \nabla \psi = \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_1 & \partial_x \mathcal{N}_2 & \dots & \partial_x \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_y \mathcal{N}_1 & \partial_y \mathcal{N}_2 & \dots & \partial_y \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_z \mathcal{N}_1 & \partial_z \mathcal{N}_2 & \dots & \partial_z \mathcal{N}_{n_v} \end{pmatrix} \Psi_e, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que

$$\Psi_e = \left(\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_{n_v} \right)^T \quad (3.7)$$

é um vetor com os valores de ψ nos nós do elemento.

As funções de forma, contudo, são usualmente dadas em termos das coordenadas locais (ξ, η, ζ) e, por conseguinte, utilizar as derivadas de \mathcal{N}_i com respeito às coordenadas globais (x, y, z) é inconveniente. Aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \mathcal{N}_i \\ \partial_\eta \mathcal{N}_i \\ \partial_\zeta \mathcal{N}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y & \partial_\xi z \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & \partial_\eta z \\ \partial_\zeta x & \partial_\zeta y & \partial_\zeta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_i \\ \partial_y \mathcal{N}_i \\ \partial_z \mathcal{N}_i \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

A matriz J dada por

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y & \partial_\xi z \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & \partial_\eta z \\ \partial_\zeta x & \partial_\zeta y & \partial_\zeta z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

é a matriz Jacobiana. Seu cômputo pode ser realizado através da equação (3.3) Hurtado (2011). Definindo a matriz

$$D := \begin{pmatrix} \partial_\xi \mathcal{N}_1 & \partial_\xi \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\xi \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_\eta \mathcal{N}_1 & \partial_\eta \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\eta \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_\zeta \mathcal{N}_1 & \partial_\zeta \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\zeta \mathcal{N}_{n_v} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

pode-se reescrever a equação (3.6) no formato

$$\nabla \psi = J^{-1} D \Psi_e, \quad (3.11)$$

em que a matriz $J^{-1} D$ pode ser considerada como um operador gradiente discreto (Grein, 2015).

3.1.4 Discretização de uma equação de conservação de uma variável genérica

Maliska (2004), propõe que a equação de conservação de uma propriedade genérica ψ associada a um escoamento seja escrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \psi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \psi) + F, \quad (3.12)$$

em que ρ é a massa específica, \mathbf{v} é a velocidade do fluido, Γ é um coeficiente difusivo e F , um termo fonte associado à propriedade conservada. Na equação (3.12), o primeiro termo é o de acumulação; o segundo, advectivo; o terceiro, difusivo; o quarto, o termo fonte. A fim de realizar discretização da equação (3.12), realiza-se uma integração dessa equação para cada volume de controle. Posteriormente, integra-se a equação no tempo e divide-se cada

um dos seus termos pelo passo de tempo. Almejando a clareza dos procedimentos, cada termo apresentado na equação (3.12) será discretizado separadamente. Considera-se um volume de controle arbitrário \mathcal{P} – vide figura 3.3 – e uma malha fixa, *i.e.*, que não se move ao longo do tempo.

TERMO DE ACUMULAÇÃO:

A discretização do termo de acumulação se dá utilizando a formulação totalmente implícita (Maliska, 2004):

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}} \rho\psi \, dV = \frac{\partial}{\partial t}(M_{\mathcal{P}}\bar{\psi}_{\mathcal{P}}) \approx \frac{\partial}{\partial t}(M_{\mathcal{P}}\psi_{\mathcal{P}}), \quad (3.13)$$

em que $M_{\mathcal{P}}$ é massa contida no volume \mathcal{P} e $\bar{\psi}_{\mathcal{P}}$ é média do valor de ψ em \mathcal{P} . Essa média é, no Método dos Volumes Finitos, aproximada pelo valor da propriedade no nó. Essa aproximação é razoável, pois que o nó se localiza, geralmente, próximo ao centro do volume de controle.

TERMO ADVECTIVO:

O termo de transporte advectivo é discretizado por meio da aplicação do Teorema da Divergência de Gauss:

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\psi) \, dV = \int_{\partial\mathcal{P}} (\rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\psi \, dA \approx \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} (\rho\mathbf{v}\psi)_f \cdot \Delta\mathbf{A}_f = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \dot{m}_f \psi_f, \quad (3.14)$$

em que $\partial\mathcal{P}$ representa o contorno do volume de controle \mathcal{P} , isto é, a superfície de controle; o índice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, cada face da superfície de controle; $\Delta\mathbf{A}_f$, o vetor área associado à face f e \dot{m}_f , o fluxo de massa que a atravessa. O valor da propriedade ψ_f na face no centro da face é calculado a partir de algum método de interpolação, *e.g.* CDS ou UDS.

TERMO DIFUSIVO:

A discretização deste termo é similar àquela realizada para o termo advectivo. Novamente, lança-se mão do Teorema da Divergência de Gauss e da definição do operador gradiente discreto – equação (3.11) – para obter

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\psi) \, dV = \int_{\partial\mathcal{P}} (\Gamma\nabla\psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \approx \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} (\Gamma\nabla\psi)_f \cdot \Delta\mathbf{A}_f = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} (\Gamma J^{-1}D)_f \Psi_e \cdot \Delta\mathbf{A}_f. \quad (3.15)$$

TERMO FONTE:

A discretização do termo fonte é realizada da forma

$$\int_{\mathcal{P}} F \, dV \approx F_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (3.16)$$

em que $\Delta V_{\mathcal{P}}$ é o volume do volume de controle associado ao nó \mathcal{P} .

EQUAÇÃO DISCRETIZADA:

A equação deve ainda ser integrada no tempo para que possa ser obtida a versão final da equação em nível discreto. Para esse fim, este trabalho considera a formulação totalmente implícita, em que o integrando é avaliado no nível de tempo para o qual deseja-se resolver o valor de ψ . Assim procedendo e dividindo a equação discretizada por Δt , tem-se

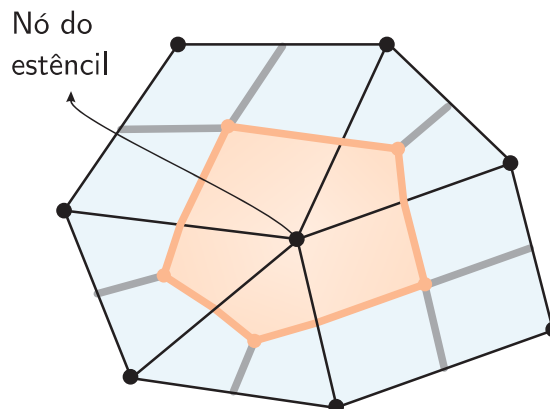
$$\frac{M_{\mathcal{P}} \psi_{\mathcal{P}} - (M_{\mathcal{P}} \psi_{\mathcal{P}})^o}{\Delta t} + \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \dot{m}_f \psi_f = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} (\Gamma J^{-1} D)_f \Psi_e \cdot \Delta \mathbf{A}_f + F_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (3.17)$$

Inferre-se da equação (3.17) que as equações discretizadas envolvem, além do próprio nó associado a \mathcal{P} , os nós que compartilham um elemento com o nó \mathcal{P} . Sendo assim, esse é o estêncil associado ao EbFVM. Matematicamente, se $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ é o conjunto dos elementos que compartilham o nó \mathcal{P} e \mathcal{N}^e , o conjunto dos nós associados ao elemento e , então o estêncil $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} \mathcal{N}^e. \quad (3.18)$$

Graficamente, a figura 3.5 exibe em preto os nós, os quais em conjunto compõem o estêncil associado ao nó \mathcal{P} .

Figura 3.5: Estêncil associado ao nó \mathcal{P}



Fonte: adaptado de (Grein, 2015)

3.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES MODELO

3.2.1 Modelo geomecânico

A equação do equilíbrio de forças é

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - p\check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (3.19)$$

Substituindo a equação constitutiva – equação (2.8) na equação (3.19) e rearranjando-se os termos da equação chega-se a

$$2\mu_l \nabla \cdot \check{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda_l \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_v \check{\mathbf{I}}) - \nabla \cdot (p\check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (3.20)$$

lembrando que a deformação volumétrica é o traço do tensor deformação e substituindo a relação cinemática dada pela equação (2.10) tem-se a equação em função do vetor deslocamento do sólido:

$$\mu_l \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^s + \nabla^T \mathbf{u}^s) + \lambda_l \nabla \cdot [\text{tr}(\nabla \mathbf{u}^s) \check{\mathbf{I}}] - \nabla \cdot (p\check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (3.21)$$

Integrando no volume de controle tem-se

$$\mu_l \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^s + \nabla^T \mathbf{u}^s) dV + \lambda_l \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot [\text{tr}(\nabla \mathbf{u}^s) \check{\mathbf{I}}] dV - \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (p\check{\mathbf{I}}) dV + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{g} dV = 0. \quad (3.22)$$

Por clareza, a equação (3.22) será discretizada termo a termo aplicando o procedimento de discretização apresentado anteriormente. Ressalta-se que neste caso não é necessária a etapa de integração no tempo.

TERMO DE CISLHAMENTO:

Para discretizar o primeiro termo da equação (3.22) aplica-se o procedimento apresentado anteriormente para o termo difusivo da equação genérica de conservação. Dessa forma, tem-se

$$\mu_l \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^s + \nabla^T \mathbf{u}^s) dV = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} [J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e + (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T] \cdot \Delta \mathbf{A}_f. \quad (3.23)$$

Note que o operador $J^{-1} D$ consiste em uma matriz de n_d linhas por n_v colunas, em que n_d é a dimensão do problema e n_v é o número de vértices do elemento em questão. Logo, sua operação é aplicável apenas a operandos com n_v linhas. Dado que o deslocamento do sólido é um campo vetorial e deve-se satisfazer essa restrição quanto ao número de linhas,

para que a equação possa ser escrita no formato proposto define-se

$$\check{\mathbf{U}}_e := \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{U}_e & \mathbf{V}_e & \mathbf{W}_e \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n_v} & v_{n_v} & w_{n_v} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

TERMO DE COMPRESSIBILIDADE E CISALHAMENTO:

A discretização do segundo termo da equação (3.22) é similar à discretização de seu primeiro termo. Isto é, tem-se

$$\lambda_l \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot [\text{tr}(\nabla \mathbf{u}^s) \check{\mathbf{I}}] dV = \lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \text{tr}(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f. \quad (3.25)$$

TERMO DE PRESSÃO DE PORO:

A discretização do terceiro termo da equação (3.22) também é similar ao já apresentado. Neste caso, utiliza-se o conceito de função de forma.

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (p \check{\mathbf{I}}) dV = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} p_f \Delta \mathbf{A}_f = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \mathcal{N}_f \cdot \mathbf{P}_e \Delta \mathbf{A}_f, \quad (3.26)$$

em que \mathcal{N}_f é o vetor de funções de forma avaliado na face f e \mathbf{P}_e é o vetor de pressões nos nós do elemento que contém a face f .

TERMO GRAVITACIONAL:

O termo gravitacional é integrado de forma similar a um termo fonte. Isto é, faz-se

$$\int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{g} dV = \rho_{\mathcal{P}} \mathbf{g} \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (3.27)$$

EQUAÇÃO DISCRETIZADA:

A equação do modelo geomecânico em sua forma discreta é, portanto, dada por

$$\mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} [J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e + (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T] \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \text{tr}(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f - \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \mathcal{N}_f \cdot \mathbf{P}_e \Delta \mathbf{A}_f + \rho_{\mathcal{P}} \mathbf{g} \Delta V_{\mathcal{P}} = 0. \quad (3.28)$$

3.2.2 Modelo de escoamento

Definindo a função de potencial gravitacional como

$$\Upsilon = \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad (3.29)$$

em que \mathbf{x} é o vetor posição, tem-se

$$\mathbf{g} = \nabla \Upsilon. \quad (3.30)$$

Sendo assim, a equação de conservação da massa da fase p pode ser reescrita como

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p + \rho^p \nabla \Upsilon) \right] + \left(\frac{\beta S^p}{3B^p} \right) \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \left(\frac{\beta S^p}{B^p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = q^p. \quad (3.31)$$

Não obstante a semelhança com o procedimento de discretização exposto anteriormente para uma equação de conservação genérica, por clareza, a discretização da equação (3.31) será apresentada termo a termo. Para isso, cada termo é integrado no volume de controle e no tempo e dividido pelo passo de tempo.

TERMO DE ACUMULAÇÃO:

A discretização do primeiro termo da equação (3.31) fornece

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t \int_{\mathcal{P}} \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S^p}{B^p} \right) V \, dt = \frac{\Delta V_{\mathcal{P}} \phi_{\mathcal{P}}}{\Delta t} \left[\frac{S_{\mathcal{P}}^p}{B_{\mathcal{P}}^p} - \left(\frac{S_{\mathcal{P}}^p}{B_{\mathcal{P}}^p} \right)^{\text{old}} \right]. \quad (3.32)$$

TERMO DE FLUXO:

A discretização do segundo termo da equação (3.31) resulta em

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^p \check{\mathbf{K}}}{B^p} (-\nabla p + \rho^p \nabla \Upsilon) \right] dV \, dt = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \frac{\lambda_f^p}{B_f^p} \check{\mathbf{K}} \left[J_f^{-1} D_f (-\mathbf{P}_e + \rho_f^p \Upsilon_e) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f. \quad (3.33)$$

TERMO DE TENSÃO TOTAL VOLUMÉTRICA:

A forma discreta do terceiro termo da equação (3.31) é

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\beta S^p}{3B^p} \right) \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} dV \, dt = \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^p}{3B_{\mathcal{P}}^p} \frac{(\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{\Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (3.34)$$

TERMO DE PRESSÃO:

A discretização do quarto termo da equação (3.31) fornece

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\beta S^p}{B^p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} dV dt = \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^p (p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{B_{\mathcal{P}}^p \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (3.35)$$

TERMO FONTE:

A forma discreta do último termo da equação (3.31) é

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t \int_{\mathcal{P}} q^p dV dt = q_{\mathcal{P}}^p \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (3.36)$$

EQUAÇÃO DISCRETIZADA:

A equação do modelo geomecânico em sua forma discreta é, portanto, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\mathcal{P}} \phi_{\mathcal{P}}}{\Delta t} \left[\frac{S_{\mathcal{P}}^p}{B_{\mathcal{P}}^p} - \left(\frac{S_{\mathcal{P}}^p}{B_{\mathcal{P}}^p} \right)^{\text{old}} \right] + \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \frac{\lambda_f^p}{B_f^p} \check{\mathbf{K}} \left[J_f^{-1} D_f \left(-\mathbf{P}_e + \rho_f^p \boldsymbol{\Upsilon}_e \right) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f \\ + \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^p (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3 B_{\mathcal{P}}^p \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}} + \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^p (p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{B_{\mathcal{P}}^p \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}} = q_{\mathcal{P}}^p \Delta V_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A equação (3.37) é válida para qualquer uma das fases: água ou óleo. A fim de resolver as equações do modelo bifásico, contudo, é usual utilizar as equações de conservação da massa da água e global. Para obter a conservação da massa global, multiplica-se as equações de conservação da massa da água e do óleo pelos seus respectivos valores de fator volume de formação B^p . A seguir, as duas equações são somadas e a equação de fechamento (2.53) é utilizada, eliminando-se os valores de saturação da água e do óleo da equação de conservação global. Assim procedendo, chega-se à equação

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\mathcal{P}} \phi_{\mathcal{P}}}{\Delta t} \left[1 - B_{\mathcal{P}}^w \left(\frac{S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^w} \right)^{\text{old}} - B_{\mathcal{P}}^o \left(\frac{1 - S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^o} \right)^{\text{old}} \right] \\ + \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \check{\mathbf{K}} J_f^{-1} D_f \left[-\mathbf{P}_e (\lambda_f^w + \lambda_f^o) + \boldsymbol{\Upsilon}_e (\rho_f^w \lambda_f^w + \rho_f^o \lambda_f^o) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f \\ + \frac{\beta (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3 \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}} + \beta \frac{(p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{\Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}} = (B_{\mathcal{P}}^w q_{\mathcal{P}}^w + B_{\mathcal{P}}^o q_{\mathcal{P}}^o) \Delta V_{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.2.3 Sumário das equações discretizadas

A fim de verificar o conjunto de equações a ser resolvido por completo com maior clareza, dispôs-se, a seguir, um breve sumário das equações discretizadas previamente. Ressalta-se que a equação (3.42) foi integrada no tempo.

EQUILÍBRIO DE FORÇAS

$$\mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \left[J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e + (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \text{tr}(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f - \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \mathcal{N}_f \cdot \mathbf{P}_e \Delta \mathbf{A}_f + \rho_p \mathbf{g} \Delta V_p = 0. \quad (3.39)$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DA ÁGUA

$$\frac{\Delta V_p \phi_p}{\Delta t} \left[\frac{S_p^w}{B_p^w} - \left(\frac{S_p^w}{B_p^w} \right)^{\text{old}} \right] + \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \frac{\lambda_f^w}{B_f^w} \check{\mathbf{K}} \left[J_f^{-1} D_f (-\mathbf{P}_e + \rho_f^w \boldsymbol{\Upsilon}_e) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \frac{\beta S_p^w (\sigma_{v,p} - \sigma_{v,p}^{\text{old}})}{3 B_p^w \Delta t} \Delta V_p + \frac{\beta S_p^w (p_p - p_p^{\text{old}})}{B_p^w \Delta t} \Delta V_p = q_p^w \Delta V_p. \quad (3.40)$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA GLOBAL

$$\frac{\Delta V_p \phi_p}{\Delta t} \left[1 - B_p^w \left(\frac{S_p^w}{B_p^w} \right)^{\text{old}} - B_p^o \left(\frac{1 - S_p^w}{B_p^o} \right)^{\text{old}} \right] + \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \check{\mathbf{K}} J_f^{-1} D_f \left[-\mathbf{P}_e (\lambda_f^w + \lambda_f^o) + \boldsymbol{\Upsilon}_e (\rho_f^w \lambda_f^w + \rho_f^o \lambda_f^o) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \frac{\beta (\sigma_{v,p} - \sigma_{v,p}^{\text{old}})}{3 \Delta t} \Delta V_p + \beta \frac{(p_p - p_p^{\text{old}})}{\Delta t} \Delta V_p = (B_p^w q_p^w + B_p^o q_p^o) \Delta V_p. \quad (3.41)$$

VARIAÇÃO DA POROSIDADE

$$\phi = 1 - (1 - \phi^{\text{old}}) e^{-(\varepsilon_v - \varepsilon_v^{\text{old}})}. \quad (3.42)$$

VARIAÇÃO DA PERMEABILIDADE ABSOLUTA

$$K = C_0 \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2 M_s^2}. \quad (3.43)$$

Tem-se, assim, uma equação vetorial –(2.50)– e quatro equações escalares –(3.40),(3.41),

(3.42) e (3.43). Há uma incógnita vetorial – o vetor de deslocamento da rocha \mathbf{u}^s – e quatro escalares – a pressão p , a saturação da água S^w , a porosidade ϕ e a permeabilidade K –, de forma que o sistema de equações está fechado. Ressalta-se ainda que as equações de variação da porosidade e da permeabilidade são equações explícitas, de forma que os valores de ϕ e K podem ser atualizados após a solução das equações da geomecânica.

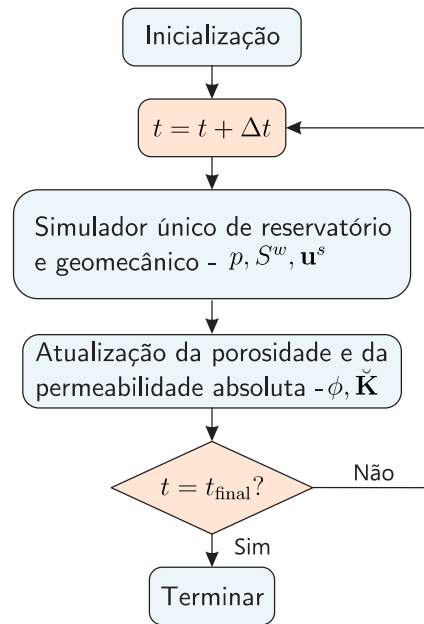
3.3 ACOPLAMENTO NUMÉRICO

A solução acoplada do problema de escoamento bifásico em um meio deformável requer que os campos de pressão, de saturação e de deslocamentos da rocha satisfaçam simultaneamente todas as equações de balanço do modelo – equações de conservação da massa da água, de conservação da massa total e do balanço de forças. A revisão bibliográfica realizada neste trabalho indica que ainda é bastante comum utilizar *softwares* distintos para resolver as equações da geomecânica e de escoamento. Nesse caso as alternativas de acoplamento das equações ficam restritas à flexibilidade de ambos os *softwares*.

De um modo geral, os esquemas de acoplamento podem ser classificados em simultâneo ou monolítico e sequencial ou iterativo. A solução simultânea ou monolítica, também conhecida como totalmente acoplada, consiste na solução simultânea de todas as equações do modelo, isto é, a solução tanto do escoamento quanto da geomecânica em um único sistema de equações. Um fluxograma ilustrativo desse tipo de acoplamento pode ser visualizado na figura 3.6. White (2009) mostra que apesar da robustez e estabilidade, essa estratégia de acoplamento é bastante cara do ponto de vista computacional. Ainda, White (2009) afirma que quando o modelo de escoamento considerado é bifásico, o sistema de equações é demasiadamente mal condicionado, de forma que é necessário utilizar um pré-condicionador dedicado para este problema.

O acoplamento do tipo sequencial ou iterativo, por sua vez, consiste na solução segregada das equações dos modelos de escoamento e de geomecânica. Essa estratégia é dividida em acoplamento segregado em uma direção ou *one-way coupling* e acoplamento segregado em duas direções ou *two-way coupling*. No acoplamento sequencial em uma direção a troca de informações se dá em apenas em um sentido. Ou seja, na solução em um dado nível de tempo, apenas as informações das variáveis do escoamento são passadas ao modelo geomecânico, ao passo que as informações da geomecânica somente são levadas para o modelo de escoamento no nível de tempo seguinte. Essa abordagem é indicada para reservatórios nos quais as variáveis do problema estrutural têm uma variação

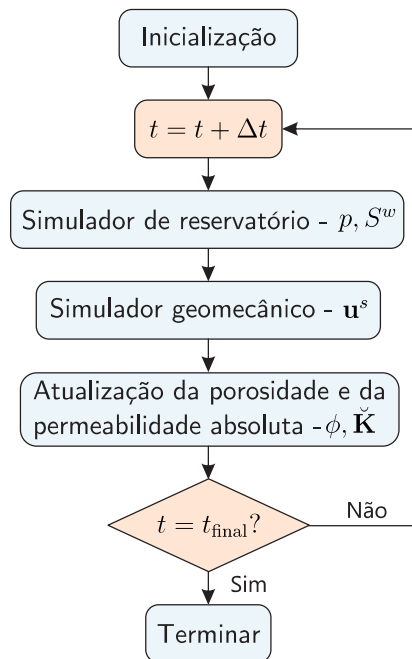
Figura 3.6: Fluxograma do método de acoplamento simultâneo ou monolítico



Fonte: do autor

muito pequena quando comparadas às das variáveis do escoamento (Tran *et al.*, 2005). O esquema *one-way coupling* está ilustrado na forma de um fluxograma na figura 3.7.

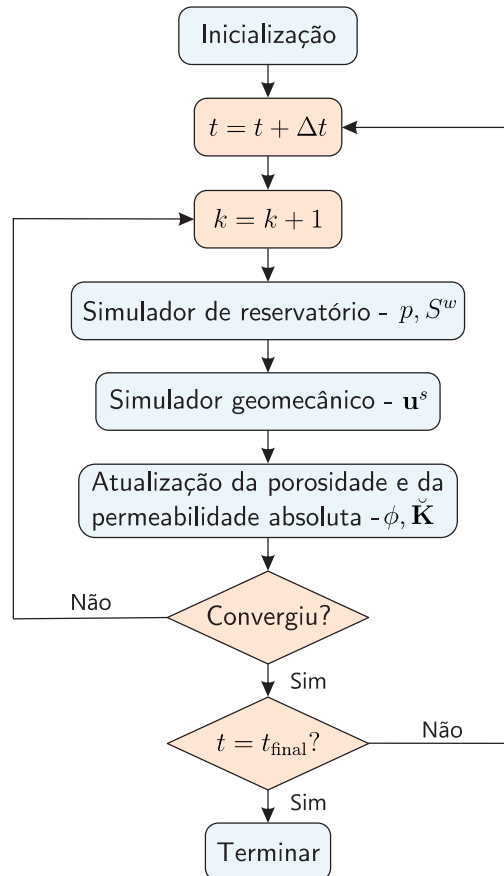
Figura 3.7: Fluxograma do método de acoplamento sequencial em uma direção



Fonte: do autor

Já no acoplamento sequencial em duas direções há um ciclo iterativo em cada nível de tempo, no qual ocorre uma troca constante de informações entre os dois modelos. O esquema *two-way coupling* está ilustrado por meio de um fluxograma na figura 3.8.

Figura 3.8: Fluxograma do método de acoplamento sequencial em duas direções

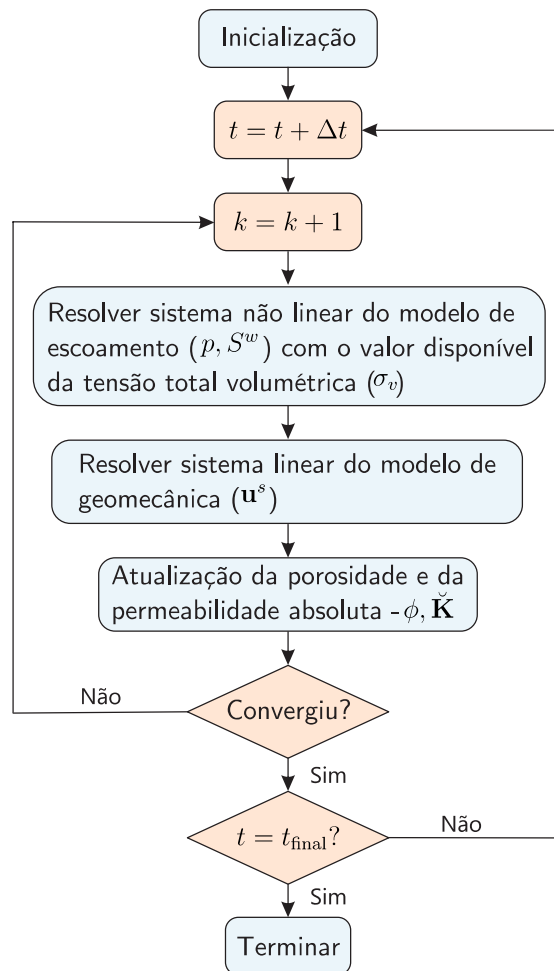


Fonte: do autor

Tendo em vista que a solução simultânea é computacionalmente custosa em demasia e acarreta um sistema de equações mal condicionado, optou-se por utilizar o método sequencial *two-way*. Essa abordagem permite a obtenção de uma solução equivalente à solução simultânea com possibilidade de redução do custo computacional (Settari & Walters, 1999). Almejando uma estratégia de solução estável e com boas propriedades de convergência, optou-se por utilizar o acoplamento sequencial em duas direções do tipo *fixed-stress*. A denominação do método faz alusão ao fato de se considerar que o termo de tensão total volumétrica é constante na equação (2.46) durante a solução do modelo de escoamento. Escolheu-se o acoplamento *fixed-stress* por se tratar de uma estratégia incondicionalmente estável e que apresenta taxa de convergência mais alta que as outras abordagens sequenciais para a solução do problema acoplado entre escoamento bifásico e geomecânica (Kim, 2010). Em particular, Kim (2010) mostra que a utilização do acoplamento *fixed-*

stress aliado à solução simultânea das equações do escoamento fornece não apenas quase a mesma taxa de convergência do acoplamento simultâneo, mas também um custo computacional significativamente mais baixo. Com essa motivação, adotou-se o acoplamento sequencial em duas direções do tipo *fixed-stress*, o qual está ilustrado na figura 3.9.

Figura 3.9: Fluxograma do método de acoplamento sequencial em duas direções tipo *fixed-stress*

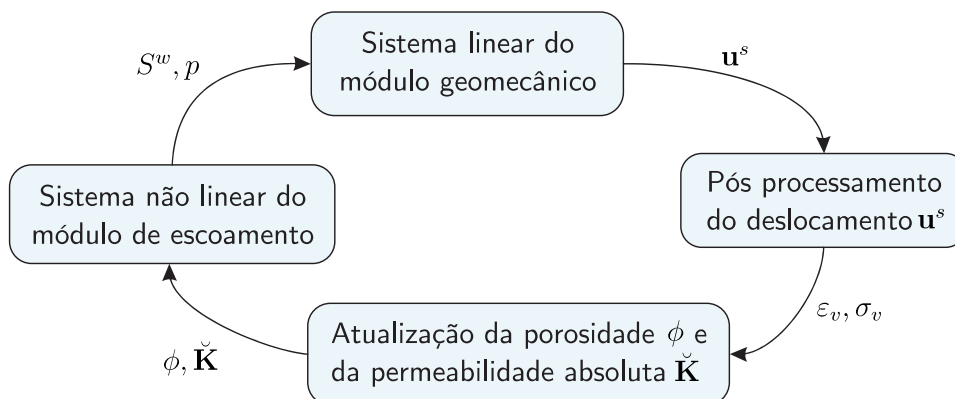


Fonte: do autor

4 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Ainda que as fases de modelagem matemática e abordagem numérica sejam fundamentais à acurácia com a qual o fenômeno físico é representado, é por meio do procedimento de solução das equações modelo que se obtêm, de fato, os resultados do problema. Este capítulo se destina à descrição de alguns aspectos fundamentais à solução do sistema de equações advindas do problema proposto. Tendo em vista o emprego do acoplamento do tipo sequencial *two-way*, os módulos de escoamento e geomecânica são resolvidos separadamente. A fim de se obter uma visão geral sobre o procedimento de solução do problema deve-se entender o fluxo de informações entre as etapas de solução das equações modelo, o qual está ilustrado, na forma de um fluxograma, na figura 4.1. A solução do sistema não linear do módulo de escoamento provê os valores nodais de pressão p e saturação de água S^w . Essa etapa é aqui denotada por módulo de escoamento. A solução do sistema linear da geomecânica fornece, então, os vetores de deslocamento do sólido \mathbf{u}^s . A partir dessa solução, é necessário pós-processar os vetores de deslocamentos nodais por meio do cálculo da deformação volumétrica ε_v e da tensão volumétrica σ_v . A solução do sistema linear da geomecânica acompanhada desse pós-processamento é aqui denotada por módulo geomecânico. Ressalta-se que o cálculo das deformações volumétricas é necessário para que os valores de porosidade ϕ e permeabilidade absoluta $\check{\mathbf{K}}$ possam ser atualizados. Já o cálculo das tensões volumétricas é necessário à próxima solução do módulo de escoamento.

