



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Bruna Caveion

**Alguns resultados sobre o grupo de automorfismos em shifts de Markov sobre
alfabeto enumerável**

Florianópolis
2019

Bruna Caveion

Alguns resultados sobre o grupo de automorfismos em shifts de Markov sobre alfabeto enumerável

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática Pura.
Orientador: Prof. Marcelo Sobottka, Dr.

Florianópolis
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Caveion, Bruna

Alguns resultados sobre o grupo de automorfismos em
shifts de Markov sobre alfabeto enumerável / Bruna Caveion
; orientador, Marcelo Sobottka, 2019.

55 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. grupo de
automorfismos. 3. shift de Markov. 4. sistemas dinâmicos
simbólicos . I. Sobottka, Marcelo . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Bruna Caveion

Alguns resultados sobre o grupo de automorfismos em shifts de Markov sobre alfabeto enumerável

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Vladimir Pestov, Dr.
Ottawa University

Prof. Ali Messaoudi, Dr.
Universidade Estadual Paulista

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura.

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Orientador

Florianópolis, 5 de Dezembro de 2019.

Este trabalho é dedicado a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram na minha formação como mestre, e principalmente meus amigos que foram meu pilar durante os últimos anos. Sem vocês eu teria desmoronado!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a todos que estiveram presentes de alguma forma durante a minha jornada. Agradeço aos professores, Marcelo Sobottka por me orientar, Vladimir Pestov e Ali Messaoudi por aceitarem fazer parte da minha banca, e por fim mas não menos importante, agradeço a CAPES pelo financiamento.

RESUMO

Palavras-chave: grupo de automorfismos, sistemas dinâmicos simbólicos shift de Markov

Um shift de Markov de estado enumerável é um espaço shift para o qual existe um grafo dirigido com uma quantidade enumerável de estados de forma que há uma relação biunívoca entre as seqüências do shift e as caminhadas sobre o grafo. O objetivo dessa dissertação é caracterizar o grupo de automorfismos de um shifts de Markov e estado enumerável, isto é, caracterizar o grupo de todos os homeomorfismos sobre o shift de Markov que comutam com o shift map, encontrando sua cardinalidade e conseqüentemente seus possíveis subgrupos. Em particular, mostraremos que a cardinalidade do grupo de automorfismos de um shift de Markov transitivo está diretamente relacionada a quantidade de pares disjuntos de caminhos de mesmo comprimento e que iniciam e terminam nos mesmos vértices do grafo que representa o shift. Quando houver somente uma quantidade finita de tais caminhos, diremos que o shift cumpre a propriedade FMDP (Finitely Many Double Path). A ausência e a presença dessa propriedade e a relação dela com a cardinalidade do grupo de automorfismos do espaço shift é foco central deste trabalho.

ABSTRACT

Keywords: Automorphism group, symbolic dynamical systems, Markov shift

A countable state Markov shift is a shift space for which there is a directed graph with an countable number of states so that there is a one-to-one onto map between the sequences of the shift space and walks on the graph. The aim of this dissertation is to characterize the automorphism group of countable state Markov shifts, that is, to characterize the group of all homeomorphisms of the Markov shift that commute with the shift map, determining its cardinality and consequently its possible subgroups. In particular, we will show that the cardinality of the automorphism group of a transitive Markov shift is directly related to the number of disjoint pairs of paths of the same length that start and end at the same vertices of the graph representing the shift. When there is only a finite amount of such a path, we say that the shift fulfills the FMDP (Finitely Many Double Path) property. The absence and presence of this property and its relation to the cardinality of the shift space group of automorphisms is a central focus of this work.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES	12
2.2	SOBRE SHIFT MARKOV DE ESTADO ENUMERÁVEL	33
3	RESULTADOS INICIAIS SOBRE O GRUPOS DE AUTOMORFIS- MOS DE UM SHIFT MARKOV DE ESTADO ENUMERÁVEL	37
4	SHIFT MARKOV LOCALMENTE COMPACTO DE ESTADOS ENU- MERÁVEIS	45
5	ESTRUTURA DE SUBGRUPO DE $Aut(\sigma)$	50
6	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

Mapeamentos entre espaços shift que são definidos através de um bloco, são conhecidos como Sliding Block Codes, e no caso de o shift ser sobre um alfabeto finito, caracterizamos os Sliding Block Codes como sendo funções contínuas que comutam com o shift map. Essa caracterização se deve ao teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon.

O grupo de automorfismos de um espaço shift é definido como sendo o conjunto de todas as funções contínuas, inversíveis cuja inversa é contínua e que comutam com o shift map, em suma, o grupo de automorfismos é definido como os homeomorfismos que comutam com o shift map. No caso de o alfabeto ser finito, esse grupo está contido no conjunto de Sliding Block Codes e consequentemente é no máximo enumerável.

Quando um espaço shift é formado por um conjunto de palavras proibidas, o qual chamamos de Shift of Finite Type (SFT), temos, por [1] que o seu grupo de automorfismos é infinito enumerável. No caso de alfabeto infinito perdemos a continuidade da inversa.

Sendo assim, é natural se perguntar o que podemos dizer sobre o grupo de automorfismos de um espaço shift mais generalizado, no caso sobre um alfabeto infinito enumerável, uma vez que temos resultados apenas para quando o alfabeto é finito ou de tipo finito.

Consideramos aqui um Shift Markov de Estado Enumerável, que é um espaço shift sobre um alfabeto infinito enumerável que possui uma representação como Shift de aresta, ou seja, pode ser representado por um grafo, e nosso objetivo nessa dissertação, que foi baseada no artigo [2], é ver hipóteses para generalizar o grupo de automorfismos desse espaço shift, que é um caso mais geral do que shift de espaço finito ou (SFT). Aqui queremos saber quando esse grupo de automorfismos é enumerável, não enumerável e quais são alguns de seus subgrupos, além de definirmos a propriedade **FMDP** sobre seus grafos representantes, que é uma propriedade que fala sobre a finitude do número de pares de caminhos double path edge-dosjoint, que são caminhos que dois à dois iniciam e terminam no mesmo vértice, tem o mesmo tamanho e não tem arestas em comum entre os pares. Essa propriedade é de suma importância para essa teoria, pois podemos dizer muito sobre o grupo de automorfismos na presença e na ausência dessa propriedade.

Fazendo um breve resumo sobre o que veremos nos próximos capítulos, no capítulo 2, estudaremos todos os conceitos preliminares para o desenvolvimento da teoria, como definições e resultados que serão utilizados futuramente, além de todas as demonstrações que garantem que o Shift Markov de Estado Enumerável é um espaço topológico metrizável e consequentemente Hausdorff. Serão vistos resultados que são válidos para shifts de alfabeto finito e que perdem a validade no caso de shifts de alfabeto infinito enumerável, além de uma breve explanação sobre o grupo de

automorfismos de um espaço shift de um alfabeto finito e (SFT).

No capítulo 3 vamos dar início aos primeiros resultados sobre o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável, e o que pode ser dito sobre sua cardinalidade e seus grafos representantes, além de estudarmos a cardinalidade na ausência e na presença da propriedade **FMDP**. Também vamos relacionar a topologia compacta aberta com a cardinalidade do seu grupo de automorfismos.

Veremos que é possível encontrar uma caracterização mais geral da propriedade **FMDP** no capítulo 4 a partir da compactificação de Alexandroff no Shift Markov de Estado Enumerável. Para isso, vamos definir 3 propriedades sobre seus grafos representantes que estão intimamente ligadas a propriedade **FMDP** do Shift Markov de Estado Enumerável, que garantem quando um espaço shift é subshift ou não, a relação que essas propriedades tem entre si, e a cardinalidade do grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável que possui expansão compactificação de 1 ponto.

Por fim, no último capítulo veremos alguns subgrupos do grupo de automorfismos e principalmente subgrupos que aparecem exclusivamente em $Aut(\sigma)$ de um Shift Markov de Estado Enumerável, que não ocorrem em $Aut(\sigma)$ no caso de SFT e evidentemente também não podem ocorrer no caso do grupo de automorfismos de um Shift sobre alfabeto finito.

2 PRELIMINARES

2.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Definição 1. *Seja X um conjunto não vazio. Definimos o conjunto das partes de X como sendo $P(X) = \{A : A \subset X\}$.*

Definição 2. *Um subconjunto de $P(X)$ é chamado família de conjuntos.*

Veja que o conjunto das partes de X é o conjunto de todos subconjuntos de X , incluindo \emptyset e o próprio X . A definição das partes de X é de grande importância para definir uma topologia em X , o que possibilita a definição de um espaço topológico, que será definido a seguir.

Definição 3. *Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que $\tau \subset P(X)$ é uma topologia em X se:*

X e \emptyset pertencem à τ ;

A união qualquer de elementos de τ é ainda um elemento de τ ;

a interseção finita de elementos de τ é ainda um elemento de τ .

O par (X, τ) é dito ser um espaço topológico.

Definição 4. *Se $A \subset X$ é tal que $A \in \tau$, então dizemos que A é um aberto da topologia.*

Definimos conjunto fechado como tendo complemento aberto, resumindo, um conjunto é fechado se possui complementar aberto. Segue a definição formal após a definição de complementar de um conjunto.

Definição 5. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e $A \subset X$. Definimos o complemento de A como*

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

Definição 6. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $A \subset X$ é fechado se $A^c \in \tau$, ou seja, se A^c é aberto.*

É evidente que se (X, τ) é um espaço topológico, então \emptyset e X são abertos e fechados, já que $\emptyset^c = X$ e $X^c = \emptyset$ e por definição de espaço topológico, $\emptyset, X \in \tau$. Agora veremos um caso particular de topologia, que será a mais utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, a topologia chamada topologia das partes.

Definição 7. *Seja X um conjunto não vazio. Se $\tau = P(X)$, então dizemos que τ é a topologia discreta ou topologia das partes. Chamamos o par (X, τ) de espaço topológico discreto.*

Definiremos a seguir o que chamamos de abertos básicos de uma topologia. O objetivo em conhecer tais abertos é que seja possível definir os abertos básicos de um espaço shift, o que muitas vezes irá facilitar a demonstração de vários resultados ao longo da teoria.

Definição 8. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma base \mathcal{B} da topologia em X é uma coleção de subconjuntos de X (chamados elementos da base) tais que:*

Para cada $x \in X$ existe pelo menos um elemento da base que contém x ;

Se x pertence a interseção de dois elementos da base, digamos \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , então existe \mathcal{B}_3 elemento da base tal que $x \in \mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Chamamos os elementos da base de abertos básicos.

Dizemos que a topologia τ é gerada por \mathcal{B} se cada aberto $U \in \tau$ é tal que para cada $x \in U$ existe um elemento da base $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1 \subset U$.

Veja que essa definição nos dá automaticamente que cada elemento da base é um aberto da topologia, e conseqüentemente, a base \mathcal{B} é um subconjunto de τ . Mais ainda: τ é gerado pelas uniões dos elementos de \mathcal{B} , pois dado um aberto $U \in \tau$ para cada $x \in U$ existe $\mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B}_x$ e $\mathcal{B}_x \subset U$, logo, a união $\bigcup_{x \in U} \mathcal{B}_x$ contém U e também $\bigcup_{x \in U} \mathcal{B}_x \subset U$ por construção, e portanto, qualquer aberto de τ é escrito como união de elementos de \mathcal{B} .

Essa informação é relevante pois para descobrir como é a topologia τ gerada por \mathcal{B} , precisamos apenas olhar para todas as uniões de elementos de \mathcal{B} , que ainda são abertos, já que a união qualquer de abertos é um aberto.

Uma pergunta natural à se fazer é “e a interseção de abertos?” Quanto a isso não precisamos nos preocupar pois a definição de base já exclui a possibilidade de ter um aberto menor (no sentido de estar contido) do que qualquer elemento da base.

Nosso próximo objetivo é, dado um número infinito de espaços topológicos, definir uma topologia sobre o produto cartesiano infinito desses espaços. A topologia que definiremos para isso é chamada topologia produto, e não é a única topologia que pode ser definida para o produto infinito de espaços topológicos, porém, é a de único interesse para esse trabalho.

Definição 9. *Seja J um conjunto de índices. Dado um conjunto X , definimos a J -upla de elementos de X como sendo a função $x : J \rightarrow X$. Se α é elemento de J , denotamos $x(\alpha) := x_\alpha$ e chamamos de α -ésima entrada (ou coordenada) de x . Denotamos a função x por $(x_j)_{j \in J}$.*

Denotamos também o conjunto de todas J -uplas de X por X^J .

Se $J = \mathbb{Z}$, chamamos $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ de sequência bi-infinita e $X^{\mathbb{Z}}$ de conjunto de todas sequências bi-infinitas de X .

Definição 10. *Seja $(A_j)_{j \in J}$. Definimos o produto cartesiano*

$$\prod_{j \in J} A_j$$

como sendo o conjunto de todas as funções

$$x : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$$

tal que $x_j \in A_j$ para cada $j \in J$.

Agora que definimos o produto qualquer de conjuntos, precisamos definir a função projeção sobre esse produto para podermos definir como é a topologia produto.

Definição 11. *Seja*

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \longrightarrow A_\beta$$

que associa cada elemento do espaço produto a sua β -ésima coordenada

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$$

Chamamos π_β a projeção associada ao índice β .

Definição 12. *Sejam (X_β, τ_β) espaço topológico onde $\beta \in J$, S_β a coleção*

$$S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta \in \tau_\beta\}$$

e

$$S = \bigcup_{\beta \in J} S_\beta$$

A topologia gerada por S é chamada topologia produto e $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ munido dessa topologia é chamado espaço produto.

Veja que se τ_β é uma topologia que contém uma base \mathcal{B} de X_β , nessas condições S é definida por $\bigcup_{\beta \in J} \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta \in \mathcal{B}\}$.

A seguir faremos as primeiras definições e resultados de dinâmica simbólica, mas antes, vamos recordar a definição de conjunto enumerável.

Definição 13. *Dizemos que um conjunto X é enumerável se é finito ou se é possível construir uma bijeção entre X e \mathbb{N} . No segundo caso, dizemos que X é infinito enumerável.*

Definição 14. *Seja A um conjunto enumerável. Chamamos A de alfabeto e seus elementos de letras do alfabeto.*

A partir de agora, sempre que nos referimos ao espaço topológico de um alfabeto A , iremos considerar o espaço topológico formado por esse alfabeto munido da topologia discreta.

Definição 15. O espaço produto $A^{\mathbb{Z}}$ de seqüências bi-infinitas

$$(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \cdots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2 \cdots$$

de elementos de A , é chamado Espaço Full Shift

$$A^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in A \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Definição 16. Seja A um alfabeto. A^n define o conjunto palavras de tamanho n sobre esse alfabeto.

Definição 17. Um bloco (ou palavra) sobre A é uma seqüência finita de elementos de A .

