

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Alexandra Duarte Candido

**TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS**

Florianópolis

2019



Alexandra Duarte Candido

## TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientadora: Prof. Dra. Marianna Ravara Vago

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Duarte Candido, Alexandra  
Transformações de Möbius  
Orientadora: Marianna Ravara Vago-  
Florianópolis, SC, 2019.  
55 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Números Complexos. 4. Projeção Estereográfica. 5. Transformações de Möbius.

**TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS**  
**por**  
**Alexandra Duarte Candido**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

---

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves  
Coordenadora do Curso

**Banca Examinadora**

---

Profa. Dra. Marianna Ravara Vago  
UFSC  
Orientadora

---

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria  
UFSC

---

Prof. Dr. Eduardo Tengan  
UFSC

---

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan  
UFSC

Florianópolis, 24 de Abril 2019.



## RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar uma classe especial de funções complexas, chamadas transformações de Möbius. Para isso, primeiramente, fazemos a construção do plano complexo estendido e da projeção estereográfica (que relaciona o plano complexo estendido e a esfera). Posteriormente, fazemos a interpretação geométrica da função inversão para, finalmente, chegar nas transformações de Möbius.

**Palavras-chave:** números complexos; plano complexo estendido; projeção estereográfica; inversão; transformações de Möbius.



## ABSTRACT

The purpose of this work is to study a special class of complex functions, called Möbius transformations. In order to do that, we first define the extended complex plane and the stereographic projection (which gives a relation between the extended complex plane and the sphere). Then we study the geometric interpretation of the inversion function, and finally we arrive at the Möbius transformations.

**Keywords:** complex numbers; extended complex plane; stereographic projection; inversion; Möbius transformations.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	O plano complexo . . . . .	21
Figura 2	Representação vetorial . . . . .	21
Figura 3	Módulo e argumento de $z$ . . . . .	22
Figura 4	Círculo de centro $z_0$ e raio $\epsilon$ . . . . .	26
Figura 5	Círculo de centro $0$ e raio $A$ . . . . .	26
Figura 6	Projeção Estereográfica . . . . .	28
Figura 7	Projeção Estereográfica da reta $R = \{z = t + it\}$ . . . . .	32
Figura 8	Os pontos $z_i$ no plano complexo . . . . .	34
Figura 9	Os pontos $\frac{1}{z_i}$ no plano complexo . . . . .	34
Figura 10	O quadrado $\tilde{L}$ . . . . .	39
Figura 11	Imagem de $L$ . . . . .	39
Figura 12	O semiplano $H$ . . . . .	50
Figura 13	O disco $\mathbb{D}$ . . . . .	50



## SUMÁRIO

<b>Introdução</b> .....	13
<b>1 NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	15
1.1 A FORMA ALGÉBRICA .....	16
1.2 A FORMA TRIGONOMÉTRICA .....	20
<b>2 O PLANO COMPLEXO ESTENDIDO</b> .....	25
2.1 O PONTO NO INFINITO .....	25
2.2 A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA .....	27
<b>3 A INVERSÃO</b> .....	33
<b>4 TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS</b> .....	41
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	51
<b>Referências</b> .....	53



## INTRODUÇÃO

A resolução de equações sempre representou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a Antiguidade até os dias de hoje. Babilônios, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações de segundo grau, mas, em vez de fórmulas, usavam régua e compasso para resolvê-las. Para esses matemáticos não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo: como as equações eram formuladas para solucionar um problema concreto, se surgisse uma raiz quadrada negativa, o problema era considerado sem solução.

Esse ponto de vista só começou a mudar a partir do século XVI, com os matemáticos italianos e seus estudos sobre a resolução de equações de terceiro grau em que aparecem raízes de números negativos. No início, a existência de um “novo tipo de número” foi de difícil aceitação, mas a ampliação dos estudos por matemáticos alemães (entre eles, Leonhard Euler e Carl Friedrich Gauss) e a descoberta da possibilidade de ampliação desses números em outras áreas tornaram os *números complexos* uma importante descoberta matemática. Com o surgimento deles, podemos resolver equações que não têm solução no conjunto dos números reais.

Atualmente, aplicações desses novos números adquiriram grande importância no campo da Engenharia (por exemplo, no estudo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Geometria fractal, em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros.

Neste trabalho estudaremos uma classe especial de funções, chamadas transformações de Möbius. Para pavimentar o caminho até lá, passamos pela definição de números complexos, pela construção do plano complexo estendido e pela visualização geométrica da ação da função inversão. Após isto, podemos então definir as transformações de Möbius. Veremos que as transformações de Möbius tem a bonita propriedade geométrica de preservar circunferências do plano complexo estendido.

As principais referências usadas para a elaboração deste trabalho são (SOARES, 2006) e (WAGNER, 2005).



## 1 NÚMEROS COMPLEXOS

O matemático italiano Jerônimo Cardano (1501-1576) mostrou em seu livro *Ars Magna* (A Grande Arte) um método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamado de Fórmula de Cardano. Rafael Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, aplicou a fórmula de Cardano à equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} .$$

Embora não se sentisse completamente a vontade em relação às raízes quadradas de números negativos, Bombelli operava com elas aplicando-lhes as regras usuais da álgebra. Bombelli mostrou que

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121} \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Portanto, o valor de  $x$  é  $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ . Como 4 é realmente a raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos como ferramentas para encontrar soluções de equações, embora estivessem pouco confortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade  $\sqrt{-1}$ , que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por  $i$ . Apenas no século XIX, quando Carl Friedrich Gauss (1787-1855) e Jean Robert Argand (1768-1822) divulgam, de maneira independente, a representação geométrica dos números complexos, é que a sensação de desconforto desaparece.

O surgimento dos números complexos levou a uma ampliação dos conjuntos numéricos com a criação do *conjunto dos números complexos*, representado por  $\mathbb{C}$  e definido por:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}.$$

## 1.1 A FORMA ALGÉBRICA

Um número complexo é um número da forma  $z = a + ib$ , com  $a$  e  $b$  reais e  $i^2 = -1$ . Os valores  $a$ ,  $b$  são chamados respectivamente de *parte real* e *parte imaginária* de  $z$ . Escrevemos  $a = \text{Re}(z)$ ,  $b = \text{Im}(z)$ . Observe que um número real é um número complexo da forma  $a + 0i$ , isto é, sua parte imaginária se anula. Já um número da forma  $0 + ib$  é chamado *imaginário puro*.

Dois números complexos  $z = a + ib$  e  $z' = a' + ib'$  são iguais se, e somente se,  $a = a'$  e  $b = b'$ . Em particular, tem-se  $a + ib = 0$  se, e somente se,  $a = 0$  e  $b = 0$ .

A soma de dois números complexos  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  é definida da seguinte forma:

$$z + w = (a + c) + i(b + d) ,$$

isto é,  $\text{Re}(z + w) = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$  e  $\text{Im}(z + w) = \text{Im}(z) + \text{Im}(w)$ . Observe que se  $z = a + 0i$  e  $w = c + 0i$  são reais, a soma  $z + w = (a + c) + i(0 + 0)$  como complexos é a mesma da soma  $z + w = a + c$  como reais. Além disso, se  $w = c + 0i$  é real, então

$$z + w = (a + c) + i(b + 0) = (a + c) + id ,$$

isto é, é possível fazer a soma de um número complexo com um número real. Seguem da definição da soma as seguintes propriedades:

(A) A soma é comutativa. De fato,

$$z + w = (a + c) + i(b + d) = (c + a) + i(d + b) = w + z .$$

(B) A soma é associativa. De fato, se  $u = e + if$ ,

$$\begin{aligned} (z + w) + u &= ((a + c) + e) + i((b + d) + f) \\ &= (a + (c + e)) + i(b + (d + f)) = z + (w + u) . \end{aligned}$$

(C) Existe um elemento neutro aditivo,  $0 = 0 + 0i$ . De fato,

$$z + 0 = (a + 0) + i(b + 0) = a + ib = z .$$

(D) Todo número complexo possui inverso aditivo. De fato, se

$w = -a - ib$ , então

$$z + w = (a + (-a)) + i(b + (-b)) = 0 + 0i = 0 .$$

Denotamos  $w = -z$ . Esta propriedade nos permite definir a diferença de números complexos:  $z - w = z + (-w)$ .

