

Bruno Henrique Schock

**POLÍTICAS PARAMÉTRICAS DE PORTFÓLIOS:
COMBINAÇÃO DE VARIÁVEIS APLICADAS AO
BRASIL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Economia.

Orientador: André Alves Portela Santos

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Schock, Bruno Henrique

Políticas Paramétricas de Portfólio : combinação de
variáveis aplicadas ao Brasil / Bruno Henrique
Schock ; orientador, André Alves Portela Santos,
2019.

131 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de
Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Políticas paramétricas de
portfólio. 3. Otimização de portfólio. 4. Modelos de
otimização. 5. Mercado acionário brasileiro. I.
Santos, André Alves Portela. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação
em Economia. III. Título.

Bruno Henrique Schock

**POLÍTICAS PARAMÉTRICAS DE
PORTFÓLIOS: COMBINAÇÃO DE VARIÁVEIS
APLICADAS AO BRASIL**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Economia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 28 de fevereiro 2019.

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira
Coordenador

Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
Universidade Federal de Santa Catarina
Presidente
Orientador

Prof. Dr. Maurício Simiano Nunes
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Helberte João França Almeida
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Hudson da Silva Torrent
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de iniciar esta seção de agradecimentos citando minha família, meus avós, meu irmão e meus queridos pais, Carla Rodrigues Schock e Luiz Ademir Schock, por me acompanharem nessa caminhada estudantil, sem vocês nada disso teria sido possível. O carinho, a atenção e a motivação que minha querida mãe proporcionou durante minha história ficarão guardados em minha memória para sempre. Suzie, Gerson, Jorge, Ioni, Junior, Bruna e João, vocês são parte importante da minha história, tenho muito carinho e amor por todos.

Ao meu orientador André Alves Portela Santos pela paciência, sabedoria e amizade ofertada durante todo o período de elaboração deste trabalho. E também a todo o Programa de Pós-Graduação em Economia, que sem dúvida foi fundamental para lapidar os alicerces necessários para a confecção do presente documento.

Aos colegas que construí laços e que mantive amizade durante toda a temporada do mestrado, aos quais tenho certeza que serão valiosos companheiros pelos tempos e ventos que a vida trará, obrigado pela companhia, Denise Manfredini, Cássio Alves, Rafael Wagner, Alexandre Garcia, Aishameriane Schmidt e Murilo Rocha.

Agradeço também ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Que financiou esse trabalho através do código de Financiamento 001.

*Primeiro os sorrisos, depois as mentiras
e por último, o tiroteio.*

(Roland de Gilead, ano?)

RESUMO

Este trabalho implementa as chamadas políticas paramétricas de portfólio propostas por Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) para o mercado acionário brasileiro, com a finalidade de analisar seu desempenho para uma amostra de ações negociadas no período de 1998 até 2013. Essas políticas possuem características distintas em relação às políticas tradicionais baseadas no paradigma média-variância de Markowitz e suas variantes por três razões diferentes, em suma: i) especificarem o vetor de pesos ótimos da carteira em função de um conjunto de características desses ativos; ii) não necessitar a modelagem do primeiro e segundo momento dos retornos; iii) possibilitar a modelagem de um grande número de ativos mediante um conjunto potencialmente pequeno de características, permitindo assim, uma substancial redução da dimensionalidade. Dessa vez, a implementação das políticas paramétricas é baseada em um conjunto mais amplo de características relacionadas a vários trabalhos existentes na literatura, incluindo não apenas variáveis fundamentalistas como também indicadores de análise técnica. O desempenho fora da amostra da política paramétrica é avaliado segundo diversas métricas, contemplando, inclusive, a presença de diferentes níveis de custos de transação e de aversão ao risco. As evidências obtidas apresentam uma melhora constante no índice de Sharpe líquido da versão proposta com restrição de venda a descoberto, além de apresentar significância para as variâncias dos retornos e em alguns casos para os índices de Sharpe líquido, porém, os retornos acumulados ainda assim apresentam vantagem para outros modelos analisados.

Palavras-chave: Políticas paramétricas de portfólio, Otimização de portfólio, Modelos de otimização, Mercado acionário brasileiro.

ABSTRACT

This thesis implements the so called parametric portfolio policies proposed by Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) for the Brazilian stock market, looking for the performance analysis of the parametric portfolio policies when applied for a sample ranging between 1998 to 2013. These policies own distinct characteristics in relation to traditional policies based on the mean-variance paradigm from Markowitz and its variants in short because of three different reasons, such: i) vector specification of the optimal weights being in function of a set of characteristics of these stocks; ii) it doesn't need to model the first and second moment of returns; iii) it's possible to model a big number of stocks through a set potentially small of characteristics, allowing, a substantial reduction in dimensionality. This time, the implementation from the parametric portfolio policies is based in a broader set of characteristics in relation with many works from the literature, including not only fundamental variables but technical analysis indicators too. The out-of-sample performance from the parametric policies is evaluated following many metrics contemplating, even, the presence of different levels of transactions costs and risk aversion. The evidence suggests a constant development in the liquid Sharpe ratio of the long only proposed version, beyond that, it presents significant variances of returns and in some cases significant liquid Sharpe ratio, but, the accumulated returns still favors other analyzed models.

Keywords: Parametric portfolio policies, Portfolio optimization, Optimization models, Brazilian stock market.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Função utilidade CRRA	39
Figura 2	Quantidade de empresas	60
Figura 3	Média dos retornos	84
Figura 4	Retornos brutos acumulados das PPP's	91
Figura 5	Custos das PPP's	91
Figura 6	Retornos brutos acumulados dos portfólios	94
Figura 7	Custos dos portfólios	94
Figura 8	Desenvolvimento dos parâmetros θ para PPP_{NS21}	102
Figura 9	Desenvolvimento dos parâmetros θ para PPP_{21}	103
Figura 10	Comparação entre PPP's	104
Figura 11	Retornos líquidos acumulados das PPP's	106
Figura 12	Retornos líquidos acumulados dos portfólios	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Estatísticas descritivas dos retornos avaliados.....	85
Tabela 2	Política paramétrica de portfólio.....	89
Tabela 3	Distribuição dos portfólios.....	92
Tabela 4	Estatísticas descritivas e testes <i>HAC</i> com base na IP ..	96
Tabela 5	Comparativo de variações da aversão ao risco.....	98
Tabela 6	Políticas paramétricas de portfólios com diferentes γ 's .	100
Tabela 7	Retorno acumulado ao final da amostra para as PPP's.	107
Tabela 8	Retorno acumulado ao final da amostra.....	107
Tabela 9	Correlograma das características utilizadas	115
Tabela 10	Acrônimos e variáveis utilizadas	119

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PPP	Política Paramétrica de Portfólio.....	24
IP	Igualmente Ponderado	27
MeVI	Média-Variância Irrestrito.....	42
MeVR	Média-Variância Restrito.....	42
MiVI	Mínima-Variância Irrestrito	42
MiVR	Mínima-Variância Restrita	43
PV	Ponderado pelo Valor	47
VoT1	Volatilidade no Tempo-1	48
RRT	Retorno ao Risco no Tempo.....	50
RRTBeta	Retorno ao Risco Beta.....	51
MiVR2.5	Mínima-Variância Restrito a Norma 2.5.....	52
I.S	Índice de Sharpe	55
HAC	Heteroscedástico Autocorrelato Consistente	55
BOVESPA	Bolsa de Valores do Estado de São Paulo.....	62
MQO	Mínimos Quadrados Ordinários	66
LR	Livre de Risco	67
IBrX100	Índice Brasil 100	74
IBrX50	Índice Brasil 50	74
PIB	Produto Interno Bruto.....	76

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 OBJETIVOS	29
1.1.1 Objetivo Geral	29
1.1.2 Objetivos Específicos	29
2 POLÍTICAS PARAMÉTRICAS DE PORTFÓLIO ...	31
2.1 O PORTFÓLIO PARAMÉTRICO	31
2.1.1 Calculando os retornos	33
2.1.2 Inferência	35
2.1.3 Restrições aos pesos	36
2.1.4 Quanto à função objetivo	37
3 POLÍTICAS BASEADAS NO PARADIGMA DE MÉDIA-VARIÂNCIA	41
3.1 O PROBLEMA DE MÉDIA-VARIÂNCIA DE MARKOWITZ	41
3.2 ENCOLHENDO A MATRIZ DE COVARIÂNCIA	44
3.3 ESTRATÉGIAS SIMPLÓRIAS	46
3.3.1 Ponderando igualmente	46
3.3.2 Ponderando pelo valor	47
3.4 ALTERNATIVAS DO PARADIGMA	48
3.4.1 Volatilidade no tempo	48
3.4.2 Retorno ao risco no tempo	49
3.4.3 Retorno ao risco Beta	51
3.5 A ABORDAGEM GENERALISTA	51
3.5.1 Mínima-variância restrita a norma	51
4 METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO	53
4.1 ÍNDICES E TESTES	53
4.1.1 Índices de avaliação de carteiras	53
4.1.2 Teste de hipóteses robusto	55
4.2 CUSTOS DE TRANSAÇÃO	56
5 ANÁLISE EMPÍRICA	59

5.1 DADOS	59
5.2 DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS	60
5.3 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS.....	83
5.4 RESULTADOS	86
6 CONCLUSÕES.....	109
APÊNDICE A - Correlograma.....	116
APÊNDICE B - Acrônimos	120
REFERÊNCIAS	121

1 INTRODUÇÃO

O problema da seleção de portfólio, inauguralmente teorizado em Markowitz (1952), surgiu como instrumento para o mercado financeiro a fim de resolver um problema de escolha do investidor entre como alocar os seus recursos possuindo diferentes tipos de ativos, e foi o marco inicial dos estudos destinados a otimização de uma carteira de ativos.¹ Um problema de otimização simples que buscava maximizar os retornos esperados em detrimento do risco, as luzes da época fora um grande passo. Porém, as estratégias que foram traçadas baseadas nessa descoberta passaram a ser mais cuidadosamente observadas quando foi-se considerado a existência de erro de estimação incorporado na análise, através da derivação dos momentos dos retornos, apresentando também flutuações expressivas em suas alocações ao longo do tempo². Essa instabilidade dos resultados obtidos pela média-variância é parcialmente explicada através dos estimadores da matriz de variância-covariância e da esperança dos retornos. Merton (1980) e Best e Grauer (1992) documentam a dificuldade associada com a estimação e sensibilidade das estimativas dos parâmetros a partir dos retornos, principalmente se tratando da média.