A definição de bloco serve para quando queremos nos referir à um “pedaço” finito da seqüência x , pois nem sempre precisamos olhar para a seqüência inteira já que às vezes é necessário analisarmos x apenas localmente. Dando seqüência a definição de uma palavra, vejamos exatamente como denotar localmente uma palavra de x de i até j de tamanho $j - i + 1$ quando o índice i for menor ou igual ao índice j .

Definição 18. Se $x \in A^{\mathbb{Z}}$ e $i \leq j$ denotamos o bloco de coordenadas em x de tamanho $j - i + 1$ da posição i até a posição j por

$$x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$$

É possível “grudar” uma palavra na outra e chamamos esse procedimento de *concatenação* de palavras. Formalmente, dadas as palavras $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$ e $y_{[m,n]} = y_m y_{m+1} \cdots y_n$ a concatenação de $x_{[i,j]}$ com $y_{[m,n]}$ é dada por $x_{[i,j]}y_{[m,n]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j y_m y_{m+1} \cdots y_n$.

Agora que definimos palavra, voltamos para o objetivo de demonstrar que $A^{\mathbb{Z}}$ é um espaço topológico. Para isso, precisamos definir seus abertos básicos da topologia, que são os cilindros como será provado a seguir. Intuitivamente, um cilindro centrado na palavra $a_0 a_1 \cdots a_n$ na posição j é o conjunto de todas as seqüências bi-infinitas de elementos que coincidem com a_0 na posição j , a_1 na posição $j + 1$, \cdots , a_n na posição $j + n$. Vejamos a definição formal.

Definição 19. Para $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$, e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in A$, definimos o conjunto

$$[a_0 a_1 \cdots a_n]_j = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_{i+j} = a_i \forall 0 \leq i \leq n\}$$

Que é chamado cilindro de $A^{\mathbb{Z}}$.

Proposição 20. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$[a_0 a_1 \cdots a_n]_j \subset [a_i]_{j+i}$$

com $0 \leq i \leq n$ e $[a_0 a_1 \cdots a_n]$ e $[a_i]$ cilindros de $A^{\mathbb{Z}}$.

Demonstração. Para provar que $A \subset B$ basta provar que $x \in A \Rightarrow x \in B$, logo, considere $x \in [a_0 a_1 \cdots a_n]$, conseqüentemente, temos que $x_{j+i} = a_i$ e portanto, $x \in [a_i]$ como desejado. \square

Observe que não é necessário que a inclusão contrária seja válida, pois um cilindro formado pela palavra a_i centrado em $j + i$ é o conjunto de todas sequências bi-infinitas que na posição j coincidem com a_i , e se o alfabeto A possui pelo menos um elemento distinto dos elementos a_0, \dots, a_n , haverá uma sequência bi-infinita que na posição j não será elemento do cilindro $[a_0 a_1 \cdots a_n]_j$.

Proposição 21. Se dois cilindros $[a_0 a_1 \cdots a_n]_j, [b_0 b_1 \cdots b_n]_j$ em $A^{\mathbb{Z}}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$ possuem um elemento em comum, então eles são iguais.

Demonstração. Provemos que se os cilindros possuem um elemento comum, então $a_i = b_i \forall 0 \leq i \leq n$.

Considere $x \in [a_0 a_1 \cdots a_n]_j \cap [b_0 b_1 \cdots b_n]_j$ logo, $x_{i+j} = a_i$ e $x_{i+j} = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, portanto $a_i = b_i \forall 0 \leq i \leq n$. \square

Vimos com as duas proposições anteriores resultados sobre quando cilindros são iguais, disjuntos ou estão contidos um no outro. No caso, para dois cilindros serem iguais é necessário que sejam definidos por palavras de mesmo tamanho, sejam centrados na mesma posição e possuam um elemento em comum, caso contrário possuem interseção vazia. No caso de um cilindro A estar contido em um cilindro B , é necessário que a palavra que gera B seja subpalavra da palavra que gera A . Agora, vamos falar sobre a topologia em $A^{\mathbb{Z}}$, para isso lembremos que um conjunto unitário é um conjunto formado por um único elemento.

Consideremos A munido com a topologia das partes e $A^{\mathbb{Z}}$ com a topologia produto.

Lema 22. Os abertos básicos da topologia das partes em um conjunto X são os subconjuntos unitários de X .

Demonstração. Precisamos provar que qualquer aberto de X pode ser escrito como união dos subconjuntos unitários de X . Seja $Y = \{y_i\}_{i \in I}$ subconjunto de X onde I é um conjunto qualquer de índices. Veja que

$$Y = \bigcup_{i \in I} \{y_i\}$$

Como X está munido da topologia das partes, temos que $\{y_i\}$ é aberto de X para todo $i \in I$ e segue o desejado. \square

Essa proposição nos garante que o Full Shift não só é um espaço topológico, como também seus abertos básicos são os cilindros da forma $[a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}]_0$ com $a_i \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Veja também que não é necessário que os cilindros estejam na posição 0, mas podemos supor isso sem perda de generalidade, e que também não é necessário que os cilindros sejam gerados apenas por palavras de tamanho 1, mas do fato de que se um cilindro é gerado por uma subpalavra de outro, temos a contigência do cilindro de palavra maior no cilindro de palavra menor, nesse caso seria redundante incluir os cilindros gerados por palavras de tamanho maior ou igual à 2.

Observe que a demonstração de que $A^{\mathbb{Z}}$ é espaço topológico independe de A ser alfabeto infinito enumerável ou apenas finito, apesar de termos feito para A infinito enumerável. Sendo assim, para o Full Shift definido sobre um alfabeto finito podemos utilizar a mesma demonstração adaptando os índices de \mathbb{N} para um conjunto finito de elementos, o que torna o problema ainda mais simples.

Proposição 23. *Dado o full shift $A^{\mathbb{Z}}$, todo cilindro é aberto e fechado.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, faremos a demonstração para um cilindro $[a_i]_0$ com $a_i \in A$.

Veja que $\{a_i\}^c$ é um aberto na topologia das partes. Agora, considere o cilindro $[a_i^c]_0$ como sendo a concatenação de todas as letras de $\{a_i\}^c$. Temos que esse cilindro é aberto e é o complementar de $[a_i]_0$ por construção.

Logo, além de $[a_i]_0$ ser aberto, possui complemento aberto, o que o torna também fechado. \square

Definição 24. *Um espaço topológico (X, τ) é dito ser Hausdorff se dados $x, y \in X$ com $x \neq y$ existirem abertos $U_x, U_y \in \tau$ tais que $x \in U_x, y \in U_y$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Em outras palavras, um espaço é dito ser Hausdorff se para pontos distintos existem abertos disjuntos que contém cada um dos pontos. Vejamos que $A^{\mathbb{Z}}$ é Hausdorff independente de A ser finito ou infinito enumerável.

Proposição 25. *$A^{\mathbb{Z}}$ munido da topologia produto é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $x = (x_k)_{k \in K}, y = (y_j)_{j \in J} \in A^{\mathbb{Z}}$ distintos, logo, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Considere os cilindros $[x_i]_i, [y_i]_i$ e veja que como $x_i \neq y_i$ os cilindros são abertos disjuntos que contém x e y respectivamente. \square

Até o momento, não vimos nenhuma diferença topológica entre o Full Shift sobre um alfabeto finito e o Full Shift sobre um alfabeto infinito enumerável, pois ambos são espaços topológicos e ambos são Hausdorff, mas a maior diferença entre eles é que

quando trabalhamos sobre o alfabeto finito, temos que o Full Shift é compacto, e isso é algo que não vale no caso do alfabeto ser infinito enumerável, como veremos agora.

Definição 26. *Seja C um subconjunto de um espaço topológico (X, τ) . Dizemos que C é compacto se para todo conjunto de índices I e toda família de abertos O_i com $i \in I$, tal que $C \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ existe uma subfamília finita $\{O_{j_1}, O_{j_2}, \dots, O_{j_n}\}$ com $j \in I$ de $\{O_i : i \in I\}$ tal que $C \subset O_{j_1} \cup O_{j_2} \cup \dots \cup O_{j_n}$.*

Chamamos $\{O_i : i \in I\}$ de cobertura aberta de A e $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ de subcobertura finita de C .

Resumindo a definição de conjunto compacto, dizemos que C é compacto se toda cobertura aberta de C admite uma subcobertura finita para C e é fácil ver que se um espaço topológico é finito, então é compacto. Esse resultado será formalizado na próxima proposição.

Proposição 27. *X é um conjunto finito, se e somente se X é compacto em qualquer topologia.*

Demonstração. Denote $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e seja $\{O_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta qualquer para X . De X ser finito, sabemos que existem no máximo n elementos de $\{O_i : i \in I\}$ tais que $x_j \in O_j \forall 1 \leq j \leq n$, e essa é a subcobertura finita de X procurada.

Reciprocamente, se X é compacto em qualquer topologia, em especial é compacto na topologia das partes e a cobertura aberta $\{x_i\}_{x_i \in X}$ admite subcobertura finita, portanto X é finito. \square

Veja que essa demonstração independe da topologia em X , com isso, temos em especial que se A é um alfabeto finito então A é compacto, mas se A é infinito enumerável, a compacidade depende da topologia em A . Por exemplo, se A é munido da topologia indiscreta, que é quando $\tau = \{\emptyset, A\}$, evidentemente A é compacto já que o único aberto não vazio é o próprio A que é uma cobertura finita para A . Mas veja que no caso da topologia das partes, que é a topologia que estamos utilizando em nosso alfabeto, A não é compacto como é feito da proposição que segue.

Proposição 28. *Se A é infinito enumerável munido da topologia das partes, então A não é compacto.*

Demonstração. Considere a cobertura aberta $O_i = \{a_i\}$ com $a_i \in A$. É evidente que essa cobertura não admite nenhuma subcobertura finita. \square

Daremos início agora à uma série de resultados que são necessários para provar que o Full Shift sobre um alfabeto infinito enumerável não é compacto, seguidos de resultados para provar que o Full Shift sobre um alfabeto finito é compacto. O primeiro desses resultados é a continuidade da função projeção de $A^{\mathbb{Z}}$ em A .

Definição 29. *Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se dado $B \subset Y$ aberto, o conjunto $A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) = y \in B\}$ é aberto. Em outras palavras, f é uma função contínua se a imagem inversa de abertos é ainda um aberto.*

Proposição 30. *Sejam A alfabeto infinito enumerável com a topologia das partes e $A^{\mathbb{Z}}$ munido da topologia produto. A função projeção da n -ésima coordenada $\pi_n : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A$ é contínua.*

Demonstração. De fato, sem perda de generalidade podemos considerar um aberto básico $U = \{a_i\}$ com $a_i \in A$. Veja que $\pi^{-1}(U) = [a_i]$ que é um aberto em $A^{\mathbb{Z}}$. \square

Outra forma de verificação de que uma função não é contínua, é via compactos. Em outras palavras, uma função contínua leva compactos em compactos. Logo, esse será o resultado que será diretamente utilizado para provar a não compacidade de $A^{\mathbb{Z}}$ sobre um alfabeto infinito enumerável.

Proposição 31. *Sejam X e Y dois espaços topológicos não vazios. Se uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a imagem de um compacto por f é ainda um compacto. Em outras palavras, se $A \subset X$ é compacto então $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A | f(x) = y\}$ é compacto em Y .*

Lema 32. *Sejam X e Y espaços topológicos não vazios e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Temos que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$ com I um conjunto qualquer de índices e O_i subconjuntos de Y .*

Demonstração. Temos que $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i)$ equivale à $f(x) = y$ com $y \in \bigcup_{i \in I} O_i$, que por sua vez ocorre se, e somente se, existe $i \in I$ tal que $y \in O_i$ que é equivalente à $x \in f^{-1}(O_i)$ portanto $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$. \square

Demonstração da proposição. Seja $A \subset X$ um conjunto compacto e considere $\{O_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de $f(A)$, logo,

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

onde $\bigcup_{i \in I} O_i$ é um aberto em Y . Como f é contínua e $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$, temos que $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i) \subset A$ é um aberto em X , e como A é compacto, existe uma subcobertura $\{f^{-1}(O_{i_1}), f^{-1}(O_{i_2}), \dots, f^{-1}(O_{i_n})\}$ finita de A . Logo, $f(A) \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$ e portanto, $f(A)$ é compacto. \square

Por fim, temos resultados suficientes para demonstrar que $A^{\mathbb{Z}}$ não é compacto sobre um alfabeto infinito enumerável, e para isso, vamos utilizar o fato de a função projeção de $A^{\mathbb{Z}}$ em A ser contínua e supor por absurdo que $A^{\mathbb{Z}}$ é compacto. Formalmente, temos a proposição à seguir.

Proposição 33. *Se A é um alfabeto infinito enumerável, então $A^{\mathbb{Z}}$ não é compacto.*

Demonstração. De fato, sabemos que a imagem de um compacto por uma função contínua é ainda um compacto, então se caso $A^{\mathbb{Z}}$ for compacto, considerando a projeção $\pi_n : (x_n) \in A^{\mathbb{Z}} \mapsto x_n \in A$ que é contínua, temos que $\pi_n(A^{\mathbb{Z}}) = A$ é compacto, mas isso é um absurdo já que A não é compacto com a topologia das partes. \square

Para demonstrar a compacidade de $A^{\mathbb{Z}}$ sobre um alfabeto finito, vamos precisar de um resultado conhecido por Teorema de Tychonoff, o qual não será demonstrado aqui mas a demonstração pode ser encontrada com detalhes em [3].

Teorema 34 (Teorema de Tychonoff). *O produto arbitrário de espaços topológicos compactos munido da topologia produto, é ainda um espaço topológico compacto.*

Corolário 35. *Se o alfabeto A é finito, então $A^{\mathbb{Z}}$ é compacto.*

Demonstração. Sabemos que A é compacto, portanto a demonstração segue imediatamente do Teorema de Tychonoff. \square

Em suma, temos a maior diferença topológica entre Full Shift de alfabeto finito e infinito enumerável: a perda de compacidade. Isso interfere diretamente no grupo de automorfismos em cada caso, como veremos em breve.

Agora, veremos que $A^{\mathbb{Z}}$ tanto de alfabeto finito quanto infinito enumerável é um espaço métrico, ou seja, podemos definir uma distância no Full Shift que gera a topologia em $A^{\mathbb{Z}}$. Vale ressaltar que há várias distâncias em $A^{\mathbb{Z}}$, entretanto não são de interesse para esse trabalho e a que será definida é apenas para mostrar que $A^{\mathbb{Z}}$ é um espaço topológico metrizável.

Definição 36. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Uma métrica em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:*

$$D1. \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X;$$

$$D2. \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$D3. \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X;$$

D4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$. *Essa propriedade é chamada de desigualdade triangular.*

O par (X, d) é dito ser um espaço métrico.