O produto de números complexos é definido da seguinte forma:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) .$$

Novamente, observe que se  $z = a + 0i$  e  $w = c + 0i$  são reais, o produto  $z \cdot w$  complexo é o mesmo que o produto de  $z$  e  $w$  como reais. Além disso, se  $z = a + ib$ ,  $w = c + 0i$ , então

$$z \cdot w = (ac - 0b) + i(a0 + bc) = ac + ibc = c(a + ib) ,$$

isto é, é possível multiplicar um número complexo por um número real. Observe também que no produto é satisfeita a propriedade de distribuição, substituindo  $i^2$  por  $-1$ :

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc) .$$

O produto de números complexo satisfaz as seguintes propriedades:

(E) O produto é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned} w \cdot z &= (c + id)(a + ib) = (ca - db) + i(cb + da) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) = z \cdot w . \end{aligned}$$

(F) O produto é associativo. De fato, se  $u = e + if$ ,

$$\begin{aligned} (zw) \cdot u &= [(a + ib)(c + id)] \cdot (e + if) \\ &= [(ac - bd) + i(ad + bc)] \cdot (e + if) \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + i[(ac - bd)f + (ad + bc)e] \\ &= [a(ce - df) - b(cf + de)] + i[a(cf + de) + b(ce - df)] \\ &= (a + ib)[(ce - df) + i(cf + de)] \\ &= (a + ib)[(c + id)(e + if)] = z \cdot (wu) . \end{aligned}$$

(G) Existe um elemento neutro multiplicativo,  $1 = 1 + 0i$ . De fato,

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = (a1 - b0) + i(a0 + b1) = a + ib = z .$$

(H) Se  $z \neq 0$ , existe o inverso multiplicativo de  $z$ . De fato, o número complexo  $w = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$  é tal que

$$\begin{aligned} z \cdot w &= w \cdot z = (a + ib) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + i \left( \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = 1 + 0i = 1. \end{aligned}$$

Denotamos on inverso multiplicativo de  $z$  por  $z^{-1}$ , ou  $\frac{1}{z}$ . Podemos assim definir o quociente de números complexos. Se  $w \neq 0$ ,  $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ .

Por último, a soma e o produto satisfazem a propriedade

(I) Distributividade:  $z(w + u) = zw + zu$ . De fato, se  $u = e + if$ ,

$$\begin{aligned} z \cdot (w + u) &= (a + ib)[(c + e) + i(d + f)] \\ &= [a(c + e) - b(d + f)] + i[a(d + f) + b(c + e)] \\ &= ac - bd + i(ad + bc) + (ae - bf) + i(af + be) \\ &= zw + zu. \end{aligned}$$

O *módulo* de um número complexo  $z = a + ib$  é definido por  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . O *conjugado* de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = a - bi$ . Temos

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 - b^2) + i(-ab + ab) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

que é um número real. Assim, se  $z \neq 0$ , temos  $|z| > 0$ , e

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1,$$

o que implica que  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Isto está de acordo com o exposto na Propriedade (H).

A equação  $z\bar{z} = |z|^2$  ajuda também no cálculo da divisão de números complexos: se  $w \neq 0$ ,

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Como agora o denominador de  $\frac{z}{w}$  é um número real, fica fácil escrever  $\frac{z}{w}$  na forma  $\alpha + i\beta$ .

Além destas propriedades, temos o

**Teorema 1.** *Se  $z$  e  $w$  são números complexos, então:*

- (i)  $z$  é real se e somente se  $z = \bar{z}$ .
- (ii)  $\overline{\bar{z}} = z$ .
- (iii)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ;  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
- (iv)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .
- (v) Se  $w \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- (vi) Se  $n$  é um inteiro positivo,  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ .

**Demonstração:** Seja  $z = a + bi$ . Se  $b = 0$ , é imediato que  $z = \bar{z}$ . Agora,

$$z = \bar{z} \Rightarrow a + ib = a - ib \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0.$$

Isto prova (i). Além disso,

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z,$$

o que prova (ii).

Seja agora  $w = c + di$ . Temos que

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w}.$$

Um cálculo análogo mostra que  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ . Isto prova (iii).

Agora,  $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$ , logo

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Isto prova (iv). Um uso iterado desta propriedade prova (vi).

Por último, se  $w \neq 0$ , temos que

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}; \text{ portanto } \overline{\frac{1}{w}} = \frac{\overline{\bar{w}}}{|w|^2} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\bar{w}}.$$

Daí

$$\frac{\bar{z}}{w} = \overline{\frac{1}{w}} = \bar{z} \cdot \frac{1}{w} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

o que prova (v). □

Como consequência do Teorema 1, temos:

**Corolário 1.** *Se  $P(z)$  é um polinômio com coeficientes reais, então  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ .*

De fato, sejam  $A_0, A_1, \dots, A_n$  números reais e considere o polinômio  $P(z) = A_0 + A_1z + \dots + A_nz^n$ . Então

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{A_0 + A_1z + \dots + A_nz^n} = \overline{A_0} + \overline{A_1z} + \dots + \overline{A_nz^n} \\ &= A_0 + A_1\bar{z} + \dots + A_n\bar{z}^n = P(\bar{z}) .\end{aligned}$$

**Corolário 2.** *Se  $P(z)$  é um polinômio com coeficientes reais e  $P(a+ib) = 0$ , então  $P(a-ib) = 0$ . Isto é, se um número complexo é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado também é raiz deste polinômio.*

Isto é uma consequência imediata do Corolário 1, já que

$$P(a - ib) = \overline{P(a + ib)} = \bar{0} = 0 .$$

O Corolário 1 é facilmente visualizado se o polinômio  $P(z)$  tem grau 2. De fato, seja  $P(z) = az^2 + bz + c$  com  $a, b, c$  reais. Pela fórmula de Bhaskara, sabemos que as raízes de  $P$  são dadas por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Se  $b^2 - 4ac < 0$ , as raízes serão

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} ; z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} ,$$

que são conjugados.

## 1.2 A FORMA TRIGONOMÉTRICA

Como dito anteriormente, no século XIX surgiu a ideia de associar as partes real e imaginária de um número complexo com as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, tornando assim mais fácil a visualização destes números.

Da mesma forma que cada número real pode ser visualizado como um ponto da reta real, cada elemento  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  do conjunto dos números complexos corresponde a um único ponto  $P(a, b)$  do plano cartesiano.

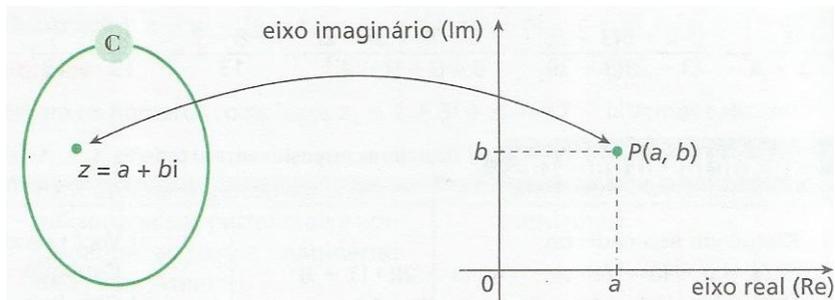


Figura 1 – O plano complexo

A parte real de  $z$  é representada no eixo das abscissas, que passa a ser chamado *eixo real*; e a parte imaginária, no eixo das ordenadas, que é então chamado *eixo imaginário*. O plano cartesiano assim redefinido passa a ser chamado de plano de Argand-Gauss ou *plano complexo*.

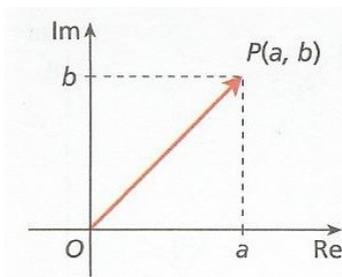


Figura 2 – Representação vetorial

Um número complexo não nulo pode também ser representado como um vetor com origem  $0$  e extremidade no ponto  $P(a, b)$ . Temos que  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  é o comprimento do vetor  $\overrightarrow{OP}$ . A direção do vetor  $\overrightarrow{OP}$  é dada por um ângulo  $\theta$ , formado pelo vetor e pelo semieixo real positivo, medido no sentido antihorário.

Chamando  $\rho = |z|$ , temos que  $\theta$  é um ângulo tal que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho} \text{ e } \operatorname{cos} \theta = \frac{a}{\rho}. \quad (1.1)$$

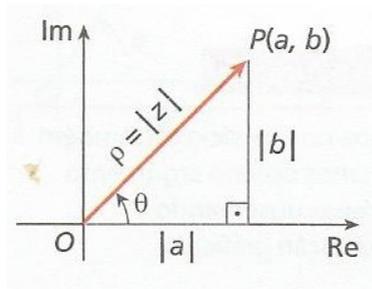


Figura 3 – Módulo e argumento de  $z$

Assim obtemos  $a = \rho \cos \theta$ ,  $b = \rho \sin \theta$  e podemos escrever

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) .$$

Esta é a forma *trigonométrica* ou *polar* de  $z$ . Observe que esta representação não é única, já que se  $\phi = \theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\cos \phi = \cos \theta$  e  $\sin \phi = \sin \theta$ . Qualquer ângulo que satisfaça (1.1) é chamado um *argumento* de  $z$ .

Por exemplo, um número real positivo se escreve da forma  $\rho(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; já um número real negativo é da forma  $\rho(\cos(k\pi) + i \sin(k\pi))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Um número imaginário puro com parte imaginária  $> 0$  é da forma  $\rho(\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$ ; e um número imaginário puro com parte imaginária  $< 0$  é da forma  $\rho(\cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) + i \sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi))$ .