A literatura de finanças se divide em várias soluções para o problema da baixa qualidade da média-variância, os dois mais súbitos são deixar de utilizar o método, ou aprimorar a técnica. A decisão se faz perante não só a partir do desempenho apresentado pelas respostas alternativas oferecidas, mas também pelas várias qualidades ofertadas por diferentes modelos de otimização, seja pela facilidade de implementação, rapidez de estimação ou capacidade de adequação a diferentes informações. Neste contexto, essa dissertação é baseada na escolha de modelos que deixam de aplicar a média-variância como fundamento cen-

¹Uma descrição com várias óticas sobre a sua história, as características e as diferentes abordagens é levantada por Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014).

²Tudo isso é confirmado empiricamente pela literatura, como em Broadie (1993) e Chopra e Ziemba (2013).

tral e se empenham em absorver informações de dados de corte transversal que possuem relação com os retornos, mais especificamente a chamada política paramétrica de portfólio (PPP) sugerida por Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009).

Durante o final do século XX houve um crescimento nas pesquisas que ofereciam outra visão sobre a otimização de portfólio, onde se buscava informações sobre os retornos com dados de corte transversal,³ como em Fama e French (1992) que buscavam mostrar que o índice beta de mercado não era o suficiente para explicar os índices atrelados aos retornos esperados dos ativos, sugerindo uma combinação de informações que apresentavam mais contato para descrever a média dos retornos. Ao redor do rico conjunto informacional que contorna os retornos, pode-se encontrar outros trabalhos como o apresentado por Fama e French (1996)⁴ que com um modelo multifator busca evidências de características que consigam descrever os retornos esperados, por sua vez Chan, Karceski e Lakonishok (1998) busca a relação das mesmas variáveis com as variâncias e covariâncias dos retornos. Mais recentemente, o assunto continua como material de intensa investigação por Green, Hand e Zhang (2013), que investigam a relação implícita entre os retornos esperados e as características das firmas, baseando-se no artigo de Cochrane (2011), que incita aos autores buscarem as relações de características independentes que consigam informações para explicar a média dos retornos de ativos americanos, conseguindo evidências estatisticamente significantes de que nem todas as informações que conseguem incorporar informações dos retornos. Assim o autor diz que a razão pela qual somente algumas características conseguem providenciar informações independentes acontece devido ao fato de que o número de determinantes independentes dos retornos é intrinsecamente

³Tanto que a significância de informações desse tipo são defendidas em pesquisas como Lewellen (2014), que não atribui a qualidade desses indicadores a simplesmente sorte ou viés dos dados. Acima disso, Pastor e Veronesi (2009) atribuem a incerteza dos parâmetros no mercado financeiro como vulneráveis a aleatoriedade, porém suprimíveis pela quantia de dados fornecidos pelos mercados financeiros.

⁴Um caso de modelo multifator baseado no Brasil pode ser visto em Garcia e Santos (2018).

pequeno. Desta maneira o problema é que explorar esse tipo de informação nos moldes da abordagem de Markowitz (1952) é trabalhoso, não só em nível econométrico, como também computacional, além dos resultados serem inconsistentes e ruidosos, conforme apresentado por Michaud (1989).

Em contrapartida, a literatura também focou no portfólio de mínima-variância como uma opção viável da estratégia de Markowitz, pela razão de depender somente da matriz de covariâncias, perdendo parte dessa sensibilidade dos erros de estimação, como explicado por Chan, Karceski e Lakonishok (1999) e Jagannathan e Ma (2003). A discussão levantada por Frost e Savarino (1988) coloca uma luz sobre o problema da otimização de média-variância observando que restrições quanto ao limiar inferior e superior de alocação de recursos, dessa vez tratada como média-variância restrito, exhibe evidências de que essas restrições são justificáveis em qualquer caso em que o risco e os retornos são desconhecidos e dependem de serem estimados. Mais especificamente, o autor conclui que as restrições individuais no limite superior nos pesos dados a ativos do portfólio de média-variância reduz tanto o viés de estimação quanto melhora o desempenho do portfólio; e atesta que restrições no limite inferior (que tratamos como *no-short*) funcionam como uma troca de risco de estimação por viés de estimação.

Mesmo não precisando estimar a média dos retornos, a mínima-variância ainda assim é vulnerável aos erros de estimação, pois a matriz covariâncias da amostra é feita através do estimador de máxima verossimilhança, e sendo assim, precisa pautar-se à quanto a hipótese de distribuição dos dados assumida que em alguns casos não pode ser garantida. Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) atribuem a relação de importância conforme o grau de aversão ao risco do investidor (uma vez que quanto maior a tolerância ao risco maior também o impacto dos erros dos retornos esperados em relação a matriz de variância-covariância e vice-versa) e, portanto, mais risco admitido quanto a média dos retornos do que quanto a matriz de variância-covariância.

As vantagens da abordagem sugerida por Brandt, Santa-Clara e

Valkanov (2009) começam a aflorar em cima dos problemas de estimação vistos até agora, pois diminuem a dimensionalidade do problema, uma vez que não trata mais de trabalhar com estimação dos momentos de primeira e segunda ordem, o que diminui os problemas causados por imprecisão dos coeficientes de estimação e sobreajuste (*overfitting*). Assim os autores dimensionam o problema de Markowitz com a necessidade de estimação dos N primeiros e $(N^2 + N)/2$ segundos momentos para uma quantia de N ativos, além de outros, como evitar a modelagem da distribuição conjunta dos retornos e das características, o que permite foco direto nos pesos do portfólio; não trabalhar com hipóteses referentes as preferências do investidor e das distribuições conjuntas dos retornos e, por fim, capturar a relação implícita entre os retornos esperados e as características das firmas.

Outro problema comumente encontrado no portfólio de média-variância, solucionado pela política paramétrica, é a alocação extrema dos pesos ocasionada pelas pequenas alterações dos retornos ao longo do tempo. De um lado, pequenas alterações nas médias dos retornos resultam em grandes custos de reposicionamento dos pesos e a solução para o problema existe e é investigada no artigo de Jagannathan e Ma (2003). O artigo começa descrevendo a argumentação utilizada por Green e Hollifield (1992) sobre a dificuldade de se construir portfólios de média-variância sem observar os pesos negativos e os positivos extremos devido à estimação imprecisa de parâmetros utilizados para construí-lo, se baseando no fato da estrutura das covariâncias encontradas nos retornos dos ativos possuírem um fator de dominância singular e falta de diversidade nos betas encontrados, onde o autor consegue demonstrar que a imposição de restrições de não-negatividade (*no-short selling*) nos pesos consegue ajudar mesmo quando os resultados de Green e Hollifield (1992) são verdadeiros através da redução da covariância entre os ativos (o que tende a acontecer são pesos negativos de um para o outro, nesse caso) e isso reduz os erros de amostragem para o caso de mínima-variância. E do outro lado, a facilidade oferecida pela própria construção da PPP, que escolhe poucos parâmetros dentro de uma fun-

ção linear, onde os desvios dos coeficientes só serão diferentes de zero se as informações utilizadas oferecerem uma combinação interessante de risco e retorno que sejam consistentes ao longo do tempo e dos ativos.

O término da necessidade de utilizar estimadores de máxima verossimilhança não aparece somente na PPP, como no caso de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007), que com uma estratégia simples, consegue sobrepujar o modelo de Markowitz e outros treze em índices que mensuram risco. Uma política de distribuição igualmente ponderada (*equally-weighted*) do dinheiro investido entre todos os ativos da amostra apresentou melhores resultados mesmo utilizando diferentes extensões que diminuem os erros de estimação. É uma política de ponderação pelo valor de mercado das firmas (*value-weighted*), por exemplo, que possui as mesmas boas características de evitar os erros de estimação apresentados até agora. Essas mesmas estratégias servem de modelo de comparação direto da PPP, que possui sua construção em torno de um portfólio modelo igualmente ponderado e pondera os pesos através dos desvios ótimos dessa política.

A facilidade de implementação da PPP permite uma adequação da proposta original a outros cenários. Para o Brasil, existe uma pesquisa envolvendo 316 ações brasileiras feita por Medeiros, Passos e Vasconcelos (2014) onde foi avaliado a política paramétrica de portfólio para três variáveis explicativas (mesma parametrização de (BRANDT; SANTA-CLARA; VALKANOV, 2009)), *book-to-market*, *market equity e one year momentum*, e comparadas com os resultados dos portfólios "ponderado pelo valor" e a tradicional abordagem de média-variância. Os resultados trouxeram evidências de que mesmo depois de restrições aos pesos e custos de mercado, a política paramétrica de portfólio apresentava resultados melhores que os modelos utilizados para comparação, e era computacionalmente mais simples. A inegável superioridade do modelo até aqui se fez objeto de interesse para a continuidade da pesquisa avançando em direção de explorar dados de corte transversal pela abordagem das PPP.