Consideraremos um exemplo de métrica em $A^{\mathbb{Z}}$, dados $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ em $A^{\mathbb{Z}}$ defina

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x_i = y_i \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ 2^{-k} & , k = \min\{|i|, x_i \neq y_i\} \end{cases}$$

Vamos verificar as propriedades de métrica:

D1. $d(x, y)$ é sempre maior ou igual à 0 por definição de d ;

D2. $d(x, y) = 0 \iff x_i = y_i \forall i \in \mathbb{Z} \iff x = y$;

D3. Evidente;

D4. Sejam $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e suponha $x \neq y$, pois caso contrário é trivial. Seja $k = \min\{|i| : x_i \neq y_i\}$ e considere $z = (z_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$. Temos que considerar os seguintes casos:

$$d(x, z) \leq d(x, y)$$

ou

$$d(x, z) > d(x, y)$$

No primeiro caso, temos que $2^{-j} \leq 2^{-k}$ onde $j = \min\{|i| : x_i = z_i\}$, e consequentemente temos $k < j$. Como até k temos $x_k = y_k$ e $x_k = z_k$, segue que $d(y, z = d(y, x))$, portanto

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

No segundo caso, temos que $d(y, z) > 0$, logo

$$d(x, y) < d(x, z) \Rightarrow d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$$

. Assim, concluímos a validade da desigualdade triangular.

Antes de falarmos da relação entre essa métrica e a topologia no Full Shift, precisamos ainda conhecer quem são os abertos no caso de um espaço métrico para aí encontrarmos uma relação dos abertos da topologia e da métrica. Para atingirmos esse objetivo, veremos algumas definições e resultados que tornam possível essa análise, dentre eles, o primeiro é a definição de uma bola aberta.

Definição 37. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Definimos a bola aberta de centro x e raio ϵ como sendo o conjunto

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

Chamamos $B_d(x, \epsilon)$ de ϵ -bola centrada em x , ou apenas ϵ -bola quando não há risco de confusão sobre o centro.

Corolário 38. Se d é uma métrica em X , então a coleção de ϵ -bolas $B_d(x, \epsilon)$ com $x \in X$ e $\epsilon > 0$ é uma base de uma topologia a qual denominamos topologia métrica induzida por d .

Agora que definimos bolas abertas e uma base para a topologia métrica, podemos por fim relacionar uma topologia com uma métrica em um espaço topológico como será feito na definição que segue, e logo após essa definição, já temos a formalização da afirmação de que $A^{\mathbb{Z}}$ é um espaço topológico metrizável, independente do alfabeto drr finito ou não.

Definição 39. Se (X, τ) é um espaço topológico, dizemos que X é metrizável se existe uma métrica d em X que induz a topologia τ , ou seja, os abertos de τ podem ser escritos como uniões de bolas abertas.

Proposição 40. $A^{\mathbb{Z}}$ é espaço topológico metrizável.

Demonstração. Provemos que as bolas abertas definidas por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x_i = y_i \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ 2^{-k} & , k = \min\{|i|, x_i \neq y_i\} \end{cases}$$

são exatamente os abertos básicos da topologia em $A^{\mathbb{Z}}$, no caso, os cilindros.

Considere o cilindro definido por palavra de tamanho $2i + 1$ na posição p $[a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i]_p$, o elemento $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in [a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i]_p$, $\epsilon = (\frac{1}{2})^i > 0$ e defina $B_d(x, (\frac{1}{2})^i) := B_{(\frac{1}{2})^i}(x)$.

Afirmamos que $B_{(\frac{1}{2})^i}(x) = [a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i]_p$.

De fato, dado $y \in B_{(\frac{1}{2})^i}(x)$ temos $d(x, y) < (\frac{1}{2})^i$ com $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, e consequentemente $k = \min\{|i| : x_i \neq y_i\} \geq 1$ e portanto $x_j = y_j = a_j$ com $j = -i, \dots, i$ logo, $y \in [a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i]_p$.

Reciprocamente, se $y \in [a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i]_p$ então $k = \min\{|i| : x_i \neq y_i\} \geq 1$ e portanto $d(x, y) = 2^{-k} \leq (\frac{1}{2})^i \Rightarrow y \in B_{(\frac{1}{2})^i}(x)$. \square

Para espaços métricos, temos algumas formas de definir conjuntos fechados que não são válidas para espaços topológicos, algumas dessas formas serão feitas logo em seguida. Considere $A \subset X$ não vazio.

Definição 41. Dado um espaço métrico (X, d) dizemos que $x \in A \subset X$ é ponto de acumulação de A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos $B_d(x, \epsilon) \cap A/\{x\} \neq \emptyset$. Denotamos o conjunto de todos os pontos de acumulação de A como sendo A' .

Definição 42. Definimos o fecho de $A \subset X$, com (X, d) espaço métrico, o conjunto

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Definição 43. Dado um espaço métrico (X, d) dizemos que A é denso em X se $X = \bar{A}$.

Veja que dessa definição temos que A é denso em X se, e somente se, qualquer aberto de X contém um ponto de A .

De fato, seja $B(x, \epsilon)$ um aberto de X com $\epsilon > 0$. Como A é denso em X , $\bar{A} = X \Rightarrow A \cup A' = X$, portanto, $x \in A$ ou $x \in A'$. Se ocorrer o primeiro caso temos o

desejado. Caso $x \in A'$, por definição de A' para todo $\epsilon > 0$ temos $B(x, \epsilon) \cap A/\{x\} \neq \emptyset$ e portanto temos o desejado.

Reciprocamente, como todo aberto de X contém um ponto de A , tomando $x \in X$, para todo $\epsilon > 0$ temos $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Temos $x \in A$ ou $x \notin A$. Se $x \notin A$ temos $B(x, \epsilon) \cap A/\{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$, e portanto $x \in A \cup A'$, e portanto segue o procurado.

Vale ressaltar que os abertos básicos de um espaço métrico são as bolas abertas, e que para um conjunto ser aberto em um espaço métrico (X, d) é suficiente que

$$\forall x \in X \exists \epsilon > 0 ; B_d(x, \epsilon) \subset X$$

Por outro lado, os conjuntos fechados de um espaço métrico são os conjuntos que contém seus pontos de acumulação, ou seja, se (X, d) é um espaço métrico, $A \subset X$ é fechado se $\overline{A} = A$.

Outro fato que é interessante e também de grande utilidade na demonstração de resultados em espaços métricos, é que todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é também compacto. Vamos provar essa afirmação.

Proposição 44. *Suponha que o subconjunto A do espaço métrico compacto (X, d) seja fechado, então A^c é aberto.*

Demonstração. Se $A \neq \emptyset$ é fechado, então temos que A^c é aberto. Considere uma cobertura aberta $\{C_i\}_{i \in I}$ de A . Veja que $\{C_i\}_{i \in I} \cup A^c$ é uma cobertura aberta de X o qual é um espaço métrico compacto, logo admite uma subcobertura finita, digamos C_1, \dots, C_n, A^c .

Temos que $A \subset C_1 \cup \dots \cup C_n \cup A^c$ e como A^c não possui nenhum elemento de A , segue que $A \subset C_1 \cup \dots \cup C_n$. Concluimos que C_1, \dots, C_n é uma subcobertura finita para A . \square

Definição 45. *Se um ponto x não for ponto de acumulação, dizemos que x é um ponto isolado. Em outras palavras, x é um ponto isolado de X se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \cap X = \{x\}$.*

Como vimos na proposição 12, podemos ver as bolas na métrica d definida para $A^{\mathbb{Z}}$ como sendo cilindros, então se provamos que um ponto é de acumulação, ou que uma sequência converge para um ponto, precisamos apenas olhar para os cilindros que contém o ponto de acumulação. A técnica de construir sequências via cilindros é de grande utilidade para demonstrações em um espaço Shift.

Definição 46. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $x \in X$. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x e denotamos $x_n \rightarrow x$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $x_n \in B_d(x, \epsilon)$.*

Até o momento vimos que o Full Shift é um espaço topológico muito especial, além de ser Hausdorff é também metrizável. Olhando para $A^{\mathbb{Z}}$ como espaço métrico, também temos a validade de algo muito forte, que é o fato de o Full Shift não possuir pontos isolados. Esse resultado é muito interessante de ser utilizado sempre que precisamos construir uma sequência convergente no Full Shift, pois dado um ponto, sempre existe uma sequência que converge para ele e vamos formalizar esse resultado logo abaixo. Seguindo esse resultado, temos outra afirmação muito forte sobre o Full Shift, que é o fato de ele ser sempre totalmente desconexo, como logo definiremos.

Definição 47. Um espaço métrico (X, d) é dito ser perfeito se é fechado e não possui pontos isolados.

Proposição 48. Seja A finito ou enumerável. Temos que $A^{\mathbb{Z}}$ é espaço métrico perfeito.

Demonstração. $A^{\mathbb{Z}}$ é fechado, resta provar que não possui pontos isolados. Para isso, dado um ponto vamos construir uma sequência que converge para esse ponto.

Seja $x \in A^{\mathbb{Z}}$ com $x = \cdots a_{-1}a_0a_1\cdots$. Construa a sequência (x_m^n) tal que

$$x_m^i \in [a_{-i} \cdots a_0 \cdots a_i] \forall i \in \mathbb{N}$$

com $x_m^i \neq x$. Por construção temos que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ e portanto x é ponto de acumulação de $A^{\mathbb{Z}}$. \square

Definição 49. Dado um espaço métrico (X, d) , dizemos que X é desconexo se existem abertos $A, B \subset X$ não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$

Em outros termos, X é desconexo quando admite subconjuntos não triviais abertos e fechados simultaneamente. Usaremos esse fato para provar que $A^{\mathbb{Z}}$ é totalmente desconexo logo após a definição de totalmente desconexo que será feita a seguir.

Definição 50. (X, d) é dito ser totalmente desconexo se dado $M \subset X$ com dois ou mais elementos (M, d) é desconexo.

Proposição 51. $A^{\mathbb{Z}}$ é totalmente desconexo.

Demonstração. Seja $M \subset A^{\mathbb{Z}}$ tal que $x, y \in M$. Como $x \neq y$, existe bloco $x_i \cdots x_m$ com $i, m \in \mathbb{Z}$ e $i \leq m$ de x que difere de y na mesma posição, no caso $x_i \cdots x_m \neq y_i \cdots y_m$.

Considere o cilindro $[x_i \cdots x_m]_k$ na posição k que contém x e o cilindro C que é a união de todos os cilindros que não contém x . Note que $C \cap M$ é um aberto e fechado de M .

Veja que $M \cap (C \cap M) = \emptyset$, $(M \cap C) \cap [x_i \cdots x_m]_k = \emptyset$, $(M \cap C) \cap [x_i \cdots x_m]_k = \emptyset$ e $((C \cap M) \cup [x_i \cdots x_m]_k) = M$. Logo, M é desconexo e portanto $A^{\mathbb{Z}}$ é totalmente desconexo. \square

Agora, vamos definir a função de maior interesse sobre um espaço Shift que é o shift map. Esse mapeamento é de extrema importância para a definição do grupo de automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$ que é o foco desse trabalho.

Definição 52. *Seja A um alfabeto finito ou infinito enumerável. Sobre $A^{\mathbb{Z}}$ definimos o shift map (à esquerda) como sendo a função $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ dada por*

$$\sigma((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$$

Veja que evidentemente σ é inversível e sua inversa σ^{-1} é dada pelo shift map à direita definido por

$$\sigma^{-1}((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$$

Proposição 53. *σ é contínua.*

Demonstração. Basta provar que a imagem inversa de um cilindro por σ é um cilindro. Para isso, dado $a \in A$ considere sem perda de generalidade o cilindro $[a]_0$ de $A^{\mathbb{Z}}$ e veja que

$$\sigma^{-1}([a]_0) = [a]_{-1}$$

onde $[a]_{-1}$ é um cilindro de $A^{\mathbb{Z}}$ como desejado. \square

Podemos ainda fazer iterações do shift map tanto à direita, quanto à esquerda, e no primeiro caso, as iterações são dadas pela inversa do shift map. Intuitivamente falando, o shift map desloca os elementos de uma sequência de lugar para a esquerda e sua inversa faz os seus elementos voltarem para a direita. A definição formal desse fato está logo em seguida.

Definição 54. *Definimos σ^n como sendo a composição de σ consigo mesmo n vezes. De forma análoga, se $n < 0$ definimos σ^n como sendo a composta de σ^{-1} consigo mesmo n vezes.*

Veja que σ^0 é a função identidade de $A^{\mathbb{Z}}$, pois

$$\sigma^0 = \sigma^{1-1} = \sigma \circ \sigma^{-1} = Id$$

Definido como fazemos iterações do shift map tanto à esquerda quanto à direita, estamos prontos para definir um ponto periódico, que são os pontos tais que quando olhamos para uma de suas palavras em uma posição fixada, existe um número de vezes tal que quando iteramos o shift map aplicado nesse ponto esse número de vezes e olhamos novamente para o bloco da posição fixada, a palavra é exatamente a mesma que olhamos antes de aplicar a função shift nesse ponto. Essa é apenas a ideia intuitiva da definição seguinte.

Definição 55. Dado um Full Shift $A^{\mathbb{Z}}$, dizemos que um ponto $x \in A^{\mathbb{Z}}$ é periódico de período $n \in \mathbb{Z}$ se

$$\sigma^n(x) = x$$

A partir de agora, sempre que falamos do Full Shift, já vamos considerar automaticamente o shift map definido sobre ele, denotamos o Full Shift com seu respectivo shift map como sendo o par $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Até o momento falamos apenas do Full Shift sobre um alfabeto finito ou infinito enumerável, mas podemos definir o que é um subshift. Há duas maneiras equivalentes de definir um subespaço do Full Shift, uma delas é via palavras proibidas e outra depende de ser fechado e da invariância da função shift, como veremos agora.

Definição 56. Seja $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Dizemos que a palavra w ocorre em x se existem índices i, j tais que $w = x_{[i,j]}$.

Definição 57. Seja $A^{\mathbb{Z}}$ um Full Shift e \mathcal{F} um conjunto de palavras sobre A . Defina o conjunto $X_{\mathcal{F}}$ como sendo o conjunto de todas as seqüências bi-infinitas que não possuem blocos de \mathcal{F} .

Chamamos \mathcal{F} de conjunto de palavras proibidas do espaço topológico $X_{\mathcal{F}}$.

Definição 58. Um espaço Shift X de $A^{\mathbb{Z}}$ é um subespaço de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto de palavras proibidas \mathcal{F} .

Quando não há risco de confusão, vamos denotar o espaço Shift $(X, \sigma|_X)$ por (X, σ) ou apenas X .

Definição 59. Dizemos que $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ é shift invariante se

$$\sigma(X) = X$$

Proposição 60. $X_{\mathcal{F}}$ é shift invariante.