Figura 4.1: Fluxograma de informações



Fonte: do autor

A seguir, serão apresentados os procedimentos para a obtenção da solução dos módulos geomecânico e de escoamento. Por fim, ainda será brevemente discutido o procedimento realizado para tratar o acoplamento entre os dois módulos.

4.1 MÓDULO GEOMECÂNICO

O módulo geomecânico consiste nas equações de equilíbrios de forças, as quais formam um sistema linear de equações. Quando solucionado, esse sistema provê o vetor de deslocamento do sólido \mathbf{u}^s . A equação a ser resolvida, já em sua forma discreta, é

$$\mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \left[J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e + (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \text{tr}(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f - \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \mathbf{N}_f \cdot \mathbf{P}_e \Delta \mathbf{A}_f + \rho_p \mathbf{g} \Delta V_p = 0. \quad (4.1)$$

A fim de facilitar a visualização da montagem do sistema linear, a equação é rearranjada e os seguintes termos são considerados:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f}^{\mathbf{A}} + \overbrace{\mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T \cdot \Delta \mathbf{A}_f}^{\mathbf{B}} + \overbrace{\lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \text{tr}(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f}^{\mathbf{C}} \\ & = \overbrace{\sum_{f \in \mathcal{F}_p} \mathbf{N}_f \cdot \mathbf{P}_e \Delta \mathbf{A}_f}^{\mathbf{D}} - \overbrace{\rho_p \mathbf{g} \Delta V_p}^{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A contribuição de cada um desses termos para o sistema linear será apresentada separadamente. Sem perda de generalidade, considera-se o caso tridimensional.

TERMO A:

O termo **A** consiste na primeira parcela do termo de cisalhamento. Reescrevendo o produto interno que aparece nesse termo em forma de operação matricial, tem-se

$$\mathbf{A} = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T \Delta \mathbf{A}_f. \quad (4.3)$$

Transpondo esse termo duas vezes e utilizando as propriedades da transposta, o termo pode ser escrito na forma

$$\mathbf{A} = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \left\{ \left[(J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e)^T \Delta \mathbf{A}_f \right]^T \right\}^T = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \left[(\Delta \mathbf{A}_f^T J^{-1} D) \check{\mathbf{U}}_e \right]^T. \quad (4.4)$$

Abrindo a equação (4.4) em termos das componentes pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \begin{pmatrix} (\Delta \mathbf{A}_f^T J^{-1} D)^T \mathbf{U}_e \\ (\Delta \mathbf{A}_f^T J^{-1} D)^T \mathbf{V}_e \\ (\Delta \mathbf{A}_f^T J^{-1} D)^T \mathbf{W}_e \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

A componente da linha i do termo \mathbf{A} é, pois,

$$A_i = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \sum_{k=1}^{n_v} (\Delta \mathbf{A}_f^T J^{-1} D)_k (\check{\mathbf{U}}_e)_{k,i}. \quad (4.6)$$

Note que i pode assumir os valores 1, 2 ou 3 se o coeficiente corresponder ao balanço de forças nas direções x , y e z , respectivamente. Assim, explicitou-se o coeficiente que deve ser atribuído à matriz de coeficientes do sistema linear em decorrência do termo \mathbf{A} .

TERMO B:

O termo \mathbf{B} consiste na segunda parcela do termo de cisalhamento. Reescrevendo o produto interno que aparece nesse termo em forma de operação matricial, tem-se

$$\mathbf{B} = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} (J^{-1} D \check{\mathbf{U}}_e) \Delta \mathbf{A}_f. \quad (4.7)$$

Abrindo o \mathbf{B} em termos de suas componentes chega-se a

$$B_i = \mu_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \sum_{k=1}^{n_v} \sum_{r=1}^3 (J^{-1} D)_{i,k} (\Delta A_f)_r (\check{\mathbf{U}}_e)_{k,r}. \quad (4.8)$$

Assim, tem-se o coeficiente que deve ser atribuído à matriz de coeficientes do sistema linear em decorrência do termo \mathbf{B} .

TERMO C:

O termo \mathbf{C} é o termo de compressibilidade e cisalhamento. Abrindo-o em termos de suas componentes, tem-se

$$C_i = \lambda_l \sum_{f \in \mathcal{F}_p} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^{n_v} (\Delta A_f)_i (J^{-1} D)_{r,k} (\check{\mathbf{U}}_e)_{k,r}. \quad (4.9)$$

Explicitou-se, assim, o coeficiente que deve ser atribuído à matriz de coeficientes do sistema linear em decorrência do termo \mathbf{C} .

TERMO D:

O termo \mathbf{D} consiste no termo de pressão de poro. Na solução de geomecânica, considera-se que a pressão é conhecida já que seu valor provém da solução prévia do módulo de escoamento. Sendo assim, esse termo não é função da incógnita $\check{\mathbf{U}}_e$, de forma que é adicionado ao termo independente de forma direta.

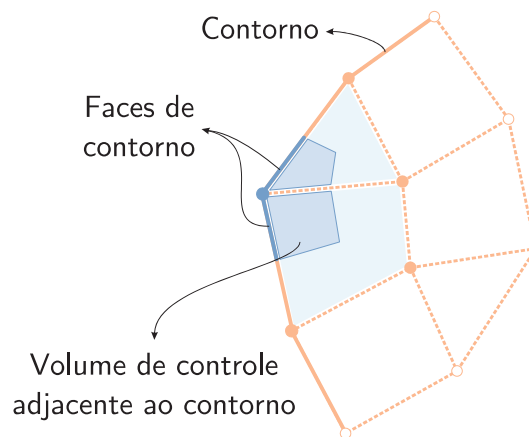
TERMO E:

O termo **E** é o termo fonte. A partir dos valores de saturação S^w e densidades dos fluidos ρ^w e ρ^o , informadas pelo módulo de escoamento, e utilizando o valor disponível para a porosidade ϕ , a densidade $\rho_{\mathcal{P}}$ associada ao volume de controle de índice \mathcal{P} pode ser calculada empregando as equações (2.5) e (2.6). Dado isso, o termo **E** pode ser adicionado diretamente ao termo independente.

4.1.1 Aplicação das condições de contorno

As condições de contorno do módulo de geomecânica são de Neumann ou de Dirichlet. Ressalta-se que nas malhas não estruturadas utilizadas no EbFVM tanto a face quanto o nó nos quais são prescritas condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente, estão localizados sobre o contorno. Essa configuração geométrica pode ser visualizada na figura 4.2, em que está ilustrado um volume de controle adjacente ao contorno. É importante ressaltar que o volume de controle associado ao nó \mathcal{P} é interior ao domínio, ao passo que o nó está sobre a fronteira.

Figura 4.2: Volume de controle adjacente ao contorno



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

No caso de condição de contorno de Dirichlet, tem-se deslocamento prescrito em uma e/ou mais direções. Para os valores de deslocamento prescrito não é necessário fazer um balanço de forças. Nesse caso, apenas se insere o valor unitário na diagonal principal da linha correspondente à incógnita em questão. Ao termo independente, atribui-se o valor prescrito.

No caso de condição de contorno de Neumann tem-se a prescrição de um fluxo, o qual neste caso é equivalente à prescrição do tensor tensão total ao longo da superfície de controle. A equação de balanço de forças pode ser escrita na forma

$$\nabla \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (4.10)$$

Integrando no volume de controle \mathcal{P} , tem-se

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \check{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \Delta \mathbf{A}_f + \rho_{\mathcal{P}} \mathbf{g} \Delta V_{\mathcal{P}} = 0. \quad (4.11)$$

Denotando as faces internas à malha por f_i e as faces externas ou de contorno por f_e , pode-se escrever

$$\sum_{f_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \check{\boldsymbol{\sigma}}_{f_i} \cdot \Delta \mathbf{A}_{f_i} + \sum_{f_e \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \check{\boldsymbol{\sigma}}_{f_e} \cdot \Delta \mathbf{A}_{f_e} + \rho_{\mathcal{P}} \mathbf{g} \Delta V_{\mathcal{P}} = 0. \quad (4.12)$$

Para tratar o termo referente às faces internas, procede-se conforme exposto no capítulo 3, mais especificamente na subseção 3.2.1. Já o termo que representa a contribuição das faces externas é conhecido. Assim, basta especificá-lo diretamente no termo independente, junto ao termo gravitacional.

4.1.2 Cálculo da deformação e tensão total volumétricas

Conforme já explicado e ilustrado por meio da figura 4.1, a fim de que a porosidade e a permeabilidade absoluta sejam atualizadas, faz-se necessário o cálculo dos valores de deformação volumétrica ϵ_v nos nós da malha. Já para que o módulo de escoamento seja novamente resolvido, é necessário informá-lo o valor da tensão volumétrica σ_v nos nós da malha.

O cálculo da deformação volumétrica nos nós da malha parte de sua definição, que é:

$$\epsilon_{v,\mathcal{P}} = (\nabla \cdot \mathbf{u}_s)_{\mathcal{P}}. \quad (4.13)$$

Assim, para calcular a deformação volumétrica basta calcular o divergente do campo de deslocamento nos nós da malha. Uma vez que os valores disponíveis de deslocamento também estão localizados nos nós da malha, para o cálculo do divergente utiliza-se o teo-

rema da divergência de Gauss para chegar-se a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,\mathcal{P}} = (\nabla \cdot \mathbf{u}_s)_{\mathcal{P}} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{\Delta V_{\mathcal{P}}} \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} (\mathbf{u}_s)_f \cdot \Delta \mathbf{A}_f \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{\Delta V_{\mathcal{P}}} \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \mathcal{N}_f \mathbf{U}_e^s \Delta \mathbf{A}_f. \quad (4.16)$$

É válido lembrar que \mathcal{N}_f é o vetor de funções de forma avaliado na face f e \mathbf{U}_e^s é o vetor de deslocamento do sólido nos nós do elemento que contém a face f .

Uma vez que se dispõe da deformação volumétrica nos nós da malha pode-se calcular a tensão total volumétrica utilizando a equação (2.41) e aplicando-a ao nó \mathcal{P} , de onde

$$\boldsymbol{\sigma}_{v,\mathcal{P}} = (2\mu_l + 3\lambda_l)\boldsymbol{\varepsilon}_{v,\mathcal{P}} - 3p_{\mathcal{P}}. \quad (4.17)$$

4.2 MÓDULO DE ESCOAMENTO

Resolver o módulo de escoamento significa resolver as equações de conservação da massa da água e conservação da massa global a fim de calcular os valores de S^w e p em um dado nível de tempo. Esse conjunto de equações é não linear, como se pode observar, por exemplo, pela dependência do fator volume de formação em relação à pressão.

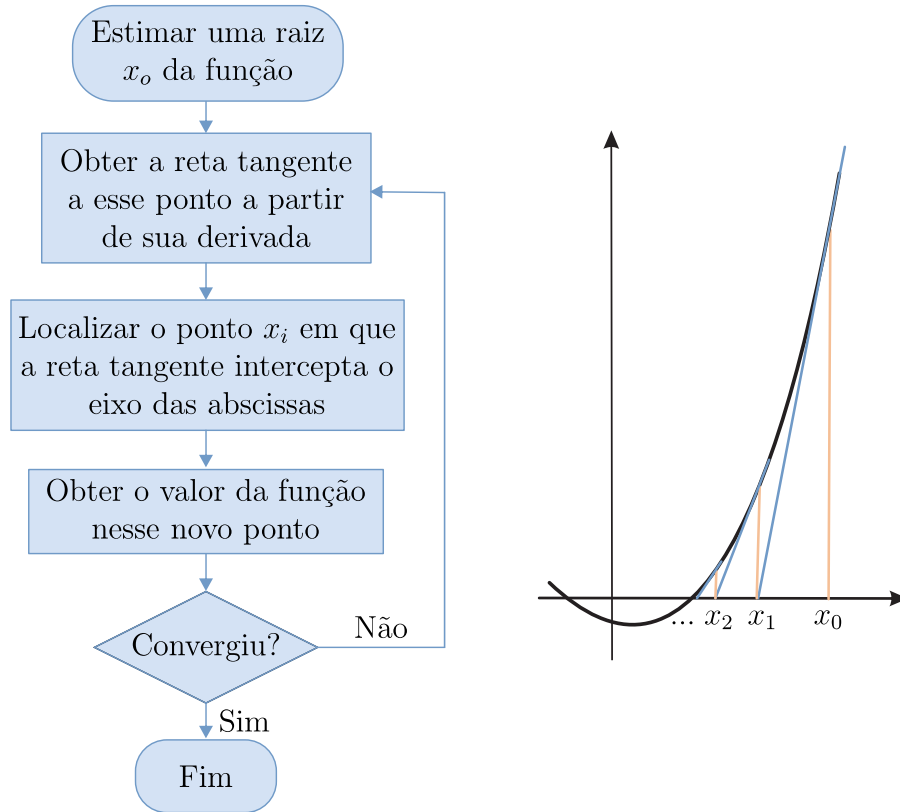
4.2.1 Método de Newton

O sistema de equações não lineares do módulo de escoamento é resolvido utilizando-se o método de Newton. A ideia fundamental desse método é mais facilmente compreendida no caso unidimensional, em que se deseja determinar, de forma iterativa, as raízes de uma função a partir de uma estimativa inicial. Calcula-se a reta tangente à função no ponto associado à estimativa. Determina-se, então, a interseção dessa reta tangente com o eixo das abscissas a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz. Repetindo esse procedimento, tem-se um método iterativo que pode ser utilizado para estimar a raiz de uma função. Matematicamente, o método de Newton para funções de uma variável é representado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (4.18)$$

em que k indica a k -ésima iteração e $f'(x_k)$ é a derivada da função f em x_k . Esse procedimento iterativo está ilustrado e descrito na figura 4.3.

Figura 4.3: Método de Newton para funções de uma variável



Fonte: do autor

Uma vez que o processo de discretização das equações diferenciais parciais origina problemas com número grande de incógnitas, lança-se mão de uma forma mais geral da linearização através da expansão truncada em série de Taylor, dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)\Delta \mathbf{x}, \quad (4.19)$$

em que \mathbf{f} é uma função vetorial não linear e \mathbf{J} é a matriz jacobiana composta pelas derivadas parciais da função \mathbf{f} com relação às incógnitas do sistema de equações. Assim, na sua forma geral, o procedimento iterativo para obtenção das incógnitas do sistema fica definido como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \quad (4.20)$$

Ressalta-se que a equação (4.20) representa apenas um nível iterativo do método de Newton. Em cada iteração computa-se uma matriz jacobiana, que consiste no procedimento mais custoso e desafiador da metodologia. A aproximação das componentes da matriz jacobiana pode ser obtida numericamente através de uma expansão truncada em série de

Taylor, eliminando-se os termos de segunda ordem. Assim procedendo, tem-se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(\mathbf{x}_k + \epsilon \hat{\mathbf{e}}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)}{\epsilon}, \quad (4.21)$$

em que i representa a linha e j a coluna, ϵ é o incremento ou perturbação na variável e $\hat{\mathbf{e}}_j$ é um vetor unitário cuja componente não nula é a j -ésima. Tendo em vista que aqui o método de Newton será empregado na solução de um problema numérico, a função \mathbf{f} consiste na função resíduo das equações de conservação discretizadas para cada volume de controle da malha utilizada. É importante ressaltar que a cada volume discreto serão atribuídas duas equações discretas correspondentes – a conservação da massa da água e a global. Desta forma, para uma malha de n volumes de controle o vetor de resíduos pode ser escrito como

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} R_1^p \\ R_1^s \\ \vdots \\ R_n^p \\ R_n^s \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

em que \mathbf{R}_k é a função resíduo avaliada em \mathbf{x}_k , os superíndices p e S indicam os resíduos da equação da conservação da massa global e da massa de água, associadas, respectivamente, às variáveis pressão e saturação de água. Já os subíndices indicam o índice do volume de controle em questão. Os resíduos $R_{\mathcal{P}}^S$ e $R_{\mathcal{P}}^p$ correspondentes ao volume de controle \mathcal{P} são, dados por

$$R_{\mathcal{P}}^S = \frac{\Delta V_{\mathcal{P}} \phi_{\mathcal{P}}}{\Delta t} \left[\frac{S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^w} - \left(\frac{S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^w} \right)^{\text{old}} \right] + \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \frac{\lambda_f^w}{B_f^w} \check{\mathbf{K}} \left[J_f^{-1} D_f (-\mathbf{P}_e + \rho_f^w \boldsymbol{\tau}_e) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f \\ + \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^w (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3 B_{\mathcal{P}}^w} \Delta V_{\mathcal{P}} + \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^w (p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{B_{\mathcal{P}}^w} \Delta V_{\mathcal{P}} - q_{\mathcal{P}}^w \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (4.23)$$

$$R_{\mathcal{P}}^p = \frac{\Delta V_{\mathcal{P}} \phi_{\mathcal{P}}}{\Delta t} \left[1 - B_{\mathcal{P}}^w \left(\frac{S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^w} \right)^{\text{old}} - B_{\mathcal{P}}^o \left(\frac{1 - S_{\mathcal{P}}^w}{B_{\mathcal{P}}^o} \right)^{\text{old}} \right] \\ + \sum_{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}} \check{\mathbf{K}} J_f^{-1} D_f \left[-\mathbf{P}_e (\lambda_f^w + \lambda_f^o) + \boldsymbol{\tau}_e (\rho_f^w \lambda_f^w + \rho_f^o \lambda_f^o) \right] \cdot \Delta \mathbf{A}_f \\ + \frac{\beta (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3} \Delta V_{\mathcal{P}} + \beta \frac{(p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{\Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}} - (B_{\mathcal{P}}^w q_{\mathcal{P}}^w + B_{\mathcal{P}}^o q_{\mathcal{P}}^o) \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (4.24)$$

Com essa definição dos vetores resíduos pode-se reescrever a equação (4.20) na forma

$$\mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x}_k = -\mathbf{R}_k, \quad (4.25)$$

em que \mathbf{J}_k é a matriz jacobiana avaliada em \mathbf{x}_k . A solução do sistema linear representado pela equação (4.25) é o vetor $\Delta \mathbf{x}_k$, um vetor com os incrementos das incógnitas do problema. Logo, a cada nível iterativo faz-se a atualização

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k. \quad (4.26)$$

Em termos de componentes, considerando uma malha de n volumes de controle, a equação (4.25) pode ser reescrita na forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial S_1^w} & \dots & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^p}{\partial S_n^w} \\ \frac{\partial R_1^s}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^s}{\partial S_1^w} & \dots & \frac{\partial R_1^s}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^s}{\partial S_n^w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_n^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^p}{\partial S_1^w} & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^p}{\partial S_n^w} \\ \frac{\partial R_n^s}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^s}{\partial S_1^w} & \dots & \frac{\partial R_n^s}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^s}{\partial S_n^w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta S_1^w \\ \vdots \\ \Delta p_n \\ \Delta S_n^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_1^p \\ R_1^s \\ \vdots \\ R_n^p \\ R_n^s \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

O procedimento iterativo para a solução das equações é

1. Estimar os campos iniciais de S^w e p , as quais são as variáveis primárias que compõem o vetor \mathbf{x}_0 ;
2. Determinar as propriedades do problema em função dos valores disponíveis para as variáveis primárias S^w e p ;
3. Computar o vetor de resíduos \mathbf{R}_k ;
4. Computar a matriz jacobiana \mathbf{J}_k ;
5. Resolver o sistema linear dado pela equação (4.25);
6. Atualizar o vetor de variáveis \mathbf{x}_k utilizando a equação (4.26);

7. Retornar ao item 2 até alcançar a convergência.

A fim de entender por completo o procedimento listado acima, resta apenas entender como se dão os cálculos do vetor de resíduos e da matriz jacobiana, os quais são citados nos itens 3 e 4, respectivamente.

4.2.2 Cálculo do vetor de resíduos

Reconhecendo os termos de acumulação, de fluxo, de tensão total volumétrica e de pressão nas equações (4.23) e (4.24), esses resíduos podem ser reescritos como

$$R_{\mathcal{P}}^S = T_{\text{acc},\mathcal{P}}^S + T_{\text{flux},\mathcal{P}}^S + T_{\text{ten},\mathcal{P}}^S + T_{\text{pres},\mathcal{P}}^S + T_{\text{fon},\mathcal{P}}^S, \quad (4.28)$$

$$R_{\mathcal{P}}^P = T_{\text{acc},\mathcal{P}}^P + T_{\text{flux},\mathcal{P}}^P + T_{\text{ten},\mathcal{P}}^P + T_{\text{pres},\mathcal{P}}^P + T_{\text{fon},\mathcal{P}}^P. \quad (4.29)$$

É importante destacar que este trabalho tomou como base o código implementado no projeto Siger III, parceria do laboratório SINMEC com a Petrobrás. Uma das tarefas desse projeto foi implementar um simulador bifásico imiscível e compressível utilizando o EbFVM e o método de Newton. Sendo assim, antes de começar este trabalho já se dispunha da implementação dos termos de acumulação, de fluxo e fonte – $T_{\text{acc},\mathcal{P}}^S$, $T_{\text{flux},\mathcal{P}}^S$, $T_{\text{fon},\mathcal{P}}^S$, $T_{\text{acc},\mathcal{P}}^P$, $T_{\text{flux},\mathcal{P}}^P$ e $T_{\text{fon},\mathcal{P}}^P$. A explicação a seguir será, pois, focada nos termos de tensão total volumétrica – $T_{\text{ten},\mathcal{P}}^S$ e $T_{\text{ten},\mathcal{P}}^P$ – e de pressão – $T_{\text{pres},\mathcal{P}}^S$ e $T_{\text{pres},\mathcal{P}}^P$ –, os quais consistem em termos extras advindos da consideração da deformabilidade da matriz porosa e foram implementados no código base. O procedimento para calcular a contribuição dos outros termos no vetor de resíduos e na matriz jacobiana pode ser encontrado em Maliska *et al.* (2016b). A aplicação das condições de contorno do módulo de escoamento também é idêntica à do projeto Siger III e pode ser encontrada em Maliska *et al.* (2016b).

TERMO DE TENSÃO TOTAL VOLUMÉTRICA:

Os termos de tensão total volumétrica correspondentes à equação de conservação da massa da água e global para o volume de controle \mathcal{P} são dados por

$$T_{\text{ten},\mathcal{P}}^S = \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^w (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3B_{\mathcal{P}}^w \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (4.30)$$

$$T_{\text{ten},\mathcal{P}}^P = \frac{\beta (\sigma_{v,\mathcal{P}} - \sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}})}{3 \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (4.31)$$

em que a compressibilidade β é uma função exclusiva das propriedades da rocha, Δt é o passo de tempo especificado e $\Delta V_{\mathcal{P}}$ é o volume do volume de controle de índice \mathcal{P} . A saturação $S_{\mathcal{P}}^w$ está definida para o volume de controle em questão e o fator volume de formação $B_{\mathcal{P}}^w$ é função da pressão $p_{\mathcal{P}}$, que também está definida para o volume de controle em questão. Já os valores de tensão total volumétrica atual e da iteração antiga, $\sigma_{v,\mathcal{P}}$ e $\sigma_{v,\mathcal{P}}^{\text{old}}$, são calculados para o nó \mathcal{P} a partir do deslocamento do sólido, conforme já foi explicado anteriormente na subseção 4.1. Portanto, a adição desses termos no vetor de resíduos é relativamente direta.

TERMO DE PRESSÃO:

Os termos de pressão correspondentes à equação de conservação da massa da água e global para o volume de controle \mathcal{P} são dados por

$$T_{\text{pres},\mathcal{P}}^S = \frac{\beta S_{\mathcal{P}}^w (p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{B_{\mathcal{P}}^w \Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (4.32)$$

$$T_{\text{pres},\mathcal{P}}^p = \beta \frac{(p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{P}}^{\text{old}})}{\Delta t} \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (4.33)$$

Mais uma vez, os parâmetros que definem o termo de pressão são funções de propriedades da rocha, especificações de simulação ou variáveis definidas para cada nó \mathcal{P} . Mais uma vez, tem-se uma adição direta desses termos no vetor de resíduos.

4.2.3 Cômputo da matriz jacobiana

O cômputo da matriz jacobiana requer o cômputo dos termos

$$\frac{\partial R_i^S}{\partial S_j^w} = \frac{\partial T_{\text{acc},i}^S}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{flux},i}^S}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{ten},i}^S}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{pres},i}^S}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{fon},i}^S}{\partial S_j^w}, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial R_i^S}{\partial p_j} = \frac{\partial T_{\text{acc},i}^S}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{flux},i}^S}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{ten},i}^S}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{pres},i}^S}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{fon},i}^S}{\partial p_j}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial R_i^p}{\partial S_j^w} = \frac{\partial T_{\text{acc},i}^p}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{flux},i}^p}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{ten},i}^p}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{pres},i}^p}{\partial S_j^w} + \frac{\partial T_{\text{fon},i}^p}{\partial S_j^w}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial R_i^p}{\partial p_j} = \frac{\partial T_{\text{acc},i}^p}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{flux},i}^p}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{ten},i}^p}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{pres},i}^p}{\partial p_j} + \frac{\partial T_{\text{fon},i}^p}{\partial p_j}, \quad (4.37)$$

em que o subíndice i é utilizado para denotar o volume de controle da equação disposta na i -ésima linha. Já o subíndice j representa o índice do volume de controle disposto na j -ésima coluna, em relação ao qual a derivada parcial é tomada. O procedimento para

calcular a contribuição dos termos de acumulação, de fluxo e fonte na matriz jacobiana pode ser encontrado em Maliska *et al.* (2016b) e Pacheco (2016). A seguir, apresenta-se o procedimento para calcular os termos de tensão total volumétrica e de pressão.

TERMO DE TENSÃO TOTAL VOLUMÉTRICA:

Aplicando as derivadas parciais nos termos de tensão total volumétrica dados pelas equações (4.30) e (4.31) tem-se

$$\frac{\partial T_{\text{ten},i}^S}{\partial S_j^w} = \frac{\delta_{ij} \beta (\sigma_{v,i} - \sigma_{v,i}^{\text{old}}) \Delta V_i}{3 \Delta t B_i^w}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial T_{\text{ten},i}^S}{\partial p_j} = - \left[\frac{\delta_{ij} \beta S_i^w (\sigma_{v,i} - \sigma_{v,i}^{\text{old}}) \Delta V_i}{3 \Delta t (B_i^w)^2} \right] \frac{\partial B_i^w}{\partial p_j}, \quad (4.39)$$

em que δ_{ij} é o operador delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.40)$$

e a derivada parcial do fator volume de formação em relação à pressão é calculada a partir da relação funcional $B^w(p)$ especificada para a compressibilidade da fase água. Tem-se ainda

$$\frac{\partial T_{\text{ten},i}^p}{\partial S_j^w} = 0 \quad (4.41)$$

e por fim

$$\frac{\partial T_{\text{ten},i}^p}{\partial p_j} = 0. \quad (4.42)$$

Esses são os termos de tensão total volumétrica necessários ao cômputo da matriz jacobiana, cuja estrutura foi apresentada na equação (4.27). Observa-se que as contribuições desses termos são nulas fora da diagonal principal, *i.e.*, seus valores são possivelmente não nulos apenas se $i = j$, de onde tem-se a utilização do operador delta de Kronecker.

TERMO DE PRESSÃO:

Aplicando as derivadas parciais nos termos de pressão dados pelas equações (4.32) e (4.33) tem-se

$$\frac{\partial T_{\text{pres},i}^S}{\partial S_j^w} = \frac{\delta_{ij} \beta (p_i - p_i^{\text{old}}) \Delta V_i}{\Delta t B_i^w}, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial T_{\text{pres},i}^S}{\partial p_j} = \frac{\delta_{ij} \beta S_i^w \Delta V_i}{\Delta t} \left[\frac{1}{B_i^w} - \frac{(p_i - p_i^{\text{old}})}{(B_i^w)^2} \frac{\partial B_i^w}{\partial p_j} \right], \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial T_{\text{pres},i}^p}{\partial S_j^w} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial T_{\text{pres},i}^p}{\partial p_j} = \frac{\delta_{ij} \beta \Delta V_i}{\Delta t}. \quad (4.46)$$

Esses são os termos de pressão necessários ao cômputo da matriz jacobiana. Novamente as contribuições desses termos são nulas fora da diagonal principal.

4.3 ACOPLAMENTO ENTRE OS MÓDULOS DE GEOMECÂNICA E DE ESCOAMENTO

O acoplamento entre os módulos de geomecânica e escoamento empregado neste trabalho é do tipo sequencial *two-way* e *fixed-stress*. Na seção 3.3 já foi apresentado um fluxograma do procedimento adotado para empregar esse acoplamento. O critério de convergência utilizado é

$$\frac{|\boldsymbol{\sigma}_{v,k} - \boldsymbol{\sigma}_{v,k-1}|_{\infty}}{1 \times 10^6} < \epsilon_{\text{tol}}, \quad (4.47)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_v$ é o vetor de tensão total volumétrica nos nós da malha, o subíndice k representa as iterações do acoplamento, o fator 1×10^6 provê uma comparação de tensão total volumétrica na escala de MPa, ϵ_{tol} é a tolerância especificada e o subíndice ∞ representa a norma do máximo, definida por

$$|\mathbf{x}|_{\infty} := \max_{i=1}^n (|x_i|). \quad (4.48)$$

5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentadas a validação e análise dos resultados provenientes da formulação matemática e numérica proposta¹. Primeiramente, será apresentada a validação do módulo de escoamento desconsiderando os efeitos geomecânicos. Nesse intuito, lança-se mão de um caso de deslocamento unidimensional em que há solução analítica disponível – o caso de *Buckley-Leverett*. A seguir, será apresentada a validação do módulo geomecânico considerando escoamento monofásico. Para isso, utiliza-se o problema clássico unidimensional da coluna de Terzaghi (Terzaghi, 1923), o qual também dispõe de solução analítica. Parte-se então à verificação da resposta física da metodologia proposta como um conjunto. Para tal efeito emprega-se um problema bidimensional que considera escoamento bifásico com efeitos geomecânico, o qual é conhecido na literatura como problema de acoplamento hidromecânico. Em seguida, apresenta-se um caso tridimensional utilizando uma malha não estruturada híbrida a fim de explorar as potencialidades numéricas e geométricas da formulação proposta.

5.1 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

Considera-se uma amostra de rocha homogênea inicialmente embebida em óleo na qual injeta-se água a uma vazão constante através de uma de suas fronteiras, conforme ilustrado na figura 5.1. Se a vazão de água for suficientemente alta, a influência da pressão capilar diminui de tal forma que o problema pode ser modelado como um processo de deslocamento unidimensional do tipo que permite uma solução analítica (Buckley & Leverett, 1942, Dullien, 1979, Hurtado, 2005).

