Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Propriedades Assintóticas para Equações Dissipativas de Segunda Ordem com Laplacianos Fracionários em $\mathbb{R}^n$

Juan Carlos Torres Espinoza

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis
19 de Março de 2019

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Propriedades Assintóticas para Equações Dissipativas de Segunda Ordem com Laplacianos Fracionários em $\mathbb{R}^n$

Tese submetido(a) ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal
de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor
em Matemática Pura e Aplicada, com área de concentração
em Equações Diferenciais Parciais.
Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Juan Carlos Torres Espinoza
Florianópolis
19 de Março de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Torres Espinoza, Juan Carlos
Propriedades Assintóticas para Equações Dissipativas de Segunda Ordem com Laplacianos Fracionários em Rn / Juan Carlos Torres Espinoza ; orientador, Ruy Coimbra Charão, 2019.
211 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equação tipo Placas/Boussinesq. 3. Taxas de decaimento. 4. Expansão assintótica. 5. Super damping. I. Coimbra Charão, Ruy. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Propriedades Assintóticas para Equações Dissipativas de Segunda Ordem com Laplacianos Fracionários em $\mathbb{R}^n$.

por

Juan Carlos Torres Espinoza

Esta Tese foi julgada para a obtenção do Título de "Doutor em Matemática Pura e Aplicada", área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. **Marcelo Sobottka**
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão**
Orientador: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Higidio Portillo Oquendo**
Universidade Federal do Paraná-UFPR

Prof. Dr. **Cleverson Roberto da Luz**
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

Prof. Dr. **Miguel Angel Alejo Plana**
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

Prof. Dr. **Paulo Mendes de Carvalho Neto**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, 19 de Março de 2019.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Ruy Coimbra Charão, pela gentileza de me aceitar como seu orientando, pela sua paciência, tempo e dedicação, pela amizade mostrada, especialmente nos momentos mais fracos na minha estada aqui em Florianópolis. Gratidão para você.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, aos professores, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação em todos estes anos.

Aos meus pais, María e Washington, pelos seus conselhos, carinho e confiança depositada em mim; pelo constante apoio e pelas suas palavras de incentivo. A minha irmã Carolina, quem com suas brincadeiras e conversas conseguem me tirar um sorriso e fazer me esquecer quão longe estamos uns dos outros.

Ao meu tio Segundo Vigo, quem sempre acreditou em mim. Foi você quem me motivou muito a continuar meus estudos e é meu principal modelo.

Agradeço também a Stefanie Sánchez, que de forma incondicional, esteve ao meu lado durante estes últimos dois anos. Agradeço o carinho e apoio emocional e espiritual sobretudo nos momentos mas complicados e de inquietação.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática, obrigado pela paciência e ajuda nos estudos.

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que me permitiu concluir os estudos satisfatoriamente.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência e unicidade de soluções para uma equação semilinear generalizada de evolução de segunda ordem com operadores de Laplace com potências fracionárias. Além disso, estudamos taxas de decaimento da soluçao e da energia associada na norma L^2. Para a equação linear associada, usando uma expansão assintótica da solução do problema no espaço de Fourier mostramos otimalidade nas taxas obtidas. Também estudamos o caso de "super damping" onde refinando o método para os casos padrão provamos otimalidade da taxa na norma L^2. Nossos resultados generalizam trabalhos anteriores que lidam com casos particulares das potências fracionárias.

Palavras-Chave: Equação tipo Placas/Boussinesq. Laplaciano fracionário. Taxas de decaimento. Expansão assintótica. Super damping. Otimalidade de taxa.

Abstract

In this work we study existence and uniqueness of solutions for a generalized second order semilinear evolution equation with Laplace operators with fractional powers. We also study decay rates of the solution and associated energy in the sense of L^2 norm. For the associated linear equation, using an asymptotic expansion of the solution of the problem in the Fourier space we show optimality of the decay rates obtained for certain powers of the Laplacian operator. We also study the case of strong damping using an improvement of the method for the standard cases and we prove optimality of the decay rate for the L^2 norm. Our results generalize some previous works that deal with particular cases of the fractional powers.

Keywords: Plate / Boussinesq type equation. Fractional Laplacian. Decay rates. Asymptotic expansion. Strong damping. Optimality of the decay rates.

Sumário

Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta}\, u_{tt} + (-\Delta)^{\theta}\, u_t + (-\Delta)^{\alpha}\, u = \beta(-\Delta)^{\gamma}(u^p), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

com $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p > 1$ inteiro e as potências do operador Laplaciano α, δ, θ e γ satisfazendo

$$0 \leq \delta \leq \alpha,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \text{ ou } \frac{\alpha+\delta}{2} < \theta < \frac{\alpha+2\delta}{2}$$

e

$$\max\left\{0, \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}\right\} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

O problema de Cauchy que consideramos em (1) modela muitos fenômenos físicos, em especial problemas de hidrodinâmica como por exemplo propagação de ondas em águas rasas. Problemas de vibrações de placas, propagação de ondas em geral também são modelados por esse tipo de equação como aparece em (1), dependendo de boa escolha dos expoentes fracionários do operador de Laplace. Diversas outras aplicações podem ser estudadas por esse modelo, como por exemplo em [32], onde Maugin propôs um tipo de modelo de Boussinesq para tratar dinâmica de redes não lineares em cristais elásticos. Em Sander-Hutter [41] pode ser encontrado um breve relato sobre a história da evolução desses problemas em hidrodinâmica, em especial a teoria de ondas solitárias.

De fato, a primeira tentativa de modelagem matemática de ondas em águas rasas foi feita por Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) em 1871, que levou em consideração as acelerações verticais das partículas fluidas e admitiu uma onda solitária como solução. Entretanto, ele negligenciou um certo número de termos de produtos de derivadas, em sua modelagem, considerando apenas os efeitos de primeira ordem não lineares. Essas equações são chamadas equações clássicas de Boussinesq.

Com intuito de melhor modelar alguns desses fenômenos hidrodinâmicos, foram posteriormente desenvolvidas outras equações, com origem nas equações clássicas, considerando termos de ordem superior que Boussinesq ignorou, chamadas equações da classe Boussinesq. Entre elas estão as equações de Korteweg-de Vries, Green-Naghdi [16], Peregrine [38] e Serre [43]. Outras equações relacionadas às de Boussinesq, são as chamadas IBq (Boussinesq melhorada) e IMBq (Boussinesq modificada melhorada). Mais detalhes sobre equações de Boussinesq e suas características, podem ser encontradas nos artigos de Esfahani-Farah-Wang [12], Wang-Chen [50], Wang-Xue [53], Wang-Xu [51] e [52], nas referências bibliográficas deste trabalho.

Para o modelo que consideramos neste trabalho, quando $\delta = \alpha = 2$, $\gamma = 1$ e $p = 2$, temos uma equação de Boussinesq de sexta ordem e quando, além disso, $\theta = 1$, temos uma equação de Boussinesq sob efeitos de uma dissipação hidrodinâmica.

Notamos que quando $\delta = 1$, $\alpha = 2$, $\theta = 0$, $\gamma = 0$ ou $\gamma = \dfrac{1}{2}$ e $n = 2$, temos em (1) uma equação (linear se $\beta = 0$) para vibrações não lineares de placas sob efeitos de inércia rotacional (ver [13]) e de uma dissipação friccional. Resultados particulares sobre problemas associados a equações com essas propriedades, podem ser encontrados nos artigos de Charão-Luz-Ikehata [8], Luz-Charão [29] , Sugitani-Kawashima [45] e nas referências desses trabalhos.

Além disso, quando $\alpha = 1$, $\delta = \theta = 0$, $\beta \neq 0$ e $\gamma = 0$, temos uma equação de ondas semilinear com dissipação friccional. Quando $\alpha = 1$, $\delta = \theta = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 1$ e $p = 2$ a equação em (1) é a equação clássica de Boussinesq dissipativa.

Os resultados apresentados neste trabalho generalizam e/ou recuperam resultados obtidos anteriormente na literatura. Em particular citamos os trabalhos [17], [8], [29], [21], [33], [50], [45] e Horbach [17] sendo que desse último trabalho foram usadas ferramentas e idéias matemáticas para desenvolver parte deste trabalho.

Destacamos os trabalhos de Ikehata [20] e [19] dos quais seguimos idéias para estudar o caso de super damping no Capítulo 5, em especial o artigo [20]. Nosso trabalho neste Capítulo 5 generaliza bastante o trabalho de Ikehata [20], inclusive porque nesse paper ele considera apenas o caso $\theta = 2$, $\alpha = 1$ e, ainda, em seu trabalho $\delta = 0$.

Merecem destaques importantes trabalhos sobre casos particulares da equação que consideramos em (1) estão relatados nas referências como o trabalho clássico de Matsumura [33] e Ponce [40]. Resultados prévios para a equação IMBq se pode ver em Wand-Chen [49, 50] e para a Equação de Boussinesq Generalizada em Wang-Xue [53].

O objetivo deste trabalho é estudar existência e unicidade, taxas de decaimento, perfil assintótico e taxas ótimas da equação (1). Na maior parte do trabalho estamos interessados em considerar essas propriedades para o caso linear ($\beta = 0$), para depois, empregando as informações desse caso, fazer um pequeno estudo para o caso semilinear, considerando $\beta \neq 0$.

O presente trabalho está dividido em 7 capítulos, nos quais, no Capítulo 1, apresentamos os principais resultados teóricos necessários para o desenvolvimento deste trabalho: definições e ferramentas provenientes da análise funcional, teoria das distribuições, espaços de Sobolev, teoria de semigrupos, bem como alguns lemas técnicos empregados frequentemente na obtenção de taxas ótimas.

No Capítulo 2 usando a teoria de semigrupos, mostramos existência e unicidade para o problema (1), quando $\beta = 0$, isto é, mostramos existência e unicidade para o problema de Cauchy linear. Aqui, precisamos considerar as condições para as potências fracionárias nos casos seguintes:

- Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$;
- Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$.

No Capítulo 3 estudamos taxas de decaimento na norma L^2 da solução do problema linear bem como também da energia do sistema. Para a obtenção destas taxas de decaimento, temos empregado dois métodos: para o primeiro caso o método da energia no espaço de Fourier e para o segundo caso o método proposto por Luz-Ikehata-Charão em [30] que é um melhoramento desse método de energia e funciona melhor para o caso θ próximo de zero, no sentido de taxas melhores (ao menos quase ótimas).

No Capítulo 4, fazendo uso da solução explícita para o problema projetado no espaço de Fourier, encontramos um perfil assintótico para a solução do problema de Cauchy linear. Esse perfil é importante para mostrar que, sob certas restrições nas potências fracionárias e condições adicionais nos dados iniciais, as taxas obtidas no Capítulo 3 são ótimas para a norma L^2 da solução. Com o mesmo método derivando a solução explícita, ou em particular olhando para um perfil assintótico das derivadas da solução, também mostramos otimalidade de taxa para a energia, para a derivada da solução, u_t, e para os laplacianos fracionários $(-\Delta)^{\alpha/2} u$ e $(-\Delta)^{\delta/2} u_t$. Em trabalhos anteriores como em Ikehata [19, 20] os autores estudam somente estimativas sobre a norma L^2 da solução e não tiveram a idéia, embora simples, de derivar a solução no espaço de Fourier para obter estimativas para as derivadas da solução. Notamos que não era bem conhecido que para a equação tipo placas o termo que tem melhor decaimento é o da parte da norma da energia que corresponde ao termo de inércia rotacional. Isso pode ser visto nas seções do Capítulo 3.

No Capítulo 5, estudamos o caso de um "super damping" para a equação linear e para isso foi preciso separar o estudo do problema de Cauchy (1) em dois casos, a saber

- Caso $\delta = 0$, $\alpha < \theta$;
- Caso $0 \leq \delta \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha+\delta}{2} < \theta < \dfrac{\alpha+2\delta}{2}$.

O primeiro caso, obviamente, é mais fácil de tratar. Em ambos casos, encontramos taxas de decaimento, usando o método proposto em [30]; solução explícita do problema no espaço de Fourier, perfis assintóticos associados e, baseados nesses perfis, provamos otimalidade da taxa de decaimento sob algumas condições adicionais sobre os dados iniciais.

Baseados nas ideias discutidas e nos resultados obtidos no Capítulo 2, no Capítulo 6 estudamos brevemente a obtenção de solução da equação semilinear, com $\beta \neq 0$. Aqui, precisamos também dividir em casos e ainda mais, precisamos estudar existência local e logo existência global; esta última, para dados iniciais pequenos.

Finalmente, no Capítulo 7, fazendo uso novamente do método da energia no espaço de Fourier; obtemos algumas taxas de decaimento da solução e da energia na norma L^2 do problema semilinear associado em uns poucos casos para o trabalho não ficar muito longo.

Capítulo 1

Resultados Básicos

1.1 Espaços Importantes

Nesta seção vamos definir todos os espaços de funções que serão usados ao longo do trabalho. Além disso, apresentaremos alguns dos principais resultados desses espaços. Mencionamos que os resultados e demonstrações referentes à teoria de distribuições e espaços de Sobolev podem ser vistos nos livros de Medeiros [35, 36] enquanto que resultados de teoria de semigrupos podem ser encontrados no livro de Pazy [37]. O Teorema de Lax-Milgran pode ser visto em qualquer bom livro de Análise Funcional, como por exemplo Brezis [3] onde tambem são encontrados resultados de Espaços de Sobolev e suas imersões.

1.1.1 Espaço das Distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Seja u uma função mensurável definida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $(A_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos A_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em A_i. Então

$$u = 0 \quad \textit{quase sempre em } A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Com isso, definimos o *suporte* de u, denotado por $supp\,(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega \setminus A.$$

Definição 1.1.1 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções*

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{K}, \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, vem dada pela seguinte definição.

Definição 1.1.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

i) $\exists\, K \subset \Omega$, *$K$ compacto, tal que $supp\,(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente para $x \in \Omega$.

Definição 1.1.3 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

A partir da Definição 1.1.3, vamos definir o Espaço das Distribuições.

Definição 1.1.4 *Uma distribuição sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência dada na Definição 1.1.3. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K};\;\; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Definição 1.1.5 *Dizemos que* $T_k \to T$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se* $\langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.2 Espaço de Schwartz

Definição 1.1.6 *Uma função* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é dita ser rapidamente decrescente no infinito, se para cada polinômio* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *e cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *vale o seguinte*

$$\lim_{|x| \to \infty} P(x)(D^\alpha \varphi)(x) = 0.$$

Definimos o Espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\Omega)$, *como sendo o espaço das funçoes que verificam a propriedade definida anteriormente, isto é*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \ : \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ \textit{e } \varphi \textit{ é rapidamente decrescente no infinito} \Big\}.$$

O Lema a seguir, fornece uma caracterização útil para identificar funções pertencentes ao Espaço de Schwartz.

Lema 1.1.1 *Seja* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, *existe uma constante* $C = C_k$ *tal que*

$$(1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| \leq C_k$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *com* $|\alpha| \leq k$.

Considerando o Lema acima, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos a seminorma em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\rho_k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)|$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Com essas seminormas, podemos definir uma noção de convergência no Espaço de Schwartz, conforme ao Lema a seguir.

Lema 1.1.2 *Sejam $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A sequência $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quando $m \to \infty$, se*

$$\rho_k(\varphi_m - \varphi) \to 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.7 *Uma distribuição temperada sobre $\mathbb{R}^n$ é um funcional linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuo em relação a noção de convergência dada pelo Lema 1.1.2.*

O conjunto de todas as distribuições temperadas sobre $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Similarmente a como foi denotado para distribuições em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, escrevemos $\langle T, \varphi\rangle$ para denotar o valor da função $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aplicado em um elemento $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.8 *Sejam $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\{T_k\}$ converge para T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, quando $k \to \infty$, se*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.3 Espaços $L^p(\Omega)$, $L^{1,\kappa}(\Omega)$

Neste trabalho, consideramos a mensurabilidade e o cálculo de integrais de funções sobre conjuntos mensuráveis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, no sentido de Lebesgue.

Definição 1.1.9 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos os conjuntos*

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty\right\},$$
$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ u \text{ mensurável e } \operatorname{supess} |u(x)| < \infty\}.$$

Os conjuntos $L^p(\Omega)$ definidos acima, munidos com as normas

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p < \infty;$$
$$\|u\|_{L^p} = sup\,ess\{|u(x)|;\, x \in \Omega\}, \;\; p = \infty,$$

definem espaços vetoriais normados.

De acordo com o Teorema de Riesz-Ficher, para $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ munidos com as normas definidas acima, são espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno usual

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)\, dx, \quad \text{para} \;\; u, v \in L^2(\Omega).$$

Além disso, para $1 < p < \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são reflexivos.

Teorema 1.1.1 *(Interpolação dos espaços L^p) Sejam p e q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$. Então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$ e*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^{\lambda} \|u\|_{L^q}^{1-\lambda},$$

com $\lambda \in (0, 1)$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{(1-\lambda)}{q}$.

Teorema 1.1.2 *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $q = \frac{p}{p-1}$ ou $p = 1$ e $q = \infty$ ou $p = \infty$ e $q = 1$.*
Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Definição 1.1.10 *Seja $0 < \kappa \leq 1$. Definimos o espaço das funções com peso*

$$L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n);\, \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^\kappa)|f(x)|dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^{1,\kappa}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^\kappa)|f(x)|dx.$$

1.1.4 Transformada de Fourier

Para estudar existência e unicidade de soluções, encontrar taxas ótimas de decaimento além de outras propriedades do Problema de Cauchy, usaremos a transformada de Fourier como uma de nossas principais ferramentas. Assim, definimos a Transformada de Fourier de uma função.

Definição 1.1.11 *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então denotamos por $\mathcal{F}u$ a Transformada de Fourier de u dada por*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Além disso, denotamos por $\mathcal{F}^{-1}\hat{u}$ a Transformada de Fourier inversa de $\hat{u}$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)d\xi$$

que está bem definida.

Pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos estender a noção de Transformada de Fourier para uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1.3 (Identidade de Plancherel) *Sejam u e v funções pertencentes ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então são válidas as seguintes igualdades*

$$(u, v)_{L^2} = (\hat{u}, \hat{v})_{L^2}, \quad \|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2}.$$

Os próximos três Lemas, fornecem caracterizações e limitações para a Transformada de Fourier de uma função. Os dois primeiros serão de muita importância para obtermos estimativas e taxas ótimas.

Lema 1.1.3 *Para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\hat{f}(\xi) = A_f(\xi) - iB_f(\xi) + P_f,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, com

- $A_f(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\cos(x\cdot\xi) - 1) f(x)dx,$
- $B_f(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \sin(x\cdot\xi) f(x)dx,$

- $P_f = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$

Demonstração: Usando a Fórmula de Euler podemos reescrever a Transformada de Fourier de uma função f na seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(x\cdot\xi)f(x) - i\sin(x\cdot\xi)f(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(x\cdot\xi) - 1)f(x) - i\sin(x\cdot\xi)f(x) + f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Então, se definirmos $A_f(\xi)$, $B_f(\xi)$ e P_f como acima, temos que

$$
\hat{f}(\xi) = A_f(\xi) - iB_f(\xi) + P_f, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.
$$

■

Lema 1.1.4 *Considere as hipóteses do Lema 1.1.3.*

i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$
|A_f(\xi)| \leq L\|f\|_{L^1} \qquad e \qquad |B_f(\xi)| \leq N\|f\|_{L^1}.
$$

ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$
|A_f(\xi)| \leq K|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}} \qquad e \qquad |B_f(\xi)| \leq M|\xi|^\kappa \|f\|_{L^{1,\kappa}}.
$$

Com L, N, K e M constantes positivas dependo de n.
Aqui, as funções A_f e B_f são dadas como no Lema 1.1.3.

Demonstração:

i) A prova deste item segue dos cálculos abaixo

$$
\begin{aligned}
|A_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\cos(x\cdot\xi) - 1||f(x)|dx \\
&\leq \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = L\|f\|_{L^1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sin{(x\cdot\xi)}||f(x)|dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = N\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

ii) Para provar este item, é suficiente considerar $\xi \neq 0$.
Portanto

$$
\begin{aligned}
|A_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\cos(x\cdot\xi)-1|\,|f(x)|dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} |\cos(x\cdot\xi)-1|\,|f(x)|\frac{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0}|\xi|^\kappa\int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)\,|f(x)|\frac{|\cos(x\cdot\xi)-1|}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}dx \\
&\leq K\lim_{\varepsilon\to 0}|\xi|^\kappa\int_{|x|\geq\varepsilon}(1+|x|^\kappa)|f(x)|dx \\
&\leq K|\xi|^\kappa\|f\|_{L^{1,\kappa}},
\end{aligned}
$$

com $K = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\sup_{x\neq 0,\xi\neq 0}\frac{|\cos(x\cdot\xi)-1|}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa} < \infty$, e similarmente segue que

$$
\begin{aligned}
|B_f(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sin(x\cdot\xi)|\,|f(x)|dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} |\sin(x\cdot\xi)|\,|f(x)|\frac{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0}|\xi|^\kappa\int_{|x|\geq\varepsilon} (1+|x|^\kappa)|f(x)|\frac{|\sin(x\cdot\xi)|}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa}dx \\
&\leq M\lim_{\varepsilon\to 0}|\xi|^\kappa\int_{|x|\geq\varepsilon}(1+|x|^\kappa)|f(x)|dx \\
&\leq M|\xi|^\kappa\|f\|_{L^{1,\kappa}},
\end{aligned}
$$

com $M = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\sup_{x\neq 0,\xi\neq 0}\frac{|\sin(x\cdot\xi)|}{|\xi|^\kappa|x|^\kappa} < \infty$.

$\blacksquare$

1.1.5 Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Estes espaços são conhecidos como espaços de Sobolev e os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [2], Brezis [3], Kesavan [26] e Medeiros-Rivera [35], [36].

Definição 1.1.12 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o Espaço de Sobolev de ordem m em relação ao espaço $L^p(\Omega)$ como o conjunto*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m \Big\}$$

munido com a norma

- $\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty;$
- $\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \quad p = \infty.$

Observação 1.1.1 *Das definições dos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, podemos inferir as seguintes propriedades*

i) Para $m = 0$, vemos que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

ii) Para o caso particular $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert, denotado por $H^m(\Omega)$, munido do seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad \forall\, u, v \in H^m(\Omega).$$

iii) Para todo $0 \leq m < \infty$ e cada $1 \leq p < \infty$, os espaços $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são densos em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.6 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Embora os espaços de Sobolev forneçam excelentes ferramentas para trabalharmos, as vezes, eles são insuficientes em certos contextos. Para resolver essa dificuldade, vamos definir os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, os quais, serão usados frequentemente ao longo deste trabalho.

Definição 1.1.13 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ como*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, munida com a norma

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para fins práticos na obtenção de resultados, neste trabalho usaremos uma outra norma para $H^s(\mathbb{R}^n)$, a qual é equivalente à norma usual nesse espaço e ela é mais adequada para estudar o nosso problema. O seguinte Lema, garante a equivalência destas normas.

Lema 1.1.5 *Para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $s \geq 0$ *temos que*

i) $\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$;

ii) $2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1}$.

Demonstração:

i) Para provar este item, vamos considerar dois casos.

Caso $|\xi| \leq 1$

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq 1 \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

Caso $|\xi| \geq 1$

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq |\xi|^{2s} \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

ii) Similar ao primeiro item, também verificamos para dois casos.

Caso $|\xi| \leq 1$

Temos que $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s$ e $1+|\xi|^{2s} \leq 2$. Então

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq 2^{-s} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 1 \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1},$$

Caso $|\xi| \geq 1$

Nessa hipótese, vemos que $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$ e $(1+|\xi|^{2s}) \leq 2|\xi|^{2s} \leq 2(1+|\xi|^2)^s$, portanto concluímos

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1}.$$

■

Esse Lema nos permite concluir que, a norma usual em $H^s(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|\hat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual tem como produto interno associado

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})\hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi.$$

Para os espaços $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ com $s>0$ vamos usar a seguinte norma

$$\|u\|_{H^{-s}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})^{-1}\,|\hat{u}|^2\,d\xi$$

e o produto interno associado

$$(u,v)_{H^{-s}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})^{-1}\,\hat{u}\bar{\hat{v}}\,d\xi.$$

Usando a norma e o produto interno definidos via o Lema 1.1.5, mostramos algumas propriedades dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Essas propriedades serão muito importantes para podermos obter existência e unicidade de soluções, bem como também taxas de decaimento, tanto para o caso linear quanto para o semilinear.

Lema 1.1.6 *Dado $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Se $s > \frac{n}{2}$ então existe uma constante $C>0$ tal que*

$$|u(x)| \le C\|u\|_{H^s},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Da definição de Transformada de Fourier inversa e a estimativa $\left|e^{ix\cdot\xi}\right| \le 1$, temos

$$\begin{aligned}|u(x)| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi\right| \le C\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|d\xi \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1.2) e o Lema 1.1.5, temos que

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Notemos que, para $s > \frac{n}{2}$, a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi$ é finita. Portanto, da estimativa acima e a definição da norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$, concluímos

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{H^s},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Observação 1.1.2 *Do Lema 1.1.6, inferimos que, para $s > \frac{n}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Um outro resultado muito importante para mostrarmos a existência e unicidade de solução e encontramos taxas de decaimento para o problema semilinear é que, para $s > \frac{n}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra.
Formalmente, esse resultado vem dado como o seguinte Lema

Lema 1.1.7 *Seja $s > \dfrac{n}{2}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|uw\|_{H^s} \leq C\,\|u\|_{H^s}\|w\|_{H^s},$$

para quaisquer $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

A prova desse Lema, pode ser encontrado nos trabalhos de Kato-Ponce [24] e Wang-Chen [50].

As provas dos dois Lemas a seguir, estão baseados no Lema 1.1.7

Lema 1.1.8 *Sejam $s > \frac{n}{2}$ e $p \geq 1$ um inteiro. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u^p\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}^p,$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Usamos indução sobre p.
Para $p = 1$, o resultado é imediato.
Suponhamos agora que o resultado é válido para $p > 1$, isto é

$$\|u^p\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}^p.$$

Assim, para $p + 1$, do Lema 1.1.7 e da hipótese de indução, vemos que

$$\|u^{p+1}\|_{H^s} = \|u^p u\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}^p\|u\|_{H^s} = C\|u\|_{H^s}^{p+1}.$$

Portanto, se $s > \frac{n}{2}$, o lema é válido para todo $p \geq 1$ inteiro. ∎

Lema 1.1.9 *Sejam $s > \frac{n}{2}$ e $p \geq 2$ um inteiro. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u^p\|_{L^1} \leq C\|u\|_{H^s}^p,$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Pela definição da norma L^1 temos que

$$\|u^p\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |u^p| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u^{p-1}u| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u^{p-1}|\,|u| dx.$$

Usando o Teorema 1.1.2 (Desigualdade de Hölder) com $r = q = 2$ e a Identidade de Plancherel (Teorema 1.1.3), temos que

$$\begin{aligned}
\|u^p\|_{L^1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u^{p-1}(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u^{p-1}}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) \left|\widehat{u^{p-1}}(\xi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u^{p-1}\|_{H^s}\|u\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Como $p \geq 2$ é um inteiro, temos que $p - 1 \geq 1$, e portanto, para $s > \frac{n}{2}$, segue do Lema 1.1.8

$$\|u^p\| \leq C\|u\|_{H^s}^{p-1}\|u\|_{H^s} = C\|u\|_{H^s}^P.$$

∎

Lema 1.1.10 *Sejam $s > \frac{n}{2}$ e $p > 1$ um inteiro. Então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u^p - w^p\|_{H^s} \leq C\Big(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\Big)\|u - w\|_{H^s},$$

para todo $u,\ w \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Definindo a função $h(\lambda) = \lambda^p$, vemos que $h'(\lambda) = p\,\lambda^{p-1}$.

Considerando $u,\ w \in H^s(\mathbb{R}^n)$, e pelo Teorema do Valor médio temos

$$u^p - w^p = p\, v^{p-1}(u-w)$$

com $v = (1-\epsilon)u + \epsilon w$, para algum $\epsilon \in (0,1)$.

Logo, usando os Lemas 1.1.7 e 1.1.8, a desigualdade triangular e o fato que $\epsilon \in (0,1)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u^p - w^p\|_{H^s} &= p\|v^{p-1}(u-w)\|_{H^s} \\
&\leq C\|v^{p-1}\|_{H^s}\ \|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\|v\|_{H^s}^{p-1}\|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\|(1-\epsilon)u + \epsilon w\|_{H^s}^{p-1}\|u-w\|_{H^s} \\
&\leq C\Big(\|u\|_{H^s}^{p-1} + \|w\|_{H^s}^{p-1}\Big)\|u-w\|_{H^s},
\end{aligned}$$

com C uma constante positiva garantida pelos Lemas usados. ∎

Usando a transformada de Fourier e o seguinte resultado

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)u(\cdot)\big)(\xi) = |\xi|^2\hat{u}(\xi),$$

vamos definir a noçaõ de laplaciano fracionário para funções em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.14 *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Definimos o operador $(-\Delta)^\alpha$ aplicado em u da seguinte forma*

$$(-\Delta)^\alpha u(x) = \mathcal{F}^{-1}[|\cdot|^{2\alpha}\hat{u}(\cdot)](x).$$

A definição anterior nos permite caracterizar a transformada de Fourier de funções $(-\Delta)^\alpha u$, com $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, na forma

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^\alpha u(\cdot)\big)(\xi) = |\xi|^{2\alpha}\hat{u}(\xi).$$

Definição 1.1.15 *Sejam $m, p \in \mathbb{R}$, com $p \geq 1$. Definimos o espaço $\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :\ \exists v \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \textit{tal que } u = (-\Delta)^{-\frac{m}{2}} v\Big\}.$$

Pela definição desse espaço, vemos que

$$v = (-\Delta)^{\frac{m}{2}} u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Assim, definimos a norma desse espaço por

$$\|u\|_{\dot{W}^{m,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{\frac{m}{2}} u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Problema Linear Abstrato: Existência de Solução

Nesta seção vamos fazer um pequeno resumo com os principais resultados necessários para mostrar a existência e unicidade do Problema de Cauchy (1) linear, ou seja, quando $\beta = 0$.

1.2.1 Teorema de Lax-Milgram

Nesta subseção, consideramos o espaço de Hilbert real H, munido com a norma $\|\cdot\|_H$, a qual está induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em H.

Definição 1.2.1 *Uma aplicação $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de forma bilinear se, $B(x, \cdot)$ é linear, para cada $x \in H$ e $B(\cdot, y)$ é linear, para cada $y \in H$.*

Definição 1.2.2 *Uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser limitada (ou contínua), se existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$|B(x, y)| \leq C\|x\|_H \|y\|_H, \;\; \forall\, x, y \in H.$$

Definição 1.2.3 *Uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de coerciva, se existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$|B(x, x)| \geq C\|x\|_H^2, \;\; \forall\, x \in H.$$

Teorema 1.2.1 (Lema de Lax Milgram) *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x,u) = F(x), \qquad \forall\, x \in H.$$

1.2.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta subseção, consideramos o espaço de Banach real $(X, \|\cdot\|_X)$, e o conjunto $\mathcal{B}(X)$, o qual denota o espaço dos operadores lineares limitados sobre X.

Definição 1.2.4 *Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é um **semigrupo de operadores lineares limitados em** X, se:*

i) $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{B}(X)$;*

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *para todo $t, s \in \mathbb{R}_0^+$.*

Definição 1.2.5 *Um semigrupo de operadores lineares limitados S é chamado de **semigrupo fortemente contínuo**, se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)x\|_X = 0, \;\; \forall\, x \in X.$$

*Um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuo é chamado também de **semigrupo de classe** C_0 ou simplesmente de C_0**-semigrupo**.*

Definição 1.2.6 *Um semigrupo de operadores lineares limitados S é dito ser **uniformemente contínuo**, se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)-I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0.$$

Teorema 1.2.2 *Se S é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 0$, tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{\omega t}, \;\; \forall\, t \geq 0.$$

Definição 1.2.7 *Um semigrupo S de classe C_0, satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{\omega t}, \;\; \forall\, t \geq 0,$$

com $\omega = 0$, é dito ser um semigrupo uniformemente limitado. Além disso, se $M = 1$, dizemos que o semigrupo é um semigrupo de contrações de classe C_0.

Definição 1.2.8 *O operador $B : D(B) \subset X \to X$ definido por*

$$D(B) = \left\{ \ x \in X \quad : \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - Ix}{h} \quad \textit{existe} \ \right\}$$

e

$$B(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - Ix}{h} \qquad \forall \ x \in D(B)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Teorema 1.2.3 *Um operador $B : D(B) \subset X \to X$ é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, B é um operador linear limitado em X.*

Teorema 1.2.4 *Se $B : D(B) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, então B é um operador linear fechado e $D(B)$ é um subespaço linear denso em X.*

1.2.3 Teorema Lumer-Phillips

Nesta subseção, vamos considerar o espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ sobre o corpo dos números complexos e $\mathcal{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares sobre X.

Definição 1.2.9 *Seja $B : D(B) \subset X \to X$, com $B \in \mathcal{L}(X)$. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - B)^{-1}$ existe, é limitado e está definido em um subconjunto denso de X, é chamado conjunto resolvente de B e é denotado por $\rho(B)$.*
O operador linear $(\lambda I - B)^{-1}$, denotado por $R(\lambda, B)$, é chamado de operador resolvente de B.

Definição 1.2.10 *Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos*

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2 \right\}.$$

Observação 1.2.1 *Como consequência do Teorema de Hanh-Banach, temos que* $J(x) \neq \emptyset$*, para cada* $x \in X$*.*

Definição 1.2.11 *Dizemos que o operador linear* $B : D(B) \subset X \to X$ *é dissipativo se, para cada* $x \in D(B)$*, existe* $x^* \in J(x)$*, tal que*

$$Re\langle x^*, Bx\rangle \leq 0.$$

Para um espaço de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, a definição de operador dissipativo é a seguinte

Definição 1.2.12 *O operador linear* $B : D(B) \subset X \to X$ *é dissipativo se, para cada* $x \in D(B)$ *temos*

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0.$$

Teorema 1.2.5 (Lumer-Phillips) *Seja* $B : D(B) \subset X \to X$ *um operador linear, com* $D(B)$ *denso em* X*.*

- *Se* B *é dissipativo e existe* $\lambda_0 > 0$*, tal que* $Im(\lambda_0 I - B) = X$*, então* B *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0*.*

Teorema 1.2.6 (Teorema de Perturbação de Geradores) *Se* B *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em um espaço de Banach* X *e* J *é um operador linear e limitado em* X*, então* $B + J$ *é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em* X*.*

1.2.4 Problema de Cauchy Abstrato

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU(t), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo $t > 0$, com $U_0 \in X$.

Definição 1.2.13 *Seja B o operador linear definido na equação* (1.1)*. Uma função $U : \mathbb{R}^+ \to X$, contínua, continuamente diferenciável, tal que $U(t) \in D(B)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz o problema* (1.1)*, é dita solução forte do problema* (1.1)*.*

Teorema 1.2.7 *Seja B o operador linear definido no problema* (1.1)*, sendo o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X. Então, para cada $U_0 \in D(B)$, o problema* (1.1) *possui uma única solução forte $U(t) = S(t)U_0$ na classe*

$$U(t) \in C\left([0, \infty), D(B)\right) \cap C^1\left([0, \infty), X\right),$$

onde S é o semigrupo gerado por B.

Se $U_0 \in X$, então dizemos que $U(t) = S(t)U_0 \in C([0, \infty), X)$ é uma solução fraca para o problema (1.1)*.*

1.3 Problema Semilinear Abstrato: Existência de solução

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear . Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU(t) + FU(t), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

para todo $t > 0$, com $U_0 \in X$ e F uma função não linear sobre $D(B)$.

Definição 1.3.1 *Uma função $F : Y \subset X \to X$ é Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, se para todo conjunto limitado $A \subset Y$, existe uma constante $L > 0$ (chamada de constante de Lipschitz), tal que*

$$\|F(U) - F(V)\|_X \leq L\|U - V\|_X,$$

para cada $U, V \in A$.