Vejamos como se representa o produto de números complexos na forma trigonométrica. Se  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ , então usando as fórmulas de adição de seno e cosseno,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \rho r [(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + (\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi) i] \\ &= \rho r [(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))] . \end{aligned}$$

Isto é,  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  e  $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ . Isto significa que multiplicar um número complexo  $z$  por outro complexo provoca no ponto  $z$  uma rotação de ângulo  $\phi$ , e faz com que o módulo de  $z$  seja dilatado ou contraído por um fator  $r$ .

Fazendo  $w = z$  no produto acima, obtemos

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)) .$$

Repetindo este procedimento, chegamos à *fórmula de De Moivre*:

$$z^n = \rho^n(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) .$$

Esta identidade é utilizada, entre outras coisas, para encontrar raízes de ordem  $n$  de um número complexo não nulo, porém neste trabalho não exploraremos este tópico.



## 2 O PLANO COMPLEXO ESTENDIDO

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir o plano complexo estendido  $\mathbb{C}^\infty$ , que essencialmente consiste em adicionar a  $\mathbb{C}$  um “ponto no infinito”. Para obtermos uma visualização geométrica deste conjunto, utilizamos a projeção estereográfica.

A projeção estereográfica é uma aplicação que projeta uma esfera sobre um plano. Em princípio, ela é definida na esfera inteira com exceção de um ponto. Posteriormente, definimos a projeção deste ponto que falta com o ponto no infinito do plano complexo estendido.

Escolhemos como plano de projeção um plano que contém o centro da esfera. Este plano será identificado com o plano complexo  $\mathbb{C}$ . Em seguida, tomamos a reta que passa pela origem da esfera e é transversal ao plano. Esta reta corta a esfera em dois pontos. Um deles será chamado o *pólo norte*,  $N$ , e será usado como base da projeção; e o outro ponto é chamado *pólo sul*,  $S$ .

Agora fazemos a seguinte construção: dado um ponto  $v \neq N$  na esfera, tomamos a reta que passa por  $v$  e por  $N$ . Prolongamos esta reta e tomamos o ponto de interseção dela com o plano que corta o equador da esfera (que foi identificado com  $\mathbb{C}$ ). Este ponto será a projeção estereográfica de  $v$  no plano complexo. Por último, identificamos o pólo norte  $N$  com o ponto no infinito de  $\mathbb{C}^\infty$ .

Nas próximas seções explicaremos este procedimento com detalhes.

### 2.1 O PONTO NO INFINITO

Uma sequência em  $\mathbb{C}$  é uma aplicação com domínio  $\mathbb{N}$  e imagem em  $\mathbb{C}$ ; denotamos  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . A sequência *converge para*  $z_0 \in \mathbb{C}$  se para todo número real  $\epsilon > 0$  existe um índice  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k_0$  tem-se  $|z_n - z_0| < \epsilon$ . Isso quer dizer que existem pontos  $z_n$  da sequência tão próximos de  $z_0$  quanto se queira, bastando tomar  $n$  suficientemente grande (Figura 4).

Dizemos que a sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *tende ao infinito* e denotamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  se para todo número real  $A > 0$  existir um número natural  $k_0$  tal que para todo  $n \geq k_0$  temos  $|z_n| > A$  (Figura 5).

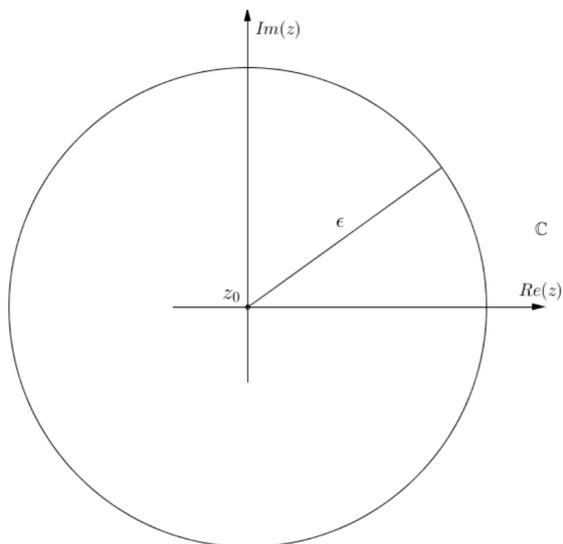


Figura 4 – Círculo de centro  $z_0$  e raio  $\epsilon$

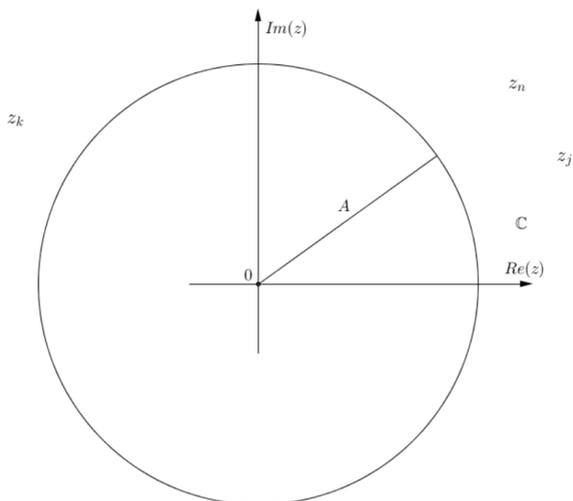


Figura 5 – Círculo de centro  $0$  e raio  $A$

**Teorema 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  se e somente se para todo  $a \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{z_n} = 0$ .

**Demonstração:** Suponha inicialmente  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ . Então dado  $\epsilon >$

0 existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq k_0$  teremos que  $|z_n| > \frac{|a|}{\epsilon}$  e portanto

$\left| \frac{a}{z_n} \right| < \epsilon$ , o que implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{z_n} = 0$ .

Reciprocamente, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{z_n} = 0$ , dado  $A > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq k_0$ , então  $\left| \frac{a}{z_n} \right| < \frac{a}{A}$ . Isto implica  $|z_n| > A$  se  $n \geq k_0$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .  $\square$

Podemos assim considerar  $\infty$  como um *ponto* e desta maneira definir o *plano complexo estendido*:  $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . De acordo com a discussão anterior, é razoável dizermos que

$$a + \infty = \infty, \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

$$a \cdot \infty = \infty, \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Podemos definir a continuidade de funções complexas da maneira como segue. Sejam  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa,  $z_0$  um ponto em  $\mathbb{C}$  e suponha  $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é *contínua em  $z_0$*  se para qualquer sequência  $z_n \rightarrow z_0$  tem-se  $f(z_n) \rightarrow w_0$ . Podemos fazer as adaptações nos casos  $z_0 = \infty$  ou  $w_0 = \infty$  para definir *continuidade no infinito*. Dizemos então que  $f$  é *contínua no infinito* se para toda sequência  $\{z_n\}$  tal que  $\frac{1}{z_n} \rightarrow 0$  (o que, segundo o Teorema 2 significa  $z_n \rightarrow \infty$ ) temos  $f\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow w_0$  (ou, de maneira análoga,  $f(z_n) \rightarrow \frac{1}{w_0}$ ) onde  $w_0 = f(0) \in \mathbb{C}^\infty$ .

## 2.2 A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Passamos agora à definição da projeção estereográfica. Colocaremos coordenadas na construção descrita no início do capítulo.

Em  $\mathbb{R}^3$ , tomamos como esfera a esfera unitária

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

O plano de projeção será o plano  $\{x_3 = 0\}$ . A reta transversal ao plano na origem é, portanto, o eixo  $x_3$ . Desta maneira, o pólo norte é o ponto  $N = (0, 0, 1)$ , e o pólo sul  $S = (0, 0, -1)$ . Identificamos o plano

complexo  $\mathbb{C}$  com o plano  $\{x_3 = 0\}$ . Assim, cada número complexo  $z = x + iy$  se identifica de maneira natural com o ponto  $(x, y, 0)$ .