Recentemente DeMiguel et al. (2017), tomando como base a po-

lítica paramétrica, utiliza uma perspectiva diferente e inicia uma investigação com evidências de artigos que dão indícios sobre a possibilidade de previsibilidade dos retornos através de individualidades presentes nas empresas, como feito por Subrahmanyam (2010), Richardson, Tuna e Wysocki (2010) e Nagel (2013). Porém, dessa vez, conduz a aplicação em torno da política paramétrica de portfólio modificada, observando a sua construção como uma regressão linear faz uma apuração sobre quais características dos ativos são conjuntamente significantes para um investidor que observa tanto o retorno médio quanto o risco envolvido no portfólio. De 51 características que foram observadas no artigo, apenas seis são significantes sem custos de transação, e os com resultados quanto ao desempenho da estratégia acima das outras estratégias utilizadas ilustra o potencial a ser explorado com anomalias das empresas.

O artigo que fundamenta o alicerce desse trabalho, Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) conforme observado pela evidência empírica de pesquisas não só fora do país como em território nacional, concede uma ótica flexível para entender como a construção de um portfólio pode ser feita baseando-se em informações fornecidas pelas empresas de capital aberto, e aproveitando-se dessa flexibilidade a reformulação do problema para adaptação a indicadores não utilizados pelo artigo seminal, a fim de testar se os dados de diferentes estilos é o objeto dessa pesquisa. A proposta se vale de utilizar informações contidas no programa Economática, contemplando diversos universos do estudo de finanças para alimentar uma política paramétrica de portfólio, investigando a relevância dessas informações em um modelo composto de características.

Ao restante dessa dissertação, sua estrutura será dada como: Seção 2 - Contendo a metodologia utilizada para a pesquisa; seção 3 - A análise empírica dos dados e dos resultados; Seção 4 - Conclusão.

1.1 OBJETIVOS

As políticas paramétricas de portfólio aparecem como uma alternativa mais comedida em relação à tradicional alocação de ativos do paradigma de média-variância. Sendo um modelo baseado em um número limitado de características das empresas, a riqueza informacional do problema se transforma em um conjunto de possibilidades mais extensas do que a abordagem de Markowitz. Além de que, as políticas paramétricas de portfólio roubam a cena de outras estratégias de otimização se apoiando em três vantagens: podendo começar com a não necessidade de modelagem dos primeiros momentos dos retornos, seguido da possibilidade de incorporação de um grande número de ativos na análise sem complicações computacionais e, terminando, com a possibilidade de incorporar outras informações que fazem parte do rico conjunto de conhecimento da literatura de finanças

1.1.1 Objetivo Geral

O trabalho em questão visa estimar e analisar o desempenho gerado das chamadas políticas paramétricas de portfólio comparando os seus resultados com outras diferentes estratégias de portfólios já contempladas na literatura, análogo ao realizado por Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) para o Brasil entre o período de 1998-2017. Após estimação, a análise dos resultados inclui teste de significância conjunta dos resultados do modelo, com intenção de identificar se as informações utilizadas possuem poder explicativo sobre os retornos.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Levantamento da metodologia de finanças ao redor da otimização de portfólio;
2. Levantamento das características que foram utilizadas como pa-

râmetros do modelo;

3. Estimação das soluções das políticas paramétricas de portfólio;
4. Estimação das soluções das outras políticas utilizadas como comparativos;
5. Exploração, análise e comparação do desempenho das informações criadas;
6. Teste conjunto de significância das informações utilizadas;
7. Conclusão das informações obtidas.

2 POLÍTICAS PARAMÉTRICAS DE PORTFÓLIO

2.1 O PORTFÓLIO PARAMÉTRICO

Tratando-se das políticas paramétricas de portfólio, Brandt (2010) assume que a cada período de tempo t existe uma quantia de N_t ativos de investimentos. Para cada ativo i , existe o retorno $r_{i,t+1}$ da data t até $t + 1$ que é associado a um vetor de características das firmas $\vartheta_{i,t}$ observado na data t . O problema do investidor está em escolher os pesos $x_{i,t}$ a maximizar a utilidade esperada do retorno do portfólio $r_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N_t} x_{i,t} r_{i,t+1}$. O autor parametriza os pesos do portfólio ótimo como função das características:

$$x_{i,t} = \bar{x}_{i,t} + \frac{1}{N_t} \theta^\top \hat{\vartheta}_{i,t}, \quad (2.1)$$

onde $\hat{\vartheta}_{i,t}$ são as características do ativo i normalizadas com média zero e desvio-padrão unitário entre todos os ativos no tempo t ; $\bar{x}_{i,t}$ é o peso do ativo i no portfólio base; θ é o vetor que será estimado dos coeficientes. O intercepto da equação, dado pelo termo $\bar{x}_{i,t}$, é o portfólio modelo, que será chamado de administração passiva, enquanto $\theta^\top \hat{\vartheta}_{i,t}$ é o desvio do portfólio ótimo com relação a esse intercepto, será conhecido por administração ativa. Por trás dessa equação existe a ideia de capturar uma administração ativa do portfólio em comparação com o desempenho do portfólio modelo. Existem duas razões pela qual o autor normaliza as características. A primeira é a de que $\hat{\vartheta}_{i,t}$ é estacionário ao longo do tempo, enquanto $\vartheta_{i,t}$ pode não ser, isso é condicionado a quais características estamos avaliando. A segunda característica é de que a normalização implicará que a média de $\theta^\top \hat{\vartheta}_{i,t}$ é zero, o que fará com que equação tenha boas propriedades, como a soma dos desvios dos pesos com relação ao portfólio modelo sejam zero e que ao final a soma dos pesos totalizará um. $1/N_t$ é a normalização que nos permite fazer com que a função dos pesos dos portfólios possa ser aplicada a um

número arbitrário de ativos, dependemos dela, pois em sua ausência, dobrar o número de ativos sem mudar a distribuição dos dados *cross-section* poderia dobrar a agressividade da alocação de recursos, pois estamos dobrando a magnitude das informações, enquanto mantemos as oportunidades de investimentos, do mesmo modo que a redução do número de ativos reduziria a quantidade de informação.

A política de portfólio paramétrica, diferentemente das outras aplicações popularmente utilizadas na literatura de otimização de portfólio, se interessa nas características das empresas e não nas empresas em si, trazendo a ideia de que se está buscando traduzir os propósitos de investir no ativo através das informações fornecidas por estas características, assim enriquecendo o conjunto informacional que pode ser utilizado aumentando o poder investigativo da abordagem. Em cada período de tempo, sempre existirá um único θ que maximiza a função utilidade, nos permitindo fazer com que o θ que maximiza os pesos da equação em dado período de tempo seja o mesmo θ que maximiza a amostra. Sendo assim, o autor mostra que é permitido estimar θ maximizando a amostra análogo a esperança de uma função utilidade incondicional:

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} u(r_{p,t+1}) &= \sum_{t=0}^{T-1} u \left(\sum_{i=1}^{N_t} x_{i,t} r_{i,t+1} \right) = \\ & \sum_{t=0}^{T-1} u \left(\sum_{i=1}^{N_t} \left(\bar{x}_{i,t} + \frac{1}{N_t} \theta^T \hat{\vartheta}_{i,t} \right) r_{i,t+1} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

as vantagens observadas por Brandt (2010) sobre os modelos que dependem das esperanças e variâncias dos retornos são separadas em três. A primeira, permite que um problema de otimização com um grande número de ativos seja feito, obtendo uma dimensão do vetor de parâmetros baixa. A segunda vantagem é que se tem um portfólio menos extremista do que outras aplicações convencionais, por estar menos disposto a maximização dos erros e de *overfitting*, pois se estima um portfólio inteiro a partir de algumas características. A terceira vanta-

gem é que, implicitamente, se leva em conta a dependência dos retornos esperados, variância, covariância, e outros momentos de maior ordem das características dos ativos em como as diferenças nesses momentos afetam a utilidade esperada dos retornos.

Outra vantagem, além das três citadas acima, é que pode-se realizar uma aproximação da utilidade esperada do investidor com uma expansão de série de Taylor ao redor do retorno esperado do portfólio $E[r_{p,t+1}]$, mais explicitamente:

$$\begin{aligned}
 E(u[r_{p,t+1}]) &\approx u(E[r_{p,t+1}]) + \\
 &\quad \frac{1}{2}u''(E[r_{p,t+1}])E[(r_{p,t+1} - E[r_{p,t+1}])^2] + \\
 &\quad \frac{1}{6}u'''(E[r_{p,t+1}])E[(r_{p,t+1} - E[r_{p,t+1}])^3] + \dots,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

logo, o investidor se importa com todos os momentos da distribuição dos retornos do portfólio.