Da mesma forma que definimos quando uma palavra não ocorre em nenhum elemento de um espaço Shift, podemos definir o conjunto das palavras que ocorrem em elementos desse espaço. Vamos chamar esse conjunto de linguagem do espaço Shift.

Definição 61. Defina para $n \geq 1$ $\mathcal{B}^n(X)$ como sendo o conjunto de todas as palavras de tamanho n que ocorrem em elementos de X . Definimos $\mathcal{B}^0(x) = \{\epsilon\}$ onde ϵ é a palavra vazia.

Definição 62. Dado $X \in A^{\mathbb{Z}}$ definimos a linguagem de X como sendo o conjunto $\mathcal{B}(X)$ de todas as palavras de todos os tamanhos que ocorrem em elementos de X , ou seja,

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}, n \geq 0} \mathcal{B}^n(X)$$

Da mesma forma que existem espaços topológicos com propriedades especiais e espaços métricos com propriedades especiais, com espaços Shift não seria diferente. Temos uma propriedade muito forte sobre a linguagem de um espaço Shift, chamada irreduzibilidade, o que torna os resultados sobre espaços Shift com essa propriedade muito fortes, principalmente quando falamos do grupo de automorfismos. Esses resultados serão vistos com detalhes nas próximas seções, pelo momento, precisamos apenas nos preocupar com a definição de Shift irreduzível.

Definição 63. Dizemos que um Shift X é Shift transitivo (ou irreduzível) se

$$\forall w, v \in \mathcal{B}(X) \exists u \in \mathcal{B}(X) \text{ tal que } vuw \in \mathcal{B}(X)$$

Resumidamente, X é Shift transitivo se para cada par de palavras na linguagem de X existe uma palavra que torna possível conectar essas duas palavras e essa concatenação ainda está na linguagem de X .

A propriedade de irreduzibilidade será retomada ainda nesse capítulo quando olharmos para a representação de um shift por grafos, mas pelo momento, vamos deixa-la de lado e voltar para as maneiras de definir um espaço Shift. A próxima forma de definir shift será por uma proposição de caracterização através da invariança pelo shift map.

Definimos um subshift como sendo um subespaço de um espaço shift com a função shift restrita.

Proposição 64. $X \in A^{\mathbb{Z}}$ é subshift se, e somente se, é fechado e shift invariante.

Demonstração. Vamos provar que $X_{\mathcal{F}}$ é fechado e shift invariante se, e somente se, existe $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n \geq 1} A^n$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Se que $X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto de palavras proibidas \mathcal{F} . Se $x \in X_{\mathcal{F}}$ então x não contém nenhuma palavra de \mathcal{F} , então $\sigma(x)$ também não contém nenhum bloco de \mathcal{F} , isto é, $\sigma(X) \subset X_{\mathcal{F}}$. Para ver que $\sigma(X) = X_{\mathcal{F}}$, basta tomar $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_{\mathcal{F}}$. Logo, x não contém palavra de \mathcal{F} e $y = \sigma^{-1}(x) \in X$, pois também não contém palavra de \mathcal{F} . Nessas condições, $y \in X_{\mathcal{F}}$ e $\sigma(y) = x$, em outras palavras, σ é sobrejetor sobre $X_{\mathcal{F}}$ e portanto, $\sigma(X_{\mathcal{F}}) = X_{\mathcal{F}}$.

Vejam agora que $X_{\mathcal{F}}$ é fechado. Seja $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $X_{\mathcal{F}}$ convergente, isto é, $x^n \rightarrow \bar{x}$ com $\bar{x} \in A^{\mathbb{Z}}$ quando $n \rightarrow \infty$. Se provamos que $\bar{x} \in X$ temos que $X_{\mathcal{F}}$ contém seus pontos de acumulação e portanto é fechado. Para isso, suponha por absurdo que $\bar{x} \notin X_{\mathcal{F}}$, logo, existe $j, k \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{x}_{[j,k]} \in \mathcal{F}$.

De $x^n \rightarrow \bar{x}$ concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in [\bar{x}_{[j,k]}]_0$ para todo $n > N$, então $[x^n_{[j,k]}]_0 = [\bar{x}_{[j,k]}]_0$, em particular, $x^n_{[j,k]} \in \mathcal{F}$, o que é um absurdo com o fato de $x^n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\bar{x} \in X_{\mathcal{F}}$.

Reciprocamente, definimos $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 1} A^n - \mathcal{B}(X)$ e considere $X_{\mathcal{F}}$ o espaço shift definido pelo conjunto de palavras proibidas \mathcal{F} , vamos provar que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Seja $x \in X$, então x não contém palavra de \mathcal{F} , já que se w é palavra de x , então $w \in \mathcal{B}(X)$ e portanto $w \notin \mathcal{F}$ por construção de \mathcal{F} e concluímos $x \in X_{\mathcal{F}}$.

Por outro lado, dados $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_{\mathcal{F}}$ e $k > 0$, observamos que $x_{[-k,k]} \in \mathcal{B}(X)$. Logo, existe $y^{(k)} \in X$ que contém a palavra $x_{[-k,k]}$. Como X é shift invariante, podemos tomar $y^{(k)}$ como sequência definida por $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Claramente $(y^{(k)}) \subset X$ converge para $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Como X é fechado, temos que $x \in X$ como desejado. \square

A partir de agora, podemos definir grafos orientados e Shift de aresta para por fim, poder falar de Shift Markov de Estado Enumerável, que é definido como sendo um espaço Shift que possui uma representação em Shift de aresta.

Definição 65. Um grafo orientado G consiste de um conjunto não vazio $V = V(G)$ de vértices, um conjunto não vazio $E = E(G)$ de arestas e duas funções $i : E \rightarrow V$ e $t : E \rightarrow V$. Cada aresta $e \in E$ começa em um vértice denotado por $i(e) \in V$ e termina em um vértice $t(e) \in V$.

Denotamos por $G = (V, E, i, t)$ ou simplesmente G quando não há risco de confusão.

Definição 66. Dado um grafo $G = (V, E, i, t)$ definimos o out-degree em um vértice v como a cardinalidade do conjunto de todas as arestas que iniciam em v .

O in-degree de v é a cardinalidade do conjunto de todas arestas que terminam em v .

Definição 67. Seja $G = (V, E, i, t)$ um grafo orientado. Definimos o Shift de arestas sobre G o conjunto

$$X_G = \{e = (e_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} : t(e_i) = i(e_{i+1}) \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Em suma, o alfabeto A agora é o conjunto de arestas do grafo orientado $G = (V, E, i, t)$ e as palavras do shift de aresta são chamadas *caminhadas* ou simplesmente *caminhos* sobre o grafo G .

Definição 68. Dizemos que um grafo orientado $G = (V, E, i, t)$ é fortemente conectado se entre duas arestas sempre há um caminho ligando-as em cada direção, e portanto um caminho sobre o grafo G ligando-as.

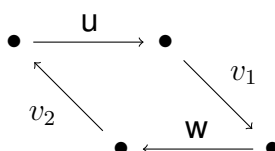
Proposição 69. Um shift de aresta X_G é transitivo se, e somente se, G é fortemente conectado.

Demonstração. Para demonstrar esse fato, basta tomar uma aresta como palavra u e a outra aresta como w . Por X_G ser transitivo existe palavra v_1 na linguagem de X_G ligando u com w e v_2 palavra ligando w com u .

Reciprocamente, se G é fortemente conectado dados dois vértices v, w existe um caminho iniciando em v e terminando em w e vice-versa. Isso é suficiente para garantir que entre duas palavras X_G há um caminho ligando-as em ambas direções. \square

Pensando sobre shift de aresta e seu grafo, não é difícil se perguntar se existe alguma relação entre um espaço shift ser irredutível e seus grafos representantes, e é sobre isso que a proposição enunciada anteriormente se trata, ela garante a irredutibilidade apenas olhando para a propriedade de ser fortemente conectado de seu grafo.

A figura a seguir nos dá uma ideia ilustrativa de como funciona a noção de um grafo ser fortemente conectado, no caso sempre há um caminho indo e voltando entre duas arestas.



Definição 70. Considere um espaço shift X sobre um alfabeto infinito enumerável. Dizemos que X é um Shift Markov de Estado Enumerável se possui uma representação como shift de aresta.

Esse é um caso especial de espaço shift, que é o mais importante para esse trabalho, pois é sobre um Shift Markov de Estado Enumerável que estudaremos o grupo de automorfismos, os resultados que serão enunciados nas próximas seções dependem puramente de como são os grafos representantes do espaço shift. Nessas condições não é possível, sem um estudo aprofundado de cada caso, garantir a validade de nenhum desses resultados sobre um shift que não tem uma representação como shift de aresta.

Podemos agora analisar algumas propriedades métricas sobre um Shift Markov de Estado Enumerável que não foram enunciadas até o momento.

Definição 71. (X, d) é dito ser localmente compacto se para cada ponto $x \in X$ existe um aberto que contém x cujo fecho é compacto.

Definição 72. Dizemos que um espaço shift X é localmente compacto se X visto como espaço topológico é localmente compacto.

Proposição 73. Seja X um Shift Markov de Estado Enumerável. Logo, se X é localmente compacto, então todo cilindro de X é compacto.

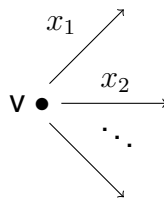
Demonstração. De fato, considere um cilindro $[a]_0$ do Shift Markov de Estado Enumerável X e tome $w \in [a]_0$. Como X é localmente compacto, existe aberto $A \subset X$ tal que $w \in A$ e \bar{A} é compacto.

A é gerado por cilindros e em especial, $[w]$ é um dos geradores de A , já que dois cilindros são sempre iguais ou disjuntos. De $[w]_0$ ser aberto básico, sabemos que é fechado, além disso, temos $[w]_0 \subset A \subset \bar{A}$. Logo, concluímos que $[w]_0$ é compacto por ser subconjunto fechado de compacto. \square

Podemos analisar a propriedade de um Shift Markov ser localmente compacto apenas olhando seus grafos representantes. Isso é muito importante já que vamos trabalhar sobre um Shift Markov de Estado Enumerável, que é um tipo de shift especial por poder ser representado por um shift de aresta, sendo assim, em vez de analisarmos o conjunto X como espaço métrico, vamos dar uma caracterização de Shift localmente compacto através das arestas que chegam e saem de um vértice de seu grafo representante escolhido, as quais chamamos de in-degree e out-degree respectivamente.

Proposição 74. *Um shift de aresta X_G transitivo é localmente compacto se, e somente se, todo vértice de G tem in e out-degree finito.*

Demonstração. Para demonstrar essa afirmação, considere o grafo $G = (V, E, i, t)$ e suponha que existe $v \in V$ tal que v tem out-degree infinito. Assim, podemos considerar a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de arestas tal que cada x_i é caminho distinto passando por cada uma das infinitas arestas que saem de v , sem repetições.



Note que $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ não admite subsequência convergente, pois cada elemento está em um cilindro distinto, e conseqüentemente não pode admitir subconjunto compacto que contém v , uma vez que admite uma sequência onde nenhuma subsequência é convergente. Obtemos assim, um absurdo com o fato de X ser localmente compacto.

Reciprocamente, tome $x \in X_G$ tal que $x \in [A]$ com $[A]$ um cilindro qualquer. Qualquer sequência de $[A]$ admite subsequência convergente pelo fato de G ter finitos in e out-degree para cada vértice. \square

A partir de agora, vamos definir mais alguns conceitos preliminares sobre um espaço Shift que iremos utilizar ao decorrer desse trabalho, e alguns resultados topológicos necessários para isso.

Definição 75. Definimos a órbita de $x \in (X, \sigma)$ como sendo o conjunto

$$Orb(x) = \{\sigma^n(x) | n \in \mathbb{Z}\} \subset X$$

Definição 76. Definimos o conjunto σ – órbita de X por

$$Orb(X) = \{Orb(x) | x \in X\}$$

Definição 77. Dado um espaço Shift X , definimos a órbita à esquerda e à direita respectivamente pelos conjuntos

$$Orb^- = \{\sigma^{-n}(x) | n \in \mathbb{N}/\{0\}\} \text{ e } Orb^+ = \{\sigma^n(x) | n \in \mathbb{N}/\{0\}\}$$

Definição 78. Dizemos que $x \in X$ é um ponto Doubly transitive se $\overline{Orb^-(x)} = \overline{Orb^+(x)} = X$

Definição 79. Seja X um espaço Shift. O conjunto dos pontos Doubly Transitive é dado por

$$DT(X) = \{x \in X | \overline{Orb^-(x)} = \overline{Orb^+(x)} = X\}$$

Se X for transitivo, então podemos provar que $DT(X)$ é denso em X . Vejamos a demonstração.

Proposição 80. Se X é espaço Shift transitivo então $DT(X)$ é denso.

Demonstração. De fato, suponha que X é transitivo, e seja $C = \{[C_1], [C_2], \dots\}$ o conjunto de todos os cilindros que geram a topologia em X , o qual é enumerável já que o alfabeto é enumerável.

Construa a seguinte sequência:

$$x^1 = \dots C_1 \dots,$$

$$x^2 = \dots C_1 w_1 C_2 \dots,$$

:

$$x^{i+1} = \dots C_1 w_1 C_2 \dots C_i w_i C_{i+1} \dots$$

E assim sucessivamente, onde w_i é uma palavra ligando C_i com C_{i+1} , a qual existe pois X é transitivo. Note que $x^n \rightarrow x$ onde x está contido em todos os dos cilindros, e como X é fechado, segue que $x \in X$.

Além disso, veja que $orb^-(x)$ e $orb^+(x)$ são densos em X por construção e portanto $x \in DT(X)$. Concluimos que $DT(X) \neq \emptyset$. Resta provar que $DT(X)$ é denso, mas veja que se $x \in DT(X)$, então $orb^-(x), orb^+(x) \subset DT(X)$ os quais já são densos em X , portanto $DT(X)$ temos o desejado. \square

Nessa demonstração fica claro o fato da importância de um espaço Shift ser perfeito, ou seja, não possuir pontos isolados, pois aqui quando tomamos um ponto é possível construir uma sequência que convirja para ele. Na próxima demonstração não é diferente, novamente também vamos usar o fato de que as orbitas negativas e positivas de x não possuem pontos isolados.

Proposição 81. *Seja X um espaço shift qualquer. Dado $x \in X$, temos $x \in DT(X)$, com X se, e somente se, todo bloco $w \in B(X)$ está contido infinitamente em $x_{(-\infty,0]}$ e $x_{[0,\infty)}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $w \in B(X)$ tal que w aparece finitas vezes em $x_{[0,\infty)}$. Nesse caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $w \notin \sigma^n(x_{[0,\infty)})$, ou seja, existe elemento de $orb^+(x)$ que não é ponto de acumulação, o que é um absurdo, pois $orb^+(x)$ é denso em X .

Para $x_{(-\infty,0]}$ se demonstra de forma análoga.