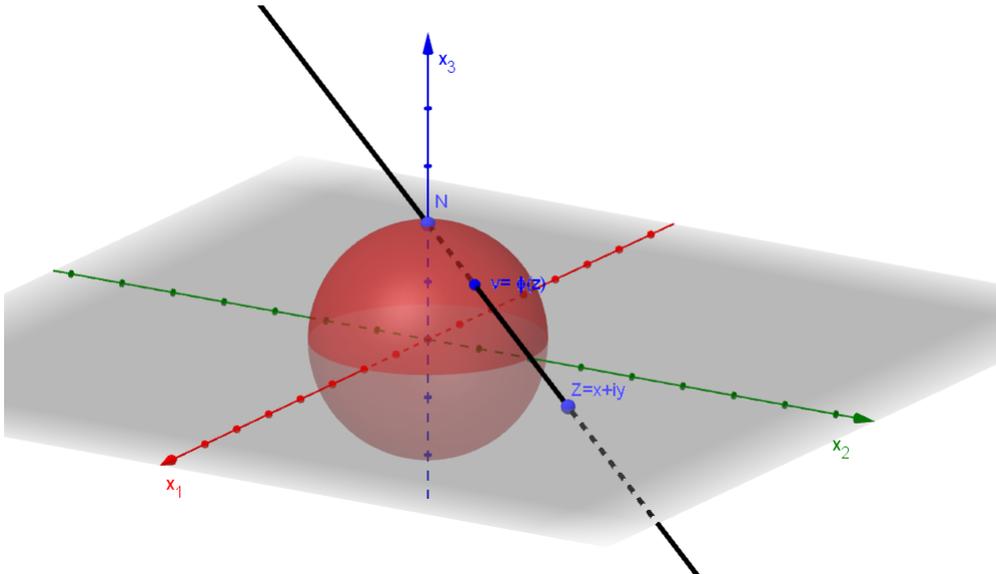


Figura 6 – Projeção Estereográfica

Iniciamos a construção da projeção estereográfica como segue. Para cada  $z \in \mathbb{C}$ , tome a reta em  $\mathbb{R}^3$  que passa por  $N$  e por  $z$ . Esta reta intercepta a esfera em exatamente um ponto  $v \neq N$ ; veja a Figura 6.

Podemos observar que se  $|z| < 1$ , então  $v$  está no hemisfério sul de  $S^2$ ; em particular, a projeção da origem de  $\mathbb{C}$  é o pólo sul  $S$ . Se  $|z| = 1$  temos  $v = z$ ; e se  $|z| > 1$ , então  $v$  está no hemisfério norte. Além disso, se  $|z| \rightarrow \infty$  (ou, de maneira análoga,  $z \rightarrow \infty$ ) temos que  $v \rightarrow N$ .

Vamos determinar o ponto  $v$ . Buscamos a aplicação  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\}$  tal que  $\phi(z) = \phi(x + iy) = (x_1, x_2, x_3) = v$ .

A equação da reta que passa pelos pontos  $N$  e  $z$  é

$$\lambda(t) = N + t(z - N) = tz + (1 - t)N, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos agora o ponto  $v$  de interseção da reta  $\lambda(t)$  com

$S^2$ . Escrevendo  $z = x + iy = (x, y)$ , obtemos

$$v = tz + (1 - t)N = (tx, ty, 0) + (1 - t)(0, 0, 1) = (tx, ty, 1 - t) .$$

Buscamos  $t$  tal que

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 = 1 .$$

Desenvolvendo as contas, obtemos:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$t^2(x^2 + y^2) + t^2 = 2t$$

$$t^2|z|^2 + t^2 = 2t$$

$$t^2(|z|^2 + 1) = 2t$$

$$t^2 = \frac{2t}{|z|^2 + 1}$$

$$t = \frac{2}{|z|^2 + 1} .$$

Neste último passo pudemos dividir ambos os lados por  $t$  pois  $t \neq 0$ . De fato, quando  $t = 0$  estamos no ponto  $N$  de  $S^2$ , que não é imagem de nenhum ponto de  $\mathbb{C}$ . Assim,

$$v = (tx, ty, 1 - t) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) .$$

Podemos então definir

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\}$$

$$\phi(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) . \quad (2.1)$$

Por construção, como as funções coordenadas são contínuas,  $\phi$  é uma bijeção contínua.

Como quando  $z \rightarrow \infty$  temos  $v \rightarrow N$ , podemos estender  $\phi$  a uma função definida em  $\mathbb{C}^\infty$  com imagem  $S^2$  da seguinte forma:

$$\Phi : \mathbb{C}^\infty \rightarrow S^2$$

$$\Phi(z) = \phi(z) \text{ se } z \in \mathbb{C}; \quad \Phi(\infty) = N .$$

A função  $\Phi$  assim definida é contínua.

Agora determinaremos explicitamente as funções inversas de  $\phi$  e  $\Phi$ . Consideraremos a reta que passa pelos pontos  $N$  e  $v \neq N$  pertencentes a  $S^2$  e buscamos o ponto  $z$  de interseção da reta com o plano complexo. Observe que esta é a mesma reta usada anteriormente, porém tomando os pontos  $N$  e  $v$ . Então:

$$\begin{aligned}\lambda(u) &= N + u(v - N) = uv + (1 - u)N \\ &= u(x_1, x_2, x_3) + (1 - u)(0, 0, 1) \\ &= (ux_1, ux_2, ux_3 + 1 - u) \\ &= (ux_1, ux_2, 1 + u(x_3 - 1)) .\end{aligned}$$

Assim, para que  $\lambda(u)$  esteja no plano  $(x_1, x_2, 0)$ , devemos ter

$$u = \frac{1}{1 - x_3} .$$

Note que, como  $v \neq N$  temos  $x_3 \neq 1$  e portanto  $u$  está bem definido. Logo

$$z = \phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} .$$

Assim, para todo  $v = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$ , podemos definir

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} , \\ \phi^{-1}(v) &= \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3} = z .\end{aligned}$$

Essa aplicação inversa é a *projeção estereográfica*, que passaremos a denotar  $\psi = \phi^{-1}$ .

Temos que:

$$|\psi(v)|^2 = \left( \frac{x_1}{1 - x_3} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{1 - x_3} \right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3} .$$

Observe que quando  $x_3 \rightarrow 1$ , temos que  $v \rightarrow N$  e  $\psi(v) \rightarrow \infty$ . Então, de forma natural estendemos  $\psi$  para  $\Psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  dada por

$$\begin{aligned}\Psi(v) &= \psi(v) \text{ se } v \neq N; \\ \Psi(N) &= \infty .\end{aligned}$$

Como anteriormente,  $\Psi$  é contínua.

Uma consequência geométrica da identificação  $\mathbb{C}^\infty \longleftrightarrow S^2$  que usaremos nos próximos capítulos é a seguinte: circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$  são levadas em circunferências de  $S^2$  (e vice-versa). Por exemplo, uma reta de  $\mathbb{C}$  que passa pela origem pode ser vista como uma circunferência de  $\mathbb{C}^\infty$  que passa pelo infinito. A imagem desta reta pela inversa da projeção estereográfica é um meridiano de  $S^2$ .

EXEMPLO: Vejamos a imagem da reta  $R = \{z = x + iy \mid y = x\}$  pela aplicação inversa da projeção estereográfica. Tomamos a parametrização  $R(t) = t + it$ ;  $t \in \mathbb{R}$ . Então  $|z|^2 = 2t^2$  para todo  $z$  em  $R$ , e substituindo na equação (2.1) obtemos

$$\Phi(R) = \phi(t) = \left( \frac{2t}{2t^2 + 1}, \frac{2t}{2t^2 + 1}, \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} \right) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) .$$

Observe que  $\Phi(0) = (0, 0, -1) = S$ , isto é, a imagem da origem é o polo sul. Os pontos de interseção de  $\phi(R)$  com a esfera são aqueles em que  $\frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} = 0$ , isto é,  $2t^2 - 1 = 0$ , o que nos dá  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Desta forma obtemos

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ e} \\ \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) . \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t}{2t^2 + 1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} = 1 .$$

Portanto, como esperado,  $\Phi(\infty) = (0, 0, 1) = N$ .

Queremos mostrar agora que  $\Phi(R)$  é um meridiano de  $S^2$ . Em coordenadas esféricas, podemos parametrizar  $S^2$  como segue:

$$x_1 = \text{sen } u \cos v ; \quad x_2 = \text{sen } u \text{ sen } v ; \quad x_3 = \cos u$$

onde  $u$  é o ângulo entre um raio e o semieixo  $x_3$  positivo, e  $v$  é o ângulo entre um raio e o semieixo  $x_1$  positivo. A inclinação da reta  $R$  corresponde exatamente à tangente do ângulo  $v$ ; portanto temos  $v = \frac{\pi}{4}$ . Portanto só nos resta verificar que  $\Phi(R)$  é o meridiano  $M$  dado em coordenadas esféricas por  $v = \frac{\pi}{4}$ . Queremos então mostrar que,

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= \left( \frac{2t}{2t^2 + 1}, \frac{2t}{2t^2 + 1}, \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{2}}, \cos u \right).\end{aligned}$$

De fato, se  $\cos u = \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1}$  então

$$\operatorname{sen} u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - \left( \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} \right)^2} = \sqrt{\frac{8t^2}{(2t^2 + 1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}t}{2t^2 + 1},$$

e portanto

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{2}} = \frac{2t}{2t^2 + 1}.$$

Concluimos assim que  $\Phi(R) = M$  e, como consequência, a projeção estereográfica do meridiano  $M$  é a reta  $R$ :  $\Psi(M) = R$ . Veja a Figura 7 abaixo.