2.1.1 Calculando os retornos

Seguindo a linha de raciocínio dada pela equação (2.2),

$$\begin{aligned}
 \max_{\theta} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} u(r_{p,t+1}) &= \sum_{t=0}^{T-1} u \left(\sum_{i=1}^{N_t} x_{i,t} r_{i,t+1} \right) = \\
 &\quad \sum_{t=0}^{T-1} u \left(\sum_{i=1}^{N_t} \left(\bar{x}_{i,t} + \frac{1}{N_t} \theta^{\top} \hat{\vartheta}_{i,t} \right) r_{i,t+1} \right),
 \end{aligned}$$

pode-se definir o vetor dos retornos como feito em Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009), onde o portfólio modelo seguirá uma estratégia $1/N$ (igualmente ponderada) somado a um componente linear de características (que por enquanto serão descritas como $car1$, $car2$, $car3$, ..., $carN$). Logo o retorno será:

$$\begin{aligned}
r_{p,t+1} &= r_{m,t+1} + \theta_{car1} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{1}{Q_t} car1_{i,t} \right) r_{i,t+1} \\
&\quad + \theta_{car2} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{1}{Q_t} car2_{i,t} \right) r_{i,t+1} \\
&\quad + \theta_{car3} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{1}{Q_t} car3_{i,t} \right) r_{i,t+1} \\
&\quad + \dots + \theta_{carN} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{1}{Q_t} carN_{i,t} \right) r_{i,t+1} \\
r_{p,t+1} &= r_{m,t+1} + \theta_{car1} r_{car1,t+1} + \theta_{car2} r_{car2,t+1} \\
&\quad + \theta_{car3} r_{car3,t+1} + \dots + \theta_{carN} r_{carN,t+1},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

portanto, para encontrar o peso do portfólio em cada ativo individualmente devemos multiplicar o coeficiente θ pela sua respectiva característica.

Como medida de comparação, se o mesmo problema fosse trazido para o paradigma de Markowitz, teríamos sérios problemas quanto à proporcionalidade que ele tomaria, pois isto implicaria em estimar para cada data t um grande número de N_t retornos esperados condicionais e $(N_t^2 + N_t)/2$ variâncias e covariâncias condicionais, aumentando não só o tempo necessário para computar os resultados como a proporção do erro embutido na análise. Além de garantir a positividade definida da matriz de variância e covariância, que também se torna outro problema dado que o número de momentos aumenta com o aumento do número de ativos. Quando usamos um portfólio modelo (sendo ele igualmente ponderado ou algum outro) o retorno do componente linear pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
r_{p,t+1} &= \sum_{i=1}^{N_t} x_{i,t} r_{i,t+1} = \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_t} (\bar{x}_{i,t} + \theta^T x_{i,t}/N_t) r_{i,t+1} = r_{m,t+1} + r_{a,t+1},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

no qual o problema toma a forma resultante da maximização da utilidade do investidor da soma dos retornos esperados do portfólio modelo e do administrado.

2.1.2 Inferência

A estimação $\hat{\theta}$ do modelo proposto por Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009), feito pela resolução do problema de otimização descrito pela equação (2.2), tendo suas condições de primeira ordem satisfeitas é representada por:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} h(r_{t+1}, x_t; \theta) \equiv \frac{1}{T} u'(r_{p,t+1}) \left(\frac{1}{N_t} \hat{x}_t^\top r_{t+1} \right) = 0, \quad (2.6)$$

que, de acordo com o autor, pode ser interpretado como método dos momentos. Sendo assim, remete ao artigo de Hansen (1982) sobre propriedades dos métodos dos momentos para grandes amostras, onde sua matriz de covariâncias assintótica tem a seguinte representação:

$$\Sigma_\theta \equiv \text{AsyVar}[\hat{\theta}] = \frac{1}{T} [G^\top V^{-1} G]^{-1}, \quad (2.7)$$

sendo

$$G \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial h(r_{t+1}, x_t; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} u''(r_{p,t+1}) \left(\frac{1}{N_t} \hat{x}_t^\top r_{t+1} \right) \left(\frac{1}{N_t} \hat{x}_t^\top r_{t+1} \right)^\top, \quad (2.8)$$

assim V representa um estimador consistente da matriz $h(r, x; \theta)$ de covariância. Então, quando a especificação é feita corretamente e assumindo não correlação das utilidades marginais a estimação de V toma a seguinte forma:

$$V = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} h(r_{t+1}, x_t; \hat{\theta}) h(r_{t+1}, x_t; \hat{\theta})^\top. \quad (2.9)$$

2.1.3 Restrições aos pesos

Uma prática comum tratando-se da otimização de portfólios é impor restrições quanto aos limites dos pesos, representando estratégias de negociação presentes em práticas reais, quando se impõe que não haverá vendas a descoberto, assim retirando a possibilidade de haverem pesos negativos nos portfólios. Limitando assim a variação do posicionamento do portfólio, diminuindo custos de administração e permitindo que o otimizador busque outro caminho para maximizar a função utilidade.

No caso, Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009), cita que uma maneira simples para tal tipo de restrição é a de truncar o valor dos pesos em zero, assim não os impossibilitamos que variem entre zero e um, garantindo a positividade dos pesos:

$$x_{i,t}^+ = \frac{\max[0, x_{i,t}]}{\sum_{j=1}^{N_t} \max[0, x_{j,t}]}. \quad (2.10)$$

Essa alternativa, porém, possui suas limitações quanto ao conjunto ótimo de possibilidades que a abordagem da política paramétrica traça quando maximiza a função utilidade, pois impõe transformações nos pesos ótimos encontrados para uma política de negociação com possibilidades de operar vendido posteriormente a otimização. Uma alternativa para lidar com restrições de venda a descoberto surge com a pesquisa de Medeiros, Passos e Vasconcelos (2014), que modificam parte do problema de otimização da PPP. Somando ao problema de otimização um contingente de penalização $\alpha > 1$, que força o valor de minimização do otimizador a manter-se dentro do limite restritivo e a buscar a solução ótima com valores do portfólio entre zero e um, mais explicitamente:

$$\text{penalizador} = \alpha \sum_{i=1}^{N_t} |x_{i,t}^{>r^*}|, \quad (2.11)$$

onde o somatório acontece sobre todos os pesos que são maiores, em valores absolutos, que r^* ; no caso em questão quando algum dos pesos da carteira possuir sinal negativo (descrito também por $r^* > 0$) o penalizador também assume valor acima de zero, punindo diretamente a função utilidade que está sendo maximizada. Assim, o problema passa a ser definido antes de se procurar os pesos ótimos, fazendo com que a política procure a melhor maneira de respeitar as condições de otimalidade e de restrições impostas quanto a possibilidade de venda a descoberto.

Tal abordagem permite uma visão interessante quando se espera otimizar a função utilidade. Que é quando é a de se existir a possibilidade de um "grau de punibilidade", onde o controle do contingente α exerce domínio sobre a intensidade da força do apenamento da função utilidade, e assim, dependendo do valor escolhido, posições de venda a descoberto seriam escolhidas em situações que realmente valeriam a pena sobre a ótica da função utilidade (o que não se aplica ao caso em questão, onde não houve tolerância quanto a posições de venda a descoberto).

2.1.4 Quanto à função objetivo

A construção do modelo deixa possibilidades para várias funções utilidades diferentes, contemplando diferentes tipos de aspectos que podem ser incorporados na função, desde que estes atendam a possibilidade de existência de uma única solução. Sendo assim, abordagens que possuam caráter comportamental, aversão a perda, aversão a desapontamento, funções que se orientam a melhorar as práticas do portfólio como maximização de algum índice, controle de perdas e até mesmo que mantenham o valor em risco, podem ser adequadas ao problema facilmente, devido a flexibilidade que a função utilidade tem na

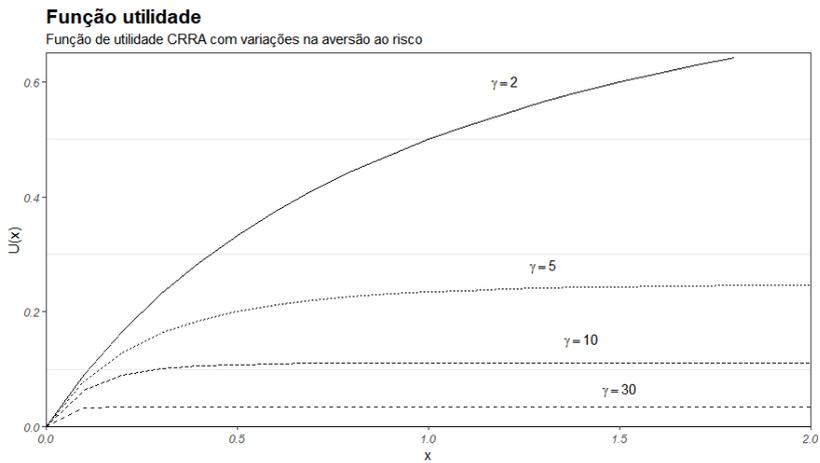
organização do modelo matemático por trás da política paramétrica.

Em todos os casos, Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) utilizam a função CRRA,

$$u(r_{p,t+1}) = \frac{(r_{p,t+1})^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (2.12)$$

onde γ é positivo para agentes avessos ao risco, a função possui boas propriedades para demonstrar valor econômico para um agente tomador de decisão, assim como dispõe de diferenças contínuas que permitem a otimização de algoritmos através de análise do Hessiano além de levar em consideração para momentos de ordem maior que a segunda como a assimetria e a curtose. Geralmente, trabalhos sobre a PPP utilizam a função de utilidade CRRA, como o caso de Barahona et al. (2012) e Ergemen, Taamouti et al. (2015). A análise será feita sobre quatro diferentes índices de aversão ao risco γ , sendo 2, 5, 10 e 30 os seus valores; isso nos permite mantermos a função em seu formato exposto como na equação 2.12 tanto para valores pequenos de aversão ao risco quanto para valores extremos (aqui tomado como 30). A aversão ao risco mensura a quantia de risco ao qual o investidor está interessado em incorrer, no caso apresentado, quanto menor o índice, menor a aversão do investidor a estratégias que o expõe ao risco, enquanto que no caso contrário, aumentando o índice, também aumenta-se a propensão do investidor em recusar posicionamentos mais arriscados, que buscam maior margem de retorno.