Reciprocamente, se $w \in B(X)$ está contido em $x_{(-\infty,0]}$ e $x_{[0,\infty)}$ para todo w , temos que as orbitas de x são densas e portanto $x \in DT(X)$. \square

Agora que temos esse resultado, podemos provar que $DT(X)$ ser denso implica em X ser transitivo, pois dado G um grafo que representa X , e u, w caminhadas finitas em G . Dado $x \in DT(X)$, sabemos que u e w estão infinitamente contidos em $x_{[0,\infty)}$ e $x_{(-\infty,0]}$. Logo, existe palavra entre w e u e vice-versa. Concluimos que X é transitivo.

É importante observarmos que essa demonstração e todas as outras feitas para espaços Shift, independem de o alfabeto ser finito ou infinito enumerável, pois é evidente que vale para ambos os casos. Lembrando que a única grande diferença entre um espaço Shift de alfabeto finito e um de alfabeto infinito enumerável, é a perda da compacidade no segundo caso. Sendo assim, qualquer demonstração que não necessita de compacidade, pode ser reproduzida para os casos, inclusive as próximas definições e resultados, que tratam sobre os pontos periódicos de um espaço Shift.

Definição 82. *Dado um espaço Shift X definimos $Per_n(X)$ com $n \in \mathbb{N}$ como sendo o conjunto dos pontos periódicos de período n de X . Em termos matemáticos*

$$Per_n(X) = \{x \in X : \sigma^n(x) = x\}$$

Definição 83. *Definimos também para um espaço Shift X o conjunto*

$$Per(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(X)$$

Proposição 84. *Se um espaço Shift X transitivo sobre um alfabeto finito ou infinito enumerável, então $Per(X)$ é subconjunto denso e enumerável de X .*

Demonstração. De fato, $Per(X)$ é enumerável pois existe uma quantidade enumerável de blocos de tamanho finito para gerar todos os pontos periódicos.

Para provar que é denso, para todo $n \in \mathbb{N}$ construa o ponto periódico

$$x^n = \cdots w_0 C_1 w_1 \cdots C_n w_n C_1 w_1 \cdots w_{n-1} C_n w_n \cdots$$

com w sendo a palavra de ligação entre C_n e C_1 , a qual existe pois X é transitivo, e $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sendo cilindros do conjunto enumerável de todos os cilindros de X .

Note que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x^n\} \subset Per(X)$ é denso em X e segue que $Per(X)$ é denso em X como desejado. \square

2.2 SOBRE SHIFT MARKOV DE ESTADO ENUMERÁVEL

Agora, vamos dar início aos conceitos preliminares sobre o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável, para mais adiante podermos enunciar os resultados que, de fato garantem, que o grupo de automorfismos de um espaço Shift sobre um alfabeto finito é no máximo enumerável. Os conceitos fundamentais para a definição desse grupo são a definição de homeomorfismo e quando uma função comuta com o shift map, que são as duas próximas definições respectivamente.

Definição 85. *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Um homeomorfismo é uma função $f : X \rightarrow Y$ que é contínua, inversível com inversa contínua.*

Definição 86. *Sejam X e Y espaços Shift sobre os alfabetos A e B respectivamente e $\phi : X \rightarrow X$. Dizemos que ϕ comuta com o shift map se*

$$\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$$

Definição 87. *Dado um espaço Shift X , dizemos que $\phi : X \rightarrow X$ é um automorfismo se é um homeomorfismo que comuta com o shift map.*

O conjunto de todos os automorfismos em X é denotado por $Aut(\sigma)$.

É importante notar que $Aut(\sigma) \neq \emptyset$, pois pelo menos σ^n , para todo $n \in \mathbb{Z}$, são automorfismos. Vamos agora definir um grupo e provar que $Aut(\sigma)$ é de fato um grupo sobre a operação composição. Esse é o conceito primordial desse trabalho e é sobre o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável que procuramos resultados relevantes.

Definição 88. *Seja G um conjunto e $*$ uma operação binária definida sobre G . O par $(G, *)$ é dito ser um grupo se satisfaz as seguintes propriedades:*

Associatividade: *Para quaisquer $a, b, c \in G$,*

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Existência do elemento neutro: Existe um elemento $e \in G$ tal que para todo $a \in G$

$$e * a = a * e = a$$

Existência do elemento simétrico: Para qualquer $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

Proposição 89. Para qualquer espaço Shift X , $Aut(\sigma)$ é um grupo com a operação composição.

Demonstração. Sejam $\phi, \rho, \psi \in Aut(\sigma)$.

Associatividade:

$$(\phi \circ \rho) \circ \psi(x) = (\phi \circ \rho)(\psi(x)) = \phi(\rho(\psi(x))) = \phi(\rho \circ \psi(x)) = \phi \circ (\rho \circ \psi)(x)$$

Existência do elemento neutro:

Defina $Id : X \rightarrow X$ por $Id(x) = x$. É evidente que Id é homeomorfismo e

$$Id \circ \sigma(x) = Id(\sigma(x)) = \sigma(x) = \sigma(Id(x)) = \sigma \circ Id(x)$$

Logo, temos que $Id \in Aut(\sigma)$. Além disso, Id é o elemento neutro procurado:

$$Id \circ \phi(x) = Id(\phi(x)) = \phi(x) = \phi(Id(x)) = \phi \circ Id(x)$$

Existência do elemento simétrico:

Sabemos que se $\phi \in Aut(\sigma)$ então existe ϕ^{-1} e é evidentemente um homeomorfismo. Afirmamos que $\phi^{-1} \in Aut(\sigma)$, para isso, provemos apenas que comuta com σ .

$$\phi^{-1} \circ \sigma = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = Id \circ \sigma \circ \phi^{-1} = \sigma \circ \phi^{-1}$$

□

Agora podemos dar início aos resultados sobre o grupo de automorfismos de um espaço shift, veremos com um pouco mais de detalhes que o grupo de automorfismos de um espaço Shift sobre um alfabeto finito é, no máximo, enumerável. Para isso, vamos precisar da definição de Sliding Block Code.

Suponha que $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é um elemento de um espaço shift X sobre o alfabeto finito A . Vamos “transformar” o elemento x em um novo elemento $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sobre o alfabeto \mathcal{U} formado por blocos da seguinte maneira: Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $-m \leq n$. Para obtermos a i -ésima coordenada da sequência y usamos a função Φ que depende da “janela” de coordenadas de x de $i - m$ até $i + n$, onde $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathcal{U}$ é uma função que leva blocos em blocos fixada, chamada $(m + n + 1)$ -bloco. Temos

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \cdots x_{i+n}) = \Phi(x_{[i-m, i+n]})$$

Definição 90. *Seja X um espaço Shift sobre A e $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathcal{U}$ uma função bloco. Então a função*

$$\phi : X \rightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$$

definida por $y = \phi(x)$ com y_i dado por

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \cdots x_{i+n}) = \Phi(x_{[i-m, i+n]})$$

é chamada Sliding Block Code (SBC) induzido por Φ com memória m e antecipação n .

Denotamos $\Phi = \Phi_{\infty}^{[-m, n]}$ ou simplesmente Φ_{∞} quando não ha risco de confusão sobre o valor da memória.

Se não especificamos a memória, por convenção é 0. Se Y é espaço Shift contido em $\mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ escrevemos

$$\phi : X \rightarrow Y$$

Quando estamos sobre um alfabeto finito, temos um resultado muito forte sobre a caracterização de um SBC. No caso, uma função entre dois espaços Shift é um Sliding Block Code se, e somente se, é contínua e comuta com o Shift map, como é enunciado e demonstrado no próximo teorema.

Teorema 91 (Curtis-Hedlund-Lyndon). *Sejam A e B alfabetos finitos e X, Y espaços shift sobre A e B respectivamente. Uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é SBC se, e somente se, é contínua e comuta com o shift map.*

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [4]. □

Veja que o teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon nos diz que dados X e Y espaços Shift sobre os alfabetos A e B respectivamente, Se $\phi : X \rightarrow Y$ é SBC então $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$.

Com esse resultado, podemos pensar sobre o grupo de automorfismos de um espaço Shift sobre um alfabeto finito, pois para ser automorfimo, é necessário que seja um homeomorfimo que comuta com o shift map. Evidentemente, o conjunto dos automorfismos é um subconjunto do conjunto dos SBC, resta agora sabermos qual a cardinalidade do conjunto de SBC. Para isso, vejamos outro resultado de caracterização de SBC que nos auxiliará ver que temos no máximo enumeráveis SBC.

Proposição 92. *Sejam X e Y espaços Shift sobre os alfabetos A e B respectivamente. $\phi : X \rightarrow Y$ é SBC se, e somente se, $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ e existe $N \geq 0$ tal que $\phi(x)_0$ é uma função de $x_{[-N, N]}$.*

Demonstração. Supondo que ϕ é SBC, do lema e da definição temos o desejado. Reciprocamente, defina a função $(2N+1)$ -bloco Φ por $\Phi(w) = \phi(x)_0$ onde x é qualquer ponto em X tal que $x_{[-N, N]} = w$. É evidente que $\phi = \Phi_{\infty}^{[-N, N]}$. □

Da proposição anterior, concluímos que um SBC definido de X em X é definido por regras locais de palavras com tamanho $2N + 1$ para algum $N \geq 0$. Do fato de estarmos sobre um alfabeto finito, podemos concluir que a quantidade de SBC é no máximo enumerável, podendo ser até finita depende do espaço Shift. Sendo assim, o grupo de automorfismos de um Shift sobre um alfabeto finito que está contido no conjunto de SBC desse Shift, é no máximo enumerável.

Definimos um Shift of Finite Type como sendo um espaço Shift sobre um alfabeto qualquer cujo conjunto de palavras proibidas é finito, e denotamos (*SFT*).

Sobre o automorfismos de um SFT, temos por [1] que $Aut(\sigma)$ de um SFT sobre um alfabeto finito ou infinito enumerável é infinito enumerável.

Agora, podemos dar início aos resultados sobre o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável, mas para isso, vamos primeiro definir o grupo de permutações e sua cardinalidade. Utilizaremos esse grupo em várias demonstrações para falarmos da cardinalidade e de subgrupos que ocorrem em $Aut(\sigma)$ de um Shift Markov de Estado Enumerável.

3 RESULTADOS INICIAIS SOBRE O GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE UM SHIFT MARKOV DE ESTADO ENUMERÁVEL

Nosso primeiro resultado nos diz que a cardinalidade do grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo é no máximo 2^{\aleph_0} que é a cardinalidade dos números reais. Quando garantimos que o Shift Markov de Estado Enumerável não é localmente compacto, a cardinalidade será exatamente 2^{\aleph_0} , como será demonstrado no segundo resultado. Para tais demonstrações, necessitamos a definição do grupo de permutações. que será feita logo a seguir.

Definição 93. Definimos $S_{\mathcal{F}}$ como sendo o conjunto de todas as bijeções de \mathcal{F} em \mathcal{F} onde \mathcal{F} é enumerável, em outras palavras,

$$S_{\mathcal{F}} = \{f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : f \text{ é bijeção}\}$$

Chamamos $S_{\mathcal{F}}$ de grupo de permutações de \mathcal{F} .

Definição 94. Denotamos $S_{\mathcal{F},f}$ o subgrupo de $S_{\mathcal{F}}$ de permutações finitas, isto é, $f(n) \neq n$ para finitos n .

Proposição 95. A cardinalidade de $S_{\mathbb{N}}$ é 2^{\aleph_0} .

Demonstração. De fato, suponha que seja enumerável e considere $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sua enumeração. Construindo f tal que $f(i) \neq f_i(i)$ para todo i natural, com $f(j) \neq f(i)$ para todo $j < i$ natural, temos que f é elemento de $S_{\mathbb{N}}$ que por construção não está na enumeração, o que é um absurdo com o fato de $S_{\mathbb{N}}$ ser enumerável. Concluimos então que a cardinalidade de $S_{\mathbb{N}}$ é 2^{\aleph_0} . \square

Proposição 96. A cardinalidade de $S_{\mathbb{N},f}$ é \aleph_0 , ou seja, é enumerável e portanto possui mesma cardinalidade de \mathbb{N} .

Demonstração. Considere $(f_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ todas as funções que diferem apenas uma variável, $(f_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ todas as funções que diferem em duas variáveis e prossiga assim sucessivamente. Veja que

$$f_1^1, f_2^1, f_3^1, \dots, f_i^1, f_i^2, \dots$$

é uma enumeração para $S_{\mathbb{N},f}$.

\square

Proposição 97. O grupo de automorfismos de todo shift Markov de estado enumerável transitivo é isomorfo a um subgrupo de $S_{\mathbb{N}}$ e portanto, tem cardinalidade no máximo 2^{\aleph_0} .

Demonstração. Do fato de X ser transitivo segundo a Proposição 85, temos que $Per(X)$ é enumerável e denso em X e cada automorfismo $\phi \in Aut(\sigma)$ é completamente determinado por sua ação em $Per(X)$. No caso, $\phi, \rho : X \rightarrow X$ tais que $\phi|_{Per(X)} = \rho|_{Per(X)}$ nos dá $\phi = \rho$.

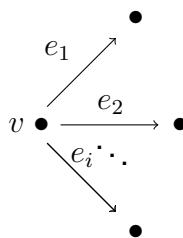
Defina $F : Aut(\sigma) \rightarrow S_{Per(X)}$ como $F(\phi) = \phi|_{Per(X)}$. Note que F é injetora, e portanto, $Aut(\sigma) \leq S_{Per(X)}$. Veja que $Per(X) \cong \mathbb{N}$ uma vez que $Per(X)$ é enumerável, logo $S_{Per(X)} \cong S_{\mathbb{N}}$. Segue que $|Aut(\sigma)| \leq 2^{\aleph_0}$ \square

A ideia geral dessa demonstração foi encontrar um subgrupo do grupo de automorfismos de mesma cardinalidade que contivesse o grupo de automorfismos, para assim garantir que a cardinalidade era no máximo 2^{\aleph_0} .

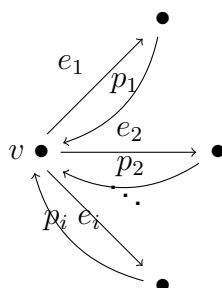
Como mencionado anteriormente, o próximo resultado fala sobre o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo que não é localmente compacto. A ideia intuitiva da demonstração é tomar um vértice que possui out-degree infinito, construir a partir disso um conjunto enumerável de automorfismos distintos que é subgrupo de $Aut(\sigma)$, contruir sobre esse subconjunto os produtos infinitos de seus elementos os quais serão todos automorfismos e ver que o conjunto desses produtos tem cardinalidade 2^{\aleph_0} como desejado. A demonstração para in-degree é feita de forma análoga.