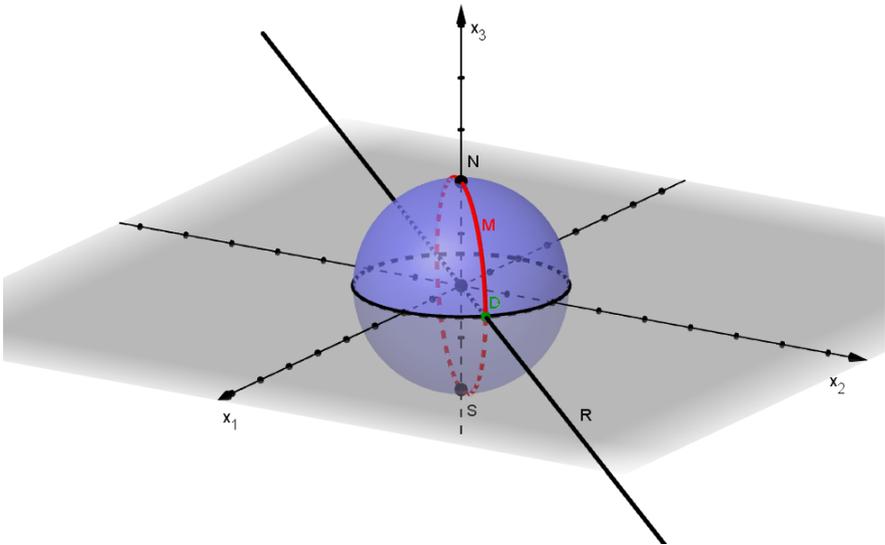


Figura 7 – Projeção Estereográfica da reta  $R = \{z = t + it\}$

### 3 A INVERSÃO

O uso da palavra “inversão” neste texto significa o nome que se dá à aplicação que consiste em tomar o inverso multiplicativo de um número complexo não nulo. Apesar de talvez gerar alguma confusão com o procedimento de tomar a inversa de uma função complexa, utilizaremos a palavra inversão pois ela aparece com este significado no contexto de transformações de Möbius, como veremos mais adiante.

Seja  $z$  um número complexo não nulo. Definimos a *inversão* como sendo a aplicação dada por  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Então, se  $z = x + iy$ ,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x + iy)} \cdot \frac{(x - iy)}{(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Nosso objetivo é visualizar geometricamente esta aplicação. Considere os pontos (Figura 8)

$$\begin{aligned} z_1 = 1 + i &= (1, 1), & z_3 = -1 - i &= (-1, -1), \\ z_2 = -1 + i &= (-1, 1), & z_4 = 1 - i &= (1, -1). \end{aligned}$$

Os inversos dos  $z_i$  são os números abaixo (Figura 9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, & \frac{1}{z_3} &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \\ \frac{1}{z_2} &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, & \frac{1}{z_4} &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

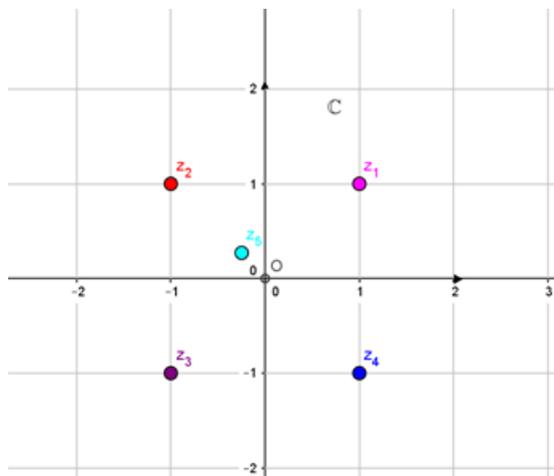


Figura 8 – Os pontos  $z_i$  no plano complexo

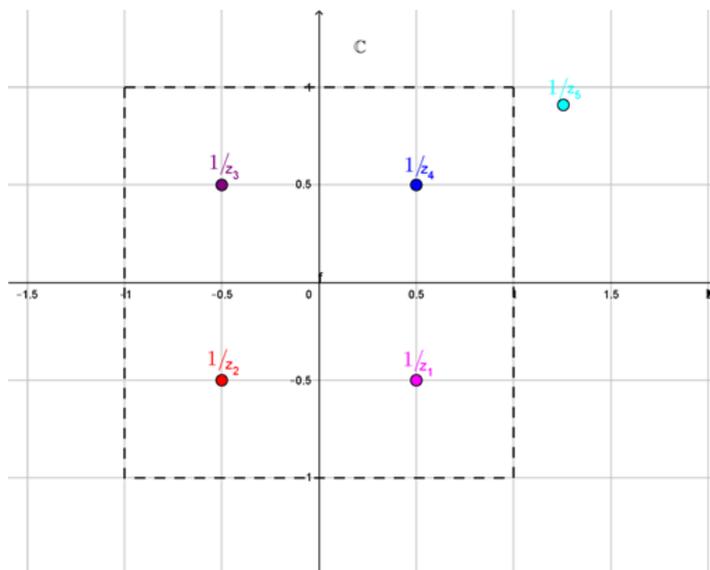


Figura 9 – Os pontos  $\frac{1}{z_i}$  no plano complexo

Podemos começar a fazer algumas análises. Para  $z$  próximo de 0, ou seja, para  $|z|$  pequeno, temos  $\frac{1}{|z|}$  grande:

$$z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} \rightarrow \infty .$$

Analogamente, para  $|z|$  grande, temos  $\frac{1}{|z|}$  pequeno:

$$z \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z} \rightarrow 0 .$$

Estas afirmações estão garantidas pelo Teorema 2.

Consideremos o quadrado  $L$  cujos vértices são os pontos  $z_i$ . Vamos encontrar a imagem de cada um dos lados. Começemos pelo lado que une os vértices  $z_4 = 1 - i$  e  $z_1 = 1 + i$ ; chamemos este lado  $L_1$ . Um ponto de  $L_1$  é da forma  $z = 1 + ti$  com  $t \in [-1, 1]$ . Desta forma, temos:

$$z = 1 + ti \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(1 + ti)} \cdot \frac{(1 - ti)}{(1 - ti)} = \frac{1 - ti}{1 + t^2} .$$

Então

$$\tilde{L}_1(t) = f(L_1(t)) = \frac{1}{1 + t^2} + i \frac{-t}{1 + t^2} = x(t) + iy(t) . \quad (3.1)$$

Vamos mostrar que, para todo  $t \in [-1, 1]$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  satisfazem a equação da circunferência de centro  $(\frac{1}{2}, 0)$  e raio  $r = \frac{1}{2}$ . Isto é, queremos mostrar que

$$\left(x(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + y(t)^2 = \frac{1}{4} .$$

Da equação 3.1 obtemos  $y = -tx$ . Além disso,

$$x = \frac{1}{1 + t^2} \Rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{x}$$

$$t^2 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x} .$$

Observe que, para todo  $t \in [-1, 1]$ ,  $x(t) > 0$  e  $\frac{1}{2} \leq x(t) \leq 1$ . Logo,

$\frac{1-x}{x} \geq 0$ . Assim obtemos

$$t = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Substituindo em  $y = -tx$ :

$$y = x \left( \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right)$$

$$y^2 = x^2 \left( \frac{1-x}{x} \right) = x(1-x)$$

$$y^2 = x - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - x = 0.$$

Assim,

$$y^2 + \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Considere o ponto  $w_1 = 1$ . Como  $w_1 \in L_1$  e  $\frac{1}{w_1} = 1 \in \tilde{L}_1$ , vemos que a imagem de  $L_1$  pela transformação  $\frac{1}{z}$  é o hemisfério direito da circunferência  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ . Observe que  $\tilde{L}_1$  é percorrido no sentido horário quando  $L_1$  é percorrido no sentido  $z_4 \rightarrow z_1$ .

Repetimos este argumento para os demais lados. Se  $L_2$  é o lado que liga  $z_1 = 1+i$  a  $z_2 = -1+i$ , temos que um ponto de  $L_2$  é da forma  $z = -t+i$  com  $t \in [-1, 1]$ . Assim

$$\tilde{L}_2(t) = f(L_2(t)) = \frac{-t}{1+t^2} - \frac{i}{1+t^2}.$$

Desta vez obtemos  $x = ty$ . Ademais

$$y = \frac{-t}{1+t^2} \Rightarrow 1+t^2 = \frac{-1}{y}$$

$$t^2 = -1 - \frac{1}{y} = \frac{-1-y}{y}.$$

Observe que  $y(t) < 0$  para todo  $t$ . Além disso,  $-1 \leq y(t) \leq -\frac{1}{2}$ ;

portanto  $\frac{-1-y}{y} \geq 0$ . Logo

$$t = \pm \sqrt{\frac{-1-y}{y}}.$$

Substituindo em  $x = ty$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x &= y \left( \pm \sqrt{\frac{-1-y}{y}} \right) \\ x^2 &= y^2 \left( \frac{-1-y}{y} \right) = y(-1-y) \\ x^2 + y^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

e portanto

$$x^2 + \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Observe agora que o ponto  $w_2 = i$  está em  $L_2$  e assim  $\frac{1}{w_2} = -i \in \tilde{L}_2$ . Desta forma, concluímos que a imagem de  $L_2$  pela transformação  $\frac{1}{z}$  é o hemisfério inferior da circunferência  $x^2 + \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$ . Como anteriormente,  $\tilde{L}_2$  é percorrido no sentido horário quando  $L_2$  é percorrido no sentido  $z_1 \rightarrow z_2$ .