Figura 1: Função utilidade CRRA



Fonte: Elaboração própria.

3 POLÍTICAS BASEADAS NO PARADIGMA DE MÉDIA-VARIÂNCIA

3.1 O PROBLEMA DE MÉDIA-VARIÂNCIA DE MARKOWITZ

Poucos anos atrás, em uma versão comemorativa do aniversário do paradigma de Markowitz, Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) fazem uma revisão do assunto expondo as práticas que circulam talvez a estratégia de otimização de portfólio mais conhecida nos tempos modernos. Para explicar o conjunto equacional do modelo matemático, o autor toma um universo de N ativos A_1, A_2, \dots, A_N , seus retornos são dados por r_1, r_2, \dots, r_N , onde se utiliza r como sendo o vetor destes retornos, $r = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$. Representa-se um portfólio de ativos desse universo N como $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$, onde o portfólio é tratado como sendo a alocação de recursos entre cada um dos ativos, ou seja, ω_i refere-se à quantia investida no ativo i . Então, o retorno do portfólio, denotado por r_p , é dado pela combinação da quantia investida em cada ativo i com seu respectivo retorno,

$$r_p(\omega) = r_1\omega_1 + \dots + r_n\omega_n = \sum_{i=1}^N r_i\omega_i = \omega^T r. \quad (3.1)$$

Denota-se σ_i como desvio-padrão do i -ésimo retorno, r_i . ρ_{ij} denota a correlação entre o ativo A_i e A_j para um $i \neq j$. A matriz de covariâncias dos retornos, Σ , é semi-definida positiva e simétrica $n \times n$, representada pelo seguinte:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m,1} & \sigma_{m,2} & \cdots & \sigma_{m,n} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ (para o caso de $i \neq j$); $\sigma(\omega)$ será a volatilidade do portfólio, utilizada como medida de risco. Para um

dado portfólio ω , pode-se computar sua variância e desvio-padrão,

$$V(\omega) = \omega^\top \Sigma \omega,$$

$$\sigma(\omega) = \sqrt{\omega^\top \Sigma \omega}.$$

Onde μ é identificado como o vetor dos retornos esperados.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo $\mu_i = E(r_i)$ para todo $1 = i, \dots, n$.

O problema de otimização de média-variância irrestrito (MeVI), portanto, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \underset{\omega_t}{\text{maximizar}} && \omega^\top \Sigma \omega - \frac{1}{\lambda} \mu^\top \omega \\ & \text{sujeito a} && \omega^\top e = 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

o problema pode ser reformulado para adaptar-se a restrição de venda a descoberto adicionando as restrições do problema $\omega_i \geq 0$, que passa a ser considerado média-variância restrito (MeVR). λ representa a aversão ao risco do investidor, determinando a troca entre o risco e o retorno esperado do portfólio.

A ideia pode ser expandida facilmente para uma versão que se adapta a um investidor totalmente avesso ao risco ao ponto de desconsiderar o ponto máximo dos retornos esperados. O caso de mínima-variância irrestrito (MiVI) acontece então quando $\lambda \rightarrow \infty$, e assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{\omega_t}{\text{minimizar}} && \omega^\top \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} && \omega^\top e = 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

as restrições quanto a venda a descoberto aqui funcionam do mesmo jeito e a mínima-variância restrita (MiVR) acontece quando incluímos a restrição de positividade aos pesos $\omega_i \geq 0$.

Em Best e Grauer (1991), a sensibilidade do problema de média-variância é posta em evidência. Os autores mostram que a análise computacional desenvolvida com base no método apresenta sensibilidade dos pesos do portfólio até 14.000 vezes a magnitude da elasticidade média de qualquer variável de retorno dentro do portfólio, ou seja, pequenas variações nas médias dos ativos geram grandes mudanças na composição da carteira de investimentos. Destaca-se que a falta de atrito com os mecanismos reais (representado pela falta de restrições, por exemplo) permite operações voláteis no espectro de possibilidades da carteira.

Tanto a sensibilidade dos pesos do portfólio ótimo, quanto a baixa qualidade da performance para observações fora da amostra são expostos por Jorion (1985), o qual analisa os problemas relacionados ao método de média-variância e, observa também, que uma estratégia simples como a igualmente ponderada possui bons resultados em comparação com a abordagem de Markowitz.

Jobson e Korkie (1981) comparam as duas estratégias, ressaltando que a dependência dos dados da amostra contribui para que a performance do modelo de média-variância seja menor que a estratégia igualmente ponderada. Nas palavras do autor:

In conclusion, traditional implementation of the Markowitz diversification strategy is categorically a bad strategy. It is important to remember that this is caused by the unreliability of the estimates obtained from historical data of reasonable size and not from any intrinsic error in the Markowitz-Sharpe theory. Jobson e Korkie (1981), p.73.

Michaud (1989) destaca um problema relacionado à otimização de média-variância, apresentando evidências de que uma estratégia igualmente ponderada consegue alcançar resultados com grau de signi-

ficância maior do que a otimização criada por Markowitz, precisamente:

The fundamental problem is that the level of mathematical sophistication of the algorithm is far greater than the level of information in the forecasts. M-V optimizers operate in such a manner that they magnify the errors associated with the input estimates. Without careful problem definition derived from sound investment judgment and sophisticated adjustment of the inputs, M-V optimization may often do more harm than good. Consequently, the Markowitz Optimization Enigma—a widespread indifference to the technology by many investment managers—is easily rationalized in many cases. Michaud (1989), p. 53.

Logo, o problema de média-variância possui grau de sofisticação maior do que a qualidade das informações que geralmente são utilizadas, ocasionando no processo indesejável de maximização dos erros associados às informações relativas do problema, tal explicação referida por Michaud:

Markowitz M-V optimization technology, whether applied to equity portfolio management or asset allocation studies, is not easy to use properly. Reliable evidence suggests that equal weighting is likely to significantly outperform unconstrained M-V optimization in many cases. Michaud (1989), p. 53.

3.2 ENCOLHENDO A MATRIZ DE COVARIÂNCIA

Enquanto uma abordagem bem consolidada na literatura, a estratégia de média-variância desenvolvida por Markowitz (1952), assim como outras que se pautam na necessidade de estimação de uma matriz de covariâncias, funcionam bem para uma pequena amostra de ações, porém, quando aumentamos a quantia de erro embutido na análise aumentando o tamanho do problema, também aumentam assim os vários

problemas já apresentados; aparecendo nos mais diversos formatos¹. Uma das soluções já apresentadas que ajudam a remediar o problema é o encolhimento da matriz de covariâncias, que acontece basicamente quando melhoramos a estimativa da matriz de covariâncias original combinando-a com outras informações.

O caso em que estamos lidando reflete exatamente o problema documentado na literatura em que uma grande base de dados (especialmente onde os retornos históricos são menores do que a quantia de ativos). Ledoit e Wolf (2003) chamam de encolhimento dos extremos em torno do centro.

A estrutura do encolhimento de acordo com Ledoit e Wolf (2003) considera uma matriz de covariância da amostra S e um estimador estruturado denotado por F , e procura uma relação entre os dois através de uma combinação linear $\delta F + (1 - \delta)S$, sendo δ um número entre 0 e 1. δ é denominado como constante de encolhimento e funciona como o peso do balanceamento entre os estimadores, combinando os extremos.

Obtemos então o estimador de encolhimento,

$$S^* = \delta F + (1 - \delta)S, \quad (3.6)$$

a intensidade δ de encolhimento define o quão próximo o estimador de encolhimento S^* fica do estimador não viesado usualmente utilizado S , ou de um estimador estruturado da matriz de covariância F . A definição da intensidade de encolhimento pode ser feita de diferentes maneiras. Ledoit e Wolf (2003) sugerem uma forma analítica para estimar δ através da amostra, de maneira que ocorra a minimização do erro de S^* . O δ ótimo que surgiria a partir disso seria aquele que minimizasse a verdadeira matriz de covariâncias dos seus estimadores, e de acordo com os autores esse valor ótimo δ^* assintoticamente se comportaria como uma constante ι em razão de T.

$$\iota = \frac{\pi - \rho}{\varepsilon},$$

¹Isso tudo é bem documentado em Jobson e Korkie (1980) e Michaud (1989)

sendo π a soma assintótica das variâncias que fariam parte da matriz de covariâncias, ρ a soma assintótica das covariâncias que fariam parte da matriz alvo e ε o erro ou viés amostral. Ledoit e Wolf (2003) explica que evidentemente não se possui o verdadeiro ι , logo existe a necessidade de estimá-lo através de estimadores consistentes. Schäfer e Strimmer (2005) mostra que o estimador ótimo da intensidade é dado por:

$$\hat{\delta}^* = \iota = \frac{\sum_{i \neq j} \text{Var}(s_{ij}) - \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{s_{jj}}{s_{ii}}} \widehat{\text{Cov}}(s_{ii}, s_{ij}) + \sqrt{\frac{s_{ii}}{s_{jj}}} \widehat{\text{Cov}}(s_{jj}, s_{ij}) \right\}}{\sum_{i \neq j} (s_{ij} - \sqrt{s_{ii}s_{jj}})^2},$$

sendo s_{ij} os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariâncias da amostra caso $i \neq j$ e $s_{ii} = s_{jj}$ os elementos dentro da diagonal principal da matriz de covariâncias amostral caso $i = j$. Ledoit e Wolf (2003) ainda utilizam uma restrição de $\hat{\delta}^{**} = \text{Max}(0, \text{Min}(1, \hat{\delta}^*))$ imposta para amostras finitas, pois de acordo com eles, $\hat{\delta}^*$ pode exceder com uma pequena chance os valores entre 0 e 1.

