

MARCELO MASERA DE ALBUQUERQUE

**ANÁLISE DE RISCO DE CARTEIRA DE ATIVOS USANDO
DECOMPOSIÇÃO *WAVELETS* E CORRELAÇÃO
MULTIVARIADA DE CÓPULAS: DETERMINAÇÃO DO
VALUE-AT-RISK E DE PROPORÇÃO DE FALHAS**

Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Economia da
Universidade Federal de Santa
Catarina para a obtenção do Grau de
mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Milton Biage

Florianópolis
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Albuquerque, Marcelo

Análise de risco de carteira de ativos usando decomposição wavelets e correlação multivariada de cópulas : Determinação do value-at-risk e de proporção de falhas / Marcelo Albuquerque ; orientador, Milton Biage, 2019.

112 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Wavelets. 3. Cópulas. 4. Value-at risk. I. Biage, Milton. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

MARCELO MASERA DE ALBUQUERQUE

**ANÁLISE DE RISCO DE CARTEIRA DE ATIVOS USANDO
DECOMPOSIÇÃO *WAVELETS* E CORRELAÇÃO
MULTIVARIADA DE CÓPULAS: DETERMINAÇÃO DO
VALUE-AT-RISK E DE PROPORÇÃO DE FALHAS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Local, 27 de março de 2019.

Prof. Jaylson Jair da Silveira, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Milton Biage, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa Junior, Dr.
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Fernando Seabra, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Gilson Geraldino da Silva Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus pais,
namorada e irmã que jamais duvidaram
de minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Este capítulo em minha vida não ficou restrito apenas aos dois anos de mestrado. Mas se iniciou um ano antes, na decisão de se preparar para a tão concorrida prova da ANPEC. Desde àquela época, o apoio de pessoas queridas não faltou, sendo injusto não realizar uma breve homenagem – sob risco de esquecer alguém.

Agradeço profundamente à minha companheira e eterna namorada, Thaís Farsen, que teve papel crucial na conclusão desta jornada. Em momentos de instabilidade, manteve-me focado, em momentos de alegria, compartilhamos a felicidade. À nossa filha canina, Cissa Maria, com sua alegria e felicidade. Amo vocês.

Agradeço aos meus pais, Mário Albuquerque e Elizete Albuquerque, por terem feito o possível e o impossível para que eu tenha condições de seguir minha jornada pessoal. À minha irmã, Camila Albuquerque e seu companheiro, Pedro Zilli, por me permitirem vivenciar momentos mais leves. Amo todos vocês.

Agradeço aos meus amigos que compartilharam esta jornada de maneira muito próxima, Leonardo Favaretto, Matheus Rocha Fernandes, Frederico Dutra, Rafaella Assis, Alexandre Garcia e Rafael Wagner. Não poderia deixar de lembrar de Gustavo Kurmann e Maicon Brand, que propiciaram momentos de grande alegria.

Agradeço os amigos que o curso de Economia me ofereceu, Mateus Noriller, André Duarte, Gustavo Canova e Bruno Torri. A jornada não seria igual sem a presença de vocês.

Agradeço meus amigos de infância, que de certa maneira me apoiaram em momentos de desabafos e alegrias, Marco Antônio, Fábio Salum, Felipe Aliano, Alexsander Oliveira, Maurício Stumpf e Augusto Ehlers.

Agradeço aos meus tios e tias, que mantiverem a fé e esperança em meu trabalho, em especial, Eliani Mazera, Elairana Masera e Afonso Cordeiro. Sempre quando me viam mandavam vibrações positivas, reforçando minhas esperanças.

Um agradecimento especial à Rodrigo Nohra e Rafael Cunha que me estimularam em realizar o mestrado, me apoiando até sua conclusão.

Finalmente, agradeço à UFSC pela oportunidade e aos professores que fizeram parte da minha formação, Jaylson Silveira, Gilson Geraldino, Pablo Bittencourt, Hoyedo Lins e, meu também orientador, Milton Biage.

Todos fizeram parte de alguma forma da construção desse trabalho e da minha formação enquanto economista e enquanto pessoa. Muito obrigado a todos.

É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.

(Theodore Roosevelt)

RESUMO

Na área econômica, o processo de análise de dados é crucial para a obtenção de informações sobre diferentes fenômenos. É a partir da investigação sobre os dados que suposições são confirmadas ou descartadas, padrões são identificados, modelos são elaborados e projeções estimadas. Os avanços em métodos capazes de agregar marginalmente novas informações são estimulados pelo crescente número de dados disponíveis e pelos avanços tecnológicos e científicos. Nesse sentido, a utilização das decomposições *wavelets* e da análise de dependência via método de cópulas para a realização de análise sobre uma carteira eficiente permitirá incrementar novas percepções quanto aos comportamentos dos dados em análise. O objetivo do presente estudo é analisar o impacto das decomposições de curto, médio e longo prazo no VaR dos ativos e elaborar um modelo GARCH-cópula para analisar a estrutura de dependência. Enquanto as decomposições permitem analisar diferentes processos estocásticos formadores da série original, as cópulas permitem analisar o grau de dependência ao longo das distribuições dos dados analisados.

Palavras-chave: *Wavelets*, cópulas, *Value-at-risk*.

ABSTRACT

In the economic area, the process of data analysis is crucial for obtaining information about different phenomena. It is from the research on the data that assumptions are confirmed or discarded, patterns are identified, models are elaborated, and projections are estimated. Advances in methods capable of marginally aggregating new information are stimulated by the increasing number of available data and by technological and scientific advances. In this sense, the use of wavelet decompositions and the analysis of dependence by means of copulas for the analysis of an efficient portfolio will allow to increase new perceptions regarding the behavior of the data under analysis. The objective of the present study is to analyze the impact of the short, medium and long term decompositions on the VaR of the assets and to elaborate a GARCH-copula model to analyze the dependency structure. While the decompositions allow to analyze different stochastic processes forming the original series, the copulas allow to analyze the degree of dependence along the distributions of the analyzed data.

Keywords: Wavelets, copulas, Value-at-risk.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Risco e retorno dos ativos presentes no Ibovespa	32
Gráfico 2 – Carteira eficiente e a carteira alvo.....	36
Gráfico 3 – Decomposições da série da carteira eficiente.....	38
Gráfico 4 – Participação relativa das decomposições sobre a variância	41
Gráfico 5 – FAC e FACP do log-retornos da carteira	44
Gráfico 6 – FAC e FACP do log-retornos ao quadrado do portfólio	46
Gráfico 7 – Clusters de volatilidade	47
Gráfico 8 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para a carteira eficiente.....	50
Gráfico 9 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo EGIE3.....	50
Gráfico 10 – Copula Gumbel entre os ativos ABEV3 e FLRY3.....	52
Gráfico 11 – Volatilidade condicional estimadas e previstas por um GACH (1,1) para a carteira eficiente.....	55
Gráfico 12 – Cópula Clayton entre os ativos RADL3 e ABEV3	59
Gráfico 13 – Cópula Frank entre os ativos RADL3 e ABEV3	60
Gráfico 14 – Cópula Gaussiana entre os ativos MGLU3 e ABEV3	61
Gráfico 15 – Cópula t-student entre os ativos ABEV5 e BRKM5	61
Gráfico 16 – Cópula Clayton entre os ativos BRKM5 e ABEV3.	62
Gráfico 17 – Cópula Gumbel entre os ativos BRKM5 e ABEV3.....	62
Gráfico 18 – Cópula Frank entre os ativos BRKM5 e ABEV3.....	63
Gráfico 19 – Cópula t-student entre os ativos BRKM5 e ABEV3.....	63
Gráfico 20 – Cópula Gaussiana entre os ativos BRKM5 e ABEV3.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz de covariâncias.....	9
Tabela 2 – Ativos presentes na carteira eficiente	37
Tabela 3 – Impacto das variâncias das decomposições na variância da carteira eficiente	40
Tabela 4 – Teste Dickey-Fuller Aumentado	43
Tabela 5 – Média dos retornos	45
Tabela 6 – Parâmetros estimados pelo modelo GARCH(1,1).....	49
Tabela 7 – Rho's estimados da cópula Gumbel para os ativos da carteira eficiente	54
Tabela 8 – Rho's estimados da cópula Clayton para os ativos da carteira eficiente	65
Tabela 9 – Rho's estimados da cópula Frank para os ativos da carteira eficiente	66
Tabela 10 – Rho's estimados da cópula Gaussiana para os ativos da carteira eficiente	67
Tabela 11 – Rho's estimados da cópula t-student para os ativos da carteira eficiente	68
Tabela 12 – Resultado das estimativas de cópulas com base na Máxima Verossimilhança e no Critério de Akaike.....	69
Tabela 13 – Resultado do teste de falhas para o VaR down com 90% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira	71
Tabela 14 – Resultado do teste de falhas para o VaR up com 90% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira	71
Tabela 15 – Resultado do teste de falhas para o VaR down com 95% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira	72
Tabela 16 – Resultado do teste de falhas para o VaR up com 95% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira	73
Tabela 17 – Resultado do teste de falhas para o VaR down com 99% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira	73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS.....	4
1.1.1 Objetivo geral.....	5
1.1.2 Objetivos específicos	5
2 REFERENCIAL TEÓRICO	7
2.1 ANÁLISE DE RISCO.....	7
2.2 WAVELETS.....	10
2.2.1 Transformada <i>wavelet</i> discreta	11
2.2.2 TWD com sobreposição máxima	12
2.3 MEDIDAS DE DEPENDÊNCIA.....	13
2.3.1 Correlação linear.....	14
2.3.2 Coeficiente τ_K de Kendall	15
2.3.3 Coeficiente ρ_S de Spearman.....	16
2.3.4 Dependência de cauda.....	16
2.4 CÓPULAS.....	16
2.4.1 Modelos de cópulas	20
2.4.1.1 Cópulas elípticas.....	20
2.4.1.1.1 <i>Cópula gaussiana</i>	21
2.4.1.1.2 <i>Cópula t-student</i>	22
2.4.1.1.3 <i>Cópulas arquimedianas</i>	22
2.4.1.2 Tipos de cópulas.....	25
2.4.1.2.1 <i>Cópula gumbel</i>	25
2.4.1.2.2 <i>Cópula clayton</i>	26
2.4.1.2.3 <i>Cópula frank</i>	26
2.5 MODELOS GARCH.....	27
2.5.1 Modelo GARCH-cópula	28
3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO	31
3.1 Base de dados	31

3.2 Diversificação de ativos	33
3.3 Decomposição wavelets	37
3.4 Correlação multivariada de cópulas	41
3.4.1 Estimação da volatilidade condicional	42
3.5 GARCH-Cópula	51
3.6 Impactos de curto, médio e longo prazos sobre o VaR	55
4 RESULTADOS	59
5 CONCLUSÃO	75
6 REFERÊNCIAS	77
7 ANEXOS	81
7.1 ANEXO A – TESTE AIC PARA CÓPULAS ESTIMADAS....	81
7.2 ANEXO B – ANÁLISE RESIDUAL DO GARCH (1,1)	87
7.3 ANEXO C – ROLLING WINDOW	93

1 INTRODUÇÃO

Na área econômica, o processo de análise de dados é crucial para a obtenção de informações sobre diferentes fenômenos. É a partir da investigação sobre os dados que suposições são confirmadas ou descartadas, padrões são identificados, modelos são elaborados e parâmetros estimados. Os avanços em métodos capazes de agregar marginalmente novas informações são estimulados pelo crescente número de dados disponíveis e pelos avanços tecnológicos e científicos.

Nas séries financeiras, especificamente, a procura pela melhoria nos processos de estimação e de análise estrutural de dependência são focos centrais na fronteira científica. Essa motivação, em especial, é justificada pelas características das séries financeiras em si. Existem diversos estudos científicos que destacam, por exemplo, a existência de ativos financeiros com um comportamento mais volátil e tendencioso às perdas durante períodos de incerteza – elevado *downside risk* – além de heterocedasticidade na variância, assimetria negativa e excesso de curtose ao longo de suas distribuições de probabilidades (ANG; CHANG (2002), HU (2002 e 2006), BOUBAKER; SGHAIER (2012)), características que subestimam qualquer inferência estatística.

No presente trabalho, estamos inseridos no contexto de otimização de carteira de ativos financeiros, onde sua solução depende diretamente das premissas assumidas sobre o comportamento dos retornos dos ativos financeiros e da escolha do método de mensuração de risco. Tradicionalmente, trata-se de encontrar uma escolha ótima no *trade-off* de risco-retorno (KAKOURIS e RUSTEM, 2014).

A literatura financeira registra uma série de artigos que procuram complementar o método de Markowitz (1952) com novas teorias e métodos que procuram incorporar uma capacidade maior de análise da estrutura de dependência entre séries financeiras. Iremos tratar, portanto, de duas abordagens que estão apresentando relevância na área acadêmica nos últimos anos: a teoria de *wavelets* e cópulas.

O processo de decomposição das séries via *wavelets* permite estratificar uma série temporal em diferentes escalas de frequência e tempo, que caracterizam diferentes níveis de volatilidade – sem perdas de informação relevante. Cada nível de decomposição de uma série temporal está caracterizado por um processo estocástico referente a determinado ciclo econômico formador da série original.

O incremento dessa teoria às análises de dados permite, por exemplo, excluir efeitos de vieses, causados pela presença de *outliers* e

tendências das séries de retorno. Além disso, a possibilidade de analisar dados em frequências temporais diferentes tem uma interpretação econômica importante, uma vez que conseguimos analisar os processos estocásticos de efeitos de curto, médio e longo prazos. Isso é, as decomposições de baixas frequências são caracterizadas pelos efeitos de longo prazo, enquanto as altas frequências detêm os efeitos de curto prazo. Dessa forma, é possível identificar padrões de comportamentos nos ciclos econômicos geradores de processo estocástico da série original.

Por meio dessa concepção, podemos definir uma série temporal como a soma de suas decomposições de tempo e escala, isto é, dentro do processo estocástico gerador da série original, existem diferentes processos estocásticos relacionados aos diferentes níveis de frequência (ciclos econômicos), de maneira que a soma de todos eles nos retorna ao processo original. Em razão das características intrínsecas às séries temporais financeiras, a análise individual de cada decomposição oferece um tipo de informação diferente.

Assim, se quisermos analisar os retornos de ativos financeiros e procurar entender os efeitos de determinados ciclos sobre o risco de perda dos ativos, a análise poderá ser conduzida com maior precisão quando utilizada as decomposições tempo-frequência. Esse procedimento permite identificar quais são os efeitos de frequência que mais afetam o desempenho e os níveis de risco.

Jammazi e Rebored (2016), por exemplo, analisaram as implicações para a gestão de risco da estrutura de dependência do setor de petróleo (preços de ativos e do óleo Brent) baseada em um modelo wavelet-cópula. Por meio da utilização da transformada *wavelet Haar à trous*, os autores realizaram uma decomposição das séries temporais, identificando quebras estruturais entre as frequências curtas e longas, nos dois conjuntos de amostras selecionadas (pré-crise e pós-crise do *subprime*). Os ativos apresentaram diferentes características para cada decomposição analisada. Durante o período pós-crise, as decomposições de curto prazo apresentaram uma participação maior na composição da variância da série original, quando comparado com o período anterior.

Huang (2011) investigou os efeitos de *spillover* nos mercados financeiros por meio das decomposições *wavelets*. Os resultados indicaram que o poder preditivo dos efeitos de transbordamento se espalhou de forma desigual em cada escala de tempo, além de apresentarem padrões de contágio totalmente diferentes daqueles revelados no nível dos dados brutos. Foi possível perceber, portanto, que a direção e magnitude dos efeitos de transbordamento e volatilidade variam significativamente sobre os diferentes ciclos econômicos.

Enquanto os ciclos de curto prazo apresentaram uma maior disseminação, os de longo prazo resultaram em impactos menores.

Andries et al. (2014) realizaram um estudo sobre a dependência entre taxas de juros, preços de ações e taxas de câmbio na Índia por meio das decomposições *wavelets*. Foi possível perceber um atraso na movimentação entre os preços e a taxa de câmbio e de juros. Isso é, os impactos passaram a ser maiores à medida que foram analisados os processos estocásticos de longo prazo das séries.

Já Berger (2016) examinou a relevância da sazonalidade de longo prazo para estabelecer previsões mais robustas do *Value-at-Risk* (VaR). Por meio da decomposição *wavelet* foi realizada uma avaliação do comportamento conjunto das séries retornos financeiros de ações presentes no *Dow Jones Industrial Average*. Os estudos mostraram a relevância das flutuações de curto prazo nas séries históricas subjacentes para estabelecer previsões do VaR. Verificou-se que as frequências que descrevem as tendências de longo prazo da série não oferecem precisão estatística para a previsão do VaR.

Por sua vez, a relevância na utilização da teoria de cópulas surge por conta da capacidade de mensurar o grau de associação entre diferentes momentos da distribuição. A aplicação da teoria de cópulas oferece uma mensuração da estrutura de dependência utilizando as características de assimetria e o excesso de curtose para uma modelagem mais adequada nas tomadas de decisões de investimentos. Nesse caso, a análise concentra-se entre as distribuições marginais.

A aplicação dessa teoria é observada em diferentes aplicações na área financeira. Por exemplo, existem diversos estudos vinculando sua capacidade de mensuração de dependência sobre a mensuração de *co-moviments*.

Para Kakouris e Rustem (2013), por exemplo, optaram por utilizar diferentes famílias de cópulas como forma de obter maiores informações acerca da estrutura de dependência das séries financeiras. Cada família de cópula estimada apresentou um tipo de estrutura de dependência, sendo possível perceber padrões de comportamentos conjuntos.

Jammazi e Reboredo (2016) utilizaram as cópulas e *wavelets* para examinar o potencial de diversificação e redução do *downside risk* para diferentes composições de ativos do setor de petróleo em horizontes de tempos distintos. Sua análise empírica demonstrou que a estrutura de dependência dos ativos apresentava características diferentes em determinados períodos e decomposições. Por exemplo, antes da crise do *subprime*, houve evidência de ganhos da diversificação e redução do risco nas decomposições de maior frequência, enquanto os ganhos foram

consideravelmente menores para as decomposições de menor frequência no período pós-crise.

Allen et al. (2013) realizaram uma análise de dependência entre ativos financeiros utilizando o método de cópulas para modelar padrões complexos de dependência. Utilizaram como base diferentes ações presentes no índice de Dow Jones, além do próprio índice, para avaliar suas interdependências e avaliar como suas correlações mudam em diferentes circunstâncias econômicas utilizando períodos diferentes – crise financeira *subprime* (pré-crise: jan.2005-jun.2007, crise: jul.2007-set.2009 e pós-crise: set.2009-dez.2011).

Os resultados sugerem que as dependências mudam de forma complexa, tendo evidências de maior dependência da cópula *t-student* durante o período de auge da crise; o que é consistente com a existência de caudas pesadas para as distribuições dos retornos nesse período (ALLEN et al., 2013).

Os estudos apresentaram eficácia no que se refere aos objetivos listados em cada análise realizada. Todos demonstraram que a teoria de cópulas oferece uma capacidade mais flexível para obter uma estrutura de dependência entre variáveis aleatórias, enquanto a possibilidade de analisar os diferentes processos estocásticos formadores de uma série temporal permite analisar impactos dos ciclos econômicos de curto, médio e longo prazo.

No presente trabalho será realizada uma análise sobre uma carteira de ativos eficiente, precedida pelo método de Markowitz (1953). Será analisada a estrutura de dependência dos ativos presentes na carteira para diferentes famílias de cópulas e por pares de ativos. Dessa maneira, será identificado o padrão da cópula que melhor se adapta aos dados da carteira, bem como as relações individuais de cada par selecionado. Para a análise de risco, iremos identificar os diferentes impactos dos ciclos de curto, médio e longo prazo sobre a estimação do VaR. Desse modo, será possível inferir padrões de comportamento sobre o impacto de cada decomposição na estimação de risco.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho consiste em utilizar a teoria de *wavelets* e cópulas para estabelecer análises de uma carteira de ativos financeiros.

1.1.1 Objetivo geral

Será realizada uma análise quantitativa sobre uma carteira eficiente, através da estimação da volatilidade condicional dos ativos em carteira. Através da volatilidade condicional, será analisada a estrutura de dependência dos ativos entre si, além de identificar os diferentes impactos das decomposições *wavelets* de cada ativo sobre as estimativas de risco dos mesmos – através da metodologia de *value-at-risk*.

1.1.2 Objetivos específicos

- i) Estruturar uma carteira eficiente de ativos financeiros para a realização das análises, envolvendo os ativos financeiros listados na Bovespa;
- ii) Decompor as séries temporais de cada ativo financeiro em diferentes estruturas de tempo e frequência, através da transformada *wavelet* discreta;
- iii) Estimar as variâncias condicionais de cada ativo financeiro, através de um modelo GARCH;
- iv) Estimar as distribuições marginais dos ativos através das variâncias condicionais e realizar uma análise da estrutura de dependência da carteira via o método de cópulas;
- v) Estimar o risco dos ativos financeiros e analisar o grau de importância das diferentes decomposições sobre as estimativas do *value-at-risk*, através da proporção de falhas via método *rolling window*.

Este trabalho está organizado em três grandes capítulos. O primeiro deles trata-se do referencial teórico acerca da análise de risco, *wavelets*, medidas de dependência, teoria de cópulas e os modelos GARCH. Em sequência, são apresentados os procedimentos metodológicos de cada etapa executada, para, finalmente, serem apresentados os resultados e as conclusões acerca do método.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta os conceitos e o contexto no qual se insere os objetivos de estudo deste trabalho. A primeira subseção faz uma revisão do arcabouço teórico de análise de riscos em ativos financeiros. Em sequência, a teoria de *wavelet* será abordada, identificando suas características, métodos e aplicação na literatura econômica. A terceira subseção apresenta as medidas de dependência ou de associação. Para a apresentação da teoria de cópulas são destinadas duas subseções, que envolvem sua definição e apresentação das classificações em diferentes famílias. Finalmente, a última subseção é destinada para a apresentação dos modelos estimação de volatilidade condicional.