A equação que modela o escoamento na direção do eixo x é dada por (Maliska *et al.*, 2015):

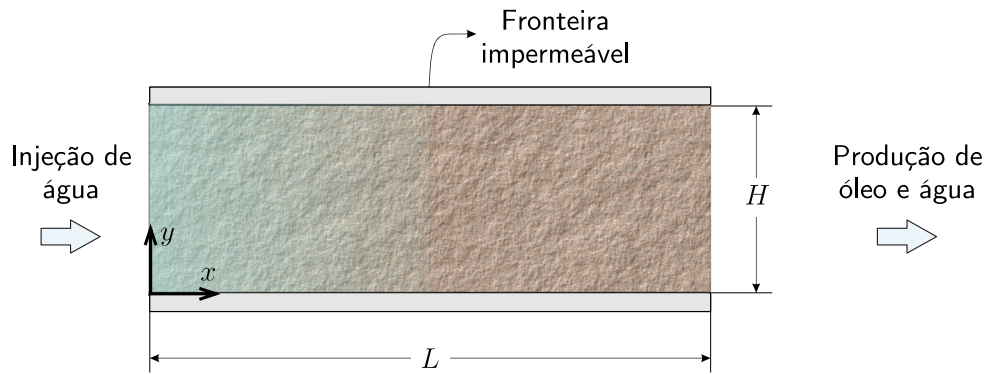
$$\phi \frac{\partial S^w}{\partial t} + v^T \frac{\partial F_f}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

em que S^w é a saturação de água, ϕ é a porosidade do meio, v^T é a velocidade total² e F_f é o fluxo fracionário definido por

¹Uma vez que foi utilizada uma única formulação numérica neste trabalho, a *performance* computacional não foi alvo de estudos mais detalhados.

²A velocidade total consiste na soma das velocidades das duas fases na direção x . Neste caso a equação de conservação é simplificada para $\nabla \cdot v^T = 0$ e a velocidade prescrita na fronteira $x = 0$ é constante. Logo, a velocidade total é constante ao longo do domínio (Hurtado, 2005).

Figura 5.1: Configuração do problema de Buckley-Leverett



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

$$F_f = \frac{\frac{k_r^w}{\mu^w}}{\frac{k_r^w}{\mu^w} + \frac{k_r^o}{\mu^o}}. \quad (5.2)$$

É possível mostrar que a solução analítica para esse problema depende do fluxo fracionário, o qual, por sua vez, é determinado pelas curvas de permeabilidade relativa e pela relação entre as viscosidades (Maliska *et al.*, 2015). A solução analítica deste problema pode ser encontrada no apêndice A.1.

Para os exemplos apresentados nesta seção foram empregadas as curvas de permeabilidade dadas pelo modelo de Corey *et al.* (1956). Para caracterizá-lo, definem-se S_{\max}^p e S_{\min}^p , as saturações máxima e mínima, respectivamente, da fase p . As permeabilidades relativas da água e do óleo são dadas, respectivamente, por

$$k_r^w = \alpha^w (\hat{S})^{n^w} \quad \text{e} \quad k_r^o = \alpha^o (1 - \hat{S})^{n^o}, \quad (5.3)$$

em que o multiplicador de Corey α^p e o expoente de Corey n^p são constantes conhecidas dependentes da interação entre as fases e a rocha e a saturação \hat{S} normalizada é calculada por

$$\hat{S} = \left(\frac{S^w - S_{\min}^w}{S_{\max}^w - S_{\min}^w} \right). \quad (5.4)$$

em que S_{\max}^w e S_{\min}^w são as saturações máximas e mínimas de água, respectivamente.

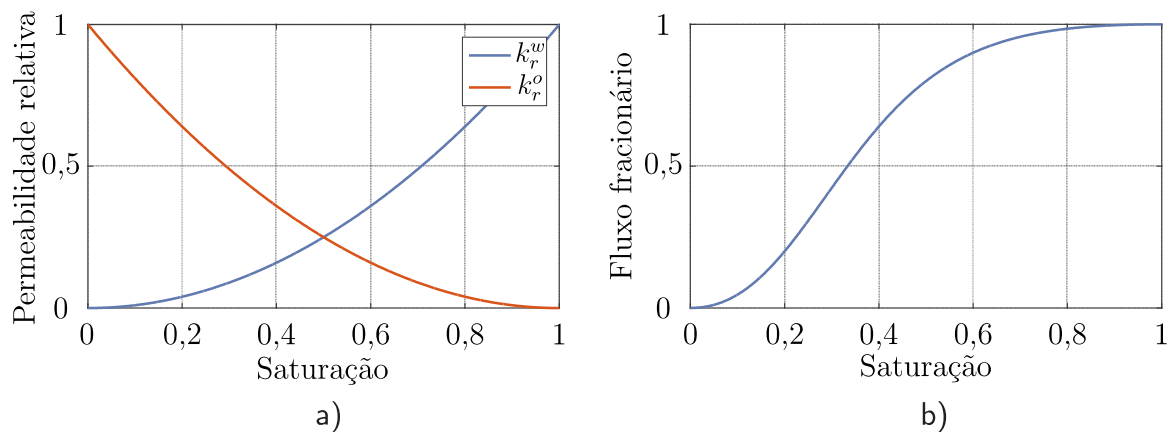
Os dados de entrada utilizados na simulação do problema de Buckley-Leverett estão listados na tabela 5.1. As curvas de permeabilidade relativa e fluxo fracionário podem ser visualizadas na figura 5.2.

A condição inicial especificada foi a de domínio embebido em óleo e pressão nula.

Tabela 5.1: Dados de entrada para o problema de Buckley-Leverett

Dado	Símbolo	Valor	Unidade
Largura da amostra	L	4	m
Altura da amostra	H	1	m
Porosidade	ϕ	1	-
Razão de viscosidade	μ^o/μ^w	4	-
Vazão volumétrica de água injetada	Q^w	1	m ³ /s
Multiplicador de Corey para a água	α^w	1	-
Expoente de Corey para a água	n^w	2	-
Multiplicador de Corey para o óleo	α^o	1	-
Expoente de Corey para o óleo	n^o	2	-
Saturação máxima de água	S_{\max}^w	1	-
Saturação mínima de água	S_{\min}^w	0	-

Figura 5.2: Curvas de permeabilidade e fluxo fracionário. a) Curva de permeabilidade relativa em função da saturação. b) Curva de fluxo fracionário em função da saturação.



Fonte: do autor

Quanto às condições de contorno, as fronteiras superior e inferior são impermeáveis, na fronteira esquerda injeta-se água com vazão volumétrica unitária e na fronteira direita a pressão é constante e nula.

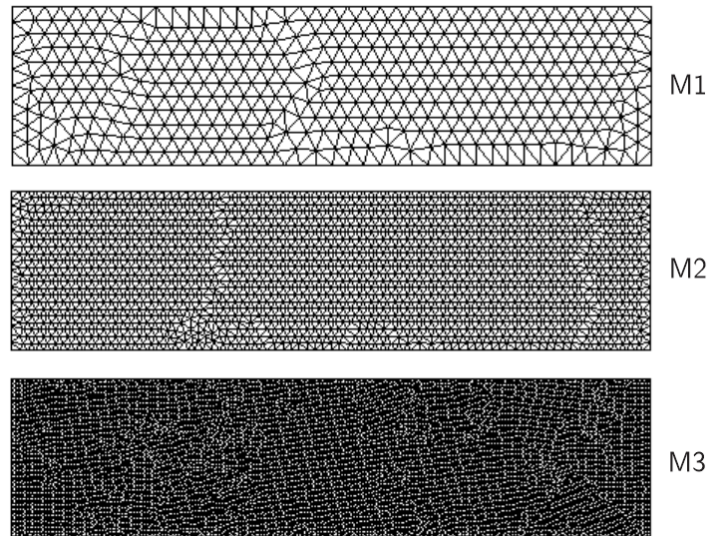
5.1.1 Malhas empregadas

Os resultados numéricos foram obtidos empregando três malhas com diferentes graus de refino, todas compostas de elementos triangulares. As características e a ilustração de cada uma das malhas estão listadas na tabela 5.2 e ilustradas na figura 5.3, respectivamente. O conjunto de malhas consiste em uma malha mais grosseira, à qual atribuiu-se o desígnio M1, uma malha intermediária, M2, e uma malha mais refinada, M3.

Tabela 5.2: Conjunto de malhas bidimensionais não-estruturadas triangulares

Malha	Número de elementos	Número de nós
M1	850	476
M2	3588	1895
M3	13700	7045

Figura 5.3: Malhas bidimensionais não-estruturadas utilizadas na solução do problema de Buckley-Leverett



Fonte: do autor

5.1.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos estão expostos nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6 para as malhas M1, M2 e M3, respectivamente. Tratam-se de quatro perfis de saturação, os quais representam os instantes de tempo 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 VPI – equivalentes a 0,8, 1,2, 1,6 e 2,0 segundos. O Volume Poroso Injetado (VPI) pode ser interpretado como um tempo adimensional dado por

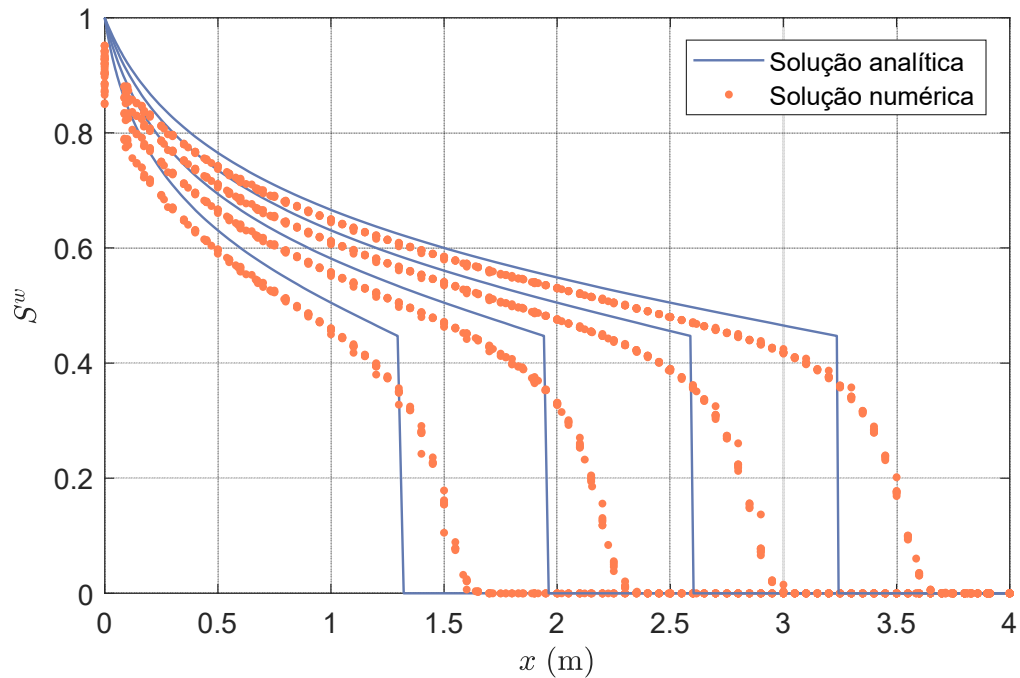
$$\text{VPI} = \frac{\text{Volume de fluido injetado}}{\text{volume poroso disponível}} = \frac{\int_0^t (Q_l)_{\text{ent}} dt}{\int_V \phi dV}, \quad (5.5)$$

em que $(Q_l)_{\text{ent}}$ é a vazão injetada no meio poroso.

As soluções numéricas apresentam o comportamento esperado, uma vez que os perfis numéricos de saturação se aproximam ao perfil correspondente à solução analítica à medida que a malha é refinada. Entretanto, até mesmo na malha mais refinada há considerável presença de difusão numérica, a qual é responsável pela suavização da discontinuidade dos perfis. Hurtado (2005) afirma que a difusão numérica advém da interpolação

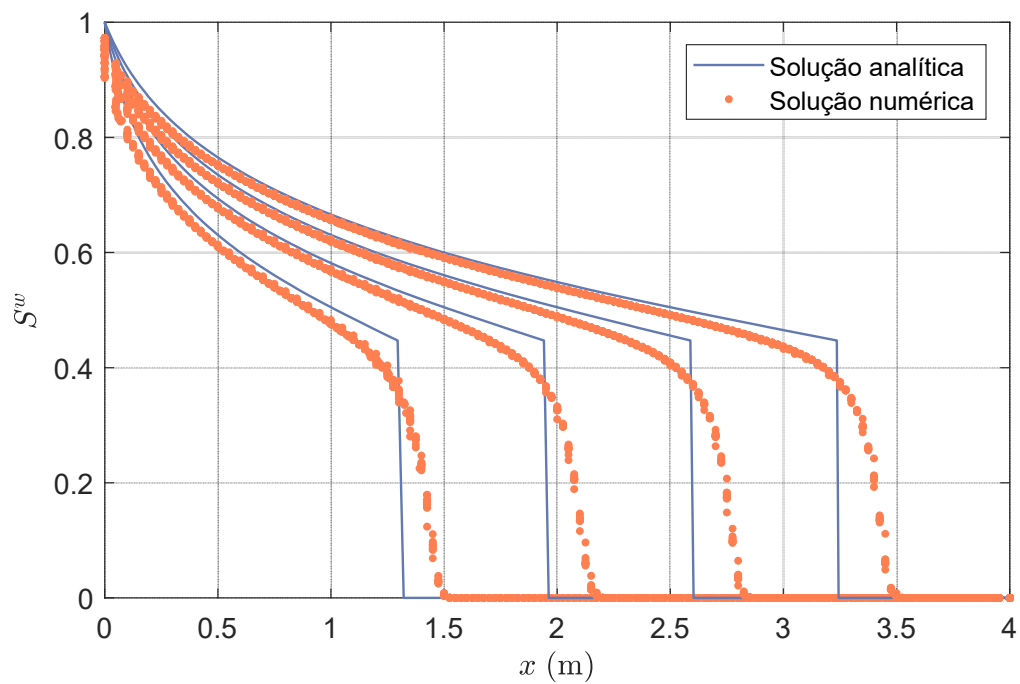
de primeira ordem utilizada nos termos advectivos. A fim de reduzir esse efeito poder-se-ia utilizar esquemas de interpolação de mais alta ordem (Maliska, 2004).

Figura 5.4: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha mais grosseira (M1)



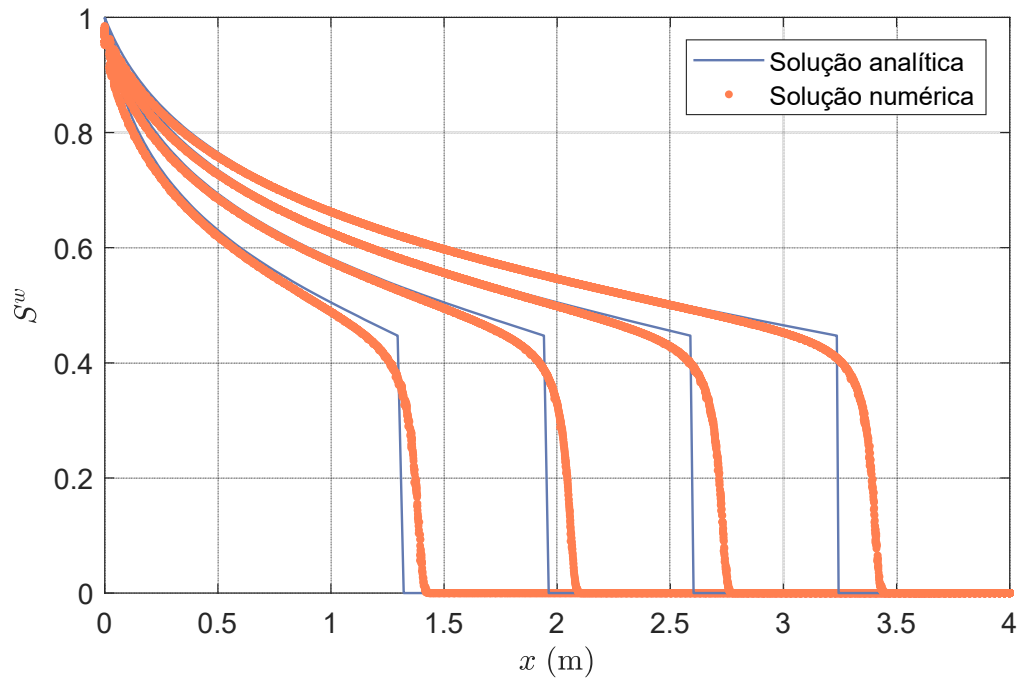
Fonte: do autor

Figura 5.5: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha intermediária (M2)



Fonte: do autor

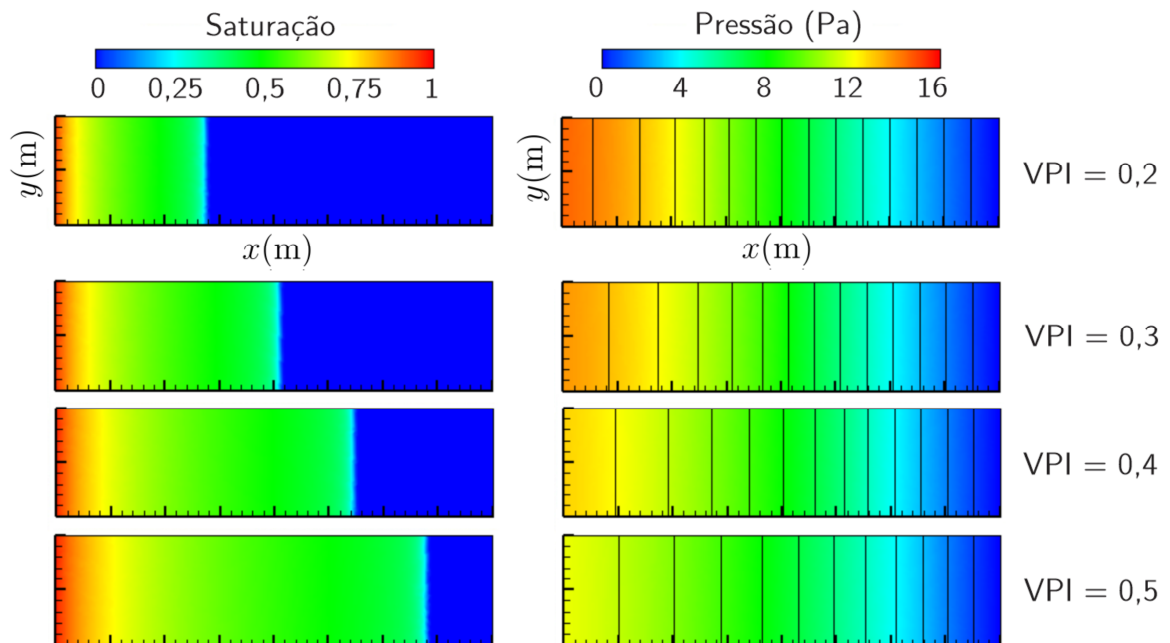
Figura 5.6: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 na malha mais refinada (M3)



Fonte: do autor

A fim de melhor ilustrar a solução numérica obtida, os campos de saturação e pressão oriundos do emprego da malha mais refinada estão ilustrados na figura 5.7.

Figura 5.7: Campos de saturação e pressão obtidos com a malha M3

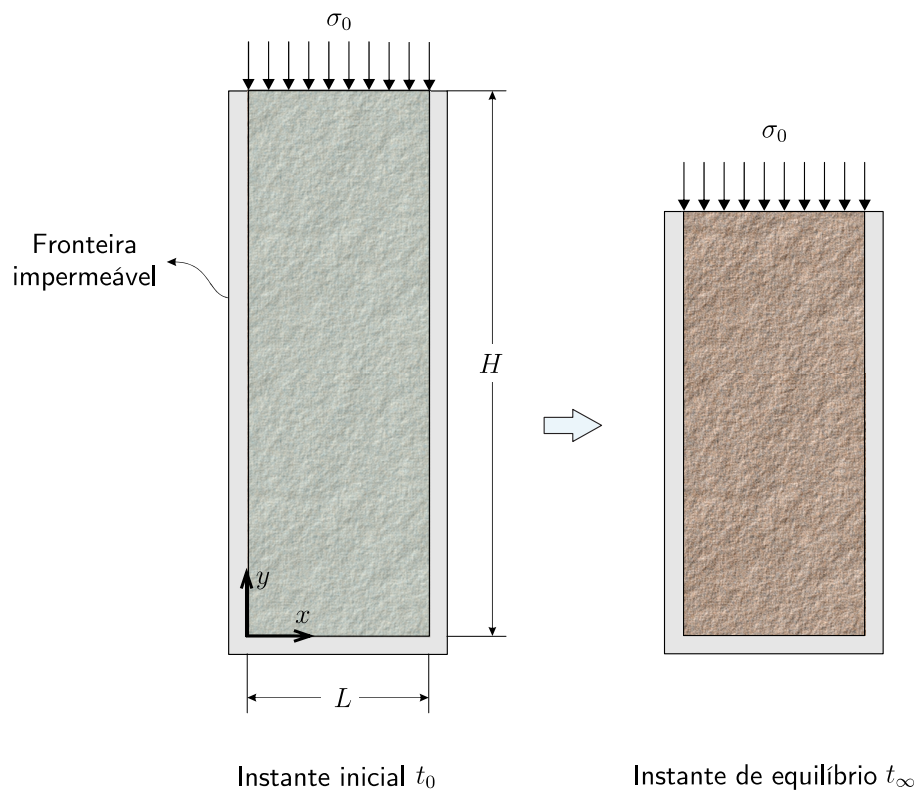


Fonte: do autor

5.2 PROBLEMA DE TERZAGHI

Considera-se uma coluna poroelástica unidimensional confinada, formada por um meio poroso saturado de fluido e submetida a uma carga conhecida σ_0 em seu topo. No instante inicial t_0 a fronteira superior da coluna deixa de ser impermeável, passando a ter pressão constante e nula e admitindo que fluido deixe a coluna. No instante de equilíbrio t_∞ a pressão do fluido se anulará e a matriz porosa será a única responsável pelo sustento da carga σ_0 . A configuração deste problema pode ser visualizada esquematicamente na figura 5.8.

Figura 5.8: Configuração do problema de Terzaghi



Fonte: do autor

Ressalta-se que foi utilizado o simulador bifásico especificando propriedades idênticas a ambos os fluidos. É imperativo que, se o simulador for consistente, os resultados obtidos sejam equivalentes ao do caso monofásico.

O fluido é considerado levemente compressível, com densidade ρ^f , variando linearmente de acordo com a equação

$$\rho^f = \rho^{f,r} [1 - C^f (p - p^r)], \quad (5.6)$$

em que ρ^r e p^r são a densidade e a pressão de referência, respectivamente, e C^f é a compressibilidade do fluido.

A pressão inicial deve ser determinada resolvendo o equilíbrio de forças entre a carga aplicada à coluna e o quanto dessa carga é distribuída entre o fluido e a matriz porosa.

Quanto às condições de contorno, na direção x ambas as fronteiras são impermeáveis e tem-se

$$\begin{cases} u = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \\ Q = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = L, \quad (5.7)$$

em que u é o deslocamento horizontal do sólido, σ_{xy} é a tensão de cisalhamento e Q é a vazão volumétrica de fluido. Na direção y tem-se para a fronteira inferior

$$\begin{cases} v = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \\ Q = 0 \end{cases} \quad \text{em } y = 0. \quad (5.8)$$

Já para a fronteira superior, que é permeável e funciona como um êmbolo, as condições de contorno são

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = -\sigma_0 \\ \sigma_{xy} = 0 \\ p = 0 \end{cases} \quad \text{em } y = H, \quad (5.9)$$

em que p é a pressão do fluido.

A solução analítica desse problema está exposta no apêndice A.2 e mais informações sobre seu desenvolvimento podem ser encontradas em Wang (2000). Uma vez que a solução analítica desconsidera os efeitos da gravidade e as não linearidades devidas à atualização da porosidade e da permeabilidade, esses efeitos também foram desconsiderados na obtenção da solução numérica.

Os dados de entrada utilizados na simulação do problema da coluna poroelástica de Terzaghi estão listados na tabela 5.3. Ressalta-se que a partir desses dados é possível calcular todos os coeficientes necessários à solução da solução analítica apresentada no apêndice A.2. Essa conversão de parâmetros pode ser encontrada em Wang (2000). Ainda, mais detalhes sobre as definições de cada um dos parâmetros podem ser encontradas em Tonelli (2016). A tolerância especificada para o acoplamento foi $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$.

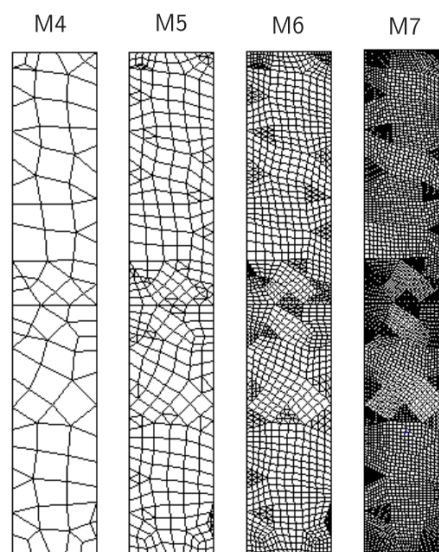
Tabela 5.3: Dados de entrada para o problema de Terzaghi

Dado	Símbolo	Valor	Unidade
Altura da coluna	H	6	m
Largura da coluna	L	1	m
Carga aplicada	σ_0	1×10^6	Pa
Porosidade	ϕ	0,19	-
Coefficiente de Poisson	ν	0,2	-
Módulo de elasticidade	E	6×10^9	Pa
Permeabilidade absoluta	\check{K}	$1,9 \times 10^{-15} \check{I}$	m^2
Viscosidade do fluido	μ	$1,0 \times 10^{-3}$	Pa.s
Compressibilidade do fluido	C_f	$3,030303 \times 10^{-10}$	1/Pa
Densidade de referência	ρ^r	$1,0 \times 10^3$	kg/m^3
Pressão de referência	p^r	0	Pa

5.2.1 Malhas empregadas

Os resultados numéricos foram obtidos empregando quatro malhas bidimensionais com diferentes graus de refino. A ilustração de todas as quatro malhas utilizadas para a solução deste problema podem ser visualizadas na figura 5.9. Todas essas malhas são classificadas como malhas não-estruturadas híbridas. No caso bidimensional isto significa que as malhas são compostas de elementos triangulares e quadrangulares simultaneamente. O número de nós e de elementos de cada uma das malhas do conjunto estão listados na tabela 5.4. À malha mais grosseira, atribuiu-se o designio M4; às duas malhas intermediárias, M5 e M6. Já a malha mais refinada recebeu o nome M7.

Figura 5.9: Malhas bidimensionais não-estruturadas híbridas utilizadas na solução do problema de Terzaghi



Fonte: do autor

Tabela 5.4: Conjunto de malhas bidimensionais não-estruturadas híbridas

Malha	Número de elementos	Número de nós
M4	91	107
M5	364	367
M6	1456	134
M7	5824	516

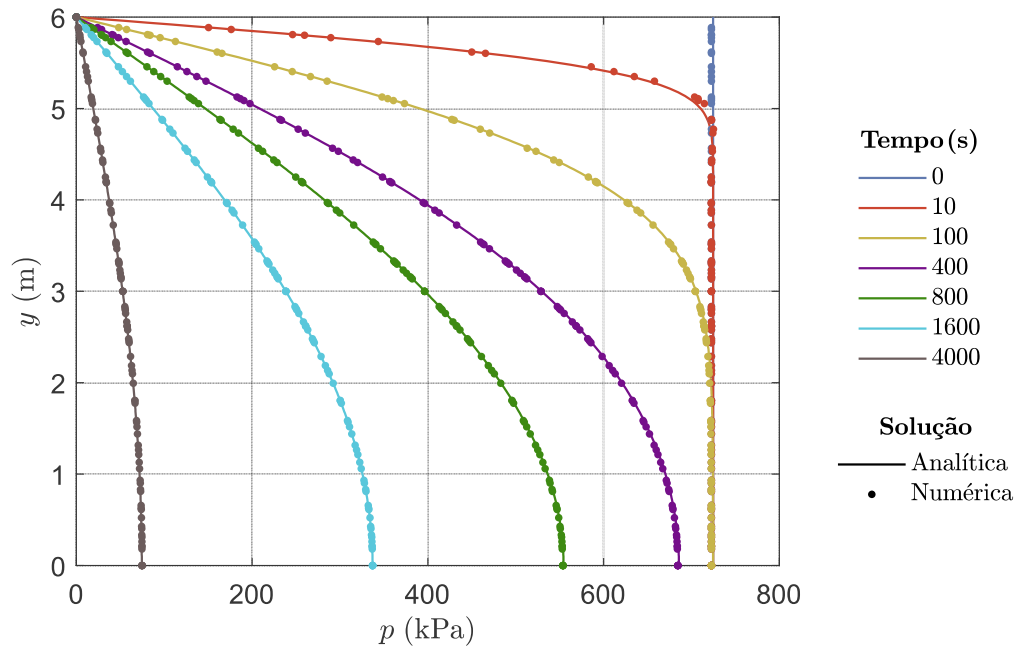
5.2.2 Resultados obtidos

Os perfis de pressão e deslocamento ao longo do eixo y da coluna estão ilustrados, para determinados instantes de tempo, nas figuras 5.10 e 5.11. No instante $t = 0$ tem-se o equilíbrio inicial, no qual parte da carga é suportada pelo fluido, e parte pelo meio poroso. O campo de pressão é, portanto, constante ao longo de todo o domínio nesse instante. Já o deslocamento é máximo na fronteira superior, tendo em vista que há uma prévia compactação da coluna devida somente à aplicação da carga e que a base da coluna é fixa. Com a abertura da fronteira superior o fluido passa, então, a deixar o domínio. Por consequência, a pressão decai de forma monolítica ao longo do tempo, tendendo a se anular após um tempo suficientemente grande. Por outro lado, o deslocamento vertical aumenta ao longo do tempo, já que a expulsão do fluido leva à compactação da rocha.

Nas figuras 5.10 e 5.11 é possível observar que tanto a solução analítica quanto a numérica seguem o comportamento físico esperado para este problema. Ademais, ambas as soluções estão bastante próximas até mesmo para a malha mais grosseira (M4), a qual foi utilizada para apresentar os perfis de pressão e deslocamento.