Para subconjuntos limitados do domínio, usaremos a seguinte definição, a qual é equivalente à definição anterior.

Definição 1.3.2 *Seja* $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Dizemos que uma função* $F : D(B) \longrightarrow D(B)$ *é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de* $D(B)$ *se, dado* $M > 0$*, existe uma constante* $L_M > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned}&\|F(U) - F(W)\|_X + \|B\big(F(U) - F(W)\big)\|_X \\ &\leq L_M\Big(\|U - W\|_X + \|B(U - W)\|_X\Big),\end{aligned}$$

para todo $U, W \in D(B)$ *tais que*

$$\|U\|_X + \|BU\|_X \leq M \quad e \quad \|W\|_X + \|BW\|_X \leq M.$$

O Teorema a seguir, será empregado para mostrarmos existência e unicidade de solução para o problema semilinear.

Teorema 1.3.1 *Sejam* B *o operador linear definido no problem* (1.2)*, gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em* X *e* $F : D(B) \to D(B)$ *uma função Lipschitz contínua em conjuntos limitados* $A \subset D(B)$*. Então, para cada dado inicial* $U_0 \in D(B)$*, existe uma única solução forte* $U = U(t)$ *do Problema de Cauchy* (1.2) *definida em um intervalo maximal* $[0, T_m)$*, pertencente à classe*

$$U \in C\big([0, T_m), D(B)\big) \cap C^1\big([0, T_m), X\big),$$

tal que vale uma e somente uma das seguintes condições

i) $T_m = \infty$*;*

ii) $T_m < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T_m} \|U\|_X + \|BU\|_X = \infty.$

Para uma demonstração deste Teorema, veja [37].

1.4 Lemas Técnicos

Nesta seção vamos demonstrar lemas que usaremos nas provas de existência e unicidade de solução bem como os lemas usados para encontrar taxas de decaimento e provar otimalidade destas taxas.

O lema abaixo é usado na alta frequência no caso $0 \leq \theta < \delta$. Usando este lema conseguimos a regularidade necessária nos dados iniciais.

Lema 1.4.1 *Sejam c, r números positivos e $a \in \mathbb{R}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} \leq C|\xi|^{-ar}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.

Demonstração: De fato, considere $s = c|\xi|^a t$ isso implica que

$$t^r = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar}.$$

Portanto existe $C > 0$ tal que

$$t^r e^{-c|\xi|^a t} = c^{-r} s^r |\xi|^{-ar} e^{-s} \leq C|\xi|^{-ar},$$

pois a função $s^r e^{-s}$ é limitada no intervalo $0 \leq s < \infty$ para um $r > 0$ fixo. A constante C depende de r e c, isto é $C = C(r, c)$.

∎

O lema abaixo é usado para encontrar taxas de decaimento tanto na baixa frequência quanto na alta frequência.

Lema 1.4.2 *Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então existe uma constante $K > 0$ dependendo de n tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi \leq K t^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned} I(t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi &= \int_0^\infty \int_{|\xi|=r} e^{-Cr^\vartheta t} r^k dS_\xi dr \\ &= \int_0^\infty e^{-Cr^\vartheta t} r^k \left(w_n r^{n-1}\right) dr = w_n \int_0^\infty e^{-Cr^\vartheta t} r^{k+n-1} dr, \end{aligned}$$

com a constante w_n definida por $w_n = \text{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\big\}$.

Usando a seguinte mudança de variável $s = rt^{\frac{1}{\vartheta}}$, temos que

$$
\begin{aligned}
I(t) &= w_n \int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} t^{-\frac{n+k-1}{\vartheta}} t^{-\frac{1}{\vartheta}} ds \\
&= w_n t^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} ds.
\end{aligned}
$$

Notamos que para todo $k+n > 0$ temos que

$$
\int_0^\infty e^{-Cs^\vartheta} s^{k+n-1} ds < \infty.
$$

Portanto temos que

$$
I(t) \leq K t^{-\frac{k+n}{\vartheta}}, \quad t > 0
$$

com $K > 0$ uma constante dependendo de n.

■

O Lema acima é muito importante para encontrar taxas de decaimento na baixa frequência do problema linear ($\beta = 0$).

Para encontrarmos taxas de decaimento do problema semilinear ($\beta > 0$) vamos precisar do seguinte lema:

Lema 1.4.3 *Sejam $k > -n$, $\vartheta > 0$ e $C > 0$. Então existe uma constante $K > 0$ dependendo de n tal que*

$$
\int_{|\xi| \leq 1} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi \leq K(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}},
$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Definimos

$$
I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-C|\xi|^\vartheta t} |\xi|^k d\xi.
$$

Vamos primeiro mostrar que a desigualdade do lema vale para $t \in (0,1]$. Como I é uma função contínua para $t \in [0,1]$, existe uma constante positiva $C_1 > 0$ tal que

$$
I(t) \leq C_1 \quad \text{para todo} \quad t \in (0,1].
$$

Seja C_2 uma constante positiva tal que $C_1(1+t)^{\frac{n+k}{\vartheta}} \leq C_1 2^{\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C_2$, logo

$$I(t) \leq C_1 \leq C_2(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}}$$

para todo $t \in (0,1]$.

Vamos agora mostrar que o lema vale para $t \in [1,\infty)$. Pelo Lema anterior temos, em particular para $t \geq 1$, que

$$I(t) \leq Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}}.$$

Basta mostrar que $Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq K(1+t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}}$. Observamos que

$$I(t) \leq Ct^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C\, 2^{\frac{n+k}{\vartheta}}(2t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}} \leq C\, 2^{\frac{n+k}{\vartheta}}(1+t)^{-\frac{k+n}{\vartheta}},$$

pois $1+t \leq 2t$ para todo $t \in [1,\infty)$, .

Portanto o lema está demonstrado.

■

Nos próximos dois lemas aparecem estimativas por baixo para dois termos dados por integral que aparecem em uma expansão assintótica da solução. Essas estimativas são de fundamental importância para mostrar que a taxa encontrada é ótima, como veremos no Capítulo 4.

Lema 1.4.4 *Sejam $n > 2\alpha$ e $\theta > \dfrac{\alpha}{2}$. Então existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \frac{|\sin(|\xi|^\alpha t)|^2}{|\xi|^{2\alpha}}\, d\xi \geq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}},$$

com C uma constante positiva dependo somente de n, θ e α.

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned} I(t) :&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t} \left|\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\right|^2 d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{|\xi|=r} e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} \left|\frac{\sin(r^\alpha t)}{r^\alpha}\right|^2 dS dr \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} \left|\frac{\sin(r^\alpha t)}{r^\alpha}\right|^2 \left(\int_{|\xi|=r} dS\right) dr. \end{aligned}$$

Denotando $w_n = \displaystyle\int_{w=1} dw$, escrevemos

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} \left|\frac{\sin(r^\alpha t)}{r^\alpha}\right|^2 \left(w_n r^{n-1}\right) dr \\
&= w_n \int_0^\infty e^{-\frac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}} r^{n-(1+2\alpha)} |\sin(r^\alpha t)|^2 dr.
\end{aligned}
$$

Como $1 \leq 1+r^{2\delta}$ para todo $r \in \mathbb{R}$ temos que $-r^{2\theta}t \leq -\dfrac{r^{2\theta}t}{1+r^{2\delta}}$. Então segue que

$$
I(t) \geq w_n \int_0^\infty e^{-r^{2\theta}t} r^{n-(1+2\alpha)} |\sin(r^\alpha t)|^2 dr.
$$

Considerando a seguinte mudança de variável $s = rt^{\frac{1}{2\theta}}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
I(t) &\geq w_n \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} \left(st^{-\frac{1}{2\theta}}\right)^{n-(1+2\alpha)} \sin^2\left(s^\alpha t^{1-\frac{\alpha}{2\theta}}\right) t^{-\frac{1}{2\theta}} ds \\
&= w_n t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} \sin^2\left(s^\alpha t^{1-\frac{\alpha}{2\theta}}\right) ds.
\end{aligned}
$$

Usando a identidade $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ segue que

$$
\begin{aligned}
I(t) &\geq \frac{1}{2} w_n t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} \Big(1 - \cos\left(2s^\alpha t^{1-\frac{\alpha}{2\theta}}\right)\Big) ds \\
&= \frac{1}{2} w_n t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} (A - F_n(t,\alpha)),
\end{aligned}
$$

onde $A = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} ds$ e $F_n(t,\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} \cos\left(2s^\alpha t^{1-\frac{\alpha}{2\theta}}\right) ds.$

Como $e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} \in L^1(\mathbb{R})$ para $n > 2\alpha$, aplicamos o Lema de Riemann-Lebesgue obtendo

$$
F_n(t,\alpha) = \int_0^\infty e^{-s^{2\theta}} s^{n-(1+2\alpha)} \cos\left(2s^\alpha t^{1-\frac{\alpha}{2\theta}}\right) ds \to 0
$$

quando $t \to \infty$.

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $F_n(t,\alpha) \leq \dfrac{A}{2}$ para todo $t \geq t_0$. Assim o lema está provado para $C = \dfrac{w_n A}{4}$.

$\blacksquare$

Seguindo as mesmas ideias da demostração anterior, temos o seguinte lema.

Lema 1.4.5 *Sejam $n \geq 1$ e $\theta > \dfrac{\alpha}{2}$. Então existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t} |\cos(|\xi|^{\alpha} t)|^2 \, d\xi \geq C t^{-\frac{n}{2\theta}},$$

com C uma constante positiva dependendo somente de n, θ e α.

O próximo lema é útil para obter taxas de decaimento do problema semilinear.

Lema 1.4.6 *Sejam $a > 1$ e $p > 1$ inteiro. Então*

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq C$$

para todo $t > 0$ onde $C = C(a,p)$ é uma constante positiva.

Demonstração: Para calcular essa integral vamos separá -la em duas integrais, sendo uma integral sobre o intervalo $\left[0, \frac{t}{2}\right]$ e a outra sobre o intervalo $\left[\frac{t}{2}, t\right]$.

Primeiro, observamos que, se $0 \leq \tau \leq \dfrac{t}{2}$ temos que

$$1 + t \leq 1 + 2t - t \leq 2 + 2t - 2\tau \leq 2(1 + t - \tau)$$

e isso implica que

$$(1 + t - \tau)^{-a} \leq 2^a (1+t)^{-a}$$

pois $a > 1$.

Então, temos que

$$(1+t)^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq 2^a \int_0^{\frac{t}{2}} (1+\tau)^{-pa} d\tau$$
$$\leq 2^a \frac{(1+\tau)^{1-pa}}{1-ap}\Bigg|_0^{\frac{t}{2}} = -2^a \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-ap}}{ap-1} + 2^a \frac{1}{ap-1} \leq \frac{2^a}{ap-1}$$

pois $ap > 1$. Notar que $\dfrac{2^a}{ap-1}$ é uma constante positiva.

Agora vamos estimar a integral para $\dfrac{t}{2} \leq \tau \leq t$. Nesse intervalo temos que

$$1 + t \leq 2(1+\tau).$$

Logo
$$(1+\tau)^{-ap} \leq 2^{ap}(1+t)^{-ap}.$$

Então, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^a \int_{\frac{t}{2}}^t (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-a} d\tau \\
&\leq -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \left. \frac{(1+t-\tau)^{1-a}}{1-a} \right|_{\frac{t}{2}}^t \\
&\leq -2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{1}{1-a} + 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-a}}{1-a} \\
&\leq 2^{ap}(1+t)^{a-ap} \frac{1}{a-1} \leq \frac{2^{ap}}{a-1},
\end{aligned}
$$

devido a que $ap > a$, onde $\dfrac{2^{ap}}{a-1}$ é uma constante positiva, pois $a > 1$.

Finalmente, definindo $C(a,p) = \max\left\{ \dfrac{2^{ap}}{a-1}, \dfrac{2^a}{ap-1} \right\}$ concluímos que

$$(1+t)^a \int_0^t (1+\tau)^{-pa}(1+t-\tau)^{-a} d\tau \leq C(a,p)$$

para todo $t \geq 0$ e portanto o lema está provado. ■

Lema 1.4.7 *Seja $F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, definida por*

$$F(M) = aI_0 + bTM^p - M,$$

onde a, b, I_0, T são constantes positivas e $p > 1$ um número real. Então F possui um único ponto de mínimo global $M_0 \in (0,\infty)$ e além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, então $F(M_0) < 0$.

Capítulo 2

Existência Problema Linear

Neste capítulo, mostramos a existência e a unicidade de soluções, via teoria de semigrupos, para o seguinte problema de Cauchy linear .

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e as potências fracionárias do operador Laplaciano satisfazendo $0 \leq \delta \leq \alpha$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

Calculando, formalmente, o produto interno usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$, da equação diferencial em (2.1) com a função u_t, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t \Big) u_t dx = 0.$$

Usando o Teorema de Plancherel, obtemos que de modo standard que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{L^2}^2 \Big) + \|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 = 0, \tag{2.2}$$

para todo $t > 0$.

Definimos a energia total do sistema (2.1) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{L^2}^2\Big),$$

de modo que podemos reescrever a equação em (2.2) como

$$\frac{d}{dt}E(t) + \|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u_t\|_{L^2}^2 = 0, \tag{2.3}$$

para todo $t > 0$.

2.1 Operador A_σ

Nesta seção consideramos $0 \leq \delta \leq \sigma$ e definimos o operador A_σ de modo que seu domínio seja um subespaço de $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} D\big(A_\sigma\big) = \Big\{ & u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n) : \ \exists\ y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n), \\ & (u, \varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi\big) = (y, \varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \varphi\big), \\ & \forall\ \varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)\Big\}. \end{aligned}$$

A partir da condição imposta sobre $D(A_\sigma)$, é natural definirmos o operador A_σ, como:

$$\begin{array}{rcl} A_\sigma : D(A_\sigma) & \longrightarrow & H^\delta(\mathbb{R}^n), \\ u & \longmapsto & y, \end{array} \tag{2.4}$$

com $y = A_\sigma u = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^\sigma\big)u$.

Mostramos a seguir, que $D(A_\sigma) \neq \emptyset$ e que, para cada $u \in D(A_\sigma)$, existe um único elemento $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, tal que $A_\sigma u = y$, concluindo que o operador A_σ está bem definido.

De forma mais geral, mostramos no Lema 2.1.1 que cada $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ está associado a, no máximo, um elemento de $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.1.1 *Para todo $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, existe no máximo um elemento $y =$*

$y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que $A_\sigma u = y$, ou seja,

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = (y,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big), \tag{2.5}$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Naturalmente que $0 \in D(A_\sigma)$, onde $D(A_\sigma) \neq \emptyset$.

Seja $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que existam $y_1, y_2 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo a relação (2.5). Segue então, que

$$(y_1,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y_1, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big) = (y_2,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y_2, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big),$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$(y_1 - y_2,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big) = 0,$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ está densamente imerso em $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, em particular

$$(y_1 - y_2,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big) = 0, \tag{2.6}$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definindo $y := y_1 - y_2$, segue da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, que existe $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi_m \longrightarrow y$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, quando $m \to \infty$ ou seja,

$$\|\varphi_m - y\|_{H^\delta} \longrightarrow 0, \text{ quando } m \to \infty,$$

assim como,

$$\|\varphi_m - y\|_{H^\delta}^2 = \|\varphi_m\|_{H^\delta}^2 - 2\big(\varphi_m, y\big)_{H^\delta} + \|y\|_{H^\delta}^2 \longrightarrow 0, \tag{2.7}$$

quando $m \to \infty$. Além disso, como $\big|\|\varphi_m\|_{H^\delta} - \|y\|_{H^\delta}\big| \leq \|\varphi_m - y\|_{H^\delta}$, temos que

$$\|\varphi_m\|_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|_{H^\delta}, \text{ quando } m \to \infty. \tag{2.8}$$

Assim, dos resultados em (2.7) e em (2.8), obtemos

$$\big(y, \varphi_m\big)_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|_{H^\delta}^2 \text{ quando } m \to \infty. \tag{2.9}$$

Por outro lado, pela definição do produto interno no espaço $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e considerando o resultado em (2.6), também temos que

$$\big(y,\varphi_m\big)_{H^\delta} = \big(y,\varphi_m\big) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi_m\big) = 0, \qquad (2.10)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Portanto, de (2.9) e (2.10), segue que

$$\|y\|^2_{H^\delta} = \lim_{m\to\infty}(y,\psi_m)_{H^\delta} = 0,$$

onde concluímos que $y = 0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $y_1 = y_2 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$. ■

Como consideramos $\delta \leq \sigma$, temos $\sigma \leq 2\sigma - \delta$ e então,

$$H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subseteq H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Lema 2.1.2 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$, então $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}} \leq C\big\|A_\sigma u\big\|_{H^\delta},$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$.

Demonstração: Seja $u \in D(A_\sigma)$, então existe um $y = y_u \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = (y,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big), \qquad (2.11)$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Definimos o funcional $F : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\langle F,\varphi\rangle = (y,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big).$$

Dessa forma, o funcional F está bem definido e é linear.

Além disso, F é contínuo pois, dado $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\big|\langle F,\varphi\rangle\big| &\leq \big|(y,\varphi)\big| + \big|\big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big)\big| \\ &\leq \|y\|\,\|\varphi\| + \big\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y\big\|\,\big\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big\|.\end{aligned}$$

Então, considerando a definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e usando o Teorema de Plancherel, temos que

$$\begin{aligned}
\big|\langle F,\varphi\rangle\big| &\leq \|\widehat{y}\|\,\|\widehat{\varphi}\| + \||\xi|^\delta\widehat{y}\|\,\||\xi|^\delta\widehat{\varphi}\| \\
&\leq 2\left\|\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{y}\right\|\left\|\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{\varphi}\right\| \\
&\leq 2\,\|y\|_{H^\delta}\,\|\varphi\|_{H^\delta},
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\|F\| \leq 2\,\|y\|_{H^\delta}$. Logo, F é um funcional limitado e portanto, contínuo.

Assim, dado $u \in D(A_\sigma)$, existe $F \in (H^\delta(\mathbb{R}^n))' = H^{-\delta}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = \langle F,\varphi\rangle, \tag{2.12}$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, em particular,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n),\ \forall p \geq 1,$$

e o resultado é válido em $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, e também

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = \langle F,\varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, onde concluímos que a equação

$$u + (-\Delta)^\sigma u = F, \tag{2.13}$$

é válida no espaço dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a Transformada de Fourier na equação (2.13)), e considerando a definição do funcional F, obtemos

$$\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)\widehat{u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\widehat{y},$$

para $u \in D(A_\sigma) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ e $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, ou ainda,

$$\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{-1/2}\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)\widehat{u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{y}. \tag{2.14}$$

No entanto, da definição de A_σ, temos que $y = A_\sigma u$ e então

$$\widehat{y} = \widehat{A_\sigma u} = \frac{1+|\xi|^{2\sigma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}. \tag{2.15}$$

Por outro lado, tomando o quadrado da norma de cada um dos membros da equação (2.14), em relação ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{-1}\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)^2|\widehat{u}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)|\widehat{y}|^2 d\xi.$$

Mas, conforme o Lema 1.1.5, apresentado no capítulo anterior,

$$1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta)} \leq C\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{-1}\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)^2,$$

para todo $\delta, \sigma \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Assim, a equação integral acima, pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta)}\big)|\widehat{u}|^2 d\xi \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^\delta|\widehat{y}|^2 d\xi, \tag{2.16}$$

em que C é uma constante que depende de δ.

Portanto, considerando a definição de A_σ dada em (2.15), segue da inequação em (2.16), que

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}} \leq C\|y\|_{H^\delta} = C\big\|Au\big\|_{H^\delta},$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$, ou seja, $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$. ■

Lema 2.1.3 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$, então $H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A_\sigma)$, ou seja, dado $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ existe $y \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big) = (y,\varphi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big), \tag{2.17}$$

para todo $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sejam $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $G : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$\langle G,\varphi\rangle = (u,\varphi) + \big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big).$$

Dessa forma, o funcional G está bem definido e é linear. Além disso, G é contínuo pois, da definição de norma em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}\big|\langle G,\varphi\rangle\big| &\leq \big|(u,\varphi)\big| + \Big|\big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big)\Big| \\ &\leq 2\,\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}}\,\|\varphi\|_{H^\delta},\ \forall\,\varphi\in H^\delta(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

ou seja, $\|G\|\leq 2\,\|u\|_{H^{2\sigma-\delta}}$. Logo, $G\in\big(H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)'=H^{-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Com objetivo de usar o Teorema de Lax-Milgram, definimos

$$\begin{aligned}&b: H^\delta(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R},\\ &b(\varphi,\phi)=(\varphi,\phi)+((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Assim, a forma $b(\cdot,\cdot)$ está bem definida, é bilinear e é contínua pois, dado $(\varphi,\phi)\in H^\delta(\mathbb{R}^n)\times H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}|b(\varphi,\phi)| &\leq \big|(\varphi,\phi)\big| + \big|((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi)\big| \\ &\leq \|\varphi\|\,\|\phi\| + \big\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big\|\,\big\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\phi\big\| \\ &\leq \|\widehat{\varphi}\|\,\|\widehat{\phi}\| + \big\||\xi|^\delta\widehat{\varphi}\big\|\,\big\||\xi|^\delta\widehat{\phi}\big\| \\ &\leq 2\,\|\varphi\|_{H^\delta}\,\|\phi\|_{H^\delta}.\end{aligned}$$

Além disso, $b(\cdot,\cdot)$ é coerciva pois, para todo $\varphi\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$b(\varphi,\varphi)=\|\widehat{\varphi}\|^2+\big\||\xi|^{2\delta}\widehat{\varphi}\big\|^2=\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\,|\widehat{\varphi}|^2d\xi=\|\varphi\|_{H^\delta}^2.$$

Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.1) que, para o funcional linear e contínuo G, existe um único $y\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, que é solução para o problema variacional

$$b(y,\varphi)=\langle G,\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in H^\delta(\mathbb{R}^n).\tag{2.19}$$

Assim, para a forma bilinear contínua e coerciva $b(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear e contínuo G, existe um único $y\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$, de modo que

$$(y,\varphi)+\big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big)=(u,\varphi)+\big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big),\tag{2.20}$$

para todo $\varphi\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

No entanto, como $H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$, em particular temos que a igualdade (2.20) é válida para $\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Pela Identidade de Plancherel, temos

$$\big((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big) = \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\big).$$

Assim, se $u \in H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$, vemos que u satisfaz a identidade que define $D(A_\sigma)$, isto é $H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_\sigma)$. ■

Observação 2.1.1 *Segue dos dois lemas anteriores que* $D(A_\sigma) = H^{2\sigma-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$

Nesta seção, reescrevemos o problema de Cauchy (2.1) na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_1U + J_1(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.21}$$

para U, $U_0 \in X$, B_1 e J_1 adequados.

Podemos escrever a equação diferencial em (2.1) na forma

$$\Big(I + (-\Delta)^\delta\Big)\, u_{tt} = -(-\Delta)^\alpha u - (-\Delta)^\theta u_t.$$

Com a finalidade de obtermos B_1 e J_1, somamos e subtraímos u no segundo membro da equação acima, obtendo assim

$$\Big(I + (-\Delta)^\delta\Big)\, u_{tt} = -\left(I + (-\Delta)^\alpha\right) u + \Big(u - (-\Delta)^\theta u_t\Big).$$

Da definição do operador A_σ, vemos que o operador

$$A_\alpha = \Big(I + (-\Delta)^\delta\Big)^{-1} \left(I + (-\Delta)^\alpha\right)$$

está bem definido (caso $\sigma = \alpha$). Portanto, definindo $v = u_t$, segue que

$$v_t = -A_\alpha u + \Big(I + (-\Delta)^\delta\Big)^{-1} \Big(u - (-\Delta)^\theta v\Big),$$

com $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, a equação (2.21) se escreve como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u + \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(u - (-\Delta)^\theta v\right) \end{pmatrix} \\
&= B_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + J_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde $B_1 : D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \to H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, está bem definido por

$$B_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

e $J_1 : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \to H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, é definido por

$$J_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(u - (-\Delta)^\theta v\right) \end{pmatrix}$$

pois $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$.

2.2.1 B_1 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contrações de Classe C_0

Mostramos nesta subseção, que B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.2.1 *O operador B_1 definido em (2.22), é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que o operador B_1 satisfaz as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.2.5) no espaço de Hilbert $X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

O conjunto $D(B_1)$ é denso em X, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$ e

$$D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad X = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Mostremos que B_1 é dissipativo. Sejam dados $(u,v) \in D(B_1)$, então

$$\begin{aligned}\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta} &= ((v,-A_\alpha u),(u,v))_{H^\alpha\times H^\delta}\\ &= (v,u)_{H^\alpha} - (A_\alpha u, v)_{H^\delta}\,.\end{aligned}$$

Pela definição que usamos de produto interno em espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\bar{\widehat{u}}d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\alpha u}\,\bar{\widehat{v}}d\xi$$

e usando a relação (2.15), $\widehat{A_\alpha u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta} =\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\bar{\widehat{u}}d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}\,\bar{\widehat{v}}d\xi\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})\Big(\widehat{v}\,\bar{\widehat{u}} - \widehat{u}\,\bar{\widehat{v}}\Big)d\xi\\ &\quad= 2i\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\alpha})Im\big(\widehat{v}\,\bar{\widehat{u}}\big)d\xi.\end{aligned}$$

Assim, para todo $(u,v) \in D(B_1)$

$$Re\Big(\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^\alpha\times H^\delta}\Big) = 0,$$

o que prova que B_1 é dissipativo.

Mostremos agora que $Im(I - B_1) = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.
Seja $(f,g) \in Im(I - B_1)$, logo existe $(u,v) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$(u,v) - B_1(u,v) = (f,g).$$

Como $0 \le \delta \le \alpha$, temos $(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e por definição de B_1, temos que $B_1(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, onde segue que

$$(f,g) = (I - B_1)(u,v) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, para provar que $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \subset Im(I - B_1)$, devemos ter que, dado $(f,g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, existe $(u,v) \in D(B_1)$, tal que $(f,g) = (I - B_1)(u,v)$, ou seja

$$(u - v, v + A_\alpha u) = (f,g),$$

ou equivalentemente, mostrar que existe $(u,v) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\begin{cases} u - v = f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n), \\ v + A_\alpha u = g \in H^\delta(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Da primeira equação, temos $v = u - f$, a qual sustituimos na segunda equação, obtendo

$$A_\alpha u + u = f + g. \tag{2.23}$$

Assim, dados $(f,g) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, devemos mostrar que existe $u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a equação (2.23).

Como $A_\alpha = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^\alpha\big)$ aplicamos $\big(I + (-\Delta)^\delta\big)$ ambos os lados da equação (2.23),

$$(I + (-\Delta)^\alpha)u + (I + (-\Delta)^\delta)u = (I + (-\Delta)^\delta)(f + g).$$

Objetivo: Aplicar Teorema de Lax-Milgram (2.23) para mostrar existência de uma solução para a equação (2.23).

Como $0 \leq \delta \leq \alpha$, associamos a equação acima a seguinte forma bilinear

$$\begin{aligned} b(\cdot,\cdot): \quad & H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \\ & (u,\varphi) \longmapsto b(u,\varphi) = (u,\varphi)_{H^\alpha} + (u,\varphi)_{H^\delta}, \end{aligned}$$

que pode ser mostrado de forma padrão que é contínua e coerciva.

Agora, seja $F : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcional definido por

$$\langle F, \varphi \rangle = (f,\varphi)_{H^\delta} + (g,\varphi)_{H^\delta}.$$

Assim, F está bem definido e é linear e contínuo, isto é

$$F \in \big(H^\delta(\mathbb{R}^n)\big)' = H^{-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, segue do Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.2.1), que existe um único $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$b(u,\varphi) = \langle F, \varphi\rangle, \ \ \forall \varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n),$$

isto é

$$(u,\varphi)_{H^\alpha} + (u,\varphi)_{H^\delta} = (f,\varphi)_{H^\delta} + (g,\varphi)_{H^\delta}$$

Pela definição de produto interno em $H^s(\mathbb{R}^n)$, vemos que

$$\big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\big) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi\big) + 2(u,\varphi) = (f,\varphi)_{H^\delta} + (g,\varphi)_{H^\delta},$$

para todo $\varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, a equação variacional acima é válida para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e portanto,

$$A_\alpha u + u = f + g \tag{2.24}$$

no sentido das distribuições temperadas, ou seja, em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a transformada de Fourier em (2.24), obtemos

$$\widehat{A_\alpha u} + \widehat{u} = \widehat{f} + \widehat{g},$$

ou ainda

$$\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{A_\alpha u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\big(\widehat{f} + \widehat{g} - \widehat{u}\big).$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)\,\big|\widehat{A_\alpha u}(\xi)\big|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)\,|\hat{f} + \hat{g} - \hat{u}|^2 d\xi.$$

Portanto

$$\|A_\alpha u\|^2_{H^\delta} \leq \|f\|_{H^\delta} + \|g\|_{H^\delta} + \|u\|_{H^\delta} < \infty,$$

pois $u, f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Do Lema 1.1.5, resulta

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq \|A_\alpha u\|_{H^\delta} < \infty,$$

provando que a solução u de (2.24) satisfaz $u \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, u e $v = u - f$ são as soluções de $(I - B_1)(u,v) = (f,g)$, ou seja $(f,g) \in Im(I - B_1)$.

Logo, pelo Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.2.5), B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X. ■

2.2.2 J_1 é um Operador Limitado

Agora, vamos mostrar que o operador J_1 é um operador limitado, onde

$$\begin{aligned} J_1 : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\ (u,v) &\longmapsto \left(0,\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(u - (-\Delta)^\theta v\right)\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Notemos que J_1 está bem definido, pois $0 \le \theta < \delta \le \alpha$.

Lema 2.2.2 *O operador J_1 é linear e limitado.*

Demonstração: A linearidade de J_1, segue da linearidade do operador Laplaciano.
Seja $(u,v) \in X$. A seguinte estimativa mostra que J_1 é limitado em X.

$$\begin{aligned} \left\|J_1(u,v)\right\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} &\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}} |\hat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} |\hat{v}|^2 d\xi \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\alpha}\right) |\hat{u}|^2 d\xi + C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\hat{v}|^2 d\xi \\ &= \|u\|^2_{H^\alpha} + C\|v\|^2_{H^\delta} \\ &\le C\|(u,v)\|^2_X. \end{aligned}$$

■

Dos resultados obtidos nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 segue do Teorema 1.2.6, que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, segue do Teorema 1.2.7, que existe uma única solução $U = (u, u_t)$ para o problema de Cauchy dado em (2.21), com $U_0 = (u_0, u_1)$.

A solução vem dada por

$$U(t) = S_1(t)U_0, \ \ t \ge 0,$$

onde $\{S_1(t)\}_{t \ge 0}$ é o semigrupo gerado por $B_1 + J_1$.

Quando $U_0 = (u_0, u_1) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos então

$$U \in C\left([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\right).$$

Dessa forma, a primeira componente de $U(t) = S_1(t)U_0$, é a única solução do problema (2.1) e satisfaz

$$u \in C\left([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\right).$$

Além disso, para dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$u \in C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,\infty), H^\delta(\mathbb{R}^n)\right).$$

2.3 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$

Assim como na seção anterior, vamos reescrever o problema de Cauchy descrito em (2.1), na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_2 U + J_2(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.26}$$

onde $U = (u, u_t), U_0 = (u_0, u_1) \in X$, com B_2 e J_2 adequados, de modo que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, J_2 é um operador linear e limitado sobre X.

Definimos $v = u_t$ e então, da equação (2.1) obtemos

$$v_t = -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v)$$

com

$$A_\alpha = \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^\alpha\right),$$
$$A_\theta = \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^\theta\right),$$

cujos dominios vêm dados por $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$, $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Com essas considerações, podemos escrever o Problema (2.26) como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v + \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix} \\
&= B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + J_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde $B_2 : D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \to H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -A_\alpha u - A_\theta v \end{pmatrix},$$

e $J_2 : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \to H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$,

$$J_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix}.$$

Observação 2.3.1 *Como estamos considerando $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ para as potências fracionárias, temos que*

$$H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n),$$

e portanto, B_2 está bem definido em $D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

2.3.1 B_2 é Gerador Infinitesimal de um Semigrupo de Contrações de Classe C_0

O lema a seguir descreve essa propriedade do operador B_2 a qual é adequada para obtermos solução do problema (2.26).

Lema 2.3.1 *O operador B_2 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$.*

A demonstração deste lema é análoga a demonstração para B_1 na subseção anterior.

2.3.2 J_2 é um Operador Linear Limitado

Lema 2.3.2 *J_2 é um Operador Linear Limitado.*

A linearidade de

$$
\begin{aligned}
J_2 : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \\
(u,v) \qquad &\longmapsto \Big(0,\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(u+v)\Big).
\end{aligned}
$$

é imediata.

O fato que J_2 é limitado segue da seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\|J_2(U)\|_X^2 &= \left\| \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u+v\big)\right\|_{H^\delta}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\widehat{u}+\widehat{v}}{1+|\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}|^2\, d\xi \\
&\leq \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|v\|_{H^\delta}^2 \leq \|U\|_X^2,
\end{aligned}
$$

válida para $U \in X$.

Dos Lemas 2.3.1 e 2.3.2, concluímos do Teorema de Perturbação de Geradores (Teorema 1.2.6), que $B_2 + J_2$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e portanto, segue do Teorema 1.2.7, que existe uma única solução $U = (u, u_t)$ para o problema de Cauchy dado em (2.26) com $U_0 = (u_0, u_1)$.

A solução vem dada por

$$U(t) = S_2(t)U_0, \ \ t \geq 0,$$

onde $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $B_2 + J_2$.

Como $U_0 = (u_0, u_1) \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, temos então

$$U \in C\big([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)\big).$$

Dessa forma, a primeira componente de $U(t) = S_2(t)U_0$, é a única solução do problema (2.1) e satisfaz

$$u \in C\big([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Para dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$u \in C\big([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^2\big([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Capítulo 3

Taxas de Decaimento do Problema Linear

Para obter estimativas e taxas de decaimento de normas da solução do problema definido em (2.1), aplicamos a transformada de Fourier obtendo o seguinte problema de Cauchy no espaço de Fourier:

$$\begin{cases} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t=0 \\ \widehat{u}(0,\xi)=\widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{u}_t(0,\xi)=\widehat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\widehat{u}=\widehat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $\alpha\in[0,2]$ e $\delta,\theta\in[0,\alpha]$.

3.1 Estimativas Gerais

Multiplicando (3.1) por $\overline{\widehat{u}}_t$, obtemos

$$\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}}_t+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}\overline{\widehat{u}}_t+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}_t=0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2\right)+|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2=0.$$

Definimos a densidade de energia do sistema (3.1) por

$$E_1(t,\xi)=\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2$$

e reescrevemos a equação acima, na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_1(t,\xi)+|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2=0, \tag{3.2}$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Multiplicando (3.1) por $\overline{\widehat{u}}$ e tomando a parte real, obtemos

$$Re\left(\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}}+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}\overline{\widehat{u}}+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right)=0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2+2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)Re\left(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right)\right)+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2=\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2.$$

Então, definindo

$$E_2(t,\xi)=|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2+2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)Re\left(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right),$$

reescrevemos a equação acima, na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_2(t,\xi)+|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2=\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2, \tag{3.3}$$

para $(t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Considerando as equações em (3.2) e em (3.3), definimos

$$E(t,\xi)=E_1(t,\xi)+\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi), \tag{3.4}$$

para $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, onde $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$, é definida por

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta}, & |\xi| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}, \\[2mm] \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}, & |\xi| \leq 1, \quad \dfrac{\alpha}{2} < \theta, \\[2mm] \varepsilon\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}, & |\xi| \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}, \\[2mm] \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta}, & |\xi| \geq 1, \quad \theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}, \end{cases} \tag{3.5}$$

com $\varepsilon > 0$, a ser escolhido adequadamente mais adiante.

A idéia de escolher $\rho(\xi)$ dessa forma é para obter taxas de decaimento ótimas e o modo de se encontrar uma tal função está indicado no trabalho de Luz-Ikehata-Charão [30].