2.1 ANÁLISE DE RISCO

No presente trabalho estamos inseridos no problema de otimização de portfólio, onde sua solução depende diretamente das premissas assumidas sobre o comportamento dos retornos dos ativos financeiros e da escolha do método de mensuração de risco. Tradicionalmente, trata-se de encontrar uma escolha ótima no *trade-off* de risco-retorno (KAKOURIS e RUSTEM, 2014).

Analisar o formato e características da distribuição dos ativos financeiros trata-se de uma escolha natural para procurar uma solução mais factível dentro do contexto de séries temporais, uma vez que estudos empíricos vêm demonstrando que a suposição de normalidade na distribuição dos retornos de ativos financeiros não é observada. Ang e Chang (2002) e Hu (2002 e 2006), por exemplo, demonstraram que em um período de instabilidade econômica os ativos apresentaram maior volatilidade em direção a movimentos extremos quando comparados em momentos de prosperidade.

Para Boubaker e Sghaier (2012), há evidências no mercado financeiro de ativos que registram, por exemplo, assimetria negativa e excesso de curtose, o que indica, especificamente, maior probabilidade de retornos negativos e maior probabilidade de ocorrência de eventos extremos.

Um método de mensuração de risco adequado, no qual apresenta-se dependente da distribuição dos retornos de ativos financeiros, é, portanto, crucial ao processo de otimização de portfólio. As distorções nas distribuições dos ativos financeiros tratam-se de fato estilizado dentro da literatura, direcionando estudos na elaboração de novos métodos de

mensuração de risco. Ignorar os fatos estilizados pode levar a conclusões errôneas, de maneira que dentro do problema de otimização de portfólio a solução ótima talvez não seja tão consistente.

A literatura disponibiliza uma vasta quantidade de autores que procuraram analisar as propriedades adequadas para verificação conceitual da consistência dos métodos de mensuração de risco – visto em Roman e Mitra (2009), Hadar e Russel (1969), Aharony e Loeb (1977), Artzner et al. (1998) e Clemen e Reily (2001).

Roman e Mitra (2009), por exemplo, apresentam dois conceitos para uma medida de risco adequada: dominância estocástica e coerência. O termo dominância estocástica pode ser definida como um processo realizado para classificar variáveis aleatórias modeladas pela função utilidade. Por exemplo, considerando $F(x)$ e $G(x)$ funções de probabilidade acumuladas dos portfólios F e G, onde X é uma variável aleatória representando os retornos, temos que:

a) portfólio F possui dominância estocástica de primeira ordem em relação a G se $F(X) \leq G(X)$;

b) portfólio G possui dominância estocástica de segunda ordem em relação a G se $\int_{-\infty}^x [G(x) - F(x)] dt \geq 0$.

Isso quer dizer que a carteira F será mais eficiente em relação à carteira G, caso apresente um retorno esperado maior e menor variância.

Artzner et al. (1998) apresentaram as propriedades adequadas que uma medida coerente de risco deva satisfazer. Elas se referem às condições de otimização de risco e podem ser classificadas como: monotonicidade, homogeneidade, condição livre de risco e subaditividade.

Considerando dois ativos L_1 e L_2 , uma medida de risco ρ é classificada como medida de risco coerente se satisfazer as seguintes propriedades:

a. Monotonicidade: se $L_1 \geq L_2$, então $\rho(L_1) \geq \rho(L_2)$;

Caso um ativo L_1 apresente retornos maiores que L_2 , esse ativo deve possuir um risco maior em relação ao segundo ativo.

b. Homogeneidade: $\rho(tL) = t\rho(L) \forall t > 0$;

O risco de uma variável aleatória multiplicada por um escalar deve ser o mesmo que multiplicar o escalar pelo risco individual da variável aleatória.

c. Condição livre de risco: $\rho(L + l) = \rho(L) - l, l \in \mathfrak{R}$;

Investir em um ativo livre de risco torna o risco da carteira ainda menor.

d.Subaditividade: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.

A combinação de dois ativos apresenta um risco menor ou igual a soma dos riscos individuais.

Medidas como o desvio padrão e o desvio médio absoluto satisfazem apenas o conceito de medida de risco coerente, se e somente se supor-se distribuição normal; o momento parcial inferior, no entanto, satisfaz apenas os conceitos de dominância estocástica de primeira e segunda ordem (ARAÚJO; MONTINI, 2015).

Uma medida comumente utilizada como mensuração de risco é conhecida como *Value at risk* (VaR). O método trata-se de um procedimento estatístico no qual se procura estimar um potencial de perda em um horizonte de tempo considerado, tendo seu limite caracterizado pelo nível de confiança desejado (BERGER, 2016). Por exemplo, supondo um nível de confiança de 99% existe uma chance de 1% dentro do horizonte de tempo determinado, de que a perda seja superior ao VaR. Vale destacar, no entanto, que não há informação alguma sobre o quanto seria essa perda na eminência de um cenário além do nível do VaR.

A ideia por trás do VaR é a mesma quando aplicada sobre um portfólio. No caso do modelo proposto por Markowitz (1952), sabemos que o valor esperado do retorno de um portfólio é definido como:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) \quad (1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sigma_{i,j} \quad (2)$$

em que σ_p^2 consiste na variância do portfólio e $\sigma_{i,j}$ representa a covariância entre os retornos dos ativos i e j .

Para a matriz de covariância, necessária para a identificação da fronteira eficiente, temos que:

Tabela 1 – Matriz de covariâncias

Ativo	A	B	C
A	$Cov(r_a, r_a) = \sigma^2$	$Cov(r_b, r_a)$	$Cov(r_c, r_a)$
B	$Cov(r_a, r_b)$	$Cov(r_b, r_b) = \sigma^2$	$Cov(r_c, r_b)$
C	$Cov(r_a, r_c)$	$Cov(r_b, r_c)$	$Cov(r_c, r_c) = \sigma^2$

Elaborado pelo autor.

Matematicamente, a covariância entre ativos diferentes pode ser estimada utilizando os dados históricos dos retornos dos ativos em T períodos:

$$Cov(r_j, r_k) = \sum_{i=1}^T \frac{(r_{ji} - E(r_j))(r_{ki} - E(r_k))}{T} \quad (3)$$

onde, $E(r_j)$ e $E(r_k)$ representam o retorno médio esperado dos ativos j e k , respectivamente.

A construção do modelo apresentado por Markowitz (1952) tem como objetivo a otimização de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sigma_{i,j} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s. a.} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \text{ e } 0 \leq w_i \leq 1 \end{array} \right. \quad (5)$$

Diante desse modelo, podemos definir o VaR de um portfólio com nível de confiança $\alpha \in (0,1)$ como sendo o menor número ℓ tal que a probabilidade de uma perda L exceder ℓ é no máximo $(1 - \alpha)$, ou seja

$$VaR_\alpha = \inf\{x \in \mathfrak{R} \mid F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha) = q_\alpha(F_L) \quad (6)$$

considerando $q_\alpha(F_p) = F_p^{-1}(\alpha)$ o α -quantil da distribuição do portfólio dos retornos, temos que:

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sigma_p F_p^{-1}(\alpha) \quad (7)$$

onde μ_p representa a média de retorno do portfólio. Resolvendo $F_p^{-1}(\alpha)$ temos que a parte mensurada na distribuição de probabilidade dos retornos da carteira em termos do número de desvios-padrões a partir da média é dado por:

$$F_p^{-1}(\alpha) = \frac{(VaR_\alpha - \mu_p)}{\sigma_p} \quad (8)$$

Incluindo a fórmula da volatilidade do portfólio na equação anterior, temos que:

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2w_i w_j \sigma_{ij}} * [F_p^{-1}(\alpha)] \quad (9)$$

2.2 WAVELETS

A abordagem *wavelet* permite capturar fatos estilizados presentes nas séries temporais. Quando, por exemplo, aplicada às séries financeiras, é possível identificar a assimetria, não-linearidade e caudas pesadas. Todas essas características são resultadas de mudanças estruturais que transmitem ruídos e desvios (JAMMAZI; REBOREDO, 2016). Trata-se de uma técnica útil para lidar com séries temporais não-estacionárias e com os sinais contaminados com ruídos – por conta de sua capacidade de analisar uma série no tempo e escala simultaneamente (CHIANN; MORETTIN, 1998).

A maioria dos estudos aborda a análise de dependência sobre a dimensão temporal, ignorando o domínio da frequência; essa teoria é capaz de evidenciar fenômenos particulares de cada frequência de dados que, de forma agregada, são perdidos (PINTEL; SILVA, 2011).

2.2.1 Transformada *wavelet* discreta

A aplicação da transformada *wavelet* discreta (TWD) às análises de séries temporais permite capturar os modos dominantes de variabilidade e suas variações no tempo, por meio de uma escala tempo-frequência (JOTHIMANI; SHANKAR; YADAV, 2016). Enquanto isso, Transformada Fourier decompõe o sinal apenas no domínio da frequência (ORTEGA; KHASHANAG, 2014).

Qualquer série $y(t)$ pode ser decomposta por uma sequência de projeções *wavelets* baseada em um coeficiente de suavização, $s_{j,k}$, e outro de detalhamento $d_{j,k}$, i.e., são representação de sinais no domínio do *wavelet*.

$$s_{j,k} = \int y(t)\Phi_{j,k}(t)dt \quad (10)$$

$$d_{j,k} = \int y(t)\Psi_{j,k}(t)dt \quad (11)$$

Em relação aos componentes, a série original pode ser representada como:

$$y(t) = s_j + \sum_{i=1}^J d_j \quad (12)$$

O subscrito j representa os níveis de decomposição das séries, Φ é a *wavelet* pai, enquanto a Ψ é a *wavelet* mãe. As funções $\Phi_{j,k}$ e $\Psi_{j,k}$ representam o dimensionamento e a translação. Essas funções são definidas por:

$$\Phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Phi(2^{-j}t - k) \quad (13)$$

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k) \quad (14)$$

A função Φ e Ψ aproximam os componentes de suavização, caracterizados pela baixa frequência, e os componentes detalhados, caracterizados pela alta frequência.

2.2.2 TWD com sobreposição máxima

Como estamos trabalhando com séries financeiras e um dos objetivos é realizar uma estimação do risco mais fidedigna, será utilizado como método de o *maximum overlap discret wavelet transform* (MODWT). Sua escolha está centrada na manutenção da variância das séries originais e, portanto, sem perda de informação após o processo de decomposição (PERCIVAL; WALDEN, 2000).

A decomposição das séries é realizada por meio da aplicação dos filtros *wavelet* e de escala da MODWT por meio das seguintes aplicações:

$$\tilde{h}_{j,l} = \frac{h_{j,l}}{2^{j/2}} \quad (15)$$

$$\tilde{g}_{j,l} = \frac{g_{j,l}}{2^{j/2}} \quad (16)$$

onde $\tilde{h}_{j,l}$ e $\tilde{g}_{j,l}$ são os filtros da MODWT. $j = [1, \dots, J]$ representa o nível de decomposição da série em que J é o maior nível de decomposição. $l = [1, \dots, L]$ é o comprimento do filtro, que está intrinsecamente ligado ao nível j escolhido, sendo L o maior tamanho da escala.

Os coeficientes *wavelet* são obtidos pela convolução dos retornos $r = \{r_t, t = 1, 2, \dots, n - 1\}$ e os filtros MODWT:

$$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} r_{t-l \bmod N} \quad (17)$$

$$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} r_{t-l \bmod N} \quad (18)$$

em que $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ é o tamanho do filtro associado com a escala λ_j e $\bmod N$ é o operador de módulo que indica a necessidade de lidar com o limite do vetor r_t com um número finito de observações.

Em sua forma matricial, dado $\tilde{W}_j = \tilde{w}_j r$ e $V_j = \tilde{v}_j r$, temos que:

$$\tilde{w}_j = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \dots & \tilde{h}_{j,2} & \tilde{h}_{j,1} \\ \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \dots & \tilde{h}_{j,3} & \tilde{h}_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \tilde{h}_{j,N-3} & \dots & \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\tilde{v}_j = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{j,0} & \tilde{g}_{j,N-1} & \tilde{g}_{j,N-2} & \dots & \tilde{g}_{j,2} & \tilde{g}_{j,1} \\ \tilde{g}_{j,1} & \tilde{g}_{j,0} & \tilde{g}_{j,N-1} & \dots & \tilde{g}_{j,3} & \tilde{g}_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_{j,N-1} & \tilde{g}_{j,N-2} & \tilde{g}_{j,N-3} & \dots & \tilde{g}_{j,1} & \tilde{g}_{j,0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Como estamos interessados em reconstruir as séries utilizando as decomposições do nosso interesse, para realizar uma análise baseada no tempo e frequência, as séries podem ser reconstruídas a partir de:

$$r = \sum_{j=1}^J \tilde{\omega}_j^T \tilde{W}_j + \tilde{v}_j^T \tilde{V}_j \quad (21)$$

Dessa maneira, é possível aplicar a transformação *wavelet* em diferentes retornos, podendo analisar as características geradoras do processo estocástico em diferentes decomposições que se caracterizam por demonstrar diferentes níveis de volatilidade. Como análise, podemos identificar comportamentos característicos ao processo estocástico das séries temporais de longo prazo e de curto prazo, de forma a implicar resultados importantes para o gerenciamento de risco financeiro e alocação de recursos.

2.3 MEDIDAS DE DEPENDÊNCIA

Na área financeira, especialistas procuram identificar padrões e comportamentos que se realizaram no passado na expectativa que os mesmos se repetirão, em certa medida, no futuro. Para isso, excluir métodos de mensuração que ofereçam informações da dinâmica existente entre variáveis seria incorrer ao erro. A economia, como campo de estudo, trata-se de um ambiente complexo e dinâmico, no qual toda informação extra incorpora uma capacidade maior de análise.

Nessa seção nós vamos apresentar quatro métodos que possibilitam identificar estruturas de associação entre variáveis aleatórias.

O primeiro deles está caracterizado pelo coeficiente de correlação, no qual possui algumas limitações quanto sua capacidade de mensuração. Outros dois métodos procuram oferecer alternativas de solução para o contexto no qual o coeficiente de correlação linear não se apresenta tão adequado, sendo eles: os coeficientes τ_K de Kendall e ρ_S de Spearman. Finalmente, apresenta-se a dependência de cauda.

2.3.1 Correlação linear

Um método tradicional de identificar e analisar a forma pela qual duas variáveis aleatórias se comportam entre si é pelo coeficiente de correlação, cujo principal objetivo é medir a força ou o grau de associação linear entre duas variáveis que apresentam algum tipo de relação. Também conhecido como coeficiente de correlação linear de Pearson, o coeficiente de correlação pode ser definido como:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (22)$$

onde $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ é a covariância entre X e Y e σ_X, σ_Y representam os desvios padrões de X e Y, respectivamente. Vale destacar que:

- (i) $-1 \leq \rho_P \leq 1$;
- (ii) $\rho_P = 0$ quando X e Y são independentes;
- (iii) $\rho_P = \pm 1$ quando Y é uma função linear de X.

Correlação linear é uma medida muito utilizada, entretanto, pouco compreendida. De acordo com Embrechts, Lindskog e McNeil (2003), sua popularidade está caracterizada pela facilidade de aplicação e uma mensuração de dependência natural no caso de distribuições elípticas. Tal medida considera somente a variância como forma de volatilidade, entretanto, a maioria das variáveis aleatórias não são distribuídas conjuntamente de forma elíptica, de modo que a volatilidade pode ser dada pelos efeitos de assimetria e curtose. Assim, a correlação linear como medida de dependência em tais situações pode se revelar enganosa.

2.3.2 Coeficiente τ_K de Kendall

Como apresentado anteriormente, o coeficiente τ_K de Kendall apresenta-se como uma alternativa para o coeficiente de correlação linear como uma mensuração de dependência para o contexto de distribuições não elípticas.

Para um maior entendimento, trazemos à tona o conceito de pares concordantes e pares discordantes. Supondo que temos duas variáveis aleatórias (X, Y) , as quais apresentam uma distribuição F contínua, dizemos que os pares dessas variáveis são concordantes quando pequenos valores de uma estão associados a pequenos valores da outra, tendo o mesmo caso ocorrendo na existência de valores grandes. Trazendo o conceito de análise matemática, sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) dois pares independentes. Sempre que tivermos $(X_1 > X_2 | Y_1 > Y_2)$ e $(X_1 < X_2 | Y_1 < Y_2)$ dizemos que os pares são concordantes, caso haja uma distorção nessa lógica, e portanto, $(X_1 > X_2 | Y_1 < Y_2)$, dizemos que os pares são discordantes.

De acordo com Morettin (2011), as duas definições podem ser identificadas geometricamente quando, por exemplo, dado dois pontos distintos (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) no plano, os pares serão concordantes se o segmento de reta que os une apresentar uma inclinação positiva. Caso contrário, na existência de um segmento de reta com inclinação negativa, os pares serão discordantes. Assim, podemos definir τ_K de Kendall como:

$$\tau_K(X, Y) = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} \quad (23)$$

Ainda de acordo com Morettin (2011), sua utilização no contexto financeiro, no qual, por exemplo, as variáveis aleatórias sejam retornos de ativos financeiros, o interesse está caracterizado nos casos em que as variáveis se apresentam em concordância. Dessa maneira será possível determinar o grau de inter-relação que as variáveis apresentam com base em seus dados históricos.

No caso em que não temos o conhecimento de todos os dados das variáveis em análise, podemos utilizar um método baseado em amostra, no qual representa uma estimativa do coeficiente τ_K .

$$\widehat{\tau}_K = \frac{n-1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{ sinal} \left((x_i - x_j)(y_i - y_j) \right) \quad (24)$$

o sinal $(x) = 1$, se $x > 0$, 0 se $x = 0$ e -1 se $x < 0$.

2.3.3 Coeficiente ρ_S de Spearman

O coeficiente ρ_S de Spearman também é baseado em concordância e discordância. Dado três pares independentes de duas variáveis aleatórias (X, Y) , temos que:

$$\rho_S = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (25)$$

de modo que ρ_S é definido como sendo proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância de dois vetores (Morettin, 2011). Sua estimação pode ser realizada por:

$$\widehat{\rho}_S = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n \left(R_i - \frac{n+1}{2}\right) \left(S_i - \frac{n+1}{2}\right) \quad (26)$$

onde R_i e S_i são os postos de X_i e Y_i previamente definidos.

2.3.4 Dependência de cauda

A dependência de cauda oferece possibilidade de lidarmos com riscos financeiros de dois ativos simultaneamente e obter uma medida do grau de associação dos ativos apresentarem valores extremos ao mesmo tempo.

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias com funções de distribuição F_1 e F_2 . Seus índices de dependência de cauda superior e inferior, λ_U e λ_L entre X_1 e X_2 são dados por

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[X_2 > F_2^{-1}(\alpha) | X_1 > F_1^{-1}(\alpha)], \quad (27)$$

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[X_2 < F_2^{-1}(\alpha) | X_1 < F_1^{-1}(\alpha)], \quad (28)$$

se os limites $\lambda_U \in [0,1]$ e $\lambda_L \in [0,1]$ existem.

X_1 e X_2 são denominadas assintoticamente dependentes na parte extrema da cauda direita se $\lambda_U \in (0,1]$ e assintoticamente dependentes na parte extrema da cauda esquerda se $\lambda_L \in (0,1]$.

2.4 CÓPULAS

Nessa subseção será apresentado a fundamentação teórica de cópulas, baseada em demonstrações matemáticas e a descrição das diferentes famílias existentes.

Os coeficientes de correlação, por exemplo, medem o grau de associação sem fornecer informações sobre as mudanças da estrutura de dependência ao longo de toda a distribuição, entretanto, por meio da escolha adequada da cópula, pode-se exercer um bom controle sobre quais partes das distribuições estão mais fortemente associadas (VENTER, 2013).

A importância na utilização do método de cópulas surge por conta de sua capacidade de mensuração do grau de associação em diferentes momentos da distribuição. Suas aplicações são observadas nas áreas de estatística, finanças, gestão de risco e modelagem de dependência em carteiras de seguros (MORETTIN, 2011). Como resultado, oferece uma análise da estrutura de dependência entre duas ou mais variáveis aleatórias, detalhando de forma mais precisa o comportamento conjunto e a influência de uma variável sobre a outra. De acordo com Nelsen (2006), a área de finanças vem utilizando recentemente essa abordagem, de maneira que ainda exista muito campo para seu desenvolvimento.

O tema começou a ser discutido a partir da década de 1950, com o trabalho de Sklar (1959). A contribuição do autor está caracterizada pela derivação de um teorema que define a relação entre cópulas e funções de distribuição de variáveis aleatórias. O teorema é, provavelmente, o mais importante fator que conecta cópulas às distribuições de probabilidade (KAKOURIS e RUSTEM, 2013), tendo como resultado a possibilidade de expressar uma distribuição multivariada por meio de suas marginais. Sua derivação é exposta em sequência.

Teorema 1. (Teorema de Sklar). Seja F uma função de distribuição de n -dimensão com distribuições marginais F_1, \dots, F_n . Então existe uma n -copula C tal que, $\forall x \in R^n$:

$$F(F_1, \dots, F_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (29)$$

O teorema apresentado é fundamental para a teoria de cópulas, no que diz respeito a sua aplicação na área estatística (NELSEN, 2006). Em conjunto com o corolário que se segue, fornecem a relação completa entre n -cópulas e distribuições de probabilidade.

Corolário 1. Seja F uma função de distribuição multivariada de n -dimensão com distribuições marginais F_1, \dots, F_n , e C uma n -copula. Então, $\forall u \in I^n$,

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (30)$$

onde $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ são funções quase-inversas das distribuições marginais.