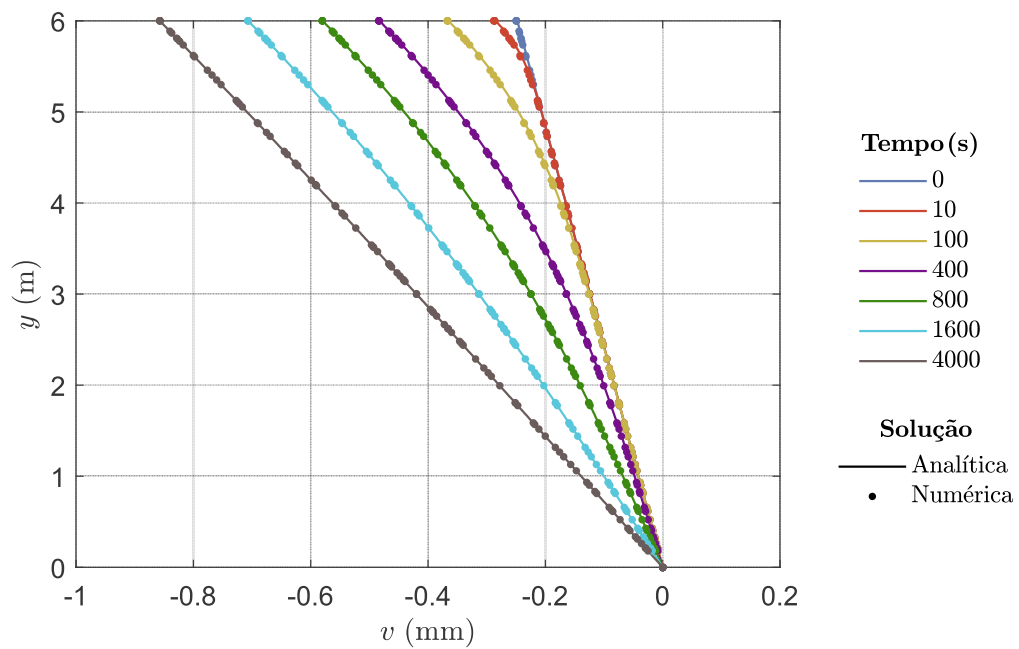
A pressão na base e o deslocamento vertical no topo da coluna ao longo do tempo podem ser visualizados nas figuras 5.12 e 5.13. Tratam-se das posições nas quais a pressão e o deslocamento vertical assumem seus valores máximos, respectivamente. A solução numérica está exposta para todas as malhas empregadas – M4, M5, M6 e M7. Verifica-se que, tanto na figura 5.12 quanto na 5.13 o comportamento da solução numérica se aproxima muito àquele correspondente à solução analítica para todas as quatro malhas utilizadas na obtenção da solução. Ressalta-se que, no gráfico, apenas alguns valores da solução numérica foram exportados a fim de se obter uma maior clareza na disposição dos resultados. O maior desvio relativo entre as soluções obtidas utilizando as malhas distintas são de cerca de 0,052% para a pressão na base da coluna e 1,217% para o deslocamento vertical no topo da coluna. Os maiores desvios foram identificados entre a malha mais refinada (M7) e a mais grosseira (M4), e normalizados pelo valor calculado com a malha mais refinada.

Figura 5.10: Resultados obtidos para perfis de pressão em diferentes tempo utilizando a malha mais grosseira (M4) e $\Delta t = 0,1s$



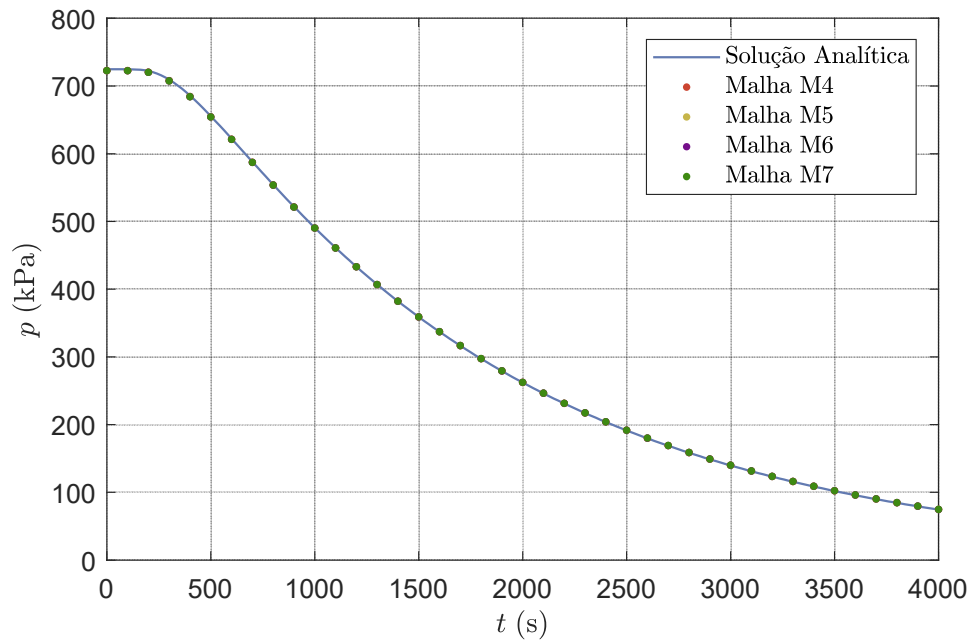
Fonte: do autor

Figura 5.11: Resultados obtidos para perfis de deslocamento vertical em diferentes tempo utilizando a malha mais grosseira (M4) e $\Delta t = 0,1s$



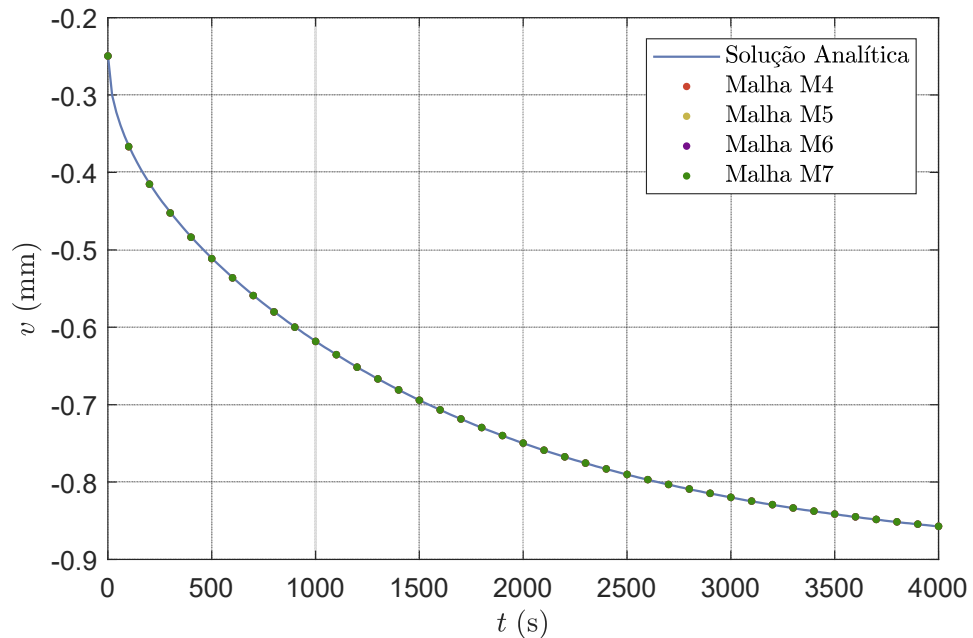
Fonte: do autor

Figura 5.12: Resultados obtidos para a pressão na base da coluna ao longo do tempo empregando as malhas M4, M5, M6 e M7



Fonte: do autor

Figura 5.13: Resultados obtidos para o deslocamento vertical no topo da coluna ao longo do tempo empregando as malhas M4, M5, M6 e M7

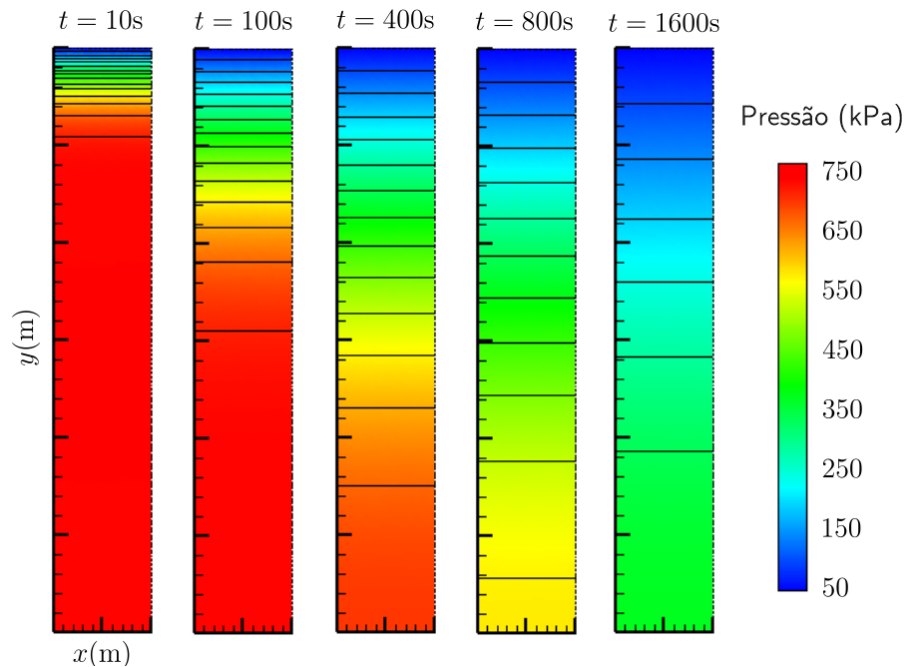


Fonte: do autor

A fim de melhor ilustrar a solução numérica obtida, os campos de pressão e deslocamento vertical oriundos do emprego da malha mais refinada estão ilustrados nas figuras 5.14 e 5.15, respectivamente. Em ambas as figuras verifica-se que o comportamento físico da solução está de acordo com o esperado. Além disso, observa-se que a solução numé-

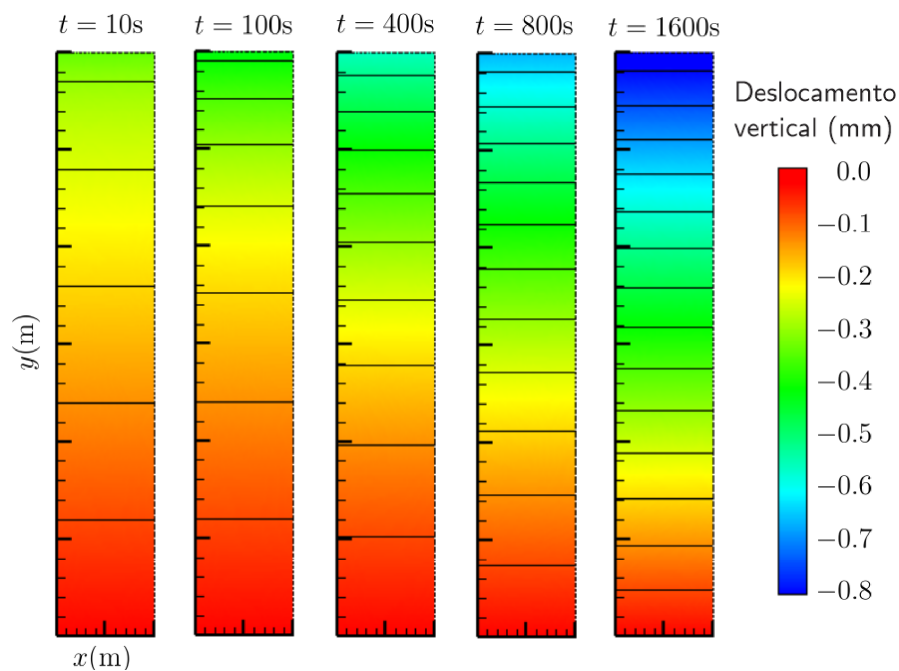
rica obtida é, de fato, unidimensional, a julgar pelas isolinhas de pressão e deslocamento vertical apresentadas nas figuras 5.14 e 5.15.

Figura 5.14: Campo de pressão obtido com a malha mais refinada (M7) para os instantes de tempo de 10, 100, 400, 800 e 1600s



Fonte: do autor

Figura 5.15: Campo de deslocamento vertical obtido com a malha mais refinada (M7) para os instantes de tempo de 10, 100, 400, 800 e 1600s



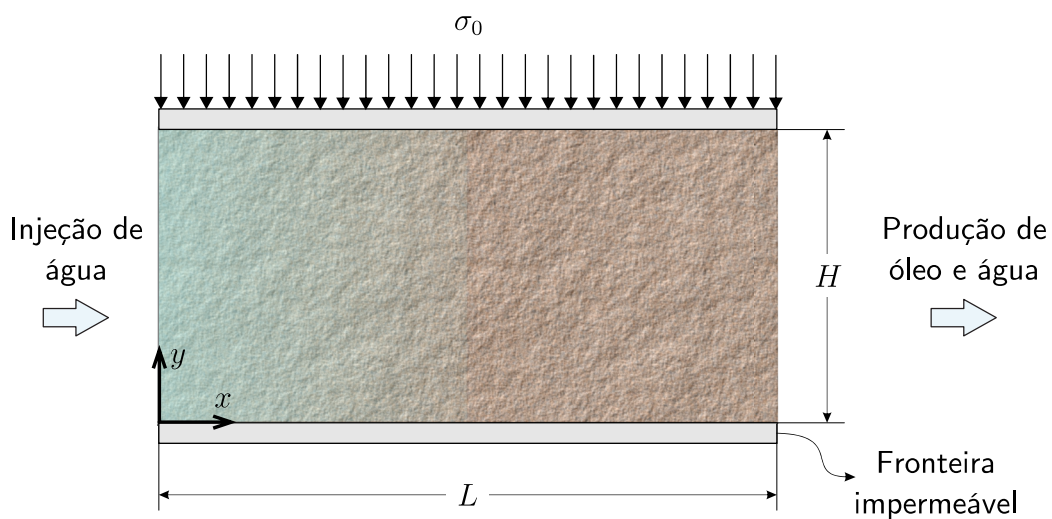
Fonte: do autor

5.3 SIMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO HIDROMECAÂNICO

Já foram validados separadamente os módulos de geomecânica e de escoamento bifásico. Agora, almeja-se verificar a resposta física da metodologia proposta como um conjunto, isto é, simulando um caso de escoamento bifásico com efeitos geomecânicos. Esse caso é conhecido na literatura como problema de acoplamento hidromecânico. Nesse intuito, concebe-se um problema bidimensional de acoplamento hidromecânico oriundo do processo de recuperação secundária de petróleo.

Considera-se um reservatório bidimensional, retangular e homogêneo inicialmente embebido em óleo. Esse reservatório está localizado abaixo de uma plataforma oceânica, de forma que seu topo está submetido a uma carga σ_0 . Lateralmente, o reservatório é circundado por poços. Na lateral esquerda tem-se um poço injetor de água; na esquerda, um poço produtor. A configuração deste problema de acoplamento hidromecânico pode ser visualizada de forma esquemática na figura 5.16.

Figura 5.16: Configuração do problema de acoplamento hidromecânico



Fonte: do autor

O modelo de permeabilidade relativa utilizado foi o modelo de Corey *et al.* (1956), o qual já foi utilizado na solução do problema de Buckley Leveret e está descrito por meio das equações 5.3 e (5.4).

Os fluidos são considerados compressíveis, com a densidade da fase p , ρ^p , variando linearmente de acordo com a equação

$$\rho^p = \rho^{p,r} [1 - C^p (p - p^r)], \quad (5.10)$$

em que ρ^r e p^r são a densidade e a pressão de referência e C^p é a compressibilidade da fase p .

A condição inicial especificada foi a de domínio embebido em óleo, isto é, no início tem-se saturação de água nula. A pressão inicial no domínio deve ser determinada a partir da solução do equilíbrio de forças entre a carga aplicada ao reservatório e o quanto dessa carga é suportada pelo fluido e pela matriz porosa. Essa condição é calculada executando uma simulação até a convergência temporal especificando-se que todas as fronteiras são impermeáveis.

Quanto às condições de contorno, a fronteira superior é impermeável e submetida à carga σ_0 , isto é, tem-se

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{yy} = -\sigma_0 \end{cases} \quad \text{em } y = H. \quad (5.11)$$

Já a fronteira inferior é impermeável e tem deslocamento vertical nulo. Assim,

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{em } y = 0. \quad (5.12)$$

A fronteira esquerda tem injeção de água prescrita e deslocamento horizontal nulo, de forma que

$$\begin{cases} Q^w = Q_{inj}^w \\ Q^o = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0. \quad (5.13)$$

Por fim, a fronteira direita representa um poço com pressão prescrita e tem deslocamento horizontal nulo. Logo, tem-se

$$\begin{cases} p = p_{prod} \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = L. \quad (5.14)$$

Ressalta-se que os deslocamentos horizontais são considerados nulos nas fronteiras laterais por conta de se desprezar os efeitos elásticos das camadas adjacentes ao reservatório.

Os dados de entrada utilizados na simulação do problema de acoplamento hidromecânico estão listados na tabela 5.5. A tolerância especificada para o acoplamento entre os módulos de escoamento e de geomecânica foi $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$.

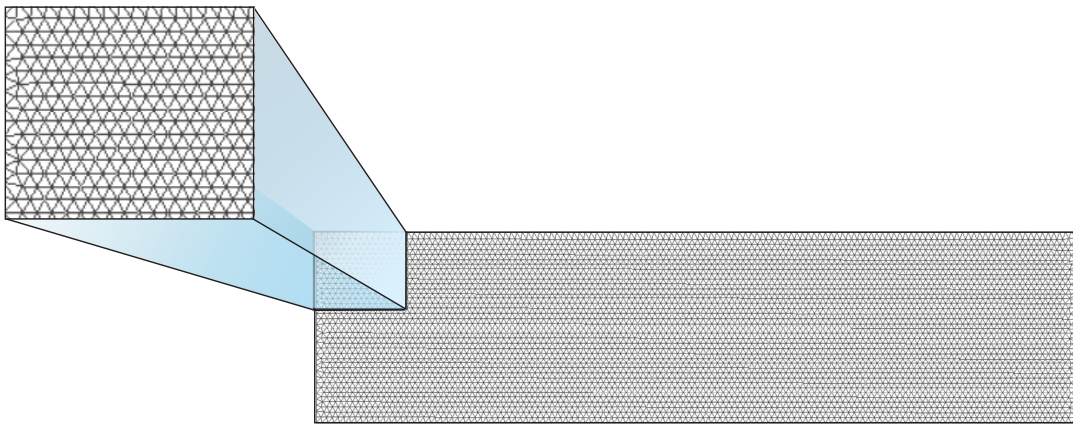
Tabela 5.5: Dados de entrada para o problema de acoplamento hidromecânico

Dado	Símbolo	Valor	Unidade
Largura do reservatório	L	200	m
Altura do reservatório	H	50	m
Viscosidade da água	μ^w	1×10^{-3}	Pa.s
Viscosidade do óleo	μ^o	1×10^{-2}	Pa.s
Densidade da água	ρ^w	1×10^3	kg/m ³
Densidade do óleo	ρ^o	8×10^2	kg/m ³
Porosidade inicial	ϕ^0	0,25	-
Módulo de elasticidade	E	$1,58 \times 10^{10}$	Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,34	-
Permeabilidade absoluta	\check{K}	$3,5 \times 10^{-14} \check{I}$	m ²
Carga aplicada	σ_0	1×10^8	Pa
Injeção de água	Q_{inj}^w	15	m ³ /dia
Pressão no poço produtor	p_{prod}	$3,6 \times 10^6$	Pa
Mult. de Corey para a água	α^w	1	-
Exp. de Corey para a água	n^w	2	-
Mult. de Corey para o óleo	α^o	1	-
Exp. de Corey para o óleo	n^o	2	-
Saturação máxima de água	S_{max}^w	1	-
Saturação mínima de água	S_{min}^w	0	-
Densidade de ref. da água	$\rho^{w,r}$	1×10^3	kg/m ³
Densidade de ref. do óleo	$\rho^{o,r}$	8×10^2	kg/m ³
Pressão de ref.	p^r	1×10^5	Pa
Compressibilidade da água	C^w	$4,6 \times 10^{-10}$	1/Pa
Compressibilidade do óleo	C^o	$3,030303 \times 10^{-10}$	1/Pa

5.3.1 Malhas utilizadas

Optou-se por utilizar uma malha não-estruturada com 10098 elementos triangulares e 5216 nós. A ilustração dessa malha está exposta na figura 5.17, em que, para uma melhor visualização dos elementos da malha, ampliou-se seu canto superior esquerdo.

Figura 5.17: Malha bidimensional não-estruturada utilizada na solução do problema de acoplamento hidromecânico



Fonte: do autor

5.3.2 Resultados obtidos

Os resultados deste caso foram obtidos no intuito não apenas de verificar o comportamento físico do escoamento sob a configuração proposta, mas também almejando avaliar a significância dos efeitos geomecânicos e dos efeitos de compressibilidade dos fluidos. Fazendo todas as combinações possíveis entre a ausência e a presença desses efeitos têm-se quatro casos, os quais estão listados, com seus respectivos nomes, na tabela 5.6. Para facilitar a identificação de cada um dos casos, seus nomes apresentam o prefixo GEO se consideram os efeitos geomecânicos; e RIG, se não os consideram. Ainda, recebem o sufixo COMP se consideram os efeitos de compressibilidade do fluido; INCOMP se não os consideram.

Tabela 5.6: Conjunto de casos considerados na solução do acoplamento hidromecânico

Nome	Geomecânica	Compressibilidade dos fluidos
GEO_COMP	Presente	Presente
RIG_COMP	Ausente	Presente
GEO_INCOMP	Presente	Ausente
RIG_INCOMP	Ausente	Ausente

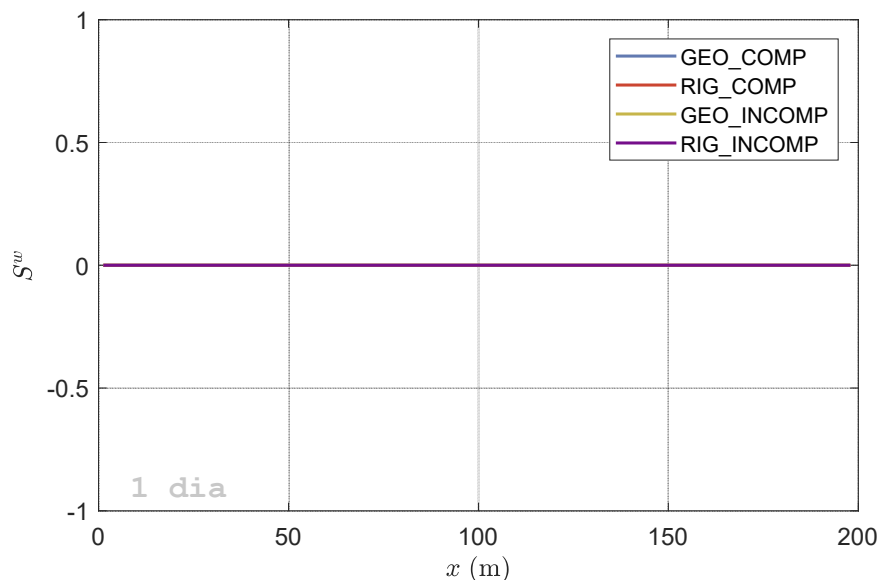
Aqui explora-se uma das grandes vantagens do uso de um modelo geomecânico: predição mais acurada da produção primária. Nessa fase ainda não se está injetando fluido para deslocar o óleo em direção aos poços produtores. A produção se dá majoritariamente pela diferença de pressão entre o reservatório e o poço produtor e pela compactação do solo proveniente da redução da pressão do fluido, fazendo com que o fluido seja expulso da rocha. Em todos os casos foram simulados 5 dias de recuperação primária e 2995 dias de recuperação secundária, totalizando 3000 dias de simulação.

RESULTADOS OBTIDOS PARA 1 DIA DE SIMULAÇÃO

Os perfis de saturação e pressão obtidos no instante de tempo de 1 dia ao longo da linha média do reservatório, em $y = 25\text{m}$, estão expostos nas figuras 5.18 e 5.19, respectivamente. Já o perfil de deslocamento vertical no topo do reservatório, em $y = 50\text{m}$, está ilustrado para este mesmo instante de tempo na figura 5.20.

O instante de tempo de 1 dia ainda corresponde à produção primária, de forma que só há óleo no domínio e portanto a saturação de água é nula ao longo de todo o domínio para todos os casos, conforme apresentado na figura 5.18. Os perfis de pressão e deslocamento vertical, contudo, diferem para cada um dos casos.

Figura 5.18: Perfis de saturação no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



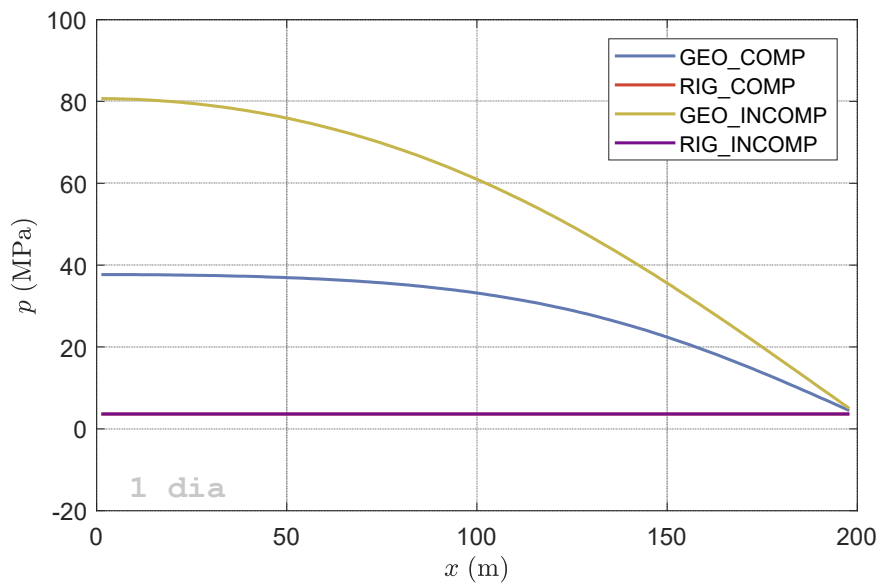
Fonte: do autor

Nos casos em que a rocha é perfeitamente rígida o deslocamento vertical é nulo. Nessa situação, a rocha suporta toda a carga σ_0 na etapa de equilíbrio, de forma que a pressão de poro não se altera, mantendo o valor arbitrário inicialmente especificado, que nesse caso é igual à pressão do poço produtor, *i.e.*, 3,6 MPa. Após um dia de produção, observa-se que a pressão de poro manteve o valor inicialmente especificado nos casos em que a rocha não se deforma. Já nos casos em que há efeito geomecânico, isto é, em que a rocha é deformável, parte da carga σ_0 é suportada pelo fluido. Nessa situação a pressão de poro adquire maior valor, conforme pode ser visualizado na figura 5.19.

Observa-se ainda na figura 5.19 que no caso em que há efeito geomecânico e a compressibilidade dos fluidos é levada em conta tem-se uma a pressão inferior a do caso em que os fluidos são incompressíveis. Isso ocorre porque a incompressibilidade impede que

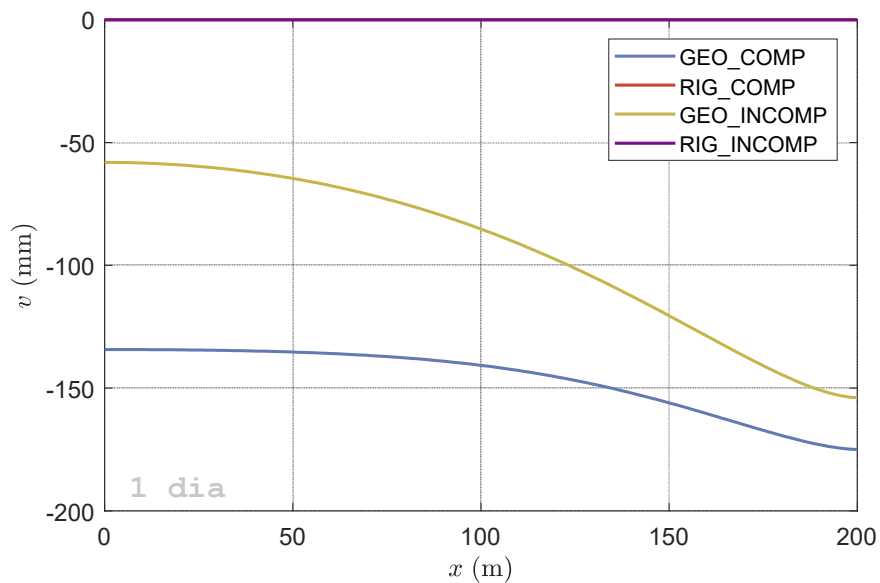
haja alteração da porosidade do meio e, conseqüentemente, a deformação volumétrica deve ser nula. Sendo assim, toda deformação vertical deve ser acompanhada de uma deformação horizontal, acarretando uma maior rigidez equivalente do meio. De fato, de acordo com a figura 5.20, o caso com fluidos incompressíveis apresentou menor deformação em magnitude, fazendo com que as tensões efetivas sejam menores e, por conseguinte, maior deve ser a parcela da carga resistida pelo fluido.

Figura 5.19: Perfis de pressão no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

Figura 5.20: Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 1$ dia ao longo do topo $y = 50\text{m}$



Fonte: do autor

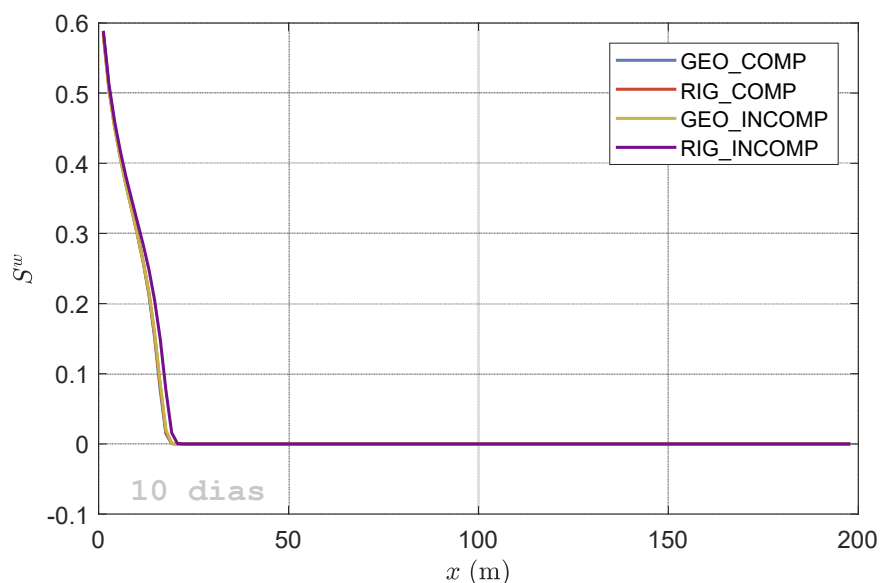
RESULTADOS OBTIDOS PARA 10 DIAS DE SIMULAÇÃO

Os perfis de saturação e pressão obtidos no instante de tempo de 10 dias ao longo da linha média do reservatório, em $y = 25\text{m}$, estão expostos nas figuras 5.21 e 5.22, respectivamente. Já o perfil de deslocamento vertical no topo do reservatório, em $y = 50\text{m}$, está ilustrado para este mesmo instante de tempo na figura 5.23.