Teorema 98. *Todo Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e não localmente compacto tem um grupo de automorfismo de cardinalidade 2^{\aleph_0} .*

Demonstração. Sabemos da Proposição 20 que se X é transitivo e localmente compacto então $G = (V, E)$, o grafo que representa X , tem in-degree e out-degree finito. Nesse caso, se X é não localmente compacto, então existe $v \in V$ tal que v tem out-degree infinito (a demonstração poderia ser feita para in-degree infinito e é análoga).



Seja $\{e_j | j \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ o conjunto de out-degree de v . Para cada $j \in \mathbb{N}$ escolha o menor caminho p_j de $t(e_j)$ voltando para v (isso é possível pois G é fortemente conectado) e defina $p_j = \emptyset$ se $t(e_j) = v$. Isso nos dá um conjunto de infinitos loops distintos $l_j = e_j p_j$ no vértice v .



Use as arestas $e_j, j \in 3\mathbb{N}$ como marcadores para definir $\phi_i : X \rightarrow X$ mudando os blocos $l_{3i-2}l_{3i-1}e_{3i}$ para $l_{3i-1}l_{3i-2}e_{3i}$.

Por construção, nenhum caminho $p_j, j \in \mathbb{N}$ pode conter uma aresta $e_i, i \in \mathbb{N}$. Isso garante que nenhum loop $l_j, j \in 3\mathbb{N}$ contém qualquer aresta e_{3i} e dois loops não possuem overlap, em outras palavras, não possuem sobreposição. Logo ϕ_i está bem definida.

ϕ_i é automorfismo, pois é sequencialmente contínua, inversível com inversa contínua e evidentemente comuta com a função shift.

Assim, construímos um conjunto enumerável de automorfismos distintos $\{\phi_i | i \in \mathbb{N}\} \subset Aut(\sigma)$.

Agora, considere os produtos infinitos de ϕ_i e mostraremos que para toda sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ existe um automorfismo bem definido $\rho_{(a_k)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{a_i}$.

Automorfismos distintos ϕ_i agem em blocos disjuntos terminados em e_{3i} . Os ϕ_i comutam entre si e o produto infinito $\rho_{(a_k)}$ é definido independentemente de outra composição.

Temos

$$(\rho_{(a_k)})^2 = \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{a_i} \right)^2 = \prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{2a_i} = Id$$

e $\rho_{(a_k)}(X) \subset X$, concluímos que $\rho_{(a_k)}$ é sobrejetora. Note que $\rho_{(a_k)}$ é também injetora, pois cada ϕ_i é injetor. Além disso, como cada ϕ_i comuta com shift-map, $\rho_{(a_k)}$ também comuta. Como $\phi_i^2 = Id$ temos que $\rho_{(a_k)}^{-1} = \rho_{(a_k)}$.

Precisamos provar que $\rho_{(a_k)}$ é contínua (e portanto, $\rho_{(a_k)}^{-1}$ é contínua e temos $\rho_{(a_k)}$ automorfismo).

A continuidade de $\rho_{(a_k)}$ segue do fato de que cada entrada $\phi_i^{a_i}$ é contínua.

Duas sequências distintas (a_k) e (b_k) em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definem automorfismos distintos $\rho_{(a_k)} \rho_{(b_k)}$. Para $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \neq b_i$ e ponto $x = (l_{3i-2}l_{3i-1}e_{3i}p_{3i})^\infty \in X$ onde p_{3i} é o menor caminho de $t(e_{3i})$ voltando para v , tem diferentes imagens sobre $\rho_{(a_k)}$ e $\rho_{(b_k)}$.

Veja que $\{\rho_{(a_k)} | (a_k) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$ é subgrupo de $Aut(\sigma)$ de mesma cardinalidade de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que é 2^{\aleph_0} . como desejado. \square

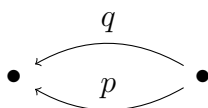
Veja que a propriedade de o grafo ser transitivo é de suma importância para os caminhos estarem bem definidos, pois sem garantir que os caminhos que construímos

na demonstração de fato existem, não podemos falar muito sobre a cardinalidade do grupo de automorfismos.

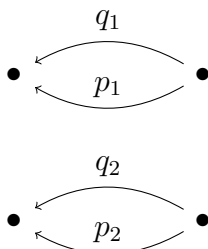
Agora vamos iniciar uma série de definições que serão necessárias para definir a propriedade **FMDP**, a qual é de suma importância para a análise da cardinalidade do grupo de automorfismos como veremos nos resultados posteriores.

Definição 99. Dizemos que um par de caminhos distintos p, q é *doublepath* se eles possuem o mesmo comprimento e mesmos vértice início e vértice de término. Denotamos por $[p; q]$.

A figura que segue nos dá uma ideia intuitiva do que é um doublepath e deixa claro que da definição temos que $[p; q] = [q; p]$.



Definição 100. Dois *double paths* $[p_1; q_1]$ e $[p_2; q_2]$ são *edge-disjoint* se o conjunto de todas arestas de p_1 e q_1 é disjunto do conjunto de todas arestas de p_2 e q_2 , caso haja um caminho cíclico, assumimos apenas a menor caminhada sobre esse caminho e desconsideramos as outras



Definição 101. Um grafo orientado fortemente conectado tem a propriedade *Finitely Many pairwise edge-disjoint Double Path FMDP* se contém no máximo finitos pares *doublepaths edge-disjoint*.

O próximo teorema nos fala sobre como é a cardinalidade do grupo de automorfismos na ausência e na presença da propriedade **FMDP**, nos dando uma caracterização sobre quando $Aut(\sigma)$ é enumerável.

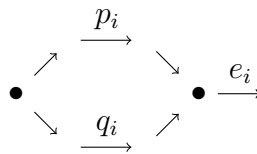
Teorema 102. Seja X Shift Markov de Estado Enumerável, transitivo e localmente compacto. $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade \aleph_0 se, e somente se, qualquer grafo que representa X é **FMDP**. Caso contrário, $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade 2^{\aleph_0} .

Para a demonstração desse teorema, necessitamos três lemas, os quais enunciaremos e demonstraremos a seguir. O primeiro deles demonstra a segunda parte do teorema, no caso na ausência da propriedade **FMDP** a cardinalidade do grupo de automorfismos é exatamente 2^{\aleph_0} .

Lema 103. *Seja X_G qualquer representação de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e localmente compacto, onde G contém infinitos edge-disjoint doublepaths. Então $\text{Aut}(\sigma)$ tem cardinalidade 2^{\aleph_0} .*

Demonstração. Como X é irredutível e localmente compacto, temos que o grafo G representante de X é fortemente conectado e localmente finito.

Seja $P := \{[p_i; q_i] : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto infinito de pares doublepaths edge-disjoint em G . Para cada $[p_i; q_i]$ escolha uma aresta marcadora e_i iniciando em $t(p_i) = t(q_i)$, no caso não contida nesse doublepath.



Note que isso é possível pois G tem infinitos doublepath edge-disjoint e G é fortemente conectado, então existe aresta iniciando em $t(p_i) = t(q_i)$ que não é aresta de $[p_i; q_i]$.

Pegue a aresta marcadores e use o doublepath ampliando o término com a aresta e_i no lugar de $[p_i; q_i]$, o qual não necessariamente é um doublepath.

Dessa forma, construímos indutivamente um subconjunto $Q \subset P$ de doublepaths disjuntos $[p_i e_i; q_i e_i]$ tal que todas as arestas marcadores são distintas e nenhuma ocorre em qualquer doublepath em Q (pois são doublepaths edge-disjoint).

Seja $Q_0 = \emptyset$. Escolha $[p; q] \in P$ e defina $Q_1 = Q_0 \cup \{[p; q]\}$. Como G é localmente finito, há um número finito de elementos em P com marcadores que fazem parte de $[p; q]$. Remova esse subconjunto finito. Sobram ainda infinitos doublepath em P .

Prosseguindo assim por indução, temos o conjunto $Q = \{[p_i; q_i]; i \in \mathbb{N}\}$.

Para toda sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod \{0, 1\}$ defina a função $p_{(a_k)} : X_G \rightarrow X_G$ trocando cada bloco $p_i e_i$ e $q_i e_i$ em X_G , se e somente se, $a_i = 1$.

$p_{(a_k)}$ está bem definida, pois usamos marcadores distintos e pela propriedade edge-disjoint de todos doublepaths $[p_i; q_i] \in Q$.

Além disso, $p_{(a_k)}$ comuta com σ por construção, e é bijeção com inversa sendo ela mesma.

Sequencialmente é possível ver que $p_{(a_k)}$ é contínua.

Como $p_{(a_k)}$ é bijeção contínua com inversa contínua, e comuta com σ , temos que $p_{(a_k)}$ é automorfismo.

Isso mostra a existência de um subgrupo $\{p_{(a_k)}; (a_k) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\} \subset \text{Aut}\sigma$ de cardinalidade 2^{\aleph_0} como desejado.

□

A ideia geral da demonstração foi, da mesma forma que o Teorema 101, construir algum conjunto de automorfismos distintos que dependem de doublepaths estendidos

por arestas marcadoras, cuja cardinalidade é 2^{\aleph_0} .

Para o próximo lema precisamos da noção de F – esqueleto de uma sequência bi-infinita, pois vamos dar uma caracterização de **FMDP** através do seu esqueleto.

Seja $F \subset A$ um subconjunto do alfabeto A . O F -esqueleto de um ponto $x \in A^{\mathbb{Z}}$ é o mapeamento $k_x : \mathbb{Z} \rightarrow F$ definido por $k_x = x_i$ se $x_i \in F$ e \uparrow (indefinido) caso contrário.

Lema 104. *Um grafo localmente finito e fortemente conectado $G = (V, E)$ cumpre **FMDP** se, e somente se, existe um conjunto finito $F \subset E$ de arestas, tal que toda caminhada doubly-transitive sobre as arestas de G são unicamente determinadas por seu F – esqueleto.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma $|E| = \aleph_0$, pois caso contrário E é finito e portanto já temos o desejado.

Suponha por absurdo que G não é **FMDP**, então para todo subconjunto finito $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subsetneq E$ existe um doublepath $[p; q]$ que não contém nenhuma aresta de F , uma vez que há infinitos doublepaths disjuntos. O caminho p ocorre infinitamente em uma caminhada sobre cada doubly-transitive.

Mudando p pelo bloco q , temos outra caminhada sobre outro doubly-transitive, que obviamente tem o mesmo esqueleto, já que começam e terminam no mesmo vértice.

Reciprocamente, suponha que $P = \{[p_n; q_n]; 1 \leq n \leq N\}$ é um conjunto finito maximal de doublepaths edge-disjoint em G , o qual cumpre **FMDP**.

Seja $F \subsetneq E$ a união de todas arestas que aparecem em elementos de P . Note que F é um conjunto finito.

Suponha por contradição que há duas caminhadas doubly-transitive $x, y \in DT(X_G)$ com o mesmo F – esqueleto.

Existem coordenadas $i \leq j \in \mathbb{Z}$ tais que $x_{i-1} = y_{i-1}$, $x_{i+1} = y_{i+1} \in F$ com $x_k, y_k \notin F \forall i \leq k \leq j$ e $x_{[i,j]} \neq y_{[i,j]}$, pois $x \neq y$. Isso implica a existência de um doublepath $[x_{[i,j]}; y_{[i,j]}]$ de tamanho $j - i + 1$ conectando $t(x_{i-1}) = t(y_{i-1})$ e $i(x_{i-1}) = i(y_{i-1})$ que é edge-disjoint a todo elemento em P o que é uma contradição de acordo com a maximalidade de P .

□

Lema 105. *Seja X Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e localmente compacto, representado por $G = (V, E)$. Suponha que existe um conjunto finito $F \subsetneq E$ de arestas tal que cada ponto doubly-transitive em X é unicamente determinado por seu F – esqueleto, então $Aut(\sigma)$ é infinito enumerável.*

Demonstração. Temos que G é fortemente conectado e localmente finito com $|E| = \aleph_0$. Note que $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade pelo menos \aleph_0 .

Como $DT(X)$ é denso em X , todo automorfismo $\rho \in Aut(\sigma)$ é unicamente determinado por sua ação em pontos de $DT(X)$. É suficiente mostrar que existe no máximo enumeráveis restrições $\rho|_{DT(X)}$ possíveis.

Seja $F \subsetneq E$ conjunto finito como no enunciado. X localmente compacto nos dá que todo cilindro $[e]$ com $e \in E$ é compacto e aberto.

A pré-imagem $\rho^{-1}([e])$ também é compacta e aberta para qualquer $\rho \in Aut(\sigma)$, e portanto, pode ser coberta por um conjunto finito de cilindros. Escolha a cobertura minimal de cardinalidade $m_f \in \mathbb{N}, \forall f \in F$:

$$\rho^{-1}([f]) = \bigcup_{i=1}^{m_f} [b_{f,i}]_{n_{f,i}}$$

com $b_{f,i} \in B(X)$ e $n_{f,i} \in \mathbb{Z}$.

Como ρ comuta com σ , temos:

$$\rho([b_{f,i}]_{n_{f,i}+k}) \subset [f]_k = \bigcup_{j=1}^{m_f} \rho([b_{f,j}]_{n_{f,j}}) \quad \forall i \leq 1 \leq m_f, k \in \mathbb{Z}$$

Conhecer essa pré-imagem de cilindros $\{[b_{f,i}]_{n_{f,i}} | 1 \leq i \leq m_f\}$ para todo f em F é equivalente a conhecer todo o F – esqueleto na imagem de todo ponto em X sobre ρ .

Seja M o conjunto de todas funções $\mu : F \rightarrow \{C \subset C(X) | |C| < \infty\}$, definido por $\mu(f) = \{[b_{f,i}]_{n_{f,i}} | 1 \leq i \leq m_f\}$ onde $C(X)$ denota o conjunto enumerável de todos cilindros de X . Evidentemente $\{C \subsetneq C(X) | |C| < \infty\}$ é enumerável e portanto, M também é.

Agora, note que uma função $\mu \in M$ induz no máximo um automorfismo, pois elementos distintos de F terão cilindros distintos, sendo assim, dados $\alpha, \beta \in Aut(\sigma)$ distintos, temos que $\mu(\alpha) \neq \mu(\beta)$ e portanto, temos uma injetividade de $Aut(\sigma)$ para M . \square

O Lema 1 nos diz que se X é Shift Markov de Estado Enumerável, localmente compacto mas não cumpre **FMDP**, então $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade 2^{\aleph_0} , que prova a segunda parte do Teorema 2, por outro lado, o Lema 3 nos dá condições para que $Aut(\sigma)$ tenha cardinalidade \aleph_0 , e o lema 2 caracteriza quando um grafo cumpre **FMDP**.

Para provar a primeira parte do teorema, basta notar que X cumpre **FMDP** se, e somente se, cumpre a condição do Lema 3 a qual equivale a dizer que a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ é \aleph_0 em particular, veja que a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ independe da representação do Shift escolhida.