De maneira geral, uma cópula pode ser definida como uma função que liga distribuições conjuntas às suas distribuições marginais (FERMANIAN; SCAILLET, 2002). Uma distribuição conjunta é composta por distribuições univariadas e pela relação de dependência entre as variáveis, que traduzem a maneira em que elas se comportam. Portanto, a partir da utilização de distribuições marginais de cada variável, a função de cópula gera como resultado uma distribuição multivariada das variáveis.

Toda distribuição multivariada pode ser decomposta em uma estrutura formada pelas distribuições marginais e uma estrutura de dependência, representada pelas funções de cópulas que servem como instrumento de ligação entre as distribuições marginais (BERGMANN, 2013).

Definição 1. Uma função de distribuição é uma função $F: \mathbb{R} \rightarrow I$ que segue as seguintes propriedades:

1. F é não decrescente.
2. $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Definição 2. Uma função de distribuição multivariada conjunta é uma função $F: \mathbb{R}^n \rightarrow I$ com as seguintes propriedades:

1. F é crescente em n .
2. F é limitado.
3. $F(\infty) = 1$.
4. $F(\infty, \dots, \infty, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_m(x_m)$ onde $m = 1, 2, \dots, n$.

A teoria de cópulas está situada na área de modelagem de distribuições multivariadas e, por isso, diretamente conectada ao conceito de dependência (Santos e Pereira, 2011). Cópulas são funções de distribuições multivariadas na qual as distribuições marginais são uniformemente distribuídas no intervalo fechado $[0, 1]$ e podem ser substituídas por distribuições acumuladas univariadas de variáveis aleatórias (NELSEN, 2006). Uma cópula acopla distribuições marginais univariadas formando distribuições multivariadas. Desse modo, o método de cópulas considera a dependência entre as distribuições marginais das

variáveis aleatórias ao invés de focar diretamente na dependência entre as próprias variáveis aleatórias, representando, dessa maneira, uma forma mais flexível do que as distribuições padrão (KAKOURIS e RAUSTEM, 2013). O método resume-se, portanto, em identificar as distribuições marginais das variáveis aleatórias e encontrar a dependência entre elas por meio de um acoplamento.

Definição 3. Uma cópula com dimensão n é uma função C de $I^n \rightarrow I$, onde $I = [0, 1]$, com as seguintes propriedades:

1. $C(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$ se algum $u_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
2. $C(1, \dots, 1, u_m < 1, \dots, 1) = u_m, \forall u_m \in I$, onde $m = 1, 2, \dots, n$.
3. $C(u) \geq 0, \forall u \in I^n$.

Definição 4. A densidade de uma cópula de ordem n é uma função $c: I^n \rightarrow [0, \infty)$ de modo que:

$$c(u_1, \dots, u_n) \equiv \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)} \quad (31)$$

As definições matemáticas apresentadas no Teorema 1, Corolário 1 e na Definição 4 decompõem a distribuição de probabilidade multivariada de suas margens, sendo essa uma das maiores vantagens da utilização do método de cópulas, uma vez que divide o problema de encontrar uma distribuição correta em duas partes; primeiro identificando a distribuição das margens e, em segundo lugar, a dependência entre elas (KAKOURIS e RUSTEM, 2013).

A utilização desse tipo de função na modelagem é extremamente útil quando estamos num mundo multivariado onde as variáveis apresentam alguma forma de dependência, principalmente por conta da capacidade da cópula em capturar diversas estruturas de dependência entre diferentes séries de tempo, até mesmo quando as distribuições marginais não forem da mesma família (BERGMANN, 2013).

Sabemos, por exemplo, que uma função de distribuição conjunta apresenta toda a informação sobre o comportamento das variáveis analisadas e, que, tais características, são oriundas do comportamento marginal de cada variável bem como de suas inter-relações. Por isso, o objetivo de utilizar o método de cópulas é de extrair a estrutura de dependência de seu vetor aleatório (SOUZA, 2003). Nesse sentido,

incorporando o método a qualquer contexto de análise multivariada, sua aplicação oferece uma análise mais robusta sobre a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias e processos estocásticos.

2.4.1 Modelos de cópulas

O referencial teórico acerca do tema de cópulas registra a existência de diferentes classes e famílias de funções de cópulas, onde cada família apresenta uma análise de dependência distinta – diferindo no grau de associação fornecidos. O processo de escolha deve ser baseado nos critérios habituais de familiaridade, facilidade de uso e tratamento analítico. Se faz necessário conhecer as formas das distribuições teóricas e identificar se a dependência verificada empiricamente é compatível com a suposição de comportamento imposto pela cópula selecionada (SOUZA, 2003).

As cópulas podem ser divididas em grupos de cópulas paramétricas e não paramétricas. Entende-se por cópulas paramétricas todas aquelas pertencentes a uma família que tenha, em sua expressão matemática, a indexação por um parâmetro. Já as cópulas não paramétricas representam todas aquelas que não estão indexadas por um parâmetro (cópula empírica).

Existem algumas classes que apresentam maior interesse na literatura econômica, identificadas como cópulas de dependência extrema (cópula M, cópula W e cópula Π), cópulas elípticas (cópulas gaussianas e cópula t-student) e cópula de valor extremo. Cópulas de dependência extrema modelam relações perfeitas entre as variáveis aleatórias, i.e., dependência positiva perfeita, negativa perfeita ou independência; as cópulas elípticas estão associadas às distribuições elípticas e representam relações de dependência simétricas; finalmente, as cópulas de valor extremo representam as relações observadas nas extremidades das distribuições marginais (VELASCO, 2016).

No entanto, uma classe de relevância na literatura não é classificada nem como cópulas elípticas e tão pouco como cópulas de valor extremo. Isso ocorre por conta do grande número de famílias existentes com diferentes características (VELASCO, 2016). Conhecidas como Cópulas Arquimedianas, sua relevância está caracterizada pela maneira que é estabelecida sua função geradora, permitindo realizar uma simplificação em seus cálculos.

2.4.1.1 Cópulas elípticas

A classe de Cópulas Elípticas apresenta como conexão direta com a distribuição normal, de maneira que apresentam capacidade representar relações simétricas. Sua simulação é fácil e, por consequência do Teorema de Sklar, é feita a partir dos tipos de cópulas elípticas como, por exemplo, Cópula *Gaussiana* e Cópulas *t-student*.

2.4.1.1.1 Cópula *gaussiana*

A cópula *gaussiana* é usada implicitamente onde quer que apliquemos uma distribuição normal multivariada, de maneira que se torna comumente utilizada. Por exemplo, quando cada distribuição de probabilidade marginal também é normal, o modelo de cópula resultante é a distribuição normal multivariada.

Definição 5. Dado uma n -upla função de distribuição normal multivariada padrão ϕ_n parametrizada por uma matriz $P \in [-1, 1]^{n \times n}$, a cópula Gaussiana é uma função $C_{Ga}: I^n \rightarrow I$ dada por $C_{Ga}(\mathbf{u}) = \phi(\phi_1^{-1}(u_1), \dots, \phi_n^{-1}(u_n))$.

Para que C_{Ga} possa ser chamada de Cópula Gaussiana, todas as distribuições marginais precisam ser normalmente distribuídas, mas podem ter diferentes médias e variâncias (KAKOURIS; RUSTEM, 2013). Dessa maneira, a utilização desse tipo de cópula em um contexto de elevada volatilidade no mercado financeiro pode não ser muito prudente, dado o baixo grau de associação nas extremidades das distribuições.

As cópulas com a forma apresentada na Definição 5 são chamadas de Cópulas Gaussianas. Para o caso bivariado, a expressão pode ser apresentada como:

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dt_1 dt_2 \quad (32)$$

com $x_1 = \Phi^{-1}(u)$, $x_2 = \Phi^{-1}(v)$, onde Φ denota a função distribuição de uma $N(0,1)$. Dessa maneira, a densidade da cópula gaussiana é dada como:

$$c(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) \quad (33)$$

Para essa cópula não há expressões fechadas para o ρ de Spearman e para o τ de Kendall. Além disso, os coeficientes de dependência de caudas são iguais a zero.

2.4.1.1.2 Cópula *t-student*

A expressão de uma Cópula *t-student* para um caso bivariado, considerando um coeficiente de correlação $-1 \leq \rho \leq 1$,

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(1 + \frac{t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2} dt_1 dt_2 \quad (34)$$

onde v corresponde aos graus de liberdade da *t-student* considerada. Nessa família de Cópulas Elípticas, as distribuições marginais coincidem com a *t-student* padrão. Sua função densidade é:

$$c(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2} \quad (35)$$

Os cálculos do coeficiente de Spearman e o Kendall são encontrados pelas expressões apresentadas no capítulo de medidas de dependência. Já os coeficientes de dependência caudal, temos que $\lambda_U = \lambda_L = 2t_{v+1}\left(\frac{\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right)$, apresentando, assim, dependência em ambas as caudas.

2.4.1.1.3 Cópulas arquimedianas

Nessa subseção faremos uma apresentação sobre a família das Cópulas Arquimedianas. Nessa família, há muitas funções com grande variedade de estruturas de dependência diferentes, de modo que suas propriedades matemáticas sejam úteis em procedimentos de inferência com simulação e verificação de adequabilidade de ajuste. Ao contrário das Cópulas Elípticas, as Cópulas Arquimedianas não são derivadas de funções de distribuição multivariada utilizando o Teorema de Sklar; uma consequência disso é a necessidade de utilização de técnicas de calibração (EMBRECHTS; LINDSKOG; MCNEIL, 2001).

Definição 5. Seja φ uma função contínua e estritamente decrescente de $[0,1]$ para $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$. A pseudo-inversa de φ é a função $\varphi^{-1}: [0, \infty] \rightarrow [0,1]$ dada por:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (36)$$

Note que $\varphi^{[-1]}$ é contínua e decrescente em $[0, \infty]$, e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Além disso, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ em $[0, 1]$, e

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (37)$$

Finalmente, se $\varphi(0) = \infty$, então, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Teorema 2. Seja φ uma função contínua e estritamente decrescente de $[0, 1]$ para $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$, e seja $\varphi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de φ . Seja C a função de $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (38)$$

então C é uma cópula se e somente se φ for convexa.

Cópulas que apresentam a forma do Teorema 2 são chamadas de Cópulas Arquimedianas. A φ representa a função geradora da cópula. Se $\varphi(0) = \infty$ nós dizemos que φ é uma geradora estrita. Nesse caso, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ e $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ é dita ser uma Cópula Arquimediana estrita.

As cópulas que apresentaram a função geradora definida no Teorema 3 apresentam as seguintes propriedades:

Teorema 3. Seja C uma Cópula Arquimediana com função geradora φ . Então,

1. C é simétrica, ou seja, $C(u, v) = C(v, u), \forall u, v \in [0, 1]$.
2. C é associativa, ou seja, $C(u, v) = C(C(v, u), w) = C(u, C(v, w)), \forall u, v, w \in [0, 1]$.

As propriedades de associação das Cópulas Arquimedianas não são compartilhadas por outros tipos de cópulas de maneira geral.

Teorema 4. Seja C uma Cópula Arquimediana com função geradora φ e seja

$$K_C(t) = V_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) \leq t\}) \quad (39)$$

então para todo t em $[0, 1]$,

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \quad (40)$$

Corolário 2. Se $(U, V)^T$ possuir função C , onde C é uma Cópula Arquimediana gerada por φ , então K_C dado pelo Teorema 5 é uma função de distribuição da variável aleatória $C(U, V)$.

Uma das vantagens da utilização das Cópulas Arquimedianas está caracterizada pela facilidade de aplicação, além de uma quantidade de estruturas de análise de dependências diferentes no qual cada família oferece. No entanto, a necessidade de calibração se faz necessária, para afirmar que extensões multivariadas de 2-cópulas servem para n-cópulas (EMPBRECHTS; LINDSKOG; MCNEIL, 2001).

Para a calibração das Cópulas Arquimedianas, entre outras medidas, utiliza-se o τ de Kendall. Trata-se, basicamente, de uma medida de dependência no qual é definida pelo seguinte Teorema.

Teorema 5. Seja $(X, Y)^T$ um vetor de variáveis contínuas com cópula C . Então, a versão populacional de Kendall's tau para $(X, Y)^T$ é dado por

$$\tau_{X,Y} = \tau_c = Q(C, C) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (41)$$

Note que a integral acima representa o valor esperado da função $C(U, V)$, onde $U, V \sim U(0,1)$ com função de distribuição conjunta C , i.e. $\tau_{X,Y} = 4E(C(U, V)) - 1$. Dessa maneira, o τ de Kendall mensura a dependência entre a distribuição cumulativa das variáveis aleatórias (u, v) e não das variáveis em si. Então, τ é uma medida de dependência monotônica e é invariante sob transformações monotônicas; isso faz com que seja uma medida mais robusta quando comparada à correlação linear (KAKOURIS; RUSTEM, 2013).

Entretanto, em muitos casos essa integral dupla não é de fácil aplicação. Essa dificuldade justifica a utilização e disseminação das Cópulas Arquimedianas, pois facilitam o cálculo do τ por apresentar menos parâmetros, de modo que pode ser expresso como uma integral única do gerador e sua derivada, conforme o teorema a seguir.

Teorema 6. Seja X e Y variáveis aleatórias com uma Cópula Arquimediana C gerada pela função φ . τ de X e Y pode ser dado por:

$$\tau_c = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (42)$$

Prova 1. Deixe que U e V seja $U(0,1)$ variáveis aleatórias com função de distribuição conjunta C , e K_C denotada pela função de distribuição de $C(U, V)$. Então, do Teorema 1, temos que

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C - 1 = 4 \left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt \quad (43)$$

Então, do Teorema 5 e o Corolário 2, temos que:

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \quad (44)$$

desde que φ é convexa, $\varphi'(t^+)$ e $\varphi'(t^-)$ existe para todo $t \in (0,1)$ e o conjunto $\{t \in (0,1) | \varphi'(t^+) \neq \varphi'(t^-)\}$ é no máximo contável. Então

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} dt \quad (45)$$

■

Para Cópulas Arquimedianas, a dependência da cauda pode ser expressa em termos dos Teoremas apresentados a seguir:

Corolário 3. Seja C uma Cópula Arquimediana com uma função geradora φ . Então, os coeficientes de dependência de cauda superior e inferior são:

$$\lambda_U = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1 - \varphi^{-1}(2x)}{1 - \varphi^{-1}(x)} \right] \quad (46)$$

$$\lambda_L = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi^{-1}(2x)}{\varphi^{-1}(x)} \right] \quad (47)$$

2.4.1.2 Tipos de cópulas

Nessa subseção iremos abordar as diferentes famílias de cópulas que existem dentro da classe de Cópulas Arquimedianas, que são definidas pelo Teorema 2. As famílias de maior representatividade são as famílias de Cópulas Gumbel, Frank e Clayton. Basicamente, o que difere uma família de outra está especificada pela função geradora da cópula.

2.4.1.2.1 Cópula gumbel

Definição 7. Dado uma função geradora na forma $\varphi(t) = (-\ln(t))^\alpha$ com $\alpha \in [1, \infty)$ então, uma n-cópula Gumbel é dada por:

$$C(u, v) = \exp \left(- [(-\ln(u))^\alpha + (-\ln(v))^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad (48)$$

A densidade é dada pela equação

$$c(u, v) = \frac{(-\ln(u))^{\alpha-1}[-1+\alpha+(-\ln(u))^{\alpha}+(-\ln(v))^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}[-\ln(u)]^{\alpha}+(-\ln(v))^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}-2}(-\ln(v))^{\alpha-1}}{\exp[(-\ln(u))^{\alpha}+(-\ln(v))^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}uv} \quad (49)$$

Na família de Cópulas Gumbel, a dependência é positiva perfeita quando $\alpha \rightarrow \infty$. Para o coeficiente de Kendall é definido como $\tau(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Em relação à dependência das caudas, a família de Cópula Gumbel possui apenas dependência da cauda superior, i. e., $\lambda_U = 2 - 2^{1/\alpha}$, com $\lambda_L = 0$.

2.4.1.2.2 Cópula clayton

Definição 6. Dado uma função geradora na forma $\varphi = (t^{-\alpha} - 1)(1/\alpha)$ com $\alpha \in (0, \infty)$ então, uma Clayton para o caso bivariado é dada por:

$$C(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \quad (50)$$

A função densidade é dada por

$$c(u, v) = (1 + \alpha)u^{(-1-\alpha)}v^{(-1-\alpha)}(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{\left(-2-\frac{1}{\alpha}\right)} \quad (51)$$

dessa maneira, quando $\alpha \rightarrow \infty$ há dependência positiva perfeita e quando $\alpha \rightarrow 0$ há independência. Os coeficientes de Kendall e da dependência das caudas são dadas por:

$$\tau(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+2} \quad (52)$$

$$\lambda_L = 2^{-1/\alpha} \quad (53)$$

$$\lambda_U = 0 \quad (54)$$

Contrária à Cópula Gumbel, a Cópula Clayton possui dependência na cauda inferior.

2.4.1.2.3 Cópula frank

Definição 8. Dado uma função geradora na forma $\varphi(u) = \ln\left(\frac{(e^{-\alpha t}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)$ com $\alpha \in (0, \infty)$ então, uma Cópula Frank para o caso bivariado é dada por

$$C(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right) \quad (55)$$

A densidade é dada por

$$c(u, v) = \frac{\alpha e^{\alpha(1+u+v)}(e^{\alpha}-1)}{(e^{\alpha(u+v)}-e^{\alpha}(e^{\alpha u}+e^{\alpha v}-1))^2} \quad (56)$$

A Cópula Frank admite dependência positiva ($\alpha \rightarrow \infty$) e negativa ($\alpha \rightarrow -\infty$) e independência ($\alpha \rightarrow 0$). O coeficiente de Kendall pode ser expresso por

$$\tau(\alpha) = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t-1} dt \quad (57)$$

2.5 MODELOS GARCH

O modelo de Heterocedasticidade Condicional Autoregressivo Generalizado (GARCH) é uma alternativa proposta por Bollerslev (1986) para reduzir a necessidade de ajustar muitos parâmetros presentes nos modelos ARCH. Basicamente é acrescido ao modelo um termo que faz com que a volatilidade dependa dos seus valores defasados. Essa generalização apresenta melhor ajuste com menor quantidade de parâmetros.

Considerando uma série de retornos r_t , com $t = 1, \dots, n$, e Ω_{t-1} representando as informações obtidas a partir dos dados até o período $t - 1$, temos que:

$$r_t = E[r_t | \Omega_{t-1}] + X_t \quad (58)$$

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (59)$$

onde os ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $E[\varepsilon_t] = 0$ e $V[\varepsilon_t] = 1$. Logo, $E[X_t] = 0$ e $V[X_t] = \sigma_t^2$, i. e., com variância e ε_t ao longo do tempo.

Para tratar a variância condicional de uma maneira mais flexível, Bollerslev (1986) introduziu uma generalização nos modelos autoregressivos condicionalmente heteroscedásticos. O modelo GARCH(r, s) passa a ser dado como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (60)$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r - 1$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, s - 1$.

Apesar da grande aceitação dos modelos GARCH, algumas deficiências foram identificadas ao longo de sua aplicação. Tanto o modelo ARCH e GARCH tratam simetricamente os retornos, pois a volatilidade é uma função quadrática deles; no entanto, é sabido que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, com mais tendência ao retorno negativo (MORETTIN, 2011). Por responder de forma simétrica aos choques positivos e negativos, foram introduzidas modificações no modelo GARCH para que fossem melhor acomodados os fatos estilizados.

2.5.1 Modelo GARCH-cópula

Quando um vetor aleatório, digamos, $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})$, possui distribuição dada por um modelo GARCH-Cópula, ele apresenta uma distribuição acumulada conjunta dada por (ROSSI, 2012):

$$F(x_t) = C \left(F_{X_{1t}}(x_{1t} | \sigma_{x_{1t}}^2), \dots, F_{X_{nt}}(x_{nt} | \sigma_{x_{nt}}^2) \right) \quad (61)$$

em que C é uma cópula n -dimensional, $F_{X_{it}}$ é a i -ésima função de distribuição acumulada condicional da i -ésima variável aleatória X_{it} e que tem distribuição GARCH univariada dada por:

$$\mathbf{X}_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (62)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (63)$$

onde os ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $E[\varepsilon_t] = 0$ e $V[\varepsilon_t] = 1$. Logo, $E[\varepsilon_t] = 0$ e $V[\varepsilon_t] = \sigma_t^2$, i. e., com variância e ε_t variando ao longo do tempo.

Em outras palavras, dizemos que um modelo multivariado é um modelo GARCH-cópula se ele tem estrutura de dependência dada por uma função de cópula, e as distribuições marginais dadas por modelos GARCH univariados.

A partir deste método, será possível realizar uma análise da estrutura de dependência das volatilidades condicionais estimadas de cada ativo financeiro presente na carteira eficiente através da estimação das cópulas.

3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Este capítulo compreende a apresentação do processo realizado neste trabalho, com a descrição das etapas necessárias para a obtenção dos objetivos gerais e específicos. Em linhas gerais, o capítulo consiste em cinco etapas: i) apresentação da base de dados; ii) diversificação de ativos e elaboração de uma carteira eficiente; iii) decomposição *wavelets* das séries financeiras; iv) correlação multivariada de cópulas; e v) impactos dos ciclos de curto, médio e longo prazos sobre as estimativas do VaR.