No instante de tempo $t = 10$ dias, o poço injetor já foi ativado, ocorrendo, portanto, entrada de água no domínio, conforme pode ser visualizado no perfil de saturação ao longo da linha média do reservatório, o qual é apresentado na figura 5.21.

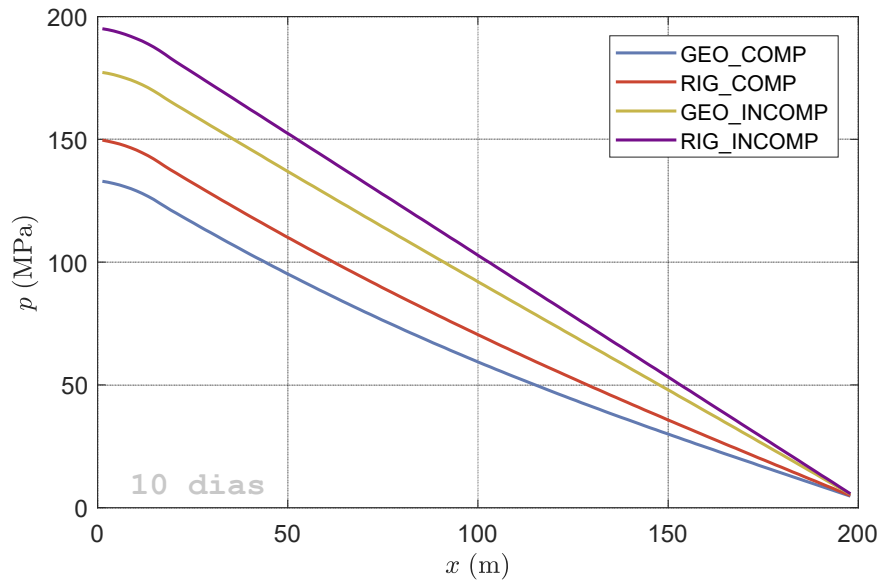
No caso em que a rocha é deformável, o aumento da pressão na região de injeção de água acarreta uma deformação no sentido de expandir a rocha, aumentando a porosidade nesse local. Sendo assim, tem-se um maior acúmulo de fluido nessa região, atrasando a frente de saturação, conforme pode ser observado na figura 5.21. Ademais, esse aumento do espaço disponível ao fluido leva a um alívio da pressão na região de injeção, como fica claro na figura 5.22. Verifica-se ainda na figura 5.22 que o efeito da compressibilidade dos fluidos é de reduzir o valor da pressão. Isso se explica pelo fato de que quando o fluido é incompressível o acúmulo de fluido no meio é devido unicamente à variação da porosidade. Esse menor acúmulo provoca fluxos mássicos maiores ao longo do domínio e, por conseguinte, maior gradiente de pressão.

Figura 5.21: Perfis de saturação no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

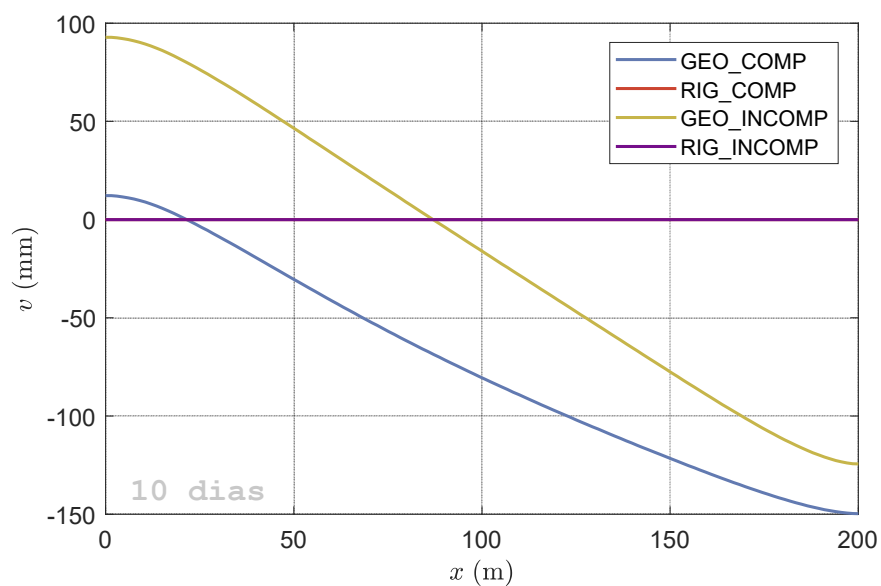
Figura 5.22: Perfis de pressão no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

De acordo com a figura 5.23, o deslocamento vertical é evidentemente nulo quando a rocha é rígida. Nos outros casos, ele segue o mesmo perfil que o do campo de pressão, sendo maior na região de injeção e menor na de produção. Ainda, como a pressão é maior quando os fluidos são incompressíveis, verifica-se que o correspondente deslocamento da rocha ficou em um patamar superior comparado ao caso de fluidos incompressíveis.

Figura 5.23: Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 10$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$



Fonte: do autor

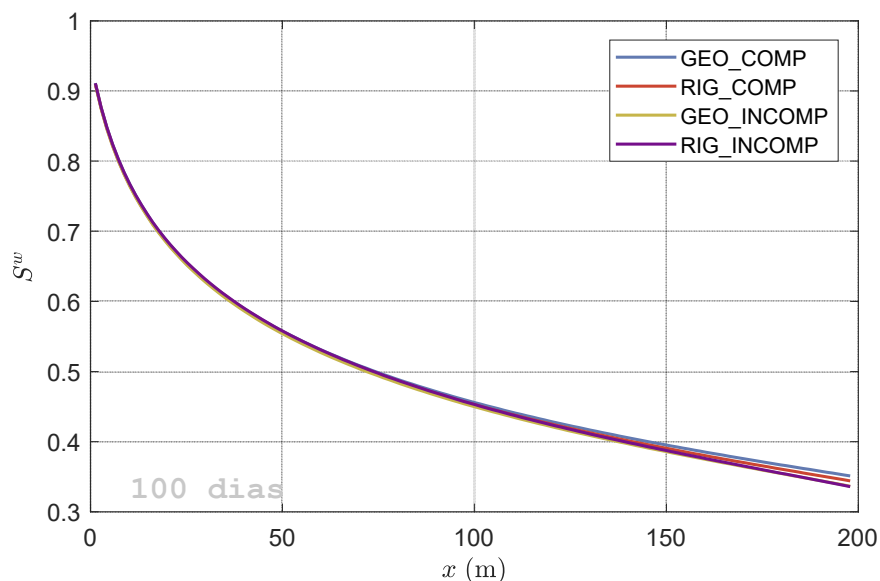
RESULTADOS OBTIDOS PARA 100 DIAS DE SIMULAÇÃO

Os perfis de saturação e pressão obtidos no instante de tempo de 100 dias ao longo da linha média do reservatório, em $y = 25\text{m}$, estão expostos nas figuras 5.24 e 5.25, respectivamente. Já o perfil de deslocamento vertical no topo do reservatório, em $y = 50\text{m}$, está ilustrado para este mesmo instante de tempo na figura 5.26.

No instante de tempo $t = 100$ dias a frente de água já alcançou a extremidade direita do reservatório, conforme pode ser visualizado no perfil de saturação ao longo da linha média do reservatório apresentado na figura 5.24. Também é possível perceber a partir dos perfis de pressão que, conforme foi-se produzindo óleo, o nível médio de pressão no reservatório decaiu. Esse comportamento é natural, tendo em vista a maior presença de água, que, devido a sua menor viscosidade, acarreta menor gradiente de pressão.

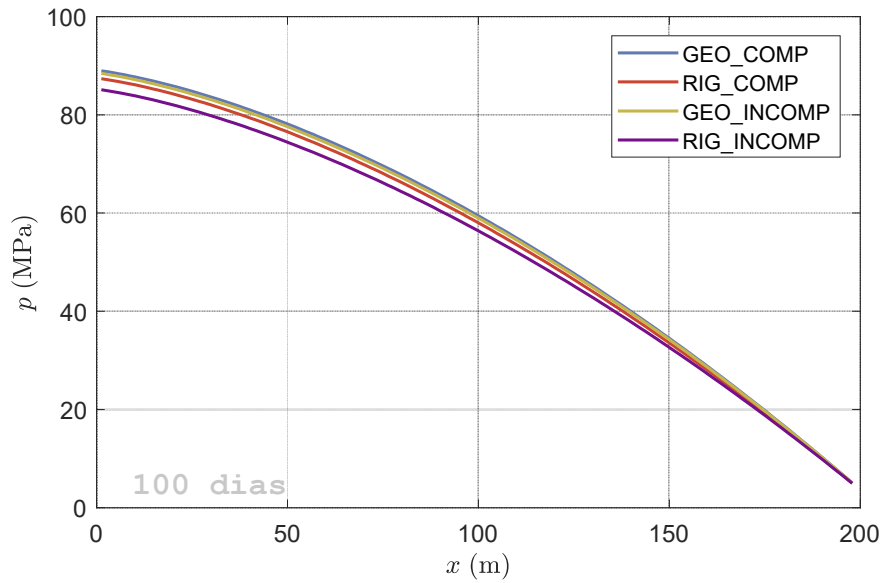
Ainda em relação à pressão, nota-se que os casos com geomecânica que apresentaram maior nível de pressão, invertendo o comportamento verificado para 10 dias e exposto por meio da figura 5.21. Isso provavelmente se deve à compactação do meio – que pode ser constatado nos valores negativos de deslocamento vertical presentes na 5.26 – levando a uma redução da porosidade do reservatório. Essa redução de porosidade expulsa o fluido ali contido em direção ao poço produtor, aumentando assim a vazão no reservatório e, por conseguinte, o gradiente de pressão. O raciocínio que justifica a maior pressão no instante de 100 dias nos casos de fluido compressível é similar: o fluido ora acumulado devido a sua compressibilidade é agora expulso e vai em direção ao poço produtor.

Figura 5.24: Perfis de saturação no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

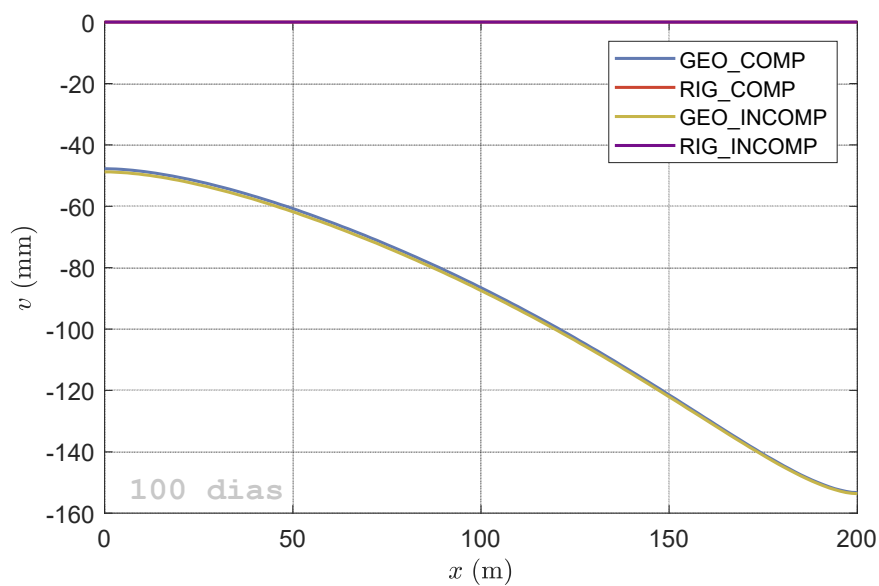
Figura 5.25: Perfis de pressão no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

No tocante ao deslocamento vertical apresentado na figura 5.26, a redução da pressão oriunda da maior presença de água provocou compactação vertical em toda a extensão do reservatório. Agora, contudo, os deslocamentos dos casos em que os fluidos são compressíveis e incompressíveis estão bastante próximos, uma consequência natural de se ter perfis de pressão similares.

Figura 5.26: Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 100$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$



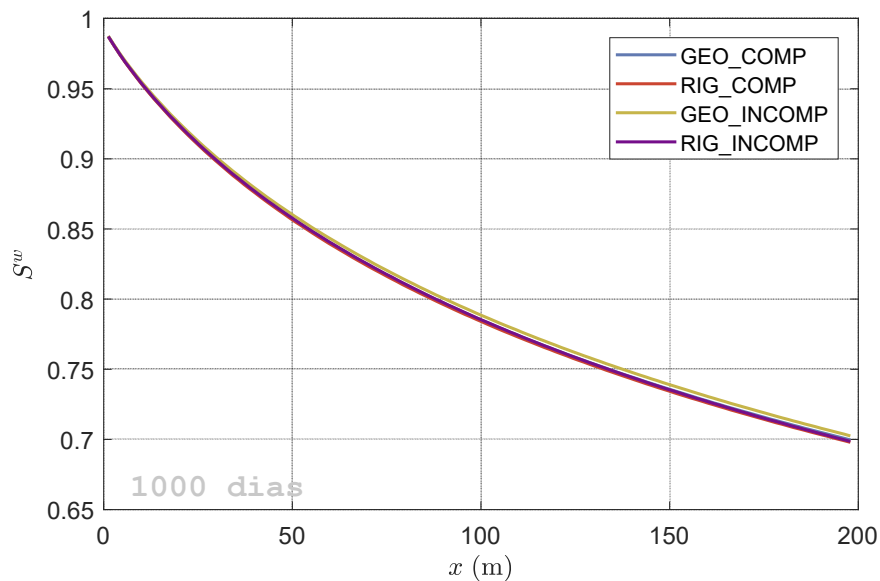
Fonte: do autor

RESULTADOS OBTIDOS PARA 1000 DIAS DE SIMULAÇÃO

Os perfis de saturação e pressão obtidos no instante de tempo de 1000 dias ao longo da linha média do reservatório, em $y = 25\text{m}$, estão expostos nas figuras 5.27 e 5.28, respectivamente. Já o perfil de deslocamento vertical no topo do reservatório, em $y = 50\text{m}$, está ilustrado para este mesmo instante de tempo na figura 5.29.

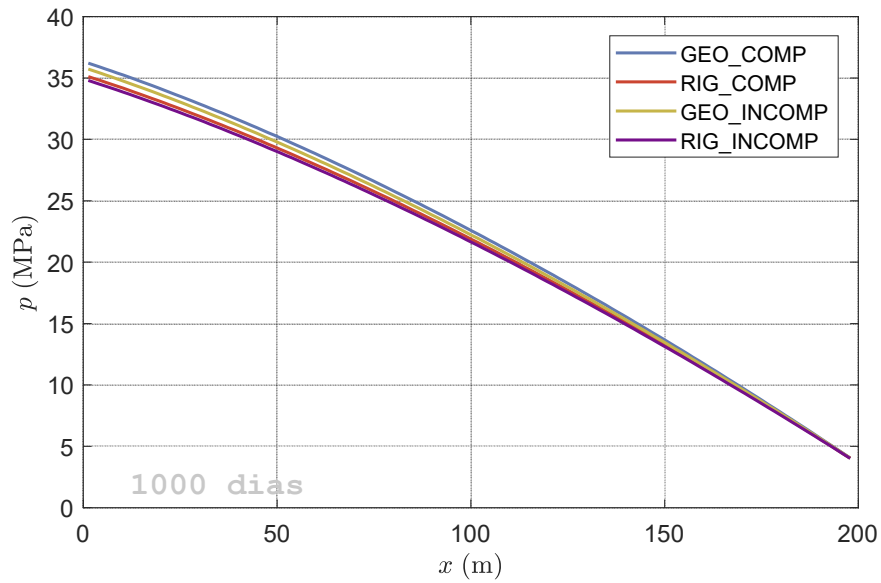
Os resultados obtidos para 1000 dias de simulação são bastante similares àqueles apresentados para 100 dias. Agora, entretanto, a frente de saturação avançou ainda mais e a pressão média do reservatório sofreu um decréscimo ainda maior, bem como a produção do óleo. Essa queda de pressão no reservatório levou o módulo geomecânico a calcular uma compressão ainda maior da rocha. É interessante verificar que, neste instante de tempo, tem-se um deslocamento vertical negativo de cerca de 18 cm no canto superior direito do reservatório, região que mais cedeu ao longo de toda a simulação. Esse valor corresponde a cerca de 0,36% da altura do reservatório.

Figura 5.27: Perfis de saturação no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



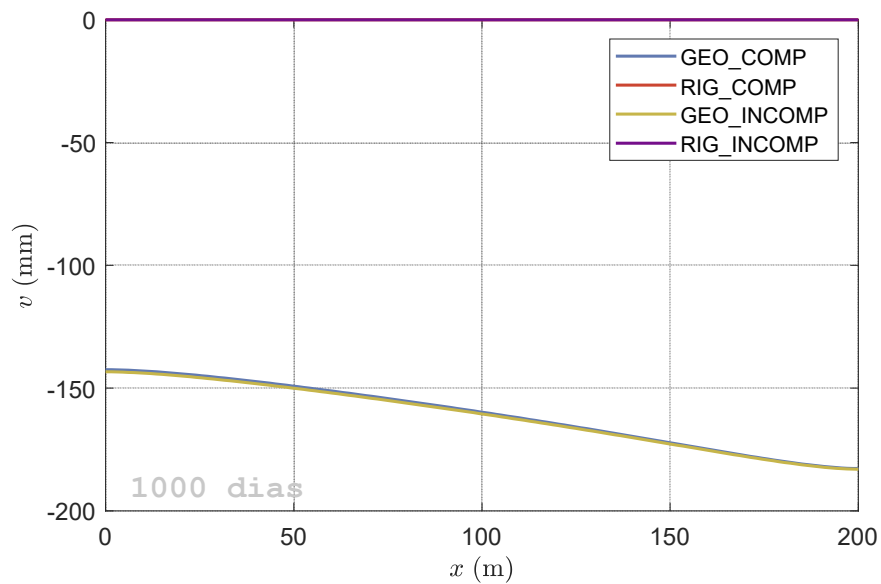
Fonte: do autor

Figura 5.28: Perfis de pressão no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo da linha média $y = 25\text{m}$



Fonte: do autor

Figura 5.29: Perfis de deslocamento vertical no instante de tempo $t = 1000$ dias ao longo do topo $y = 50\text{m}$



Fonte: do autor

RESULTADOS OBTIDOS PARA A PRODUÇÃO DE ÓLEO AO LONGO DO TEMPO

A taxa de produção de óleo Q_{prod} e a produção acumulada de óleo ao longo do tempo Q_{ac} podem ser visualizadas, respectivamente, nas figuras 5.30 e 5.31. Os valores obtidos para a produção de óleo acumulada ao final da simulação de cada um dos quatro casos considerados estão listados na tabela 5.7.

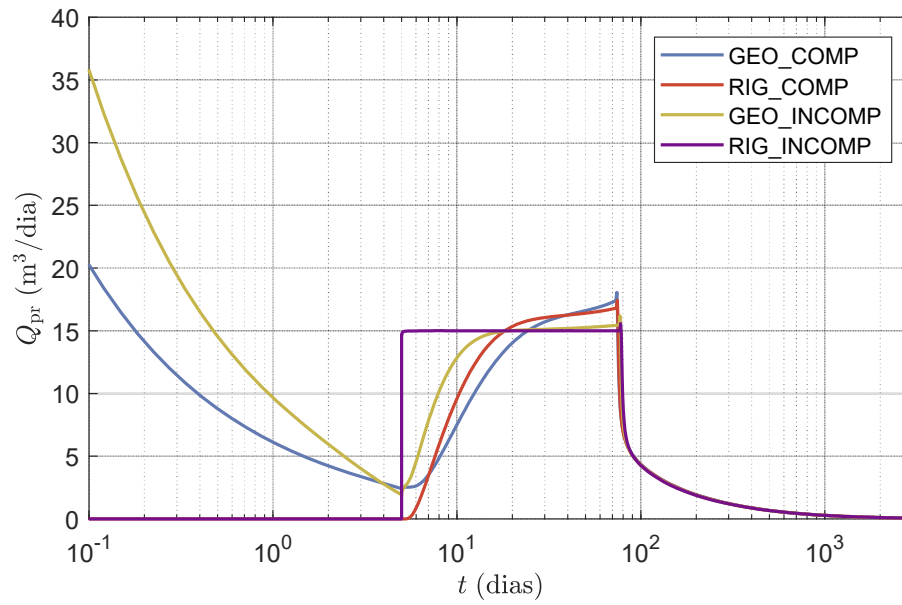
O gráfico de taxa de produção de óleo corrobora o raciocínio desenvolvido anteriormente para explicar o comportamento dos perfis de saturação, pressão e deslocamento vertical. Ainda, a produção instantânea de óleo explicita que a consideração dos efeitos geomecânicos permite captar o processo de recuperação primária que se dá ao longo dos 5 primeiros dias de simulação. Trata-se de um efeito físico bastante interessante que não é captado para modelos de rochas rígidas. É possível ainda verificar a partir deste resultado que a descrição transiente dos processos de extração de petróleo são razoavelmente sensíveis em relação à consideração ou não da deformação da rocha e da compressibilidade dos fluidos.

Já o gráfico que apresenta a produção de óleo acumulada ao longo do tempo, isto é, o volume total de óleo produzido até o momento, e a tabela de produção acumulada ao longo da simulação permitem tirar conclusões sobre os valores finais de produção obtidos numericamente. Os resultados sugerem que, no presente caso, considerar os efeitos geomecânicos e a compressibilidade das fases fluidas não tem grande impacto sobre o cálculo da produção acumulada para tempos de simulação maiores. É importante notar, no entanto, que apesar de não se obter uma má estimativa da produção acumulada de óleo, a negligência dos efeitos de deformação da rocha leva à perda de informações relevantes. Entre elas destacam-se a magnitude de deslocamento da rocha e o que isso pode ocasionar à sua estrutura, como danos aos poços e fraturas ou falhas. Além disso, verifica-se ainda que, neste caso, a estimativa da produção acumulada de óleo ao final da simulação é mais sensível aos efeitos geomecânicos que aos efeitos de compressibilidade dos fluidos no caso apresentado. Ressalta-se que ambos atuaram no sentido de aumentar a produção de óleo final.

Tabela 5.7: Produção acumulada de óleo ao final de 3000 dias de simulação do problema de acoplamento hidromecânico

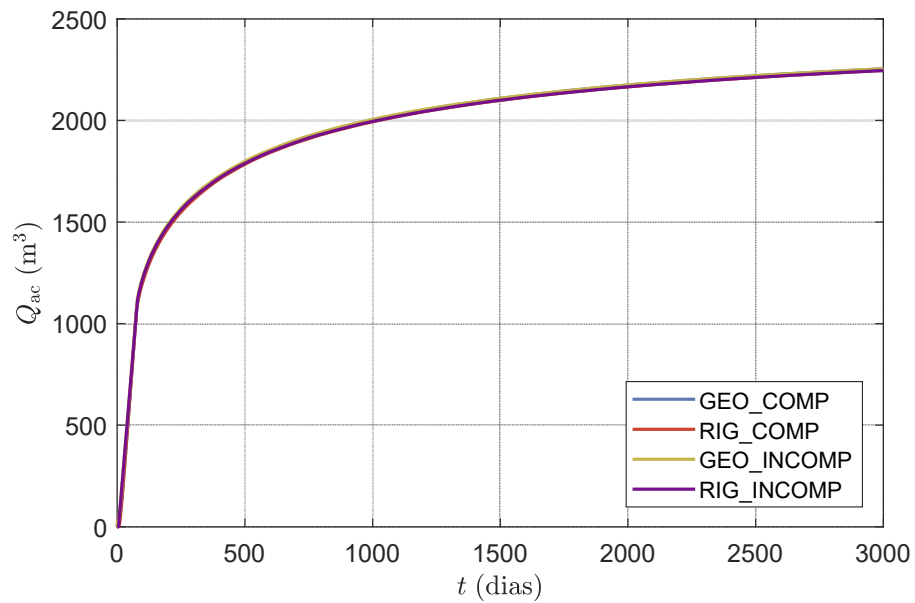
Nome	Produção acumulada de óleo (m ³)
GEO_COMP	2254,2
RIG_COMP	2246,1
GEO_INCOM	2254,0
RIG_INCOMP	2245,5

Figura 5.30: Taxa de produção de óleo ao longo do tempo



Fonte: do autor

Figura 5.31: Produção de óleo acumulada ao longo do tempo

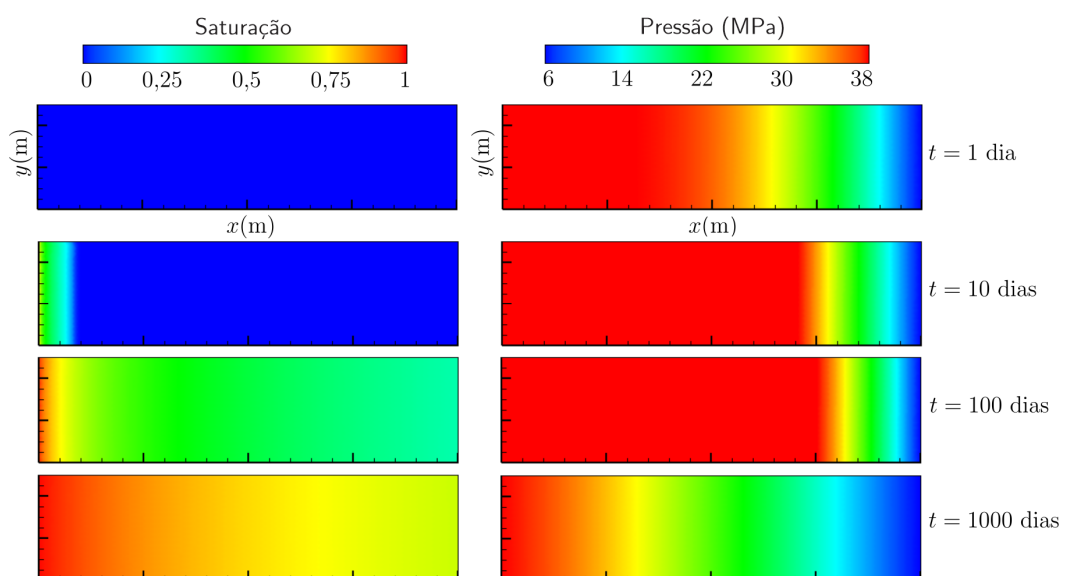


Fonte: do autor

A fim de ilustrar a solução numérica de maneira mais clara e visual, os campos bidimensionais de saturação e pressão obtidos para o caso GEO_COMP, o qual considera tanto os efeitos da geomecânica quanto da compressibilidade das fases fluidas, estão expostos na figura 5.32. Já os campos de deslocamento horizontal e vertical estão ilustrados na figura 5.33. Por fim, os campos de porosidade e permeabilidade absoluta podem ser visualizados na figura 5.34.

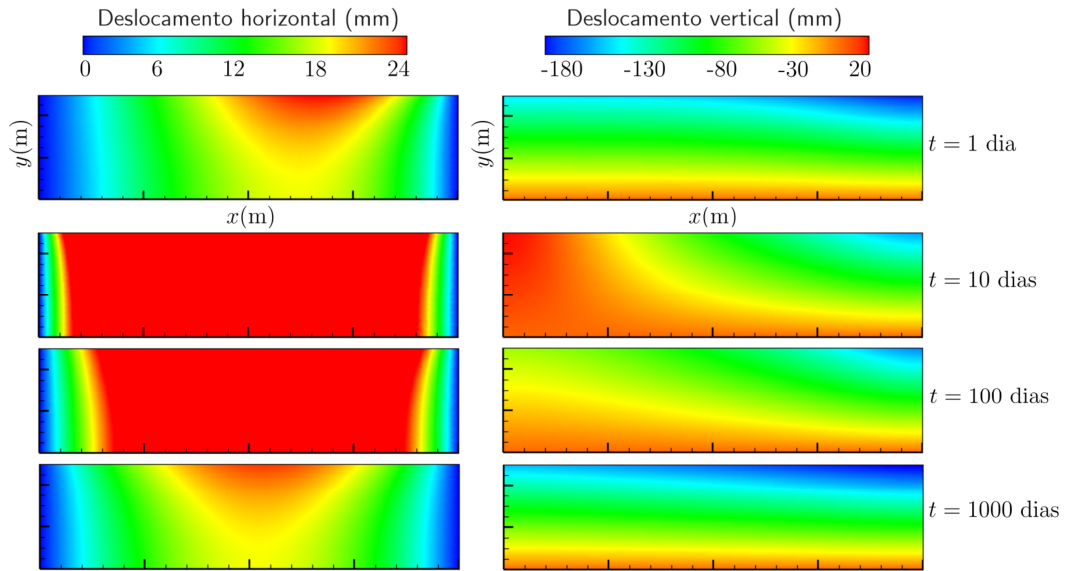
Os campos bidimensionais de saturação, pressão e deslocamento vertical facilitam ainda mais a visualização do comportamento físico explicado para o caso GEO_COMP por meio do raciocínio desenvolvido anteriormente a partir dos gráficos unidimensionais. O campo de deslocamento horizontal é uma consequência direta do comportamento do deslocamento vertical, já apresentado e explicado anteriormente, em conjunto com a especificação do coeficiente de Poisson. O campo bidimensional de porosidade também facilita o entendimento do raciocínio explicado a partir dos gráficos unidimensionais. É interessante verificar que a atuação conjunta da pressão e da carga σ_0 alteram a porosidade do domínio. Por fim, também é interessante verificar que a variação espacial e temporal da permeabilidade absoluta acompanha a variação da porosidade, de forma que os campos bidimensionais de porosidade e permeabilidade absoluta são muito semelhantes. Isso é decorrente da utilização da lei de Kozeny-Carman, que tem dependência direta e única da porosidade. A porosidade da rocha chegou a sofrer uma redução de até 1,28%, ao passo que a permeabilidade absoluta, cerca de 4,68%.