3.3 ESTRATÉGIAS SIMPLÓRIAS

3.3.1 Ponderando igualmente

A estratégia igualmente ponderada (*equally weighted*) ou "1/N" ignora completamente os dados, não requer nenhum tipo de estimação ou otimização. Trata-se de uma diversificação simples de investimento entre todos os ativos da amostra, $\omega_t^{IP} = 1/N$, sendo igualmente ponderado (por facilidade trataremos futuramente igualmente ponderado por IP), não se estima μ_t e Σ_t , porém respeita-se a restrição de que $\mu_t \propto \Sigma_t 1_N$ para todo t , implicando que o risco total seja proporcional ao retorno esperado, ao invés do sistemático, como explicado em DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007).

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007) expõem que para as sete bases de dados, entre os 14 modelos estudados, não foi observado al-

gum que constantemente apresentasse índice de Sharpe, *turnover* ou *certainty-equivalent return* melhor do que os apresentados pela estratégia "1/N" fora da amostra.

Resultados similares também são documentados em Bloomfield, Leftwich e Jr (1977), onde evidencia-se que portfólios ótimos de média-variância baseados na amostra não superam um igualmente ponderado e em Jorion (1991), o qual expõe que uma performance tanto para a estratégia com pesos iguais, quanto uma com pesos atrelados ao valor de mercado das empresas possui similaridades com uma otimização de média-variância com métodos de encolhimento (*shrinkage*) Bayesianos.

Kirby e Ostdiek (2012) observam que o modelo de média-variância no artigo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007) sofre com um aumento do risco de estimação, que resulta em um grande aumento no *turnover* da estratégia mesmo quando se inclui o custo sobre a transação, tornando-se assim incomparável as duas estratégias. Sugerem então, mudanças na formulação do problema de duas maneiras, uma rebalaceando os pesos do portfólio conforme mudanças na matriz de covariância condicional dos retornos (*volatility timing*) e a outra reduzindo a tendência do modelo de obter casos de pesos extremos para o portfólio quando retiradas as informações de valores fora da diagonal principal da matriz de covariância (*Reward-to-Risk Timing*).

3.3.2 Ponderando pelo valor

Como alternativa a outra técnica simplória que funciona como referência e é bastante utilizada é a ponderação dos pesos do portfólio pelo valor de mercado das firmas (*value-weighted*), disseminado na literatura² como estratégia utilizada para comparação de modelos e que será, também, objeto de comparação neste trabalho. Com uma proposta simples de controlar o investimento pela quantia de valor de mercado atribuído a cada período pelas empresas, ela funciona perfeitamente

²Jorion (1991), DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007), Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) e DeMiguel et al. (2017) utilizam e possuem evidências de sua eficácia.

como comparativo da qualidade da estratégia igualmente ponderada.

3.4 ALTERNATIVAS DO PARADIGMA

3.4.1 Volatilidade no tempo

Uma classe de portfólios ativamente administrados, apresentada por Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) (também em Fleming, Kirby e Ostdiek (2003) pelo mesmo autor), que leva em consideração a matriz de covariância condicional estimada dos retornos, apresenta resultados robustos a erros de estimação e custos de transação superando outras estratégias estáticas incondicionalmente eficientes com o mesmo retorno esperado, denominado *volatility timing*.

Kirby e Ostdiek (2012) reformulam o problema em busca de manter a taxa de recompra de ativos (*turnover*) baixa ao mesmo tempo em que se evita a venda a descoberto (*short-sales*), propondo assim uma estratégia, sem métodos de otimização envolvidos ou inversão de matrizes, com regulagem da volatilidade no tempo (daí o nome do artigo seminal *volatility timing*) e dos pesos ajustáveis, e sem a existência de pesos negativos.

A abordagem se baseia nos resultados da matriz de covariância dos retornos estimada $\hat{\Sigma}$, nesse caso, considerando uma situação em que todas as informações fora da diagonal principal sejam zero (retornos não correlacionados entre si), os pesos podem ser dados como,

$$\hat{\omega}_{i,t} = (1/\hat{\sigma}_{i,t}) / \sum_{i=1}^N (1/\hat{\sigma}_{i,t}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.7)$$

assim N varre todo o espaço dos ativos utilizados, t os períodos do tempo da análise e $\hat{\sigma}_{i,t}$ a variância condicional do ativo i no tempo t .

Na prática, esperar que os ativos não possuam qualquer tipo de correlação pode ser improvável. Kirby e Ostdiek (2012) explicam que essa imposição é feita justamente sobre o olhar de se melhorar os resultados dos pesos estimados, pois a construção da função não

permite a existência de pesos negativos, enquanto que se os elementos fora da diagonal principal apresentassem algum valor diferente de zero implicaria na existência de pesos negativos para alguns ativos. E como a existência de pesos negativos é mais sujeita a alocações extremas, a imposição dos valores fora da diagonal principal como zero é uma maneira de se fazer um encolhimento na quantia de valores estimados, e essa redução dos valores estimados superaria a perda de informação retirada.

A alteração que nos permite controlar a resposta dos pesos devido às mudanças dos retornos acontece quando incluímos η na equação da seguinte forma:

$$\hat{\omega}_{i,t} = (1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta / \sum_{i=1}^N (1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta, i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

o que nos permite controlar a cada período do tempo a agressividade dos reajustes da estratégia. Sendo $\eta \geq 0$ a quantia de adaptação dos pesos é controlada em relação as mudanças na variância dos retornos.

A escolha do valor de η resulta em diferentes regras de portfólio. Quando $\eta \mapsto 0$ e quando $\eta \mapsto \infty$ representam os casos extremos, com resultados totalmente diferentes um do outro: no primeiro caso, a equação colapsaria para uma estratégia igualmente ponderada, enquanto no último alocaria todo o peso do portfólio para o ativo que possuísse menor volatilidade dos retornos. De acordo com o autor, uma maneira de se conter a perda de informação causada por ignorar as correlações entre os ativos seria através do controle de como os pesos do portfólio respondem a mudanças na volatilidade. No presente trabalho trataremos apenas do caso básico com $\eta = 1$, dando jus a sigla VoT1.

3.4.2 Retorno ao risco no tempo

Como a estratégia apresentada anteriormente ignora os retornos esperados condicionais dos ativos, ao incorporarmos estes na equação temos uma nova maneira de melhorar a performance da qualidade dos

pesos do portfólio, novamente nos colocando no mesmo cenário da equação (3.7), onde os termos fora da diagonal principal são iguais a zero, temos,

$$\hat{\omega}_{i,t} = (\hat{\mu}_{i,t}/\hat{\sigma}_{i,t}) / \sum_{i=1}^N (\hat{\mu}_{i,t}/\hat{\sigma}_{i,t}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.9)$$

onde $\hat{\mu}_{i,t}$ são os retornos estimados das médias condicionais dos retornos do ativo i no tempo t .

Kirby e Ostdiek (2012) explicam sobre como tipicamente a estimação dos retornos esperados é feita com maior imprecisão do que a variância, e como isso implica em um maior risco de erros de estimação. Além disso, retornos negativos ajudariam a se produzir posições extremas em alguns ativos, podendo-se modificar a equação 3.9 para que o suposto investidor concentre-se apenas nos ativos com retorno maiores ou iguais a zero, eliminando os demais, sendo assim,

$$\hat{\omega}_{i,t} = (\hat{\mu}_{i,t}^+/\hat{\sigma}_{i,t}) / \sum_{i=1}^N (\hat{\mu}_{i,t}^+/\hat{\sigma}_{i,t}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.10)$$

onde $\hat{\mu}_{i,t}^+ = \max(\hat{\mu}_{i,t}, 0)$, que pode ser descrito como se o otimizador estivesse excluindo o ativo com média condicional dos retornos menor do que zero das possibilidades de investimento, vendendo sua posição no ativo i do instante t referido.

O mesmo η é incorporado na equação como a medida de agressividade de ajuste dos pesos, resultando na seguinte equação:

$$\hat{\omega}_{i,t} = (\hat{\mu}_{i,t}^+/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta / \sum_{i=1}^N (\hat{\mu}_{i,t}^+/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta, i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

as mesmas consequências de quando η se aproxima do infinito ou zero se repetem aqui. O retorno ao risco no tempo, tratado pela sigla RRT e utilizado na análise, também segue o mesmo índice de agressividade utilizado pela volatilidade no tempo, com $\eta = 1$.

3.4.3 Retorno ao risco Beta

Uma alternativa que nos permite incluir uma medida de relacionamento entre o primeiro e o segundo momento nos modelos apresentados é a inclusão da variável beta de mercado do modelo CAPM:

$$\hat{\omega}_{i,t} = (\beta_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta / \sum_{i=1}^N (\beta_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta, i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.12)$$

no qual $\beta_{i,t}^+ = \max(\beta_{i,t}, 0)$ representa o beta de mercado maior ou igual a zero do ativo i no instante de tempo t . A ideia do autor com essa formulação é de se diminuir a variação de amostragem dos pesos enquanto permite-se incorporar fatores de risco como determinante da alocação.

Aos mesmos passos das outras abordagens alternativas ao paradigma de Markowitz, o Retorno ao risco Beta (Retorno ao risco Beta), tratado pela sigla RRTBeta, também se utiliza da versão básica do índice de agressividade, sendo este $\eta = 1$.