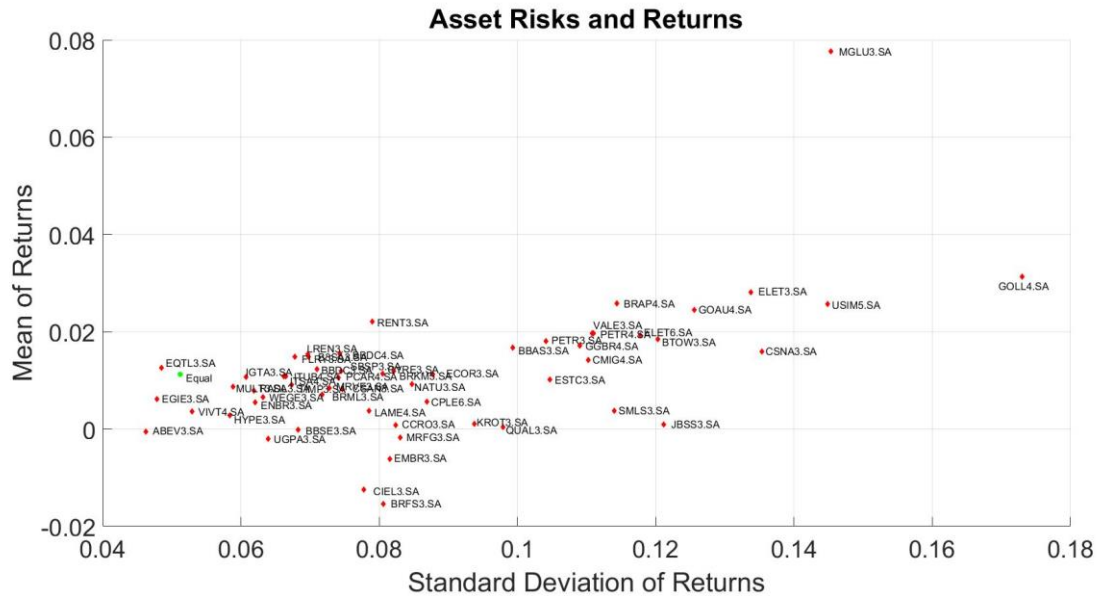
3.1 Base de dados

Foram selecionadas para a base de dados todas as ações presentes no índice Ibovespa com referência no mês de setembro de 2018. O período selecionado para os ativos brasileiros contemplou os dias entre 20/12/2016 e 28/02/2019. Trata-se, portanto, de 800 dias úteis para 60 séries financeiras. Os dados foram retirados do site *Yahoo Finance*.

As séries de retornos foram estimadas pelo log retorno diário¹. A partir das estimativas dos retornos, foram identificados os retornos médios diários para cada ativo selecionado, bem como o retorno médio de mercado.

O Gráfico 1 apresenta as relações de risco e retorno de cada ativo presente no Ibovespa, além de apresentar as mesmas informações referente ao próprio índice, ao de uma carteira com o mesmo peso para todos os ativos (uma carteira não eficiente) e da poupança – que foi utilizada como um balizador livre de risco.

¹ $r_{t+} = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = e^{\ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)} - 1 = e^{r_{t+1}} - 1$



Obs.: O ponto Equal representa uma carteira não eficiente, composta pelo mesmo peso de todos os ativos.

Gráfico 1 – Risco e retorno dos ativos presentes no Ibovespa

3.2 Diversificação de ativos

O Gráfico 1 evidencia uma gama de possibilidades de escolhas para que o investidor aplique seus rendimentos. No entanto, qual seria a escolha ótima para determinado perfil de investidor? A teoria de otimização de portfólio incrementou à discussão o conceito de risco, que passou a balizar todo o processo de escolha (MARKOWITZ, 1952). Isso significa dizer que a variância dos ativos se tornou alvo de escolha dos investidores, por meio de um trade-off entre risco-retorno. Digamos, por exemplo, que o investidor assuma um risco de no máximo 2% ao dia, o método de otimização de portfólio, pelo processo de diversificação de ativos, irá estimar uma carteira ótima a partir de uma composição entre diferentes ativos financeiros de maneira que ofereça o maior retorno possível para o risco assumido.

Para esse processo foram utilizados o retorno esperado dos ativos financeiros presentes no Ibovespa e a identificação da matriz de covariância dos retornos diários. Tais variáveis foram obtidas por meio da análise dos dados históricos dos retornos para cada ativo selecionado. A covariância entre variáveis procura evidenciar suas relações entre si, isso é, mensurar de que maneira os dados se comportam simultaneamente².

A rentabilidade de cada carteira ótima para cada nível de risco é calculada por uma ponderação entre o retorno esperado e a composição de cada ativo na carteira eficiente – de modo que a somatória da composição não deverá ultrapassar 100%.

O problema da otimização para cada fronteira de portfólio é construído como é mostrado a seguir, sendo que para um dado valor de taxa esperada de retorno e uma dada variância, conforme definido pelas Eqs. (2.2) e (2.3), escolhe-se a proporção de portfólio (X_1, X_2, \dots, X_n) que minimize o risco e maximiza o retorno, de acordo a seguinte formulação:

$$\text{minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (64)$$

² $Cov(r_j, r_k) = \sum_{t=1}^T \frac{(r_{jt} - E(r_j))(r_{kt} - E(r_k))}{T}$

$$\text{sujeito a } \bar{R}_P = \sum_{i=1}^n X_i \bar{R}_i \quad (65)$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = 1 \quad (66)$$

Uma minimização separada é efetuada para cada valor dado da taxa esperada de retorno, \bar{R}_P , de forma que, como a taxa esperada de retorno é alterada, a fronteira é deslocada.

As Eqs. (4,1) e (4,2) podem ser escritas na forma matricial, como segue:

$$\text{Minimizar } \sigma_P^2 = X' V X \quad (67)$$

$$\text{Sujeito } \bar{R}_P = X' E \quad (68)$$

onde:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad X' = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n], \quad (69)$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{e } E = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_n \end{bmatrix} \quad (70)$$

O resultado desse processo pode ser observado pela estimação da fronteira eficiente (em azul) ilustrada no Gráfico 2. Além disso, é

identificada uma carteira eficiente que será analisada no presente trabalho. O processo de identificação do retorno esperado e da variância dos ativos, bem como da matriz de covariância, necessários para a obtenção da fronteira eficiente foi apresentada no capítulo de referencial teórico

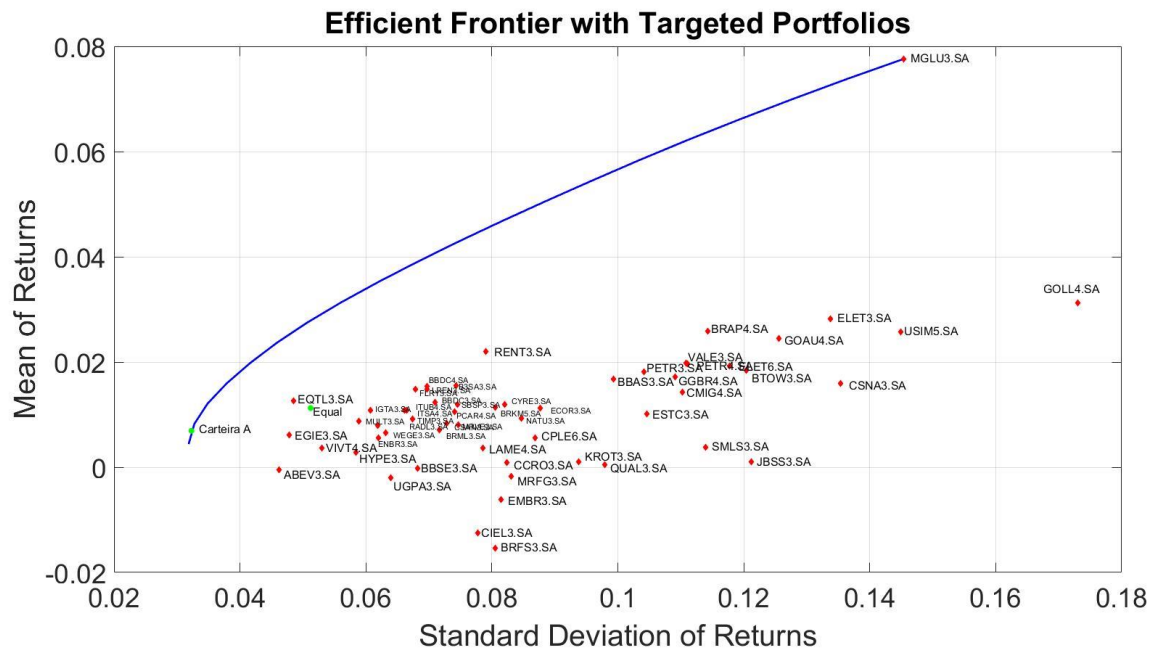


Gráfico 2 – Carteira eficiente e a carteira alvo
Elaborado pelo autor.

A fronteira eficiente representa inúmeras possibilidades de carteiras eficientes no que se refere à relação risco e retorno. Em última análise, é o objeto central da teoria do portfólio de Markowitz (1952). Dessa etapa em diante, iremos analisar uma carteira alvo. Optou-se por uma carteira qualquer, mas que representasse uma quantidade relativamente grande de ativos. Por essa razão, a carteira selecionada apresenta baixo risco, próximo a 3%. A Tabela 2 apresenta o resultado do processo de diversificação de ativos para a carteira alvo selecionada, isso é, a composição de cada ativo na carteira eficiente.

Tabela 2 – Ativos presentes na carteira eficiente

Ativos financeiros	Participação na carteira
ABEV3	18,2%
BRKM5	6,8%
EGIE3	12,6%
EMBR3	6,3%
ENBR3	4,0%
EQTL3	18,8%
FLRY3	9,0%
HYPE3	9,5%
MGLU3	0,9%
MRFG3	0,7%
RADL3	6,9%
VALE3	1,1%
VIVT4	5,2%
TOTAL	100%

Elaborado pelo autor.

3.3 Decomposição wavelets

Vale destacar que como estamos interessados em analisar uma carteira de ativos, temos, nesse momento, 14 séries temporais financeiras. Isso é, temos uma série de retornos da carteira eficiente e 13 séries de retornos representando cada ativo presente na carteira, conforme apresentado na Tabela 2.

Cada série temporal é composta por um processo estocástico diferente que apresenta relações diretas e indiretas com aspectos econômicos, sociais e especulativos. Dentro desse processo, existem características de curto, médio e longo prazos que resultam na formação das séries originais – de maneira que suas materializações sejam o reflexo

do resultado dessas características. Por essa razão, a possibilidade de estratificar o processo estocástico em diferentes níveis permite entender o funcionamento das séries temporais.

Para realizar o processo de estratificação, a teoria *wavelet* oferece os procedimentos necessários para analisar diferentes processos estocásticos formadores de uma série temporal. Para isso, são utilizados os retornos das séries financeiras e a aplicação dos filtros de *wavelet* apresentados no referencial teórico.

Os coeficientes *wavelet* são obtidos pela convolução dos retornos $r = \{r_t, t = 1, 2, \dots, n - 1\}$ e os filtros MODWT:

$$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} r_{t-l \bmod N} \quad (71)$$

$$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} r_{t-l \bmod N} \quad (72)$$

em que $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ é o tamanho do filtro associado com a escala λ_j e $\bmod N$ é o operador de módulo que indica a necessidade de lidar com o limite do vetor r_t com um número finito de observações.

Por meio dele, realizamos a decomposição séria do retorno da carteira eficiente em oito diferentes níveis de frequência e tempo. Esse resultado é ilustrado pelo Gráfico 3.

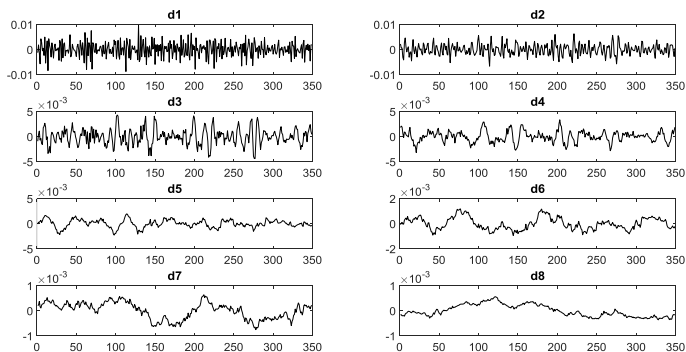


Gráfico 3 – Decomposições da série da carteira eficiente
Elaborado pelo autor.

Em cada subgráfico é possível observar uma decomposição da série original, em que o d representa os níveis de decomposições,

caracterizado pelo intervalo $d = [1, \dots, 8]$. É possível observar que, conforme apontado por Chiann & Morretin (1998), as decomposições *wavelets* permitem lidar com séries contaminadas com ruídos, uma vez que possui a capacidade de extrair informações em diferentes níveis de tempo e escala simultaneamente. A imagem apresenta diferentes decomposições com níveis de ruídos bem distintos. Conforme vamos aumentando o nível da decomposição, são obtidas séries com curvas mais suaves, caracterizando-se por ondas de memórias mais longas presentes nas séries originais, todavia com amplitudes de oscilações menores do que as outras anteriores. É sobre essa capacidade e características que os autores em questão abordavam sobre as qualidades e eficiência do método de decomposição. Esses resultados são observados quando realizamos as decomposições *wavelets* dos 13 ativos presentes na carteira eficiente.

Como uma série original é composta por diferentes processos estocásticos, é de se imaginar que cada processo estocástico representado pelas decomposições *wavelets*, apresentam diferentes influências sobre a variância da série original. Isso é, as decomposições de maior nível – caracterizada por frequências mais baixas e por um processo estocástico característico de longo prazo – apresentam menores impactos sobre a variância das séries temporais analisadas do que as decomposições de níveis mais baixos, mas com maiores frequências – caracterizada por um processo estocástico característico de curto prazo. Por essa razão, é de se esperar que as frequências de longo prazo tenham baixo impacto na estimação do VaR.

A

Tabela 3 procura quantificar o impacto das decomposições na variância da carteira eficiente. Foram calculados a contribuição à variância da série original (agregada) para cada decomposição de frequência e tempo. Dessa maneira, é possível identificar as relações entre ruídos, curto, médio e longo prazos sobre o processo estocástico original.

Tabela 3 – Impacto das variâncias das decomposições na variância da carteira eficiente

Memória	Frequência	Contribuição à variância do portfólio	Nível de detalhe
Ruído	2-4 dias	48%	d1
Curto prazo	4-8 dias	25%	d2
Médio prazo	8-16 dias	14%	d3
Médio prazo	16-32 dias	7%	d4
Médio prazo	32-64 dias	4%	d5
Longo prazo	64-128 dias	1%	d6
Longo prazo	128-256 dias	0%	d7
Tendencial	256-511 dias	0%	d8

Fonte: Adaptado de Berger (2016). Elaborado pelo autor.

A coluna de memória apresenta uma interpretação econômica sobre o período de cada ciclo. Conforme abordado por Berger (2016), as decomposições de curto prazo seriam capazes de mensurar os “Efeitos de Segunda-feira” das bolsas de valores, caracterizado por um período em que os retornos médios são marginalmente inferiores aos outros dias da semana. Desse modo, o fácil manuseio com as decomposições permite que o pesquisador adote premissas baseadas em conhecimento prévio para realizar análises específicas sobre determinada decomposição.

A terceira coluna representa a participação de cada decomposição *wavelets* sobre a variância da série original da carteira eficiente. O Gráfico 4 ilustra a mesma relação, de maneira mais visual, deixando claro a pouca relevância das decomposições mais longas sobre a variância total. Desse modo, é possível perceber que o ruído e as memórias de curto e médio prazo representam a maior parte da variância da carteira eficiente. Esse comportamento é observado de maneira simultânea sobre os ativos individuais.

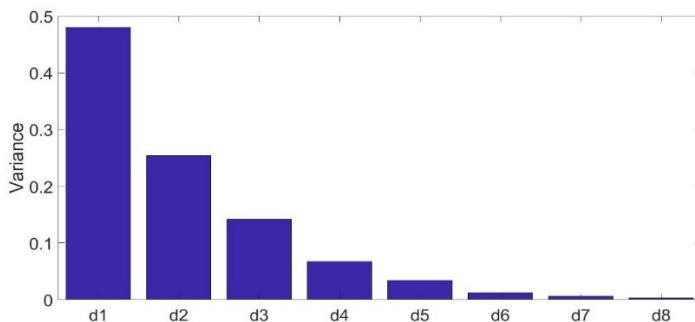


Gráfico 4 – Participação relativa das decomposições sobre a variância

Como estamos dentro de um contexto de mercado eficiente, isso é, em que existe rápida disseminação das informações entre os agentes, dificultando ganhos superiores à média de mercado de maneira consistente, torna-se relevante tecer e identificar as características de dependência estrutural de curto e médio prazo. Desse modo, todas as séries presentes na carteira foram decompostas e reconstruídas, considerando apenas as cinco primeiras decomposições. A escolha delas está pelo impacto sobre a formação dos dados da série original. Foram somadas as decomposições entre d1 e d5, de maneira que a reconstrução da carteira original passasse a considerar apenas os processos estocásticos de curto e médio prazo. Ao todo, as cinco primeiras decomposições representaram, em média, 98% da variância total de cada carteira eficiente e de cada ativo presente nela.

3.4 Correlação multivariada de cópulas

Na modelagem econométrica é convencional adotar a premissa de que a variância do termo de perturbação (ruído) ser considerada constante; no entanto, em certas circunstâncias a suposição da existência de variância constante pode ser inapropriada (ENDERS, 2014).

Em especial, as séries temporais financeiras apresentam como característica do processo estocástico gerador a existência de *clusters* de volatilidade em diferentes momentos no tempo. Significa dizer que a volatilidade não é constante ao longo do tempo, de maneira que seja possível observar momentos de maior e menor perturbação (ENDERS, 2014). Esse comportamento é denominado de heterocedasticidade condicional e apresenta como implicações dificuldades de estimação e,

consequentemente, de realizar análises mais acuradas sobre o comportamento das séries temporais.

Uma série temporal financeira pode ser definida pelo resultado do valor esperado do retorno para dada informação $t-1$ e por um distúrbio estocástico³. É sobre esse distúrbio estocástico (resíduo) que podemos observar o grau de heterocedasticidade condicional. Para analisar esse comportamento, os modelos GARCH procuram estimar a variância da volatilidade condicional (BOLLERSLEV, 1986).

3.4.1 Estimação da volatilidade condicional

Quando estamos analisando séries temporais, devemos ter o cuidado de analisar sua estacionariedade, ou seja, a existência ou não de uma raiz unitária. Uma série temporal não estacionária impossibilita realizar sua estimação de maneira mais consistente, dada a dificuldade de se estimar todos os seus momentos (BUENO, 2011). Isso é ainda mais importante quando estamos interessados em criar um modelo de estimação da volatilidade, já que se deve inferir ou fazer suposições quanto ao seu valor médio esperado.

Utilizar apenas o método de inspeção visual para determinar o padrão de comportamento entre tendência estocástica ou tendência determinística pode não ser o método mais adequado para determinadas séries temporais. Para isso, existem diferentes métodos de testes de raiz unitária. Neste trabalho, iremos adotar o teste Dickey-Fuller Aumentado. Sua vantagem está em incluir um número suficiente de defasagens garantindo que os resíduos não apresentem autocorrelação na análise (MARGARIDO; JUNIOR, 2006). Os testes foram realizados no *software* MatLab, pela função *adftest*. A função retorna um teste lógico binário em relação à hipótese nula de que existe raiz unitária nas séries. Quando é observada uma tendência estocástica nas séries, a função retorna zero, com elevado p-valor, indicando a existência de raiz unitária. Caso contrário, retorna 1, em favor da hipótese alternativa, com baixo p-valor, indicando a inexistência de raiz unitária. Os resultados estão apresentados na Tabela 1.

³ A sessão 3.6 do Referencial Teórico ilustra a representação matemática.

Tabela 4 – Teste Dickey-Fuller Aumentado

Ativos	Teste Dickey-Fuller Aumentado	p-valor
Carteira A	1	< 0,001
ABEV3	1	< 0,001
BRKM5	1	< 0,001
EGIE3	1	< 0,001
EMBR3	1	< 0,001
ENBR3	1	< 0,001
EQTL3	1	< 0,001
FLRY3	1	< 0,001
HYPE3	1	< 0,001
MGLU3	1	< 0,001
MRFG3	1	< 0,001
RADL3	1	< 0,001
VALE3	1	< 0,001
VIVT4	1	< 0,001

Elaborado pelo autor.

O caráter estacionário é observado nas séries financeiras para os log-retornos diários, conforme observado pelos testes. Dada esta identificação, podemos avançar para a próxima etapa, na qual consiste em identificar a necessidade ou não de modelar a média condicional das séries financeiras. Para isso, nós podemos analisar a Função de Autocorrelação (FAC) contra a defasagem dos retornos e Função de Autocorrelação Parcial (FACP).

Essa etapa procura identificar qual modelo descreve o comportamento das séries temporais, por meio de uma interpretação da FAC e FACP. Segundo a metodologia Box e Jenkins (1970), essa etapa se caracteriza em ajustar modelos auto-regressivos integrados de média móvel para um conjunto de dados. Iremos realizar uma representação matemática que ilustre o processo gerador de dados das séries financeiras.

Desse modo, será possível identificar as ordens p e q do modelo de média condicional. Essa relação é ilustrada para os retornos da carteira eficiente no Gráfico 1.

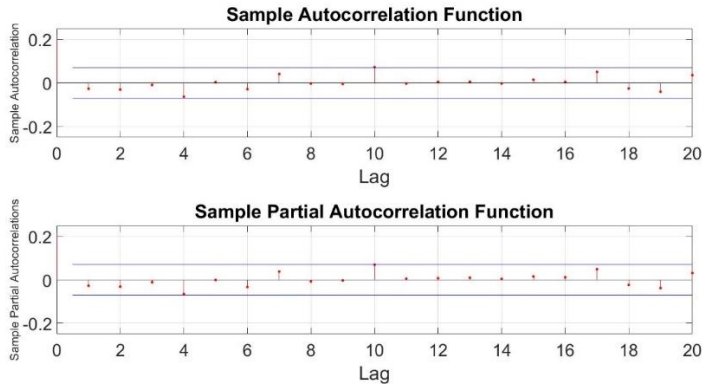


Gráfico 5 – FAC e FACP do log-retornos da carteira
Elaborado pelo autor.