Figura 5.32: Campo de saturação e pressão para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias



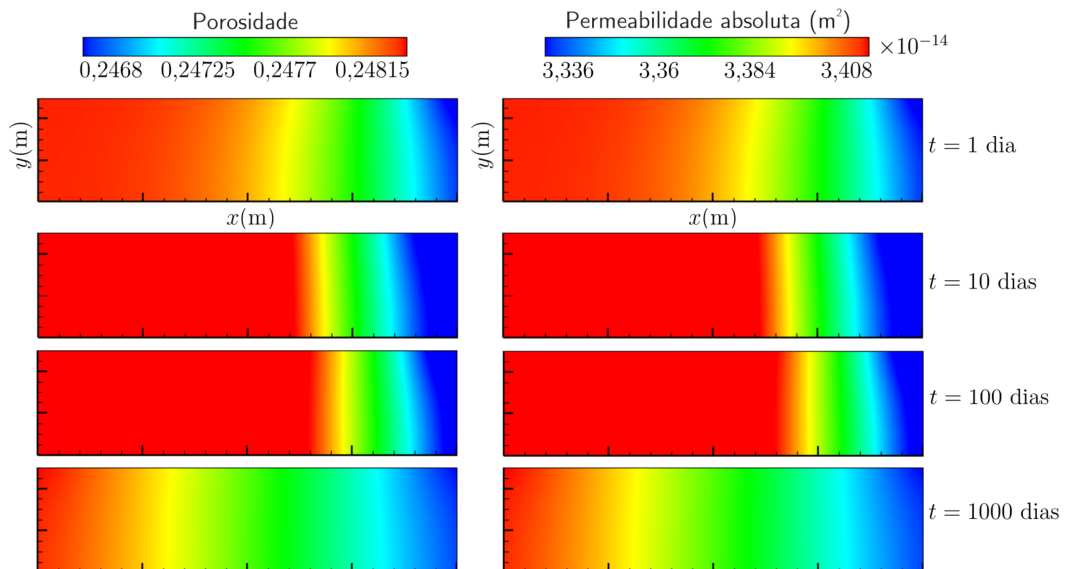
Fonte: do autor

Figura 5.33: Campo de deslocamentos horizontal e vertical para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias



Fonte: do autor

Figura 5.34: Campo de porosidade e permeabilidade absoluta para os instantes de tempo de 1, 10, 100 e 1000 dias



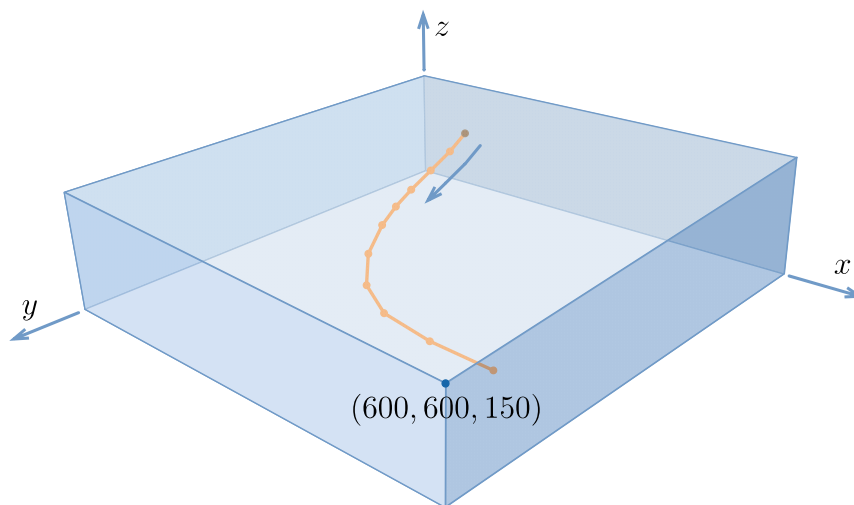
Fonte: do autor

5.4 DESLOCAMENTO TRIDIMENSIONAL EM MALHA HÍBRIDA

Com este caso almeja-se explorar as potencialidades da metodologia proposta, que é uma formulação unificada para a solução do escoamento bifásico e da geomecânica de um meio poroso. Trata-se de um caso tridimensional, utilizando uma malha não estruturada híbrida em que há uma malha cilíndrica ao redor da trajetória de um poço produtor curvo. São considerados diversos efeitos físicos, como a compressibilidade dos fluidos e os efeitos geomecânicos. Considera-se ainda a ação da gravidade e utiliza-se um modelo de poço bastante genérico, o qual é aplicável a malhas estruturadas e não estruturadas e é capaz de tratar casos anisotrópicos.

O reservatório deste caso é um paralelepípedo de dimensões 600 x 600 x 150 m cujo interior é atravessado por um poço produtor de trajetória curva. O domínio do reservatório e a trajetória do poço podem ser visualizados na figura 5.35.

Figura 5.35: Domínio tridimensional e trajetória do poço



Coordenadas dos pontos que definem a trajetória do poço

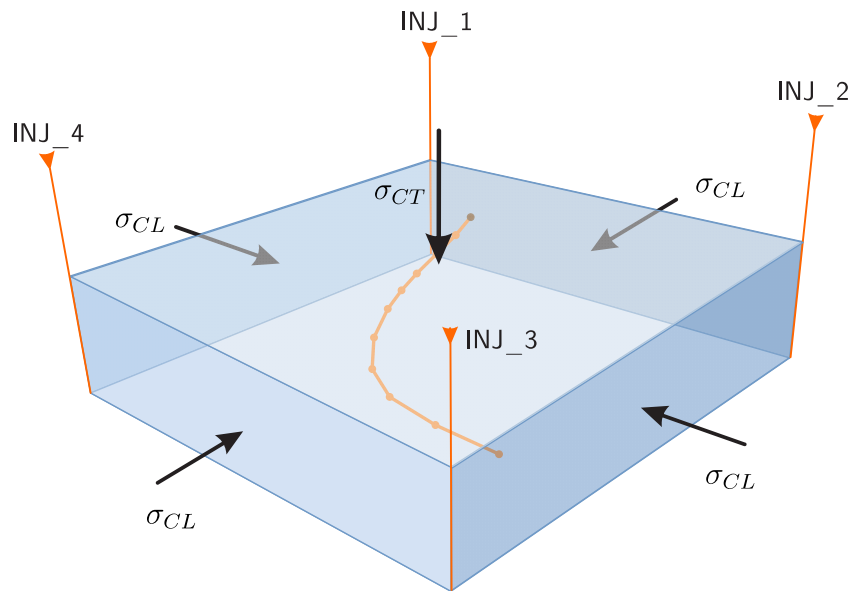
x	75	150	202	251	300	364	409	435	446	450	450
y	150	150	157	176	199	244	285	341	390	450	525
z	110	75	60	49	45	41	38	34	32	31	30

Fonte: do autor

Esse reservatório tridimensional é homogêneo e inicialmente embebido em óleo. Sua localização abaixo de uma plataforma oceânica é representada por meio de cargas de compressão atuando nas fronteiras laterais e superior, isto é, *sideburden* e *overburden*, respectivamente. Nas laterais, essa carga é denominada σ_{CL} ; no topo, σ_{CT} . As quatro arestas que

delimitam o domínio e estão alinhadas ao eixo z são poços injetores de água. A configuração do problema pode ser visualizada, de forma esquemática, na figura 5.36.

Figura 5.36: Configuração do problema tridimensional



Fonte: do autor

O modelo de permeabilidade relativa utilizado foi o modelo de Corey *et al.* (1956), o qual já foi utilizado na solução do problema de Buckley Leveret e está descrito por meio das equações 5.3 e (5.4).

Os fluidos são novamente considerados compressíveis, com a densidade da fase p variando linearmente de acordo com a equação (5.10).

Uma breve explicação sobre o modelo de poço utilizada pode ser encontrada no apêndice B. O poço produtor tem raio $r_{\text{well}} = 0,1$ m e opera à pressão constante, cujo valor é $p_{\text{prod}} = 1 \times 10^6$ Pa no nível de referência $z' = 110$ m, variando hidrostáticamente nas outras posições. A aceleração relativa à gravidade foi especificada ao longo da direção z com o valor $g_z = -9,81 \text{ms}^{-2}$.

A condição inicial especificada para a saturação foi a de domínio embebido em óleo. Isto significa que no início na simulação a saturação de água é nula. Já a pressão inicial no domínio é determinada por meio da solução do equilíbrio de forças entre as cargas σ_{CT} e σ_{CL} aplicadas ao reservatório e o quanto dessa carga é suportada pelo fluido e pela rocha.

Quanto às condições de contorno, a fronteira superior é impermeável e submetida à carga σ_{CT} . Isto é, tem-se

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{zz} = -\sigma_{CT} \end{cases} \quad \text{em } z = 150\text{m.} \quad (5.15)$$

Já a fronteira inferior é impermeável e tem deslocamento vertical nulo. Assim,

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{em } z = 0. \quad (5.16)$$

As fronteiras laterais são todas impermeáveis e sujeitas à carga de compressão σ_{CL} , de forma que

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{xx} = -\sigma_{CL} \end{cases} \quad \text{em } x = 600\text{m.} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{xx} = \sigma_{CL} \end{cases} \quad \text{em } x = 0. \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{yy} = -\sigma_{CL} \end{cases} \quad \text{em } y = 600\text{m.} \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} Q^w = 0 \\ Q^o = 0 \\ \sigma_{yy} = \sigma_{CL} \end{cases} \quad \text{em } y = 0. \quad (5.20)$$

Os dados de entrada especificados para a simulação deste problema estão listados na tabela 5.8. A tolerância especificada para o acoplamento foi $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$.

Tabela 5.8: Dados de entrada para o problema de tridimensional

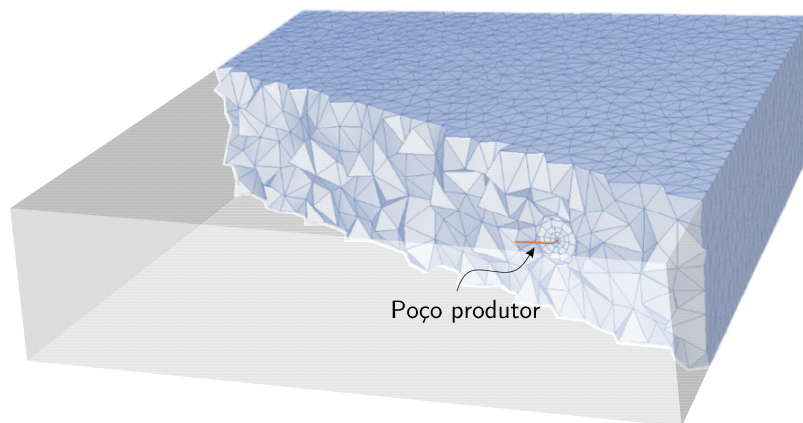
Dado	Símbolo	Valor	Unidade
Comprimento do reservatório	L	600	m
Largura do reservatório	W	600	m
Altura do reservatório	H	150	m
Viscosidade da água	μ^w	1×10^{-3}	Pa.s
Viscosidade do óleo	μ^o	4×10^{-3}	Pa.s
Densidade da água	ρ^w	1×10^3	kg/m ³
Densidade do óleo	ρ^o	8×10^2	kg/m ³
Porosidade inicial	ϕ^0	0,19	-
Módulo de elasticidade	E	$1,58 \times 10^{10}$	Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,33	-
Permeabilidade absoluta	\check{K}	$4 \times 10^{-13} \check{I}$	m ²
Carga aplicada no topo	σ_{CT}	9×10^7	Pa
Carga aplicada nas laterais	σ_{CL}	6×10^7	Pa
Injeção no poço INJ_1	$Q_{inj,1}^w$	250	m ³ /dia
Injeção no poço INJ_2	$Q_{inj,2}^w$	250	m ³ /dia
Injeção no poço INJ_3	$Q_{inj,3}^w$	250	m ³ /dia
Injeção no poço INJ_4	$Q_{inj,4}^w$	250	m ³ /dia
Pressão no poço produtor	p_{prod}	1×10^6	Pa
Nível de referência	z^r	110	m
Mult. de Corey para a água	α^w	0,4	-
Exp. de Corey para a água	n^w	2	-
Mult. de Corey para o óleo	α^o	0,7	-
Exp. de Corey para o óleo	n^o	3	-
Saturação máxima de água	S_{max}^w	1	-
Saturação mínima de água	S_{min}^w	0	-
Densidade de ref. da água	$\rho^{w,r}$	1×10^3	kg/m ³
Densidade de ref. do óleo	$\rho^{o,r}$	8×10^2	kg/m ³
Pressão de ref.	p^r	1×10^5	Pa
Compressibilidade da água	C^w	$4,6 \times 10^{-10}$	1/Pa
Compressibilidade do óleo	C^o	$3,030303 \times 10^{-10}$	1/Pa
Aceleração da gravidade	g_z	-9,81	m s ⁻²

5.4.1 Malha utilizada

A malha utilizada neste problema é não estruturada híbrida, havendo uma malha cilíndrica ao redor do poço produtor. Tem-se na composição da malha 9276 nós e 33379 elementos, sendo 29119 tetraedros, 2520 hexaedros, 860 prismas e 880 pirâmides. Na figura 5.37 é possível visualizá-la. Fez-se um corte a fim de que fosse possível verificar também a presença a malha cilíndrica na região próxima ao poço produtor. Essa porção cilíndrica da malha possui 80 divisões na direção axial, com espaçamentos menores nas extremidades e crescimento gradual até alcançar o meio da linha de trajetória. Esse maior grau de

refino próximo às extremidades permite uma captação mais fiel dos gradientes pronunciados que usualmente se concentram nessa região (Maliska *et al.*, 2016a). A razão entre o maior o menor espaçamento axial na malha cilíndrica é 40. Na direção radial tem-se 4 divisões uniformes; na direção circunferencial, 10 divisões. O raio externo da porção cilíndrica da malha é de 20m.

Figura 5.37: Malha tridimensional não estruturada híbrida utilizada na solução do problema tridimensional



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2016a)

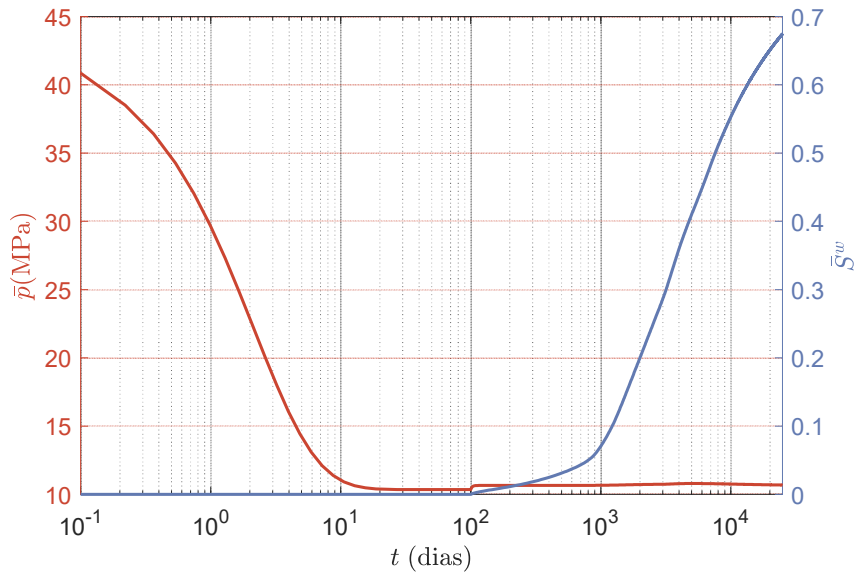
5.4.2 Resultados obtidos

Os resultados foram obtidos para 100 dias de produção primária e 24900 dias de produção secundária, totalizando 25000 dias de simulação.

Os campos médios de saturação de água e pressão ao longo de todo o domínio podem ser visualizados na figura 5.38. Já o campo médio de deslocamento vertical – ao longo do eixo z – no plano superior que delimita o domínio do reservatório está exposto na figura 5.39. Aqui, o valor médio de um campo genérico f é indicado por \bar{f} .

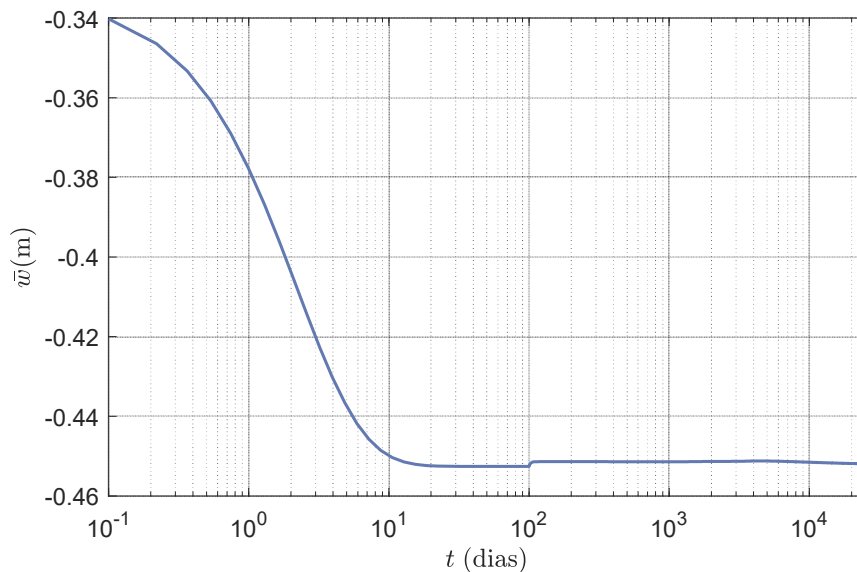
A pressão apresenta comportamento monótono decrescente durante os 100 primeiros dias de simulação, em que há apenas produção primária. A queda de pressão do fluido acarretada pela produção de óleo e a constante atuação da carga de compressão σ_{CT} ocasionam um acentuado deslocamento da rocha ao longo do eixo y no sentido de comprimi-la. Com a ativação dos poços injetores tem-se água adentrando o reservatório, que era inicialmente embebido em óleo. A saturação de água, portanto, começa a aumentar. A pressão também sofre um acréscimo com a injeção de água no domínio. Por conseguinte, parte do deslocamento w é recuperado, de forma que sua magnitude sofre uma leve redução.

Figura 5.38: Campos médios de saturação de água e pressão ao longo do domínio



Fonte: do autor

Figura 5.39: Deslocamento vertical médio ao longo do eixo z na fronteira superior do domínio



Fonte: do autor

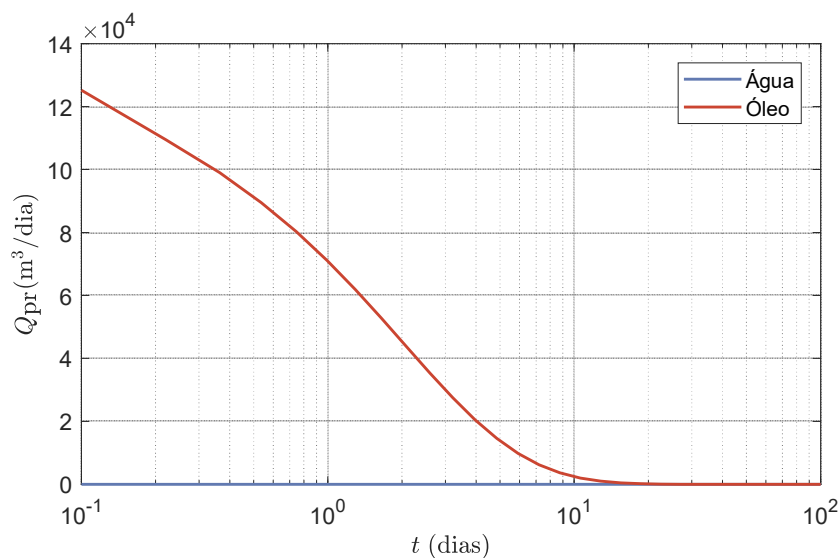
As taxas de produção de água e óleo ao longo do tempo podem ser visualizadas nas figuras 5.40 e 5.41. A primeira corresponde ao período de produção primária; a segunda, secundária. Já a produção acumulada é apresentada na figura 5.42.

Durante a produção primária tem-se, evidentemente, apenas produção de óleo. No início da simulação, a diferença de pressão entre o reservatório e o poço produtor é maior, e a vazão volumétrica produzida, portanto, mais acentuada. À medida que se produz óleo, a pressão no reservatório diminui, o que fomenta um decréscimo na produção instantânea de óleo. Verifica-se da figura 5.40 que 100 dias de produção primária é tempo suficiente para esgotar o potencial de produção primária do reservatório. É bastante interessante ve-

rificar que esse efeito se deve à consideração das cargas que atuam sobre o reservatório. Logo, desconsiderando a geomecânica da rocha não seria possível verificar a produção primária de óleo durante os 100 primeiros dias de simulação. A ativação dos poços injetores suscitam o reinício da produção de óleo, conforme pode ser visualizado na figura 5.41. Isso ocorre porque a injeção de água no domínio aumenta a pressão do reservatório, gerando a diferença de pressão necessária à produção. Por volta de 1000 dias de simulação tem-se o instante de *breakthrough*, *i.e.*, tem-se a chegada de água ao poço produtor. Sendo assim, água também passa a ser produzida. À medida que a frente de água avança ao poço produtor, a vazão volumétrica de água através do poço aumenta e a de óleo diminui. Ao final da simulação verifica-se que a produção instantânea de óleo decaiu até um valor significativamente baixo em relação à produção instantânea no início da simulação.

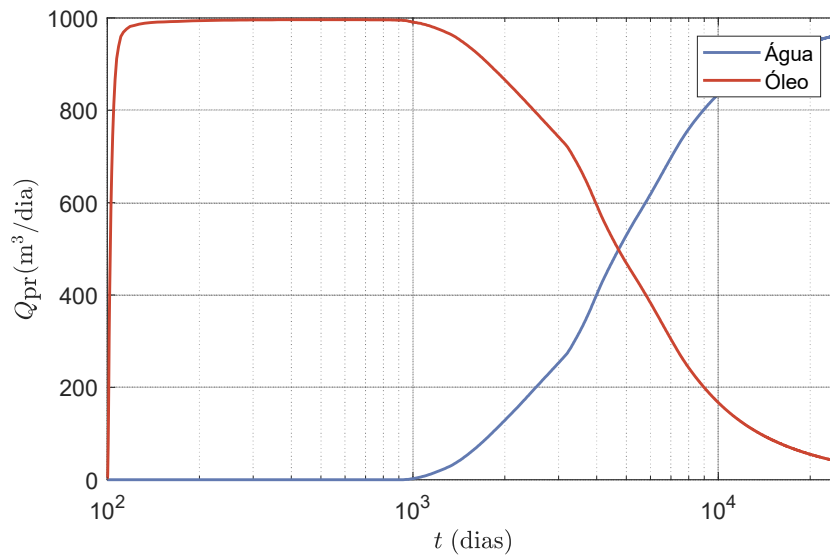
A combinação das produções primária e secundária instantâneas resultam na produção acumulada apresentada na figura 5.42. Nela, pode-se verificar que a partir de cerca de 10000 dias, a produção acumulada de água ultrapassa a do óleo. Além disso, na escala apresentada à esquerda do gráfico é possível observar que a produção de óleo é assintótica e tende a cerca de 70% do volume poroso inicial. Parte da dificuldade em produzir o óleo que ainda reside no reservatório é decorrente dos efeitos gravitacionais considerados neste caso. Com a consideração do termo gravitacional a frente de água invade primeiramente a parte inferior do domínio, para depois começar a subir ao longo do eixo z . Quando a frente de água atinge o poço produtor, a parte superior do domínio ainda não foi varrida, e parte do óleo nela contido permanece no reservatório.

Figura 5.40: Vazão volumétrica de água e óleo no poço produtor durante a produção primária



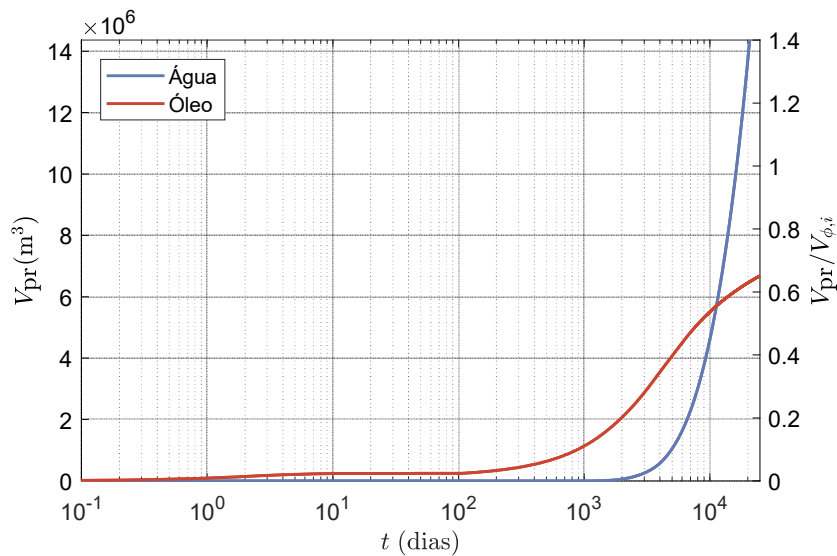
Fonte: do autor

Figura 5.41: Vazão volumétrica de água e óleo no poço produtor durante a produção secundária



Fonte: do autor

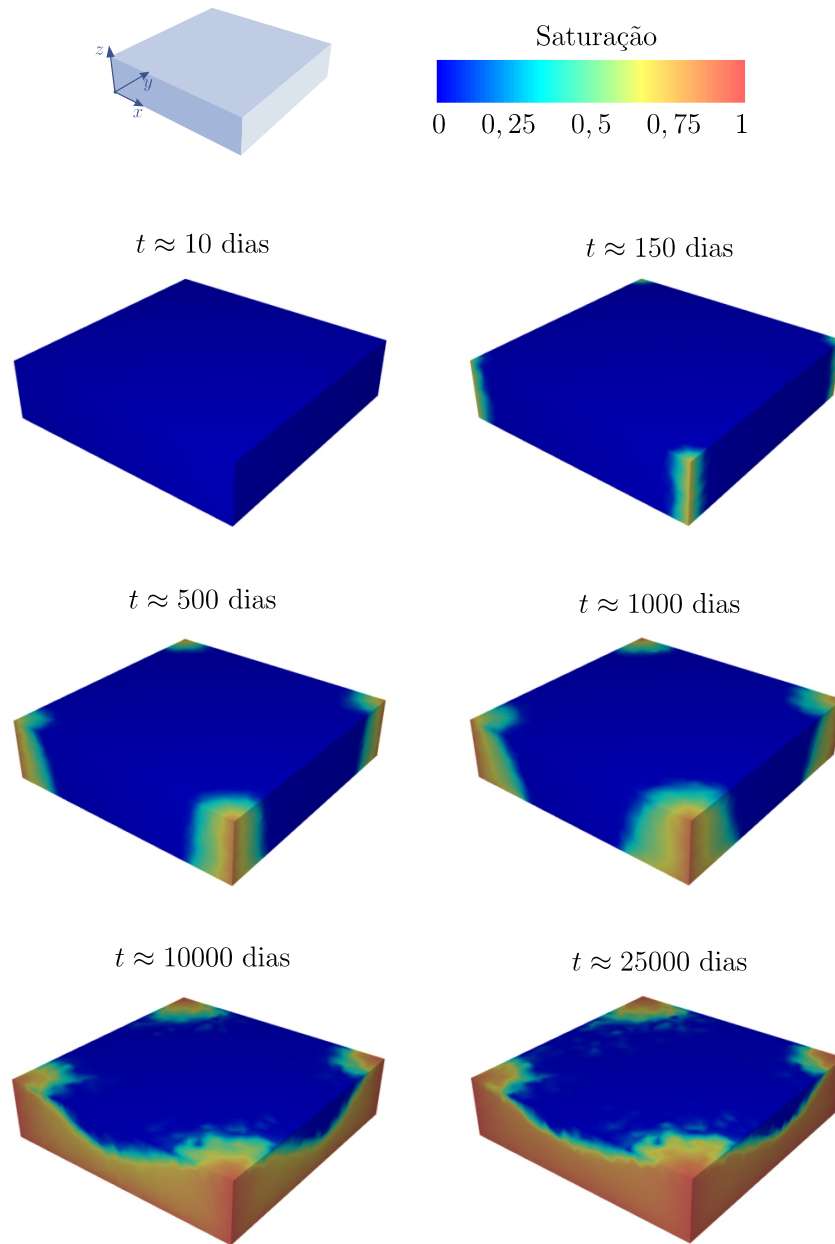
Figura 5.42: Volume produzido de água e óleo no poço produtor ao longo do tempo



Fonte: do autor

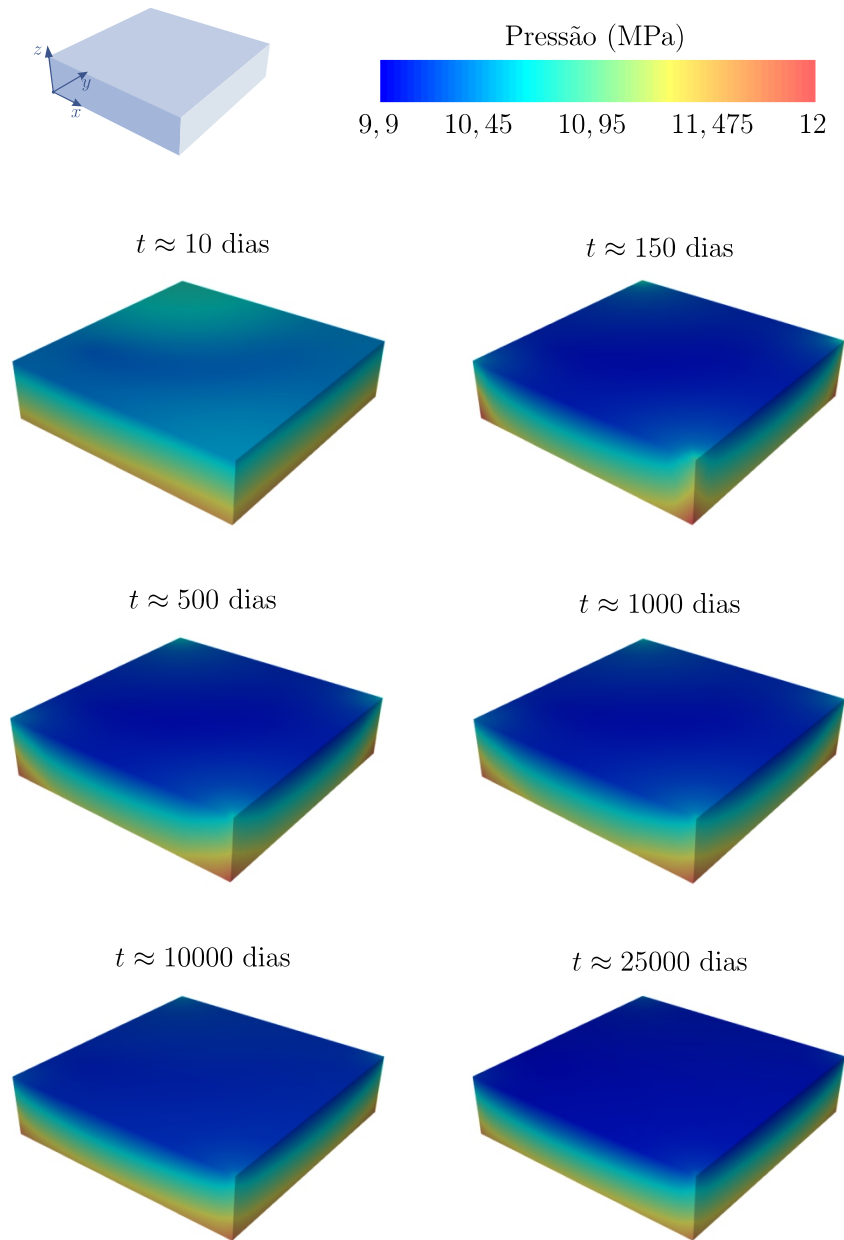
As figuras 5.43 e 5.44 ilustram a evolução temporal dos campos de saturação e pressão no contorno exterior do domínio. Na figura 5.43 é possível visualizar o avanço da frente de saturação ao longo do tempo e como esse avanço está sujeito aos efeitos gravitacionais. Na figura 5.44 pode-se observar a queda de pressão durante a etapa de produção primária e sua estabilização na etapa de produção secundária.