3.5 A ABORDAGEM GENERALISTA

3.5.1 Mínima-variância restrita a norma

Enquanto o encolhimento dos momentos dos retornos dos ativos é uma ferramenta eficiente para lidar com erros quanto ao risco de estimação, DeMiguel et al. (2009) apresentam uma maneira de usar a mesma técnica, porém, dessa vez no vetor de pesos do portfólio. É um modelo similar aos de mínima e média-variância que já foram apresentados, mas, dessa vez, restringindo a variação dos pesos de cada ativo a sua norma (soma do desvio absoluto) conforme um limiar, δ como $\|w\|_1 = \sum_{i=1}^N |w_i|$, onde $\sum_{i=1}^N |w_i| \leq \delta$.

A imposição do limiar δ de variação dos pesos é o que diferencia o modelo de mínima-variância tradicional da proposição do autor

(originalmente conhecido por *The 1-Norm-Constrained Portfolio*), pois se $\delta = \infty$ (nenhuma restrição imposta) a solução ótima se mantém a mesma. Agora, a imposição de uma restrição no vetor de pesos pode ser considerada como uma técnica de encolhimento da regra irrestrita para o modelo de mínima-variância. A ideia de utilização dessa versão encolhida³ visa uma troca entre a redução da variância dos erros de estimação pela introdução de viés nos seus resultados.

O modelo tem a seguinte formalização:

$$\begin{aligned} & \underset{\omega}{\text{minimizar}} && \omega^\top \hat{\Sigma} \omega \\ & \text{sujeito a} && \omega^\top e = 1, \\ & && \|\omega_t - \omega_{0t}\|_1 \sum_{i=1}^N |\omega_{t,i} - \omega_{0t,i}| \leq \delta. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como a finalidade não é a avaliação dos diferentes formatos dessa política, será considerado apenas o caso em que $\delta = 2.5\%$, diferentemente do artigo de DeMiguel, Nogales e Uppal (2014) que utiliza tanto δ baseado em 2.5%, como 5% e 10% (sendo tratado então como MiVR2.5).

³Ver James e Stein (1961).

4 METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

4.1 ÍNDICES E TESTES

4.1.1 Índices de avaliação de carteiras

O rebalanceamento dos pesos de cada portfólio testado entre cada período do tempo nos permite visualizar dois momentos distintos das estratégias analisadas, o momento que antecede a mudança e o momento após esta. Portanto, o que acontece é o reflexo direto da mudança decorrente das novas informações inseridas do novo período de tempo, que faz a reavaliação de todo o perfil do portfólio, e para que se meça o desempenho, serão avaliados diferentes índices.

Retorno bruto, retorno líquido, *turnover* e variância dos retornos são as medidas estatísticas mais apropriadas e utilizadas¹ em questão. O retorno bruto então, é calculado da seguinte maneira:

$$R_{bruto,t} = (w_t)^\top R_{t+1}, \quad (4.1)$$

sendo w_t o peso dado ao ativo no tempo t depois do rebalanceamento; e R_{t+1} é o vetor de retornos no tempo $t + 1$.

De maneira análoga, porém, agora avaliando o impacto dos custos de transação sobre as políticas, o retorno líquido deduz do retorno obtido as taxas dos respectivos movimentos nos pesos e alocações feitos ao longo dos meses, precisamente:

$$R_{liquido,t} = \left(1 - \xi \sum_{j=1}^N \underbrace{(|w_{j,t} - w_{j,(t-1)}|)}_{rotatividade} \right) R_{bruto,t}, \quad (4.2)$$

onde $w_{j,t}$ e $w_{j,t-1}$ são os pesos do portfólio antes do reajuste e após,

¹DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007) são um de vários exemplos utilizados.

respectivamente. Note que a diferença entre o retorno bruto e o líquido fica a cargo da quantia de rotatividade (recompra ou *turnover*) de ações durante o período amostral.

Por sua vez, a rotatividade é calculada da seguinte maneira:

$$\text{Rotatividade} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{x=1}^N (|w_{x,t} - w_{x,(t-1)}|). \quad (4.3)$$

Ademais a média e a variância dos retornos são calculadas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$E[R] = \frac{1}{T} \sum_{g=1}^T R_g, \quad (4.4)$$

$$V[R] = \sum_{k=1}^T \frac{(R_k - E[R])^2}{T - N}. \quad (4.5)$$

Uma medida popularmente conhecida é o índice de Sharpe², devido a extensa literatura já escrita sobre o assunto e por se tratar de um medidor robusto da qualidade comparativa dos resultados obtidos.³ O índice é calculado da seguinte forma:

$$I.S = \frac{E[R]}{\sigma[R]}, \quad (4.6)$$

no qual $\sigma[R]$ é considerado o desvio-padrão da variância dos retorno e, com isso, consegue-se mensurar o risco ajustado ao retorno do portfólio e se comparar quantas unidades de risco a mais retornariam em retorno. Diferentemente do outro índice, aqui estamos tratando de qualidade do portfólio e dos meios que foram utilizados para gerar os resultados do portfólio, e não na quantia de utilidade pro investidor gerada. É interessante se atentar que outros artigos utilizam esse indicador como forma de notar se os retornos são bem calibrados com o risco corrido

²Sharpe (1994).

³Exemplos interessantes da sua utilização podem ser vistos em Feng (2014) e Croessmann (2017).

pela regra utilizada.

Kan e Zhou (2007) não acreditam que esse índice seja apropriado e apresentam a explicação de que este é independente da alavancagem do portfólio e, sendo assim, pesos que não forem ótimos no ativo livre de risco não influenciariam o índice de Sharpe do portfólio. Porém, no caso em questão deste trabalho, a impossibilidade de alavancagem do investidor com a restrição imposta aos pesos (*no short-selling*) nos protege do problema, pois todas as regras estarão sobre a mesma restrição.

4.1.2 Teste de hipóteses robusto

Além da comparação visual entre os índices, a literatura trata com atenção a comparação de estratégias de investimentos com base no índice de Sharpe (tratado pela sigla I.S) e da variância dos retornos das políticas estimadas.

Como as verdadeiras quantias não são observáveis, a variância e o índice de Sharpe são estimados e comparados através dos retornos históricos utilizando-se testes de hipóteses. O problema dessa análise usualmente acontece com séries temporais de natureza financeira, tanto para o índice de Sharpe quanto para a variância, que dificilmente conseguem atender as hipóteses básicas para a prática desses testes (como possuir uma distribuição de origem de uma normal-bivariada com zero de correlação e independência intertemporal).

Soluções válidas para os problemas em questão já foram abordadas no passado⁴ com Andrews (1991) e Andrews e Monahan (1992) que utilizam um estimador consistente para autocorrelação e heterocedasticidade. O problema se dará na mesma abordagem que Ledoit e Wolf (2008) que se embasou na notação de Jobson e Korkie (1981), Memmel (2003) para avaliar tanto o índice de Sharpe quanto a variância. De acordo com o autor, a abordagem utilizada para se computar o estimador HAC possui boas propriedades assintóticas, porém não as

⁴Ledoit e Wolf (2008) e Ledoit e Wolf (2011) sugerem métodos alternativos e são boa literatura a respeito para lidar com problemas parecidos utilizando *bootstrap*.

mantém para amostras finitas.

O teste de hipóteses comparativo entre os índices de Sharpe dos diferentes portfólios estudados é feito a fim de procurar se existe informação relevante no modelo proposto que o diferencie de uma abordagem simples (no caso o modelo ao qual sempre será feito como teste é o de uma política simplória igualmente ponderada), mais explicitamente a hipótese nula e a alternativa são:

$$\begin{cases} H_0 & \text{A diferença dos índices de Sharpe} = 0; \\ H_A & \text{A diferença dos índices de Sharpe} \neq 0. \end{cases}$$

O teste é aplicado sobre os índices de sharpe calculados tanto com base nos retornos brutos quanto nos retornos líquidos (estes são calculados em 50, 25 e 10 pontos base).

O mesmo procedimento de inferência HAC também é feito sobre o logaritmo da variância para testar a sua diferença, explicitamente:

$$\begin{cases} H_0 & \text{A diferença do logaritmo da variância} = 0; \\ H_A & \text{A diferença do logaritmo da variância} \neq 0. \end{cases}$$

4.2 CUSTOS DE TRANSAÇÃO

A inclusão de custos de transação tem seu papel quanto a mostrar a resistência dos modelos utilizados a uma aplicação mais próxima da realidade possível, e como mostrado em DeMiguel, Nogales e Uppal (2014) pode ter efeitos devastadores em modelos propostos que possuem desempenho sensível a mudanças dos preços dos ativos.

O rebalanceamento entre os períodos do tempo implicará em custos de transação para o investidor representativo devido a todo tipo de alteração no posicionamento do portfólio, Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) levanta alguns exemplos que incorrem sobre essas alterações, como custos diretos, indiretos, taxas e impostos.

O custo de transação⁵ é dado por:

$$R_{liquido,t} = \left(1 - \xi \sum_{j=1}^N \underbrace{(|w_{j,t} - w_{j,(t-1)}|)}_{rotatividade} \right) R_{bruto}, \quad (4.7)$$

sendo a rotatividade representa o rebalanceamento dos pesos do tempo $t - 1$ e t . ξ representa os custos de transação proporcionais e terá papel fundamental na análise empírica subsequente, assumindo três diferentes versões, sendo eles 50, 25 e 10 pontos base, isso fornece a análise a possibilidade de se avaliar os efeitos em níveis diferentes da mesma consequência de se atribuir custos para o remanejamento de posição dos ativos.