Como podemos observar, para uma quantidade de 20 defasagens, não é observado nenhum padrão ARMA na série temporal, isso é, não é observado autocorrelação de MA e tão pouco AR. Isso quer dizer que não é observado nenhuma presença de memória na série temporal que exija uma estimação da média condicional via modelo ARMA. Esse padrão é observado individualmente em cada ativo presente na carteira eficiente.

Nosso foco em questão é estimar a volatilidade condicional das séries para que possamos analisar a estrutura de dependência dos ativos e estimar o impacto de diferentes ciclos econômicos no cálculo do VaR da carteira e para cada ativo financeiro. Para isso, nós precisamos fazer alguma inferência acerca do padrão da média de cada ativo. Como já observados, nossas séries financeiras são estacionárias e não apresentam nenhum efeito ARMA para a estimação da média condicional.

É importante destacar que os resultados obtidos até agora são reflexos da utilização de log-retorno diário, ou seja, pela característica dessas séries, não é observada raiz unitária e processos ARMA. Desse modo, podemos passar direto para a estimação de um modelo de volatilidade, sem a necessidade de realizar uma estimativa prévia de um modelo de média.

A premissa de que a média dos ativos seja zero, pode ser explicado, em parte, pela hipótese de mercados eficientes, conforme já levantado por Fama (1970). A média empírica de cada série temporal na Tabela 5.

Tabela 5 – Média dos retornos

Ativos	Média
Carteira A	0,005777
ABEV3	-0,000008
BRKM5	0,000064
EGIE3	0,000065
EMBR3	-0,000032
ENBR3	0,000018
EQTL3	0,000100
FLRY3	0,000100
HYPE3	0,000022
MGLU3	0,000061
MRFG3	-0,000001
RADL3	0,000045
VALE3	0,000017
VIVT4	0,000015

Elaborado pelo autor.

A definição da utilização da média zero, bem como não estimação da média condicional por um modelo ARMA, vem sendo adotada em função do aumento do número de graus de liberdade, de maneira que haja um aumento de precisão na estimativa dos parâmetros do modelo GARCH a ser estimado. Desse modo, com a adoção da média zero, estamos dizendo que:

$$r_t = E[r_t | \Omega_{t-1}] + \mathbf{X}_t \quad (73)$$

$$r_t - E[r_t | \Omega_{t-1}] = \mathbf{X}_t, \quad (74)$$

$$\mathbf{X}_t = r_t. \quad (75)$$

Logo,

$$\sigma_t^2 = X_t^2 = r_t^2 \quad (76)$$

Portanto, iremos procurar identificar a existência de padrões GARCH a partir da análise dos retornos quadrados. Para isso, nós podemos realizar o mesmo processo feito anteriormente para os padrões ARMA, isso é, analisamos os gráficos da FAC e FACP. O Gráfico 6 ilustra as duas funções.

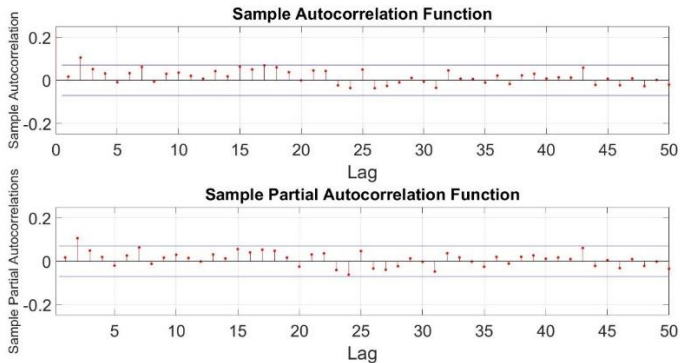


Gráfico 6 – FAC e FACP do log-retornos ao quadrado do portfólio

É possível observar a existência de um padrão GARCH para a série da carteira por meio da análise gráfica da FAC e FACP, por uma memória presente na série já na segunda defasagem. Além da análise visual dessa estrutura, podemos utilizar o teste Ljung-Box para análise de ruído branco. O teste procura avaliar a existência ou não de autocorrelação serial. Para isso, utilizou-se o *software* MatLab, por meio da função *lbqtest*. A função retorna um valor binário em relação à hipótese nula de que não existe autocorrelação serial. Quando o resultado é 1, significa rejeição à hipótese nula, resultando em existência de autocorrelação e, portanto, padrão GARCH; por sua vez, quando o resultado obtido é zero, significa aceitação da hipótese nula. Esse teste foi realizado para o quadrado dos retornos da série da carteira, de maneira que seu resultado seja complementar à análise gráfica. Para a carteira de ativos eficiente, foi rejeitada a hipótese nula em favor da hipótese alternativa, isso é, a série apresenta autocorrelação – com um p-valor de 0,0009.

O resultado obtido pelo teste Ljung-Box corroborou com a análise da FAC e FACP, demonstrando autocorrelação residual já na segunda defasagem. Desse modo, a aplicação de um modelo GARCH para a estimação da volatilidade condicional se faz necessária.

Esse procedimento foi adotado para cada série analisada de maneira que fosse possível identificar os padrões GARCH. Curiosamente, apenas quatro ativos não apresentaram padrões GARCH pelos dois procedimentos adotados. Apesar disso, os gráficos dos retornos ao quadrado dessas quatro séries apresentam *clusters* de volatilidade, o que, em última análise, determinaria a existência de heterocedasticidade condicional. O Gráfico 7 ilustrado esse comportamento.

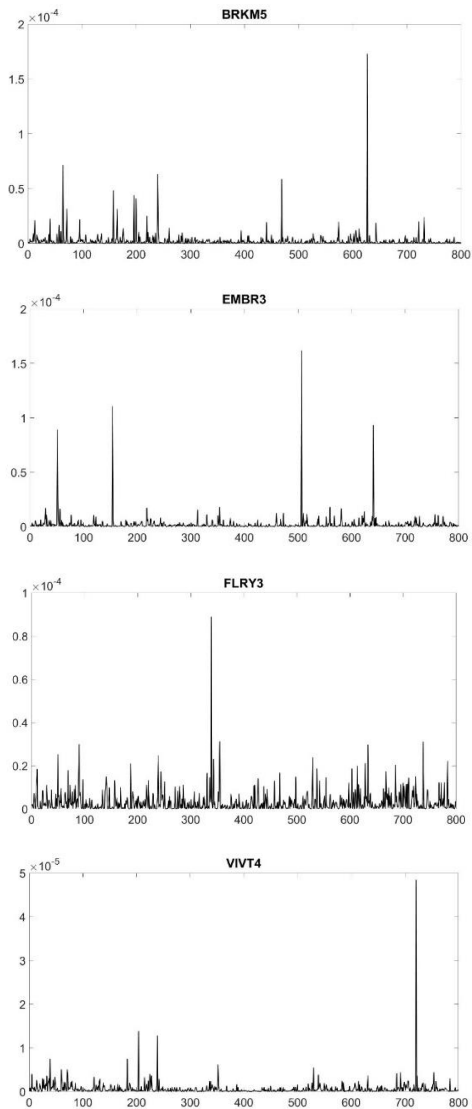


Gráfico 7 – Clusters de volatilidade

Para cada série analisada, deveriam ser testados diferentes especificações do modelo GARCH, para que fosse obtido o modelo que melhor se ajustado aos dados analisados. No entanto, Hansen e Lunde

(2001), analisaram 330 modelos de estimação de volatilidade condicional diferentes e identificaram que nenhum modelo é mais robusto ao GARCH (1,1) resultaram em uma estimação e previsão significativamente melhores. Esses modelos apresentam maiores graus de liberdade, uma vez que se tornam mais flexíveis aos modelos mais robustos, e, de acordo com os testes realizados no estudo, obtiveram melhores resultados na estimação da volatilidade. Dessa maneira, no presente trabalho, iremos adotar as conclusões obtidas pelos dois autores.

Em sequência, são apresentados os parâmetros estimados do modelo GARCH (1,1) para cada série, enquanto o resultado da estatística t aparece entre parênteses – para um nível de 95% de confiança, os resultados acima de 1,75 demonstram que os parâmetros estimados são estatisticamente significantes (isto é, apresentam baixo p -valor).

Tabela 6 – Parâmetros estimados pelo modelo GARCH(1,1)

Ativo	Constante	$\alpha_i X_{t-i}^2$	$\beta_j \sigma_{t-1}^2$
ABEV3	$2e^{-7}$ (1,0342)	$0,0631394 X_{t-i}^2$ (5,48093)	$0,90403 \sigma_{t-1}^2$ (90,9491)
BRKM5	$2e^{-7}$ (1,47362)	$0,014334 X_{t-i}^2$ (2,26607)	$0,905364 \sigma_{t-1}^2$ (144,982)
EGIE3	$6,9067e^{-7}$ (2,34209)	$0,105878 X_{t-i}^2$ (4,44804)	$0,669801 \sigma_{t-1}^2$ (25,4191)
ENBR3	$2e^{-7}$ (1,40214)	$0,24649 X_{t-i}^2$ (9,78087)	$0,361975 \sigma_{t-1}^2$ (11,1836)
EMBR3	$9,88725e^{-7}$ (3,00749)	$0,0510911 X_{t-i}^2$ (4,10919)	$0,491167 \sigma_{t-1}^2$ (13,7549)
EQTL3	$6,92087e^{-7}$ (1,84136)	$0,0983114 X_{t-i}^2$ (4,01938)	$0,804982 \sigma_{t-1}^2$ (36,2749)
FLRY3	$1,13942e^{-6}$ (3,02328)	$0,0448465 X_{t-i}^2$ (1,85238)	$0,578266 \sigma_{t-1}^2$ (13,1971)
HYPE3	$2,0366e^{-6}$ (3,4463)	$0,0229 X_{t-i}^2$ (6,84543)	$0,68749 \sigma_{t-1}^2$ (4,6542)
MGLU3	$2e^{-7}$ (1,1519)	$0,2185 X_{t-i}^2$ (2,8564)	$0,4134 \sigma_{t-1}^2$ (5,2654)
RADL3	$2e^{-7}$ (1,3011)	$0,0846 X_{t-i}^2$ (3,4950)	$0,7873 \sigma_{t-1}^2$ (33,1109)
VIVT4	$3,7225e^{-7}$ (2,0014)	$0,8823 X_{t-i}^2$ (6,4771)	$0,1176 \sigma_{t-1}^2$ (3,5683)
CARTEIRA	$4,33971e^{-7}$ (1,70071)	$0,05 X_{t-i}^2$ (3,1534)	$0,9 \sigma_{t-1}^2$ (29,0158)

Elaborado pelo autor.

Todos os parâmetros estimados para o modelo GARCH (1,1) apresentaram-se estatisticamente significativos. No entanto, é importante

considerar a análise dos resultados obtidos por meio dos resíduos padronizados, da distribuição e das FAC e FACP. Desse modo, saberemos se realmente nossos modelos representam bem o processo estocástico, sem a presença de características que inibem o processo de estimação. No Gráfico 8 e Gráfico 9, é ilustrado o resíduo padronizado da volatilidade condicional estimada. Isto é, queremos ver se o ε_t é independente e identicamente distribuído, com média zero e variância 1, conforme apresentado na parte de referencial teórico do modelo GARCH.

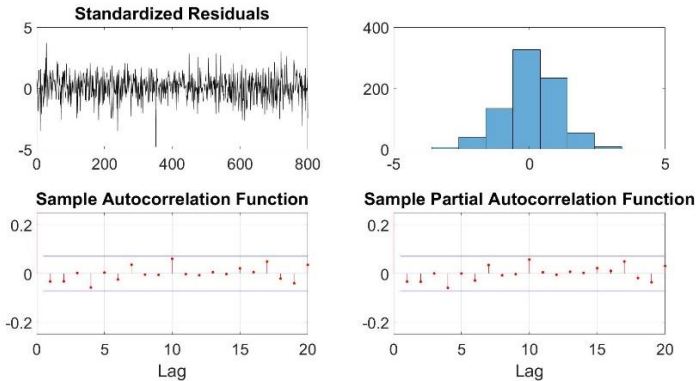


Gráfico 8 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para a carteira eficiente

Elaborado pelo autor.

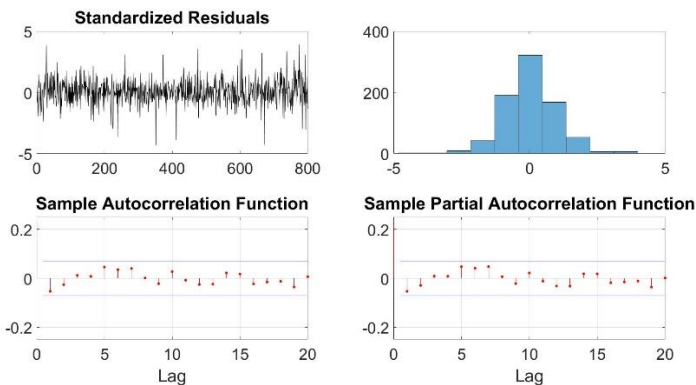


Gráfico 9 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo EGIE3

Elaborado pelo autor.

Em ambos os gráficos é possível perceber que os modelos capturaram corretamente a volatilidade condicional, uma vez que não há indícios de nenhuma correlação serial a partir da análise das FAC e FACP. Percebemos também que eles apresentam uma distribuição normal e estão oscilando em torno de uma média zero. Essas características são importantes para determinar o correto ajustamento de nossos modelos, de maneira a capturar as informações relevantes para realizar os processos de análise de dependência entre os ativos e o impacto dos diferentes ciclos econômicos no cálculo do VaR.

É importante destacar que esse comportamento foi observado nos doze modelos de estimação da volatilidade condicional. Isso é, todos foram capazes de capturar de maneira adequada essas características. Os demais gráficos estão apresentados no anexo ao final do presente trabalho.

3.5 GARCH-Cópula

Neste trabalho, vamos analisar a estrutura de dependência entre os ativos por meio das estimações das cópulas, ou seja, vamos mostrar a interação de “correlação” entre os ativos pelas distribuições conjuntas estimadas via cópulas. Na bibliografia, conforme já apresentado, suas aplicações são observadas em diferentes temas, como em estatística, finanças e gestão de riscos. A importância na utilização do método de cópulas surge por conta de sua capacidade de mensuração do grau de associação em diferentes momentos da distribuição. Desse modo, cada classe e família de cópula apresenta um tipo de informação diferente, caracterizando-se pelos tipos de dependência entre as caudas.

Foram utilizadas as estimativas condicionais da volatilidade modeladas pelo modelo GARCH, apresentadas na sessão anterior como base para a análise da estrutura de dependência entre os ativos financeiros. Essas séries estimadas foram utilizadas como *input* nas funções de cópulas, conforme apresentado no capítulo de referencial teórico. Desse modo, foram aplicadas as funções geradoras para as famílias de cópulas *t-student*, Gaussiana, Frank, Gumbel e Clayton.

Esse processo se caracteriza pelo modelo GARCH-Cópula, isso é, um modelo de análise de dependência estrutural no qual as distribuições marginais foram submetidas a um modelo GARCH. Desse modo, foi possível realizar uma análise mais fidedigna do comportamento da

distribuição conjunta entre os ativos e tecer relações mais conclusivas por meio da estimativa da variância condicional.

Em função da existência de diferentes famílias de cópulas, foram analisadas a Máxima Verossimilhança e o Critério de Akaike para identificar qual família de cópula realizou a melhor estimativa – de maneira que represente melhor a relação existente entre os ativos. Essa análise foi realizada para as cópulas bidimensionais, isso é, na análise individual entre cada ativo, e para a análise em 13 dimensões, de maneira que fosse possível identificar a família de cópula que melhor se ajusta à estrutura de dependência da carteira. As funções de cópulas utilizadas foram todas expostas no capítulo de referencial teórico, sessão 3.5. Desse modo, será possível determinar, por exemplo, se ativos apresentam uma maior dependência entre as caudas inferiores ou superiores, ou seja, se há correlação em eventos extremos. Por se tratar de séries financeiras, a expectativa é de que haja uma densidade maior nas caudas dos ativos.

Para fins de exemplificação, o Gráfico 10 ilustra a família de cópula Gumbel, representada pela classe Arquimediana. Sua principal característica é a capacidade de mensurar o grau de dependência na cauda superior, específica de choques externos positivos à precificação dos ativos.

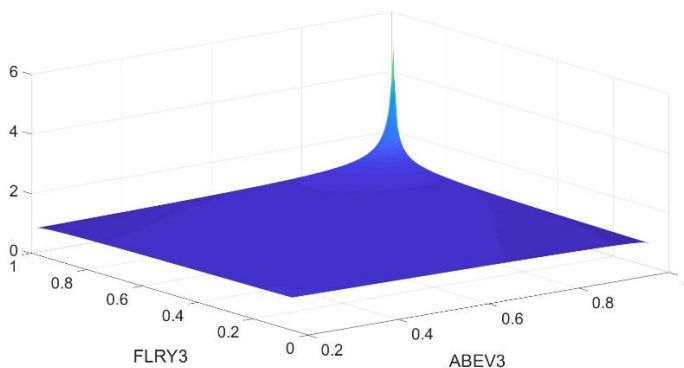


Gráfico 10 – Copula Gumbel entre os ativos ABEV3 e FLRY3
Elaborado pelo autor.

Como a cópula Gumbel apresenta dependência em sua cauda superior, seu formato apresenta uma inclinação maior na extremidade positiva das distribuições marginais. Existe uma densidade maior nos pontos próximos de (1,1), enquanto há uma menor densidade para os

pontos (0,0). Essa análise demonstra correlação positiva entre os ativos ABEV3 e FLRY3, o que é explicado pelo rho de 1,0343. Esse processo foi realizado para todos os ativos presentes na carteira selecionada. A Tabela 7 apresenta o resultado dos coeficientes de correlação obtido para as cópulas bidimensionais da família Gumbel.

Tabela 7 – Rho's estimados da cópula Gumbel para os ativos da carteira eficiente

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	>1,000	1,340	1,142	1,157	1,141	1,034	1,034	>1,000	1,307	1,141
BRKM5	>1,000	-	1,108	1,027	1,044	1,214	1,047	1,014	>1,000	1,082	1,081
EGIE3	1,340	1,108	-	1,056	1,242	1,159	1,062	1,111	1,069	1,170	1,101
EMBR3	1,142	1,027	1,056	-	1,074	1,159	1,121	1,026	1,041	1,087	1,076
ENBR3	1,157	1,044	1,242	1,074	-	1,188	1,137	1,096	1,071	1,150	1,173
EQTL3	1,141	1,214	1,159	1,159	1,188	-	1,150	1,076	1,037	1,217	1,118
FLRY3	1,034	1,047	1,062	1,121	1,137	1,150	-	1,026	1,082	1,069	1,088
HYPE3	1,034	1,014	1,111	1,026	1,096	1,076	1,026	-	1,046	1,068	1,117
MGLU3	>1,000	>1,000	1,069	1,041	1,071	1,037	1,082	1,046	-	1,021	1,039
RADL3	1,307	1,082	1,170	1,087	1,150	1,217	1,069	1,068	1,021	-	1,119
VIVT4	1,141	1,081	1,101	1,076	1,173	1,118	1,088	1,117	1,039	1,119	-

Elaborado pelo autor.

Os valores estão dentro do intervalo $[1, \infty)$, de maneira que quando mais próximo de 1, menor serão os movimentos conjuntos em períodos de alta de mercado, enquanto valor acima de 1 representam comportamento convergentes nos mesmos momentos. O resultado obtido é esperado, do ponto de vista de expectativas de mercado. Como os ativos analisados estão dentro de um contexto de carteira eficiente, isto é, a composição representa o maior retorno possível dado o nível de risco assumido, a grande maioria dos ativos apresentam comportamentos semelhantes em momentos de alta.

3.6 Impactos de curto, médio e longo prazos sobre o VaR

Para analisar o impacto dos ciclos de curto, médio e longo prazos sobre o cálculo do VaR, foi utilizada as volatilidades condicionais estimadas na sessão 4.4.1 para cada série analisada. É a partir dela que foi possível realizar um período de previsão da volatilidade e fazer os testes de proporção de falhas. A análise dos diferentes ciclos presentes em uma série temporal foi determinada pelas decomposições *wavelets*, conforme demonstrado no capítulo de referencial teórico. Nesse sentido, o presente capítulo tem como objetivo procurar identificar padrões de comportamento sobre as diferentes decomposições na estimação do VaR. No Gráfico 11 é ilustrado as estimativas da variância condicional, estimadas pelo modelo GARCH (1,1), e a previsão de 400 dias para a carteira eficiente.

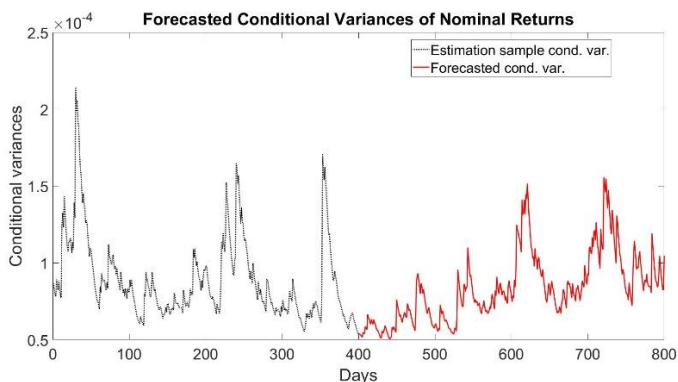


Gráfico 11 – Volatilidade condicional estimadas e previstas por um GARCH (1,1) para a carteira eficiente.
Elaborado pelo autor.