Figura 5.43: Evolução temporal do campo de saturação de água no contorno exterior do domínio



Fonte: do autor

Figura 5.44: Evolução temporal do campo de pressão no contorno exterior do domínio



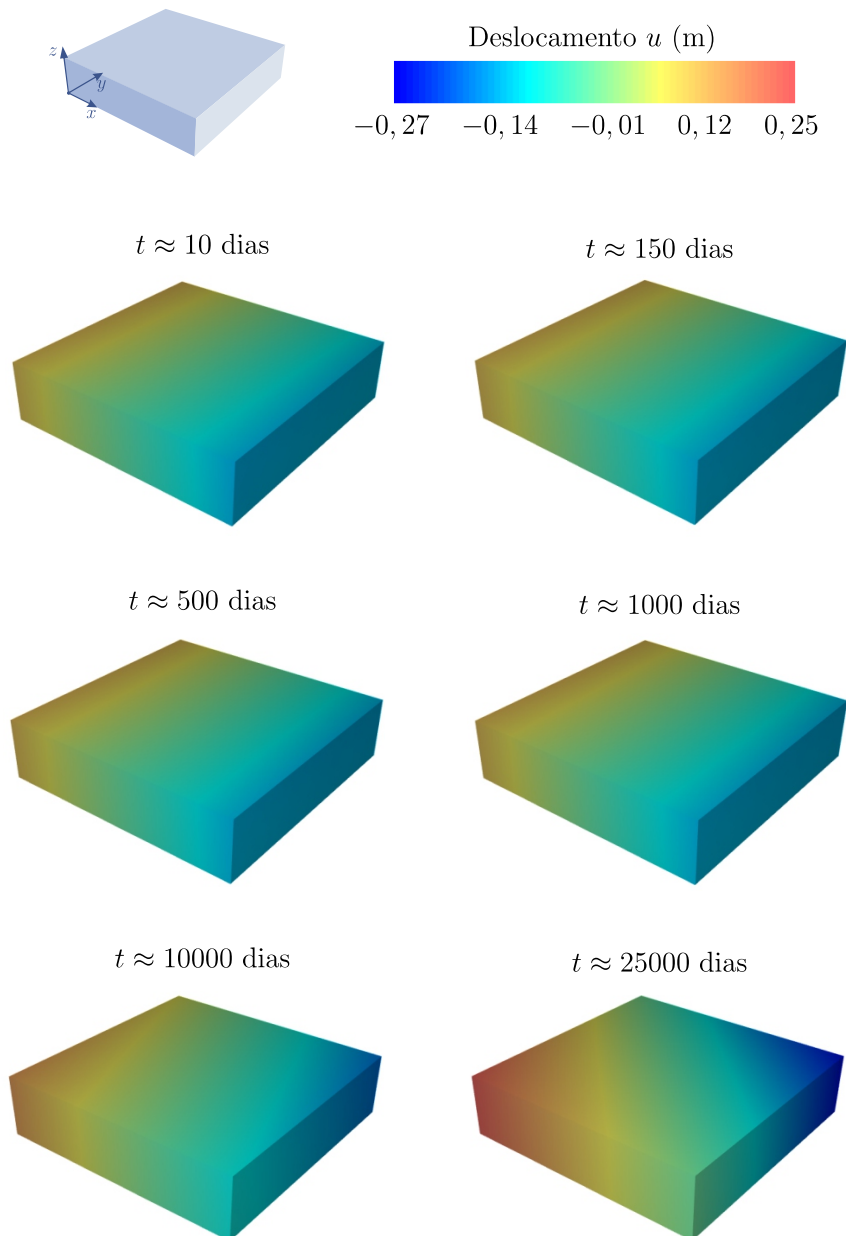
Fonte: do autor

As figuras 5.45, 5.46 e 5.47 ilustram a evolução temporal dos campos de deslocamento ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. Os deslocamentos u e v têm comportamento semelhante em virtude da simetria da aplicação de cargas e da disposição geométrica dos poços injetores. Não são, contudo, idênticas devido à trajetória não simétrica do poço produtor. As figuras 5.45, 5.46 sugerem que os campos de deslocamento ao longo dos eixos x e y ocorrem no sentido de comprimir o domínio devido à atuação das cargas σ_{CL} . Verifica-se também que à medida que a pressão aumenta na região próxima aos poços injetores e diminui na região próxima ao poço produtor, o efeito de compressão é atenuado. Essa

consequência pode ser observada na região próxima às arestas do domínio, onde foram especificadas as localizações dos poços injetores.

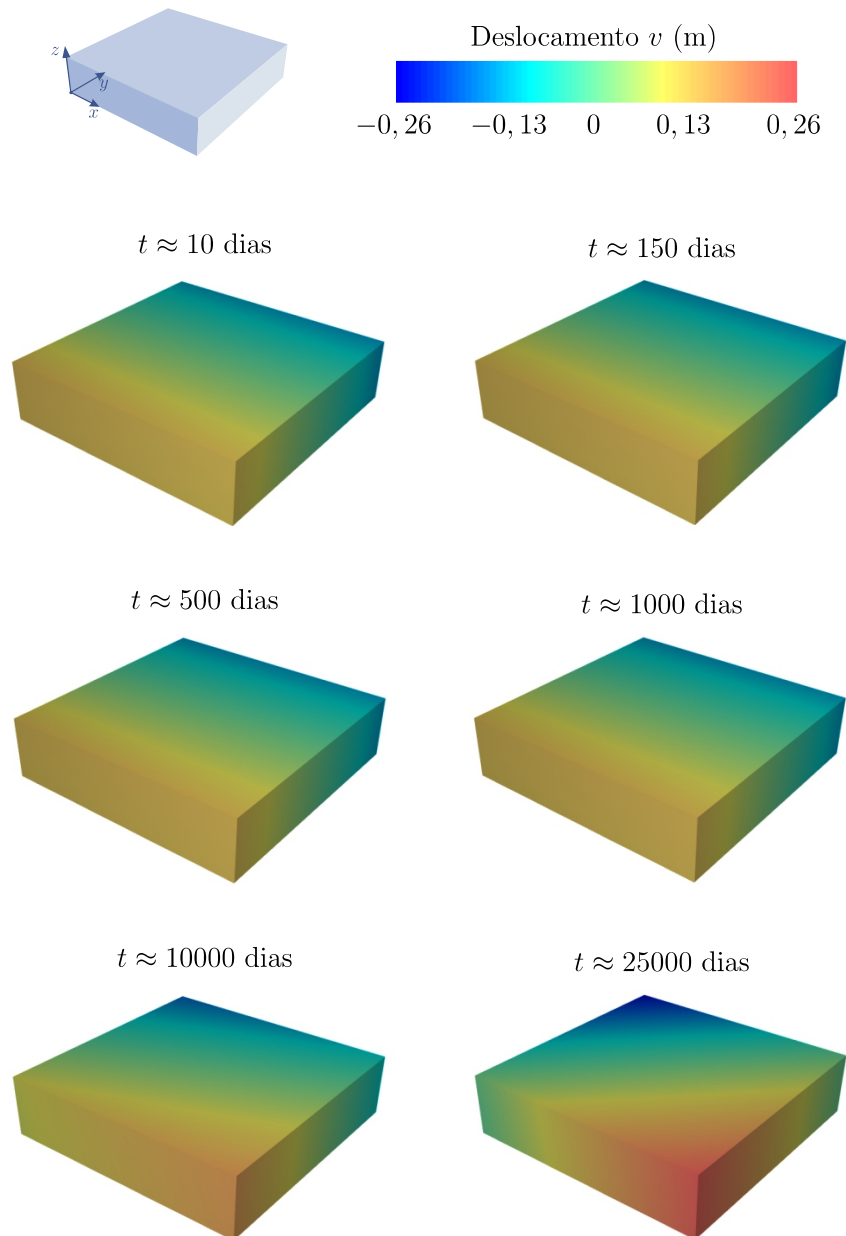
Na figura 5.47 verifica-se que a partir de 10 dias de simulação a maior parte da compressão do domínio em função da carga σ_{CT} já ocorreu. Assim, o campo de deslocamento w não sofre alterações significativas até o final da simulação.

Figura 5.45: Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo x no contorno exterior do domínio



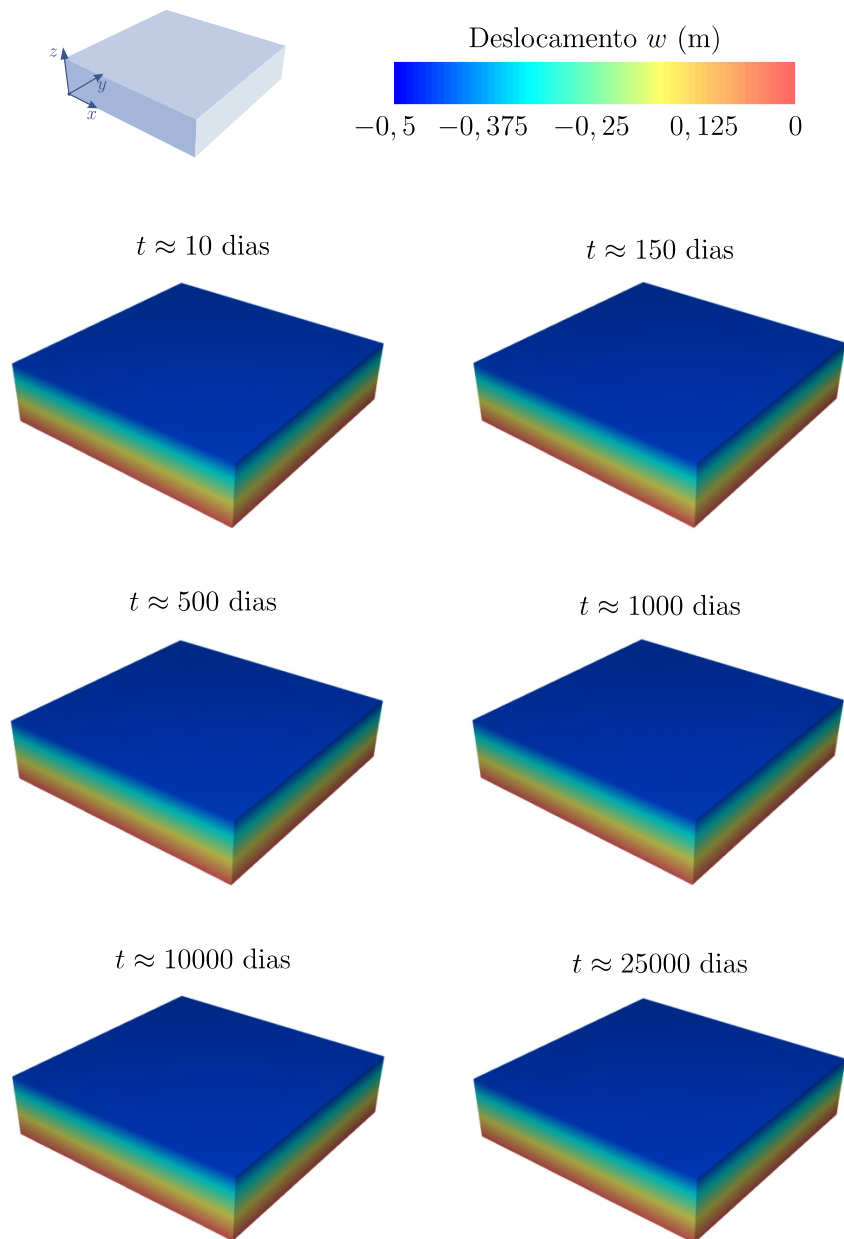
Fonte: do autor

Figura 5.46: Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo y no contorno exterior do domínio



Fonte: do autor

Figura 5.47: Evolução temporal do campo de deslocamento ao longo do eixo z no contorno exterior do domínio



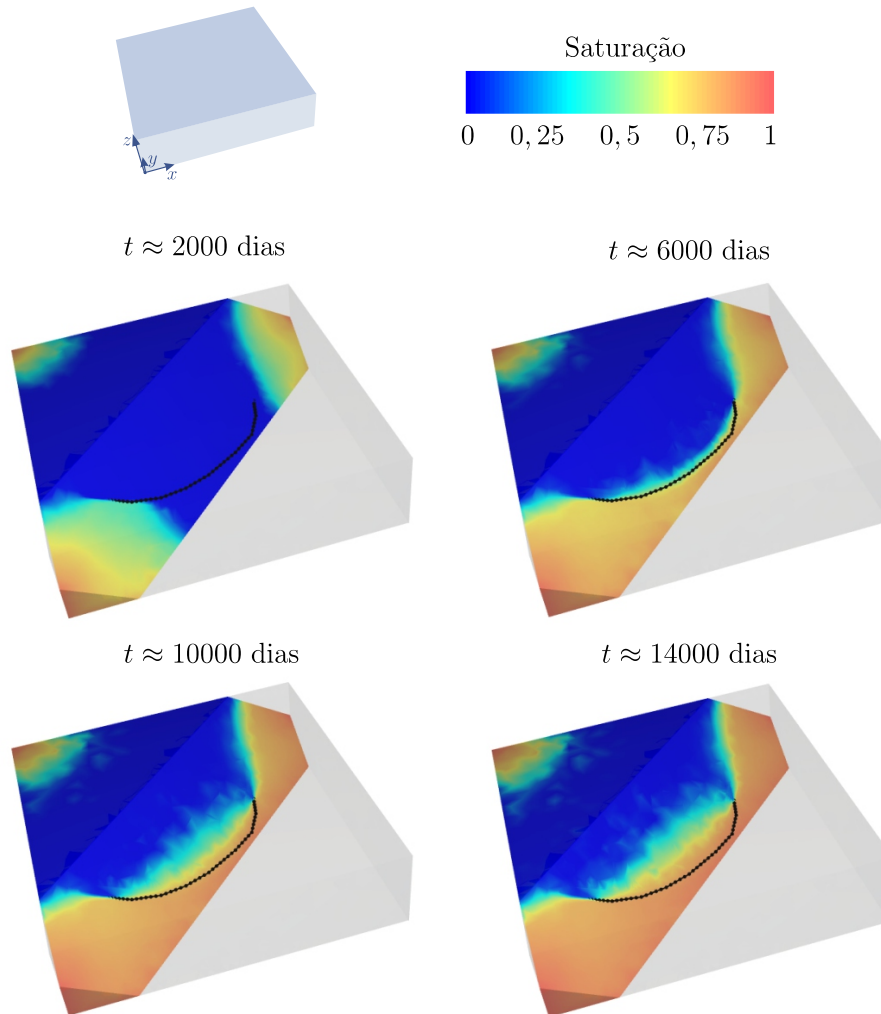
Fonte: do autor

A fim de poder visualizar também o interior do domínio as figuras 5.48 e 5.49 ilustram os campos de saturação e pressão em um plano de corte próximo ao poço produtor.

Optou-se por apresentar esses campos nos instantes de tempo em que a frente de água avança pela região interceptada pelo plano de corte. É interessante verificar que, em decorrência dos efeitos gravitacionais, a frente de água avança de baixo pra cima ao longo do eixo z . Assim, quando a frente alcança o produtor tem-se a produção do óleo varrido da parte inferior do domínio, a qual agora está preenchida por água. A parte superior ao

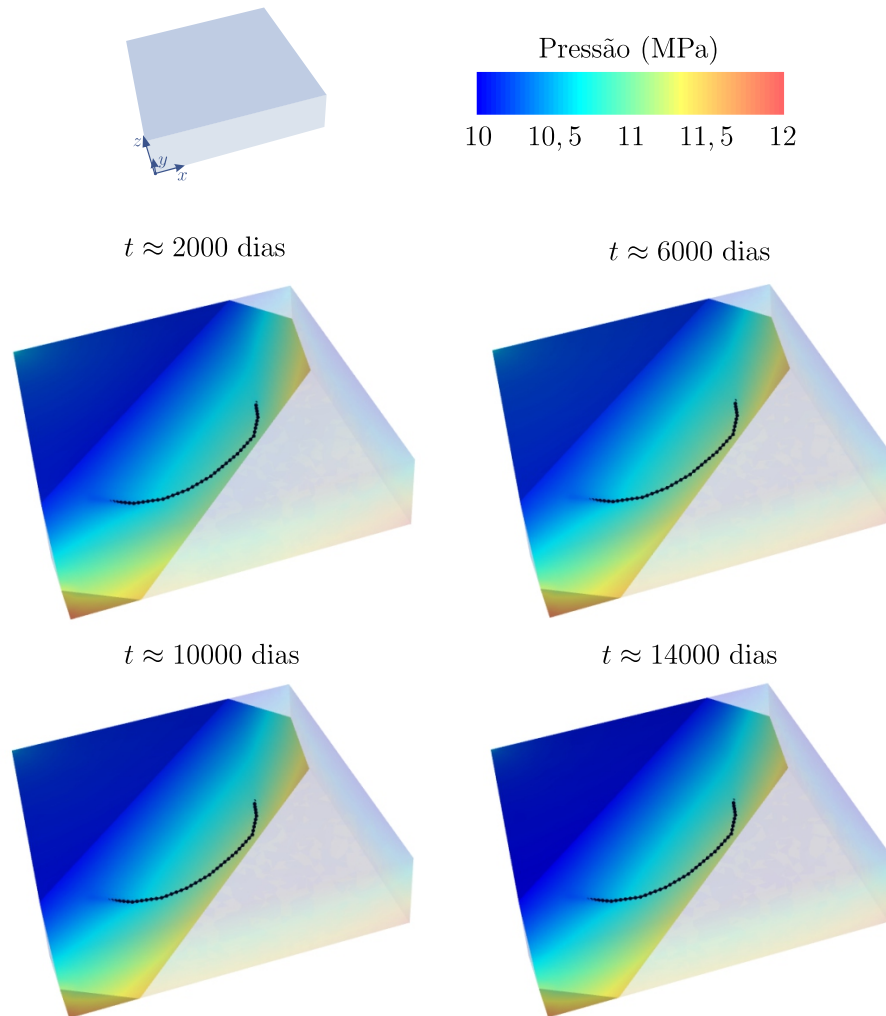
poço produtor, contudo, permanece preenchida por óleo. Já o campo de pressão não sofre grandes alterações nesses instantes de tempo. Ainda, a figura 5.49 facilita a visualização da parcela hidrostática da pressão.

Figura 5.48: Campo de saturação em um plano de corte próximo ao poço



Fonte: do autor

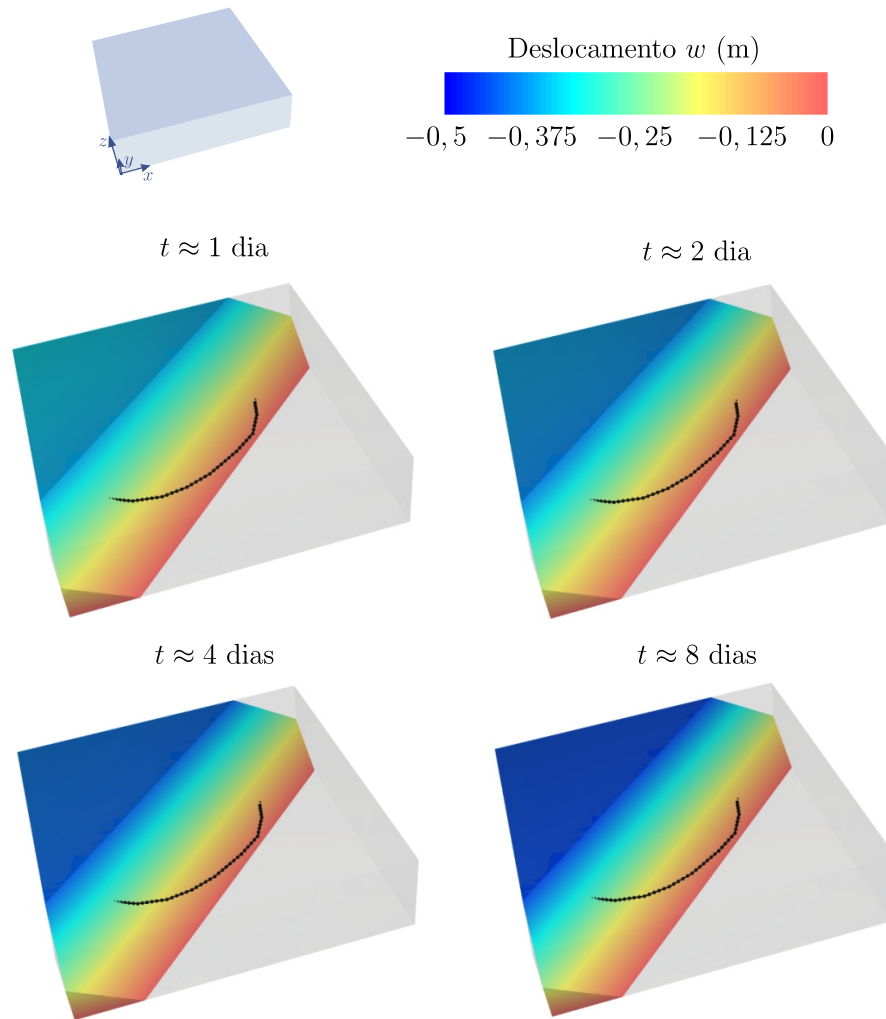
Figura 5.49: Campo de pressão em um plano de corte próximo ao poço



Fonte: do autor

Na figura 5.50 é possível ainda visualizar a evolução temporal do deslocamento w , isto é, de deslocamento ao longo do eixo z , nos primeiros dias de simulação. Essa evolução é apresentada em um plano de corte que atravessa uma região próxima ao poço produtor. Todos os instantes de tempo apresentados na figura 5.50 correspondem à etapa de produção primária. O plano de corte facilita o entendimento do mecanismo físico da produção primária. As cargas atuantes na parte exterior do domínio ocasionam sua compressão. Isso acarreta um aumento da pressão do reservatório, que por sua vez, alavanca a produção do óleo contido inicialmente no domínio. À medida que o óleo é produzido, a pressão do reservatório diminui. A redução dessa diferença de pressão gradualmente diminui a produção instantânea de óleo, até que se atinge um equilíbrio, no qual óleo não é mais produzido e tanto os campos de pressão quanto de deslocamento não sofrem mais alterações.

Figura 5.50: Campo de deslocamento ao longo do eixo z em um plano de corte próximo ao poço



Fonte: do autor

Por fim, os campos de porosidade e permeabilidade relativa sofrem pouca alteração e não têm regiões em que sua variação é significativamente mais pronunciada que em outras. Estima-se que a porosidade da rocha chegou a sofrer uma redução de até 2,17%, ao passo que a permeabilidade absoluta, cerca de 6,02%.

6 CONCLUSÕES

6.1 SUMÁRIO E CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma metodologia unificada para a solução acoplada do problema de escoamento bifásico em meios porosos com efeitos geomecânicos. Nessa metodologia proposta tem-se o emprego de uma única formulação numérica – o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) e uma única malha computacional. A abordagem historicamente usual à obtenção da solução desse problema advém da utilização de métodos numéricos distintos para o escoamento e para a geomecânica, geralmente o Método dos Volumes Finitos para a solução das equações do escoamento e o Método dos Elementos Finitos para a solução da geomecânica. A unificação do método numérico ascende como uma alternativa moderna e bastante vantajosa à abordagem tradicional. Entre essas vantagens destaca-se a dispensa de interpolação de dados entre malhas distintas.

Trabalhos recentes no contexto do método de elementos finitos já foram apresentados no intuito de unificar a metodologia utilizada na solução do problema acoplado entre escoamento e geomecânica. Na última década, esse problema foi explorado com mais afinco também no contexto de volumes finitos. Sua utilização é bastante interessante na solução desse problema, sobretudo quando considerado que o método dos volumes finitos é conservativo em nível discreto e essa característica é fundamental na solução do modelo de escoamento. Nessa conjuntura, é promissora a proposta da aplicação do EbFVM como metodologia unificada para a solução acoplada do problema de escoamento em um meio poroso deformável. Isso porque o EbFVM mantém as características fundamentais de um método de volumes finitos e provê uma acuracidade de representação geométrica bastante forte a partir da utilização de malhas não estruturadas. Recentemente, Ribeiro (2016) adotou essa abordagem para a solução do problema de escoamento monofásico com efeitos geomecânico. As soluções foram comparadas às obtidas utilizando o método dos elementos finitos e os resultados obtidos credenciaram o EbFVM como uma ótima escolha para a solução acoplada dos modelos considerados.

Este trabalho expandiu a aplicabilidade do trabalho de Ribeiro (2016) para a consideração de um modelo de escoamento de maior grau de complexidade: o escoamento bifásico. Isso permite que a física da recuperação secundária seja captada, admitindo uma maior fidelidade do modelo matemático em relação à realidade. Por outro lado, as equações que modelam o escoamento bifásico em um meio poroso são não lineares, o que acarreta tam-

bém mais dificuldade à solução das equações de escoamento. Neste trabalho o sistema não linear de equações foi resolvido utilizando o método de Newton e o acoplamento entre os módulos de escoamento e geomecânica utilizado foi do tipo sequencial *two-way* e *fixed-stress*.

O módulo de escoamento foi validado a partir da solução do problema de *Buckley-Leverett*. Trata-se de um problema clássico na literatura que admite uma solução analítica para o escoamento bifásico em um meio poroso rígido. As soluções numéricas obtidas apresentaram o comportamento esperado quando comparadas à solução analítica do problema.

Já o módulo de geomecânica foi validado por meio da solução do problema de Terzaghi. Também se trata de um problema clássico na literatura que admite uma solução analítica para o escoamento monofásico em um meio poroso sujeito aos efeitos geomecânicos. As soluções numéricas foram obtidas para quatro malhas híbridas com diferentes graus de refino. Mesmo as soluções obtidas com a malha mais grosseira estão bastante próximas da solução analítica do problema.

Também foi resolvido o problema do acoplamento hidromecânico oriundo da recuperação secundária de petróleo. Trata-se de um caso de escoamento bifásico em um meio poroso sujeito aos efeitos geomecânicos. Os resultados obtidos permitiram verificar não apenas a resposta física do escoamento sob a configuração proposta, mas também foi possível observar isoladamente o efeito da consideração dos efeitos geomecânicos e da compressibilidade das fases fluidas. Esse problema ainda demonstrou que a consideração da geomecânica viabiliza a captação de efeitos significativos à produção de óleo, como a produção advinda do mecanismo recuperação primária e informações quanto ao deslocamento da rocha, permitindo analisar possíveis danos ao longo do reservatório ou na região próxima aos poços.

Por fim apresentou-se um caso de escoamento bifásico sujeito a efeitos geomecânicos em uma malha tridimensional híbrida na qual há uma malha cilíndrica ao redor da trajetória de um poço produtor curvo. Com esse caso explorou-se as potencialidades da metodologia proposta, não apenas quanto ao potencial de acuracidade de representação geométrica, mas também quanto a consideração de diversos efeitos, como compressibilidade dos fluidos, deformabilidade da rocha e ação da gravidade. Também foi empregado um modelo de poço bastante genérico a fim de prover um cálculo adequado dos índices de poço. Os resultados obtidos confirmaram o EbFVM como uma ótima escolha na solução do problema proposto. Seu potencial geométrico possibilita, ainda, a verificação do

comportamento físico do problema na região próxima ao poço produtor. Ainda, os efeitos geomecânicos foram captados com sucesso e foi possível interpretar os resultados obtidos no contexto de produção de petróleo.

De modo geral, a metodologia unificada apresentada conseguiu obter resultados bastante satisfatórios, em que a solução numérica obtida está de acordo com o comportamento físico esperado. Os resultados deste trabalho não apenas confirmam a eficácia do EbFVM como método numérico único da solução do problema acoplado entre geomecânica e escoamento bifásico, mas também motiva o prosseguimento de estudos quanto a aplicação do método nesse contexto, aplicando-o a modelos cada vez mais complexos e fidedignos.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para a realização de estudos subsequentes quanto ao tema abordado neste trabalho recomenda-se:

1. Introduzir um modelo de escoamento mais complexo no simulador, *e.g.* modelo *black-oil* e composicional;
2. Considerar modelos de rocha mais complexos, *e.g.* elasto-plásticos;
3. Implementar no simulador um tratamento para a consideração de falhas e fraturas;
4. Implementar no simulador outras estratégias de acoplamento entre os módulos de escoamento e geomecânica e compará-las;
5. Considerar o domínio de solução do módulo de geomecânica maior que o domínio de solução do módulo de escoamento e implementar uma estratégia de indexação das equações que permita uma fácil configuração de problemas de poroelasticidade acoplada em domínios não coincidentes;
6. Incluir a equação da energia no modelo proposto;
7. Paralelizar o simulador implementado a fim de melhorar seu desempenho quanto ao tempo computacional empregado nas simulações e por conseguinte aumentar sua aplicabilidade em problemas de larga escala.

REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I., KLAUSEN, R. A. **Well index in reservoir simulation for slanted and slightly curved wells in 3D grids.** *SPE Journal*, v. 8, pp. 41–48, 2003.
- ARCHER, J. S., WALL, C. G. **Petroleum Engineering – Principles and Practice.** Springer, 1986.
- AZIZ, K., SETTARI, A. **Petroleum Reservoir Simulation.** Applied Science Publishers, 1979.
- BERRYMAN, J. G. **Effective stress for transport properties of inhomogeneous porous rock.** *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 97, n. B12, pp. 2156–2202, 1992.
- BIJELONJA, I. **A Finite Volume Method for a Geomechanics problem.** *DAAAM International held in Vienna, Austria*, v. 22, n. 1, pp. 323–324, 2011.
- BIOT, M. A. **General theory of three-dimensional consolidation.** *Journal of Applied Physics*, v. 12, pp. 155–164, 1941.
- BISHOP, A. W. **The Principle of Effective Stress.** *Teknisk Ukeblad*, v. 106, pp. 859–863, 1959.
- BUCKLEY, S. E., LEVERETT, M. C. **Mechanism of Fluid Displacement in Sands.** *Society of Petroleum Engineers*, v. 146, 1942.
- CARMAN, P. C. **Fluid flow through granular beds.** *Chemical Engineering Research & Design*, v. 15, pp. 150–156, 1937.
- CHAVENT, G., JAFFRÉ, J. **Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation: Single Phase, Multiphase and Multicomponent Flows through Porous Media.** Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science, 1986.
- CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L. **Fully Coupled Analysis of Well Responses in Stress-Sensitive Reservoirs.** *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 3, n. 5, pp. 435–443, Outubro, 2000.
- CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L. **Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability.** *SPE Journal*, v. 5, n. 1, pp. 32–45, Março, 2000.
- CHIN, L. Y., THOMAS, L. K., SYLTE, J. E., PIERSON, E. G. **Iterative Coupled Analysis of Geomechanics and Fluid Flow for Rock Compaction in Reservoir Simulation.** *Oil & Gas*

Science and Technology – Rev. IFP, v. 57, n. 5, pp. 485–497, 2002.