Se  $L_3$  é o lado ligado pelos vértices  $z_2 = -1 + i$  e  $z_3 = -1 - i$ , repetindo o procedimento anterior encontramos que a imagem  $\tilde{L}_3$  é o hemisfério esquerdo da circunferência

$$\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Já se  $L_4$  é o lado ligado pelos vértices  $z_3 = -1 - i$  e  $z_4 = 1 - i$ , a imagem  $\tilde{L}_4$  é o hemisfério superior da circunferência

$$x^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ambos  $\tilde{L}_3$  e  $\tilde{L}_4$  são percorridos no sentido horário quando  $L_3$  é percorrido no sentido  $z_2 \rightarrow z_3$  e  $L_4$  é percorrido no sentido  $z_3 \rightarrow z_4$ .

Assim, quando a fronteira do quadrado  $L$  é percorrida no sentido anti-horário, a imagem da fronteira de  $L$  (ou, se preferir, a fronteira da

imagem  $\tilde{L}$  de  $L$ ) é percorrida no sentido horário. Temos assim uma troca de orientação nas fronteiras, o que justifica o nome *inversão*. Isso faz com que os pontos do interior de  $L$  sejam enviados para *fora*, e pontos do exterior de  $L$  sejam trazidos para *dentro*; acompanhe o ponto  $z_5$  na figura 8 e o ponto  $\frac{1}{z_5}$  na figura 9, e as figuras 10 e 11. De qualquer forma, pontos à esquerda da fronteira de  $L$  permanecem à esquerda da fronteira de  $\tilde{L}$ , e pontos à direita da fronteira de  $L$  permanecem à direita da fronteira de  $\tilde{L}$ .

Naturalmente, a inversão  $f(z) = \frac{1}{z}$  pode, e deve, ser vista como uma bijeção de  $\mathbb{C}^\infty$  nele próprio, bastando definir:

$$\text{se } z \neq 0 \text{ e } z \neq \infty \text{ então } f(z) = \frac{1}{z} ;$$

$$f(0) = \infty ; f(\infty) = 0 .$$

A inversão é um caso especial de uma família de transformações que estudaremos com mais detalhes no próximo capítulo.

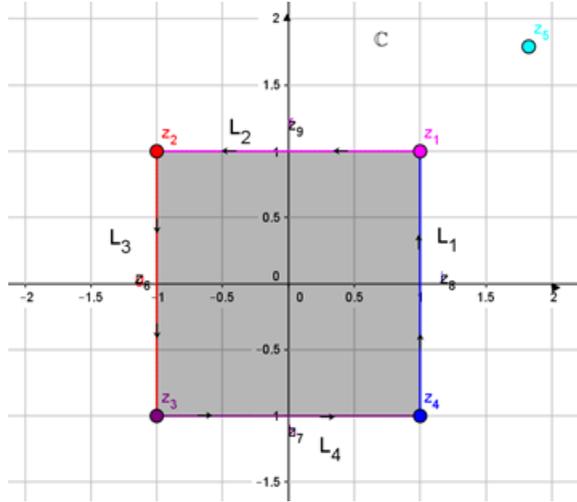


Figura 10 – O quadrado  $L$

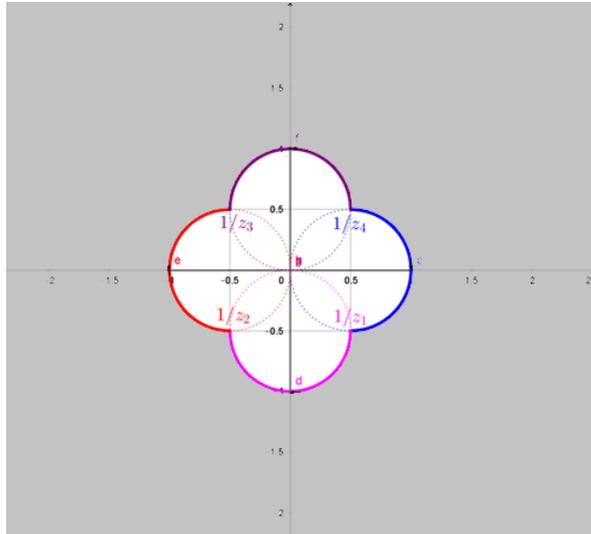


Figura 11 – Imagem de  $L$



## 4 TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

As chamadas transformações de Möbius são uma classe especial de funções de uma variável complexa, que possuem muitas propriedades geométricas.

Uma *transformação de Möbius* é uma função racional  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

A condição  $ad - bc = 0$  garante, em particular, que uma transformação de Möbius não seja constante. O domínio de  $T$  é  $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ . Observe que multiplicar os coeficientes de  $T$  pela mesma constante não nula não altera a transformação.

Uma maneira útil de trabalhar com transformações de Möbius é utilizando matrizes. Seja

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Desta forma, uma transformação de Möbius está associada de maneira única a matriz  $2 \times 2$  com determinante não nulo. Se  $[z]$  denota o vetor coluna  $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ , então  $T(z) = [T][z]$ .

Uma característica importante de transformações de Möbius é que a composição produz uma transformação de Möbius. De fato, seja

$$\tilde{T}(z) = \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}. \text{ Então}$$

$$\begin{aligned} T \circ \tilde{T}(z) &= \frac{a \left( \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} \right) + b}{c \left( \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} \right) + d} = \frac{a(\tilde{a}z + \tilde{b}) + b(\tilde{c}z + \tilde{d})}{c(\tilde{a}z + \tilde{b}) + d(\tilde{c}z + \tilde{d})} \\ &= \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})} = \frac{Az + B}{Cz + D}. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} AD - BC &= (a\tilde{a} + b\tilde{c})(c\tilde{b} + d\tilde{d}) - (a\tilde{b} + b\tilde{d})(c\tilde{a} + d\tilde{c}) \\ &= a\tilde{a}c\tilde{b} + a\tilde{a}d\tilde{d} + c\tilde{c}b\tilde{b} + b\tilde{c}d\tilde{d} - (a\tilde{a}c\tilde{b} + a\tilde{b}d\tilde{c} + a\tilde{b}d\tilde{c} + b\tilde{d}c\tilde{a} + b\tilde{d}d\tilde{c}) \end{aligned}$$

$$= a\tilde{a}d\tilde{d} + b\tilde{c}\tilde{c} - (a\tilde{b}d\tilde{c} + b\tilde{d}\tilde{c}a) = (ad - bc)(\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}) \neq 0.$$

Isto mostra que  $T \circ \tilde{T}$  é uma transformação de Möbius.

Usando a representação de  $T$  como uma matriz, a conta acima fica bem mais simples. Sejam

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } [\tilde{T}] = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}.$$

Então

$$[T \circ \tilde{T}] = [T] \cdot [\tilde{T}] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tilde{a} + b\tilde{c} & a\tilde{b} + b\tilde{d} \\ \tilde{a}c + d\tilde{c} & \tilde{c}b + d\tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

A primeira propriedade de uma transformação de Möbius é que ela é injetora em seu domínio. De fato, se  $T(z) = T(z')$ , então

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az' + b}{cz' + d} &\Rightarrow (az + b)(cz' + d) = (az' + b)(cz + d) \\ &\Rightarrow aczz' + adz + bcz' + bd = aczz' + adz + bcz + bd \\ &\Rightarrow (ad - bc)z = (ad - bc)z' \Rightarrow z = z'. \end{aligned}$$

A segunda propriedade é que  $T$  é invertível, e sua inversa é dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Novamente, encontramos a transformação  $T^{-1}$  usando as matrizes associadas. Temos

$$[T]^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Multiplicando os coeficientes de  $[T]^{-1}$  pelo número real não nulo  $ad - bc = \det[T]^{-1}$ , obtemos

$$[T^{-1}] = \det[T]^{-1} \cdot [T]^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Como  $\det[T]^{-1} = ad - bc \neq 0$  segue que  $T^{-1}$  é uma transformação de

Möbius cujo domínio é  $\mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$ . Além disso, em  $\mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\}$  tem-se

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1}(z) &= T(T^{-1}(z)) = \frac{a \left( \frac{dz-b}{-cz+a} \right) + b}{c \left( \frac{dz-b}{-cz+a} \right) + d} = \frac{a(dz-b) + b(-cz+a)}{c(dz-b) + d(-cz+a)} \\ &= \frac{(ad-bc)z}{ad-bc} = z. \end{aligned}$$

Consideremos agora os quatro tipos de aplicações abaixo:

(i) translações:  $T(z) = z + b$  onde  $b \in \mathbb{C}$ .