Para estimar o VaR utilizando as variâncias condicionais previstas, utilizou-se o seguinte método:

$$\widehat{\text{VaR}}_{t+1}(\alpha) = \mu_t + z_{t,\alpha} \sqrt{\widehat{\sigma}_{t+1}^2} \quad (77)$$

em que o $z_{t,\alpha}$ é o nível crítico para uma distribuição normal com média μ_t , desvio padrão e graus de liberdade iguais ao da série de retorno histórica utilizada para estimar as variâncias heteroscedásticas, para o nível de confiança desejado. O $\sqrt{\widehat{\sigma}_{t+1}^2}$ representa a volatilidade condicional prevista pelo modelo GARCH.

Nesse momento, foram realizados testes com as decomposições realizadas, de maneira que fosse possível analisar o impacto de cada decomposição sobre o cálculo do VaR. Neste trabalho, mensurou-se tanto o VaR Down quanto o VaR Up, isso é, o risco de perda e de ganhos durante um determinado horizonte de tempo para níveis de confiança de 90%, 95% e 99%. Com os valores estimados, foi obtido os percentuais de retornos que excedem o limite do VaR durante o período de previsão.

O cálculo do VaR foi testado por meio das estimativas das previsões das variâncias condicionais, durante um período de 400 dias dentro da amostra da técnica de *rolling window*. Desse modo, foi possível realizar a previsão da variância de um dia, depois para um número de *lags* de atraso para o processo de integração. O processo é repetido subsequentemente, rolando a janela de integração (*rolling window*), para a previsão de cada dia subsequente, até cobrir o intervalo de 400 valores de variância condicional.

Uma *rolling window* funciona em diferentes etapas. Primeiro, é determinado o tamanho da janela, o que, nesse caso, é representada por 400 dias observados. Após isso, é escolhido o tamanho do horizonte de previsão, como os VaR que serão utilizados são diários, adotou-se como horizonte apenas um dia útil. Significa dizer que, para este trabalho, a *rolling window* possui 400 dias passados para gerar previsões de 1 dia futuro. Na prática, à medida que vamos prevendo $t+1$ vamos incorporando a última previsão para os últimos 400 dias, de maneira que a janela é alocada até que seja feita as 400 previsões. Esse método permite gerar previsões mais acuradas, justamente em função do processo de deslocamento na janela de dados. Para mais informações, ver o Anexo.

Esse processo permite observar a estabilidade do modelo ao longo do tempo e a previsão do modelo. Para testar a qualidade dos valores obtidos, foi aplicado o seguinte teste:

$$\alpha\text{DOWN}_{\text{falhas}} = E[I_{\text{down}}(r_t < \text{VaR}_{\text{down_lim}}(\alpha)_t)] \quad (78)$$

$$\alpha\text{UP}_{\text{falhas}} = E[I_{\text{down}}(r_t > \text{VaR}_{\text{down_lim}}(1 - \alpha)_t)] \quad (79)$$

onde r_t representa a série de retornos para o período de previsão. O I_{down} e I_{up} representam um indicador binário que é igual a 1 se o retorno for menor ou maior que o $\text{VaR}_{\text{down_lim}}(\alpha)_t$ ou $\text{VaR}_{\text{down_lim}}(1 - \alpha)_t$ ou zero se o retorno não ultrapassar o limite. Por meio desse teste, é possível medir a importância de impactos das memórias de longo prazo sobre as estimativas do VaR, basta realizá-lo para cada decomposição, bem como para cada nova agregação das decomposições. Finalmente, é realizada a análise dos impactos de cada decomposição.

4 RESULTADOS

Seguindo o que foi apresentado no capítulo anterior, foi selecionada uma carteira eficiente para ser analisada com base na estrutura de dependência existente entre os seus ativos que a compõe, bem como o impacto dos ciclos de curto, médio e longo prazos na estimação do VaR. Ao todo, o resultado de otimização de portfólio, por meio da diversificação de ativos e do *trade-off* entre risco e retorno, a carteira eficiente contém 13 ativos financeiros. Após isso, as séries financeiras foram decompostas em oito diferentes níveis de frequência e tempo. Como as decomposições de curto e médio prazo apresentam maior participação na variância da série original e, por trata-se de um contexto de mercado eficiente, as séries originais foram reconstruídas utilizando-se apenas as cinco primeiras decomposições de maneira que representassem melhor o comportamento dos ativos no curto prazo.

A partir das novas séries reconstruídas, pela estimação de volatilidade condicional via modelo GARCH (1,1), as distribuições marginais no modelo GARCH-cópula para a análise de dependência estrutural dos ativos presentes na carteira selecionada são representadas por um modelo GARCH. Por analisarmos diferentes tipos de famílias de cópulas, foi possível identificar o comportamento no curto e médio prazo das distribuições conjuntas.

O Gráfico 12 ilustra a relação de dependência para a família Clayton, cópula presente na classe das Arquimedianas.

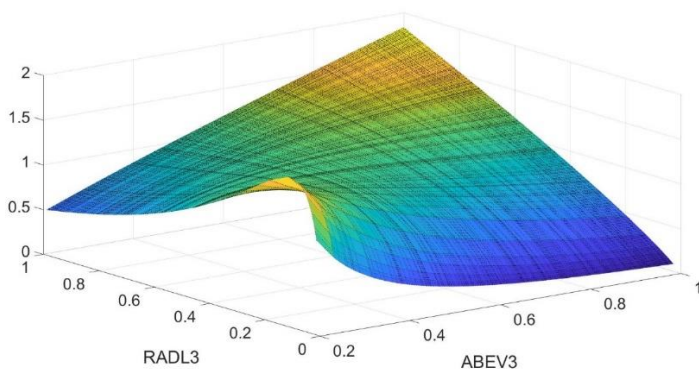


Gráfico 12 – Cópula Clayton entre os ativos RADL3 e ABEV3
Elaborado pelo autor.

Essa família se caracteriza por mensurar o grau de dependência na cauda inferior. Por essa razão, é possível observar uma maior densidade na distribuição dos ativos a medida que se aproxima dos pontos (0,0). No entanto, ainda assim, é possível observar certa correlação positiva na extremidade superior da cauda. O rho dessa família para os dois ativos foi de 0,8390.

O Gráfico 13 ilustra a relação de dependência entre os mesmos ativos de acordo com o grau de mensuração da família Frank, também presente na classe das Arquimedianas.

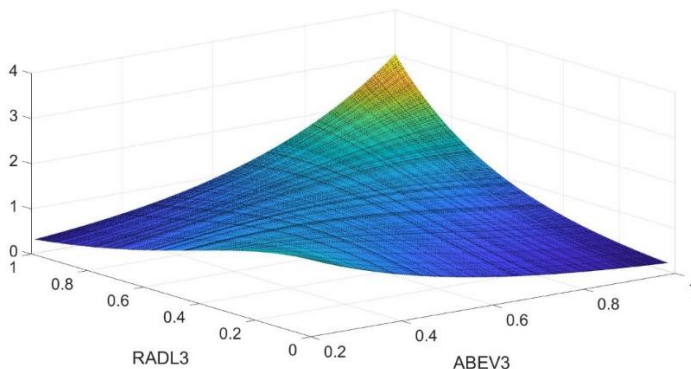


Gráfico 13 – Cópula Frank entre os ativos RADL3 e ABEV3
Elaborado pelo autor.

A cópula Frank se caracteriza pela capacidade de mensurar o grau de dependência positiva e negativa, isso é, apresenta maior densidade nas duas extremidades da distribuição dos ativos financeiros. Como é ilustrado, os dois ativos apresentam maior densidade à medida que nos aproximamos dos eixos (0,0) e (1,1). O rho dessa cópula para os dois ativos foi de 2,8670.

No que se refere à cópula Gumbel, outra família presente na classe das Cópulas Arquimedianas já foi apresentada no capítulo anterior. Caracterizada por analisar a dependência na cauda superior, ela registrou um rho de 1,0343.

O Gráfico 14 ilustra o resultado da estrutura de dependência da Cópula Gaussiana.

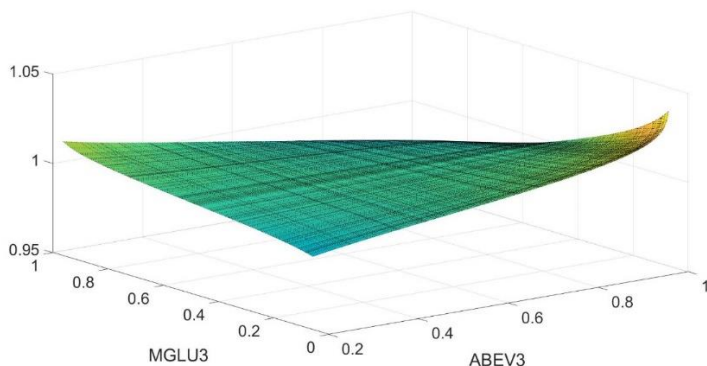


Gráfico 14 – Cópula Gaussiana entre os ativos MGLU3 e ABEV3
Elaborado pelo autor.

Caracteriza por representar relações simétricas, com dificuldade de medir as relações nas extremidades. A ilustração gráfica representa a dificuldade de identificar padrões não lineares em diferentes momentos da distribuição. No entanto, sua estrutura de dependência resultou em comportamentos contrários entre os ativos, ou seja, à medida de que o ativo MGLU3 apresenta uma valorização, o ativo ABEV3 tende a apresentar uma queda – mesmo que em baixa medida. Isso é explicado pelo indicador de cópulas estimado em $-0,0082$.

O Gráfico 15 ilustra o resultado da estrutura de dependência da Cópula *t-student*, família da classe de cópulas elípticas.

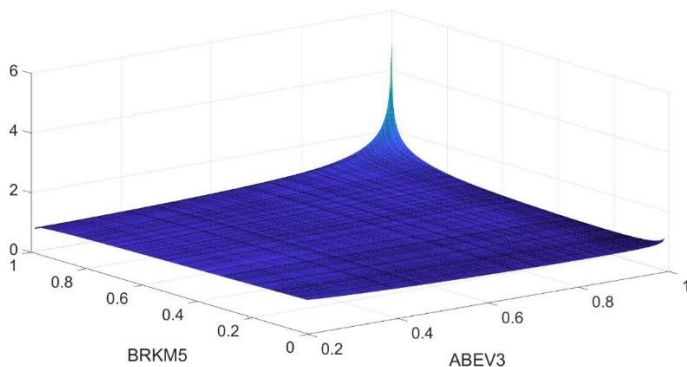


Gráfico 15 – Cópula *t-student* entre os ativos ABEV5 e BRKM5
Elaborado pelo autor.

Sua aplicação se caracteriza por uma melhor mensuração do grau de relação nas extremidades das caudas das distribuições conjuntas. Desse modo, é observado uma maior densidade na cauda superior. Apesar disso, de uma maneira geral, de acordo com o rho obtido de 0,0755, não há elevado grau de correlação entre as duas ações.

Em sequência são apresentados alguns gráficos das famílias de cópulas para os casos bivariados. Foram mantidas os mesmos pares para que fosse possível observar a diferença de análise que cada família de cópula consegue realizar acerca da estrutura de dependência.

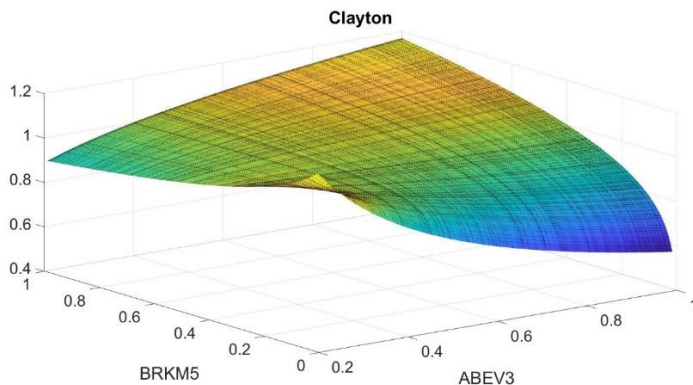


Gráfico 16 – Cópula Clayton entre os ativos BRKM5 e ABEV3. Elaborado pelo autor.

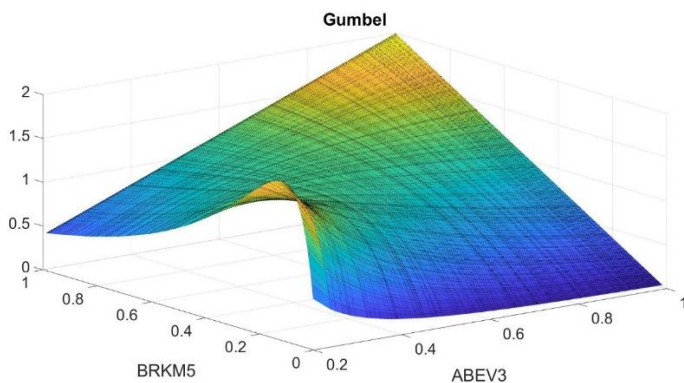


Gráfico 17 – Cópula Gumbel entre os ativos BRKM5 e ABEV3. Elaborado pelo autor.

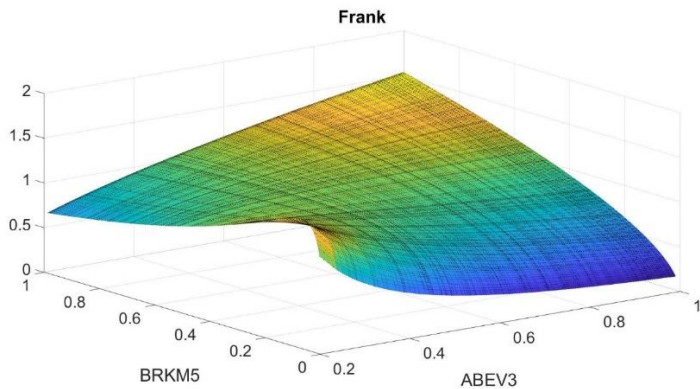


Gráfico 18 – Cópula Frank entre os ativos BRKM5 e ABEV3.
Elaborado pelo autor.

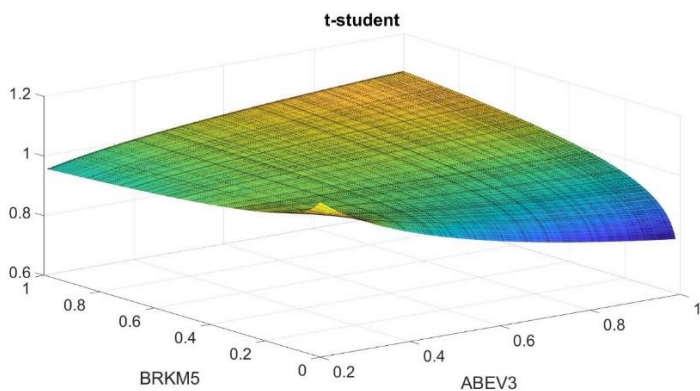


Gráfico 19 – Cópula t-student entre os ativos BRKM5 e ABEV3.
Elaborado pelo autor.

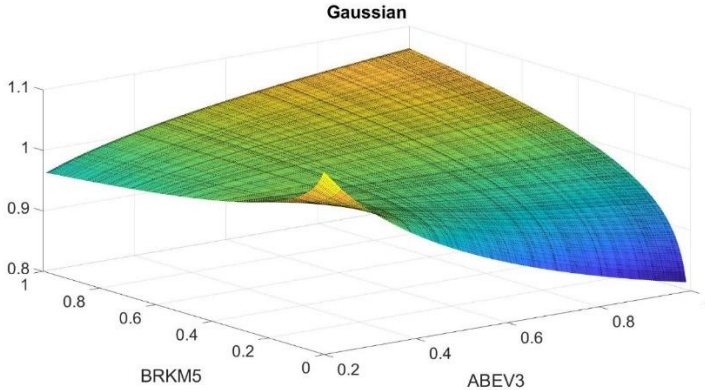


Gráfico 20 – Cópula Gaussiana entre os ativos BRKM5 e ABEV3.
Elaborado pelo autor.

De uma forma geral, esses resultados prévios apresentam uma tendência dos dados em convergirem para os mesmos movimentos, em menor ou maior grau, durante períodos de alta de mercado. As diferenças gráficas refletem o quão dinâmico e complexo é a relação entre os ativos presentes na carteira. Essas informações são relevantes, por exemplo, caso queiramos determinar a mudança de um ativo em específico. Essas informações não são capturadas pelo processo de otimização padrão, realizado para a elaboração da carteira eficiente. Entretanto, podem auxiliar na tomada de decisões em um segundo momento do período de otimização.

Na sequência, são apresentadas as tabelas com os coeficientes de cópulas estimados para as famílias Clayton, Frank, Gaussiana e T-student. Os resultados da família Gumbel já foram apresentados no capítulo 4.4 de correlação multivariada de cópulas.

Tabela 8 – Rho's estimados da cópula Clayton para os ativos da carteira eficiente

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	320,00	0,17	0,62	0,46	0,44	0,39	0,05	0,15	0,04	0,84	0,40
BRKM5	0,17	320,00	0,44	0,07	0,23	0,48	0,05	0,16	0,10	0,36	0,28
EGIE3	0,62	0,44	195,87	0,31	0,60	0,39	0,25	0,37	0,25	0,55	0,31
EMBR3	0,46	0,07	0,31	221,04	0,37	0,48	0,51	0,27	0,22	0,42	0,44
ENBR3	0,44	0,23	0,60	0,37	248,02	0,33	0,46	0,33	0,24	0,43	0,57
EQTL3	0,39	0,48	0,39	0,48	0,33	183,72	0,40	0,23	0,00	0,65	0,32
FLRY3	0,05	0,05	0,25	0,51	0,46	0,40	218,45	0,20	0,23	0,23	0,41
HYPE3	0,15	0,16	0,37	0,27	0,33	0,23	0,20	370,92	0,24	0,30	0,50
MGLU3	0,04	0,10	0,25	0,22	0,24	0,00	0,23	0,24	96,11	0,00	0,17
RADL3	0,84	0,36	0,55	0,42	0,43	0,65	0,23	0,30	0,00	184,67	0,48
VIVT4	0,40	0,28	0,31	0,44	0,57	0,32	0,41	0,50	0,17	0,48	299,44

Elaborado pelo autor.

Tabela 9 – Rho's estimados da cópula Frank para os ativos da carteira eficiente

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	0,54	2,64	1,45	1,49	1,55	0,39	0,32	0,14	2,87	1,24
BRKM5	0,54	-	1,42	0,45	0,65	1,81	0,35	0,30	0,06	1,20	0,79
EGIE3	2,64	1,42	-	0,78	1,94	1,35	0,71	0,98	0,87	1,76	0,82
EMBR3	1,45	0,45	0,78	-	0,88	1,44	1,32	0,50	0,49	1,11	0,99
ENBR3	1,49	0,65	1,94	0,88	-	1,27	1,32	0,67	0,61	1,30	1,49
EQTL3	1,55	1,81	1,35	1,44	1,27	-	1,30	0,67	0,08	2,06	1,01
FLRY3	0,39	0,35	0,71	1,32	1,32	1,30	-	0,25	0,70	0,76	1,00
HYPE3	0,32	0,30	0,98	0,50	0,67	0,67	0,25	-	0,42	0,72	0,97
MGLU3	0,14	0,06	0,87	0,49	0,61	0,08	0,70	0,42	-	0,00	0,36
RADL3	2,87	1,20	1,76	1,11	1,30	2,06	0,76	0,72	0,00	-	1,37
VIVT4	1,24	0,79	0,82	0,99	1,49	1,01	1,00	0,97	0,36	1,37	-

Elaborado pelo autor.

Tabela 10 – Rho's estimados da cópula Gaussiana para os ativos da carteira eficiente

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	1,00	0,06	0,39	0,24	0,23	0,24	0,07	0,07	-0,01	0,43	0,21
BRKM5	0,06	1,00	0,16	0,05	0,10	0,28	0,07	0,04	0,01	0,17	0,12
EGIE3	0,39	0,16	1,00	0,12	0,31	0,22	0,12	0,17	0,12	0,28	0,16
EMBR3	0,24	0,05	0,12	1,00	0,14	0,23	0,18	0,07	0,09	0,16	0,15
ENBR3	0,23	0,10	0,31	0,14	1,00	0,24	0,22	0,14	0,10	0,24	0,24
EQTL3	0,24	0,28	0,22	0,23	0,24	1,00	0,20	0,12	0,03	0,31	0,17
FLRY3	0,07	0,07	0,12	0,18	0,22	0,20	1,00	0,05	0,13	0,13	0,15
HYPE3	0,07	0,04	0,17	0,07	0,14	0,12	0,05	1,00	0,07	0,12	0,16
MGLU3	-0,01	0,01	0,12	0,09	0,10	0,03	0,13	0,07	1,00	0,01	0,06
RADL3	0,43	0,17	0,28	0,16	0,24	0,31	0,13	0,12	0,01	1,00	0,21
VIVT4	0,21	0,12	0,16	0,15	0,24	0,17	0,15	0,16	0,06	0,21	1,00

Elaborado pelo autor.