CORDAZZO, J. **Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método EbFVM e Multigrid algébrico**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2006.

COREY, A. T., RATHJENS, C. H., HENDERSON, J. H., WYLLIE, M. R. **Three-phase relative permeability**. *SPE - AIME*, 1956.

DAL PIZZOL, A. **Uma metodologia unificada empregando o método dos volumes finitos para a solução acoplada do escoamento e da geomecânica em meios porosos**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2014.

DAL PIZZOL, A., MALISKA, C. R. **A finite volume method for the solution of fluid flows coupled with the mechanical behavior of compacting porousmedia**. *Porous media and Its application in science, Engineering and industry*, v. 1453, pp. 205–210, 2012.

DETOURNAY, E., CHENG, A. H. D. **Fundamentals of poroelasticity**. *Rock Engineering: Principles, Practise and Projects*, v. 2, pp. 113–171, 1992.

DULLIEN, F. A. L. **Porous media. Fluid transport and pore structure**. Academic Press, 1979.

FERRONATO, M., CASTELLETTO, N., GAMBOLATI, G. **A Fully Coupled 3-D Mixed Finite Element Model of Biot Consolidation**. *Journal of Computational Physics*, v. 229, pp. 4813–4830, 2010.

FREDLUND, D., RAHARDJO, H. **Soil Mechanics for Unsaturated Soils**. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1993.

FREDLUND, D. G., MORGENSTERN, N. R. **Stress State Variables for Unsaturated Soils**. *ASCE Geotech Eng.*, v. 103, pp. 446–447, 1977.

FRIEDRICH, J. T., ARGUELLO, J. G., DEITRICK, G. L., DE ROUFFIGNAC, E. P. **Geomechanical Modeling of Reservoir Compaction, Surface Subsidence, and Casing Damage at the Belridge Diatomite Field**. *SPE Reservoir Eval. & Eng.*, v. 3, pp. 348–359, Janeiro, 2000.

GAI, X. **A Coupled Geomechanics and Reservoir Flow Model on Parallel Computers**. Tese de doutorado, The University Of Texas at Austin, Austin, Texas, Agosto, 2004.

GREIN, E. A. **A parallel computing approach applied to petroleum reservoir simulation.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2015.

GUTIERREZ, M., LEWIS, R. W. **Coupling of Fluid Flow and Deformation in Underground Formations.** *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 779–787, Julho, 2002.

GUTIERREZ, M., KNIGHT, K., TAYLOR, P. W. **The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation.** *SPE/ISRM Eurock'98 held in Trondheim, Norway*, pp. 439–448, Julho, 1998.

GUTIERREZ, M., LEWIS, R. W., MASTERS, I. **Petroleum Reservoir Simulation Coupling Fluid Flow and Geomechanics.** *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, pp. 164–172, Junho, 2001.

HURTADO, F. S. V. **Uma formulação de volumes finitos baseada em elementos para a simulação do deslocamento bifásico imiscível em meios porosos.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2005.

HURTADO, F. S. V. **Formulação tridimensional de volumes finitos para simulação de reservatórios de petróleo com malhas não-estruturadas híbridas.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2011.

Jl, L., SETTARI, A., SULLIVAN, R. B. **A New Approach to Hydraulic Fracturing Modeling - Fully Coupled With Geomechanical and Reservoir Simulation.** *SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition held in Vienna, Austria*, 2006.

Jl, L., SETTARI, A., SULLIVAN, R. B. **A Novel Hydraulic Fracturing Model Fully Coupled With Geomechanics and Reservoir Simulation.** *SPE Journal*, pp. 423–430, Setembro, 2009.

KIM, J. **Sequential Methods for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow.** Tese de doutorado, Department of Energy Resources Engineering, Stanford University, Palo Alto, Califórnia, Fevereiro, 2010.

LEE, H. **To Kill a Mockingbird.** Harper Perennial Modern Classics, 1960.

LHA, B., JUANES, R. **A Locally Conservative Finite Element Framework for the Simulation of Coupled Flow and Reservoir Geomechanics.** *Acta Geotechnica 2*, pp. 139–153, 2007.

LI, P., CHALATURNYK, R. J., TAN, T. B. **Coupled Reservoir Geomechanical Simulations for the SAGD Process.** *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 45, n. 1, pp. 33–40, Janeiro, 2006.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** LTC Editora, Rio de Janeiro, RJ, 2004.

MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., RIBEIRO, G. G., CERBATO, G. **Desenvolvimento de um esquema para a aproximação dos fluxos na interface entre malhas estruturadas e não estruturadas, Relatório Técnico SINMEC/SiGeR 03.** Technical report 01, SINMEC/EMC/UFSC, Florianópolis, SC, 2015.

MALISKA, C. R., DA SILVA FERNANDO SANDRO VELASCO HURTADO, A. F. C., RIBEIRO, G. G., CERBATO, G., DIHLMANN, A., ONO, E. T., SCHVEITZER, T. C. M. **Relatório Técnico 5, Consolidação e resultados de testes com o simulador bifásico em malhas híbridas.** Technical report, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

MALISKA, C. R., DA SILVA FERNANDO SANDRO VELASCO HURTADO, A. F. C., RIBEIRO, G. G., CERBATO, G., DIHLMANN, A., ONO, E. T., SCHVEITZER, T. C. M. **Relatório Técnico SINMEC/SIGER III-02, Tarefas iniciais no desenvolvimento de um simulador bifásico em malhas híbridas.** Technical report, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

MALISKA, C. R., DA SILVA FERNANDO SANDRO VELASCO HURTADO, A. F. C., RIBEIRO, G. G., CERBATO, G., DIHLMANN, A., ONO, E. T., SCHVEITZER, T. C. M. **Relatório Técnico SINMEC/SIGER III-04, Tratamento numérico de poços e algoritmos de acoplamento dos simuladores bifásicos.** Technical report, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

MATTAX, C., DALTON, R. **Reservoir simulation.** Monograph, Volume 13. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 1990.

MENDES, M. A. **Modelagem computacional de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos com acoplamento geomecânico.** Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brasil, Março, 2008.

MINKOFF, S. E., STONE, C. M., BRYANT, S., PESZYNSKA, M., WHEELER, M. F. **Coupled Fluid Flow and Geomechanical Deformation Modeling.** *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 38, pp. 37–56, 2003.

MURAD, M. A., BORGES, M., OBREGÓN, J. A., CORREA, M. **A new locally conservative numerical method for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media.** *Computers and Geotechnics*, v. 48, pp. 192–207, 2012.

PACHECO, T. B. **Comparação entre as formulações IMPES, sequencial e totalmente implícita na simulação de escoamento bifásico em reservatórios aplicando o método de volumes finitos baseado em elementos.** Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2016.

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulation.** Elsevier Scientific Publishing Company, Houston, Texas, 1977.

PETTERSEN, Ø. **Coupled Flow – and Rock Mechanics Simulation: Optimizing the Coupling Term for Faster and Accurate Computation.** *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, v. 9, n. 3, pp. 628–643, 2012.

RIBEIRO, G. G. **Volumes finitos baseado em elementos para problemas de poroelasticidade.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2016.

SETTARI, A., MOURITS, F. M. **A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System.** *SPE journal*, pp. 219–226, Setembro, 1998.

SETTARI, A., WALTERS, D. A. **Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction.** *SPE Journal*, pp. 334–342, Setembro, 1999.

SHAW, G., September 21, 2006. **Finite volume method for coupled stress/fluid flow in a reservoir simulator.** WO Patent App. PCT/IB2005/004,108.

SHAW, G., STONE, T. **Finite Volume Methods for Coupled Stress/Fluid Flow in a Commercial Reservoir Simulator.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 1–8, 2005.

TERZAGHI, K. **Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen.** *Akademie der Wissenschaften in Wien. Sitzungsberichte. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, n. 3/4, pp. 125–138, 1923.

TERZAGHI, K. **Theoretical Soil Mechanics.** John Wiley & Sons, Inc, 1943.

THOMAS, L. K., CHIN, L. Y., PIERSON, R. G., SYLTE, J. E. **Coupled Geomechanics and**

Reservoir Simulation. *SPE Journal*, pp. 350–358, 2003.

TONELLI, R. **Estratégias para tratamento do acoplamento escoamento/geomecânica utilizando volumes finitos.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2016.

TRAN, D., NGHIEM, L., BUCHANAN, L. **Improved iterative coupling for geomechanics with reservoir simulation.** *Society of Petroleum Engineers*, 2005.

TRANGENSTEIN, J. A., BELL, J. B. **Mathematical Structure Of The Black-Oil Model For Petroleum Reservoir Simulation.** *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. Vol. 49, pp. 749–783, 1989.

WAN, J. **Stabilized Finite Element Methods for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow.** Tese de doutorado, Department of Petroleum Engineering, Stanford University, Palo Alto, Califórnia, Novembro, 2002.

WANG, H. **Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology.** Princeton series in Geophysics. Princeton University Press, 2000.

WHITE, J. A. **Stabilized Finite Element Methods for Coupled Flow and Geomechanics.** Tese de doutorado, Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University, Palo Alto, Califórnia, Agosto, 2009.

YANG, D., MORIDIS, G. J., BLASINGAME, T. A. **A Fully Coupled Multiphase Flow and Geomechanics Solver for Highly Heterogeneous Porous Media.** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 270, pp. 417–432, 2014.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, fifth, vol. 1. Butterworth-Heinemann, 2000.

APÊNDICE A – SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste apêndice tem-se como objetivo a apresentação das soluções analíticas correspondentes aos problemas utilizadas para validar a formulação proposta.

A.1 PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

Para o problema de deslocamento unidimensional de Buckley-Leverett é apresentada a solução para o avanço da frente de saturação, a qual foi considerada se deslocando ao longo do eixo x . A equação que modela o escoamento é (Maliska *et al.*, 2015):

$$\phi \frac{\partial S^w}{\partial t} + v^T \frac{\partial F_f}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.1})$$

em que S^w é a saturação de água, ϕ é a porosidade do meio, v^T é a velocidade total e F_f é o fluxo fracionário definido por

$$F_f = \frac{\frac{k_r^w}{\mu^w}}{\frac{k_r^w}{\mu^w} + \frac{k_r^o}{\mu^o}}. \quad (\text{A.2})$$

A fim de obter a solução analítica, as variáveis do problema são adimensionalizadas. As versões adimensionais da coordenada axial do domínio e do tempo são, respectivamente

$$X = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{v^T t}{\phi L}. \quad (\text{A.3})$$

Dado isso, a equação (A.1) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial F_f}{\partial X} = 0, \quad (\text{A.4})$$

em que, por simplicidade, optou-se por omitir o superíndice w da saturação da água, denotando-a apenas por S . Definindo, ainda, o parâmetro

$$\xi = \frac{X}{\tau}, \quad (\text{A.5})$$

a equação (A.4) se torna uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dS}{d\xi} \left(\frac{dF}{dS} - \xi \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

A solução analítica dessa equação é (Dullien, 1979):

$$\begin{cases} \xi = F'_f(S) & \text{se } 0 \leq \xi \leq D, \\ S = S_i & \text{se } D \leq \xi \leq \infty, \end{cases}$$

em que

$$D = F'_f(S_f) = \frac{F_f(S_f) - F_f(S_i)}{S_f - S_i}, \quad (\text{A.7})$$

S_i é a saturação inicial do domínio e S_f , a saturação da frente de água. Essa solução analítica é conhecida como solução de *Buckley-Leverett*.

A.2 PROBLEMA DE TERZAGHI

A solução analítica para o problema da coluna poroelástica de Terzaghi será apresentada conforme o conteúdo de Wang (2000). Considera-se o eixo y na vertical – alinhado à altura da coluna – e positivo no sentido de cima para baixo, de forma que a origem está na fronteira superior da coluna. A pressão do fluido é dada por

$$p(y, t) = \frac{4\gamma\sigma_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp\left[-\frac{(2j+1)^2\pi^2 c t}{4H^2}\right] \sin\left[\frac{(2j+1)\pi y}{2H}\right], \quad (\text{A.8})$$

em que H é constante de expansão poroelástica e σ_0 é a carga à qual a coluna é submetida. O coeficiente γ é

$$\gamma = \frac{B(1 + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)}, \quad (\text{A.9})$$

em que ν_u é o coeficiente de Poisson não drenado e B é o coeficiente de Skempton. Fisicamente, aquele coeficiente mede como a tensão aplicada em um meio poroso é distribuída entre a matriz sólida e o fluido. Seu valor varia entre 0 e 1, tendendo a 1 para meios porosos saturados por fluido incompressível, pois que nesse caso a carga é suportada pelo fluido. Já o valor de coeficiente de Skempton tendendo a zero representa o caso de meios porosos infiltrados com gás, em que a carga é suportada pela matriz sólida (Wang, 2000).

O termo c é a constante de consolidação, dada por

$$c = \frac{3k_{ii}\gamma K(1 + \nu)}{\mu(1 - \nu)}, \quad (\text{A.10})$$

em que k_{ii} representa o componente da diagonal principal do tensor permeabilidade ab-

solta do meio, ν é o coeficiente de Poisson drenado e K é o módulo de compressão volumétrica drenado. Esse coeficiente é uma característica exclusiva da matriz porosa que representa a variação da deformação volumétrica da matriz porosa em função da variação da carga aplicada (Wang, 2000).

O deslocamento vertical na condição de equilíbrio inicial, representado por $t = 0^+$ pode ser calculado pela equação

$$v_0(y, 0^+) = \frac{\sigma_0(1 + \nu_u)(H - y)}{3K_u(1 - \nu_u)}, \quad (\text{A.11})$$

onde K_u representa o módulo de compressão volumétrica não-drenado. Ressalta-se que sua definição é similar à definição de K . O valor de K_u , contudo, é medido sem a retirada do fluido, de forma que não é uma característica exclusiva do meio poroso, e sim do conjunto fluido e matriz porosa.

A solução para o deslocamento vertical v é, então, dada por

$$v(y, t) = v_0 + \frac{\gamma\sigma_0\alpha(1 + \nu)}{3K(1 - \nu)} \left\{ (H - y) - \frac{8H}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} \exp\left[\frac{-(2j + 1)^2\pi^2 c t}{4H^2}\right] \cos\left[\frac{(2j + 1)\pi y}{2H}\right] \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Mais informações sobre o desenvolvimento da solução analítica e sobre as definições matemáticas e interpretações físicas das propriedades citadas nesta solução podem ser encontradas em Wang (2000).

APÊNDICE B – MODELO DE POÇO

Representar os poços de forma realista nas formulações numéricas é um desafio à área de simulação de reservatórios. A principal razão para a dificuldade em representá-los é a escala das malhas utilizadas para discretizar o domínio físico dos reservatórios, a qual é geralmente muito superior às dimensões dos poços. Isso dificulta que a formulação numérica capte as fortes variações de propriedades físicas na região adjacente aos poços, em especial os elevados gradientes de pressão. Tendo em vista que a velocidade do escoamento é proporcional ao gradiente de pressão, uma pobre aproximação do valor desse gradiente pode introduzir um erro inadmissível na avaliação da vazão no poço. A fim de contornar essa dificuldade tem-se, tradicionalmente, duas alternativas. A primeira, e mais natural, é optar por uma malha bastante refinada na região próxima aos poços. A segunda é abrir mão de um refino tão severo na região próxima ao poço a partir da consideração de um modelo denominado modelo de poço. Maliska *et al.* (2016c) afirma que um estudo comparativo apresentou a utilização de um modelo de poço como a alternativa mais promissora, não apenas pelo fato de produzir resultados iguais ou melhores, mas também por não exigir um incremento excessivo do número de incógnitas, como aconteceria com a opção de refino radial. A fim de evitar esse custo excessivo, e possivelmente proibitivo, adotou-se, pois, a utilização de um modelo de poço. Esse modelo estabelece uma relação entre a vazão, a pressão na superfície do poço e um valor discreto de pressão. Neste trabalho, essa relação deve ser acrescentada nas equações de conservação de volumes de controle que contemplem porções do poço.

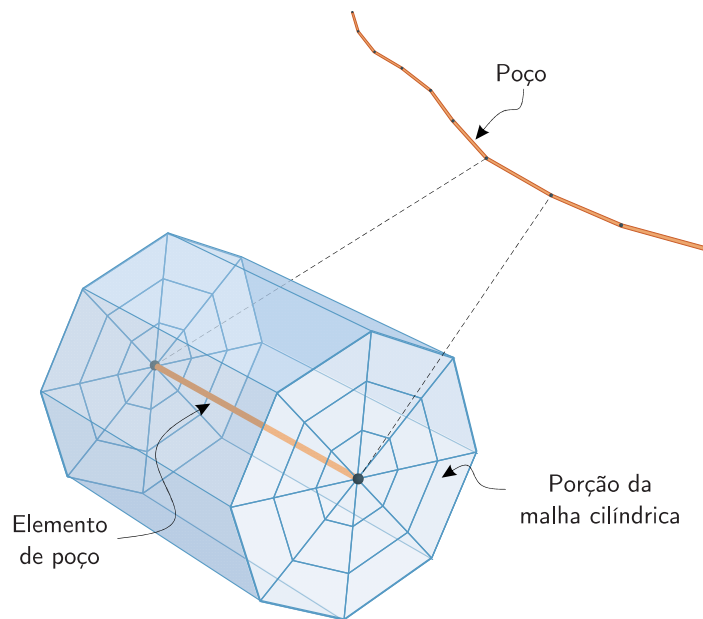
Considera-se uma malha cilíndrica gerada em torno à linha de trajetória do poço. As arestas dessa malha que coincidem com a linha de trajetória do poço são denominadas elementos de poço, conforme ilustrado na figura B.1. A figura ainda ilustra que cada elemento de poço é limitado por dois vértices da malha.

Um volume de controle associado a um vértice localizado sobre a linha de trajetória do poço conterá, portanto, uma porção do poço formada pela união das metades de dois elementos de poços adjacentes¹, conforme ilustrado na figura B.2. Nessa porção de poço haverá uma certa vazão entrando ou saindo em direção ao reservatório. Um modelo de

¹Tem-se como exceção os volumes de controle nas extremidades do poço, os quais só contêm a metade de um único elemento de poço

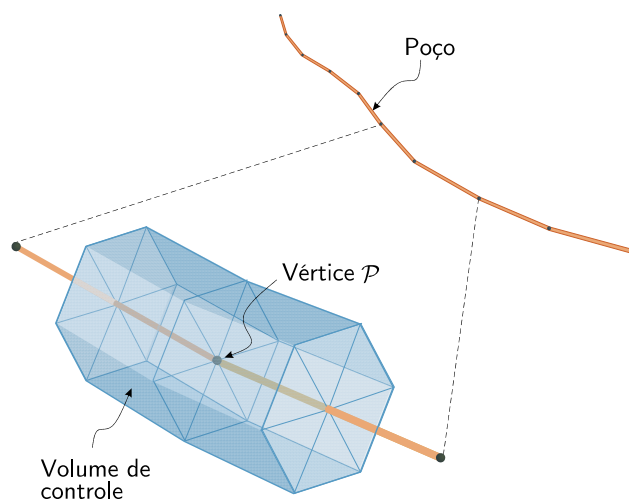
poço é simplesmente uma relação entre essa vazão e a pressão, a qual é obtida adotando algumas hipóteses quanto ao escoamento na região próxima a um poço. O objetivo dessa relação é desvincular a determinação da vazão de uma aproximação numérica do gradiente de pressão, e por conseguinte dispensar um refino de malha excessivo nessa região.

Figura B.1: Configuração da malha em torno a um elemento de poço



Fonte: modificado de Maliska *et al.* (2016c)

Figura B.2: Volume de controle que contém uma porção de um poço formada pela união das metades de elementos de poços adjacentes



Fonte: modificado de Maliska *et al.* (2016c)

Para a configuração geométrica mostrada na figura B.2 será considerada a forma convencional de um modelo de poço. A vazão através da porção do poço formada pelo volume de controle associado ao nó \mathcal{P} , denotada por $Q_{\text{well},\mathcal{P}}$ é dada pela equação

$$Q_{\text{well},\mathcal{P}} = \text{WI}_{\mathcal{P}} (p_{\mathcal{P}} - p_{\text{well},\mathcal{P}}), \quad (\text{B.1})$$

em que $p_{\mathcal{P}}$ é a pressão discreta no vértice \mathcal{P} associado ao volume de controle em questão e $p_{\text{well},\mathcal{P}}$ é um valor médio da pressão no segmento de poço contido no volume de controle. Já $\text{WI}_{\mathcal{P}}$ é o índice de poço associado ao volume de controle considerado. Seu valor é função da geometria da região da malha adjacente ao volume de controle e da permeabilidade absoluta nessa região. A questão-chave na utilização de um modelo de poço é a determinação de índices de poço adequados (Maliska *et al.*, 2016c).

B.1 DETERMINAÇÃO DOS ÍNDICES DE POÇO

A determinação dos índices de poço é realizada conforme o modelo apresentado por Maliska *et al.* (2016c). Trata-se de uma adaptação da metodologia para a determinação de índices de poço proposta por Aavatsmark & Klausen (2003), que pode ser aplicada tanto a malhas estruturadas quanto não estruturadas e a poços retos ou levemente curvados. Ainda, a formulação proposta é também capaz de tratar adequadamente casos anisotrópicos.

Considera-se cada elemento de poço de forma isolada a fim de determinar índices de poço parciais correspondentes aos dois volumes de controle associados aos vértices que limitam cada elemento de poço. Assume-se que a pressão na região adjacente ao poço – considerada aqui como a região bem definida formada pela malha cilíndrica – varia de acordo a uma expressão matemática conhecida $P_a(x, y, z)$. Trata-se da solução simplificada do escoamento monofásico em torno ao poço. O valor do índice de poço depende exclusivamente da geometria da malha e das propriedades do meio, não das propriedades do fluido ou fluidos que escoam de ou até o poço. É por isso que normalmente os procedimentos para determinar os valores dos índices de poço são baseados em modelos de escoamento monofásico, ainda que aplicação final seja na simulação de escoamentos multifásicos. A forma em que varia a pressão nessa região depende, dentre outros parâmetros físicos, da vazão $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}$ no elemento de poço considerado e da pressão na superfície do poço P_{well} . Para a determinação dos índices de poço, assume-se que a pressão P_{well} é uniforme ao longo de todo o poço.

Uma das etapas da obtenção dos valores dos índices de poço consiste em resolver numericamente um problema auxiliar cuja solução exata é a função conhecida $P_a(x, y, z)$. Esse problema é definido pela equação diferencial elíptica

$$-\nabla \cdot (\check{\mathbf{K}} \nabla p) = 0 \quad (\text{B.2})$$

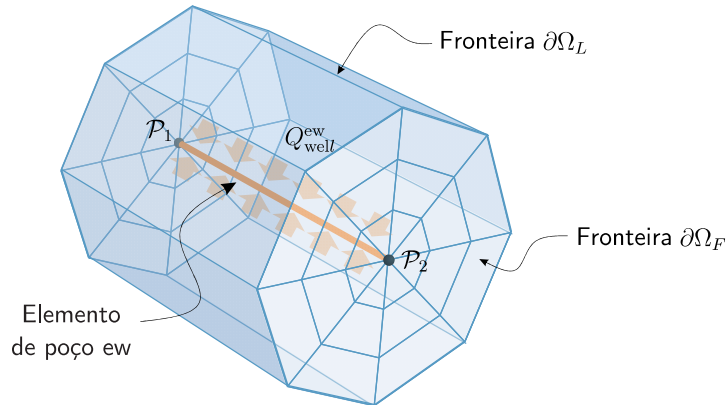
sujeita às condições de contorno

$$P = P^a(x, y, z) \text{ em } \partial\Omega_L, \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla P = \nabla P^a(x, y, z) \text{ em } \partial\Omega_B \text{ e } \partial\Omega_F, \quad (\text{B.4})$$

em que as fronteiras $\partial\Omega_L$, $\partial\Omega_B$ e $\partial\Omega_F$ podem ser identificadas na figura B.3. Considera-se que o elemento de poço é atravessado por uma vazão uniforme $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}$. Optou-se, neste trabalho, por utilizar a solução analítica do escoamento monofásico em torno a um poço reto de comprimento infinito e em um meio poroso também infinito. Essa solução pode ser encontrada em Aavatsmark & Klausen (2003) e Maliska *et al.* (2016c).

Figura B.3: Domínio e fronteiras para o problema auxiliar



Fonte: modificado de Maliska *et al.* (2016c)

A solução numérica do problema auxiliar na porção de malha cilíndrica fornecerá uma distribuição de pressão aproximada que não coincidirá exatamente com a distribuição analítica $P_a(x, y, z)$. O principal motivo para isso é o fato da malha não ser o suficiente refinada para captar com precisão o forte gradiente de pressão junto ao poço. Os valores numéricos de pressão que interessam para determinar os índices de poço são aqueles nos vértices \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 que limitam o elemento de poço em questão.

Conforme já verificado anteriormente na figura B.2, os elementos de poço e os volumes de controle encontram-se distribuídos em um arranjo desencontrado ao longo do poço. Isto é, metade de um elemento de poço se encontra em um volume de controle e metade em outro. Assim, se $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}$ é a vazão no elemento de poço da figura B.4, $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}/2$ deve ser consi-

derado no balanço no volume de controle associado ao vértice \mathcal{P}_1 . Da mesma forma, $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}/2$ deve ser computado no balanço do volume associado ao nó \mathcal{P}_2 . Logo, para esses dois volumes de controle podem ser escritas as seguintes particularizações da equação (B.1):

$$\frac{Q_{\text{well}}^{\text{ew}}}{2} = \text{WI}_{\mathcal{P}_1}^{\text{ew}} (p_{\mathcal{P}_1} - p_{\text{well}}), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{Q_{\text{well}}^{\text{ew}}}{2} = \text{WI}_{\mathcal{P}_2}^{\text{ew}} (p_{\mathcal{P}_2} - p_{\text{well}}). \quad (\text{B.6})$$

Ressalta-se que nestas expressões $Q_{\text{well}}^{\text{ew}}$ é o valor da vazão considerada tanto na solução analítica quanto na solução numérica do problema auxiliar. Por outro lado, p_{well} é a pressão na superfície do poço, considerada na solução analítica, enquanto $p_{\mathcal{P}_1}$ e $p_{\mathcal{P}_2}$ são os valores discretos de pressão em \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , respectivamente. Esses valores de pressão em \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 são obtidos na solução numérica do problema auxiliar. Sendo assim, as únicas incógnitas presentes nas equações (B.5) e (B.6) são os índices de poço $\text{WI}_{\mathcal{P}_1}^{\text{ew}}$ e $\text{WI}_{\mathcal{P}_2}^{\text{ew}}$, respectivamente. O superíndice indica que os índices de poço calculados correspondem apenas à porção dos volumes contidas no elemento de poço ew.

Conforme ilustra a figura B.4, os volumes de controle que são atravessados por um poço contém a metade de dois elementos de poço ². Seja \mathcal{P} o vértice associado a um desses volumes e ew_1 e ew_2 os elementos de poço que compartilham esse vértice. Utilizando o raciocínio exposto até aqui, sabe-se que há dois índices de poço associados a esse volume, correspondentes aos problemas auxiliares resolvidos para os elementos de poço ew_1 e ew_2 . Esses índices serão dados por expressões análogas às das equações (B.5) e (B.6), as quais podem ser escritas na forma

$$\frac{Q_{\text{well}}^{\text{ew}_1}}{2} = \text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_1} (p_{\mathcal{P}} - p_{\text{well}}), \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{Q_{\text{well}}^{\text{ew}_2}}{2} = \text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_2} (p_{\mathcal{P}} - p_{\text{well}}). \quad (\text{B.8})$$

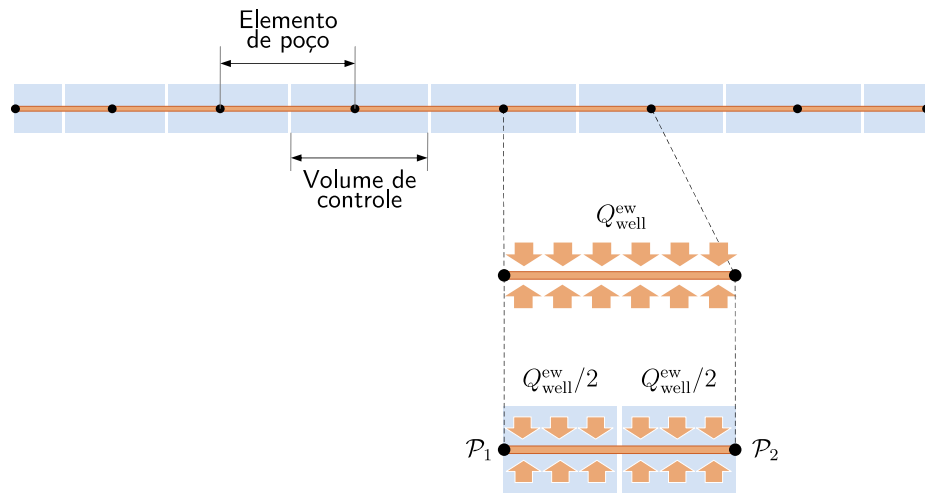
Somando as equações (B.7) e (B.8) obtém-se

$$\frac{Q_{\text{well}}^{\text{ew}_1} + Q_{\text{well}}^{\text{ew}_2}}{2} = (\text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_1} + \text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_2}) (p_{\mathcal{P}} - p_{\text{well}}). \quad (\text{B.9})$$

O membro esquerdo da equação (B.9) consiste na vazão que atravessa a porção do poço no interior do volume de controle correspondente a \mathcal{P} . Similarmente, conclui-se que a soma $\text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_1} + \text{WI}_{\mathcal{P}}^{\text{ew}_2}$ é o índice de poço associado ao volume de controle completo, denotado simplesmente como $\text{WI}_{\mathcal{P}}$.

²A exceção são os volumes nas extremidades do poço, os quais só contem a metade de um único elemento de poço.

Figura B.4: Esquema do arranjo de elementos de poço e volumes de controle ao longo de um poço

Fonte: modificado de Maliska *et al.* (2016c)