Derivando a expressão (3.4) em relação à variável t e usando as equações em (3.2) e (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_1(t,\xi) + \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_2(t,\xi)\right) \\ &= \left(-|\xi|^{2\theta}\left|\widehat{u}_t\right|^2\right) + \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(-|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\right), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}\left|\widehat{u}_t\right|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 = \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2,$$

que reescrevemos na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi), \tag{3.6}$$

onde $F, R : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ são os funcionais definidos por

$$\begin{aligned} F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta}\left|\widehat{u}_t\right|^2 + \frac{1}{3}\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2, \\ R(t,\xi) &= \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Na sequência enunciamos e mostramos os Lemas 3.1.1 à 3.1.6, que usamos para determinar uma estimativa para a norma de $\widehat{u}$.

Lema 3.1.1 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$\rho(\xi) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$*, com* ρ *como definido em (3.5).*

Demonstração: Para $|\xi| \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, como $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$, temos que

$$\varepsilon|\xi|^{2\alpha}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \leq 2\varepsilon|\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{4\theta}$$

e então, da definição de ρ, temos

$$\rho(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta} \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}.$$

Para $|\xi| \leq 1$ e $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e para $|\xi| \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, como $\varepsilon < 1$, temos imediatamente

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})} < \frac{|\xi|^{2\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. ■

Lema 3.1.2 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$R(t,\xi) \leq \frac{1}{3}F(t,\xi),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$*.*

A prova desse lema é imediata a partir das definições de R e F e do Lema 3.1.1.

Lema 3.1.3 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi) \leq F(t,\xi),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, com* ρ *como definido em (3.5).*

A prova segue das definições de F e E_1 e do Lema 3.1.1.

Lema 3.1.4 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$\rho(\xi) \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta},$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, com* ρ *como definido em (3.5).*

Demonstração: Para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, $|\xi| \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2\alpha-2\theta} \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Para $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $|\xi| \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, como $2\alpha < 4\theta$, temos

$$\varepsilon|\xi|^{4\theta} < |\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha}\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)$$

e então, da definição de ρ, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} < |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $|\xi| \geq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, como $4\theta \leq 2\alpha + 2\delta$, temos

$$\varepsilon|\xi|^{4\theta} \leq |\xi|^{2\alpha+2\delta} \leq |\xi|^{2\alpha}\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)$$

e então, da definição de ρ, temos que

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq |\xi|^{2\alpha-2\theta}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. ■

Lema 3.1.5 *Sejam* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right| \leq \frac{2}{3}E_1(t,\xi),$$

para todo $t > 0$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, com* ρ *como definido em (3.5).*

Demonstração: Para θ e ε, conforme as hipóteses do lema, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right| &\leq \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + 2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}|\,|\widehat{u}_t|\right)\\
&\leq \frac{1}{3}\rho(\xi)\left(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right)\\
&\leq \frac{2}{3}\left(\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right).
\end{aligned}
$$

Assim, usando os resultados dos Lemas 3.1.1 e 3.1.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi)\right|\\
&\leq \frac{2}{3}\left(|\xi|^{2\alpha-2\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^2|\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_t|^2\right)\\
&\leq \frac{2}{3}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right) = \frac{2}{3}E_1(t,\xi),
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. ■

Lema 3.1.6 *Sejam $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. Então,*

$$
|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right),
$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, com ρ como definido em (3.5).

Demonstração: Usando os resultados dos Lemas 3.1.2 e 3.1.3 na identidade obtida em (3.6), temos que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi) \leq \frac{1}{2}F(t,\xi),
$$

onde obtemos

$$
\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -F(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi)
$$

e assim, para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$
\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi). \tag{3.8}
$$

Como resultado do Lema 3.1.5, temos que

$$-\frac{2}{3}E_1(t,\xi) \leq \frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi) \leq \frac{2}{3}E_1(t,\xi),$$

onde segue que

$$\frac{1}{3}E_1(t,\xi) \leq E_1(t,\xi) + \frac{1}{3}\rho(\xi)E_2(t,\xi) \leq \frac{5}{3}E_1(t,\xi)$$

e então, considerando a definição do funcional E, obtemos

$$\frac{1}{3}E_1(t,\xi) \leq E(t,\xi) \leq \frac{5}{3}E_1(t,\xi), \tag{3.9}$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, segue das desigualdades obtidas em (3.8) e (3.9), que

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) \leq -\frac{1}{3}\rho(\xi)E_1(t,\xi) \leq -\frac{1}{5}\rho(\xi)E(t,\xi),$$

onde obtemos a inequação diferencial

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) + \frac{1}{5}\rho(\xi)E(t,\xi) \leq 0,$$

cuja solução é dada por

$$E(t,\xi) \leq e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E(0,\xi),$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Assim, usando a equivalência obtida em (3.9), segue que

$$E_1(t,\xi) \leq 3E(t,\xi) \leq 3e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E(0,\xi) \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E_1(0,\xi),$$

ou seja, a densidade de energia do problema definido em (3.1) no espaço de Fourier, decai exponencialmente na forma

$$E_1(t,\xi) \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}E_1(0,\xi),$$

para todo $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, da definição do funcional da energia E_1, temos que

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2 \leq \\
&\leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(0,\xi)|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t(0,\xi)|^2\right) \\
&= 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2+\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_1|^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t>0$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$. ∎

Observação 3.1.1 *Da desigualdade obtida no Lema 3.1.6, é simples obter*

$$|\widehat{u}|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\widehat{u}_0|^2+\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}|\widehat{u}_1|^2\right), \tag{3.10}$$

válida para todo $t>0$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$, com $\xi\neq 0$.

Essa desigualdade é útil na obtenção de taxa para a norma L^2 da solução.

3.2 Taxas de Decaimento para $|\xi|\leq 1$

Nesta seção, estimamos a desigualdade do Lema 3.1.6 e a desigualdade decorrente desse lema, dada em (3.10), na região de baixa frequência.

Devido à forma como definimos a função $\rho=\rho(\xi)$ (ver em (3.5)), dividimos esta seção nos seguintes casos:

i) Caso $0\leq\theta\leq\dfrac{\alpha}{2}$;

ii) Caso $\dfrac{\alpha}{2}<\theta\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

3.2.1 Caso $0\leq\theta\leq\dfrac{\alpha}{2}$

Conforme mostramos em (3.1), a equação associada ao problema de Cauchy, no espaço de Fourier, é dada por

$$\begin{cases}
\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\widehat{u}_{tt}+|\xi|^{2\alpha}\widehat{u}+|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t=0, \\
\hat{u}(0,\xi)=\hat{u}_0(\xi), \\
\hat{u}_t(0,\xi)=\hat{u}_1(\xi),
\end{cases} \tag{3.11}$$

onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\delta, \theta \in [0,\alpha]$.

Usando a notação definida no artigo [30], para a equação (3.11), temos que

$$P_1(\xi) = 1 + |\xi|^{2\delta}, \quad P_2(\xi) = |\xi|^{2\theta} \quad \text{e} \quad P_3(\xi) = |\xi|^{2\alpha},$$

de modo que o espaço de integração a considerar em este caso é

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}.$$

Com essas considerações, podemos escrever o problema (3.11) na forma abstrata segundo o artigo [30] na seguinte forma:

$$\begin{cases} P_1\, \hat{u}_{tt} + P_2\, \hat{u}_t + P_3\, \hat{u} = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \Omega$.
A Energia global associada ao problema em (3.12) é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(P_3(\xi)|\hat{u}|^2 + P_1(\xi)|\hat{u}_t|^2 \right) d\xi, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Para obtermos a taxa de decaimento, definimos a função $\rho(\xi)$ como :

$$\rho(\xi) = \min_{\xi \in \Omega} \left\{ P_3(\xi) P_2(\xi)^{-1}, P_2(\xi) P_1(\xi)^{-1} \right\} = |\xi|^{2\alpha - 2\theta}.$$

Consideremos a hipótese abaixo, a qual chamaremos de **Hipótese 1**:

Hipótese 1 *Seja $\beta > 0$ tal que, para as funções mensuráveis e positivas (exceto possívelmente em um conjunto de medida nula) P_i, $i = 1, 2, 3$, definidas sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pelo menos uma das duas condições seguintes é satisfeita:*

i) $C_\beta^3 = \displaystyle\int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi < \infty$ *e* $C_\beta^4 = \displaystyle\int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi < \infty$,

ii) $C_\beta^1 = \displaystyle\int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi < \infty$, $C_\beta^4 = \displaystyle\int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi < \infty$

$$C_\beta^5 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi < \infty,$$

$$C_\beta^6 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi < \infty.$$

Com todas essas considerações, enunciamos o Teorema 2.2 e seu respectivo Corolário 2.2, tal como aparecem no artigo Luz-Ikehata-Charão [30] e cujas demonstrações podem ser encontradas nesse mesmo artigo.

Teorema 3.2.1 *Sejam* $(\hat{u}_0, \hat{u}_1) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e sejam* $P_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$ *e* $\beta > 0$ *satisfazendo a Hipótese 1. Então a energia total associada ao problema de Cauchy sobre* Ω *satisfaz*

$$\int_S^T E(t)^{1+\beta} dt \leq C_\beta \left(\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} + \|\hat{u}_1\|^2_{L^\infty} \right)^\beta E(S),$$

para $0 \leq S < T < \infty$, *onde* $C_\beta > 0$ *é uma constante.*

Corolário 3.2.1 *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.1, a energia total associada ao problema de Cauchy* (3.12) *possui o seguinte decaimento*

$$E(t) \leq C t^{-\frac{1}{\beta}} \quad t \to \infty,$$

onde $\beta > 0$ *é a constante dada na Hipótese 1 e* $C > 0$ *é uma constante que depende dos dados iniciais.*

Conforme ao Corolário 3.2.1, a taxa de decaimento da energia do sistema (3.1) na baixa frequência, é $t^{-\frac{1}{\beta}}$, com $\beta > 0$ calculado de modo a satisfazer a Hipótese 1 desse corolário, sobre a região $\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$.

Observação 3.2.1 *Vamos usar o seguinte resultado:*

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^p d\xi &= \int_0^1 \int_{|\xi|=r} r^p dS_\xi \; dr = \int_0^1 r^p \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi \right) dr \\ &= \int_0^1 r^p \left(\omega_n r^{(n-1)} \right) dr = C \int_0^1 r^{(p+n-1)} dr < \infty, \end{aligned}$$

se $p + n - 1 > -1$, *ou seja,* $p > -n$, *com* $n \geq 1$.

Devemos calcular $\beta > 0$, que satisfaça as condições i) e ii) da Hipótese 1 do Corolário 3.2.1 como segue:

Sejam $P_1(\xi), P_2(\xi), P_3(\xi)$, $\rho(\xi)$ e Ω como definidos acima.

i) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^3 e C_β^4 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned}C_\beta^3 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) d\xi \leq 2\int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}} d\xi < \infty,\end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta-2\alpha}{\beta} > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n}$, para $n \geq 1$;

$$\begin{aligned}C_\beta^4 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} d\xi = \int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha} d\xi < \infty,\end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta-2\alpha}{\beta} + 2\alpha > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n+2\alpha}$, para $n \geq 1$. Então, considerando que $\alpha \geq 0$, concluímos que as integrais C_β^3 e C_β^4 são simultaneamente finitas para

$$\beta > \max\left\{\frac{2\alpha-2\theta}{n}, \frac{2\alpha-2\theta}{n+2\alpha}\right\} = \frac{2\alpha-2\theta}{n} =: \beta_1,$$

para $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $n \geq 1$.

ii) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^1, C_β^4, C_β^5 e C_β^6 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido temos que

$$\begin{aligned}C_\beta^1 &= \int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}} \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \leq 2^{\frac{1+\beta}{\beta}} \int_\Omega |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}} d\xi < \infty,\end{aligned}$$

se $-\dfrac{2\theta}{\beta} > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\theta}{n}$, para $n \geq 1$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} d\xi < \infty,$$

se $\beta > \dfrac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha}$, para $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^5 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{2\alpha} |\xi|^{-4\theta} \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)^2 d\xi \\ &\leq 4 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} + 2\alpha - 4\theta\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta - 2\alpha}{\beta} + 2\alpha - 4\theta > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta}$, com $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^6 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{-4\theta} \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\xi|^{4\alpha} d\xi \\ &\leq 2 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} - 4\theta + 4\alpha\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta - 2\alpha}{\beta} - 4\theta + 4\alpha > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha - 2\theta}{n + 4\alpha - 4\theta}$, sendo C_β^5 e C_β^6 válidos para $n \geq 1$, pois $2\theta \leq \alpha$.

Assim, as integrais C_β^1, C_β^4, C_β^5 e C_β^6 são simultaneamente finitas para

$$\beta > \max\left\{\frac{2\theta}{n}, \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha}, \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta}, \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 4\alpha - 4\theta}\right\},$$

para $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $n \geq 1$.
Mas, como estamos considerando $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, vemos que

$$\frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta} \geq \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta} \geq \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 4\alpha - 4\theta}.$$

Portanto, essas integrais são finitas se

$$\beta > \max\left\{\frac{2\theta}{n}, \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta}\right\} = \beta_2.$$

Posto isso, segue do Corolário 3.2.1 que a taxa de decaimento da energia total do sistema em (3.1) na baixa frequência, é dada por $t^{-\frac{1}{\beta}}$, com

$$\beta > \min\{\beta_1, \beta_2\}.$$

Mais precisamente:

a) Para $n > 2\theta$ e $0 \leq \theta < \min\left\{\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\}$, temos que

$$\beta > \frac{2\alpha - 2\theta}{n + 2\alpha - 4\theta},$$

b) Para $2\theta \geq n$ e $\theta \in \left[\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$,

$$\beta > \frac{2\theta}{n}.$$

Portanto, de acordo com o Corolário 3.2.1, segue que a taxa de decaimento da energia total na baixa frequência, poder ser estimada

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2\right) d\xi \leq Ct^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{3.13}$$

para $t > 0$, com α, β, θ e n como nos casos (a) e (b) dados acima.

Agora, para obtermos taxas de decaimento para a solução do problema em (2.1), na norma L^2, consideramos novamente a equação associada ao problema, no espaço de Fourier, que é dada em (3.1), reescrevendo-a na forma

$$\frac{1 + |\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} \widehat{u}_{tt} + \widehat{u} + \frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{2\alpha}} \widehat{u}_t = 0, \tag{3.14}$$

onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t, \xi)$, com $(t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\delta, \theta \in [0, \alpha]$.

Considerando a equação (3.14) e usando mais uma vez o Corolário 3.2.1, obtemos estimativas para o funcional

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} \left(\frac{\left(1 + |\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{u}_t|^2 + |\widehat{u}|^2\right) d\xi \tag{3.15}$$

e em particular, para a norma L^2 da solução do problema em (2.1) na baixa

frequência, pois
$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq 2L(t).$$

Considerando novamente a notação definida em [30], agora para a equação (3.14), temos que

$$P_1(\xi) = \frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}, \quad P_2(\xi) = |\xi|^{2\theta-2\alpha} \quad \text{e} \quad P_3(\xi) = 1,$$

para $|\xi| \leq 1$, com $|\xi| \neq 0$. Assim como antes,

$$\rho(\xi) = \min\left\{P_3(\xi)P_2^{-1}(\xi), P_2(\xi)P_1^{-1}(\xi)\right\} = |\xi|^{2\alpha-2\theta}$$

e o espaço de integração, na baixa frequência, continua sendo

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}.$$

Assim como fizemos anteriormente, devemos mais uma vez calcular $\beta > 0$ que satisfaça as condições i) e ii) da Hipótese 1 do Corolário 3.2.1.

Sejam $P_1(\xi), P_2(\xi), P_3(\xi)$, $\rho(\xi)$ e Ω como definidos acima e $n \geq 1$.

i) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^3 e C_β^4 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} C_\beta^3 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi) d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi \leq 2\int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}-2\alpha} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta-2\alpha}{\beta} - 2\alpha > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n-2\alpha}$, para $n > 2\alpha$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} d\xi < \infty,$$

se $\dfrac{(2\theta-2\alpha)}{\beta} > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{(2\alpha-2\theta)}{n}$, para $n \geq 1$.

Então, considerando que $\alpha \geq 2\theta$, concluímos que as integrais C_β^3 e C_β^4 são simultaneamente finitas para

$$\beta > \max\left\{\frac{2\alpha-2\theta}{n-2\alpha}, \frac{2\alpha-2\theta}{n}\right\} = \frac{2\alpha-2\theta}{n-2\alpha} =: \beta_1,$$

para $\theta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $n > 2\alpha$.

ii) Determinar $\beta > 0$, de modo que as integrais C_β^1, C_β^4, C_β^5 e C_β^6 que calculamos a seguir, sejam finitas. Nesse sentido temos que

$$\begin{aligned} C_\beta^1 &= \int_\Omega P_2(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_1(\xi)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}} \left(\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} d\xi \leq 2^{\frac{1+\beta}{\beta}} \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\theta+2\alpha\beta)}{\beta}} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $-\dfrac{2\theta+2\alpha\beta}{\beta} > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\theta}{n-2\alpha}$, para $n > 2\alpha$;

$$C_\beta^4 = \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) d\xi = \int_\Omega |\xi|^{\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}} d\xi < \infty,$$

se $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n}$, para $n \geq 1$;

$$\begin{aligned} C_\beta^5 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_3(\xi) P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} |\xi|^{-2(2\theta-2\alpha)} \left(\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} \right)^2 d\xi \\ &\leq 4 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}-4\theta\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta-2\alpha}{\beta} - 4\theta > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta}$, para $n > 4\theta$;

$$\begin{aligned} C_\beta^6 &= \int_\Omega \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} P_2(\xi)^{-2} P_1(\xi) P_3(\xi)^2 d\xi \\ &= \int_\Omega |\xi|^{-\frac{(2\alpha-2\theta)}{\beta}} \left(\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{2\alpha}} \right)^{-2} \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi \\ &\leq 2 \int_\Omega |\xi|^{\left(\frac{(2\theta-2\alpha)}{\beta}+2\alpha-4\theta\right)} d\xi < \infty, \end{aligned}$$

se $\dfrac{2\theta-2\alpha}{\beta} + 2\alpha - 4\theta > -n$, ou seja, $\beta > \dfrac{2\alpha-2\theta}{n+2\alpha-4\theta}$, sendo C_β^6 válido para $n \geq 1$, pois $2\theta \leq \alpha$.

Assim, concluímos que as integrais C_β^1, C_β^4, C_β^5 e C_β^6 são simultaneamente finitas para

$$\beta > \max\left\{\frac{2\theta}{n-2\alpha}, \frac{2\alpha-2\theta}{n}, \frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta}, \frac{2\alpha-2\theta}{n+2\alpha-4\theta}\right\}, \tag{3.16}$$

para $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, com $n > 2\alpha$.

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, temos que

$$\frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta} \geq \frac{2\alpha-2\theta}{n} \quad \text{e} \quad \frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta} \geq \frac{2\alpha-2\theta}{n+2\alpha-4\theta}.$$

Portanto, todas essas integrais são finitas se

$$\beta > \max\left\{\frac{2\theta}{n-2\alpha}, \frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta}\right\} =: \beta_2$$

Posto isso, segue do Corolário 3.2.1 que a taxa de decaimento da energia do sistema associado à (3.14) na baixa frequência, é dada por $t^{-\frac{1}{\beta}}$ com

$$\beta > \min\{\beta_1, \beta_2\}.$$

Mais precisamente:

a) Para $n \geq 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$, temos

$$\beta > \frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta},$$

b) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{n-2\alpha}{2}\right]$, vemos

$$\beta > \frac{2\alpha-2\theta}{n-4\theta},$$

c) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n-2\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, temos

$$\beta > \frac{2\theta}{n-2\alpha}.$$

Portanto, de acordo com o Corolário 3.2.1, temos que

$$L(t)=\frac{1}{2}\int_{|\xi|\le 1}\left(|\widehat{u}|^2+\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}\,|\widehat{u}_t|^2\right)d\xi\le Ct^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{3.17}$$

para $t>0$, com α, β, θ e n satisfazendo cada um dos casos (a), (b) e (c) acima.

A partir da estimativa para o funcional L, apresentada em (3.17), obtemos também, estimativas para o decaimento da norma L^2 da solução do problema (2.1) na região de baixa frequência.

Através do lema a seguir, reunimos e apresentamos formalmente, as estimativas de decaimento na norma L^2 da solução do problema de Cauchy em (2.1), bem como, a estimativa para a energia desse sistema, que obtivemos em (3.17) e (3.13).

Lema 3.2.1 *Seja $0\le\theta\le\frac{\alpha}{2}$. Então existe uma constante C positiva tal que, para todo $t>0$ e $\varepsilon>0$ fixado arbitrariamente, são válidas as seguintes estimativas na baixa frequência ($|\xi|\le 1$)*

i) Para $n\ge 3\alpha$ e $0\le\theta\le\dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0,u_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\le 1}|\widehat{u}|^2d\xi\le Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{L^1}^2\right).$$

ii) Para $2\alpha<n<3\alpha$ e $0\le\theta\le\dfrac{n-2\alpha}{2}$, se $u_0,u_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\le 1}|\widehat{u}|^2d\xi\le Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{L^1}^2\right).$$

iii) Para $2\alpha<n<3\alpha$ e $\dfrac{n-2\alpha}{2}\le\theta\le\dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0,u_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\le 1}|\widehat{u}|^2d\xi\le Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}+\varepsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{L^1}^2\right).$$

iv) Para $n > 2\theta$ e $0 \leq \theta \leq \min\left\{\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right).\end{aligned}$$

v) Para $2\theta \geq n$ e $\frac{n}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, se $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}\left|\widehat{u}\right|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\left|\widehat{u}_t\right|^2\right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\varepsilon}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right).\end{aligned}$$

3.2.2 Caso $\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$

Como estamos considerando $|\xi| \leq 1$, temos pela definição de $\rho(\xi)$ dada em (3.5), que

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{2} \tag{3.18}$$

e além disso, para $0 < |\xi| \leq 1$, temos

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{-2\alpha}. \tag{3.19}$$

A partir dessas desigualdades, mostramos o lema a seguir, na região de baixa frequência.

Lema 3.2.2 *Seja $\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que para todo $t > 0$ valem as seguintes estimativas*

i) Para $n \geq 1$, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left|\widehat{u}\right|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2\right).$$

ii) Para $n > 2\alpha$, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left|\widehat{u}\right|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2.$$

iii) Para $n \geq 1$, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \left(1+|\xi|^{2\delta}\right)|\widehat{u}_t|^2\right)d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right).$$

Demonstração:

i) Usando as relações (3.18), (3.19) e a estimativa obtida em (3.10), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \left||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right|^2\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Então, tomando a norma em L^∞ dos dados iniciais e usando o Lema 1.4.2 da Seção 1.3, com $\vartheta = 2\theta$ e $k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C\left(\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \left\||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\right)\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \left\||\xi|^{-\alpha}\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

Portanto, da definição dos espaços $\dot{W}^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2\right),$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

ii) De forma análoga ao item anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\leq 2C\int_{|\xi|\leq 1}\left(e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\widehat{u}_0|^2 + e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Então, usando o Lema 1.4.2, com $k = 0$ para o dado inicial u_0,

$k=-2\alpha$ para u_1 e com $\vartheta=2\theta$ para ambos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le 1}|\widehat{u}|^2d\xi \le C\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2\int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi \\ + C\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}d\xi \\ \le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2 + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2,\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n>2\alpha$.

Portanto,

$$\int_{|\xi|\le 1}|\widehat{u}|^2d\xi \le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left\|u_0\right\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\left\|u_1\right\|_{L^1}^2,$$

para todo $t>0$, com n inteiro tal que $n>2\alpha$.

iii) Agora, usando a relação (3.18) e o Lema 3.1.6, estimamos a norma da energia do sistema na baixa frequência, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\le 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\ &\le \int_{|\xi|\le 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi \\ &\le C\int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi.\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.4.2, com $k=0$ e com $\vartheta=2\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\le 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\ &\le \left(C\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2+2C\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\right)\int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi \\ &\le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\left\|\widehat{u}_0\right\|_{L^\infty}^2+\left\|\widehat{u}_1\right\|_{L^\infty}^2\right),\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n\ge 1$.

Portanto,

$$\int_{|\xi|\le 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \le Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\left\|u_0\right\|_{L^1}^2+\left\|u_1\right\|_{L^1}^2\right),$$

para todo $t>0$, com $n\ge 1$.

■

3.3 Taxas de Decaimento para $|\xi| \geq 1$

Nesta seção estudamos o decaimento de energia do sistema linear no espaço de Fourier, dado em (3.1), na região de alta frequência. Nessa região, conforme definimos em (3.5), a função ρ é dada por

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}},$$

para todo $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

Além disso, para o caso $|\xi| \geq 1$, o comportamento do funcional da energia do sistema, depende da relação entre os expoentes δ e θ.

Por isso, dividimos o estudo desta seção, nos seguintes casos:

i) $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$,

ii) $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$,

iii) $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$.

3.3.1 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$

Neste caso, como $|\xi| \geq 1$ e $\delta \leq \theta$, temos $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\theta}$, onde segue que

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.20}$$

e além disso, para $|\xi| \geq 1$, temos que

$$\frac{1 + |\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 1 + |\xi|^{2\delta}. \tag{3.21}$$

Lema 3.3.1 *Sejam $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que para $n \geq 1$ valem as seguintes estimativas* *i)* $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right);$

ii) $\displaystyle\int_{|\xi|\geq 1} \Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big) d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right),$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Sejam $u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $n \geq 1$.

i) Usando as relações (3.20), (3.21) e a estimativa obtida em (3.10), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\geq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(|\widehat{u}_0|^2 + \frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^{2\alpha}}|\widehat{u}_1|^2\right)d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\Big(|\widehat{u}_0|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|\widehat{u}_0|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right)d\xi,$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

ii) Agora, usando o Lema 3.1.6, estimamos a norma da energia do sistema na alta frequência, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1} 5e^{-\frac{1}{5}\rho_\theta(\xi)t}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\Big(1+|\xi|^{2\alpha}\Big)|\widehat{u}_0|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto, do Lema 1.1.5, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}|^2 + \Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi \\
&\leq Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

■

3.3.2 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$

Neste caso, a estrutura da equação é caracterizada pela função

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}},$$

que degenera para zero, quando $|\xi| \to \infty$, pois $\delta > \theta$.

Essa estrutura implica em perda de regularidade nos dados iniciais, ou seja, para a obtenção de taxas de decaimento na região de alta frequência, iguais às obtidas na região de baixa frequência, é necessário maior regularidade nos dados iniciais do problema.

Agora, como $|\xi| \geq 1$, temos $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta}$, onde segue que

$$\rho(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} |\xi|^{2(\theta - \delta)} \tag{3.22}$$

e além disso, para $|\xi| \geq 1$

$$\frac{1 + |\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{2(\delta - \alpha)}. \tag{3.23}$$

O objetivo é obter estimativas na região de alta frequência, para a norma L^2 da solução e para a energia do sistema em (2.1), iguais às encontradas para a região de baixa frequência.

Por isso, dividimos o estudo deste caso na alta frequência, de acordo com os casos considerados na região de baixa frequência.

Lema 3.3.2 *Seja $0 \leq \theta < \delta$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$, são válidas as seguintes estimativas:*

i) Para $n \geq 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, se $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}} \right).$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{n-2\alpha}{2}$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}} \right).$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $\dfrac{n-2\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi$$
$$\leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right).$$

iv) Para $n > 2\theta$ *e* $0 \leq \theta \leq \min\left\{\dfrac{n}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right\}$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \leq$$
$$\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta}} \right).$$

v) Para $2\theta \geq n$ *e* $\dfrac{n}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \leq$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}} \right).$$

Demonstração:

i) Usando as relações (3.22), (3.23) e a estimativa obtida em (3.10), temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.4.1, com $r = \dfrac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}} \left(|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2(\delta-\alpha)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}\right)}\,|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha\right)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 4\theta$.

Portanto,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{(2\alpha-2\theta)}+\delta-\alpha}}\right),$$

para todo $t > 0$, com $n > 4\theta$ e, em particular, para $n \geq 3\alpha$.

ii) A demonstração para o caso $2\alpha < n < 3\alpha$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{n-2\alpha}{2}$, é análoga à demonstração do item anterior, visto que o resultado no item i), é válido também para $n > 2\alpha$, pois $\theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$.

iii) Da mesma maneira como nos itens anteriores, temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.4.1, com $r = \dfrac{n-2\alpha}{2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}} \left(|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2(\delta-\alpha)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}\right)}\,|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha\right)}\,|\widehat{u}_1|^2\right) d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\theta \in \left[\dfrac{n-2\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $n > 2\alpha$.

Portanto,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right),$$

para todo $t > 0$ e $\theta \in \left[\dfrac{n-2\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, com $2\alpha < n < 3\alpha$.

iv) Agora, usando a relação (3.22) no início desta subseção e o Lema 3.1.6, estimamos a norma da energia do sistema na alta frequência:

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2\delta} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.4.1, com $r = \dfrac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}$ e $a = 2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-\frac{2(\theta-\delta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\delta} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha\right)} |\widehat{u}_0|^2 \, d\xi \\
&+ Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta\right)} |\widehat{u}_1|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 2\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta}} \right),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n > 2\theta$.

v) Usando mais uma vez a relação (3.22), o Lema 3.1.6 e o Lema 1.4.1

com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$, temos a estimativa

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-\frac{2(\theta-\delta)n}{2\theta}} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha\right)}|\hat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta\right)}|\hat{u}_1|^2\right) d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $2\theta \geq n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\right) d\xi \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $2\theta \geq n$.

■

3.3.3 Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Também neste caso, como $|\xi| \geq 1$, temos $1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta}$, e assim

$$\rho(\xi) = \varepsilon \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}, \tag{3.24}$$

e além disso,

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)}. \tag{3.25}$$

Lema 3.3.3 *Sejam $0 \leq \theta < \delta$ e $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$, são válidas as seguintes estimativas:*

i) Para $n \geq 1$, se $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

ii) Para $n > 2\alpha$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right).\end{aligned}$$

iii) Para $n \geq 1$, *se* $u_0 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}|^2 + \left(1 + |\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{u}_t|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}} \right).\end{aligned}$$

Demonstração:

i) Usando as relações (3.24), (3.25) e a estimativa obtida em (3.10), temos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\widehat{u}_0|^2 + 2|\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi.$$

Então, usando o Lema 1.4.1, com $r = \dfrac{n}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}} \left(|\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2(\delta-\alpha)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}\right)} |\widehat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha\right)} |\widehat{u}_1|^2 \right) d\xi,\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

Portanto,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}} \right),$$

para todo $t > 0$, com $n \geq 1$.

ii) A prova é semelhante ao item anterior, considerando $r = \dfrac{n-2\alpha}{2\theta}$ e $a = 2(\theta - \delta)$ no Lema 1.4.1.

iii) Agora, usando a desigualdade em (3.24) e o Lema 3.1.6, estimamos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)\,|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi\\&\leq C\int_{|\xi|\geq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2(\delta-\theta)}t}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_0|^2+2|\xi|^{2\delta}\,|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi.\end{aligned}$$

Então, usando o Lema 1.4.1, com $r=\dfrac{n}{2\theta}$ e $a=2(\theta-\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)\,|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi\\&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{\frac{2(\delta-\theta)n}{2\theta}}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}_0|^2+|\xi|^{2\delta}\,|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi\\&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha\right)}\,|\widehat{u}_0|^2+|\xi|^{2\left(\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta\right)}\,|\widehat{u}_1|^2\Big)d\xi\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\geq 1}\Big(|\xi|^{2\alpha}\,|\widehat{u}|^2+\Big(1+|\xi|^{2\delta}\Big)\,|\widehat{u}_t|^2\Big)d\xi\leq\\&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}}+\|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right),\end{aligned}$$

para todo $t>0$, com $n\geq 1$.

■

3.4 Resultados Gerais de Decaimento

Nesta seção reunimos as principais estimativas que obtivemos para a norma L^2 da solução do problema de Cauchy definido em (2.1), bem como, estimativas para a energia total desse sistema, em relação à norma no espaço da energia, que observamos ser o espaço $X=H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Nos Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 a seguir, usamos o Teorema de Plancherel e apresentamos de maneira sistemática, as estimativas obtidas para a norma L^2 da solução do problema, que decorrem dos lemas apresentados neste capítulo. No Teorema 3.4.3 apresentamos as estimativas para a energia do sistema, também resultantes desses lemas.

Teorema 3.4.1 *Seja $0 \leq \delta \leq \theta$. Então existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ fixado arbitrariamente, valem as seguintes estimativas para a norma L^2 da solução $u(t,x)$ do problema de Cauchy em (2.1):*

i) Para $n \geq 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[0, \frac{n-2\alpha}{2}\right]$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n-2\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).$$

iv) Para $n \geq 1$ e $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$,

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,1}}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).$$

v) Para $n > 2\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).$$

Teorema 3.4.2 *Seja* $0 \leq \theta < \delta$*. Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $t > 0$ *e* ε_0 *fixado arbitrariamente, valem as seguintes estimativas para a norma* L^2 *da solução* $u(t,x)$ *do problema de Cauchy em (2.1):*

i) Para $n \geq 3\alpha$ *e* $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$*, se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

ii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $\theta \in \left[0, \frac{n-2\alpha}{2}\right]$*, se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ct^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

iii) Para $2\alpha < n < 3\alpha$ *e* $\theta \in \left[\frac{n-2\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$*, se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

iv) Para $n \geq 1$ *e* $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$*, se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$u_1 \in \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}}\right)$$
$$+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

v) Para $n > 2\alpha$ *e* $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{L^1} + Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \|u_1\|^2_{L^1}$$
$$+ Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n-2\alpha)}{2\theta}+\delta-\alpha}}\right).$$

Teorema 3.4.3 *Para todo* $t > 0$ *e para* ε_0 *fixado arbitrariamente, valem as seguintes estimativas para a energia* $E(t,x)$ *do sistema definido em (2.1), onde* $C > 0$ *é uma constante:*

i) Para $n > 2\theta$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e* $0 \leq \theta \leq \min\left\{\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\}$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|^2_{H^\alpha} + \|u_1\|^2_{H^\delta}\right).$$

ii) Para $2\theta \geq n$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e* $\theta \in \left[\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\delta(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx$$
$$\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|^2_{H^\alpha} + \|u_1\|^2_{H^\delta}\right).$$

iii) Para $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e* $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)$

e $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2\right).
\end{aligned}$$

iv) *Para* $n > 2\theta$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $0 \leq \theta < \min\left\{\dfrac{n}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right\}$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&+ Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\alpha}} \\
&+ Ct^{-\frac{n+2\alpha-4\theta}{2\alpha-2\theta}} \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)(n+2\alpha-4\theta)}{2\alpha-2\theta}+\delta}}.
\end{aligned}$$

v) *Para* $2\theta \geq n$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\theta \in \left[\dfrac{n}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}+\varepsilon_0} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right).
\end{aligned}$$

vi) *Para* $n \geq 1$, $0 \leq \theta < \delta$ *e* $\theta \in \left[\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha+\delta}{2}\right]$, *se* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u|^2\right) dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2\right) \\
&+ Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\alpha}} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{(\delta-\theta)n}{2\theta}+\delta}}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Expansão Assintótica e Taxa Ótima: Problema Linear

Neste capítulo encontramos expansões assintóticas para o Problema de Cauchy Linear (2.1) e a sua derivada no tempo. Usando essas expansões, mostramos que as taxas de decaimento da norma L^2 da solução do problema linear e a derivada, encontradas no Capítulo 3, são ótimas.

Como consequência das otimalidades das taxas de decaimento para $u(t,x)$ e $u_t(t,x)$, provaremos também otimalidade para $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t,x)$ e $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t(t,x)$, mostrando que esta última possui, individualmente, uma taxa melhor da que foi obtida no Teorema 3.4.3 (Capítulo 3).