Tabela 11 – Rho's estimados da cópula t-student para os ativos da carteira eficiente

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	1,00	0,08	0,39	0,23	0,24	0,25	0,06	0,06	0,00	0,43	0,21
BRKM5	0,08	1,00	0,18	0,06	0,11	0,27	0,07	0,03	0,01	0,18	0,13
EGIE3	0,39	0,18	1,00	0,12	0,31	0,22	0,12	0,16	0,11	0,28	0,15
EMBR3	0,23	0,06	0,12	1,00	0,14	0,23	0,18	0,07	0,09	0,16	0,15
ENBR3	0,24	0,11	0,31	0,14	1,00	0,24	0,22	0,13	0,10	0,23	0,24
EQTL3	0,25	0,27	0,22	0,23	0,24	1,00	0,21	0,11	0,03	0,32	0,17
FLRY3	0,06	0,07	0,12	0,18	0,22	0,21	1,00	0,05	0,13	0,12	0,16
HYPE3	0,06	0,03	0,16	0,07	0,13	0,11	0,05	1,00	0,07	0,12	0,17
MGLU3	0,00	0,01	0,11	0,09	0,10	0,03	0,13	0,07	1,00	0,02	0,06
RADL3	0,43	0,18	0,28	0,16	0,23	0,32	0,12	0,12	0,02	1,00	0,22
VIVT4	0,21	0,13	0,15	0,15	0,24	0,17	0,16	0,17	0,06	0,22	1,00

Elaborado pelo autor.

No anexo do presente trabalho, é apresentado o resultado dos testes AIC para cada família de cópula estimada.

Apresentar as estruturas de dependência de dois ativos para diferentes cópulas teve como objetivo mostrar para o leitor e indicar as diferentes estruturas que cada família apresenta, bem como as diferentes análises que podem ser feitas para cada resultado. Por exemplo, todas as cópulas apresentaram, em maior ou menor grau, uma concentração na densidade de distribuição conjunta à medida que nos aproximamos da cauda superior. Essa é o tipo de informação adicional que a análise de dependência das cópulas oferece quando estamos procurando identificar padrões de comportamento entre diferentes ativos financeiros. No anexo, ao final deste trabalho, é possível observar as matrizes de dependência para cada família estimada, bem como os cálculos de Máxima Verossimilhança e o Critério de Akaike.

Para saber qual família de cópula realizou a melhor estimação da estrutura de dependência entre pares de ativos financeiros presentes na carteira, foram analisados a Máxima Verossimilhança e o Critério de Akaike. A Tabela 12 apresenta o resultado dos indicadores para a análise em 13 dimensões.

Tabela 12 – Resultado das estimativas de cópulas com base na Máxima Verossimilhança e no Critério de Akaike

Cópulas	Máxima Verossimilhança	Critério de Akaike
Gumbel	-10,4957	22,8096
Frank	-11,6131	25,0445
Clayton	-13,2744	28,3670
t-student	-12,9505	29,4341
Gaussiana	-12,3789	26,5760

Elaborado pelo autor.

A família de cópulas que melhor representou a estrutura de dependência dos ativos financeiros presente na carteira eficiente foi a Gumbel. Ela apresentou o menor índice com base no Critério de Akaike, bem como a maior máxima verossimilhança. Essa família se caracteriza por apresentar uma capacidade maior de mensurar as relações de dependência na cauda superior. Isso quer dizer que os dados presentes na carteira apresentam comportamentos semelhantes em momentos de alta de mercado, convergindo para uma valorização conjunta. Vale destacar, também, que a família de cópula Frank também representou bem a estrutura de dependência dos dados presentes na carteira eficiente. Por se

tratar de uma cópula sem dependência nas caudas inferiores e superiores, seu resultado pode estar atrelado à otimização da carteira, uma vez que é objetivado selecionar a composição de carteira com a maior rentabilidade dado o risco assumido. Dito de outra forma, como a carteira alvo procura identificar uma composição na qual se evite que os ativos tenham comportamentos semelhantes em momentos de instabilidade de mercado, esse resultado pode ser reflexo desse processo de estimação.

Os VaRs foram estimados com base no referencial teórico apresentado. Nesse processo, procurou-se mensurar o VaR para diferentes decomposições da série original. Na realidade, em um primeiro momento foi realizado a estimativa para a decomposição d1, posteriormente foi realizado a estimativa para a série reconstruída pelas decomposições d1 e d2, e assim por diante. Isso é, foram sendo adicionadas as decomposições subsequentes de cada série, de maneira que ao final nós tenhamos a série original reconstruída com base na soma de todas as decomposições.

A expectativa que se têm é de que, como os VaRs foram estimados com 90% de confiança, os percentuais de falhas deverão ser, idealmente, próximos de 10%. Mas como os testes foram realizados em ativos reais, com valores ocorridos ao longo do período de previsão, é de se esperar a possibilidade de que os resultados não sejam perfeitos, essencialmente, em função das inovações atípicas, possivelmente ocorridas, relacionadas ao mercado financeiro, ou relacionados aos fundamentos das ações em análise. Para o cálculo do VaR, foram feitas projeções diárias, de maneira que o risco estimado está caracterizado pelo número de vezes em que foram observadas um valor acima do ponto crítico.

A Tabela 13 apresenta os valores, em percentuais de falhas, obtidos para o cálculo do VaR Down, com 90% de confiança.

Tabela 13 – Resultado do teste de falhas para o VaR down com 90% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	15,3%	11,0%	9,8%	9,3%	9,5%	9,0%	9,3%	8,8%
BRKM5	11,8%	6,8%	5,5%	4,0%	5,0%	5,0%	5,0%	5,0%
EGIE3	13,3%	9,8%	7,5%	6,5%	6,5%	6,3%	5,5%	5,5%
EMBR3	8,3%	7,5%	5,3%	5,8%	6,3%	5,5%	5,8%	5,8%
ENBR3	12,0%	8,5%	8,0%	6,8%	5,3%	5,8%	5,3%	5,5%
EQTL3	16,3%	12,8%	10,3%	9,5%	9,0%	9,0%	9,0%	9,0%
FLRY3	19,8%	13,5%	12,5%	11,8%	10,0%	10,5%	9,5%	10,5%
HYPE3	17,5%	12,3%	6,5%	7,5%	5,8%	5,5%	5,5%	5,5%
MGLU3	3,3%	3,3%	3,0%	2,8%	2,5%	2,0%	2,0%	2,0%
RADL3	24,3%	11,3%	9,8%	9,8%	9,0%	9,0%	8,5%	8,5%
VIVT4	14,0%	9,0%	13,0%	14,5%	6,0%	6,0%	6,5%	6,0%
Carteira	15,8%	12,0%	9,5%	9,0%	8,8%	8,0%	8,8%	8,8%

Elaborado pelo autor.

Tabela 14 – Resultado do teste de falhas para o VaR up com 90% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	15,8%	9,8%	9,0%	8,8%	8,8%	8,5%	8,5%	8,5%
BRKM5	14,5%	9,5%	7,0%	6,0%	6,0%	6,0%	6,5%	6,8%
EGIE3	18,5%	13,3%	11,0%	10,5%	9,8%	9,5%	9,0%	9,0%
EMBR3	9,3%	8,5%	7,3%	7,8%	7,3%	7,0%	7,0%	7,0%
ENBR3	13,8%	10,5%	9,3%	8,0%	7,3%	7,0%	6,8%	6,8%
EQTL3	17,8%	14,3%	11,3%	10,8%	10,3%	10,3%	10,0%	10,0%
FLRY3	18,0%	10,8%	9,8%	8,8%	7,5%	7,8%	7,5%	7,5%
HYPE3	18,0%	12,5%	8,8%	10,0%	8,0%	7,5%	7,5%	7,8%
MGLU3	5,5%	4,5%	4,0%	3,5%	3,5%	0,8%	1,0%	1,3%
RADL3	24,0%	10,0%	8,5%	8,8%	8,8%	7,8%	8,0%	8,0%
VIVT4	14,3%	9,0%	12,5%	14,5%	6,0%	6,0%	7,0%	6,3%
Carteira	18,3%	13,3%	11,3%	10,0%	9,8%	9,5%	9,0%	8,8%

Elaborado pelo autor.

Pode-se inferir com base às estimativas do VaR *down* que existe um padrão de comportamento em relação à inclusão das decomposições de frequência e tempo. À medida que vamos incluindo as decomposições, observamos uma redução na mudança de falhas a partir da metade das decomposições. Esse comportamento reflete, na verdade, o pequeno impacto das decomposições de longo prazo sobre as estimativas do VaR. Utilizando o exemplo analisado da carteira eficiente, por exemplo, a partir do incremento da segunda decomposição, não é mais observado grandes mudanças nas estimativas. Enquanto o risco de queda para a primeira decomposição superior ao VaR foi de 15,8% ao dia, para um nível de confiança de 90%, já incrementando a quarta decomposição à série, o VaR cai para 9,0%, sem apresentar mudanças consideráveis com o incremento das outras decomposições. Esse comportamento é observado em maior ou menor grau medido para os outros ativos, passando a impactar menos nas estimativas de risco.

Na Tabela 15 e Tabela 16 são apresentados os resultados do teste de falhas para o VaR *down* e *up* com 95% de confiança.

Tabela 15 – Resultado do teste de falhas para o VaR *down* com 95% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	10,3%	5,3%	5,0%	4,8%	4,8%	4,0%	3,8%	3,8%
BRKM5	6,0%	2,5%	1,8%	0,5%	1,0%	1,0%	1,0%	1,0%
EGIE3	9,0%	4,5%	3,5%	3,5%	3,3%	2,8%	2,8%	2,5%
EMBR3	3,8%	3,0%	2,8%	2,8%	3,0%	2,8%	2,8%	2,8%
ENBR3	7,0%	3,5%	2,3%	1,8%	0,3%	1,0%	1,0%	0,8%
EQTL3	10,0%	6,8%	4,0%	3,5%	2,8%	2,5%	2,5%	2,3%
FLRY3	12,5%	6,5%	5,0%	5,0%	4,0%	4,5%	4,0%	4,3%
HYPE3	11,3%	5,8%	3,0%	3,0%	2,8%	2,8%	2,8%	2,8%
MGLU3	1,8%	1,0%	0,5%	0,5%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%
RADL3	18,8%	7,5%	5,0%	5,0%	4,8%	4,0%	3,8%	3,8%
VIVT4	8,3%	4,3%	6,0%	11,0%	3,0%	2,5%	3,3%	2,0%
Carteira	11,8%	6,5%	6,0%	5,8%	5,8%	5,8%	5,3%	5,3%

Elaborado pelo autor.

Tabela 16 – Resultado do teste de falhas para o VaR *up* com 95% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	3,0%	1,0%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%
BRKM5	3,3%	2,0%	2,3%	1,8%	1,8%	1,8%	1,8%	1,8%
EGIE3	5,0%	1,5%	1,8%	1,8%	1,5%	1,3%	1,3%	1,0%
EMBR3	1,5%	0,5%	0,5%	0,8%	0,8%	0,5%	0,8%	0,8%
ENBR3	2,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,0%
EQTL3	3,5%	1,5%	1,3%	1,3%	0,8%	0,8%	0,8%	0,8%
FLRY3	3,5%	2,0%	1,3%	1,3%	0,8%	1,0%	0,8%	1,0%
HYPE3	4,3%	1,0%	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,5%
MGLU3	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,0%	0,0%
RADL3	9,5%	2,3%	0,5%	0,8%	0,8%	0,5%	0,5%	0,5%
VIVT4	1,5%	0,5%	1,5%	3,8%	0,0%	0,5%	1,0%	0,3%
Carteira	3,3%	1,8%	1,5%	1,3%	1,3%	1,0%	1,0%	1,0%

Elaborado pelo autor.

O mesmo comportamento é observado com 95% de confiança. À medida que incrementamos as decomposições observamos uma redução na variação do VaR estimado pelo método *rolling window*. É importante destacar que, à medida que aumentamos no intervalo de confiança, estamos nos distanciando do ponto crítico do VaR. Desse modo, é possível que em alguns testes nossas estimativas não ultrapassem o nível crítico do VaR. Esse comportamento pode estar atrelado ao modelo GARCH.

Na sequência são apresentados os resultados de falhas para o VaR *down* e *up* com 99% de confiança.

Tabela 17 – Resultado do teste de falhas para o VaR *down* com 99% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	4,0%	1,0%	1,5%	1,3%	1,3%	1,3%	1,3%	1,3%
BRKM5	2,0%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%
EGIE3	2,5%	0,5%	0,8%	1,0%	1,0%	0,5%	0,5%	0,5%
EMBR3	1,0%	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%
ENBR3	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EQTL3	2,3%	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%
FLRY3	5,3%	1,5%	1,5%	1,5%	0,5%	0,8%	0,3%	1,0%
HYPE3	4,5%	2,0%	0,8%	0,5%	0,8%	0,5%	0,5%	0,5%
MGLU3	0,3%	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
RADL3	10,0%	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%
VIVT4	2,0%	0,3%	2,0%	3,5%	2,0%	1,0%	0,8%	0,0%
Carteira	3,5%	1,3%	0,8%	0,8%	0,5%	0,8%	0,5%	0,3%

Elaborado pelo autor.

Tabela 18 – Resultado do teste de falhas para o VaR *down* com 99% de confiança, para o retorno de cada série presente na carteira

Ativo	d1	d1-2	d1-3	d1-4	d1-5	d1-6	d1-7	d1-8
ABEV3	3,0%	1,0%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%
BRKM5	3,3%	2,0%	2,3%	1,8%	1,8%	1,8%	1,8%	1,8%
EGIE3	5,0%	1,5%	1,8%	1,8%	1,5%	1,3%	1,3%	1,0%
EMBR3	1,5%	0,5%	0,5%	0,8%	0,8%	0,5%	0,8%	0,8%
ENBR3	2,5%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EQTL3	3,5%	1,5%	1,3%	1,3%	0,8%	0,8%	0,8%	0,8%
FLRY3	3,5%	2,0%	1,3%	1,3%	0,8%	1,0%	0,8%	1,0%
HYPE3	4,3%	1,0%	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,5%
MGLU3	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
RADL3	9,5%	2,3%	0,5%	0,8%	0,8%	0,5%	0,5%	0,5%
VIVT4	1,5%	0,5%	1,5%	3,8%	0,0%	0,5%	1,0%	0,3%
Carteira	3,3%	1,8%	1,5%	1,3%	1,3%	1,0%	1,0%	1,0%

Elaborado pelo autor.

Os resultados obtidos são semelhantes aos observados com o intervalo de confiança de 95%. Isso quer dizer que os efeitos de longo prazo geram pouco impacto sobre a qualidade do VaR estimados. Para os casos em que não foram ultrapassados os limites críticos, é possível que o modelo GARCH não tenha capturado direito a volatilidade condicional – apesar das validações dos resíduos e testes da FAC e FACP. A aplicação de um modelo mais robusto, por exemplo, FIGARCH pode oferecer uma maior flexibilidade para estimar dados que apresentam elevados choques, como os dados financeiros.

Dessa maneira, podemos concluir que as decomposições referentes aos processos estocásticos de curto e médio prazo, apresentaram maior impacto na estimação de risco, pelos dos testes realizados dentro da amostra. Em alguns ativos em específico, utilizando um nível de confiança de 90%, houve registros de aumento de falhas do VaR para algumas decomposições. No entanto, à medida que outras eram incrementadas, o desempenho manteve-se em queda. Esse comportamento talvez seja reflexo de uma necessidade de melhoramento no processo de especificação do modelo de estimação da variância condicional – conjectura-se aqui que essas ações apresentam comportamentos menos eficientes. Apesar disso, é importante destacar que cada processo estocástico gerador de uma série temporal apresentará comportamentos diferentes em relação às outras, cabendo às características intrínsecas de cada um determinar os resultados analisados.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo realizar uma análise sobre a estrutura de dependência de ativos financeiros presente em uma carteira eficiente, bem como medir o impacto de ciclos de curto, médio e longo prazos sobre análises de VaR diárias. Para isso, foram utilizados os métodos de cópulas e *wavelets* para medir o grau de dependência ao longo das distribuições e realizar as decomposições dos ativos financeiros em diferentes níveis de frequência e tempo, respectivamente.

A utilização da análise de cópula vem crescendo na bibliografia financeira por se tratar de uma alternativa de mensuração de distribuições conjuntas que apresentam toda a informação sobre o comportamento das variáveis analisadas e que, tais características, são oriundas do comportamento marginal de cada variável bem como de suas inter-relações. Isso é, uma cópula acopla distribuições marginais univariadas formando distribuições multivariadas, resultando na possibilidade de analisar o grau de dependência ao longo de suas distribuições.

Dessa maneira, foram analisadas as estruturas de dependências dos ativos financeiros presentes na carteira eficiente. Para o período de dados selecionado, os ativos financeiros apresentaram uma densidade maior nas caudas superiores, destacando-se o melhor ajustamento das cópulas Gumbel, que apresentam uma capacidade de mensuração do grau de dependência nessa extremidade. Esse tipo de comportamento é muito observado no mercado financeiro, como abordado por Ang & Chang (2002), Hu (2002 e 2006) e Boubaker & Sghaier (2012).

A análise de decomposições *wavelets* forneceu informações relevantes quanto ao impacto das decomposições sobre a mensuração do VaR, por meio dos testes dentro da amostra realizado. Os processos estocásticos de curto prazo apresentaram um comportamento semelhante aos trabalhos expostos de Jammazi & Reboredo (2016), em que observaram que as decomposições de curto prazo apresentam maior volatilidade. Essa característica, por sua vez, resultou em um maior impacto das decomposições de curto prazo sobre a variância e o VaR dos ativos financeiros, bem como da carteira eficiente selecionada. À medida que as decomposições foram sendo incrementadas até que se formasse novamente a série original, os impactos nos testes realizados dentro da amostra eram cada vez menores. Isso é, o processo estocástico das decomposições de longo prazo apresenta pouco impacto sobre o processo estocástico original da série, no que se refere à frequência. Resultado semelhante foi encontrado por Berger (2016). Fica claro, portanto, que dependendo do viés de análise do indivíduo, essa metodologia oferece

uma importante oportunidade para identificar padrões e comportamentos sobre diferentes ciclos econômicos.

Para trabalhos futuros, fica levantada a questão sobre a possibilidade de analisar a estrutura de dependência de ativos financeiros à medida que é realizada às decomposições *wavelets*. As análises realizadas oferecem oportunidade para avançar ainda mais sobre o tema, direcionada a avanços nas discussões teóricas que envolvem os mercados financeiros. Além disso, a utilização de diferentes modelos GARCH, como FIGARCH, EGARCH e TGARCH podem oferecer resultados ainda melhores na estimação a volatilidade condições e, conseqüentemente, nos resultados anteriormente obtidos.

6 REFERÊNCIAS

- ALLEN, D.; ASHRAF, M; MCALEER, M.; POWER, R.; SINGH, A. Financial dependence analysis: applications of vine copulas. **Statistica Neerlandica**, v. 67, n. 4, pp. 403-435, 2013.
- ANDRIES A. M.; IHNATOV I.; TIWARI A. K. Analyzing time frequency relationship between interest rate, stock price and exchange rate through continuous wavelet. **Economic Modelling**, v.41, p. 227-238, 2014.
- ANG, A.; CHEN, J. Asymmetric correlations of equity portfolios. **Journal of Financial Economics**, 63, 443-494, 2002.
- ARAÚJO, A. C.; MONTINI, A. A. Análise de métricas de risco na otimização de portfólios de ações. **Revista de administração USP**. São Paulo: USP, b. 50, n. 2, pp. 208-228, abr./maio/jun. 2015.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; ERBER, J. M.; e HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, 9, 203-228, 1998.
- BERGER, T. **On the impact of long-run seasonalities on daily Value-at-Risk forecasts**. Working Paper. 2016
- BERGMANN, D. R. **Estratégias de diversificação de carteiras de ações com dependência assimétrica**. São Paulo: USP, 2013.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, pp. 307-327, 1986.
- BOUBAKER, H.;SGHAIER, N. (2012). Portfolio optimization in the presence of dependent financial returns with long memory: a copula based approach. **Journal of Banking & Finance**, 37, 361-377.
- DIAS, A.; EMBRECHTS, P. Modelling rate dependence dynamics at diferente time horizons. **Journal of International Money and Finance**, v. 29, pp. 1687-1705, 2010.
- EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MECNEIL, A. **Modelling dependence with copulas and applications to risk management**. In Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, ed. S. Rachev, Elsevier, Ch. 8, 329-384, 2003.
- ENDERS, W. Applied econometric time series. Fourth edition. Pp. 485. 2014, EUA.

FAMA, E. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **The journal of finance**. 1970.

FERMANIAN, J-D.; SCAILLET, O. Nonparametric estimation of copulas for time series. **Journal of risk**, v. 5, pp. 25-54, 2003.

HU, L. **Dependence patterns across financial markets: methods and evidence**. EUA, Department of economics Ohio State University, 2002.

HU, L. Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach. **Applied Financial Economics**, v. 16, pp. 717-729, 2006.

HUANG S.C. Wavelet-based multi resolution GARCH model for financial spillover effects. **Mathematics and Computers in Simulation**. v. 87, p. 2529-2539, 2011

JAMMAZI, R.; REBOREDO, J. (2016). Dependence and risk management in oil and stock markets. A wavelet-copula analysis. **Energy**, 107, 866-888.

KAKOURIS, I.; RUSTEM, B. (2014). Robust portfolio optimization with copulas. **European Journal of Operational Research**, 235, 28-37.

MORETTIN, P. **Econometria financeira: um curso em séries temporais**. São Paulo: Blucher, 2011.

McNEIL, A. J; FREY, R.; EMBRECHTS, P. **Quantitative Risk Management: concepts, techniques, and tools**. New Jersey: Princeton University Press, 2005, 538p.

NELSEN, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns. **Econometrica**, v. 59, pp. 347-370, 1991.

NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. Springer, 2006.

ORTEGA, L.; KHASHANAH, K., A neuro-wavelet model for the short-term forecasting of highfrequency time series of stock returns. **Journal of Forecasting**, v. 33, 2014.

OTHIMANI, D.; SHANKAR, R.; YADAV, S. S. Discrete Wavelet Transform-Based Prediction of Stock Index: A Study on National Stock Exchange Fifty Index. **Journal of Financial Management and Analysis**, v. 28, n. May, p. 35–49, 2016.