Como consequência dos lemas anteriores, temos resultados sobre a topologia compacta-aberta em $Aut(\sigma)$. Essa topologia é construída de sub-bases da forma

$$S(C, U) = \{\rho \in Aut(\sigma) : \rho(C) \subset U\}$$

onde $C \subset X$ é compacto e $U \subset X$ é aberto.

Para Shift Markov de Estado Enumerável essa topologia não é necessariamente discreta, como veremos no colorlário a seguir nos dando uma caracterização sobre quando é discreta ou não.

Corolário 106. *Seja X Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e localmente compacto. A topologia compacta-aberta em $Aut(\sigma)$ é discreta se, e somente se, $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade \aleph_0 .*

Demonstração. Todo automorfismo $\rho \in Aut(\sigma)$ é unicamente determinado fixando o conjunto finito de cilindros $\{[B_{f,i}] | i = 1, \dots, m_f\}$ para qualquer f no conjunto F -esqueleto. Desde que ρ induz uma bijeção nos pontos periódicos, não é possível ter outro automorfismo cuja pré-imagem de cilindros contém aquele ρ para todo f em F .

Portanto, $\{\rho\}$ pode ser expressado como uma interseção finita de sub-bases. Reciprocamente, suponha que $Aut(\sigma)$ não é enumerável. Então toda representação de grafo contém um conjunto infinito de doublepaths edge-disjoint, segundo o Lema anterior. Para um automorfismo $\rho_{(a_k)}$ como definido em Lema 1, precisamos fixar a ação em todos doublepaths, mas isso só é possível via interseção infinita de sub-bases, pois dada interseções finitas de sub-bases, teremos uma ação fixa de um automorfismo em um conjunto finito de doublepaths. Sendo assim, concluímos o desejado. \square

Então podemos ver que a propriedade **FMDP** não só governa a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ mas também a estrutura topológica de $Aut(\sigma)$ para Shift Markov de Estado Enumerável localmente compactos.

Até o momento, vimos que a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo é no máximo 2^{\aleph_0} , que é enumerável se, e somente se, cumpre **FMDP** e é exatamente 2^{\aleph_0} caso contrário ou caso não seja localmente compacto.

No próximo capítulo, veremos que quando temos a propriedade **FMDP** sobre os grafos representantes do Shift Markov de Estado Enumerável, temos também um forte impacto na estrutura de subgrupo do grupo de automorfismo.

4 SHIFT MARKOV LOCALMENTE COMPACTO DE ESTADOS ENUMERÁVEIS

Esse capítulo tem por objetivo encontrar uma caracterização mais geral de **FMDP** para dessa forma, termos uma representação generalizada do Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto com grupo de automorfismos enumerável. Mas antes disso, relembremos como definir uma compactificação.

Definição 107. *Seja X um espaço topológico localmente compacto, a extensão de Alexandroff de X é um espaço compacto X^* junto com um mapeamento injetivo aberto $c : X \rightarrow X^*$ tal que o complemento de X em X^* é um único ponto denotado por ∞ .*

Chamamos a função c de compactificação se, e somente se, X é não compacto e é localmente compacto. Para X dessa forma, chamamos a extensão de Alexandroff de compactificação de 1 ponto.

Definição 108. *Para um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto e transitivo (X, σ) definimos a compactificação de 1 ponto (X_0, σ_0) onde $X_0 = X \cup \{\infty\}$ compactificação de Alexandroff e homeomorfismo $\sigma_0 : X_0 \rightarrow X_0$ extensão canônica de σ como $\sigma_0|_X = \sigma$ e $\sigma_0(\infty) = \infty$.*

Temos que σ_0 é expansível, os detalhes serão omitidos neste trabalho mas podem ser encontrados em [5]. Temos que (X_0, σ_0) é subshift de um espaço shift se, e somente se, qualquer representação de grafo de X em um grafo localmente compacto e fortemente conectado $G = (V, E)$ contém um conjunto finito $F \subsetneq E$ de arestas tal que:

- (1) Cada caminhada bi-infinita sobre as arestas de G contém uma aresta de F ;
- (2) Para qualquer par de arestas $c, d \in E$ e $n \in \mathbb{N}$ existe no máximo um caminho $p = e_1 \cdots e_n$ tal que $i(e_1) = t(c)$, $t(e_n) = i(d)$ e $e_i \notin F$ para todo $i = 1, \dots, n$;
- (3) Para toda aresta $e_0 \in E$ existe no máximo um raio $r = (e_i)_{i \geq 0}$ com $e_i \notin F$ para todo $i \geq 1$ e no máximo um raio $l = (e_i)_{i \leq 0}$ com $e_i \notin F$ para todo $i \leq -1$.

Em geral σ_0 não pode ser expandida (novamente, os detalhes dessa afirmação serão omitidos mas podem ser encontrados em [5]), e como consequência disso temos que a compactificação (X_0, σ_0) é um espaço métrico que não necessariamente é subshift de algum espaço shift, ou seja, quando iteramos dois pontos distintos, pode ser que eles fiquem cada vez mais afastados. Nosso primeiro resultado mostra que a propriedade (2) citada anteriormente é equivalente à propriedade **FMDP**.

Proposição 109. *Um grafo G fortemente conectado e localmente finito cumpre (2) se, e somente se, é **FMDP**.*

Demonstração. Primeiro, considere G fortemente conectado e localmente finito que cumpre (2). Provemos que é **FMDP**.

Suponha que existem infinitos pares de doublepaths edge-disjoint em G . Para cumprir (2), o conjunto F precisa conter ao menos uma aresta de cada doublepath, já que existe no máximo um caminho que não tem aresta de F , e isso contradiz a hipótese de F ser finito.

Reciprocamente, supondo que a propriedade **FMDP** seja cumprida, seja P o conjunto maximal finito de doublepaths edge-disjoint em G .

Defina $F = \{e \in E \mid \exists [p; q] \in P : e \in p \vee e \in q\} \subsetneq E$, sendo a união de todas arestas que ocorrem em elementos de P . Desde que P é maximal, todo doublepath em G contém uma aresta do conjunto finito F , isto é, satisfaz (2). \square

O lema seguinte nos diz que as três propriedades anteriores de caracterização não são independentes entre si, no caso, satisfazer 3 implica satisfazer 1.

Lema 110. *Todo grafo fortemente conectado, localmente finito contém um conjunto finito de arestas que cumpre (3), automaticamente satisfaz (1).*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ grafo orientado como dito no enunciado e $F \subsetneq E$ conjunto finito que satisfaz (3). Suponha que a propriedade (1) não é satisfeita, isto é, existe um conjunto infinito $W = \{w^i \in X_G \mid i \in \mathbb{N}\}$ de caminhos bi-finitos tal que nenhum conjunto finito de arestas é suficiente para conter uma aresta em W .

Note que W precisa ter infinitos elementos, pois caso contrário poderíamos facilmente incluir uma aresta de cada caminho no conjunto finito F e teríamos o desejado.

Podemos supor sem perda de generalidade que quaisquer dois elementos $w^i, w^j \in W$ são diferentes sobre translação, ou seja, $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma^k(w^i) \neq \sigma^k(w^j)$, e nenhum w^i contém aresta de F (já que F é finito).

Afirmamos que os elementos de W são pares edge-disjoint. Suponha por absurdo que existe uma aresta $e \in w^i$ tal que $e \in w^j$ com $i \neq j$ ramifica em algum lugar antes (ou depois) de e . Isso nos dá dois caminhos infinitos distintos a direita (ou esquerda), pois $\sigma^k(w^i) \neq w^j$, terminando (começando) em e que não contém aresta de F , o que é um absurdo pois de (3) existe no máximo um caminho infinito para esquerda que não contém aresta de F .

Concluimos que os elementos de W são edge-disjoint.

Seja $I = \{i(f) \mid f \in F\} \subset V$ o conjunto finito de vértices iniciais de todas arestas em F . $\forall i \in \mathbb{N}$ escolha uma aresta $e_i \in w^i$ e o menor caminho p_i conectando $t(e_i)$ com um dos vértices de I .

Por construção, existe um vértice $v \in I$ o qual dois caminhos p_i e p_j terminam (pois há finitos vértices e infinitos $e_i \in w^i$). Agora, os caminhos $e_i p_i$ e $e_j p_j$ são distintos $e_i \neq e_j$ e terminam no mesmo vértice v e podem ser estendidos para uma caminhada infinita para a esquerda e não contém nenhuma aresta de F . Logo, temos dois raios infinitos para a esquerda sem arestas de F o que contradiz (3) novamente.

Resumidamente, supor que existe tal W que não cumpre (1) contradiz o fato de cumprir (3), e isso é suficiente para garantir a veracidade do enunciado. \square

Voltemos para o propósito desse capítulo, que é encontrar uma caracterização de **FMDP** puramente em termos dinâmicos, que resultará em uma representação independente que caracteriza quando um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto tem $Aut(\sigma)$ enumerável. Para isso, vejamos a definição de métrica de Gurevich e a forma explícita do caso de um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto.

Definição 111. *Seja (X_0, σ_0) a compactificação de um ponto de um subshift localmente compacto X . Existe uma métrica $d_0 : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ a qual gera a topologia de X_0 . A restrição $d = d_0|_X$ é chamada métrica de Gurevich.*

Teorema 112. *Se um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto X é representado por G , existe uma forma explícita para a métrica de Gurevich:*

$$\forall x, y \in X; d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(y_n)|$$

onde $h : E \rightarrow \{m^{-1} | m \in \mathbb{N}^*\}$ denota alguma função injetiva do conjunto de arestas em frações de numerador 1.

Demonstração. Vejamos que é uma métrica.

$d(x, y) \geq 0$ é evidente.

$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(y_n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(y_n) - h(x_n)| = d(y, x)$, logo é simétrica.

$d(x, y) = 0 \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(y_n)| = 0 \iff |h(x_n) - h(y_n)| = 0 \forall n \in \mathbb{Z} \iff h(x_n) = h(y_n) \iff x_n = y_n$ pois h é injetiva.

Logo, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

Vale a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(y_n)| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(z_n) + h(z_n) - h(y_n)| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(z_n)| + \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(z_n) - h(y_n)| = d(x, z) + d(y, z) \text{ para qualquer } \\ &z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ de } X. \end{aligned} \quad \square$$

O shift map σ_0 é expansível em relação a métrica de Gurevich se, e somente se, munido da propriedade **FMDP** também cumpre a propriedade (3), isso se deve ao fato de admitir uma métrica que garante que seus pontos não ficarão cada vez mais afastados, que é exatamente o que procuramos quando falamos de ser expansível.

O teorema a seguir fala sobre o que podemos afirmar sobre a compactificação de um ponto na ausência da propriedade (3). Em tal caso, **FMDP** equivale à σ_0

ser expansível apenas em $DT(X)$, ou seja, enquanto adicionando a propriedade (3) garantimos que X é subshift.

Teorema 113. *Para um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e localmente compacto X , a propriedade **FMDP** equivale à σ_0 ser expansível (com respeito a métrica de Gurevich) nos pontos doubly-transitive, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $x \in DT(X)$ e $y \in X$ se $x \neq y$ então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) > c$.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ representação do Shift Markov de Estado Enumerável (X, σ) que cumpre a propriedade **FMDP**. Pelo Lema 2, existe um conjunto finito de arestas $F \subsetneq E$ que determina unicamente cada ponto doubly-transitiv de X via seu F-esqueleto.

Para um mapeamento injetivo $h : E \rightarrow \{m_1 | m \in \mathbb{N}\}$ que induz a métrica de Gurevich, defina

$$C = \frac{1}{2} \min_{f \in F} \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \mid m := h(f)^{-1} \right\}$$

Desde que F é finito, temos que $C > 0$.

Para $x, y \in X$, $x_0 \in F$ e $x_0 \neq y_0$ temos a estimativa:

$$d(x, y) \geq |h(x_0) - h(y_0)| \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \geq 2C > C$$

com $m = h(x_0)^{-1}$.

Para obter $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \leq C \forall n \in \mathbb{Z}$, o F-esqueleto de x e y precisa coincidir. Então para $x \in DT(X)$ temos $x = y$ e portanto, $T_C(x) = \{x\}$.

Reciprocamente, assuma $G = (V, E)$ contendo infinitos pares edge-disjoint doublepaths. Para todo $c > 0$ existe um doublepath $[p; q]$ tal que toda aresta $e \in E$ contida em $[p; q]$ temos $h(e) \leq \frac{c}{3}$ onde h é definida como anteriormente.

Cada $x \in DT(X)$ contém o bloco p infinitas vezes. Substituindo qualquer subconjunto desses de p para q temos não enumeráveis pontos distintos $y \in X$. Veja que

$$\begin{aligned} c &\geq 3 \max\{h(e) | e \in [p; q]\} \geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-|j|} \max\{|h(x_i) - h(y_i)| | i \in \mathbb{Z}\} \\ &\geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-|j|} |h(\sigma^n(x)j) - h(\sigma^n(y)j)| = d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Então, $T_c(x)$ é não enumerável e c não pode ser uma constante de expansividade. \square

Vimos com o teorema anterior que a compactificação de um ponto de um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto com $Aut(\sigma)$ enumerável, não é necessariamente um subshift na ausencia de (3) e ademais σ_0 é expansível se, e

somente se, cumpre as propriedades (2) e (3), podendo descartar (1) já que (3) implica (1).

A propriedade (3) nos diz que a distância entre dois pontos distintos não será infinita e por h na definição da métrica de Gurevich ser injetivo, também podemos garantir que a distância entre esses pontos é maior do que zero. Essa informação é de suma importância para pensar intuitivamente sobre a existência de uma constante de expansão de σ_0 como no teorema anterior.

Voltando a automorfismos, um último resultado desse capítulo é sobre o que podemos dizer do grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto que tem uma expansão compactificação de um ponto.

Corolário 114. *O grupo de automorfismo de todo Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e localmente compacto, que tem uma compactificação de um ponto é infinito enumerável.*

Demonstração. Por admitir compactificação de 1 ponto, sabemos que cumpre (2), e por cumprir (2) temos que é **FMDP**. Sendo assim, por cumprir **FMDP** concluímos que $Aut(\sigma)$ tem cardinalidade \aleph_0 como visto anteriormente. \square

5 ESTRUTURA DE SUBGRUPO DE $Aut(\sigma)$

É possível imergir vários grupos dentro do grupo de automorfismos de Shifts de Tipo Finito, e esses grupos também ocorrem no grupo de $Aut(\sigma)$ de um Shift Markov de Estado Enumerável. Alguns exemplos desses subgrupos segundo [1], são soma direta de uma quantidade de enumeráveis grupos finitos, produto livre de grupos cíclicos finitos, grupos enumeráveis, etc.

Diremos que um grupo qualquer H é um subgrupo de $Aut(\sigma)$ se $Aut(\sigma)$ contém um subgrupo isomorfo à H .