A solução do problema linear (3.1) no espaço de Fourier é dada da seguinte forma

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0 + \hat{G}(t,\xi)\hat{u}_1 \tag{4.1}$$

com

$$\hat{G}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

$$\hat{H}(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

Aqui λ_+ e λ_- são as raízes características associadas que satisfazem a identidade

$$(1+|\xi|^{2\delta})\lambda^2 + |\xi|^{2\theta}\lambda + |\xi|^{2\alpha} = 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e, portanto são dadas por

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm \sqrt{|\xi|^{4\theta} - 4(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}. \tag{4.2}$$

Notamos que para $|\xi| \leq 1$ e $\theta > \frac{\alpha}{2}$ temos que $|\xi|^{4\theta} \leq |\xi|^{2\alpha}$. Então

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{4\theta} - 4(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{2\alpha} \\
&= |\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^{2\alpha} - 4|\xi|^{2\delta+2\alpha} \\
&\leq -3|\xi|^{2\alpha} - 4|\xi|^{2\delta+2\alpha} < 0
\end{aligned}$$

para $\xi \neq 0$.

Com isso concluímos que $\lambda_\pm$ são complexas, ou seja,

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm i|\xi|^{\alpha}\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Neste capítulo vamos considerar as seguintes condições sobre as potências fracionárias

$$0 < \delta \leq \theta \leq \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

4.1 Expansão Assintótica para $\hat{u}(t,\xi)$

Na Subseção 4.1.1 vamos construir uma expansão assintótica para a solução $\hat{u}(t,\xi)$ na baixa frequência e mostraremos que a norma L^2 da diferença entre a solução $\hat{u}(t,\cdot)$ e a expansão assintótica decai no tempo com certa taxa. Na Subseção 4.1.2 também mostraremos que a norma L^2 da diferença da solução e a expansão assintótica encontrada na Subseção 4.1.1 decai, nessa região de alta frequência, com certa taxa no tempo.

4.1.1 Zona de Baixa Frequência ($|\xi| \leq 1$)

Sabemos que as raízes características, associadas à equação (3.1) no espaço de Fourier, como é simples de verificar para esse caso, são complexas e dadas da seguinte forma

$$\lambda_{\pm} = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm i|\xi|^{\alpha}\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Para simplificar as expressões, vamos definir

$$a(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})} \quad \text{e} \quad b(\xi) = \frac{|\xi|^{\alpha}\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}, \tag{4.3}$$

e assim podemos reescrever $\lambda_{\pm}$ da seguinte forma

$$\lambda_{\pm} = -a(\xi) \pm ib(\xi).$$

Vamos encontrar a solução explícita $\hat{u}(t,\xi)$ como aparece no início deste capítulo, usando a expressão acima para $\lambda_{\pm}$. Notamos que

$$\lambda_{+} - \lambda_{-} = \big(-a(\xi) + ib(\xi)\big) - \big(-a(\xi) - ib(\xi)\big) = 2ib(\xi),$$

e que

$$\begin{aligned} e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} &= e^{(-a(\xi)+ib(\xi))t} - e^{(-a(\xi)-ib(\xi))t} \\ &= e^{-a(\xi)t}\left(e^{ib(\xi)t} - e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &= e^{-a(\xi)t} 2i \sin\left(b(\xi)t\right). \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} &\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t} = \big(-a(\xi) + ib(\xi)\big)e^{(-a(\xi)-ib(\xi))t} \\ &- \big(-a(\xi) - ib(\xi)\big)e^{(-a(\xi)+ib(\xi))t} \\ &= e^{-a(\xi)t} a(\xi)\left(e^{ib(\xi)t} - e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &+ e^{-a(\xi)t} ib(\xi)\left(e^{ib(\xi)t} + e^{-ib(\xi)t}\right) \\ &= e^{-a(\xi)t} 2ia(\xi)\sin\big(b(\xi)t\big) + e^{-a(\xi)t} 2ib(\xi)\cos\left(b(\xi)t\right). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin\left(b(\xi)t\right)$$

e também que

$$\frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t) + e^{-a(\xi)t}\cos\left(b(\xi)t\right).$$

Portanto, temos que a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do Problema de Cauchy (3.1) no espaço de Fourier, conforme (4.1), é dada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}\cos\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 \\ + e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observação 4.1.1 *Usando o Teorema do Valor Médio encontramos as seguintes identidades*

(i) $$\cos\left(b(\xi)t\right) = \cos(|\xi|^\alpha t) - t\left(b(\xi) - |\xi|^\alpha\right)\sin(\eta(\xi)t),$$

com

$$\eta(\xi) := \beta_1 b(\xi) + (1-\beta_1)|\xi|^\alpha$$

para algum $\beta_1 \in (0,1)$,

(ii) $$\sin\left(b(\xi)t\right) = \sin(|\xi|^\alpha t) + t\left(b(\xi) - |\xi|^\alpha\right)\cos(\mu(\xi)t),$$

com

$$\mu(\xi) := \beta_2 b(\xi) + (1-\beta_2)|\xi|^\alpha$$

para algum $\beta_2 \in (0,1)$.

Usando as identidades da Observação 4.1.1 podemos reescrever a solução dada em (4.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 \\ &- e^{-a(\xi)t}t\,(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1 \\ &+ e^{-a(\xi)t}t\frac{(b(\xi)-|\xi|^\alpha)}{b(\xi)}\cos(\mu(\xi))\hat{u}_1.\end{aligned}$$

O termo da expansão assintótica é determinado por uma combinação linear dos termos

$$e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) \quad \text{e} \quad e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}.$$

Agora, podemos reescrever a solução $\hat{u}(t,\xi)$ na seguinte forma

$$\begin{aligned}&\hat{u}(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\hat{u}_1 \\ &+ e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi)-|\xi|^\alpha\big)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0 \\ &+ e^{-a(\xi)t}\left(\frac{1}{b(\xi)}-\frac{1}{|\xi|^\alpha}\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1 + e^{-a(\xi)t}t\left(\frac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\mu(\xi)t)\hat{u}_1.\end{aligned}$$

Observação 4.1.2 *Usando a Transformada de Fourier podemos decompor os dados iniciais $\hat{u}_0$ e $\hat{u}_1$ na seguinte forma*

$$\hat{u}_j(\xi) = A_j(\xi) - iB_j(\xi) + P_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $j = 0,1$ (de modo similar como aparece no Lema 1.1.3 para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), sendo P_j, A_j, B_j definidos por

$$P_j := P_{u_j} = \int_{\mathbb{R}^n} u_j(x)dx, \quad A_j := A_{u_j}, \quad B_j := B_{u_j}.$$

Usando a observação acima vamos considerar a seguinte expansão assintótica desejada

$$P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}.$$

Portanto concluímos que a diferença da solução $\hat{u}(t,\xi)$ do Problema de

Cauchy (3.1) e a expansão assintótica é dada por

$$\begin{aligned}
&\hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \\
&= \Big(A_0(\xi) - iB_0(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + \Big(A_1(\xi) - iB_1(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \\
&+ e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi) - |\xi|^\alpha\big)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0 \\
&+ e^{-a(\xi)t}\left(\frac{1}{b(\xi)} - \frac{1}{|\xi|^\alpha}\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1 + e^{-a(\xi)t}t\left(\frac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\mu(\xi)t)\hat{u}_1.
\end{aligned}$$

Definimos agora as seis expressões que aparecem no lado direito da igualdade acima como sendo as seguintes funções

- $K_1(t,\xi) = \Big(A_1(\xi) - iB_1(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\dfrac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}$;
- $K_2(t,\xi) = \Big(A_0(\xi) - iB_0(\xi)\Big)e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)$;
- $K_3(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}\dfrac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0$;
- $K_4(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi) - |\xi|^\alpha\big)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0$;
- $K_5(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}\left(\dfrac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\dfrac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\hat{u}_1$;
- $K_6(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}t\left(\dfrac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\mu(\xi)t)\hat{u}_1$.

A seguir vamos mostrar que é possível estimar a norma L^2, na baixa frequência, dessas seis funções por uma taxa que seja melhor que a taxa $t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}$ encontrada no Capítulo 3 para a norma L^2 da solução.

Teorema 4.1.1 *Sejam $n > 2\alpha$, $0 < \delta \leq \theta \leq \alpha$ com $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\delta+\alpha}{2}$. Consideremos os dados iniciais*

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$$

com $\kappa \in (0, \min\{1,\delta\})$. Então existe um número $\epsilon_0 > 0$ tal que a solução $\hat{u}(t,\xi)$ para o problema (3.1) satisfaz

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1}\left|\hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos\left(|\xi|^\alpha t\right) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin\left(|\xi|^\alpha t\right)}{|\xi|^\alpha}\right|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}}\Big)t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{2\theta}},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$ com C uma constante positiva e

$$P_0 = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)dx, \quad P_1 = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)dx.$$

Demonstração: Mostraremos que a taxa de decaimento para a norma L^2 na baixa frequência, da diferença entre a solução no espaço de Fourier e a expansão assintótica, é da ordem $t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{2\theta}}$ para t suficientemente grande ($t >> 1$).

Precisamos estimar a norma L^2 das funções K_1, K_2 K_3, K_4, K_5 e K_6. Como

$$-a(\xi)t = -\frac{|\xi|^{2\theta}}{2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}t \leq -\frac{|\xi|^{2\theta}}{4}t, \ \ \forall\, t \geq 0,$$

podemos estimar todos os termos que contém exponenciais da forma seguinte

$$e^{-a(\xi)t} \leq e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{4}}.$$

Para estimar $K_1(t,\xi)$, usamos os Lemas 1.4.2 e 1.1.4 temos que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |K_1(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} |A_1(\xi) - iB_1(\xi)|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha} d\xi \\ &\leq C(K^2+M^2)\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{2\kappa-2\alpha} d\xi \\ &\leq C(K^2+M^2)\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n+2\kappa-2\alpha}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Agora vamos estimar $K_2(t,\xi)$. Usando os Lemas 1.4.2 e 1.1.4 temos, para todo $t \geq 1$, que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |K_2(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} |A_0(\xi) - iB_0(\xi)|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\ &\leq C(L^2+N^2)\|u_0\|^2_{L^1} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\ &\leq C(L^2+N^2)\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n}{2\theta}} \leq C\|u_0\|_{L^1} t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},\end{aligned}$$

pois $\kappa < \delta \leq \alpha$.

Para estimar $K_3(t,\xi)$, primeiro notemos que

$$4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha} \geq 4 + 4|\xi|^{2\delta} - 1 \geq 3, \tag{4.5}$$

pois temos que $|\xi|^{4\theta-2\alpha} \leq 1$, para todo $|\xi| \leq 1$ e $\dfrac{\alpha}{2} < \theta$.

Então para $\dfrac{\alpha}{2} < \theta$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |K_3(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t} \frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq \frac{1}{3}\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t} |\xi|^{4\theta-2\alpha} d\xi \\
&\leq \frac{1}{3}\|u_0\|^2_{L^1}\, t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}} \\
&\leq C\|u_0\|^2_{L^1}\, t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$, pois $\kappa < 2\theta$, e assim $2\kappa - 2\alpha < 4\theta - 2\alpha$.

Para estimar $K_4(t,\xi)$, notamos que para $|\xi| \leq 1$ temos pela desigualdade (4.5) que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} - 2(1+|\xi|^{2\delta})}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\right)^2 \\
&= \frac{4(1+|\xi|^{2\delta})^2 - 4(1+|\xi|^{2\delta})\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} + 4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}{4(1+|\xi|^{2\delta})^2} \\
&\leq \frac{2+|\xi|^{2\delta} - \sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{1+|\xi|^{2\delta}} \\
&\leq \frac{(2+|\xi|^{2\delta})^2 - 4(1+|\xi|^{2\delta}) + |\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2+|\xi|^{2\delta} + \sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2+\sqrt{3}} \\
&\leq C\Big(|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{4\theta-2\alpha}\Big).
\end{aligned}$$

Então, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{2\alpha}t^2 \left(\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}-1\right)^2 |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} t^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{2\alpha}\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{4\theta-2\alpha}\Big)d\xi \\
&= C\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} t^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}\Big(|\xi|^{4\delta+2\alpha}+|\xi|^{4\theta}\Big)d\xi \\
&\leq C\|u_0\|^2_{L^1} t^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4\theta}{2\theta}}\Big) \\
&= C\|u_0\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n}{2\theta}}\Big).
\end{aligned}
$$

Vimos que $n+2\kappa-2\alpha < n$. Agora, como $\delta+\alpha \geq 2\theta$, temos $2\alpha-4\theta \geq -2\delta$ e assim $4\delta+2\alpha-4\theta \geq 4\delta-2\delta = 2\delta > 0 > 2\kappa-2\alpha$, pois $0 < \kappa < \delta$. Portanto

$$
\int_{|\xi|\leq 1} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},
$$

para $t \geq 1$.

Agora vamos estimar $K_5(t,\xi)$. Usando a desigualdade (4.5), temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right|^2 &= \left|\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}-2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right|^2 \\
&\leq \left|\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}-2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{3}}\right|^2
\end{aligned}
$$

Agora, multiplicando a última estimativa pelo conjugado de seu numerador, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right|^2 &\leq \left|\frac{4(1+|\xi|^{2\delta})^2-4(1+|\xi|^{2\delta})+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{\sqrt{3}\left(2+2|\xi|^{2\delta}+\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\right)}\right|^2 \\
&\leq \left|\frac{4|\xi|^{2\delta}+4|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2\sqrt{3}}\right|^2 \\
&\leq C\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\Big) \\
&\leq C\left(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\right) \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

para todo $|\xi| \leq 1$.

Então, encontramos a seguinte estimativa para $K_5(t,\xi)$

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |K_5(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|\hat{u}_1\|^2_{L^\infty}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}\Big(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\Big)d\xi \\
&\leq C\|u_1\|^2_{L^1}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}\Big(|\xi|^{4\delta-2\alpha}+|\xi|^{8\theta-6\alpha}\Big)d\xi \\
&\leq C\|u_1\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta-2\alpha}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta-6\alpha}{2\theta}}\Big).
\end{aligned}
$$

$n-2\alpha+2\kappa \leq n+4\delta-2\alpha$, pois $2\kappa-2\alpha < 2\delta-2\alpha < 4\delta-2\alpha$, para $0<\kappa<\delta$. Como $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\delta+\alpha}{2}$, vemos que $8\theta-6\alpha > -2\alpha$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $8\theta-6\alpha \geq -2\alpha+\varepsilon$. Portanto,

$$
\int_{|\xi|\leq 1} |K_5(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|^2_{L^1} t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_1}{2\theta}},
$$

com $\varepsilon_1 = \min\{2\kappa, \varepsilon\}$, para todo $t \geq 1$.

Finalmente, estimemos $K_6(t,\xi)$. Para isso, vamos usar o Teorema do Valor Médio. Definindo

$$
f(r) = \frac{2(1+r^{2\delta})}{\sqrt{4(1+r^{2\delta})-r^{4\theta-2\alpha}}},
$$

vemos que

$$
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right| = |1-f(|\xi|)| = ||\xi|f'(\beta_2|\xi|)|,
$$

já que $f(0)=1$, com $\beta_2 \in (0,1)$.
Notamos que derivando f em relação a r temos que $f'(r)$ é dada pela seguinte expressão

$$f'(r) = \frac{4\delta r^{2\delta-1}\left(4(1+r^{2\delta}) - r^{4\theta-2\alpha}\right) - (1+r^{2\delta})\left(8\delta r^{2\delta-1} - (4\theta-2\alpha) r^{4\theta-2\alpha-1}\right)}{\left(4(1+r^{2\delta}) - r^{4\theta-2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Então é fácil verificar que

$$|f'(r)| \leq C\Big(r^{2\delta-1} + r^{4\theta-2\alpha-1}\Big)$$

para $0 \leq r \leq 1$.

Concluímos então que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} |K_6(t,\xi)|^2 d\xi \\
&\leq t^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta} t}\left(1 - \frac{2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right)^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|\hat{u_1}\|^2_{L^\infty} t^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{|\xi|^{2\theta} t}\Big(|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{8\theta-4\alpha}\Big) d\xi \\
&\leq C\|u_1\|^2_{L^1}\, t^2\Big(t^{-\frac{n+4\delta}{2\theta}} + t^{-\frac{n+8\theta-4\alpha}{2\theta}}\Big) \\
&= C\|u_1\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta-4\theta}{2\theta}} + t^{-\frac{n+4\theta-4\alpha}{2\theta}}\Big).
\end{aligned}$$

Para $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\delta+\alpha}{2}$ e $0 < \kappa < \delta$, temos que $4\delta - 4\theta > 2\kappa - 2\alpha$, com isso $t^{-\frac{n+4\delta-4\theta}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}}$. Agora, da hipótese $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\delta+\alpha}{2}$, vemos que $4\theta > 2\alpha$, portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $4\theta \geq 2\alpha + \varepsilon$. Assim $n + 4\theta - 4\alpha \geq n - 2\alpha + \varepsilon$. Finalmente, considerando $\varepsilon_2 = \min\{2\kappa, \varepsilon\}$, temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |K_6(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|^2_{L^1} t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_2}{2\theta}},$$

para todo $t \geq 1$.

O teorema está provado se consideramos $\varepsilon_0 = \min\{2\kappa, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. ■

4.1.2 Zona de Alta Frequência ($|\xi| \geq 1$)

Para mostrar que a norma L^2 da diferença entre a solução $\hat{u}(t,\xi)$ com o perfil assintótico encontrado na subseção anterior decai com uma taxa boa na alta frequência vamos usar a seguinte estimativa encontrada no Lema 3.3.1 do Capítulo 3

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq Ce^{-\frac{\eta}{5}t}\big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{L^2}\big), \tag{4.7}$$

que vale para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $0 \leq \delta \leq \theta$.

Agora considerando $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta < \theta$ e as definições de P_0 e P_1 temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) + P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \right|^2 d\xi \\
\leq& C \int_{|\xi|\geq 1} |P_1|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \frac{\sin^2(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^{2\alpha}} + |P_0|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} \cos^2(|\xi|^\alpha t) d\xi \\
\leq& C\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta} t}{1+|\xi|^{2\delta}}} d\xi \\
\leq& C\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta} t}{2}} d\xi \\
\leq& C\big(|P_1|^2 + |P_0|^2\big) \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{(|\xi|^{2\theta-2\delta}+1)}{4} t} d\xi \\
=& C\left(|P_1|^2 + |P_0|^2\right) e^{-\frac{t}{4}} \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}}{4} t} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.4.2, temos a seguinte estimativa para o perfil assintótico

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) + P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \right|^2 d\xi \\
\leq& C\big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\big) e^{-\frac{t}{4}} t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $t > 0$, com C uma constante positiva dependendo de θ, δ e n.

A estimativa acima permite provar o próximo teorema.

Teorema 4.1.2 *Sejam* $\dfrac{\alpha}{2} < \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta < \theta$ *e*

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

Então a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema (3.1) satisfaz

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\left|\hat{u}(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big)e^{-kt},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$, com C e k constantes positivas.

Demonstração: A prova é obtida usando as estimativas (4.7) e (4.8),

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1}\left|\hat{u}(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi \\
\leq& C\left(\int_{|\xi|\geq 1}|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 1}\left|P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi\right) \\
\leq& Ce^{-\frac{\eta}{5}t}\Big(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2\Big) + C\Big(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big)e^{-\frac{t}{4}}t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}} \\
\leq& C\Big(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\Big)e^{-kt},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$, com $k = \min\left\{\frac{\eta}{5}, \frac{1}{4}\right\}$. ■

4.1.3 Taxa Ótima para $u(t,x)$

Para mostrar que as taxas encontradas no Capítulo 3 para a norma L^2 da solução são ótimas, vamos usar as estimativas para a diferença entre a solução $\hat{u}$ e o perfil assintótico feitas na Seção 4.1.

Nosso objetivo é mostrar o seguinte importante teorema:

Teorema 4.1.3 *Sejam $n > 2\alpha$, $P_1 \neq 0$ com $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$, $\kappa \in (0, \min\{1,\delta\})$ e*

$$u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n).$$

Então, existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $t_0 >> 1$ tais que para todo $t \geq t_0$ vale que

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} \leq \|u(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

sendo $u(t,x)$ a única solução do Problema de Cauchy (2.1).

Demonstração: Pelo Teorema 3.4.1 (ver Capítulo 3 Seção 3.4) temos que

$$\|u(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

com $C_2 > 0$ uma constante que depende dos dados iniciais.

Usando os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2 obtemos

$$\begin{aligned}
&-\left\|\hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
&\geq -C\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{L^2} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1}\Big)e^{-\frac{kt}{2}} \\
&- C\Big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}}\Big)t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{4\theta}}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

com k e ε_0 constantes positivas.

Também, pelo Lema 1.4.2, temos

$$\begin{aligned}
&|P_0|^2 \left\|e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\|^2 \\
&= |P_0|^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}\cos^2(|\xi|^\alpha t)d\xi + |P_0|^2 \int_{|\xi|\geq 1} e^{\frac{-|\xi|^{2\theta}t}{1+|\xi|^{2\delta}}}\cos^2(|\xi|^\alpha t)d\xi \\
&\leq |P_0|^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|\xi|^{2\theta}t}d\xi + |P_0|^2 \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}}{2}t}d\xi \\
&\leq C|P_0|^2\Big(t^{-\frac{n}{2\theta}} + t^{-\frac{n}{2\theta-2\delta}}\Big) \leq C|P_0|^2 t^{-\frac{n}{2\theta}}, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

pois $0 < \delta \leq \theta$.

Pelo Lema 1.4.4, também temos

$$|P_1|\left\|e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\right\|_{L^2} \geq C_3|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}}, \qquad (4.11)$$

para todo $t \geq t_1$ com $t_1 >> 1$ suficientemente grande.

Pelo Teorema de Plancherel, notamos que valem as seguintes estimativas na norma L^2

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| &\geq \left\| P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
&- \left\| \hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} - P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
&\geq |P_1| \left\| e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \right\| - |P_0| \left\| e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
&- \left\| \hat{u}(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} - P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\|.
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas (4.9), (4.10) e (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| &\geq C_3 |P_1| t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} - C|P_0| t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
&- C\Big(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{L^2} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1} \Big) e^{-\frac{kt}{2}} \\
&- C\Big(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} + \|u_0\|^2_{L^1} \Big) t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{4\theta}}, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_1$ com $t_1 >> 1$ e com $0 < \delta \leq \theta$ e $\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha+\delta}{2}$. Assim, da estimativa (4.12) e da hipótese que $P_1 \neq 0$, concluímos que existe uma constante $C_1 > 0$ e um $t_0 > 0$, tais que

$$\|u(t,\cdot)\| \geq C_1 |P_1| t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}}$$

para $t \geq t_0 \geq t_1$. ∎

4.2 Expansão Assintótica para $\hat{u}_t(t,\xi)$

Nesta seção, encontraremos expansão assintótica para a derivada da solução do problema (3.1), $\hat{u}_t(t,\xi)$, fazendo uso da solução explícita encontrada na seção anterior para $\hat{u}(t,\xi)$. Também mostraremos que a diferença entre a derivada da solução e a sua expansão assintótica na norma L^2 decai com certas taxas tanto na baixa frequência bem como na alta frequência.

4.2.1 Zona de Baixa Frequência ($|\xi| \leq 1$)

Como tinhamos visto na Seção 4.1, a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do Problema de Cauchy (3.1) no espaço de Fourier vem dada por

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\cos\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_0 + e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin\big(b(\xi)t\big)\hat{u}_0\\ &\quad + e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin\left(b(\xi)t\right)\hat{u}_1, \end{aligned}\tag{4.13}$$

com $a(\xi)$ e $b(\xi)$ definidos como em (4.3).

Derivando no tempo a expressão para $\hat{u}(t,\xi)$ dada em (4.13) se obtém

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= -a(\xi)e^{-a(\xi)t}\left(\cos(b(\xi)t)\hat{u}_0 + \frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_0 + \frac{1}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1\right)\\ &\quad + e^{-a(\xi)t}\big(- b(\xi)\sin(b(\xi)t)\hat{u}_0 + a(\xi)\cos(b(\xi)t)\hat{u}_0 + \cos(b(\xi)t)\hat{u}_1\big)\\ &= -e^{-a(\xi)t}\left(b(\xi) + \frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}\right)\sin(b(\xi)t)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1\\ &\quad + e^{-a(\xi)t}\cos(b(\xi)t)\hat{u}_1.\end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio, obtemos as seguintes igualdades

(i) $$\sin(b(\xi)t) = \sin(|\xi|^\alpha t) + t\left(b(\xi) - |\xi|^\alpha\right)\cos(\eta(\xi)t),$$

com

$$\eta(\xi) := \beta_1 b(\xi) + (1-\beta_1)|\xi|^\alpha$$

para algum $\beta_1 \in (0,1)$,

(ii) $$\cos(b(\xi)t) = \cos(|\xi|^\alpha t) - t\left(b(\xi) - |\xi|^\alpha\right)\sin(\mu(\xi)t),$$

com

$$\mu(\xi) := \beta_2 b(\xi) + (1-\beta_2)|\xi|^\alpha$$

para algum $\beta_2 \in (0,1)$.

Usando essas identidades, podemos reescrever $\hat{u}_t(t,\xi)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= -e^{-a(\xi)t}\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0\\ &- e^{-a(\xi)t}t\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}\right)\big(b(\xi)-|\xi|^\alpha\big)\cos(\eta(\xi)t)\hat{u}_0 - e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1\\ &+ e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1 - e^{-a(\xi)t}t(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\sin(\mu(\xi)t)\hat{u}_1.\end{aligned}$$

Observação 4.2.1 *Vimos que a expansão assintótica para a solução* $\hat{u}(t,\xi)$ *do Problema de Cauchy* (3.1) *no espaço de Fourier é dada por uma combinação linear das funções*

$$e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) \quad e \quad e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}.$$

Então, podemos esperar que a expansão assintótica para a derivada da solução do problema original, venha determinada pela transformada de Fourier inversa de uma combinação linear dos termos

$$-e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\sin(|\xi|^\alpha t) \quad e \quad e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t).$$

Nosso objetivo então será mostrar que, efetivamente, essa é a expansão assintótica procurada.

Tendo em conta a Observação 4.2.1, consideramos

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= \Big(e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1 - e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0\Big)\\ &- e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1 - e^{-a(\xi)t}t\big(b(\xi)-|\xi|^\alpha\big)\sin(\mu(\xi)t)\hat{u}_1\\ &- e^{-a(\xi)t}\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}-|\xi|^\alpha\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0\\ &- e^{-a(\xi)t}t\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}\right)\big(b(\xi)-|\xi|^\alpha\big)\cos(\eta(\xi)t)\hat{u}_0.\end{aligned}$$

Agora, pela Observaçaõ 4.1.2, descompomos as Transformadas de Fourier das funções $\hat{u}_0$ e $\hat{u}_1$

$$\hat{u}_j(\xi) = A_j(\xi) - iB_j(\xi) + P_j, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

para $j = 0, 1$.

Com essas descomposições, podemos considerar a seguinte expansão assintótica para $\hat{u}_t(t,\xi)$

$$-P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t) + P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t).$$

Portanto, a diferença entre a derivada da solução $\hat{u}_t(t,\xi)$ e a expansão assintótica, é dada por

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\\
&= (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\, e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\, e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\\
&- e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1 - e^{-a(\xi)t}t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\mu(\xi)t)\hat{u}_1\\
&- e^{-a(\xi)t}\left(b(\xi) + \frac{a(\xi)^2}{b(\xi)} - |\xi|^\alpha\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0\\
&- e^{-a(\xi)t}t\left(b(\xi) + \frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}\right)(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\cos(\eta(\xi)t)\hat{u}_0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Definamos as seguintes funções, as quais representam a cada termo da soma que aparece no lado direito da agualdade acima

- $N_1(t,\xi) = (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\, e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)$;
- $N_2(t,\xi) = (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\, e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)$;
- $N_3(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}\dfrac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_1$;
- $N_4(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\mu(\xi)t)\hat{u}_1$;
- $N_5(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}\left(b(\xi) + \dfrac{a(\xi)^2}{b(\xi)} - |\xi|^\alpha\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0$;
- $N_6(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}t(b(\xi)^2 + a(\xi)^2)\left(\dfrac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\eta(\xi)t)\hat{u}_0$.

Agora, mostraremos que a taxa de decaimento para a norma L^2 na baixa frequência, da diferença entre a derivada $\hat{u}_t(t,\xi)$ e a expansão assintótica é da ordem $t^{-\frac{n}{2\theta}}$, para t suficientemente grande. Para isso, precisamos obter estimativas para N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 e N_6 na norma L^2.

Considerando $\kappa > 0$, tal que $\kappa < \min\{1, \delta\}$, estimamos $N_1(t,\xi)$

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\le 1} |N_1(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|\le 1} |A_1(\xi) - iB_1(\xi)|^2 e^{-c|\xi|^{2\theta} t} d\xi \\
&\le C \int_{|\xi|\le 1} (|A_1(\xi)|^2 + |B_1(\xi)^2|) e^{-c|\xi|^{2\theta} t} d\xi \\
&\le C(M^2 + N^2)\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} \int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2\kappa} d\xi \\
&\le C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}},
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Estimemos agora $N_2(t,\xi)$. Para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\le 1} |N_2(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|\le 1} |A_0(\xi) - iB_0(\xi)|^2 e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&\le C \int_{|\xi|\le 1} (|A_0(\xi)|^2 + |B_0(\xi)|^2) e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&\le C(L^2 + K^2)\|u_0\|^2_{L^1} \int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&\le C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}} \le C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}},
\end{aligned}$$

pois $0 < \kappa < \delta \le \alpha$.

Para estimar $N_3(t,\xi)$, usaremos a desigualdade (4.5) e as definições de $a(\xi)$ e $b(\xi)$. Assim

$$\left|\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\right|^2 = \frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} \le \frac{1}{3}|\xi|^{4\theta-2\alpha}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\le 1} |N_3(t,\xi)|^2 d\xi &\le C \int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{4\theta-2\alpha} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\le C\|\hat{u}_1\|^2_{L^\infty} \int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{4\theta-2\alpha} d\xi \\
&\le C\|u_1\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}}.
\end{aligned}$$

Agora, como $\frac{\alpha}{2} < \theta \le \frac{\delta+\alpha}{2}$, temos que $4\theta - 2\alpha > 0$. Assim, existe $\varepsilon_1 > 0$, tal que $4\theta - 2\alpha \geq \varepsilon_1$. Portanto

$$\int_{|\xi|\leq 1} |N_3(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+\varepsilon_1}{2\theta}}$$

Para estimar $N_4(t,\xi)$ na região $|\xi| \leq 1$, usamos a desigualdade (4.5)

$$\begin{aligned}
|b(\xi) - |\xi|^\alpha|^2 &= \left| \frac{|\xi|^\alpha \sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})} - |\xi|^\alpha \right|^2 \\
&= |\xi|^{2\alpha} \left| \frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} - 2(1+|\xi|^{2\delta})}{2(1+|\xi|^{2\delta})} \right|^2 \\
&\leq C|\xi|^{2\alpha} \left| \frac{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha} - 4(1+2|\xi|^{2\delta}+|\xi|^{4\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} + 2(1+|\xi|^{2\delta})} \right|^2 \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{3}+2} |\xi|^{2\alpha} \left| 4|\xi|^{2\delta} + |\xi|^{4\theta-2\alpha} + 4|\xi|^{4\delta} \right|^2 \\
&\leq C|\xi|^{2\alpha} \left(|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{8\theta-4\alpha} + |\xi|^{8\delta} \right) \\
&\leq C \left(|\xi|^{4\delta+2\alpha} + |\xi|^{8\theta-2\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Assim, concluimos em

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |N_4(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C \int_{|\xi|\leq 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t} t^2 \left(|\xi|^{4\delta+2\alpha} + |\xi|^{8\theta-2\alpha} \right) |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 t^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t} \left(|\xi|^{4\delta+2\alpha} + |\xi|^{8\theta-2\alpha} \right) d\xi \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^2 \left(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha}{2\theta}} + t^{-\frac{n+8\theta-2\alpha}{2\theta}} \right) \\
&= C\|u_1\|_{L^1}^2 \left(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}} + t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}} \right).
\end{aligned}$$

Vimos na estimativa anterior que $t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}} \leq t^{-\frac{n+\varepsilon}{2\theta}}$, para $\varepsilon_1 > 0$ tal que $4\theta - 2\alpha \geq \varepsilon$. Também, como $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ e $\kappa < \delta$, vemos que $4\delta + 2\alpha - 4\theta \geq 2\kappa$ e com isso $t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}} \leq t^{\frac{n+2\kappa}{2\theta}}$. Assim, considerando $\varepsilon_2 = \min\{2\kappa, \varepsilon_1\}$, temos

$$\int_{|\xi|\leq 1} |N_4(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+\varepsilon_2}{2\theta}}.$$

Estimemos agora $N_5(t,\xi)$. Pelas definições de $a(\xi)$ e $b(\xi)$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}-|\xi|^\alpha\right)^2\\
&=\left(\frac{|\xi|^\alpha\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}+\frac{|\xi|^{4\theta-\alpha}}{2(1+|\xi|^{2\delta})\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}-|\xi|^\alpha\right)^2\\
&=|\xi|^{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}+\frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2(1+|\xi|^{2\delta})\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}-1\right)^2\\
&=|\xi|^{2\alpha}\left(\frac{2-\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right)^2\\
&\leq\frac{1}{\sqrt{3}}|\xi|^{2\alpha}\left(2-\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\right)^2
\end{aligned}
$$

Na última desigualdade, temos considerado a relação (4.5)

Multiplicando a última estimativa pelo seu conjugado, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(b(\xi)+\frac{a(\xi)^2}{b(\xi)}-|\xi|^\alpha\right)^2 &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}|\xi|^{2\alpha}\left(\frac{4-4(1+|\xi|^{2\delta})+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2+\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right)^2\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}|\xi|^{2\alpha}\left(\frac{-4|\xi|^{2\delta}+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{2+\sqrt{3}}\right)^2\\
&\leq C|\xi|^{2\alpha}\left(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\right)\\
&= C\left(|\xi|^{4\delta+2\alpha}+|\xi|^{8\theta-2\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1}|N_5(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t}\left(|\xi|^{4\delta+2\alpha}+|\xi|^{8\theta-2\alpha}\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi\\
&\leq C\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t}\left(|\xi|^{4\delta+2\alpha}+|\xi|^{8\theta-2\alpha}\right)d\xi\\
&\leq C\|u_0\|^2_{L^1}\left(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta-2\alpha}{2\theta}}\right).
\end{aligned}
$$

Vemos que $4\delta+2\alpha>2\kappa$, pois $0<\kappa<\delta$ e $8\theta-2\alpha\geq 2\kappa$, pois $\frac{\alpha}{2}<\theta\leq\frac{\alpha+\delta}{2}$ e $0<\kappa<\delta$. Portanto

$$
\int_{|\xi|\leq 1}|N_5(t,\xi)|^2 d\xi\leq C\|u_0\|^2_{L^1}t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}}.
$$

Finalmente, para estimar $N_6(t,\xi)$, notemos que

$$
\begin{aligned}
\left|b(\xi)^2+a(\xi)^2\right|^2 &= \left|\frac{|\xi|^{2\alpha}\big(4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}\big)+|\xi|^{4\theta}}{4(1+|\xi|^{2\delta})^2}\right|^2\\
&= \left|\frac{|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\right|^2\\
&\leq C|\xi|^{4\alpha};
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^{\alpha}}{b(\xi)}\right|^2 &= \left|\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}-2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right|^2\\
&\leq C\left|\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}-2(1+|\xi|^{2\delta})\right|^2.
\end{aligned}
$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado nesta última desigualdade, temos para $|\xi|\leq 1$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^{\alpha}}{b(\xi)}\right|^2 &\leq \left|\frac{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}-4(1+2|\xi|^{2\delta}+|\xi|^{4\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta})-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}+2(1+|\xi|^{2\delta})}\right|^2\\
&\leq C\left|\frac{-8|\xi|^{2\delta}-4|\xi|^{4\delta}-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{\sqrt{3}+2}\right|^2\\
&\leq C\left(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\right)\\
&\leq C\left(|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{8\theta-4\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicando as desigualdades obtidas, obtemos a estimativa

$$
\left|b(\xi)^2+a(\xi)^2\right|^2\left|\frac{b(\xi)-|\xi|^{\alpha}}{b(\xi)}\right|^2 \leq C(|\xi|^{4\delta+4\alpha}+|\xi|^{8\theta}).
$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le 1} |N_6(t,\xi)|^2 d\xi &\le C\int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t} t^2(|\xi|^{4\delta+4\alpha}+|\xi|^{8\theta})|\hat{u}_0|^2 d\xi\\ &\le C\|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2 t^2 \int_{|\xi|\le 1} e^{-c|\xi|^{2\theta}t}(|\xi|^{4\delta+4\alpha}+|\xi|^{8\theta})d\xi\\ &\le C\|u_0\|_{L^1}^2 t^2\left(t^{-\frac{n+4\delta+4\alpha}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta}{2\theta}}\right)\\ &= C\|u_0\|_{L^1}^2\left(t^{-\frac{n+4\delta+4\alpha-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4\theta}{2\theta}}\right).\end{aligned}$$

Notemos que $t^{-\frac{n+4\theta}{2\theta}} \le t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}}$, pois $0<\kappa<\delta\le\theta$. Também, como $\frac{\alpha}{2}<\theta\le\frac{\alpha+\delta}{2}$ e $0<\kappa<\theta$, temos que $4\delta+4\alpha-4\theta\ge 2\kappa$. Portanto, concluimos em

$$\int_{|\xi|\le 1} |N_6(t,\xi)|^2 d\xi \le C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}}.$$

Combinando as estimativas anteriores e considerando $\varepsilon_0=\min\{2\kappa,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, temos provado o seguinte teorema

Teorema 4.2.1 *Sejam $0<\delta\le\theta\le\alpha$ com $\frac{\alpha}{2}<\theta\le\frac{\delta+\alpha}{2}$. Consideremos os dados iniciais*

$$u_0\in L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1\in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$$

com $\kappa\in(0,\min\{1,\delta\})$. Então existe um número $\epsilon_0>0$ tal que a derivada da solução $\hat{u}_t(t,\xi)$ para o problema (3.1) satisfaz

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\le 1}\left|\hat{u}_t(t,\xi)-P_1e^{-a(\xi)t}\cos\left(|\xi|^\alpha t\right)+P_0e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi\\ &\le C\Big(\|u_0\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{L^1}^2+\|u_1\|_{L^{1,\kappa}}^2\Big)t^{-\frac{n+\varepsilon_0}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t\ge 1$ com C uma constante positiva e

$$P_0=\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)dx,\quad P_1=\int_{\mathbb{R}^n}u_1(x)dx.$$

4.2.2 Zona de Alta Frequência $|\xi| \geq 1$

Usaremos a estimativa encontrada no Lema 3.3.1. Dessa estimativa, podemos inferir, para $|\xi| \geq 1$

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}_t(t,\xi)|^2 \leq Ce^{-\frac{\eta}{5}t}(\|u_0\|^2_{H^\alpha} + \|u_1\|^2_{H^\delta}), \tag{4.15}$$

que vale para $0 < \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

Estimemos o perfil assintótico para $\hat{u}_t(t,\xi)$

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\geq 1} \left(|P_1|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t}\cos^2(|\xi|^\alpha t) + |P_0|^2 e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t}|\xi|^{2\alpha}\sin^2(|\xi|^\alpha t)\right) d\xi \\
&\leq C(|P_1|^2 + |P_0|^2)\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t}|\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&\leq C(|P_1|^2 + |P_0|^2)\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}}{2}t}|\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&\leq C(|P_1|^2 + |P_0|^2)\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\left(\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}+1}{4}\right)t}|\xi|^{2\alpha} d\xi \\
&= C(|P_1|^2 + |P_0|^2)e^{-\frac{t}{4}}\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}}{4}t}|\xi|^{2\alpha} d\xi,
\end{aligned}$$

sempre que $0 \leq \delta < \theta$.