PATTON, A. Modelling asymmetric Exchange rate dependence. **International Economic Review**, v. 47(2), pp. 527-556, 2006.

- PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. Wavelet methods for time series analysis. **Cambridge University Press**. 2000.
- PEREIRA, P. L. V. **Cópuas: uma alternativa para a estimação de modelos de risco multivariados**. FGV/EESP, 2009.
- PINTEL, E. A.; SILVA, J. F. Decomposição de ondaletas, análise de volatilidade e correlação para índices financeiros. **Estudos Econômicos**, São Paulo, v. 41, n. 2, pg. 441-462, 2011.
- ROCKFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of Risk**, 2(3), 2000.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking and Finance**, 26(7), 1443–1471, 2002.
- ROSSI, J. **Seleção de modelos cópula-GARCH: uma abordagem bayesiana**. São Paulo: USP. 2012.
- SANTOS, R; PEREIRA, P. Modelando contágio financeiro através de cópuas. **Working Paper**, 2011.
- SKLAR, A. (1959). Funcions de repartition a n dimensions et leurs marges. **Publications de l'Institut de statistique de l'Université de paris**, 8, 229-231
- SOUZA, R. M. **Cópuas: algumas aplicações em finanças**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2003.
- VENTER, G. G. **Tails of copulas**. Preprint Cas, 2003.
- VELASCO, L. **Ajuste bayesiano para cópuas bivariadas**. São Paulo: Unicamp, 2016.
- YAN, J. Enjoy the joy of copulas. **Elsevier Science**, 2006.
- ZHU, S; FUKUSHIMA, M. Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. **Operations Research**, v. 57(5), 1155-1168, 2009.

7 ANEXOS

7.1 ANEXO A – TESTE AIC PARA CÓPULAS ESTIMADAS

Tabela A. 1 – Testes de AIC para cópula Clayton

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	10,28	97,35	54,65	48,41	44,67	2,48	6,71	2,39	180,07	36,91
BRKM5	10,28	-	43,40	2,58	11,45	55,87	2,44	5,39	4,06	32,13	14,14
EGIE3	97,35	43,40	-	21,45	77,12	38,77	15,72	23,18	13,54	73,50	18,68
EMBR3	54,65	2,58	21,45	-	26,34	53,92	51,91	10,54	10,47	41,27	34,20
ENBR3	48,41	11,45	77,12	26,34	-	23,75	44,27	16,45	11,18	43,65	56,33
EQTL3	44,67	55,87	38,77	53,92	23,75	-	38,43	9,85	2,00	104,50	20,62
FLRY3	2,48	2,44	15,72	51,91	44,27	38,43	-	7,50	11,44	13,92	30,61
HYPE3	6,71	5,39	23,18	10,54	16,45	9,85	7,50	-	8,61	17,03	34,88
MGLU3	2,39	4,06	13,54	10,47	11,18	2,00	11,44	8,61	-	2,00	5,49
RADL3	180,07	32,13	73,50	41,27	43,65	104,50	13,92	17,03	2,00	-	47,72
VIVT4	36,91	14,14	18,68	34,20	56,33	20,62	30,61	34,88	5,49	47,72	-

Elaborado pelo autor.

Tabela A. 2 – Teste AIC para cópula Frank

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	7,77	129,96	43,28	45,55	51,15	5,06	4,06	2,39	158,91	31,99
BRKM5	7,77	-	39,23	5,98	10,47	65,56	4,43	3,72	2,07	30,79	13,96
EGIE3	129,96	39,23	-	14,11	73,27	36,64	11,90	20,22	17,24	62,87	15,28
EMBR3	43,28	5,98	14,11	-	16,97	41,71	34,24	6,92	6,80	26,04	21,06
ENBR3	45,55	10,47	73,27	16,97	-	32,97	36,23	10,57	9,22	35,08	43,88
EQTL3	51,15	65,56	36,64	41,71	32,97	-	34,85	10,63	2,12	83,61	21,76
FLRY3	5,06	4,43	11,90	34,24	36,23	34,85	-	3,19	11,70	13,74	21,54
HYPE3	4,06	3,72	20,22	6,92	10,57	10,63	3,19	-	5,36	12,31	19,43
MGLU3	2,39	2,07	17,24	6,80	9,22	2,12	11,70	5,36	-	2,00	4,62
RADL3	158,91	30,79	62,87	26,04	35,08	83,61	13,74	12,31	2,00	-	38,80
VIVT4	31,99	13,96	15,28	21,06	43,88	21,76	21,54	19,43	4,62	38,80	-

Elaborado pelo autor.

Tabela A. 3 – Teste AIC para cópula Gaussiana

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	5,26	134,60	47,57	47,16	50,01	6,08	5,67	2,05	165,86	38,84
BRKM5	5,26	-	23,77	3,95	10,67	65,12	6,35	3,07	2,11	26,51	14,44
EGIE3	134,60	23,77	-	12,97	84,39	40,18	12,79	25,10	13,90	65,70	22,84
EMBR3	47,57	3,95	12,97	-	16,97	44,06	27,93	5,77	8,17	23,72	19,86
ENBR3	47,16	10,67	84,39	16,97	-	51,11	42,32	17,15	10,37	48,58	48,86
EQTL3	50,01	65,12	40,18	44,06	51,11	-	36,27	13,30	2,59	82,66	26,39
FLRY3	6,08	6,35	12,79	27,93	42,32	36,27	-	3,72	15,56	15,06	21,65
HYPE3	5,67	3,07	25,10	5,77	17,15	13,30	3,72	-	5,81	13,88	24,23
MGLU3	2,05	2,11	13,90	8,17	10,37	2,59	15,56	5,81	-	2,16	5,24
RADL3	165,86	26,51	65,70	23,72	48,58	82,66	15,06	13,88	2,16	-	37,50
VIVT4	38,84	14,44	22,84	19,86	48,86	26,39	21,65	24,23	5,24	37,50	-

Elaborado pelo autor.

Tabela A. 4 – Teste AIC para cópula Gumbel

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	2,00	135,57	33,41	40,21	29,13	4,29	5,13	2,00	105,74	40,53
BRKM5	2,00	-	16,61	3,25	5,34	64,78	7,95	2,66	2,00	10,95	14,53
EGIE3	135,57	16,61	-	7,91	83,56	43,95	9,57	25,15	10,74	40,28	23,25
EMBR3	33,41	3,25	7,91	-	11,56	38,96	23,06	3,19	5,69	12,84	10,73
ENBR3	40,21	5,34	83,56	11,56	-	69,51	32,52	22,53	13,46	44,17	48,69
EQTL3	29,13	64,78	43,95	38,96	69,51	-	39,86	14,51	7,18	59,06	28,12
FLRY3	4,29	7,95	9,57	23,06	32,52	39,86	-	3,47	15,28	9,92	15,85
HYPE3	5,13	2,66	25,15	3,19	22,53	14,51	3,47	-	7,35	10,87	28,83
MGLU3	2,00	2,00	10,74	5,69	13,46	7,18	15,28	7,35	-	3,16	6,42
RADL3	105,74	10,95	40,28	12,84	44,17	59,06	9,92	10,87	3,16	-	22,67
VIVT4	40,53	14,53	23,25	10,73	48,69	28,12	15,85	28,83	6,42	22,67	-

Elaborado pelo autor.

Tabela A. 5 – Teste AIC para cópula T-student

	ABEV3	BRKM5	EGIE3	EMBR3	ENBR3	EQTL3	FLRY3	HYPE3	MGLU3	RADL3	VIVT4
ABEV3	-	6,42	139,87	49,80	50,21	48,39	5,93	7,50	5,91	162,85	44,32
BRKM5	6,42	-	30,65	5,83	12,21	68,66	7,58	5,45	0,12	27,55	18,49
EGIE3	139,87	30,65	-	15,31	88,84	48,10	15,44	28,97	15,86	67,13	26,10
EMBR3	49,80	5,83	15,31	-	20,13	49,87	35,73	7,41	9,20	26,10	21,88
ENBR3	50,21	12,21	88,84	20,13	-	57,17	44,14	21,66	14,50	52,06	54,43
EQTL3	48,39	68,66	48,10	49,87	57,17	-	44,74	16,71	6,27	88,86	30,55
FLRY3	5,93	7,58	15,44	35,73	44,14	44,74	-	7,31	17,23	15,42	24,43
HYPE3	7,50	5,45	28,97	7,41	21,66	16,71	7,31	-	9,42	15,64	31,31
MGLU3	5,91	0,12	15,86	9,20	14,50	6,27	17,23	9,42	-	7,81	8,38
RADL3	162,85	27,55	67,13	26,10	52,06	88,86	15,42	15,64	7,81	-	38,94
VIVT4	44,32	18,49	26,10	21,88	54,43	30,55	24,43	31,31	8,38	38,94	-

Elaborado pelo autor.

7.2 ANEXO B – ANÁLISE RESIDUAL DO GARCH (1,1)

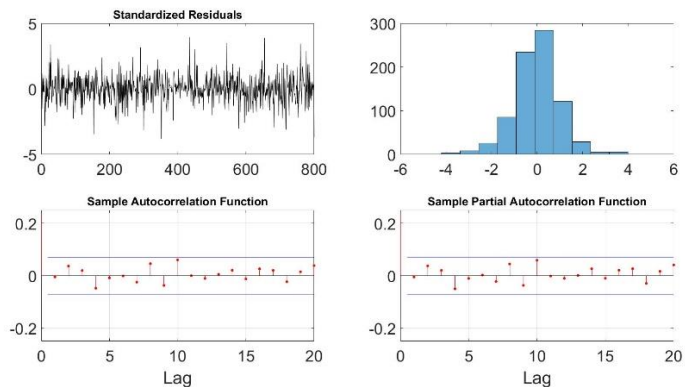


Gráfico B. 1 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo ABEV3

Elaborado pelo autor.

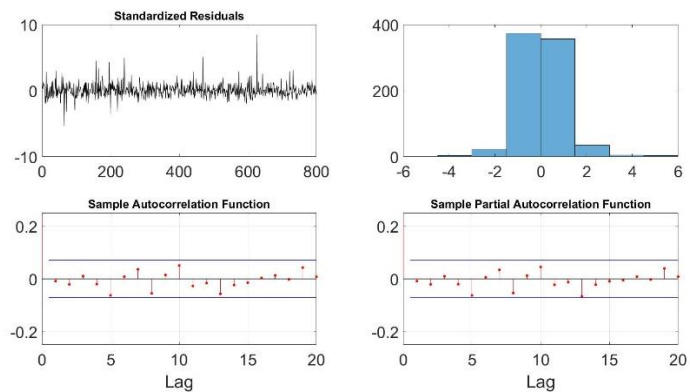


Gráfico B. 2 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo BRKM5

Elaborado pelo autor.

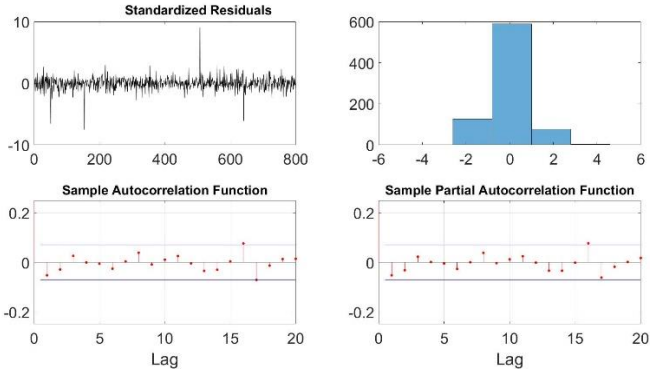


Gráfico B. 3 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo EMBR3

Elaborado pelo autor.

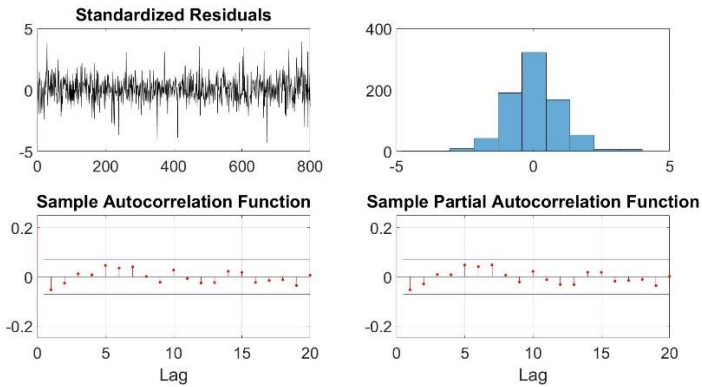


Gráfico B. 4 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo ENBR3

Elaborado pelo autor.

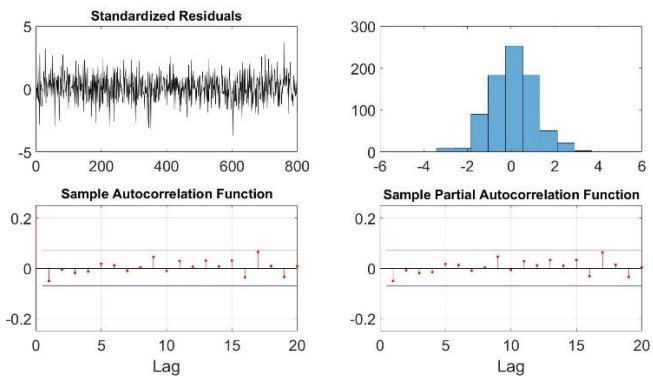


Gráfico B. 5 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo EQTL3

Elaborado pelo autor.

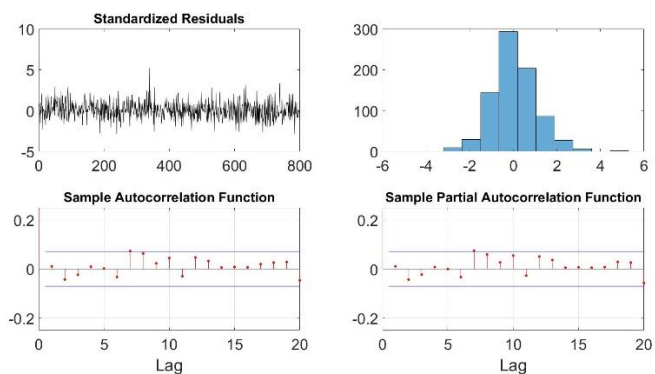


Gráfico B. 6 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo FLRY3

Elaborado pelo autor.

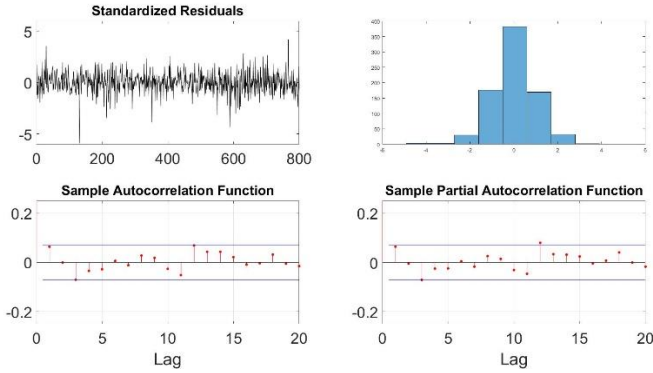


Gráfico B. 7 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo HYPE3
Elaborado pelo autor.

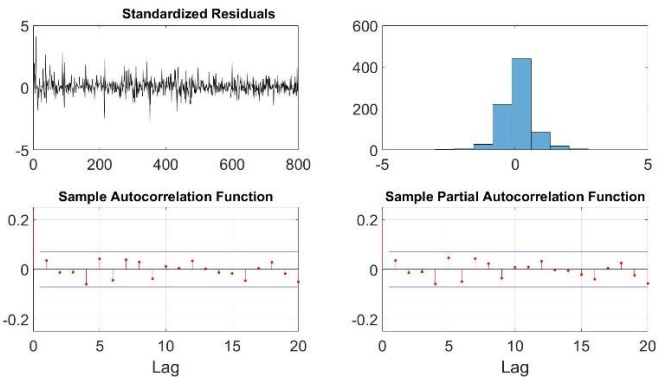


Gráfico B. 8 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo MGLU3
Elaborado pelo autor.

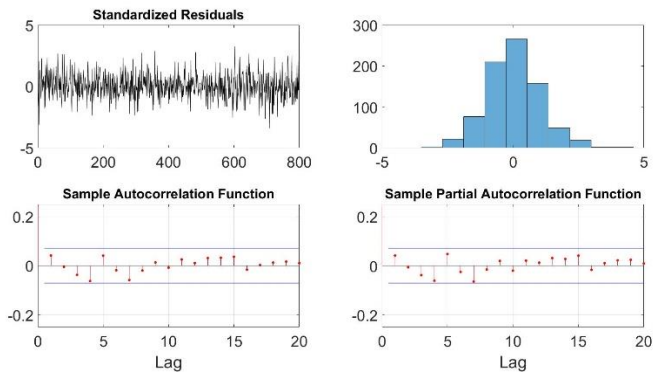


Gráfico B. 9 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo RADL3

Elaborado pelo autor.

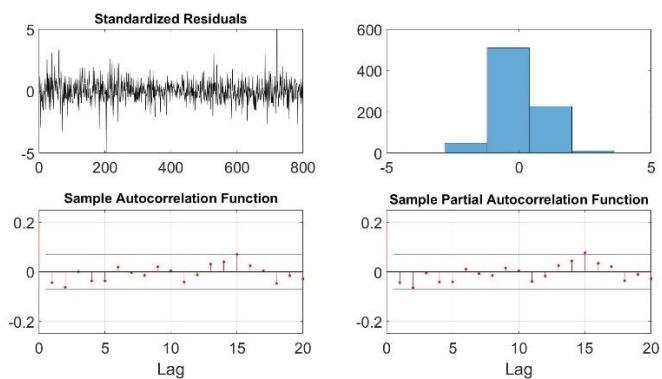


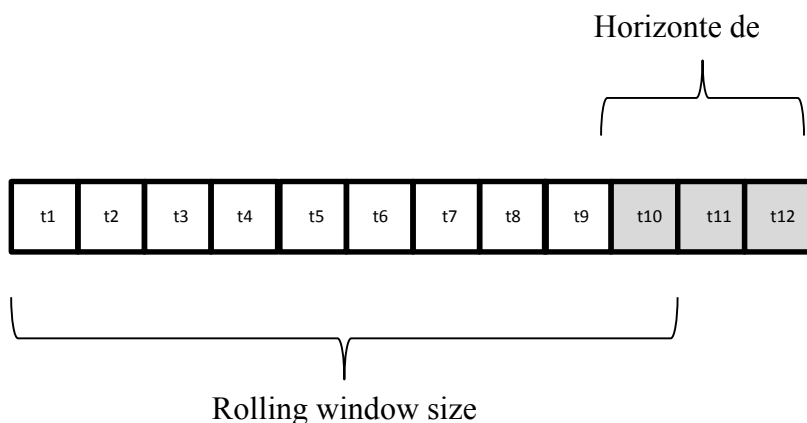
Gráfico B. 10 – Análise dos resíduos do modelo GARCH (1,1) para o ativo VIVT4

Elaborado pelo autor.

7.3 ANEXO C – ROLLING WINDOW

Este anexo procura explicar mais sucintamente possível a técnica *rolling window* utilizada para a realização de *bakctests*. Em um primeiro lugar, nós precisamos escolher uma janela que irá se deslocar ao longo do nosso horizonte de previsão. Para o caso deste trabalho, adotamos uma janela de 400 dias. Portanto, esses 400 dias serão sempre analisados para a estimação do VaR, à medida que vamos incluindo os últimos dias de previsão da volatilidade condicional. A Figura C. 1 ilustra essa relação para uma amostra menor.

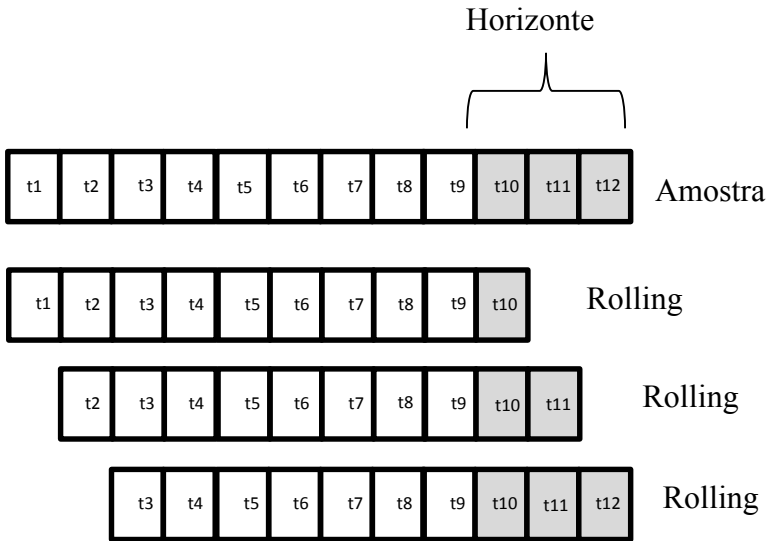
Figura C. 1 – Rolling window



Elaborado pelo autor.

Entre t1 e t10 é ilustrada a janela que será deslocada para cada dia de previsão, representada pelo horizonte de previsão. O processo de deslocamento pode ser melhor observado na Figura C. 2, onde a *rolling window* 1 representaria, no nosso trabalho, a previsão de um dia com base nas 399 observações, enquanto que a *rolling window* representaria a previsão de mais um dia, com base na 398 observação e na última previsão realizada na *rolling window* 1. Esse processo é realizado durante 400 vezes (período de previsão).

Figura C. 2 – Rolling window por etapas



Elaborado pelo autor.

Esse processo otimiza as previsões justamente por conta desse deslocamento na janela de dados, procurando tornar a previsão mais fidedigna. Os dados foram utilizados para a previsão do VaR para diferentes intervalos de confiança.