O que queremos saber agora é o que é possível dizer sobre os grupos que ocorrem somente no caso de Shift Markov de Estado Enumerável. Segue do Teorema 97 que o grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo é subgrupo de $S_{\mathbb{N}}$ já que tem cardinalidade 2^{\aleph_0} , e a seguir, veremos o que se pode afirmar no caso de o Shift Markov de Estado Enumerável não ser localmente compacto e não cumprir **FMDP**, que é exatamente o oposto do caso que provamos até agora.

Proposição 115. *Se um Shift Markov de Estado Enumerável não localmente compacto é representável por um grafo contendo um número infinito de caminhos de tamanho fixado contendo um vértice comum inicial e um vértice comum terminal, então $S_{\mathbb{N}}$ é isomorfo à um subgrupo de automorfismos desse shift.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo que cumpre as condições da propostas, $k \in \mathbb{N}$ o tamanho do menor caminho tal que existem dois vértices $u, v \in V$ (pode ocorrer $u = v$) com infinitos caminhos distintos p_i $i \in \mathbb{N}_0$ de tamanho k entre eles. É possível assumir que todos caminhos p_i sejam pares edge-disjoint sem ter perda de generalidade.

Como G é fortemente conectado, existe um caminho minimal q que conecta $v = t(p_i)$ com $u = i(p_i)$, isto é, q é o menor caminho conectando u e v .

Considere $f \in E$ a aresta inicial de p_0 . Para cada permutação $\pi \in S_{\mathbb{N}}$ defina $\rho_{\pi} : X_G \rightarrow X_G$ que toma um ponto e substitui cada bloco $p_i q f$ por $p_{\pi(i)} q f$ com $i \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que ρ_{π} está bem definida, já que f não ocorre em q ou qualquer p_i pois são pares edge-disjoint, e portanto $p_i q f$ não pode ser escrito de duas formas diferentes quando aplicamos ρ_{π} . Evidentemente $\rho_{\pi}(x) \in X_G$, pois há infinitos p_i .

Por outro lado, ρ_{π} é S.B.C. pois é definido por regra local e também é uma bijeção, pois se $p_{\pi(i)} q f = p_{\pi(j)} q f$ temos $\pi(i) = \pi(j)$ e como π é bijeção, segue que $i = j$. Logo $p_i q f = p_j q f$ e portanto é injetiva.

Se $x \in X_G$ então ou x não possui pontos da forma $p_i q f$ e portanto $\rho_{\pi}(x) = x$ ou x possui ponto da forma $p_i q f$. Tome em X_G ponto que possui $p_{\pi^{-1}(i)} q f$ em sua composição. Logo, é sobrejetora e comuta com a função shift.

Concluimos que $\{\rho_{\pi} : \pi \in S_{\mathbb{N}}\} \leq Aut(\sigma)$ é isomorfo à $S_{\mathbb{N}}$. □

No corolário a seguir, veremos que a maioria das restrições algébricas conhecidas para o grupo de automorfismos de SFT's, não podem ser aplicadas em Shift Markov de Estado Enumerável vários subgrupos que não ocorrem em SFT's ocorrem para Shift Markov de Estado Enumerável.

Corolário 116. *Seja (X, σ) Shift Markov de Estado Enumerável transitivo, não localmente compacto, que possui uma representação de grafo que contém um número infinito de caminhos de tamanhos iguais conectando vértices final e inicial comuns.*

Todo grupo enumerável pode ocorrer em $Aut(\sigma)$. Em particular \mathbb{Q} ocorre em $Aut(\sigma)$. Além disso, seu conjunto de subgrupos é fechado sobre produto livre de qualquer 2^{\aleph_0} de seus elementos.

Demonstração. Para a primeira afirmação, veja que todo grupo enumerável H pode operar sobre si mesmo sobre translação, de fato, tome por exemplo $\alpha_g : H \rightarrow H$ definida por $\alpha_g(h) = gh$. Isso nos garante que podemos representar H como um grupo de permutações sobre H . Logo,

$$H \leq S_H \cong S_{\mathbb{N}} \leq Aut(\sigma)$$

Portanto, $Aut(\sigma)$ possui um subgrupo enumerável.

Para a segunda afirmação, temos de [6] que o produto livre de 2^m cópias de S_M pode ser incorporado em S_M . \square

A seguir vamos falar a maior classe de Shift Markov de Estado Enumerável transitivo e não localmente compacto, que admite ao menos uma injetividade da restrição do grupo de permutações $S_{\mathbb{N},f}$ em $Aut(\sigma)$. Para isso, precisamos um grafo representante contendo um subgrafo consistindo de um número infinito de loops l_i ($i \in \mathbb{N}$) fortemente conectado, infinito, grafo árvore, no caso quaisquer dois vértices estão conectados por exatamente um caminho, de tamanho uniforme e caminhos p_{ij}, p_{ji} conectando os loops l_i e l_j respectivamente.

Se o tamanho de todos caminhos p_{ij}, p_{ji} na estrutura de árvore é limitado globalmente, podemos construir um subgrupo de $Aut(\sigma)$ isomorfo à $S_{\mathbb{N},f}$. Essa classe contém a família de Shift Markov de Estado Enumerável não localmente compacto como também as subclasses do Shift Markov de Estado Enumerável localmente compacto. Um protótipo dessa classe são as caminhadas aleatórias em \mathbb{N} ou \mathbb{Z} de tamanho 0, 1 e -1 .

Proposição 117. *Se qualquer grafo representante de um Shift Markov de Estado Enumerável transitivo contém um conjunto infinito de loops $L = \{l_i | i \in \mathbb{N}\}$ de mesmo tamanho tal que para todo loop l_i existe, dentro de uma distância limitada, outro loop l_j ($i < j \in \mathbb{N}$), isto é, existe um caminho p_{ij} conectando um vértice de l_i com um vértice de l_j , um caminho p_{ji} conectando l_j com l_i e ambos caminhos tem tamanho limitado por uma constante global, então $S_{\mathbb{N},f}$ pode ser "posto dentro" do grupo de automorfismos. Em outras palavras, há uma injetividade de $S_{\mathbb{N},f}$ para $Aut(\sigma)$.*

Demonstração. Vamos separar em dois casos: ou o grafo $G = (V, E)$ contém um loop $l \in L$ e um subconjunto $L' \subset L$ infinito de loops tendo distância até l limitada por alguma constante $M \in \mathbb{N}$, e nesse caso, G não é localmente finito, e G já cumpre a proposição anterior, pois usando os elementos em L' existem infinitos caminhos distintos de comprimento menor ou igual à $3(|l| - 1) + 2M$ de um vértice em l voltando para esse mesmo vértice. Portanto, não somente $S_{\mathbb{N},f} \leq Aut(\sigma)$ como também $S_{\mathbb{N}} \leq Aut(\sigma)$.

O outro caso que devemos analisar é o subgrafo árvore consistindo dos loops $l_i \in L$ e dos caminhos p_{ij} , p_{ji} é localmente finito. Depois de reenumerar, podemos encontrar infinitas cadeias de loops l_k ($k \in \mathbb{N}$) sendo conectados via caminhos $p_{k,k+1}$ e $p_{k+1,k}$ de tamanho limitado por $M \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, podemos escolher $p_{k,k+1}, p_{k+1,k}$ minimais tais que $i(p_{1,2}) = t(p_{2,1}) = i(l_1)$ e $t(p_{k,k+1}) = i(p_{k+1,k}) = i(p_{k+1,k+2}) = t(p_{k+2,k+1}) = i(l_{k+1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para o resto da demonstração necessitamos apenas olhar para isso.

Seja $N = |l_k|$ o tamanho em comum de todos os loops l_k , vamos um conjunto infinito enumerável de caminhos fechados

$$b_k := p_{k,k+1} p_{k+1,k} l_k (p_{k,k+1} p_{k+1,k})^{\frac{(2M)!}{|p_{k,k+1} p_{k+1,k}|} - 1}$$

com $k \in \mathbb{N}$ possuindo tamanho $(2M!) + N$, que por causa da minimalidade de $p_{k,k+1}, p_{k+1,k}$ não permite overlaps, em outras palavras, não pode admitir sobreposições. Mais ainda, aplicando o shift map trocando b_k por $|p_{k,k+1}|$ à esquerda, temos:

$$\bar{b}_k := p_{k,k+1} l_k (p_{k,k+1} p_{k+1,k})^{\frac{(2M)!}{|p_{k,k+1} p_{k+1,k}|} - 1} k \in \mathbb{N}$$

Note que $i(\bar{b}_k) = t(\bar{b}_k) = i(b_{k+1}) = t(b_{k+1})$ e $|\bar{b}_k| = |b_k| = (2M)! + N \forall k \in \mathbb{N}$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos um S.B.C. $\phi_{(k,k+1)} : X \rightarrow X$, o qual toma um ponto e substitui cada bloco \bar{b}_k por b_{k+1} , da mesma forma para cada bloco b_{k+1} por \bar{b}_k . Desde que \bar{b}_k e b_{k+1} não se sobrepoem, $\phi_{(k,k+1)}$ está bem definida. Por definição, essas funções são contínuas, comutam com o shift e portanto, são automorfismos.

Além disso, $\phi_{(k,k+1)}(\bar{b}_k^\infty) = b_{k+1}^\infty$ e $\phi_{(k,k+1)}(b_{k+1}^\infty) = \bar{b}_k^\infty$, temos que $Orb(b_{k+1}^\infty) = \phi_{(k,k+1)}(Orb(\bar{b}_k^\infty))$, $\phi_{(k,k+1)}(b_{k+1}^\infty) = Orb(b_k^\infty)$ e $\phi_{(k,k+1)}(Orb(b_i^\infty)) = Orb(b_i^\infty) \forall i \neq k, k+1$.

A família de automorfismos $(\phi_{(k,k+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ age em $\mathbb{O} = \{Orb(b_k^\infty) | k \in \mathbb{N}\}$ como o conjunto de trasposições $((k, k+1))_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{N} .

Uma maneira fácil de verificar é que diferentes representações de um grupo finito de permutações em \mathbb{O} como produtos finitos de $\phi_{(k,k+1)}$ no mesmo automorfismo. Como qualquer permutação em $S_{\mathbb{N}} \cong \langle (k, k+1) | k \in \mathbb{N} \rangle$ é possível de representar como um produto finito de trasposições, o conjunto $\{\phi_{(k,k+1)} | k \in \mathbb{N}\}$ gera um subgrupo de $Aut(\sigma)$ isomorfo à $S_{\mathbb{N},f}$. \square

Antes de enunciar o próximo resultado, recordemos que o grupo de automor-

fismos é residualmente finito, isto é, se para todo $\rho \in Aut(\sigma)$ com $\rho \neq Id_X$ existe um grupo finito H e um homeomorfismo $\alpha : Aut(\sigma) \rightarrow H$ com $\alpha(\rho) \neq 1_H$.

Corolário 118. *O grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável satisfazendo a proposição anterior, contém subgrupos infinitos simples e portanto, não é residualmente finito.*

Demonstração. O grupo $A_{\mathbb{N},f}$ que é o subgrupo de $S_{\mathbb{N}}$ do conjunto dos números pares em um conjunto enumerável infinito, é um subgrupo infinito simples de $S_{\mathbb{N}}$, portanto, $Aut(\sigma) \geq A_{\mathbb{N},f}$ não é residualmente finito, pois $A_{\mathbb{N},f}$ não é finito. \square

Por $Aut(\sigma)$ de SFT ser enumerável, segue que é residualmente finito e portanto não pode conter $A_{\mathbb{N},f}$. Esse é um exemplo de subgrupo que ocorre no grupo de automorfismos de um Shift Markov de Estado Enumerável e não ocorre no grupo de automorfismos de um SFT.

6 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, vimos que a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ é no máximo 2^{\aleph_0} , que a propriedade **FMDP** equivale ao grupo de automorfismos ser enumerável e portanto ter cardinalidade \aleph_0 , e no caso de não cumprir **FMDP**, ou o Shift Markov de Estado Enumerável não ser localmente compacto, concluímos que a cardinalidade de $Aut(\sigma)$ é exatamente 2^{\aleph_0} . Isso nos diz muito sobre os subgrupos de $Aut(\sigma)$, pois qualquer grupo isomorfo à \mathbb{R} é subgrupo de $Aut(\sigma)$ quando não cumpre **FMDP** ou não é localmente compacto, e qualquer subgrupo isomorfo à \mathbb{N} é subgrupo de um shift que cumpre **FMDP**.

Do fato de o shift ser localmente compacto e possuir uma compactificação que é subshift de algum espaço shift, já temos a garantia de que esse espaço cumpre **FMDP**, e consequentemente possui grupo de automorfismos enumerável.

Outro resultado de suma importância que devemos recordar, é que a princípio tínhamos a propriedade **FMDP** dependendo somente de uma representação de grafo do Shift Markov de Estado Enumerável, mas exibimos uma caracterização mais independente através de σ_0 ser expansível ou não em relação a métrica de Gurevich nos pontos de $DT(X)$, em outras palavras, outro resultado que garante quando $Aut(\sigma)$ é enumerável, é quando olhamos apenas para a compactificação de (X, σ) e verificamos que $DT(X)$ é shift invariante.

Resumindo, se o Shift Markov de Estado Enumerável cumpre **FMDP** ou é localmente compacto cuja compactificação é subshift de algum shift, então $Aut(\sigma)$ é enumerável e portanto, tem a mesma cardinalidade do grupo de automorfismos de um (SFT) ou um shift sobre alfabeto finito. Por outro lado, se o Shift Markov de Estado Enumerável não cumpre **FMDP** ou não é localmente compacto, seu grupo de automorfismos é isomorfo à \mathbb{R} e portanto, \mathbb{R} é um exemplo de subgrupo de $Aut(\sigma)$ que ocorre no caso de Shift Markov de Estado Enumerável e não ocorre no caso de (SFT) ou shift sobre alfabeto finito.

REFERÊNCIAS

- [1] BOYLE, M.; LIND, D.; RUDOLPH, D. The automorphism group of a shift of finite type. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 306, n. 1, p. 71–114, 1988.
- [2] SCHRAUDNER, M. On the algebraic properties of the automorphism groups of countable-state markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 26, n. 2, p. 551–583, 2006.
- [3] MUNKRES, J. *Topology*. [S.l.]: Pearson Education, 2014.
- [4] WACKER, S. Cellular automata on group sets and the uniform curtis-hedlund-lyndon theorem. In: SPRINGER. *International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. [S.l.], 2016. p. 185–198.
- [5] FIEBIG, D. Factor maps, entropy and fiber cardinality for markov shifts. *The Rocky Mountain journal of mathematics*, JSTOR, p. 955–986, 2001.
- [6] BRUIJN, N. D. Embedding theorems for infinite groups. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Series A: Mathematical Sciences*, v. 60, n. 5, p. 560–569, 1957.