Usando o Lema 1.4.2 e as definições de P_0 e P_1, temos a seguinte estimativa para o perfil assintótico

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} \left| P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi \\
&\leq C(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1})e^{-\frac{t}{4}}t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta-2\delta}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Essa última estimativa permite provar o seguinte Teorema

Teorema 4.2.2 *Sejam* $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta < \theta$ *e*

$$u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

Então a derivada da solução, $\hat{u}_t(t,\xi)$, satisfaz

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left|\hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi$$
$$\leq C(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2)e^{-kt},$$

para todo $t \geq 1$, com C e k constantes positivas.

Demonstração: Das estimativas (4.15) e (4.16), podemos escrever

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left|\hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi$$
$$\leq \int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}_t(t,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} \left|P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi$$
$$\leq Ce^{-\frac{\eta}{5}t}(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2) + C(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2)e^{-\frac{t}{4}}t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta-2\delta}}$$
$$\leq C(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2)e^{-kt},$$

para todo $t \geq 1$, com $k = \min\left\{\dfrac{\eta}{5}, \dfrac{1}{4}\right\}$. ■

4.2.3 Taxa Ótima para $u_t(t,x)$

No seguinte Teorema, provaremos a otimalidade da taxa para a norma L^2. Para tal fim, usaremos as estimativas encontradas na Seção 4.2.

Teorema 4.2.3 *Sejam $n \geq 1$, $P_1 \neq 0$, $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta < \theta$, $\kappa \in (0, \min\{1,\delta\})$ e*

$$u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \;\; u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n).$$

Então, existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, dependendo dos dados iniciais, e $t_1 > 0$ suficientemente grande tal que, para todo $t \geq t_1$ vale

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n}{4\theta}} \leq \|u_t(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n}{4\theta}},$$

sendo $u_t(t,x)$ a derivada da solução do problema de Cauchy.

Demonstração: Pelo Teorema 3.4.3, temos

$$\|u_t(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n}{4\theta}},$$

com $C_2 > 0$ uma constante que depende dos dados iniciais.

Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2, temos

$$
\begin{aligned}
&-\left\|\hat{u}_t(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
&\geq -C\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^{1,\kappa}}^2\right) t^{-\frac{n+\varepsilon_0}{4\theta}} \\
&- C\left(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right) e^{-\frac{k}{2}t}, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

com k e ε_0 constantes positivas.

Também temos

$$
\begin{aligned}
&|P_0|^2 \left\|e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\|^2 \\
&= |P_0|^2 \left(\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t} |\xi|^{2\alpha} \sin^2(|\xi|^\alpha t) d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}t} |\xi|^{2\alpha} \sin^2(|\xi|^\alpha t) d\xi\right) \\
&\leq |P_0|^2 \left(\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{2}t} |\xi|^{2\alpha} d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta-2\delta}}{2}t} |\xi|^{2\alpha} d\xi\right) \\
&\leq |P_0|^2 \left(C t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}} + C t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta-2\delta}}\right) \\
&\leq C|P_0|^2 t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}, \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

pois $0 < \delta < \theta$.

Pelo Lema 1.4.5, também temos

$$
|P_1| \left\|e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\| \geq C_3 |P_1| t^{-\frac{n}{4\theta}}, \qquad (4.19)
$$

para todo $t \geq t_0$ com t_0 suficientemente grande.

Pelo Teorema de Plancherel, vemos que são válidas as seguintes estimativas na norma L^2

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(t,\cdot)\| = \|\hat{u}_t(t,\cdot)\| \geq \left\|P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
&- \left\|\hat{u}_t(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
&\geq |P_1| \left\|e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\| - |P_0| \left\|e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
&- \left\|\hat{u}_t(t,\cdot) - P_1 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha \sin(|\xi|^\alpha t)\right\|.
\end{aligned}
$$

Combinando essa última estimativa com as estimativas (4.17), (4.18), (4.19), chegamos em

$$\begin{aligned}\|u_t(t,\cdot)\| &\geq C_3|P_1|t^{-\frac{n}{4\theta}} - C|P_0|t^{-\frac{n+2\alpha}{4\theta}} \\ &\quad - C\left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^{1,\kappa}}^2\right) t^{-\frac{n+\varepsilon}{4\theta}} \\ &\quad - C\left(\|u_1\|_{H^\delta}^2 + \|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right) e^{-\frac{k}{2}t} \\ &\geq C_1|P_1|t^{-\frac{n}{4\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_1$ com $t_1 \geq t_0 > 0$ suficientemente grande, sendo $C_1 = C_1(u_0, u_1)$.

Isso mostrou que a taxa obtida para a norma L^2 de u_t é ótima para o caso $0 \leq \delta < \theta$ e $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$. ■

4.3 Taxa Ótima para $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t,x)$

Para mostrar que a taxa obtida para a norma L^2 de $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u$ é ótima, multiplicamos a expressão para $\hat{u}(t,\xi)$ dada em (4.13) por $|\xi|^\alpha$ e procedemos como nos dois casos anteriores para u e u_t.

4.3.1 Baixa Frequência $|\xi| \leq 1$

Multiplicando por $|\xi|^\alpha$ à expressão para $\hat{u}(t,\xi)$ dada por (4.13), obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}&|\xi|^\alpha\hat{u}(t,\xi) - e^{-a(\xi)t}\Big(P_0|\xi|^\alpha\cos(|\xi|^\alpha t) + P_1\sin(|\xi|^\alpha t)\Big) \\ &= L_1(t,\xi) + L_2(t,\xi) + L_3(t,\xi) + L_4(t,\xi) + L_5(t,\xi) + L_6(t,\xi),\end{aligned}$$

onde

- $L_1(t,\xi) = (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\, e^{-a(\xi)t}\sin(|\xi|^\alpha t)$,
- $L_2(t,\xi) = (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\, e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\cos(|\xi|^\alpha t)$,
- $L_3(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\dfrac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_0$,
- $L_4(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}t|\xi|^\alpha(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0$,

- $L_5(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}\left(\dfrac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_1,$
- $L_6(t,\xi) = e^{-a(\xi)t}t|\xi|^\alpha\left(\dfrac{b(\xi)-|\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\mu(\xi)t)\hat{u}_1.$

Considerando $0<\kappa<\min\{1,\delta\}$, cada uma dessas funções, possuem as seguintes estimativas na baixa frequência ($|\xi|\le 1$)

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_1(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n+2\kappa}{2\theta}}.$$

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_2(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}.$$

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_3(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+4\theta}{2\theta}}.$$

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_4(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_0\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta+4\alpha-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\Big).$$

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_5(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_1\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+8\theta-4\alpha}{2\theta}}\Big).$$

$$\int_{|\xi|\le 1} |L_6(t,\xi)|^2\,d\xi \le C\|u_1\|^2_{L^1}\Big(t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}}+t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}}\Big).$$

4.3.2 Alta Frequência $|\xi|\ge 1$

Agora, para obtermos uma estimativa na alta frequência ($|\xi|\ge 1$), empregamos o Lema 3.3.1, obtendo assim

$$\int_{|\xi|\ge 1} |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \le Ce^{-\frac{\varepsilon}{5}t}\left(\|u_0\|^2_{H^\alpha}+\|u_1\|^2_{H^\delta}\right), \tag{4.20}$$

para todo $t>0$, $0\le\delta\le\theta\le\frac{\alpha+\delta}{2}$.

Também, das definições de P_0 e P_1, obtemos a seguinte estimativa para o perfil assintótico, na região $|\xi|\ge 1$

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\ge 1}\left|P_0e^{-a(\xi)t}|\xi|^\alpha\cos(|\xi|^\alpha t)+P_1e^{-a(\xi)t}\sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi\\ &\le C\left(\|u_0\|^2_{L^1}+\|u_1\|^2_{L^1}\right)e^{-\frac{t}{4}}t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta-2\delta}}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Agora, sob as hipóteses

i) $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 < \delta \leq \theta$,

ii) $u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$,

iii) $u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$,

e as estimativas (4.20) e (4.21), chegamos na seguinte relação

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left| |\xi|^\alpha \hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t} |\xi|^\alpha \cos(|\xi|^\alpha t) - P_1 e^{-a(\xi)t} \sin(|\xi|^\alpha t) \right|^2 d\xi$$
$$\leq C \left(\|u_0\|^2_{H^\alpha} + \|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1} \right) e^{-kt},$$

para todo $t \geq 1$, C e k constantes positivas. A demostração desse fato, é semelhante à demonstração do Teorema 4.2.2.

4.3.3 Taxas Ótimas

Com os resultados obtidos anteriormente, podemos provar a otimalidade da taxa na norma L^2 para $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(t,x)$, dada no seguinte Teorema

Teorema 4.3.1 *Sejam $n \geq 1$, $P_1 \neq 0$, $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 < \delta \leq \theta$, $\kappa \in (0, \min\{1,\delta\})$ e*

$$u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \;\; u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n).$$

Então, existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que, para todo $t \geq t_0$ vale

$$C_1 |P_1| t^{-\frac{n}{4\theta}} \leq \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C_2 t^{-\frac{n}{4\theta}}.$$

4.4 Taxa Ótima para $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t(t,\xi)$

Para conseguirmos uma expansão assintótica para $|\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi)$ e provar que a taxa ótima é melhor do que a taxa encontrada no Capítulo 3, usaremos os resultados obtidos na Seção 4.2.

4.4.1 Zona Baixa Frequência $|\xi| \leq 1$

De acordo com os resultados obtidos na Seção 4.2, e para obtermos uma estimativa na baixa frequência, multiplicamos por $|\xi|^\delta$ a igualdade dada pela equação (4.14), obtendo

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^{\delta+\alpha} \sin(|\xi|^\alpha t) \\
&= M_1(t,\xi) + M_2(t,\xi) + M_3(t,\xi) + M_4(t,\xi) + M_5(t,\xi) + M_6(t,\xi),
\end{aligned}
$$

onde as funções $M_j(t,\xi)$, $j = 1, \ldots, 6$ são definidas como

- $M_1(t,\xi) = (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\, e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \cos(|\xi|^\alpha t)$;
- $M_2(t,\xi) = (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\, e^{-a(\xi)t}|\xi|^{\delta+\alpha} \sin(|\xi|^\alpha t)$;
- $M_3(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \dfrac{a(\xi)}{b(\xi)} \sin(b(\xi)t)\hat{u}_1$;
- $M_4(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t} t|\xi|^\delta \left(b(\xi) - |\xi|^\alpha\right) \sin(\mu(\xi)t)\hat{u}_1$;
- $M_5(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \left(b(\xi) + \dfrac{a(\xi)^2}{b(\xi)} - |\xi|^\alpha\right) \sin(|\xi|^\alpha t)\hat{u}_0$;
- $M_6(t,\xi) = -e^{-a(\xi)t} t|\xi|^\delta \left(b(\xi)^2 + a(\xi)^2\right) \left(\dfrac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right) \cos(\eta(\xi)t)\hat{u}_0$.

Para estimar cada $M_j(t,\xi)$, $j = 1, \ldots, 6$, usaremos as estimativas encontradas no Teorema 4.2.1, para as funções $N_j(t,\xi)$, $j = 1, \ldots, 6$.

Assim, para $0 < \kappa < \min\{0, \delta\}$ obtemos as seguintes estimativas na baixa frequência

i) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_1(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n+2\delta+2\kappa}{2\theta}},$$

ii) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_2(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\delta+2\alpha}{2\theta}},$$

iii) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_3(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|^2_{L^1} t^{-\frac{n+2\delta+4\theta-2\alpha}{2\theta}},$$

iv) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_4(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_1\|^2_{L^1} \left(t^{-\frac{n+6\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}} + t^{-\frac{n+2\delta+4\theta-2\alpha}{2\theta}}\right),$$

v) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_5(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|^2_{L^1} \left(t^{-\frac{n+6\delta+2\alpha}{2\theta}} + t^{-\frac{n+2\delta+8\theta-2\alpha}{2\theta}}\right),$$

vi) $$\int_{|\xi|\leq 1} |M_6(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|^2_{L^1} \left(t^{-\frac{n+6\delta+4\alpha-4\theta}{2\theta}} + t^{-\frac{n+2\delta+4\theta}{2\theta}}\right).$$

Semelhantemente à demonstração do Teorema 4.2.1, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, a taxa na baixa frequência na norma L^2 vem dada por

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left| |\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^{\delta+\alpha}\sin(|\xi|^\alpha t)\right| d\xi$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}}\right) t^{-\frac{n+2\delta+\varepsilon_0}{4\theta}} \tag{4.22}$$

para todo $t \geq 1$, com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$.

4.4.2 Zona Alta Frequência $|\xi| \geq 1$

Como uma consequência do Teorema 4.2.2, temos a seguinte estimativa na alta frequência para a diferença entre $|\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi)$ e seu perfíl assintótico

Corolário 4.4.1 *Sejam $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ e*

$$u_0 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

Então $|\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi)$ satisfaz

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left| |\xi|^\delta \hat{u}_t(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \cos(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}|\xi|^{\delta+\alpha}\sin(|\xi|^\alpha t)\right|^2 d\xi$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{H^\alpha} + \|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}\right) e^{-kt},$$

para todo $t \geq 1$, com C e k constantes positivas.

4.4.3 Taxas Ótimas

Para provar otimalidade da taxa para $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t(t,\xi)$, com taxa ótima $t^{-\frac{n+2\delta}{2\theta}}$, precisamos obter estimativas superior e inferior na norma L^2 para essa função.

Para conseguirmos estimativa inferior, usamos uma versão do Lema 1.4.5, que nos permite obter, para $n \geq 1$ e $\frac{\alpha}{2} < \theta$

$$\left\| P_1 e^{-a(\xi)t}|\xi|^\delta \cos(|\xi|^\alpha t)\right\|_{L^2} \geq C|P_1| t^{-\frac{n+2\delta}{4\theta}},$$

para todo $t \geq t_1$, com $t_1 > 0$, e para alguma constante positiva C.

Para a estimativa superior, não podemos aplicar diretamente o Teorema 3.4.3, pois a taxa obtida aí, não é ótima. Assim, precisamos obter estimativas na alta e na baixa frequência independentemente.

- Para a alta frequência ($|\xi| \geq 1$), podemos usar o Lema 3.3.1, resultando em

$$\int_{|\xi|\geq 1} \left| |\xi|^{\delta} \hat{u}_t(t,\xi) \right|^2 d\xi \leq C \left(\|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2 \right) e^{-\frac{\varepsilon}{5}t} \tag{4.23}$$

- Para a baixa frequência ($|\xi| \leq 1$), usamos o Lema 3.1.6, obtendo

$$(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \leq C e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2\theta}}{10}t} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 \right).$$

  Multiplicando essa desigualdade por $\frac{|\xi|^{2\delta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq 0$, obtemos

$$|\xi|^{2\delta}|\hat{u}_t|^2 \leq C e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^{2\theta}}{10}t} \left(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2 + |\xi|^{2\delta}|\hat{u}_1|^2 \right).$$

  Integrando essa expressão na região $|\xi| \leq 1$

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left| |\xi|^{\delta} \hat{u}_t(t,\xi) \right|^2 d\xi \leq C \left(\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}} + \|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+2\delta}{2\theta}} \right).$$

  Como estamos trabalhando sob a hipótese $0 < \delta \leq \theta \leq \alpha$, obtemos finalmente uma estimativa na baixa frequência

$$\int_{|\xi|\leq 1} \left| |\xi|^{\delta} \hat{u}_t(t,\xi) \right|^2 d\xi \leq C \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right) t^{-\frac{n+2\delta}{2\theta}} \tag{4.24}$$

  Finalmente, das relações (4.23) e (4.24), vemos que existe um $t_2 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\left\| |\xi|^{\delta} \hat{u}_t(t,\cdot) \right\|_{L^2} \leq C \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{H^\alpha}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2 \right) t^{-\frac{n+2\delta}{4\theta}}.$$

Pelo Lema de Plancherel, obtemos a estimativa superior desejada, isto é

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t(t,\cdot) \right\|_{L^2} \leq C_2 t^{-\frac{n+2\delta}{4\theta}}, \tag{4.25}$$

para todo $t \geq t_2$, com $t_2 > 0$ suficientemente grande.

Com todas essas considerações, o resultado que se obtém é o seguinte

Teorema 4.4.1 *Sejam* $n \geq 1$, $P_1 \neq 0$, $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 < \delta \leq \theta < \alpha$, $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$ *e*

$$u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \;\; u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n).$$

Então, existem constantes C_1, C_2 *e* $t_0 > 0$ *suficientemente grande, tal que, para todo* $t \geq t_0$ *vale*

$$C_1 |P_1| t^{-\frac{n+2\delta}{4\theta}} \leq \left\| (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t(t, \cdot) \right\|_{L^2} \leq C_2 t^{-\frac{n+2\delta}{4\theta}}.$$

Capítulo 5

Caso de Super Damping

Neste capítulo encontraremos taxas de decaimento, expansão assintótica e taxas ótimas para nosso problema linear (5.1). Neste capítulo vamos considerar somente taxas para a norma L^2 da solução. O problema de Cauchy aqui considerado é o seguinte

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\theta} u_t + (-\Delta)^{\alpha} u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

com $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ onde o expoente do termo de *damping*, θ, é *grande*. Para tal fim, vamos dividir o nosso estudo em dois casos

- Caso $\delta = 0$, $0 < \alpha < \theta$.
- Caso $0 < \delta \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha + \delta}{2} < \theta < \dfrac{\alpha + 2\delta}{2}$.

Observemos que, no segundo caso, temos considerado a restrição por cima $\theta < \dfrac{\alpha + 2\delta}{2}$ com a finalidade de obtermos otimalidade da taxa, já que com o método empregado aqui, não foi possível provar essa otimalidade para o caso $\dfrac{\alpha + 2\delta}{2} \leq \theta$. Notemos também que, na obtenção de taxas de decaimento, essa restrição adicional não é necessária.

5.1 Super Damping: Caso $\delta = 0$ e $\theta > \alpha$

Nesta seção, encontraremos taxas de decaimento do problema linear (5.1) quando $\delta = 0$, isto é

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{5.2}$$

com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, sob a hipótese $\theta > \alpha$.

Nosso trabalho nesta seção generaliza o trabalho de Ikehata-Iyota [20] que estudaram o caso particular $\alpha = 1$ e $\theta = 2$.

Para esse fim, trabalhamos com o problema de Cauchy no espaço de Fourier, o qual, semelhantemente aos capítulos anteriores, obtém-se aplicando a Transformada de Fourier na variável x no problema (5.2). O problema assim obtido é

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^{2\theta} \hat{u}_t + |\xi|^{2\alpha} \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{5.3}$$

onde $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e potências fracionárias $0 < \alpha < \theta$.

Observação 5.1.1 *Sobre a existência de soluções para o problema* (5.2) *observamos que podemos escrevê-lo na forma abstrata*

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\,aA^{\upsilon} u_t + Au = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in D(A^{\alpha_0}) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \in D(A^{\alpha_1}), \end{cases}$$

onde $a = \frac{1}{2} > 0$, $\upsilon = \frac{\theta}{\alpha} \geq 0$, $A = (-\Delta)^{\alpha}$ *e* $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$.

Da definição do operador A, *vemos que ele é autoadjunto e não negativo. Além disso, para dados iniciais no espaço da energia* $X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ *temos que* $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = 0$.

Então, definindo $\tau = \max\left\{\frac{1}{2}, \upsilon\right\} = \upsilon = \frac{\theta}{\alpha} > 1$, *pois* $\theta > \alpha$, *vemos que*

$$1 - \tau < 0 < \alpha_0 - \alpha_1 = 1/2 < \tau.$$

Assim, pelo Teorema 2.1 em [14], temos que existe solução única $u = u(t,x)$ e além disso, a solução verifica

(a) $(u, u_t) \in C\left([0,\infty), H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)\right)$,

(b) Para $m \geq 1$ inteiro, a $m-$ésima derivada no tempo $D_t^m u(t,x)$ satizfaz

$$D_t^m u \in C\left((0,\infty), D(A^{1+m(\upsilon-1)})\right).$$

5.1.1 Estimativas

Para obtermos taxa de decaimento, usaremos o método da energia, assim como foi visto em capítulos anteriores.

Multiplicando a equação em (5.3) por $\overline{\hat{u}}$, obtemos

$$\hat{u}_{tt}\overline{\hat{u}}_t + |\xi|^{2\theta}\hat{u}\overline{\hat{u}}_t + |\xi|^{2\alpha}\hat{u}\overline{\hat{u}}_t = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right) + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 = 0.$$

Definimos a densidade de energia do sistema (5.3) por

$$e_0(t,\xi) = \frac{1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2, \tag{5.4}$$

e escrevemos a equação anterior na forma

$$\frac{d}{dt}e_0(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 = 0.$$

Multiplicando a equação em (5.3) por $\overline{\hat{u}}$ e tomando a parte real, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}})\right) + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = |\hat{u}_t|^2.$$

Então definindo,

$$e_1(t,\xi) = Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2, \tag{5.5}$$

reescrevemos a equação acima na forma

$$\frac{d}{dt}e_1(t,\xi) + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = |\hat{u}_t|^2.$$

Considerando as definições de $e_0(t,\xi)$ e $e_1(t,\xi)$ dadas em (5.4) e (5.5) respectivamente, definimos

$$e(t,\xi) = e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)e_1(t,\xi), \tag{5.6}$$

para $\beta > 0$ a ser escolhido adequadamente e a função $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ dada por

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}.$$

Derivando em relação a t a função $e(t,\xi)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e(t,\xi) &= \frac{d}{dt}e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)\frac{d}{dt}e_1(t,\xi)\\ &= -|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta\rho(\xi)\left(|\hat{u}_t|^2 - |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right),\end{aligned}$$

isto é

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = \beta\rho(\xi)|\hat{u}_t|^2.$$

Definimos assim,

$$\begin{aligned}F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2,\\ R(t,\xi) &= \beta\rho(\xi)|\hat{u}_t|^2,\end{aligned} \tag{5.7}$$

e então,

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi). \tag{5.8}$$

Lema 5.1.1 *Sejam $\beta > 0$, $\theta > \alpha$, então*

$$R(t,\xi) \le \beta F(t,\xi), \;\; \forall\, t \ge 0, \;\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Para $\theta > \alpha$, vemos que $1 \le 1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, e então

$$\begin{aligned}R(t,\xi) &= \beta\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}|\hat{u}_t|^2\\ &\le \beta|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2\\ &\le \beta|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta^2\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\\ &= \beta F(t,\xi),\end{aligned}$$

isto é

$$R(t,\xi) \leq \beta F(t,\xi),$$

para qualquer $t \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. ■

Observação 5.1.2 *Do Lema 5.1.1 e a relação* (5.8)*, vemos que*

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)F(t,\xi) \leq 0,$$

para $\beta > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 5.1.2 *Seja $\theta > \alpha$, então existe uma constante $M = M(\beta)$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

i)

$$\frac{\rho(\xi) + \beta\rho(\xi)^2|\xi|^{-\alpha}}{2|\xi|^{2\theta}} \leq M,$$

ii)

$$\frac{1}{2\beta} + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{\alpha}} + \frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} \leq M.$$

Demonstração: Usaremos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{\frac{1}{r^p} + r^p} \leq \frac{1}{2}, \ \forall\, r > 0, \ \forall\, p \geq 0.$$

i)

$$\frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{2\theta}} = \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}} \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta\rho(\xi)^2|\xi|^{-\alpha}}{2|\xi|^{2\theta}} &= \frac{\beta}{2|\xi|^{2\theta+\alpha}} \cdot \frac{|\xi|^{4\theta}}{(1+|\xi|^{4\theta-2\alpha})^2} \\
&= \frac{\beta}{2} \cdot \frac{|\xi|^{2\theta-\alpha}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \cdot \frac{1}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \\
&= \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{|\xi|^{2\theta-\alpha}} + |\xi|^{2\theta-\alpha}} \cdot \frac{1}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \\
&\leq \frac{\beta}{4},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade temos empregado a desigualdade mencionada no início da prova. Assim,

$$\frac{\rho(\xi) + \beta\rho(\xi)^2|\xi|^{-\alpha}}{2|\xi|^{2\theta}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4} = \frac{\beta + 2}{4}.$$

ii)

$$\frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^\alpha} = \frac{1}{2|\xi|^\alpha} \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{|\xi|^{2\theta-\alpha}} + |\xi|^{2\theta-\alpha}} \leq \frac{1}{4},$$

onde na última desigualdade, usamos a relação mencionada no início da prova. Por outro lado,

$$\frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} = \frac{|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2\beta} + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^\alpha} + \frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} \leq \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3\beta + 2}{2\beta}.$$

Com essas estimativas, o lema está provado. ■

Lema 5.1.3 *Seja $\theta > \alpha$, então existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\rho(\xi)e(t, \xi) \leq MF(t, \xi),$$

com $t \geq 0$.

Demonstração: Para $\xi = 0$, o resultado é imediato.

Considerando então $\xi \neq 0$, e usando a desigualdade de Young com $\varepsilon = |\xi|^\alpha > 0$, temos

$$Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) \leq \frac{|\hat{u}_t|^2}{2|\xi|^\alpha} + \frac{|\xi|^\alpha|\hat{u}|^2}{2}.$$

Com isso, segue

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)e(t,\xi) &\leq \frac{\rho(\xi)}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \beta\frac{\rho(\xi)^2}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 \\
&\quad + \beta\frac{\rho(\xi)^2}{2}\cdot\frac{|\hat{u}_t|^2}{|\xi|^\alpha} + \beta\frac{\rho(\xi)^2}{2}|\xi|^\alpha|\hat{u}|^2 \\
&= \left(\frac{\rho(\xi) + \beta\rho(\xi)^2|\xi|^{-\alpha}}{2|\xi|^{2\theta}}\right)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^\alpha} + \frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2}\right)\beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\
&\leq M|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + M\beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\
&= MF(t,\xi),
\end{aligned}$$

onde nas últimas desigualdades, temos aplicado o Lema 5.1.2. ■

Do Lema 5.1.3

$$(1-\beta)\rho(\xi)e(t,\xi)M^{-1} \leq (1-\beta)F(t,\xi),$$

e da relação na Observação 5.1.2

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)\rho(\xi)M^{-1}e(t,\xi) \leq \frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)F(t,\xi) \leq 0.$$

Assim, temos a seguinte inequação

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)\rho(\xi)M^{-1}e(t,\xi) \leq 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

cuja solução é

$$e(t,\xi) \leq e^{-\omega\rho(\xi)t}e(0,\xi), \tag{5.9}$$

com $\omega = (1-\beta)M^{-1} > 0$, para $\beta \in (0,1)$.

Por outro lado, para $\xi \neq 0$, usamos a desigualdade de Young com $\varepsilon = |\xi|^{2\theta} > 0$

$$\pm\,\beta\rho(\xi)Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) \leq \frac{\beta}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta\rho(\xi)}{2}\cdot\frac{|\hat{u}_t|^2}{|\xi|^{2\theta}}. \tag{5.10}$$

Pela definição de $e(t,\xi)$

$$\begin{aligned}
e(t,\xi) &= e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)\left(Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\right)\\
&\geq e_0(t,\xi) - \frac{\beta\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 - \frac{\beta\rho(\xi)}{2}\cdot\frac{|\hat{u}_t|^2}{|\xi|^{2\theta}} + \frac{\beta\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\\
&= \frac{1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 - \frac{\beta\rho(\xi)}{2}\cdot\frac{|\hat{u}_t|^2}{|\xi|^{2\theta}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}}\right)|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\beta\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \frac{\beta}{|\xi|^{2\theta}}\cdot\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq \beta,$$

então

$$1 - \frac{\beta\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \geq 1-\beta > 0, \quad \text{para } 0<\beta<1.$$

Assim,

$$e(t,\xi) \geq (1-\beta)e_0(t,\xi), \quad \xi \neq 0. \tag{5.11}$$

Pelas definições de $e(t,\xi)$ e $e_0(t,\xi)$, vemos que a relação acima é válida para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$.

De (5.9) e (5.11) deduzimos

$$e_0(t,\xi) \leq \frac{1}{1-\beta}e^{-\omega\rho(\xi)t}e(0,\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.12}$$

para cada $t \geq 0$.

Das definições de $e(t,\xi)$ e (5.10), vemos que

$$\begin{aligned}
e(t,\xi) &\leq e_0(t,\xi) + \frac{\beta\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta\rho(\xi)}{2}\cdot\frac{|\hat{u}_t|^2}{|\xi|^{2\theta}} + \frac{\beta\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\\
&= e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}}|\hat{u}_t|^2.
\end{aligned}$$

Para $\xi \neq 0$, estimamos

- $\dfrac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \dfrac{1}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq 1,$

- $\rho(\xi)|\xi|^{2\theta} = \dfrac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} = \dfrac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\cdot|\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha}.$

Portanto,

$$\begin{aligned} e(t,\xi) &\le \frac{1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \beta|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta}{2}|\hat{u}_t|^2 \\ &= \frac{\beta+1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{2\beta+1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\ &\le (2\beta+1)\left(\frac{1}{2}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right) \\ &= (2\beta+1)e_0(t,\xi). \end{aligned}$$

Como $e(t,0) = e_0(t,0)$, a desigualdade acima é válida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Com todas essas considerações, temos provado o seguinte lema

Lema 5.1.4 *Seja $\theta > \alpha$, então existem constantes positivas $C = C(\beta)$ e $\omega = \omega(\beta)$ tais que*

$$e_0(t,\xi) \le Ce^{-\omega\rho(\xi)t}e_0(0,\xi), \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $t \ge 0$.