A matriz associada a uma translação é da forma

$$[T_{\text{trans}}] = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) rotações:  $T(z) = az$  onde  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$ .

A matriz associada a uma rotação é da forma

$$[T_{\text{rot}}] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) homotetia:  $T(z) = \rho z$  onde  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\rho > 0$ .

A matriz associada a uma homotetia é da forma

$$[T_{\text{homot}}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) a inversão  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

A matriz associada à inversão é da forma

$$[T_{\text{inv}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz da inversão é o único negativo.

**Teorema 3.** *Uma transformação de Möbius é composição de translações, rotações, homotetias e da inversão.*

**Demonstração:** Seja  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Se  $c = 0$  (o que implica  $d \neq 0$ ), então  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Temos

$T = S \circ H$  onde  $S(z) = z + \frac{b}{d}$  é uma translação e  $H(z) = \frac{a}{d}z$  é a composição de uma homotetia e uma rotação.

Se  $c \neq 0$ , usamos um truque algébrico para reescrever  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{(az + b)c - a(cz + d)}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{\left(\frac{bc-ad}{c}\right)}{cz + d} + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Fica claro que  $T$  é uma composição das transformações (i), (ii), (iii), e (iv) acima.  $\square$

Pelo Teorema 2, temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(a + b/z)}{z(c + d/z)} = \frac{a}{c} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} T^{-1}(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dz - b}{-cz + a} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(d - b/z)}{z(-c + a/z)} = \frac{-d}{c}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty \text{ e } \lim_{z \rightarrow a/c} T^{-1}(z) = \infty.$$

Somos então levados a considerar, de forma natural,  $T$  como uma transformação do plano estendido  $\mathbb{C}^\infty$  nele próprio:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{C}^\infty \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ se } z \neq \frac{-d}{c}, \infty; \\ T(-d/c) &= \infty; T(\infty) = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Após esta definição obtemos que  $T$  é uma bijeção contínua de  $\mathbb{C}^\infty$  nele próprio. Esta construção nos permite interpretar geometricamente a ação de uma transformação de Möbius.

Dizemos que  $z_0$  é um *ponto fixo* de  $T$  se  $T(z_0) = z_0$ . Para encontrar os possíveis pontos fixos de  $T$ , basta encontrar as soluções da equação

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (4.1)$$

A igualdade à direita possui infinitas soluções se tivermos  $c = 0$ ,  $b = 0$

e  $a = d$ ; porém, neste caso,  $T = \text{id}$ . Caso contrário, a equação (4.1) possui no máximo duas soluções. Desta maneira, uma transformação de Möbius que não seja a identidade possui no máximo dois pontos fixos. Para encontrá-los, estudamos (4.1).

Se  $c \neq 0$ , usando a fórmula de Bhaskara encontramos as raízes

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4bc}}{2c}.$$

Por exemplo, no caso da inversão  $T(z) = \frac{1}{z}$  temos  $a = d = 0$  e  $b = c = 1$ ; substituindo na fórmula acima obtemos

$$z = \frac{\pm\sqrt{4}}{2} = \pm 1,$$

e estes são os pontos fixos.

Se  $c = 0$ , temos  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  e vemos que um dos pontos fixos é  $\infty$ . A equação 4.1 torna-se a equação linear  $(d - a)z - b = 0$ . Se  $a = d$  e  $b = 0$ , temos  $T = \text{id}$ , caso já visto anteriormente. Se  $a = d$  e  $b \neq 0$ , temos uma translação  $T(z) = z + \frac{b}{d}$  cujo único ponto fixo é  $\infty$ . Se  $a \neq d$ , temos dois pontos fixos:  $z = \frac{b}{d - a}$  e  $\infty$ . Em particular, se  $b = 0$ , temos  $T(z) = \frac{a}{d}z$ , uma combinação de rotação e homotetia, cujos pontos fixos são  $0$  e  $\infty$ .

Dessa discussão, obtemos a seguinte

**Proposição 1.** *Uma transformação de Möbius está completamente determinada por seus valores em três pontos distintos de  $\mathbb{C}^\infty$ .*

**Demonstração:** De fato, sejam  $T$  e  $\tilde{T}$  são duas transformações de Möbius e  $z_1, z_2, z_3$  pontos distintos de  $\mathbb{C}^\infty$ . Suponha que  $T(z_i) = \tilde{T}(z_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ . Então,  $T^{-1} \circ \tilde{T}(z_i) = z_i$ , isto é  $T^{-1} \circ \tilde{T}$  tem três pontos fixos. Pelo observado acima, devemos ter  $T^{-1} \circ \tilde{T} = \text{id}$ , ou seja,  $T = \tilde{T}$ .  $\square$

Por outro lado, temos a seguinte

**Proposição 2.** *Dados  $z_1, z_2$  e  $z_3$  pontos distintos de  $\mathbb{C}^\infty$  e outros três pontos distintos  $w_1, w_2$  e  $w_3$ , existe uma única transformação de Möbius tal que  $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$  e  $T(z_3) = w_3$ .*

**Demonstração:** Defina  $S : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  por

$$S(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} \text{ se } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$S(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \text{ se } z_1 = \infty$$

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \text{ se } z_2 = \infty$$

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ se } z_3 = \infty .$$

Desta maneira  $S$  satisfaz  $S(z_1) = 0$ ,  $S(z_2) = 1$  e  $S(z_3) = \infty$  e, pela Proposição 1, esta é a única transformação de Möbius com esta propriedade.

Repetimos o argumento para os pontos  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ : existe uma única transformação de Möbius  $\tilde{S}$  tal que  $\tilde{S}(w_1) = 0$ ,  $\tilde{S}(w_2) = 1$  e  $\tilde{S}(w_3) = \infty$ . Portanto, a composta  $T = \tilde{S}^{-1} \circ S$  é tal que

$$T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2, T(z_3) = w_3 .$$

□

Para finalizar, observamos que no plano complexo estendido  $\mathbb{C}^\infty$ , uma reta nada mais é do que uma circunferência que passa por  $\infty$ . Este fato é visualizado utilizando a projeção estereográfica. De toda esta discussão, chegamos ao

**Teorema 4.** *Uma transformação de Möbius leva circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$  em circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$ .*

**Demonstração:** Considerando a situação em  $\mathbb{C}$ , este teorema nos diz que se  $C$  é uma reta ou uma circunferência e  $T$  uma transformação de Möbius, então  $T(C)$  também é uma reta ou uma circunferência. De imediato podemos observar que translações, rotações e homotetias transformam retas em retas e circunferências em circunferências. A seguir faremos um estudo detalhado.

Sejam  $\alpha, \gamma$  número reais e  $b = b_1 + ib_2$  um número complexo tais que  $b\bar{b} > \alpha\gamma$  (isto é,  $b_1^2 + b_2^2 > \alpha\gamma$ ). Considere a equação

$$\alpha z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + \gamma = 0. \tag{4.2}$$

Escrevendo  $z = x + iy$ , obtemos:

$$\alpha(x^2 + y^2) + b(x + iy) + \bar{b}(x - iy) + \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha(x^2 + y^2) + (b_1 + ib_2)(x + iy) + (b_1 - ib_2)(x - iy) + \gamma &= 0 \\ \alpha(x^2 + y^2) + b_1x + ib_1y + ib_2x - b_2y + b_1x - ib_1y - ib_2x - b_2y + \gamma &= 0 \\ \alpha(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + \gamma &= 0 . \end{aligned}$$

Se  $\alpha = 0$ , obtemos a equação de uma reta.

Se  $\alpha \neq 0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + 2b_1x + \alpha y^2 - 2b_2y + \gamma &= 0 \\ \alpha \left( x^2 + 2\frac{b_1}{\alpha}x + \frac{b_1^2}{\alpha^2} \right) + \alpha \left( y^2 - 2\frac{b_2}{\alpha}y + \frac{b_2^2}{\alpha^2} \right) + \gamma - \frac{b_1^2}{\alpha} - \frac{b_2^2}{\alpha} &= 0 \\ \alpha \left( x + \frac{b_1}{\alpha} \right)^2 + \alpha \left( y - \frac{b_2}{\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - (b_1^2 + b_2^2)}{\alpha} &= 0 \\ \left( x + \frac{b_1}{\alpha} \right)^2 + \left( y - \frac{b_2}{\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - (b_1^2 + b_2^2)}{\alpha^2} &= 0 \\ \left( x + \frac{b_1}{\alpha} \right)^2 + \left( y - \frac{b_2}{\alpha} \right)^2 = \frac{(b_1^2 + b_2^2) - \alpha\gamma}{\alpha^2} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pela condição  $\bar{b}b > \alpha\gamma$ , a equação (4.3) corresponde a uma circunferência em  $\mathbb{C}$ .

Portanto a família de retas e circunferências de  $\mathbb{C}$  é o conjunto de todas as equações do tipo (4.2).