Teorema 5.1.1 *Sejam $n \ge 1$, $\theta > \alpha$ e $\kappa \ge 0$. Se $u_0 \in H^{\kappa+1}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u_t(t,\cdot)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t,\cdot)\|^2 \le{}& C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2 \\ &+ C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|_{H^\kappa}^2 + \|u_0\|_{H^{\kappa+1}}^2\right). \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Teorema de Plancherel e o Lema 5.1.4,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u|^2\right)dx &\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right)d\xi \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi. \end{aligned}$$

- Para $|\xi| \le 1$, $1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha} \le 2$, e assim

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \ge \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}.$$

Portanto, do Lema 1.4.3

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\omega}{2}|\xi|^{2\theta}t}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2+C(1+t)^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2.
\end{aligned}
$$

- Para $|\xi|\geq 1$, $1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}\leq 2|\xi|^{4\theta-2\alpha}$ e assim

$$
\rho(\xi)=\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\geq\frac{1}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&= \int_{|\xi|\geq 1}\left(e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}|\xi|^{-2\kappa}\right)\left(|\xi|^{2\kappa}|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\kappa+2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi.
\end{aligned}
$$

Calculemos

$$
\begin{aligned}
\sup_{|\xi|\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\kappa}}\right) &= \sup_{|\xi|\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega(t+1)}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\kappa}}\cdot e^{\frac{\omega}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}\right)\\
&\leq e^{\frac{\omega}{2}}\sup_{|\xi|\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega(t+1)}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\kappa}}\right)\\
&= e^{\frac{\omega}{2}}\sup_{r\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega(t+1)}{2r^{2\theta-2\alpha}}}}{r^{2\kappa}}\right).
\end{aligned}
$$

Seja a mudança de variável $\sigma = \dfrac{\sqrt{\omega(t+1)}}{r^{\theta-\alpha}}$, então

$$\begin{aligned}
\sup_{|\xi|\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\kappa}}\right) &\leq e^{\frac{\omega}{2}}\sup_{\sigma\geq 0}\left(\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\sigma^{\frac{2\kappa}{\theta-\alpha}}}{\omega^{\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}(1+t)^{\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}}\right)\\
&= e^{\frac{\omega}{2}}\omega^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}\sup_{\sigma\geq 0}\left(\frac{\sigma^{\frac{2\kappa}{\theta-\alpha}}}{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}\right)\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}},
\end{aligned}$$

onde $C = C(\kappa,\theta,\alpha,\omega) > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}\int_{|\xi|\geq 1}\left(|\xi|^{2\kappa}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2(\kappa+\alpha)}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|^2_{H^\kappa} + \|u_0\|^2_{H^{\kappa+\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Das estimativas encontradas na baixa e na alta frequência, obtemos o resultado desejado. ∎

Teorema 5.1.2 *Sejam $n > 2\alpha$, $\theta > \alpha$, $\kappa \geq \alpha$. Se $u_0 \in H^\kappa(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\kappa-\alpha}(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\|^2 \leq C(1+t)^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\|u_1\|^2_{L^1} &+ C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|^2_{L^1}\\
&+ C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|^2_{H^{\kappa-1}} + \|u_0\|^2_{H^\kappa}\right).
\end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Lema 5.1.4, para $\xi \neq 0$, vemos

$$|\hat{u}|^2 \leq Ce^{-\omega\rho(\xi)t}\left(\frac{|\hat{u}_1|^2}{|\xi|^{2\alpha}} + |\hat{u}_0|^2\right).$$

- Na baixa frequência

$$\rho(\xi) \geq \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta},$$

então

$$\int_{|\xi|\le 1} |\hat{u}|^2 d\xi \le C \int_{|\xi|\le 1} e^{-\frac{\omega|\xi|^{2\theta}t}{2}} \left(\frac{|\hat{u}_1|^2}{|\xi|^{2\alpha}} + |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi$$
$$\le C(1+t)^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|^2_{L^1}.$$

Na alta frequência, na demonstração do Teorema 5.2.1, vimos

$$\rho(\xi) \ge \frac{1}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}} \qquad \sup_{|\xi|\ge 1} \left(\frac{e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\kappa}} \right) \le C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}},$$

e assim

$$\int_{|\xi|\ge 1} |\hat{u}|^2 d\xi \le C \int_{|\xi|\ge 1} e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}} |\xi|^{-2\kappa} \left(|\xi|^{2(\kappa-\alpha)} |\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\kappa} |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi$$
$$\le C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\kappa-\alpha}} + \|u_0\|^2_{H^\kappa} \right).$$

■

Observação 5.1.3 *Para ter menor exigência de regularidade, poderíamos considerar apenas $u_1 \in \dot{W}^{\kappa-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$, com $\kappa > 0$. Sendo assim, pela identidade de Plancherel, obtemos*

$$\int_{|\xi|\ge 1} |\hat{u}|^2 d\xi \le C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}} \int_{|\xi|\ge 1} \left(\left| |\xi|^{\kappa-\alpha} \hat{u}_1 \right|^2 + |\xi|^{2\kappa} |\hat{u}_0|^2 \right) d\xi$$
$$\le C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{(-\Delta)^{\frac{\kappa-\alpha}{2}} u_1} \right|^2 d\xi + \|u_0\|^2_{H^\kappa} \right]$$
$$= C(1+t)^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}} \left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{\kappa-\alpha,2}} + \|u_0\|^2_{H^\kappa} \right).$$

5.1.2 Expansão Assintótica

Vimos anteriormente que, o problema de Cauchy no espaço de Fourier, associado ao problema (5.2), é

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^{2\theta} \hat{u}_t + |\xi|^{2\alpha} \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \end{cases}$$

com $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$, para $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \alpha < \theta$. A equação característica para a relação anterior é

$$\lambda^2 + |\xi|^{2\theta}\lambda + |\xi|^{2\alpha} = 0,$$

cujas soluções são

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm \sqrt{|\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^{2\alpha}}}{2}.$$

Consideremos $\delta_0 > 0$, com $|\xi| \leq \delta_0 < 1$. Nesse caso, vemos

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm |\xi|^{\alpha}\sqrt{|\xi|^{4\theta-2\alpha} - 4}}{2},$$

com $|\xi|^{4\theta-2\alpha} - 4 \leq \delta_0^{4\theta-2\alpha} - 4 \leq -3 < 0$. Logo, as raízes são complexas e assim,

$$\lambda_\pm = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm i|\xi|^{\alpha}\sqrt{4 - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2}.$$

Definindo $a(\xi) = \dfrac{|\xi|^{2\theta}}{2}$, $b(\xi) = \dfrac{|\xi|^{\alpha}\sqrt{4 - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}{2}$, podemos escrever

$$\lambda_\pm = -a(\xi) + ib(\xi).$$

Podemos escrever explicitamente a solução da forma

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0 + \hat{G}(t,\xi)\hat{u_1},$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{H}(t,\xi) &= \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \\
&= e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t) + e^{-a(\xi)t}\cos(b(\xi)t), \\
\hat{G}(t,\xi) &= \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \\
&= e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1.3

$$\hat{u}_j(\xi) = A_j(\xi) - iB_j(\xi) + P_j, \quad j = 0, 1,$$

então

$$\hat{u}(t,\xi) = P_0\hat{H}(t,\xi) + (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\hat{H}(t,\xi) + P_1\hat{G}(t,\xi) + (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\hat{G}(t,\xi).$$

Sejam

$$\begin{aligned}
K_1(t,\xi) &= P_0 e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t),\\
K_2(t,\xi) &= (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\hat{G}(t,\xi),\\
K_3(t,\xi) &= (A_0(\xi) - iB_0(\xi))\hat{H}(t,\xi).
\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\hat{u}(t,\xi) = P_1\hat{G}(t,\xi) + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(b(\xi)t) + K_1(t,\xi) + K_2(t,\xi) + K_3(t,\xi).$$

Usando o Teorema do Valor Médio, vemos

$$\begin{aligned}
\sin(b(\xi)t) &= \sin(|\xi|^\alpha t) + t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\cos(\epsilon(\xi)t),\\
\epsilon(\xi) &= \beta b(\xi) + (1-\beta)|\xi|^\alpha, \ \ \beta \in (0,1)\\
\cos(b(\xi)t) &= \cos(|\xi|^\alpha t) - t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t),\\
\eta(\xi) &= \beta' b(\xi) + (1-\beta')|\xi|^\alpha, \ \ \beta' \in (0,1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t,\xi) = {} & P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}\sin(|\xi|^\alpha t) + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\\
& + P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\cos(\epsilon(\xi)t) - P_0 e^{-a(\xi)t}t(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)\\
& + \sum_{j=1}^{3} K_j(t,\xi).
\end{aligned}$$

Com a finalidade de obtermos expansão assintótica mais diante, vamos considerar a função $f(r) = \dfrac{2}{\sqrt{4 - r^{4\theta-2\alpha}}}$. Com isso, e pelo Teorema do

Valor Médio, vemos que

$$\frac{2}{\sqrt{4-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}-1=|\xi|(4\theta-2\alpha)\frac{\mu^{4\theta-2\alpha-1}}{(4-\mu^{4\theta-2\alpha})^{\frac{3}{2}}},$$

com $\mu=\beta''|\xi|$, $\beta''\in(0,1)$, isto é

$$\frac{2}{\sqrt{4-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}=1+(4\theta-2\alpha)(\beta'')^{4\theta-2\alpha-1}\frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{(4-(\beta'')^{4\theta-2\alpha}|\xi|^{4\theta-2\alpha})^{\frac{3}{2}}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi)&=P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}+P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\\&\quad+P_1e^{-a(\xi)t}(4\theta-2\alpha)\frac{(\beta'')^{4\theta-2\alpha-1}|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{(4-(\beta'')^{4\theta-2\alpha}|\xi|^{4\theta-2\alpha})^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\\&\quad+P_1e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}t(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\cos(\epsilon(\xi)t)\\&\quad-P_0e^{-a(\xi)t}t(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)+\sum_{j=1}^{3}K_j(t,\xi).\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}K_4(t,\xi)&=P_1e^{-a(\xi)t}\frac{1}{b(\xi)}t(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\cos(\epsilon(\xi)t)\\K_5(t,\xi)&=-P_0e^{-a(\xi)t}t(b(\xi)-|\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)\\K_6(t,\xi)&=P_1e^{-a(\xi)t}(4\theta-2\alpha)\frac{(\beta'')^{4\theta-2\alpha-1}|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{(4-(\beta'')^{4\theta-2\alpha}|\xi|^{4\theta-2\alpha})^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\end{aligned}$$

Estimemos cada $K_j(t,\xi)$, $i=1,\dots,6$.

Para estimar $K_1(t,\xi)$, primeiro estimamos

$$\left|\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\right|^2=\left|\frac{|\xi|^{2\theta-\alpha}}{\sqrt{4-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right|^2\leq\frac{1}{3}|\xi|^{4\theta-2\alpha}.$$

Portanto,

$$\int_{|\xi|\leq\delta_0}|K_1(t,\xi)|^2d\xi\leq\frac{1}{3}\|u_0\|^2_{L^1}t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}}.$$

Para estimar $K_2(t,\xi)$, notemos que

$$|\hat{G}(t,\xi)|^2 \leq \frac{4}{3} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}.$$

Assim, para $\epsilon \in (0, \min\{1,\alpha\})$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_2(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \frac{4}{3}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |A_1(\xi) - iB_1(\xi)|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha} d\xi \\ &\leq C\|u_1\|_{L^{1,\epsilon}}^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{2\epsilon-2\alpha} d\xi \\ &\leq C\|u_1\|_{L^{1,\epsilon}}^2 t^{-\frac{n+2\epsilon-2\alpha}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Para estimar $K_3(t,\xi)$, primeiro notemos que

$$|\hat{H}(t,\xi)|^2 \leq Ce^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{4\theta-2\alpha} + e^{-|\xi|^{2\theta}t}.$$

Então temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_3(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{4\theta-2\alpha} d\xi \\ &\quad + C\|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\ &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}} + C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Para estimar $K_4(t,\xi)$, primeiro estimemos a expressão

$$\left|\frac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right|^2 \leq \frac{1}{3}\left|\frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{\sqrt{4-|\xi|^{4\theta-2\alpha}}+2}\right|^2 \leq C|\xi|^{8\theta-4\alpha}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C|P_1|^2 t^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{8\theta-4\alpha} d\xi \\ &\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^2 t^{-\frac{n+8\theta-4\alpha}{2\theta}} \\ &= C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+4\theta-4\alpha}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Estimemos $K_5(t,\xi)$, para isso, notemos que

$$|b(\xi)-|\xi|^{\alpha}|^2 \leq C|\xi|^{8\theta-4\alpha}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0}|K_5(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C|P_0|^2t^2\int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{8\theta-2\alpha}d\xi\\ &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^2 t^{-\frac{n+8\theta-2\alpha}{2\theta}}\\ &= C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+4\theta-2\alpha}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Finalmente, estimemos $K_6(t,\xi)$. Para isso, trabalhemos com a seguinte expressão

$$\left|(4\theta-2\alpha)\frac{(\beta'')^{4\theta-2\alpha-1}|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{(4-(\beta'')^{4\theta-2\alpha}|\xi|^{4\theta-2\alpha})^{\frac{3}{2}}}\right|^2 \leq \frac{(4\theta-2\alpha)^2}{9}|\xi|^{8\theta-4\alpha},$$

pois considerando $\theta > \dfrac{2\alpha+1}{4}$, temos $(\beta'')^{4\theta-2\alpha-1} < 1$, para $\beta'' \in (0,1)$ e $|\xi|^{4\theta-2\alpha} \leq \delta_0^{4\theta-2\alpha} \leq 1$, para $|\xi| \leq \delta_0 \leq 1$.

Com isso, temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0}|K_6(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C|P_1|^2\int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{8\theta-6\alpha}d\xi\\ &\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+8\theta-6\alpha}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Com todas essas estimativas, temos mostrado o seguinte lema

Lema 5.1.5 *Sejam $n \geq 1$, $\epsilon \in (0,\min\{1,\alpha\})$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{|\xi|\leq\delta_0}\left|\hat{u}(t,\xi)-\left\{P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^{\alpha}t)}{|\xi|^{\alpha}}+P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^{\alpha}t)\right\}\right|^2 d\xi$$
$$\leq C\|u_1\|_{L^{1,\epsilon}}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+2\epsilon}{2\theta}} + C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n}{2\theta}}.$$

5.1.3 Estimativas na Alta Frequência

Do Lema 5.1.4, temos

$$|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \leq Ce^{-\omega\rho(\xi)t}\left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como anteriormente, consideramos δ_0 tal que $\delta_0 \leq |\xi| \leq 1$, então

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}} \geq \frac{|\xi|^{2\theta}}{2} \geq \frac{\delta_0^{2\theta}}{2}.$$

Agora se $|\xi| \geq 1$, temos

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{4\theta-2\alpha}} \geq \frac{|\xi|^{2\theta}}{2|\xi|^{4\theta-2\alpha}} = \frac{1}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq\delta_0} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq\; & C\int_{\delta_0\leq|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\omega\delta_0^{2\theta}}{2}t}\left(\frac{|\hat{u}_1|^2}{|\xi|^{2\alpha}} + |\hat{u}_0|^2\right)d\xi \\
& + C\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\omega t}{2|\xi|^{2\theta-2\alpha}}}\left(\frac{|\hat{u}_1|^2}{|\xi|^{2\alpha}} + |\hat{u}_0|^2\right)d\xi \\
\leq\; & \frac{C}{\delta_0^{2\alpha}} e^{-\frac{\omega\delta_0 t}{2}}(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2) \\
& + Ct^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}}(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{\kappa-\alpha,2}} + \|u_0\|^2_{H^\kappa}),
\end{aligned}$$

onde a segunda integral foi estimada segundo o procedimento visto na demonstração do Teorema 5.1.2.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi|\geq\delta_0} |P_1|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t}\frac{\sin^2(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^{2\alpha}}d\xi + \int_{|\xi|\geq\delta_0} |P_0|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t}\cos^2(|\xi|^\alpha t)d\xi \\
& \leq \frac{|P_1|^2}{\delta_0^{2\alpha}}\int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}d\xi + |P_0|^2\int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}d\xi \\
& \leq C(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1})\int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}t}{2}}d\xi \\
& \leq C(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1})e^{-\frac{\delta_0^{2\theta}t}{2}}t^{-\frac{n}{2\theta}} \\
& \leq C(\|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1})e^{-dt},
\end{aligned}$$

para algumas constantes $C > 0$ e $d > 0$, com $t > 0$ suficientemente grande.

Com as estimativas obtidas na baixa e alta frequência, provamos o seguinte teorema

Teorema 5.1.3 *Sejam $n \geq 2\alpha$, $\epsilon \in (0, \min\{1, \alpha\})$, $\kappa \geq 0$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\kappa(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^{1,\epsilon}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{\kappa-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$. Então, a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema de Cauchy no espaço de Fourier verifica*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{u}(t,\xi) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\} \right|^2 d\xi \\
&\leq C \|u_1\|^2_{L^{1,\epsilon}} t^{-\frac{n-2\alpha+2\epsilon}{2\theta}} + C \|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n}{2\theta}} \\
&+ C \left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \right) e^{-dt} \\
&+ C t^{-\frac{\kappa}{\theta-\alpha}} \left(\|u_0\|^2_{H^\kappa} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{\kappa-\alpha,2}} \right),
\end{aligned}$$

para algumas constantes $C > 0$ e $d > 0$.

5.1.4 Taxa Ótima

- Para $n > 2\alpha$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\theta} t} \frac{\sin^2(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{-2\alpha} d\xi \leq C t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}, \quad (5.13)$$

  para $t \geq 1$.

- Para $n \geq 1$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\theta} t} \cos^2(|\xi|^\alpha) d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\theta} t} d\xi \leq C t^{-\frac{n}{2\theta}}, \quad (5.14)$$

  para $t \geq 1$.

Pelo Teorema de Plancherel e os Lemas 1.4.4, 1.4.5, vemos

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| \geq & \left\| P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
& - \left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\} \right\| \\
& \geq |P_1| \left\| e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \right\| - |P_0| \left\| e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
& - \left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\} \right\| \\
& \geq C|P_1| t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} - C|P_0| t^{-\frac{n}{4\theta}} - C\|u_1\|_{L^{1,\epsilon}} t^{-\frac{n-2\alpha+2\epsilon}{4\theta}} - C\|u_0\|_{L^1} t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
& - C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_0\| + \|u_1\|\right) e^{-dt} \\
& - C\left(\|u_0\|_{H^\kappa} + \|u_1\|_{\dot{W}^{\kappa-\alpha,2}}\right) t^{-\frac{\kappa}{2(\theta-\alpha)}}.
\end{aligned}
$$

Para $\kappa > \dfrac{(n-2\alpha)(\theta-\alpha)}{2\theta}$, temos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para $t > 0$ suficientemente grande

$$
\|u(t,\cdot)\| \geq C_1 |P_1| t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}}.
$$

Por outro lado, também pelo Teorema de Plancherel e as relações (5.13), (5.14), vemos

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| \leq & \left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\} \right\| \\
& + |P_1| \left\| e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} \right\| + |P_0| \left\| e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi|^\alpha t) \right\| \\
& \leq C\|u_1\|_{L^{1,\epsilon}} t^{-\frac{n-2\alpha+2\epsilon}{4\theta}} + C\|u_0\|_{L^1} t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
& + C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_0\| + \|u_1\|\right) e^{-dt} \\
& + C\left(\|u_0\|_{H^\kappa} + \|u_1\|_{\dot{W}^{\kappa-\alpha,2}}\right) t^{-\frac{\kappa}{2(\theta-\alpha)}} \\
& + C|P_1| t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} + C|P_0| t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
& \leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},
\end{aligned}
$$

para $\kappa > \dfrac{(n-2\alpha)(\theta-\alpha)}{2\theta}$ e $t > 0$.

Assim, temos demonstrado o seguinte teorema

Teorema 5.1.4 *Sejam* $n > 2\alpha$, $\kappa > \dfrac{(n-2\alpha)(\theta-\alpha)}{2\theta}$, $\epsilon \in (0, \min\{1,\alpha\})$.

Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\kappa(\mathbb{R}^n)$*,* $u_1 \in L^{1,\epsilon}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{\kappa-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$*, então a solução* $u(t,x)$ *satisfaz*

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} \leq \|u(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

com C_1 *e* C_2 *constantes positivas e para* $t > 0$ *suficientemente grande.*

Observação 5.1.4 *Notemos que se* $\kappa-\alpha \geq 0$*, então* $L^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{\kappa-\alpha,2}(\mathbb{R}^n) = H^{\kappa-\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, isto é, a regularidade vai depender também da escolha desse* κ*.*

5.2 Super Damping: Caso $\delta > 0$ e $\frac{\alpha+\delta}{2} < \theta$

Essa condição sobre os expoentes dos Laplacianos implica que $\theta > \alpha/2$ pois estamos assumindo que $\delta \leq \alpha$. Nesta seção, encontraremos taxas de decaimento do problema linear

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\delta u_{tt} + (-\Delta)^\theta u_t + (-\Delta)^\alpha u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{5.15}$$

com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, sob as hipóteses $0 < \delta \leq \alpha$, $\dfrac{\alpha+\delta}{2} < \theta$.

Observação 5.2.1 *A modo de comentário, mencionamos como se pode obter a prova de existência de solução para o problema* (5.15) *com hipóteses sobre as potências fracionárias dadas no início desta seção.*

Aplicando o operador linear $(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}$ *em ambos lados da equação em* (5.15)*, obtemos*

$$u_{tt} + (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(-\Delta)^\theta u_t + (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(-\Delta)^\alpha u = 0.$$

Chamando $P = (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}$*,* $A = (-\Delta)^\alpha$*, podemos ainda reescrever a equação acima da forma*

$$u_{tt} + P\,A^\upsilon\,u_t + P\,A\,u = 0, \tag{5.16}$$

onde $\upsilon = \frac{\theta}{\alpha} > 0$*.*

A equação (5.16) *está escrita na forma abstrata, descrita no Teorema 2.1 do artigo [14], exceto pelo operador linear e contínuo P, isto é, quando $P = Id$ for o operador identidade.*

Revisando a demonstração sobre existência e regularidade para o caso $P = Id$ no artigo de Ghisi-Gobbino-Haraux [14], se pode provar que o operador linear e contínuo P não afeta na obtenção de solução para o problema de Cauchy associado à equação (5.16) *e, portanto, na do problema* (5.15)*.*

Agora, para obter estimativas para este caso, aplicamos a transformada de Fourier na variável x em (5.15) para obter o problema de Cauchy associado no espaço de Fourier

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\hat{u}_{tt} + |\xi|^{2\theta}\hat{u}_t + |\xi|^{2\alpha}\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases} \tag{5.17}$$

5.2.1 Estimativas

Usaremos o método da energia no espaço de Fourier.

Definimos a densidade da energia do sistema (5.17) por

$$e_0(t,\xi) = \frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2. \tag{5.18}$$

Multiplicando a equação em (5.17) por $\overline{\hat{u}}_t$ obtemos que

$$\frac{d}{dt}e_0(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 = 0, \tag{5.19}$$

para todo ξ e todo $t > 0$. Também definimos o funcional

$$e_1(t,\xi) = (1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2. \tag{5.20}$$

Então, multiplicando a equação em (5.17) por $\overline{\hat{u}}$ e considerando a parte real, análogo como no Capítulo 4 obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}})\right) + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2,$$

que podemos reescrever como

$$\frac{d}{dt}e_1(t,\xi) + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2. \tag{5.21}$$

Considerando as definições em (5.18) e (5.20), definimos

$$e(t,\xi) = e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)e_1(t,\xi), \tag{5.22}$$

para $\beta > 0$ onde $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ é dado por

$$\rho(\xi) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}},$$

com $\varepsilon > 0$ a ser escolhido adequadamente.

Derivando $e(t,\xi)$ em relação à t e usando as equações em (5.19) e (5.21), obtemos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 = \beta\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2.$$

Definindo,

$$\begin{aligned} F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\ R(t,\xi) &= \beta\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \end{aligned} \tag{5.23}$$

podemos expressar a identidade diferencial anterior como

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + F(t,\xi) = R(t,\xi). \tag{5.24}$$

Notemos ainda que

- Para $|\xi| \leq 1$, como $|\xi|^{2\delta} - 1 \leq 0 \leq |\xi|^{4\theta-2\alpha}$, vemos que

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq 1.$$

- Para $|\xi| \geq 1$ e $\theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}$,

$$1+|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{4\theta-2\alpha} \leq 2(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})$$

e assim,

$$\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \leq 2.$$

Portanto, para $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, temos pela definição de $\rho(\xi)$ que

$$\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta}) = \varepsilon\frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}(1+|\xi|^{2\delta}) \leq |\xi|^{2\theta}, \qquad (5.25)$$

que vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Das definições para $F(t,\xi)$ e $R(t,\xi)$ dadas em (5.23), obtemos para $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ de (5.25) que

$$\begin{aligned} R(t,\xi) &= \beta\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \\ &\leq \beta|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 \\ &\leq \beta|\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \beta^2\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\ &= \beta F(t,\xi), \end{aligned}$$

isto é

$$R(t,\xi) \leq \beta F(t,\xi), \quad \forall\, t>0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (5.26)$$

Da desigualdade (5.26) e de (5.20), deduzimos

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)F(t,\xi) \leq 0, \quad \forall\, t>0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (5.27)$$

para $\beta > 0$ que será escolhido suficientemente pequeno.

Lema 5.2.1 *Sejam* $\theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, *então existe uma constante* $M = M(\beta) > 0$ *tal que*

$$\rho(\xi)e(t,\xi) \leq MF(t,\xi).$$

Demonstração: Observamos que a demonstração deste lema é análoga à do lema similar no Capítulo 4, porém com uma função $\rho(\xi)$ diferente e por isso fazemos de novo os cálculos.

Para $\xi = 0$, o resultado é imediato.

Para $\xi \neq 0$, pelas definições de $\rho(\xi)$, $e(t,\xi)$, temos

$$\rho(\xi)e(t,\xi) = \rho(\xi)\left[\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right] \\ + \beta\rho(\xi)^2\left[(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\right].$$

Notemos que, como $\xi \neq 0$, podemos estimar

$$Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) \leq \frac{|\hat{u}_t|^2}{2|\xi|^\alpha} + \frac{|\xi|^\alpha|\hat{u}|^2}{2}.$$

Assim,

$$\rho(\xi)e(t,\xi) \leq |\xi|^{2\theta}|\hat{u}_t|^2\left(\frac{\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})}{2|\xi|^{2\theta}} + \frac{\beta\rho(\xi)^2}{2|\xi|^{2\theta+\alpha}}\right) \\ + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^\alpha} + \frac{\rho(\xi)}{2}|\xi|^{2\theta-2\alpha}\right). \tag{5.28}$$

Vamos estimar cada um desses somandos.
Vimos anteriormente que, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta}) \leq |\xi|^{2\theta}$, e portanto

$$\frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{2\theta}}(1+|\xi|^{2\delta}) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{2|\xi|^{2\theta}} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, vemos que para $p \geq 0$ e $r > 0$ vale a seguinte desigualdade elementar

$$\frac{1}{\frac{1}{r^p} + r^p} \leq \frac{1}{2}. \tag{5.29}$$

Então, considerando $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\frac{\beta\rho(\xi)^2}{2|\xi|^{2\theta+\alpha}} &= \frac{\beta}{2|\xi|^{2\theta+\alpha}}\cdot\varepsilon^2\cdot\frac{|\xi|^{4\theta}}{(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})^2} \\ &\leq \frac{\beta}{2}\cdot\frac{|\xi|^{2\theta-\alpha}}{(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})}\cdot\frac{1}{(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})} \\ &\leq \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{|\xi|^{2\theta-\alpha}} + |\xi|^{2\theta-\alpha}} \\ &\leq \frac{\beta}{4},\end{aligned}$$

onde na última desigualdade, temos usado a relação (5.29).

Portanto, se $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$,

$$\frac{\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})}{2|\xi|^{2\theta}} + \frac{\beta\rho(\xi)^2}{2|\xi|^{2\theta+\alpha}} \leq \frac{\beta+2}{4}. \tag{5.30}$$

Também, notemos que, se $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ e pela relação (5.29)

$$\frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{\alpha}} = \frac{1}{2|\xi|^{\alpha}} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})} \leq \frac{1}{4},$$

e

$$\frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} = \frac{|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{(2+|\xi|^{4\theta-2\alpha})} \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2\beta} + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{\alpha}} + \frac{\rho(\xi)|\xi|^{2\theta-2\alpha}}{2} \leq \frac{3\beta+2}{2\beta}. \tag{5.31}$$

Finalmente, usando as desigualdades (5.30) e (5.31) em (5.28), obtemos o resultado desejado. ■

Do Lema 5.2.1 e da desigualdade (5.27) deduzimos para $\beta > 0$, a ser tomado suficientemente pequeno, que

$$\frac{d}{dt}e(t,\xi) + (1-\beta)\rho(\xi)M^{-1}e(t,\xi) \leq 0, \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Essa inequação diferencial possui solução

$$e(t,\xi) \leq e^{-\omega\rho(\xi)t}e(0,\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.32}$$

com $\omega = (1-\beta)M^{-1} > 0$ para $\beta \in (0,1)$.

Para $\xi \neq 0$, temos a seguinte desigualdade

$$\pm\,(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) \leq \frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2. \tag{5.33}$$

Vamos usar essa estimativa para provar o próximo lema.

Lema 5.2.2 *Sejam* $\theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ *e* $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. *Então, existem constantes positivas* $C = C(\beta)$ *e* $\omega = \omega(\beta)$ *tais que*

$$e_0(t,\xi) \leq Ce^{-\omega\rho(\xi)t}e_0(0,\xi), \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Para o caso $\xi = 0$, o resultado é imediato com $C = 1$.

Para $\xi \neq 0$, temos pela definição de $e(t,\xi)$ e usando a desigualdade em (5.33) com o sinal negativo,

$$\begin{aligned}
e(t,\xi) &= e_0(t\xi) + \beta\rho(\xi)\left[(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\right] \\
&\geq e_0(t,\xi) - \frac{\beta}{2}\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2\left(1-\beta\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-2\theta}\right).
\end{aligned}$$

Como $\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta}) \leq |\xi|^{2\theta}$, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, podemos estimar

$$\beta\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-2\theta} \leq \beta|\xi|^{2\theta}|\xi|^{-2\theta} = \beta.$$

Portanto, se $\beta \in (0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
e(t,\xi) &\geq \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \frac{(1-\beta)}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \\
&\geq (1-\beta)e_0(t,\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

De (5.32) e (5.34), deduzimos

$$e_0(t,\xi) \leq \frac{1}{1-\beta}e^{-\omega\rho(\xi)t}e(0,\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (5.35)$$

Por outro lado, usando a definição de $e(t,\xi)$ e a desigualdade (5.33), temos

$$\begin{aligned}
e(t,\xi) &= e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)\left[(1+|\xi|^{2\delta})Re(\hat{u}_t\overline{\hat{u}}) + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2\right] \\
&\leq e_0(t,\xi) + \beta\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta}{2}\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta}|\hat{u}_t|^2.
\end{aligned}$$

Agora, como $\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta}) \leq |\xi|^{2\theta}$, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, temos a seguinte estimativa

$$\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})^2|\xi|^{-2\theta} \leq |\xi|^{2\theta}(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-2\theta} = 1+|\xi|^{2\delta}.$$

Também, se $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$\rho(\xi)|\xi|^{2\theta} \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\cdot|\xi|^{2\theta} \leq \frac{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}{1+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\cdot|\xi|^{2\alpha} \leq |\xi|^{2\alpha}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e(t,\xi) &\leq \frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 + \frac{\beta}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 \\ &+ \beta|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 \\ &\leq (2\beta+1)e_0(t,\xi). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Finalmente, considerando $t = 0$ na desigualdade (5.36) e da desigualdade em (5.35), obtemos

$$e_0(t,\xi) \leq Ce^{-\omega\rho(\xi)t}e_0(0,\xi), \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

com $C = C(\beta) = \dfrac{2\beta+1}{1-\beta}$, para $0 < \beta < 1$ e $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. ■

Teorema 5.2.1 *Sejam $n \geq 1$, $\theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $\epsilon \geq 0$. Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\delta+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2_{H^\delta} + \|(\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_1\|^2_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\|u_0\|^2_{L^1} \\ &+ C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|^2_{H^{\delta+\epsilon}} + \|u_0\|^2_{H^{\alpha+\epsilon}}\right), \end{aligned}$$

com $C > 0$ uma constante.

Demonstração: Pelo Teorema de Plancherel e o Lema 5.2.2,

$$\|u_t\|^2_{H^\delta} + \|(\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi$$

Estimemos essa integral na baixa e na alta frequência.

- Para $|\xi| \leq 1$, temos que $2 + |\xi|^{4\theta-2\alpha} \leq 3$ pois $\theta > \alpha/2$ e assim

$$\rho(\xi) = \varepsilon \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \geq \frac{\varepsilon}{3}|\xi|^{2\theta} = c_1|\xi|^{2\theta}.$$

Portanto, do Lema 1.4.3

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} e^{-c_1\omega|\xi|^{2\theta}t}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi\\
&\leq \left(C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}+C(1+t)^{-\frac{n+2\delta}{2\theta}}\right)\|u_1\|_{L^1}^2\\
&+C(1+t)^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2+C(1+t)^{-\frac{n+2\alpha}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2.
\end{aligned}$$

- Para $|\xi|\geq 1$ temos $2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}\leq 3|\xi|^{4\theta-2\alpha}$ pois $\theta>\alpha/2$ e então

$$\rho(\xi)=\varepsilon\cdot\frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}}\geq\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{|\xi|^{2\theta}}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}=\frac{c_2}{|\xi|^{2\theta-2\alpha}}\geq\frac{c_2}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1}\left(e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}|\xi|^{-2\epsilon}\right)\left(2|\xi|^{2\delta+2\epsilon}|\hat{u}_1|^2+|\xi|^{2\alpha+2\epsilon}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Agora estimamos

$$\begin{aligned}
\sup_{|\xi|\geq 1}\left(e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}|\xi|^{-2\epsilon}\right)&=\sup_{|\xi|\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega c_2(1+t)}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\epsilon}}e^{\frac{\omega c_2}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right)\\
&\leq e^{\omega c_2}\sup_{r\geq 1}\left(\frac{e^{-\frac{\omega c_2(1+t)}{r^{4\theta-2\alpha}}}}{r^{2\epsilon}}\right).
\end{aligned}$$

Consideramos agora a mudança de variavél $\sigma = \dfrac{\sqrt{\omega(1+t)}}{r^{2\theta-\alpha}}$. Então

$$\begin{aligned}
\sup_{|\xi|\geq 1}\left(e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}|\xi|^{-2\epsilon}\right) &\leq e^{\omega c_2}\sup_{1\geq\sigma\geq 0}\left(\frac{e^{-c_2\sigma^2}\cdot\sigma^{\frac{2\epsilon}{2\theta-\alpha}}}{\omega^{\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}(1+t)^{\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}}\right)\\
&= e^{\omega c_2}\omega^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\sup_{1\geq\sigma\geq 0}\left(\frac{\sigma^{\frac{2\epsilon}{2\theta-\alpha}}}{e^{c_2\sigma^2}}\right)\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}},
\end{aligned}$$

onde $C = C(\epsilon,\theta,\alpha,\beta)$ é uma constante positiva. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq 1} e^{-\omega\rho(\xi)t}\left[(1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}_0|^2\right]d\xi\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\int_{|\xi|\geq 1}\left(|\xi|^{2\delta+2\epsilon}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha+2\epsilon}|\hat{u}_0|^2\right)d\xi\\
&= C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|^2_{H^{\delta+\epsilon}}\|u_0\|^2_{H^{\alpha+\epsilon}}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, das estimativas na alta e na baixa frequência segue a conclusão da prova do teorema. ■

Teorema 5.2.2 *Sejam $n > 2\alpha$, $\theta > \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $\epsilon \geq \alpha - \delta$. Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\epsilon(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\delta+\epsilon-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\|u_1\|^2_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|^2_{L^1}\\
&\quad + C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|^2_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}} + \|u_0\|^2_{H^\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Lema 5.2.2, para $\xi \neq 0$, vemos que

$$|\hat{u}|^2 \leq Ce^{-\omega\rho(\xi)t}\left(\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^{2\alpha}}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right).$$

- Na baixa frequência, $|\xi| \leq 1$, vimos na demostração do Teorema 5.2.1 que

$$\rho(\xi) \geq c_1|\xi|^{2\theta}.$$

Então obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\omega c_1 |\xi|^{2\theta} t}\left(|\xi|^{-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}\|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_0\|_{L^1}^2.\end{aligned}$$

- Na alta frequência, $|\xi| \geq 1$, vimos na demonstração do Teorema 5.2.1 que

$$\rho(\xi) \geq \frac{c_2}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}, \quad \sup_{|\xi|\geq 1} \frac{e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}}{|\xi|^{2\epsilon}} \leq C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}},$$

e com isso obtemos de modo similar como no teorema anterior que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\omega c_2 t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}}|\xi|^{-2\epsilon}\left(|\xi|^{2\delta+2\epsilon-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\epsilon}|\hat{u}_0|^2\right) d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}}^2 + \|u_0\|_{H^\epsilon}^2\right).\end{aligned}$$

Portanto, das estimativas na baixa e na alta frequência, segue a prova do teorema. ■

Observação 5.2.2 *A hipótese de $\epsilon \geq \alpha - \delta$ implica que a exigência de regularidade adicional nos dados iniciais parece ser forte, por exemplo sobre o dado inicial u_0. Sendo assim, isso pode ser contornado considerando apenas $\epsilon \geq 0$ e $u_1 \in \dot{W}^{\delta+\epsilon-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ obtendo a seguinte estimativa que exige menos por exemplo no dado u_0 embora resulte em taxa menor.*

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_1\|_{\dot{W}^{\delta+\epsilon-\alpha,2}}^2 + \|u_0\|_{H^\epsilon}^2\right).$$

5.2.2 Expansão Assintótica: Super Damping

Como $\theta > \frac{\alpha+\delta}{2}$, implica em $\theta > \frac{\alpha}{2}$, estamos no mesmo caso estudado na Seção 4.1. Portanto, a expansão assintótica é a mesma, mas neste caso, teremos cuidado com as desigualdades que relacionam as potências fracionárias. Notamos que a hipótese principal sobre as potências fracionárias na qual trabalhamos é $0 < \delta \leq \alpha$ como na Seção 4.1.

Estimativas Zona Baixa Frequência:

No que segue desta seção, vamos fixar $0 < \delta_0 < 1$ e trabalhar na região de baixa frequência com $0 < |\xi| \leq \delta_0$.

Assim como foi feito na Seção 4.1 para obtermos expansão assintótica na baixa frequência, mantendo as notações, temos

$$a(\xi) = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1 + |\xi|^{2\delta})}, \quad b(\xi) = \frac{|\xi|^{\alpha}\sqrt{4(1 + |\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta - 2\alpha}}}{2(1 + |\xi|^{2\delta})}.$$

Notamos então que para $|\xi| \leq \delta_0$ temos que

$$4(1 + |\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta - 2\alpha} \geq 0.$$

Então, conforme Seção 4.1 as raízes do polinômio característico associado à equação em (5.17) no espaço de Fourier, são dadas por

$$\lambda = \lambda(\xi) = a(\xi) \ \pm \ i \, b(\xi),$$

com $a(\xi)$ e $b(\xi)$ funções reais de ξ.

Agora, como na Seção 4.1, onde calculamos a solução explícita no espaço de Fourier, na zona de baixa frequência, onde foi aplicado o Teorema do Valor Médio na solução explícita, temos válida, também neste caso em consideração de super damping, a seguinte identidade

$$\begin{aligned} &\hat{u}(t,\xi) - e^{-a(\xi)t} P_0 \cos(|\xi|^{\alpha} t) - e^{-a(\xi)t} P_1 \frac{\sin(|\xi|^{\alpha} t)}{|\xi|^{\alpha}} \qquad (5.37) \\ &= K_1(t,\xi) + K_2(t,\xi) + K_3(t,\xi) + K_4(t,\xi) + K_5(t,\xi) + K_6(t,\xi), \end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
K_1(t,\xi) &= (A_1(\xi) - iB_1(\xi))\, e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha},\\
K_2(t,\xi) &= (A_0(\xi) + iB_0(\xi))\, e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t),\\
K_3(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\sin(b(\xi)t)\hat{u}_0,\\
K_4(t,\xi) &= -e^{-a(\xi)t}t\,(b(\xi) - |\xi|^\alpha)\sin(\eta(\xi)t)\hat{u}_0,\\
K_5(t,\xi) &= -e^{-a(\xi)t}\left(\frac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\hat{u}_1,\\
K_6(t,\xi) &= e^{-a(\xi)t}t\left(\frac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right)\cos(\mu(\xi)t)\hat{u}_1,
\end{aligned}
$$

com $\dfrac{\alpha+\delta}{2} < \theta < \dfrac{\alpha+2\delta}{2}$, onde P_0 e P_1 são as integrais dos dados iniciais u_0 e u_1, respectivamente.

Notamos que as duas expressões em P_0 e P_1 em (5.37) formam uma possível expansão assintótica. De fato, para isso, vamos mostrar que as funções $K_i(t,\xi)$, para $i = 1, ..., 6$, tem decaimento mais rápido do que as expressões em P_0 e P_1.

Como nos casos anteriores, vamos estimar na norma L^2, cada uma das funções $K_i(t,\xi)$, para $i = 1, ..., 6$, sob as hipóteses dadas no início desta seção.

Notemos que, pela definição de $a(\xi)$ acima, podemos estimar o termo exponencial presente em todas as funções da seguinte forma:

$$
e^{-2a(\xi)t} \le e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}t}, \quad t > 0, \quad |\xi| \le \delta_0.
$$

Para estimar $K_1(t,\xi)$ consideramos um número κ, tal que $0 < \kappa < \delta$. Assim

$$
\int_{|\xi|\le\delta_0} |K_1(t,\xi)|^2 d\xi \le C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},
$$

desde que $0 < \kappa < \min\{1, \delta\}$.

Estimemos agora $K_2(t,\xi)$. Para todo $t > 0$, temos

$$
\int_{|\xi|\le\delta_0} |K_2(t,\xi)|^2 d\xi \le C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n}{2\theta}}.
$$

Para estimar $K_3(t,\xi)$, notemos que se $|\xi| \leq \delta$, com δ o expoente do termo de inércia rotacional.

$$4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha} \geq 4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha} \geq 0,$$

pois $\delta_0 < 1$.

Assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\right| &= \frac{|\xi|^{2\theta-\alpha}}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}} \\ &\leq \frac{|\xi|^{2\theta-\alpha}}{\sqrt{4-\delta_0^{4\theta-2\alpha}}}\end{aligned}$$

para $|\xi| \leq \delta_0$. Portanto, estimamos $K_3(t,\xi)$ da seguinte forma

$$\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_3(t,\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{4-\delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+4\theta}{2\theta}}.$$

Para estimar $K_4(t,\xi)$, observamos primeiro que

$$\begin{aligned}|b(\xi) - |\xi|^\alpha|^2 &\leq \frac{|\xi|^{2\alpha}}{4}\left|\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} - 2(1+|\xi|^{2\delta})\right|^2 \\ &\leq \frac{|\xi|^{2\alpha}}{4}\left|\frac{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha} - 4(1+|\xi|^{2\delta})^2}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} + 2(1+|\xi|^{2\delta})}\right|^2 \\ &\leq C\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(\sqrt{4-\delta_0^{4\theta-2\alpha}}+2)^2}\left(|\xi|^{2\delta} + |\xi|^{4\theta-2\alpha}\right)^2 \\ &\leq C|\xi|^{4\delta+2\alpha},\end{aligned}$$

para todo $|\xi| \leq \delta_0 < 1$ e pela hipótese que $\theta < \dfrac{\alpha+2\delta}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{4\delta+2\alpha} d\xi \\ &\leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^2 t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha}{2\theta}} \\ &= C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+4\delta+2\alpha-4\theta}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Agora, como $\theta < \dfrac{\alpha+2\delta}{2}$, temos $4\theta < 2\alpha+4\delta$, o qual implica $4\delta+2\alpha-4\theta >$

0. Portanto, dado que $0 < \kappa < \delta \leq \alpha$ vemos que $-2\alpha + 2\kappa < 0 < 4\delta + 2\alpha - 4\theta$. Assim

$$\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_4(t,\xi)|^2 d\xi \leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},$$

para $t > 0$.

Para estimar $K_5(t,\xi)$, notemos que para $|\xi| \leq \delta_0$ vale a estimativa

$$\begin{aligned}\left|\frac{b(\xi) - |\xi|^\alpha}{b(\xi)}\right|^2 &= \left|\frac{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}} - 2(1+|\xi|^{2\delta})}{\sqrt{4(1+|\xi|^{2\delta}) - |\xi|^{4\theta-2\alpha}}}\right|^2 \\ &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} |\xi|^{4\delta},\end{aligned}$$

onde a última estimativa foi obtida semelhante aquela feita para $K_4(t,\xi)$.

Portanto, a estimativa para $K_5(t,\xi)$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_5(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t} |\xi|^{4\delta-2\alpha} d\xi \\ &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+4\delta}{2\theta}} \\ &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}},\end{aligned}$$

pois, $-2\alpha + 2\kappa < -2\alpha + 2\delta < -2\alpha + 4\delta$, para $0 < \kappa < \delta$.

Para estimar $K_6(t,\xi)$, vemos que se $\theta < \dfrac{\alpha + 2\delta}{2}$, temos $4\theta < 2\alpha + 4\delta$, o qual implica $4\delta - 4\theta > -2\alpha$.

Portanto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $4\delta - 4\theta \geq -2\alpha + \varepsilon_2$. Com isso, finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq\delta_0} |K_6(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n+4\delta-4\theta}{2\theta}} \\ &\leq \frac{C}{4 - \delta_0^{4\theta-2\alpha}} \|u_1\|_{L^1}^2 t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_2}{2\theta}}.\end{aligned}$$

Com todas essas estimativas, temos demostrado o seguinte teorema

Teorema 5.2.3 *Sejam* $0 < \delta \leq \alpha$ *com* $\dfrac{\alpha + \delta}{2} < \theta < \dfrac{\alpha + 2\delta}{2}$. *Considere-*

mos os dados iniciais

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n),\;\; u_1 \in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$$

com $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$. *Então existe um número* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que a solução* $\hat{u}(t,\xi)$ *para o problema (3.1) satisfaz*

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|\le\delta_0} \left| \hat{u}(t,\xi) - P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t) - P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\right|^2 d\xi \\ &\le C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}} t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{2\theta}} + C\|u_0\|^2_{L^1} t^{-\frac{n}{2\theta}},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ *com* C *uma constante positiva e*

$$P_0 = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)dx, \quad P_1 = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)dx.$$

Observação 5.2.3 *Notamos que no teorema acima* $\varepsilon_0 = \min\{2\kappa, \varepsilon_2, 2\alpha\}$.

Estimativas: Zona de Alta Frequência

Pela estimativa obtida no Lema 5.2.2, temos para $\xi \neq 0$

$$|\hat{u}|^2 \le Ce^{-\omega\rho(\xi)t}\left(\frac{(1+|\xi|^{2\delta})}{|\xi|^{2\alpha}}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right).$$

Para δ_0 considerado na subseção anterior, vamos considerar primeiro o caso $\delta_0 \le |\xi| \le 1$. Então fica fácil de ver que nessa zona vale que

$$\rho(\xi) = \varepsilon \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \ge \frac{\varepsilon}{3}|\xi|^{2\theta} \ge c_1\delta_0^{2\theta}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\delta_0\le|\xi|\le1} |\hat{u}|^2 d\xi &\le C\int_{\delta_0\le|\xi|\le1} e^{-c_1\omega\delta_0^{2\theta}t}\left((1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right)d\xi \\ &\le \frac{2C}{\delta_0^{2\alpha}} e^{-c_1\omega\delta_0^{2\theta}t}\left(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2\right).\end{aligned}$$

Por outro lado, para $|\xi| \ge 1$

$$\rho(\xi) = \varepsilon \cdot \frac{|\xi|^{2\theta}}{2+|\xi|^{4\theta-2\alpha}} \ge \frac{c_2}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}},$$

com $c_2 \geq \varepsilon/3$ uma constante.

Assim,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{c_2 \omega t}{|\xi|^{4\theta-2\alpha}}} \left((1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^{-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_0|^2\right)$$
$$\leq Ct^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}} \left(\|u_1\|^2_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}} + \|u_0\|^2_{H^\epsilon}\right), \tag{5.38}$$

onde a integral do lado direito foi estimada segundo o procedimento visto na demonstração do Teorema 5.2.1 para $\epsilon \geq \alpha - \delta$.

Por outro lado,

$$\int_{|\xi|\geq\delta_0} |P_1|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t} \frac{\sin^2(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^{2\alpha}} d\xi + \int_{|\xi|\geq\delta_0} |P_0|^2 e^{-|\xi|^{2\theta}t} \cos^2(|\xi|^\alpha t) d\xi$$
$$\leq C\frac{|P_1|^2}{\delta_0^{2\alpha}} \int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t} d\xi + C|P_0|^2 \int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-|\xi|^{2\theta}t} d\xi$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}|\right) \int_{|\xi|\geq\delta_0} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{2}t} e^{-\frac{|\xi|^{2\theta}}{2}t} d\xi$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}\right) e^{-\frac{\delta_0^{2\theta}}{2}t} (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L^1} + \|u_1\|^2_{L^1}\right) e^{-\frac{\delta_0^{2\theta}}{2}t}, \quad t > 0,$$

com $C > 0$ constante.

Observação 5.2.4 *Para ter possível menor exigência de regularidade dos dados iniciais, poderíamos considerar apenas $\epsilon \geq 0$ e $u_1 \in \dot{W}^{\delta+\epsilon-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ na desigualdade* (5.38)*.*

5.2.3 Taxa Ótima

Combinando as estimativas obtidas na seção anterior para a baixa e alta frequência, temos o lema seguinte

Lema 5.2.3 *Sejam $n > 2\alpha$, $0 < \kappa < \min\{1, \delta\}$, $\epsilon \geq \alpha - \delta$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^\epsilon(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\delta+\epsilon-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Então a diferença entre a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema de Cauchy no espaço de Fourier e seu perfil assintótico* *verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{u}(t,\xi)-\left\{P_1e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha)t}{|\xi|^\alpha}+P_0e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\}\right|^2 d\xi$$
$$\leq C\|u_1\|^2_{L^{1,\kappa}}t^{-\frac{n-2\alpha+2\kappa}{2\theta}}+C\|u_0\|^2_{L^1}t^{-\frac{n}{2\theta}}$$
$$+C\left(\|u_0\|^2_{L^1}+\|u_1\|^2_{L^1}+\|u_0\|^2+\|u_1\|^2\right)e^{-dt}$$
$$+Ct^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}}\left(\|u_0\|^2_{H^\epsilon}+\|u_1\|^2_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}}\right),$$

com $C>0$ *constante e* $d=\frac{\delta_0^{2\theta}}{2}$.

Finalmente, mostraremos taxa ótima para a norma L^2 da solução a qual vem expressa no seguinte teorema

Teorema 5.2.4 *Sejam* $n>2\alpha$, $P_1\neq 0$, $0<\delta\leq\alpha$, $\dfrac{\alpha+\delta}{2}<\theta<\dfrac{\alpha+2\delta}{2}$, $\kappa\in(0,\min\{1,\delta\})$, $\epsilon>\dfrac{2\theta-\alpha}{2\theta}(n-2\alpha)$ *e*

$$u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^\epsilon(\mathbb{R}^n),\ \ u_1\in L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)\cap H^{\delta+\epsilon-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Então existem constantes $C_1>0$, $C_2>0$ *e* $t_0>>1$ *tal que para todo* $t\geq t_0$ *vale*

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}}\leq\|u(t,\cdot)\|\leq C_2t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

sendo $u(t,x)$ *a única solução do problema (3.1)*

Demonstração: Para $n>2\alpha$, valem as estimativas

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^{2\theta}t}\frac{\sin^2(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^{2\alpha}}d\xi\leq\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^{2\theta}t}|\xi|^{-2\alpha}d\xi\leq Ct^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^{2\theta}t}\cos^2(|\xi|^\alpha t)d\xi\leq\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^{2\theta}t}d\xi\leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}},$$

para $t>0$.

Pelo Teorema de Plancherel e os Lemas 1.4.4, 1.4.5, vemos

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| \geq |P_1| \left\| e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\right\| - |P_0| \left\| e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
- \left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\}\right\| \\
\geq C|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} - C|P_0|t^{-\frac{n}{4\theta}} - C\|u_1\|_{L^{1,\kappa}}t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{4\theta}} - C\|u_0\|_{L^1}t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
- C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_0\| + \|u_1\|\right)e^{-dt} \\
- C\left(\|u_0\|_{H^\epsilon} + \|u_1\|_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}}\right)t^{-\frac{\epsilon}{2\theta-\alpha}},
\end{aligned}
$$

com $d = \frac{\delta_0^{2\theta}}{2}$.

Assim, existe uma constante $C_1 > 0$ e um $t_1 > 0$ tal que, para todo $t \geq t_1$,

$$\|u(t,\cdot)\| \geq C_1|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

pois todas as parcelas na estimativa anterior decaem mais rápido no tempo que o termo com P_1.

Por outro lado, aplicando mais uma vez o Teorema de Plancherel e as relações, vemos

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\| = \|\hat{u}(t,\cdot)\| \leq |P_1| \left\| e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha}\right\| + |P_0| \left\| e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\| \\
+ \left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left\{ P_1 e^{-a(\xi)t}\frac{\sin(|\xi|^\alpha t)}{|\xi|^\alpha} + P_0 e^{-a(\xi)t}\cos(|\xi|^\alpha t)\right\}\right\| \\
\leq C\|u_1\|_{L^{1,\kappa}}t^{-\frac{n-2\alpha+\varepsilon_0}{4\theta}} + C\|u_0\|_{L^1}t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
+ C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_0\| + \|u_1\|\right)e^{-dt} \\
+ C\left(\|u_0\|_{H^\epsilon} + \|u_1\|_{H^{\delta+\epsilon-\alpha}}\right)t^{-\frac{\epsilon}{4\theta-2\alpha}} \\
+ C|P_1|t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}} + C|P_0|t^{-\frac{n}{4\theta}} \\
\leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},
\end{aligned}
$$

pois assumimos ϵ tal que $\frac{n-2\alpha}{4\theta} < \frac{\epsilon}{4\theta-2\alpha}$.

Assim, concluímos que

$$\|u(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n-2\alpha}{4\theta}},$$

para alguma constante $C_2 > 0$ e para todo $t > 0$.

Com essas estimativas e considerando $t_0 = t_1$, o teorema de optimalidade está provado. ■

Capítulo 6

Existência e Unicidade de Soluções para o Problema Semilinear

Neste capítulo, fazemos um breve estudo do problema de Cauchy semilinear ($\beta \neq 0$) (6.1), o qual envolve condições para obtermos existência e unicidade de solução.

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = \beta(-\Delta)^{\gamma}(u^p), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ um inteiro e potências fracionárias para o operador Laplaciano satisfazendo $0 \leq \delta \leq \alpha$, $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ e $\max\{0, \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}\} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

Como no caso linear, consideramos o espaço de energia $X = H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$ e rescrevemos o problema de Cauchy (6.1) na forma abstrata

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = BU + F(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $U = U(u, u_t)$, $U(0) = (u_0, u_1)$ e B, F operadores adequados os quais serão obtidos segundo critérios semelhantes aos descritos no Capítulo 2.

6.1 Existência e Unicidade

Nosso objetivo é primeiramente definir adequadamente os operadores B e F na formulação abstrata (6.2) e a seguir, verificar que tais operadores satisfazem as hipóteses do Teorema 1.3.1.

Para tal fim, consideramos dois casos

- $0 \leq \theta < \delta$
- $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$

6.1.1 Caso $0 \leq \theta < \delta$

Rescrevemos o problema (6.1) na forma matricial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_1 U + F_1(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{6.3}$$

onde

$$B_1 : D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$$

é o operador definido por

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

o operador A_α é definido como no Capítulo 2, isto é

$$A_\alpha = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^\alpha\big),$$

com domínio $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $F_1 : D(A_\alpha) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ operador definido por

$$F_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1} \big(u - (-\Delta)^\theta v + \beta(-\Delta)^\gamma u^p\big) \end{pmatrix}.$$

Os operadores A_α e B_1 já fora estudados na existência do problema linear. Foi também visto que o operador B_1 é gerador de semigrupo. Assim, basta mostrar que o operador F_1 está bem definido sobre o domínio de B_1 e que é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B_1)$, quando $2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$.

Tendo em conta a desigualdade

$$\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} \leq C\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)$$

e o Lema 1.1.8, para $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$, vemos que, para $U = (u, v) \in D(B_1)$

$$\begin{aligned}\|F_1(u,v)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\delta} &\leq C(\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + \|v\|^2_{H^\alpha} + \|u^p\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}) \\ &\leq C(\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + \|v\|^2_{H^\alpha} + \|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}}) < \infty,\end{aligned}$$

o que mostra que o operador F_1 está bem definido sob as condições $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$.

Resta mostrar que o operador F_1 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados em seu domínio. Para tal fim, primeiro precisamos de dois lemas.

Lema 6.1.1 *Sejam $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ inteiro e $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$. Se $U = (u, v)$, $W = (w, z) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X \\ &\leq C\left(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\right)\|B_1(U-W)\|_X.\end{aligned}$$

Demonstração: Usaremos a seguinte estimativa

$$\frac{1+|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right).$$

Assim, para $U = (u, v)$, $W = (w, z)$ pertencentes a $D(B_1) = H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha$

$$
\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|^2_{H^\alpha \times H^\delta} \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}} |\hat{u} - \hat{w}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}} |\xi|^{4\theta} |\hat{v} - \hat{z}|^2 d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}} |\beta|^2 |\xi|^{4\gamma} |\widehat{u^p} - \widehat{w^p}|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u} - \hat{w}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right) |\hat{v} - \hat{z}|^2 d\xi \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(2\gamma-\delta)}\right) |\widehat{u^p} - \widehat{w^p}|^2 d\xi \\
&= C\|u - w\|^2 + C\|v - z\|^2_{H^{2\theta-\delta}} + C\|u^p - w^p\|^2_{H^{2\gamma-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.1.10, para $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro e o Lema 2.1.2, vemos que

$$
\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|^2_X \leq C\|A_\alpha(u - w)\|^2_{H^\delta} + C\|v - z\|^2_{H^\alpha} \\
&+ C\left(\|A_\alpha u\|^{p-1}_{H^\delta} + \|A_\alpha w\|^{p-1}_{H^\delta}\right)^2 \|A_\alpha(u - w)\|^2_{H^\delta} \\
&\leq C\left(1 + \|B_1 U\|^{p-1}_X + \|B_1 W\|^{p-1}_X\right)^2 \|B_1(U - W)\|^2_X.
\end{aligned}
$$

■

Lema 6.1.2 *Sejam* $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $p > 1$ *inteiro e* $1 \leq n < 4\alpha - 2\delta$. *Se* $U = (u, v)$, $W = (w, z) \in D(B_1)$, *então existe* $C > 0$, *tal que*

$$
\begin{aligned}
&\|B_1(F_1 U - F_1 W)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_1 U\|^{p-1}_X + \|B_1 W\|^{p-1}_X\right) \|B_1(U - W)\|_X.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Para $U = (u, v)$, $W = (w, z)$ pertencentes a $D(B_1)$, e pelo Lema 1.1.8 temos

$$
\begin{aligned}
&\|B_1(F_1U - F_1W)\|_X^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right) |\hat{u} - \hat{w}|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\theta)}\right) |\hat{v} - \hat{z}|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\gamma)}\right) |\widehat{u^p} - \widehat{w^p}|^2 d\xi \\
&= C\|u - w\|_{H^{\alpha-2\delta}}^2 + C\|v - z\|_{H^{\alpha-2\delta+2\theta}}^2 + C\|u^p - w^p\|_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}^2.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 1.1.10, com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$ e $p > 1$, e o Lema 2.1.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|B_1(F_1U - F_1W)\|_X^2 \\
&\leq C\|B_1(U - W)\|_X^2 + C\left(C\|B_1U\|_X^{p-1} + C\|B_1W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U - W)\|_X^2 \\
&\leq C\left(1 + \|B_1U\|_X^{p-1} + \|B_1W\|_X^{p-1}\right)^2 \|B_1(U - W)\|_X^2.
\end{aligned}
$$

■

Sejam dados $U, W \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então pelos Lemas 6.1.1 e 6.1.2, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\|F_1(U) - F_1(W)\|_X + \|B_1(F_1U - F_1W)\|_X \\
&\leq C\left(1 + \|B_1(U)\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1}\right) \|B_1(U - W)\|_X.
\end{aligned}
$$

Assim, dada uma constante $M > 0$ e dados $U, W \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, com

$$
\|U\|_X^{p-1} + \|B_1(U)\|_X^{p-1} \leq M \text{ e } \|W\|_X^{p-1} + \|B_1(W)\|_X^{p-1} \leq M
$$

vemos que é válida a seguinte estimativa

$$
\|F_1U - F_1W\|_X + \|B_1(F_1U - F_1W)\|_X \leq CL_M\|B_1(U - W)\|_X,
$$

onde $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Assim, F_1 é um operador Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados de $D(B_1)$.

Como vimos no Capítulo 2, B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, portanto, pelo Teorema 1.3.1 existe uma única solução do problema de Cauchy (6.3).

Resumimos todos esses resultados no seguinte teorema

Teorema 6.1.1 *Seja $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$, onde n é a dimensão do espaço e sejam $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ e $p \geq 1$ inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma única solução $u = u(t,x)$ para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dada em (6.1) verificando

$$u \in C^2\left([0,T), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,T), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,T), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right),$$

definida em um intervalo maximal $[0,T)$, de modo que vale uma, e somente uma, das seguintes condições

a) $T = \infty$;

b) $T < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T} \left(\|U(t)\|_X + \|B_1 U(t)\|_X\right) = \infty$.

6.1.2 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$

Neste caso reescrevemos o problema de Cauchy como

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = B_2 U + F_2(U), \\ U(0) = U_0, \end{array} \right. \tag{6.4}$$

onde

$$B_2 : H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta}(\mathbb{R}^n)$$

é o operador definido por

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_\alpha & -A_\theta \end{pmatrix}$$

com os operadores A_α e A_θ definidos como no Capítulo 2, isto é

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^{\alpha}\right), \\ A_\theta &= \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^{\theta}\right), \end{aligned}$$

cujos domínios são $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n)$ e o operador $F_2 : H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(I + \beta(-\Delta)^\gamma u^{p-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Como no caso anterior, vamos mostrar que o operador F_2 está bem definido sobre o domínio de B_2 e que é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados $A \subset D(B_2)$, quando $2\alpha - \delta > \frac{n}{2}$.

Semelhantemente ao caso anterior, pelo Lema 1.1.8, com $s = 2\alpha - \delta > \frac{n}{2}$, temos que para $U = (u, v) \in D(B_2)$

$$\begin{aligned} &\|F_2(u, v)\|^2_{D(B_2)\times H^\alpha} \\ &\leq C\|u\|^2_{H^{\alpha-2\delta}} + C\|v\|^2_{H^{\alpha-2\delta}} + C\|u^p\|^2_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}} \\ &\leq C\|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|v\|^2_{H^\alpha} + \|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

o que mostra que o operador F_2 está bem definido sob as condições $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ e $n < 2(2\alpha - \delta)$.

Assim como no caso anterior, para mostrarmos que o operador F_2 é Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados de $D(B_2)$, primeiramente precisamos de dois lemas previos.

Lema 6.1.3 *Sejam $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $p \geq 1$ inteiro e $1 \leq n < 4\alpha - 2\delta$. Se U, $W \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} &\|F_2U - F_2W\|_X \\ &\leq C\left(1 + \|B_2U\|^{p-1}_X + \|B_2W\|^{p-1}_X\right)\|B_2(U - W)\|_X. \end{aligned}$$

Demonstração: Usaremos a seguinte desigualdade

$$\frac{1 + |\xi|^{4\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}} \leq C\left(1 + |\xi|^{2(2\theta-\delta)}\right).$$

Para $U=(u,v)$ e $W=(w,z)$ em $D(B_2)$,

$$
\begin{aligned}
&\|F_2U-F_2W\|^2_{H^\alpha\times H^\delta}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}}|\hat{u}-\hat{w}|^2d\xi+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}}|\hat{v}-\hat{z}|^2d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|\xi|^{2\delta}}|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2d\xi\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}-\hat{v}|^2d\xi+C\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{v}-\hat{z}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\gamma-\delta)}\right)|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2d\xi\\
&=C\|u-w\|^2+C\|v-z\|^2+C\|u^p-w^p\|^2_{H^{2\gamma-\delta}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.1.10, com $s=2\alpha-\delta>\dfrac{n}{2}$ e $p>1$, e o Lema 2.1.2 temos

$$
\begin{aligned}
&\|F_2U-F_2W\|^2_{H^\alpha\times H^\delta}\leq C\|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta}+C\|v-z\|^2_{H^\alpha}\\
&+C\left(\|A_\alpha u\|^{p-1}_{H^\delta}+\|A_\alpha w\|^{p-1}_{H^\delta}\right)^2\|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta}\\
&\leq\left(1+\|B_2U\|^{p-1}_X+\|B_2W\|^{p-1}_X\right)^2\|B_2(U-W)\|^2_X.
\end{aligned}
$$

■

Lema 6.1.4 *Sejam* $0\leq\delta\leq\theta\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $0\leq\gamma\leq\dfrac{\alpha+\delta}{2}$, $p\geq 1$ *inteiro e* $1\leq n<4\alpha-2\delta$. *Se* $U,\,W\in D(B_2)=H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, *então existe uma constante* $C>0$ *tal que*

$$
\begin{aligned}
&\|B_2(F_2U-F_2W)\|_X\\
&\leq C\left(1+\|B_2U\|^{p-1}_X+\|B_2W\|^{p-1}_X\right)\|B_2(U-W)\|_X.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Sejam $U=(u,v)$ e $W=(w,z)$. Considerando as desigualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}&\leq C\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right),\\
\frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^3}&\leq C\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right),
\end{aligned}
$$

podemos estimar

$$
\begin{aligned}
&\|B_2(F_2U-F_2W)\|^2_{H^\alpha\times H^\delta}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left(|\hat{u}-\hat{w}|^2+|\hat{v}-\hat{z}|^2+|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2\right)d\xi\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^3}\left(|\hat{u}-\hat{w}|^2+|\hat{v}-\hat{z}|^2+|\beta|^2|\xi|^{4\gamma}|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2\right)d\xi\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\hat{u}-\hat{w}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta)}\right)|\hat{v}-\hat{z}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(\alpha-2\delta+2\gamma)}\right)|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|\hat{u}-\hat{w}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta)}\right)|\hat{v}-\hat{z}|^2d\xi\\
&+C\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^{2(2\theta-3\delta+2\gamma)}\right)|\widehat{u^p}-\widehat{w^p}|^2d\xi\\
&=C\|u-w\|^2_{H^{\alpha-2\delta}}+C\|v-z\|^2_{H^{\alpha-2\delta}}+C\|u^p-w^p\|^2_{H^{\alpha-2\delta+2\gamma}}\\
&+C\|u-w\|^2_{H^{2\theta-3\delta}}+C\|v-z\|^2_{H^{2\theta-3\delta}}+C\|u^p-w^p\|^2_{H^{2\theta-3\delta+2\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.1.10, com $s=2\alpha-\delta>\dfrac{n}{2}$ e $p\geq 1$, e o Lema 2.1.2 temos finalmente

$$
\begin{aligned}
&\|B_2(F_2U-F_2W)\|^2_X\leq C\|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta}+C\|v-z\|^2_{H^\alpha}\\
&+C\left(\|A_\alpha u\|^{p-1}_{H^\delta}+\|A_\alpha w\|^{p-1}_{H^\delta}\right)^2\|A_\alpha(u-w)\|^2_{H^\delta}\\
&\leq C\left(1+\|B_2U\|^{p-1}_X+\|B_2W\|^{p-1}_X\right)^2\|B_2(U-W)\|^2_X.
\end{aligned}
$$

■

Agora, pelos Lemas 6.1.3 e 6.1.4, temos que, para $U,W\in D(B_2)=H^{2\alpha}(\mathbb{R}^n)\times H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
&\|F_2U-F_2W\|_X+\|B_2(F_2U-F_2W)\|_X\\
&\leq C\left(1+\|B_2U\|^{p-1}_X+\|B_2W\|^{p-1}_X\right)\|B_2(U-W)\|_X.
\end{aligned}
$$

Assim, dada uma constante $M > 0$ e dados $U, W \in D(B_2)$ tais que

$$\|U\|_X^{p-1} + \|B_2U\|_X^{p-1} \leq M \text{ e } \|W\|_X^{p-1} + \|B_2W\|_X^{p-1} \leq M,$$

então

$$\|F_2U - F_2W\|_X + \|B_2(F_2U - F_2W)\|_X \leq CL_M\|B_2(U - W)\|_X,$$

onde $L_M = 1 + 2M^{p-1}$.

Assim, F_2 é um operador Lipschitz contínuo sobre conjuntos limitados de $D(B_2)$.

Como vimos no Capítulo 2, B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X, portanto, pelo Teorema 1.3.1 existe uma única solução do problema de Cauchy (6.4).

Resumimos todos esses resultados no seguinte teorema

Teorema 6.1.2 *Seja $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$, onde n é a dimensão do espaço e sejam $0 \leq \delta \leq \theta \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$, $0 \leq \gamma \leq \dfrac{\alpha + \delta}{2}$ e $p \geq 1$ inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha - \delta}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

existe uma única solução $u = u(t, x)$ para o problema de Cauchy associado à equação semilinear dada em (6.1) verificando

$$u \in C^2\left([0, T), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0, T), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0, T), H^{2\alpha - \delta}(\mathbb{R}^n)\right),$$

definida em um intervalo maximal $[0, T)$, de modo que vale uma, e somente uma, das seguintes condições

a) $T = \infty$;

b) $T < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T} \left(\|U(t)\|_X + \|B_2U(t)\|_X\right) = \infty.$

6.2 Solução Global

Nesta seção faremos um breve desenvolvimento na obtenção de solução global para o problema semilinear associado à equação (6.1). Para isso, é suficiente mostrar que a condição (b) nos Teoremas 6.1.1 e 6.1.2 não acontece. Lembramos que a existência local é obtida com a hipótese

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Mas para obtermos solução global vamos precisar da condição adicional que

$$\max\left\{0,\ \frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}\right\} < \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$$

e que $2\alpha-\delta > \frac{n}{2}$.

Por exemplo, para o caso da equação da onda em que $\alpha = 1$ e $\delta = 0$ temos a condição que $\frac{1}{4} < \gamma \leq \frac{1}{2}$ para $n = 1$ e para $n = 2, 3$ podemos ter $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

Para a equação de placas com inércia rotacional, temos $\alpha = 2$ e $\delta = 1$. Com isso devemos trabalhar com $1 - \frac{n}{4} < \gamma \leq \frac{3}{2}$ se $n = 1, 2, 3$ e $0 < \gamma \leq \frac{3}{2}$ para $n \geq 4$.

Aplicando transformada de Fourier em relação à variável x ao problema de Cauchy em (6.1), obtemos o seguinte problema no espaço de Fourier

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\alpha}\hat{u} + |\xi|^{2\theta}\hat{u}_t = \beta|\xi|^{2\gamma}\widehat{u^p}, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \end{cases} \tag{6.5}$$

onde $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$, com $(t,\xi) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$, $p \geq 1$ inteiro e potências fracionárias satisfazendo

$$0 \leq \delta \leq \alpha,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2},\ \ \max\left\{0,\ \frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}\right\} < \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Pelo principio de Duhamel, e usando as condições iniciais, a solução $\hat{u}(t,\xi)$ do problema associado no espaço de Fourier é dado por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_0 + \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_1 + \beta\int_0^t \widehat{H}(t-\tau,\xi)\frac{|\xi|^{2\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})}\widehat{u^p}(\tau,\xi)d\tau, \tag{6.6}$$

onde

$$\widehat{G}(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad \widehat{H}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

com as raízes características da EDO no espaço de Fourier dadas por:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-|\xi|^{2\theta} \pm \sqrt{|\xi|^{4\theta} - 4|\xi|^{2\alpha}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}}{2\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}.$$

Para as funções $\hat{G}$ e $\hat{H}$ dadas acima, se verificam as seguintes estimativas, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\left|\widehat{G}(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}, && \left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\,\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, \\ &\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\,\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}, && \left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Como $e^{\frac{1}{5}\rho(\xi)t} \leq 1$, para qualquer $(t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, concluimos das estimativas anteriores que,

$$\begin{aligned} &\left|\widehat{G}(t,\xi)\right|^2 \leq 5, && \left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5\,\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^{2\delta})}, \\ &\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2 \leq 5\,\frac{\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}{|\xi|^{2\alpha}}, && \left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2 \leq 5. \end{aligned} \tag{6.8}$$

A estratégia para obtermos solução global é supor que $T < \infty$, e com essa hipótese, mostraremos que $\|U\|_X + \|BU\|_X < \infty$, para qualquer $t \in [0,T)$, contradizendo o resultado dos Teoremas 6.1.1 e 6.1.2 .

Observação 6.2.1 *Notemos que, para o caso em que* $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$, *temos*

$$\|U\|_X^2 + \|B_1U\|_X^2 \leq \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|u_t\|_{H^\delta}^2 + \|u_t\|_{H^\alpha}^2 + \|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2,$$

enquanto, para o caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$

$$\|U\|_X^2 + \|B_2U\|_X^2 \leq \|u\|_{H^\alpha}^2 + \|u_t\|_{H^\delta}^2 + \|u_t\|_{H^\alpha}^2 + \|A_\alpha u\|_{H^\delta}^2 + \|A_\theta u\|_{H^\delta}.$$

Para a última norma, usando o Lema 1.1.5 , podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|A_\theta u\|^2_{H^\delta} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta}) \frac{(1+|\xi|^{2\theta})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{2\theta-\delta} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\alpha} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&= C\|u\|^2_{H^\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte desigualdade, quando $0 \le \delta \le \theta \le \frac{\alpha+\delta}{2}$

$$\|U\|^2_X + \|B_2 U\|^2_X \le C\|u\|^2_{H^\alpha} + \|u_t\|^2_{H^\delta} + \|u_t\|^2_{H^\alpha} + \|A_\alpha u\|^2_{H^\delta}.$$

Portanto, vamos provar a existência global considerando a estimativa abaixo que é valida para ambos os casos de B_1 *e* B_2*. Então precisamos estimar o lado direito da desigualdade abaixo sob a hipótese de que* $T < \infty$

$$\|U\|^2_X + \|BU\|^2_X \le C\|u\|^2_{H^\alpha} + C\|u_t\|^2_{H^\delta} + C\|u_t\|^2_{H^\alpha} + C\|A_\alpha u\|^2_{H^\delta},$$

onde $B = B_1$ ou $B = B_2$.