Como observado anteriormente, translações, homotetias e rotações transformam retas em retas e circunferências em circunferências. Com a inversão isto não ocorre; porém, substituindo  $z$  por  $\frac{1}{z}$  (lembre que em princípio estamos em  $\mathbb{C}$ , logo  $z \neq 0$ ) na equação (4.2), obtemos

$$\alpha \frac{1}{z} \frac{1}{\bar{z}} + b \frac{1}{z} + \bar{b} \frac{1}{\bar{z}} + \gamma = 0 ,$$

e, multiplicando tudo por  $z\bar{z}$ ,

$$\alpha + b\bar{z} + \bar{b}z + \gamma z\bar{z} = 0 ,$$

que é uma equação do tipo (4.2).

Como, pelo Teorema 3,  $T$  é uma composição de translações, homotetias, rotações e a inversão, concluímos que uma transformação de Möbius envia circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$  em circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$ .  $\square$

Como consequência do Teorema 4, qualquer semiplano ou disco em  $\mathbb{C}$  pode ser levado em qualquer outro semiplano ou disco de  $\mathbb{C}$  através de uma transformação de Möbius, bastando apenas escolher os pontos adequados na fronteira destes conjuntos.

EXEMPLO: Vamos buscar a transformação de Möbius que leva o semiplano  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  no disco  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  (Figuras 12 e 13). Escolhemos  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$  e  $w_1 = -i$ ,  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = i$ . Seguimos o procedimento indicado na Proposição 2. Primeiro encontramos a transformação  $S$ :

$$S(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} = \frac{(0 - 1)(z - (-1))}{(0 - (-1))(z - 1)} = \frac{z + 1}{1 - z}.$$

Assim temos  $S(-1) = 0$ ,  $S(0) = 1$ ,  $S(1) = \infty$ , e a matriz associada a  $S$  é  $[S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Agora encontramos  $\tilde{S}$  utilizando os pontos  $w_1, w_2, w_3$ :

$$\tilde{S}(w) = \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)} = \frac{(1 - i)(w + i)}{(1 + i)(w - i)} = \frac{(1 - i)w + (1 + i)}{(1 + i)w + (1 - i)}.$$

Temos assim  $\tilde{S}(-i) = 0$ ,  $\tilde{S}(1) = 1$ ,  $\tilde{S}(i) = \infty$ . Porém pela Proposição 2, precisamos da inversa  $\tilde{S}^{-1}$ ; chamando  $\tilde{a} = 1 - i$ ,  $\tilde{b} = 1 + i$ ,  $\tilde{c} = 1 + i$  e  $\tilde{d} = 1 - i$ , obtemos

$$\tilde{S}^{-1} = \frac{\tilde{d}z - \tilde{b}}{-\tilde{c}z + \tilde{a}} = \frac{(1 - i)z - (1 + i)}{-(1 + i)z + (1 - i)},$$

cujas matriz associada é  $[\tilde{S}^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 - i & -(1 + i) \\ -(1 + i) & 1 - i \end{pmatrix}$ .

Finalmente, obtemos a composição  $\tilde{S}^{-1} \circ S$  fazendo o produto das matrizes  $[\tilde{S}^{-1}]$  e  $[S]$ :

$$\begin{aligned} [\tilde{S}^{-1}] \cdot [S] &= \begin{pmatrix} 1 - i & -(1 + i) \\ -(1 + i) & 1 - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - i + (1 + i) & 1 - i - (1 + i) \\ -(1 + i) - (1 - i) & -(1 + i) + (1 - i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ -2 & -2i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$T(z) = \frac{2z - 2i}{-2z - 2i} = \frac{i - z}{i + z}.$$

De fato, temos:

$$T(-1) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-1} = -i;$$

$$T(0) = \frac{i}{i} = 1;$$

$$T(1) = \frac{i-1}{i+1} = \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{-i+1}{-i+1} = i.$$

A escolha dos pontos  $z_i$  não foi feita ao acaso. Tomamos os pontos nessa ordem específica para que, quando a fronteira fosse percorrida no sentido  $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ ,  $H$  ficasse à esquerda de sua fronteira. Analogamente, tomamos  $w_i$  de forma que ao percorrermos a fronteira do disco no sentido  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ ,  $\mathbb{D}$  ficasse à esquerda. Por exemplo, se houvésssemos tomado  $w_1 = i$ ,  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = -i$ , e percorrêssemos a fronteira do disco no sentido  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ , a imagem de  $H$  seria o exterior do disco  $\mathbb{D}$ .

Observamos também que poderíamos ter tomado quaisquer outros três pontos distintos da fronteira de  $H$  e  $\mathbb{D}$  que teríamos encontrado a mesma transformação de Möbius (já que esta é única, pela Proposição 2). O que ocorre é que os coeficientes de  $T$  estariam todos multiplicados pela mesma constante  $\lambda \neq 0$ . Por exemplo, a transformação

$$\tilde{T}(z) = \frac{iz+1}{-iz+1}$$

também satisfaz  $\tilde{T}(-1) = -i$ ,  $\tilde{T}(0) = 1$ ,  $\tilde{T}(1) = i$ . E de fato temos  $\tilde{T} = T$ , basta observar que os coeficientes de  $\tilde{T}$  são os coeficientes de  $T$  multiplicados por  $-i$ .

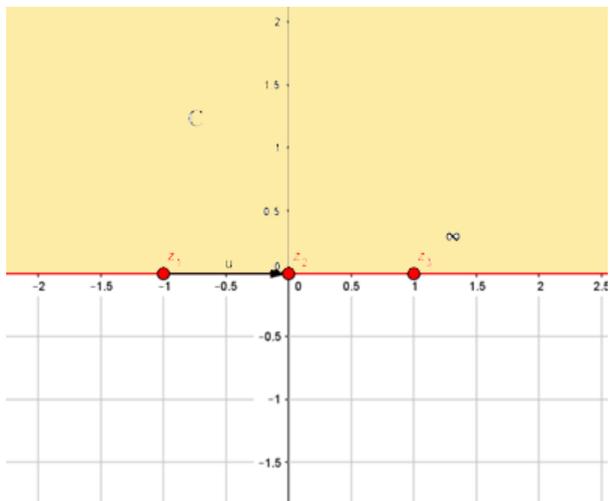


Figura 12 – O semiplano  $H$

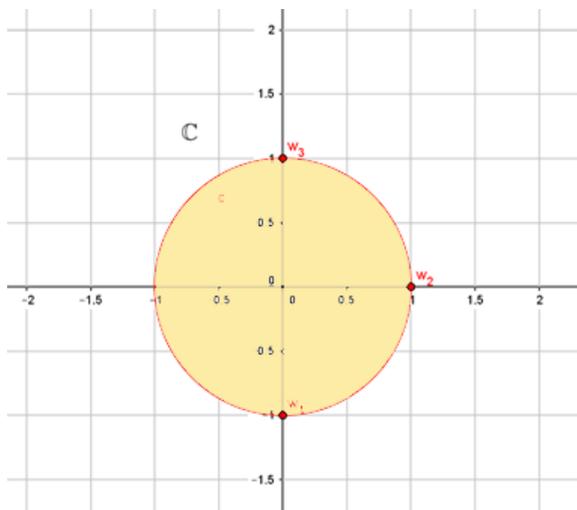


Figura 13 – O disco  $\mathbb{D}$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos um estudo sobre números complexos e interpretação geométricas de uma classe especial de funções complexas.

No Capítulo 1, demos a definição de números complexos, como visualizá-los como pontos no plano, sua forma polar e algumas propriedades.

No Capítulo 2, definimos o plano complexo estendido  $\mathbb{C}^\infty$ , que consiste em adicionar o “ponto no infinito” ao plano complexo  $\mathbb{C}$ . Definimos também a projeção estereográfica, que relaciona o plano complexo estendido com a esfera  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$ .

No Capítulo 3 trabalhamos com a função inversão. Embora esta função não esteja definida em  $z = 0$ , com pequenas adaptações podemos defini-la como uma bijeção de  $\mathbb{C}^\infty$  nele próprio. Fizemos a visualização geométrica desta função.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos transformações de Möbius, que são uma classe especial de funções que preservam circunferências de  $\mathbb{C}^\infty$ . Vimos como agem em  $\mathbb{C}^\infty$ , e visualizamos geometricamente.

Boa parte do conteúdo exposto neste texto pode ser trabalhado em sala de aula mediante um conhecimento prévio de resultados simples de trigonometria e geometria analítica (ou inclusive como aplicação destes conteúdos). Ao término deste trabalho vemos que é possível visualizar o conjunto dos números complexos – que em princípio “nasce” de um contexto algébrico, a busca de raízes de polinômios – de maneira geométrica como pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ . Isto facilita o aprendizado de propriedades dos números complexos e a visualização de funções complexas.



## REFERÊNCIAS

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. [S.l.]: IMPA, 2006. (Coleção Matemática Universitária).

WAGNER, M. P. do C. A. C. M. E. **Trigonometria e Números Complexos**. [S.l.]: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).