Considerando a observação anterior e lembrando que $X = H^\alpha \times H^\delta$, usando a definição de espaços H^s e do operador A_α, obtemos a estimativa seguinte

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_X + \|BU\|^2_X \le\; & C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 d\xi \\
& + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_t|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\delta})\frac{(1+|\xi|^{2\alpha})^2}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\hat{u}|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.5 na última integral, e organizando adequadamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_X + \|BU\|^2_X \le\; & C\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\right)|\hat{u}|^2 d\xi \\
& + C\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\delta + (1+|\xi|^2)^{\alpha}\right)|\hat{u}_t|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Sustituindo na estimativa anterior $\hat{u}$ e $\hat{u}_t$, pelas suas soluções explícitas deduzidas na expressão (6.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|U\|_X^2 + \|BU\|_X^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \right) \left(|\hat{G}|^2 |\hat{u}_0|^2 + |\hat{H}|^2 |\hat{u}_1|^2 \right) d\xi \\
&+ C \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\delta + (1+|\xi|^2)^\alpha \right) \left(|\hat{G}_t|^2 |\hat{u}_0|^2 + |\hat{H}_t|^2 |\hat{u}_1|^2 \right) d\xi \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \right) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&+ C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\delta + (1+|\xi|^2)^\alpha \right) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}_t(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau.
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

Usando as estimativas para $|\hat{G}|$, $|\hat{G}_t|$, $|\hat{H}|$ e $|\hat{H}_t|$ como aparecem em (6.8), podemos estimar sem muita dificuldade todas as integrais na desigualdade anterior, exceto pelas integrais que contém o termo $|\hat{H}|$ as quais devemos estimar com mais cuidado devido à singularidade em $\xi = 0$ que aparece na estimativa para $\hat{H}$ em (6.8).

Sendo assim, podemos calcular

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \right) |\hat{G}|^2 |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \right) |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^\delta + (1+|\xi|^2)^\alpha \right) |\hat{G}_t|^2 |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} + (1+|\xi|^2)^\alpha \right) |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \|u_0\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 \ ,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{\delta} + (1+|\xi|^2)^{\alpha}\Big)\, |\hat{H}_t|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{\delta} + (1+|\xi|^2)^{\alpha}\Big)\, |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq \|u_1\|^2_{H^{\alpha}} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{\delta} + (1+|\xi|^2)^{\alpha}\Big)\, \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}_t(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\Big)\, |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \|u^p(\tau)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \leq C \int_0^t \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned}$$

devido a que $\delta \leq \alpha$, a potência inteira da não linearidade $p \geq 1$ e pelo fato de $H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$ ser uma álgebra, já que $2\alpha - \delta > \frac{n}{2}$.

Para as integrais restantes, devido à singularidade em $\xi = 0$, **devemos impor a condição** $p > 1$ inteiro e separar cada integral em zonas de alta e baixa frequência, como segue

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\Big)\, |\hat{H}|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&= \int_{|\xi|\leq 1} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\Big)\, |\hat{H}|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ \int_{|\xi|\geq 1} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\Big)\, |\hat{H}|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} (2^{\alpha+\delta} + 2^{2\alpha-\delta}) \frac{2^{\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ 2C \int_{|\xi|\geq 1} (|\xi|^{2\alpha} + |\xi|^{4\alpha-2\delta}) \frac{|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2\alpha} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{|\xi|\geq 1} (1+|\xi|^2)^{\alpha} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,2}} + C\|u_1\|^2_{H^{\alpha}},
\end{aligned}$$

devido a que $\delta \leq \alpha$ onde também usamos a estimativa para $\hat{H}$ em (6.8).

Para a segunda integral que contém o termo $|\hat{H}|$, estimamos por separado na zona de baixa frequência e depois na alta frequência.

• Para $|\xi| \leq 1$, vemos que $1+|\xi|^2 \leq 2$ e $1 \leq 1+|\xi|^{2\delta}$, então

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} (2^\alpha + 2^{2\alpha-\delta}) |\xi|^{4\gamma-2\alpha} |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \|\widehat{u^p(\tau)}\|^2_{L^\infty} \left(\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{4\gamma-2\alpha} d\xi\right) d\tau.
\end{aligned}$$

Observemos que a hipótese $\gamma > \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}$, implica que $4\gamma - 2\alpha > -n$. Com isso, a integral em ξ entre parênteses é limitada por uma constante dependendo somente de γ , α e da dimensão n.

Portanto resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} \left((1+|\xi|^2)^\alpha + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta}\right) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \|u^p(\tau)\|^2_{L^1} d\tau \leq \int_0^t \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned}$$

onde na última integral, temos empregado o Lema 1.1.9, para $s = 2\alpha - \delta > \frac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro. Aqui apareceu a necessidade de impor $p > 1$.

Agora precisamos estimar a outra integral na zona de alta frequência.

• Para $|\xi| \geq 1$, temos duas posibilidades,

i) se $4\gamma - 2\alpha \geq 0$, usando o Lema 1.1.5 e considerando a hipótese $\gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, temos

$$\frac{|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq \frac{1+|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq C(1+|\xi|^2)^{2\gamma-\alpha-\delta} \leq C,$$

ii) se $4\gamma - 2\alpha < 0$ e do fato de $1+|\xi|^{2\delta} \geq 1$, podemos estimar

$$\frac{|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq |\xi|^{4\gamma-2\alpha} \leq 1.$$

Com essas observações, as hipóteses $\delta \leq \alpha$, $s = 2\alpha - \delta > \frac{n}{2}$ e $p > 1$ inteiro, a estimativa na alta frequência fica

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \Big) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} |\hat{H}(t-\tau,\xi)|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} \Big((1+|\xi|^2)^{\alpha} + (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} \Big) \frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} \frac{(1+|\xi|^2)^{\delta}}{|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} (1+|\xi|^2)^{2\alpha-\delta} |\widehat{u^p}|^2 d\xi\, d\tau \\
&= C \int_0^t \|u^p(\tau)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \leq C \int_0^t \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade temos usado o Lema 1.1.8.

Então, substituindo as estimativas obtidas acima na desigualdade (6.9), obtemos a importante estimativa

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|^2_X + \|BU(t)\|^2_X \leq C\|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + C\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,2}} \\
+ C\|u_1\|^2_{H^{\alpha}} + C \int_0^t \|u\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

válida para todo $t \in [0,T)$, com $T < +\infty$ o intervalo de existência local que estamos supondo finito.

Pelo Lema (2.1.2), como $0 < \delta \leq \alpha$, temos que

$$\|u\|_{H^{2\alpha-\delta}} \leq C\|A_\alpha\, u\|_{H^{\delta}}.$$

Usando esse resultado, e tomando o supremo, a estimativa (6.10) fica

$$\|U(t)\|^2_X + \|BU(t)\|^2_X \leq C\|BU_0\|^2_X + C\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,2}} + C\,T \sup_{0\leq\tau\leq t} \|BU(\tau)\|^{2p}_X. \tag{6.11}$$

Consideremos a função $M : [0,T) \longrightarrow [0,\infty)$ dada por

$$M(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t} \big\{ \|U(\tau)\|^2_X + \|BU(\tau)\|^2_X \big\}.$$

Assim, a estimativa (6.11), diz que

$$M(t) \leq C\left(\|BU_0\|^2_X + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,2}}\right) + C\,T M^p(t), \tag{6.12}$$

para todo $t \in [0, T)$, com $T < \infty$.
O objetivo é mostrar que M é uma função limitada no intervalo $[0, T)$, a qual sería a contradição que estamos procurando.

Seja $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por $F(M) = CI_0 + CTM^p - M$, onde $p > 1$ inteiro, $I_0 = \|BU_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,2}}^2$ e $C > 0$ a mesma constante que aparece na desigualdade (6.12).
Vemos que a função F verifica as hipóteses do Lema 1.4.7, portanto F possui um único ponto de mínimo global $M_0 \in (0, \infty)$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < I_0 \leq \varepsilon$, então $F(M_0) < 0$. Devido à continuidade da função $M(t)$, temos duas possibilidades:

(i) $M(t) < M_0$, $\forall\, t \in [0, T)$,

(ii) $M(t) > M_0$, $\forall\, t \in [0, T)$.

Como $M(0) = \|U_0\|_X^2 + \|BU_0\|_X^2$, então, assumindo hipótese adicional $M(0) < M_0$, segue da continuidade da função $M(t)$ que, $M(t) \leq M_0$, $\forall\, t \in [0, T)$, portanto, só a condição (i) é válida.

Portanto, mostramos que se $T < \infty$, segue que $\|U(t)\|_X^2 + \|BU(t)\|_X^2 < M_0$, $\forall\, t \in [0, T)$, que é a contradição que estávamos procurando e então concluímos em $T = \infty$.

Portanto, a solução é global para os dois casos considerados, $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$ ou $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, dados iniciais pequenos e

$$\max\left\{0,\ \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}\right\} < \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2},\ 2\alpha - \delta > \frac{n}{2} \text{ e } p > 1.$$

Podemos resumir as estimativas anteriores no seguinte teorema.

Teorema 6.2.1 *Seja n a dimensão do espaço, com $1 \leq n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha$ ou $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \leq \alpha$, $\max\left\{0,\ \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}\right\} < \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ um inteiro. Sejam u_0, u_1 na classe*

$$(u_0, u_1) \in H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \times \left(H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,2}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Sejam ainda,

$$\begin{aligned} I_0 &= \|B\, U_0\|_X^2 + \|u_1\|_{\dot{W}^{-\alpha,2}}^2, \\ M(0) &= \|U_0\|_X^2 + \|B\, U_0\|_X^2 \end{aligned}$$

e $M_0 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0 + CTM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ a constante que aparece na relação (6.12).

Então existe $\varepsilon > 0$ *tal que, se* $0 < I_0 \leq \varepsilon$ *e* $M(0) < M_0$, *existe uma única solução global* $u = u(t,x)$ *para o problema de Cauchy associado à equação semilinear, tal que*

$$u \in C^2\left([0,\infty), H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,\infty), H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Capítulo 7

Taxas decaimento Problema Semilinear

Neste capítulo mostraremos taxas de decaimento para o problema (6.1), tanto para a solução desse problema na norma L^2 quanto para a energia associada do sistema.

Observamos ainda que as taxas relatadas para a solução do problema linear, neste trabalho, foram para $\theta \geq 0$ e taxas ótimas para o caso $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$. Entretanto, por motivo de síntese de não ficar o trabalho muito extenso, estudamos taxas neste capítulo apenas para o problema semilinear (6.1) para o caso das potências fracionárias satisfazendo

$$0 \leq \delta \leq \theta \, , \; \frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2} \; \text{ e } \; \max\{\frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}, \, 0\} \leq \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Entretanto, observamos que por exemplo para o caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$ os cálculos são semelhantes.

O caso em que $0 \leq \theta < \delta$ o problema de taxas para o semilinear ainda está em aberto. De fato, neste caso a equação tem um a estrutura de perda de regularidade o que causa mais dificuldade no estudo devido a que é necessário impor mais regularidade nos dados iniciais.

Observamos que as taxas de decaimento obtidas para a norma L^2 da solução do problema associado à equação semilinear, são diferentes das taxas obtidas para o problema associado à equação linear.

Lembramos que, para o problema linear, as taxas para a norma L^2 da solução, no caso em que $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$, são

$$\begin{aligned}
&t^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}}, \quad \text{para } n \geq 3\alpha \text{ e } \ 0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2},\\
&t^{-\frac{n-4\theta}{2\alpha-2\theta}}, \quad \text{para } 2\alpha < n < 3\alpha \text{ e } \ 0 \leq \theta \leq \frac{n-2\alpha}{2},\\
&t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}, \quad \text{para } 2\alpha < n < 3\alpha \text{ e } \ \frac{n-2\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

enquanto que, para o problema semilinear, a taxa é $t^{-\frac{n}{2\alpha-2\theta}}$, que é melhor do que as citadas acima, mas mediante a exigência de maior regularidade sobre os dados inicias do problema.

Para a energia total associada ao sistema, no caso $0 \leq \theta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, obtemos a taxa $t^{-\frac{n}{2\theta}}$ para o problema linear, enquanto que, para o problema semilinear obtemos $t^{-\frac{n}{2\alpha-2\delta}}$.

A diferença entre as taxas obtidas para este caso, se deve ao fato de termos usado outro método para a obtenção das taxas (ver [30]).

Conforme visto no Capítulo 3, Seção 3.1, a soma na norma L^2 da solução com a norma da energia vem dada por,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\right) d\xi, \tag{7.1}$$

que chamamos de energia estendida.

7.1 Estimativas de energia

Decompomos a integral (7.1) em duas partes: zona de baixa frequência ($|\xi| \leq 1$) e zona de alta frequência ($|\xi| \geq 1$). Como $0 \leq \delta \leq \alpha$, observamos que

a) $|\xi| \leq 1$

$$|\xi|^{2\alpha} \leq 1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}, \ \ 1 + |\xi|^{2\delta} \leq 2(1+|\xi|^{2\alpha}),$$

b) $|\xi| \geq 1$

$$|\xi|^{2\alpha} \leq 1 + |\xi|^{2(2\alpha-\delta)}, \ \ 1 + |\xi|^{2\delta} \leq 1+|\xi|^{2\alpha}.$$

Assim, estimamos a integral anterior na forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\delta})|\hat{u}_t|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2\Big)\, d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 1} \Big(|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\hat{u}|^2 + 2(1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_t|^2\Big)\, d\xi \\
&+ \int_{|\xi|\geq 1} |\Big(\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_t|^2\Big)\, d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\hat{u}|^2 + (1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_t|^2\Big)\, d\xi \\
&= \|u\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} + \|u_t\|^2_{H^\alpha} \\
&\leq \|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Do visto na última estimativa, para obtermos taxas de decaimento, é suficiente estimar $\|(u,u_t)\|_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$. Usamos mais uma vez a expressão para $\hat{u}(t,\xi)$ obtida em (6.6) e deduzindo dessa expressão $\hat{u}_t(t,\xi)$, vemos que

$$
\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\left|\widehat{G}(t,\xi)\right|^2 + (1+|\xi|^{2\alpha})\left|\widehat{G}_t(t,\xi)\right|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\,\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left|\widehat{H}(t-\tau,\xi)\right|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\left|\widehat{H}(t,\xi)\right|^2 + (1+|\xi|^{2\alpha})\left|\widehat{H}_t(t,\xi)\right|^2\right)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2\alpha})\,\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}\left|\widehat{H}_t(t-\tau,\xi)\right|^2 |\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Das estimativas mostradas em (6.7), vemos que

$$
\begin{aligned}
&\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^{\alpha}} \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})+(1+|\xi|^{2\alpha})\,\frac{|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}\,(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\frac{|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\,\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}+(1+|\xi|^{2\alpha})\right)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2\alpha})\,\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau. \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

Limitamos cada integral em (7.2) usando o Lema 1.1.5:

a)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}+(1+|\xi|^{2\alpha})\,\frac{|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\hat{u}_0|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

b) Como $\max\{0,\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}\}<\gamma$, dividindo em regiões de baixa e alta frequência podemos estimar a segunda integral em cada uma dessas regiões e usando o Lema 1.1.9, chegamos em

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\frac{|\xi|^{4\gamma-2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau \\
&\leq C\int_0^t \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}|\xi|^{4\gamma-2\alpha} d\xi d\tau \\
&+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}\left((1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})\,\frac{1+|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^{2\alpha}}+1+|\xi|^{2\alpha}\right)|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_1|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

d) Como $\gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, podemos estimar

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2\alpha})\,\frac{|\xi|^{4\gamma}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau\\ &\leq C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Portanto, das relações (a) até (d), podemos continuar estimando (7.2)

$$\begin{aligned}&\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\hat{u}_0|^2 d\xi\\ &+C\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}|\xi|^{-2\alpha}|\hat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)t}(1+|\xi|^{2\alpha})|\hat{u}_1|^2 d\xi\\ &+C\int_0^t \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}|\xi|^{4\gamma-2\alpha} d\xi d\tau\\ &+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{5}\rho(\xi)(t-\tau)}(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)})|\widehat{u^p}|^2 d\xi d\tau\\ &:= I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+I_5(t).\end{aligned} \tag{7.3}$$

Disso, para estimarmos $\|(u,u_t)\|_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$, é suficiente encontrar estimativas para cada uma das integrais $I_i(t)$, $i=1,2,3,4,5$.

Vimos no Capítulo 3, que a definição de $\rho(\xi)$ dada em (3.5), para $\dfrac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\alpha+\delta}{2}$ é

$$\rho(\xi) = \varepsilon\,\frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}},\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Notemos que

- Para $0<|\xi|\leq 1$, vemos que $\rho(\xi) \geq \varepsilon\,\dfrac{|\xi|^{2\theta}}{2}$.
- Para $|\xi|\geq 1$, vemos que $\rho(\xi)\geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lema 7.1.1 *Seja n a dimensão do espaço, com $1\leq n<2(2\alpha-\delta)$, e sejam $0\leq\delta\leq\theta$, $\frac{\alpha}{2}\leq\theta\leq\frac{\alpha+\delta}{2}$, $\max\{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4},\ 0\}<\gamma\leq\frac{\alpha+\delta}{2}$ e $p>1$ inteiro. Então, para dados iniciais*

$$(u_0,u_1)\in\Big(L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\Big)\times\Big(L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^\alpha(\mathbb{R}^n)\cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)\Big),$$

temos que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\|(u(t),u_t(t))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1}+\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}}+\|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha}\times H^\alpha}\right)\\
&+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}}\|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}d\tau,\quad t>0,
\end{aligned}$$

se $\gamma\geq\frac{\alpha}{2}$, *ou*

$$\begin{aligned}
&\|(u(t),u_t(t))\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1}+\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}}+\|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha}\times H^\alpha}\right)\\
&+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{n+4\gamma-2\alpha}{2\theta}}\|(u,u_t)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}d\tau,\quad t>0,
\end{aligned}$$

se $\max\{0,\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}\}<\gamma<\frac{\alpha}{2}$.

Demonstração: Vamos estimar as integrais $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, $I_4(t), I_5(t)$ dadas em (7.3), separando em regiões de alta e baixa frequência e usando a estimativa para $\rho(\xi)$ vista anteriormente.

Assim, usando o Lema 1.4.3 e considerando a norma L^∞ na região de baixa frequência, podemos estimar $I_1(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
I_1(t)&\leq C\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty}\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi+Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}\\
&\leq C\|u_0\|^2_{L^1}(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}+Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\left(\|u_0\|^2_{L^1}+\|u_0\|^2_{H^{2\alpha-\delta}}\right).
\end{aligned}$$

Para $I_2(t)$, usamos também o Lema 1.4.3, tomamos a norma L^∞ e a definição de espaço $\dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
I_2(t)&\leq C\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}\left\||\xi|^{-\alpha}\hat{u}_1\right\|^2_{L^\infty}d\xi\\
&=C\left\|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}u_1\right\|^2_{L^1}\int_{|\xi|\leq 1}e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t}d\xi\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}}\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}}.
\end{aligned}$$

Para estimarmos $I_3(t)$, tomamos a norma L^∞ e usamos uma vez mais o Lema 1.4.3, ambas na região $|\xi| \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
I_3(t) &\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}t} d\xi + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_1\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C\|u_1\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t}\|u_1\|_{H^\alpha}^2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{H^\alpha}^2\right).
\end{aligned}
$$

Para a integral $I_4(t)$, como $\gamma > \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}$ implica em $4\gamma - 2\alpha > -n$, podemos aplicar o Teorema 1.4.3 e estimar

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &\leq C \int_0^t \|u(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{2p} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} |\xi|^{4\gamma-2\alpha} d\xi d\tau \\
&\leq C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n+4\gamma-2\alpha}{2\theta}} \|u(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^{2p} d\tau,
\end{aligned}
$$

para $p > 1$.

Para a integral $I_5(t)$, usamos a estimativa obtida para $\rho(\xi)$, tanto na baixa frequência bem como na alta frequência

$$
\begin{aligned}
I_5(t) \leq C &\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} (1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
+ C &\int_0^t \int_{|\xi|\geq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} (1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}) \left|\widehat{u^p}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Agora, tomando a norma L^∞ e usando o Lema 1.4.3 na zona de baixa frequência, temos

$$
\begin{aligned}
I_5(t) &\leq 2C \int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 \int_{|\xi|\leq 1} e^{-\frac{\varepsilon}{10}|\xi|^{2\theta}(t-\tau)} d\xi d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \|u^p(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^t \|u^p(\tau)\|_{L^1}^2 (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \|u^p(\tau)\|_{H^{2\alpha-\delta}}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando os Lemas 1.1.8 e 1.1.9 com $s = 2\alpha - \delta > \dfrac{n}{2}$, vemos que

$$\begin{aligned}
I_5(t) &\leq C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u^p(\tau)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\leq C \int_0^t \left((1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} + e^{-\frac{\varepsilon}{10}(t-\tau)} \right) \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau \\
&\leq C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u(\tau)\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta}} d\tau,
\end{aligned}$$

com $p > 1$ inteiro. Finalmente, somando as estimativas obtidas para $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, $I_4(t), I_5(t)$, e considerando o sinal de $4\gamma - 2\alpha$, segue de (7.3) a conclusão do lema. ∎

7.2 Taxa de decaimento da Energia Estendida

Teorema 7.2.1 *Seja n a dimensão do espaço, com $2\theta < n < 2(2\alpha - \delta)$ e sejam $0 \leq \delta \leq \theta$, $\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $\max\{0, \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}\} < \gamma \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$, $p > 1$ um inteiro. Sejam os dados iniciais*

$$(u_0, u_1) \in \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{2\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \right) \times \left(L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-\alpha,1}(\mathbb{R}^n) \right).$$

Ainda mais, sejam

$$\begin{aligned}
&I_0 = \|(u_0, u_1)\|^2_{L^1 \times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^{\alpha}}, \\
&M_s(0) = \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^{\alpha}}
\end{aligned}$$

e $M_0 > 0$ o mínimo global da função $F(M) = CI_0^2 + CM^p - M$, para $M \geq 0$, com $C > 0$ uma constante adequada. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se, $0 < I_0 \leq \varepsilon$ e $M_s(0) < M_0$, vale a seguinte estimativa para a energia estendida,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + |(-\Delta)^{\delta} u_t|^2 + |(-\Delta)^{\alpha} u|^2 + |u|^2 \right) dx \leq M_0 (1+t)^{-s},$$

para $t > 0$, onde $u = u(t,x)$ é a solução do problema de Cauchy associado à equação semilinear (6.1) e $s = \frac{n}{2\theta}$ se $4\gamma - 2\alpha \geq 0$ ou $s = \frac{n+4\gamma-2\alpha}{2\theta}$ se

$4\gamma - 2\alpha < 0$.

Demonstração: Escolhamos $s = \frac{n}{2\theta}$ se $4\gamma - 2\alpha \geq 0$ ou $s = \frac{n+4\gamma-2\alpha}{2\theta}$ se $4\gamma - 2\delta < 0$ e definamos a função $M_s : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por

$$M_s(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ (1+\tau)^s \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \right\}. \tag{7.4}$$

Introduzimos a função auxiliar definida por

$$N(\tau) := \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^2_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha}.$$

Com essa função, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^s (1+t-\tau)^{-s} \|(u(\tau), u_t(\tau))\|^{2p}_{H^{2\alpha-\delta} \times H^\alpha} \\
&= \int_0^t (1+t)^s (1+t-\tau)^{-s} N(\tau)^p d\tau \\
&= \int_0^t (1+t)^s (1+t-\tau)^{-s} \frac{((1+\tau)^s N(\tau))^p}{(1+\tau)^{ps}} d\tau.
\end{aligned}$$

Da definição de $M_s(t)$, vemos

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \{((1+\tau)^s N(\tau))\} \leq M_s(t)^p, \quad \forall\, t > 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t)^s (1+t-\tau)^{-s} N(\tau)^p d\tau \\
&\leq M_s(t)^p (1+t)^s \int_0^t (1+\tau)^{-ps} (1+t-\tau)^{-s} d\tau.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.4.6, com $a = \max\{\frac{n}{2\theta}, \frac{n+4\gamma-2\alpha}{2\theta}\} > 1$, obtemos

$$\int_0^t (1+t)^s (1+t-\tau)^{-s} N(\tau)^p d\tau \leq C\, M_s(t)^p,$$

com $C = C(n, p, \theta)$.

Do Lema 7.1.1 e da definição de $N(\tau)$, temos a estimativa

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^s \|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \\
&\le C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right) \\
&+ C\, M_s(t)^p,
\end{aligned}
$$

para $t > 0$.

Tomando o supremo em ambos lados da desigualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
M_s(t) \quad &\le \quad C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right) \\
&+ \quad C\, M_s(t)^p, \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

com $C = C(n,p,\theta)$.

Seja a função $F : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ definida como

$$
F(M) = C\, I_0 + C\, M^p - M, \qquad (7.6)
$$

onde $I_0 = \|(u_0,u_1)\|^2_{L^1\times L^1} + \|u_1\|^2_{\dot{W}^{-\alpha,1}} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$ e $C > 0$ é a constante dada na relação (7.5).

Pela definição de $M_s(t)$, essa função é contínua e $M_s(t) \ge 0$, para $t \ge 0$.

Também, pela definição da função F, vemos que ela é contínua e além disso, da desigualdade (7.6), temos que $F(M_s(t)) \ge 0$, para cada $t > 0$.

Assim, pelo Lema 1.4.7, a função F definida em (7.6) possui um único ponto de mínimo global $M_0 > 0$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < I_0 \le \varepsilon$, então $F(M_0) < 0$.

Por outro lado, $M_s(0) = \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}$ e assumindo uma hipótese adicional, $M_s(0) < M_0$, segue da continuidade de $M_s(t)$ que $M_s(t) \le M_0$, para todo $t \ge 0$, isto é

$$
\sup_{0\le\tau\le t} \left\{(1+\tau)^s \|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha}\right\} \le M_0,
$$

para $t \ge 0$ e em consequência,

$$
\|(u,u_t)\|^2_{H^{2\alpha-\delta}\times H^\alpha} \le M_0(1+t)^{-s}, \quad \forall\, t \ge 0.
$$

Portanto, como tínhamos estimado no início deste capítulo, e usando o Teorema de Plancherel, finalmente obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + \left|(-\Delta)^{\delta} u_t\right|^2 + |(-\Delta)^{\alpha} u|^2 + |u|^2 \right) dx \leq M_0 (1+t)^{-s}, \ \forall\, t \geq 0,$$

com s escolhido segundo o sinal de $4\gamma - 2\alpha$. ■

Observação 7.2.1 *Lembremos que as taxas ótimas na norma L^2, para o problema de Cauchy linear, obtidas no Capítulo 4, para o caso $\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ foram*

- *para a solução, $u(t,x)$, a taxa é $t^{-\frac{n-2\alpha}{2\theta}}$ sempre que os dados inicias verifiquem $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ com $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$,*
- *para a derivada da solução, $u_t(t,x)$, a taxa é $t^{-\frac{n}{2\theta}}$ sempre que os dados iniciais verifiquem $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$, com $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$,*
- *para $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(t,x)$, a taxa é $t^{-\frac{n}{2\theta}}$ sempre que os dados iniciais verifiquem $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ com $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$,*
- *para $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} u_t(t,x)$, a taxa é $t^{-\frac{n+2\delta}{2\theta}}$ para dados iniciais $u_0 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}$, com $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$,*

enquanto, para o problema semilinear, o Teorema 7.2.1 mostra que a taxa é $t^{-\frac{n}{2\theta}}$ para a norma da energia e da norma L^2 da solução é a mesma da norma da energia para o problema linear, mas melhora a taxa de decaimento da norma L^2 da solução. Notemos que esse fato decorre que para estudar taxas para o problema semilinear foi necessário maior exigência de regularidade, pequenez sobre os dados iniciais e ainda mais, hipótese adicional sobre a dimensão do espaço.

Notamos ainda, que a taxa da norma L^2 da parcela da energia que corresponde ao termo de inércia rotacional é a melhor entre as quatro normas consideradas. De fato, a taxa para a norma de u_t é $t^{-\frac{n}{2\theta}}$ e a taxa que corresponde ao termo de inércia rotacional é melhorada devido a ordem δ do operador de Laplace no termo de inércia rotacional generalizado.

7.2.1 Problemas em aberto

Neste trabalho ainda está em aberto provar que as taxas obtidas para o problema linear com $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$ são ótimas.

Também ainda ficou em aberto o caso de existência e decaimento ótimo para o problema linear e semilinear quando $\theta \geq \frac{\alpha+2\delta}{2}$.

O caso de taxas de decaimento para o problema semilinear quando $\theta < \delta$ está em aberto. A dificuldade nesse caso é que a equação apresenta estrutura de perda de regularidade. Precisamos estimativas mais agudas que ainda não foi possivel atacar neste trabalho.

O caso da não linearidade com $p > 0$ real ainda não pudemos considerar. É uma problema mais delicado. Precisamos para isso usar desigualdades em espaços fracionários mais sofisticadas.

Temos ainda em aberto o caso em que $\delta = 0$ e $\theta \geq \alpha$ a existência do semilinear e taxas de decaimento.

Referências Bibliográficas

[1] M. A. Astaburuaga, C. Fernandez, G. Perla Menzala, *Energy decay rates and the dynamical von Kármán equations*, Appl. Math. Lett. **7** (1994), no. 2, 7-10.

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[4] A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, *Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities*, Bull. Austral. Math. Soc. **66** (2002), no. 3, 443-463.

[5] C.I. Christov, G.A. Maugin, M.G. Velarde, *Well-posed Boussinesq paradigm with purely spatial higher-order derivatives*, Phys. Rev. E **54** (1996), 3621-3638.

[6] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Memoirs of the American Mathematical Society, Volume 195, Number 912, August 2008.

[7] P. G. Ciarlet, *A justification of the von Kármán equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), 349-389.

[8] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), no. 1, 247-255.

[9] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **10** (2013), no. 3, 563-575.

[10] P. Daripa, W. Hu, *A numerical method for solving an illposed Boussinesq equation arising in water waves and nonlinear lattices*, Appl. Math. Comput. **101** (1999), 159-207.

[11] R. Denk, R. Schnaubelt, *A structurally damped plate equation with Dirichlet-Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **259** (2015), 1323-1353.

[12] A. Esfahani, L. G. Farah, H. Wang, *Global existence and blow-up for the generalized sixth-order Boussines equation*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 4325-4338.

[13] P. G. Geredeli, I. Lasiecka, *Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Kármán plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity*, Nonlinear Analysis **91** (2013), 72-92.

[14] M. Ghisi, M. Gobbino, A. Haraux, *Local and global smoothing effects for some linear hyperbolic equations with a strong dissipation*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 2039-2079

[15] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[16] A. E. Green, P. M. Naghdi, *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth.* Journal of Fluid Mechanics, v. 78, n. 2, p. 237-246, 1976.

[17] J. L. Horbach, R. Ikehata, R. C. Charão, *Optimal Decay Rates and Asymptotic Profile for the Plate Equation with Structural Damping*, J. Math. Anal. Appl., v. 440, p. 529-560, 2016.

[18] R. Ikehata *New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem*, Math. Meth. Appl. Sci. **27** (2004), 865-889.

[19] R. Ikehata *Asymptotic profiles for wave equations with strong damping.* J. Diff. Eqns **257** (2014), 2159-2177.

[20] R. Ikehata, S. Iyota, *Asymptotic profile of solutions for some wave equations with very strong structural damping*, Math. Meth. Appl. Sci. **2018**, 1-17.

[21] R. Ikehata, M. Natsume, *Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping*, Differential Integral Eqns **25** (2012), no. 9-10, 939-956.

[22] R. Ikehata, M. Soga, *Asymptotic profile for a strongly damped plate equation with lower order perturbation*, Commun. Pure Appl. Anal. **14** (2015), no. 5, 1759-1780.

[23] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov *Wave equations with strong damping in Hilbert spaces*, J. Diff. Eqns **254** (2013), 3352-3368.

[24] T. Kato G. Ponce, *Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics. **41**, (1988), no. 7, 891-907.

[25] I. Lasiecka, A. Benabdallah, *Exponential decay rates for a full von Kármán thermoelasticity system with nonlinear thermal coupling*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **8** (2000), 13-88.

[26] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[27] H. Koch, I. Lasiecka, *Hadamard wellposedness of weak solutions in nonlinear dynamical elasticity - full von Kármán systems*, Progress Nonlin. Diff. Eqs. Appl. **50** (2002), 197-216.

[28] Y. Liu, S. Kawashima, *Decay property for a plate equation with memory-type dissipation*, Kinet. Relat. Models **4** (2011), no. 2, 531-547.

[29] C. R. da Luz, R. Coimbra Charão, *Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **6** (2009), no. 2, 269-294.

[30] C. R. da Luz, R. Ikehata, R. C. Charão, *Asymptotic behavior for abstract evolution differential equations of second order*, Journal of Differential Equations, **259** (2015), 5017-5039.

[31] Q. Ma, Y. Yang, X. Zhang, *Existence of exponential attractors for the plate equations with strong damping*, Electron. J. Differential Equations, (2013), no. 114, 1-10.

[32] G.A. Maugin, *Nonlinear Waves in Elastic Crystals*, in: Oxford Mathematical Monographs Series, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[33] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **12** (1976), 169-189.

[34] G. P. Menzala, E. Zuazua, *Timoshenko's plate equations as a singular limit of the dinamical von Kármán system*, J. Math. Pures Appl. **79** (2000), 73-94.

[35] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[36] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*, Textos de Métodos Matemáticos n°9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[37] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[38] D. H. Peregrine, *Long waves on a beach.* Journal of Fluid Mechanics, v. 27, p. 815-827, 1967.

[39] J. P. Puel, M. Tucsnak, *Global existence for full von Kármán system*, Appl. Math. Optim. **34** (1996), 139-160.

[40] G. Ponce, *Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations*, Nonlinear Anal. **9** (1985), no. 5, 399-418.

[41] J. Sander, K. Hutter, *On the development of the theory of solitary wave.* Acta Mechanica, v. 86, p. 11-152, 1991.

[42] R. Schnaubelt, M. Veraar, *Structurally damped plate and wave equations with random point force in arbitrary space dimensions*, Differential Integral Equations **23** (2010), no. 9-10, 957-988.

[43] F. Serre, *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux.* La Houille Blanche, v. 8, p. 374-388, 1953.

[44] Y. Shibata, *On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **23** (2000), no. 3, 203-226.

[45] Y. Sugitani, S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semilinear dissipative plate equation*, J. Hyperbolic Diff. Eqns **7** (2010), 471-501.

[46] H. Takeda, S. Yoshikawa, *On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping II, Asymptotic profiles*, J. Diff. Eqns **253** (2012), 3061-3080.

[47] L. Xu, Q. Ma, *Existence of random attractors for the floating beam equation with strong damping and white noise*, Bound. Value Probl. 2015, 2015:126.

[48] Yu-Zhu Wang, *Asymptotic behavior of solutions to the damped nonlinear hyperbolic equation*, J. Appl. Math. 2013, Art. ID 353757, 8 pp.

[49] S. Wang, G. Chen, *The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, J. Math. Anal. Appl. **266** (2002), 38-54.

[50] S. Wang, G. Chen, *Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation*, J. Math. Anal. Appl. **274** (2002), 846-866.

[51] S. Wang, H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term.* J. Differential Equations **252** (2012), no. 7, 4243–4258.

[52] S. Wang, H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with Stokes damped term.* Z. Angew. Math. Phys. **64** (2013), no. 2, 719–731.

[53] S. Wang, H. Xue, *Global Solution for a Generalized Boussinesq Equation*, Applied Mathematics and Computation **204** (2008), 130-136.