⁵para mais detalhes, ver Hasbrouck (1991), Almgren et al. (2005), Leland (1999), Lillo, Farmer e Mantegna (2003) e Davis e Norman (1990)

5 ANÁLISE EMPÍRICA

5.1 DADOS

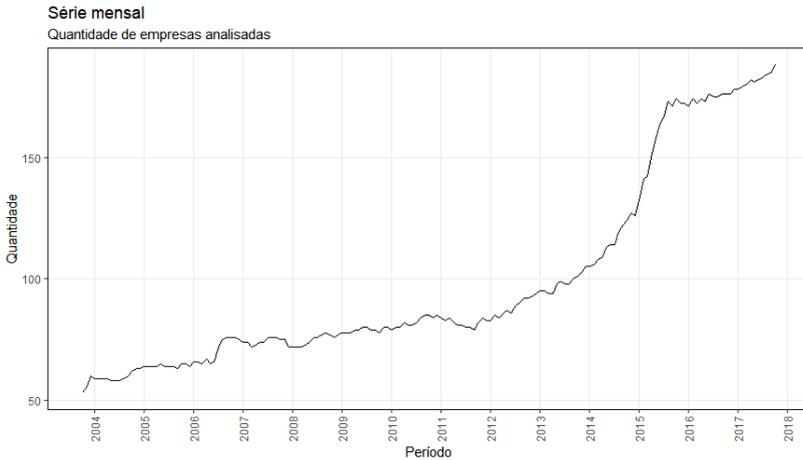
Foram retiradas informações fornecidas pelos dados históricos mensais do Economática quanto aos retornos de todas as empresas disponíveis, além das características que foram utilizadas. O período compreendido entre janeiro de 1998 até o final de 2017, atendendo ao critério de existência dos dados dentro dos períodos requisitados.

A base inicial possui 1729 empresas que participaram do mercado aberto de ações durante o período, das quais foram analisadas 273 empresas diferentes durante todo o período da amostra. Independentemente se possuíam dados contínuos durante todo o período (de 1998 até 2017), a restrição se baseou na continuidade ininterrupta de dados dentro da janela de estimação de 60 meses.

Como feito em DeMiguel et al. (2017) e Green, Hand e Zhang (2017), a base de dados passou por um processo de winsorização de cada característica, que significa o mesmo que substituir os valores extremos observados que estão acima de um limiar pelo seu último correspondente que atende a esse limiar, ou seja, valores acima (abaixo) do nonagésimo quinto (quinto) percentil foram modificados para o último valor que se encontra mais próximo e abaixo (acima) do nonagésimo quinto (quinto) percentil.

E da mesma maneira, cada característica utilizada foi padronizada, assim como em Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) e DeMiguel et al. (2017), de modo que possuísse média zero e desvio-padrão unitário. Somente dessa maneira as medidas se tornariam comparáveis e a análise não sofreria com disparates extremos desproporcionais entre cada variável utilizada, e como resultado a política paramétrica tenderia a ser mais otimista com com ativos que possuam características que apresentem medidas acima da média na análise transversal.

Figura 2: Quantidade de empresas



Fonte: Elaboração própria.

O crescimento do número de empresas pode ser observado na imagem disposta acima. É interessante observar que ao longo do tempo foram utilizadas 273 empresas diferentes. Conforme o gráfico, podemos observar em cada período quantas empresas faziam parte da amostra, que estava em constante mudança devido a existência ou não de dados naquele período em específico. É evidente que o tamanho da janela de tempo utilizada influencia diretamente nessa quantia amostral, sendo que só faziam parte da amostra empresas que possuíam informações durante todo o período de 60 meses, e caso reduzida aumentaria a quantidade de empresas e vice-versa. O início da análise acima, então, se dá durante o período de 2003 (pois como estamos começando em 1998 com 60 meses de janela, resulta em 2003) e caminha por mais outros 169 períodos até dezembro de 2017.

5.2 DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS

O alicerce da política paramétrica de portfólio recai sobre a utilização de características das firmas que desejamos utilizar ao longo

do tempo, diferentemente de Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) onde se basearam em três características básicas (valor de mercado, momento de 1 mês e o VPA/P) a aplicação se dará por 21 características que englobam informações de diferentes teorias de finanças, desde índices de mercado até de análise técnica.

- Momento = $P - P_x$

Onde:

P = Preço de fechamento;

P_x = Preço de fechamento do ativo a x meses atrás.

Indícios levantados por Jegadeesh e Titman (1993) relatam que estratégias de compra de ativos com performance lucrativa (retornos positivos no acumulado do período analisado) e venda daqueles que possuíam resultados acumulados de prejuízos apresentam resultados significativos dentro da próxima janela de tempo. A ideia é de trazer ao modelo informações quanto a qualidade dos retornos das ações das empresas além de outras não observáveis por modelos convencionais. O momento, que pode ser visto como a taxa de aceleração da mudança do preço de um ativo (também pode ser feito através do volume), é feito tomando a diferença entre o preço do ativo no momento atual e no período anterior selecionado. Antes disso, Bondt e Thaler (1985) documentaram os resultados de uma análise comportamental de investidores e suas reações sobre notícias e eventos considerados prejudiciais aos seus investimentos encontrando assim, pistas de que existem reações exageradas diante de comunicados negativos¹.

Outras evidências são dadas sobre a rentabilidade de estratégias que utilizam o momento como guia para o modelo pelo mesmo autor, como em Jegadeesh e Titman (2001), onde conseguem evidência de que estratégias voltadas a análise do momento ofereceram resultados acima da média durante a década de noventa e corroboraram com modelos de

¹Outro estudo sobre reações exageradas pode ser visto em Daniel, Hirshleifer e Subrahmanyam (1998)

finanças comportamentais que propunham que os lucros obtidos com estratégias voltadas a análise do momento aconteciam devido ao atraso de reações desmedidas dos investidores, e Jegadeesh e Titman (2011), onde os resultados indicam que ativos com o bom desempenho (em relação a rentabilidade) durante os últimos 3 a 12 meses, tendem a manter resultados bons durante os próximos 3 a 12 meses, e o contrário também é válido, pois, desempenhos ruins tendem a se manter pelo mesmo período de avaliação.

Um estudo de caso envolvendo estratégias de investimentos baseadas no momento é feito para o Brasil em Mussa et al. (2007), motivado pelo surgimento de anomalias em mercados financeiros que questionavam as hipóteses de eficiência de mercado analisando todas as empresas participantes da BOVESPA (Bolsa de Valores do Estado de São Paulo) no período de pouco mais de uma década, durante 1995 até 2006, a estratégia se baseava na mesma metodologia utilizada em Jegadeesh e Titman (1993) com resultados de portfólios com retornos acima da média e ajuda a corroborar com a possibilidade de exploração desse tipo de informação para construção de portfólios. Em outro estudo feito mais recentemente para o Brasil, Piccoli et al. (2015) tratam de investigar durante um período maior, compreendido entre 1997 e 2014, se a lucratividade de estratégias de momento são mantidas tanto em períodos de estabilidade quanto de instabilidade financeira.

O modelo presente aqui contém as três versões do índice, uma contendo um espaço temporal de 1 mês, uma de 12 meses, outra de 36 meses, com acrônimo mom_t , onde t se refere ao espaço temporal referido.

- $$VPA/P = \frac{VPA}{P}$$

Onde:

P = Preço de fechamento;

VPA = Valor patrimonial por ação.

Duas variáveis que são fáceis de mensurar são objeto de pesquisa

no artigo de Fama e French (1992), que combinam o valor de mercado juntamente com o *book-to-market* em um modelo de corte transversal que também utiliza outras características, essas mesmas são objeto de pesquisa na literatura de finanças em vários artigos, apontando que estas são boas informações relacionadas ao risco para explicar o retorno das ações. Em especial o *book-to-market* é alvo das atenções de pesquisadores desde o século passado, como em Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) que investigam a relação dos retornos de empresas americanas com o *book-to-market* e outros índices encontrando uma relação significativa para a sua explicação. Por sua vez no artigo de Chan, Hamao e Lakonishok (1991) onde também encontram uma forte relação entre essas informações, porém dessa vez com o mercado acionário japonês.

O VPA/P (tratado como *book-to-market* em artigos do gênero) é uma medida de comparação da firma entre o valor de carteira e o seu valor de mercado, sua razão serve para gerar informação se uma companhia possui sobrevalorização ou subvalorização do mercado. Rosenberg, Reid e Lanstein (1998) constroem estratégias baseadas nesse quesito, conseguindo resultados anormais para a amostra selecionada entre 1980 e 1984, sugerindo haver uma exploração de ineficiência de mercado para o período. Pouco tempo depois e adequado ao problema brasileiro, Rodrigues (2000) investiga o mercado do Brasil durante a década de 90 sobre a possibilidade de ganhos acima da média com estratégia embasada no *book-to-market* de 180 empresas. Outro artigo que trata de falar do mercado brasileiro é o de Almeida e Jr (2010), que tenta aprimorar as estimativas dos retornos esperados dos ativos através da evolução do índice tratado aqui nessa seção, tendo resultados que conversam com a hipótese de que somente o *book-to-market* mais recente dos analisados (foram analisados períodos de 12, 36 e 60 meses) é relevante para explicar os retornos.

- Volatilidade =
$$\sqrt{\frac{\sum (S.i - S.m)^2}{(n \times PPA)}}$$

Onde:

n = Número de dias dentro do período;

PPA = Periodicidade anual;

$S.i$ = Logaritmo da razão de fechamentos dos dias em t e $t - 1$;

$S.m$ = Média de todos os S_i .

É do conhecimento da área de finanças que os retornos dos ativos variam ao longo do tempo. Enquanto ótica, o mundo acadêmico pode observar a volatilidade dos retornos do mercado e a sua relação com o retorno esperado do próprio mercado, como feito, entre outros, em Campbell e Hentschel (1992) e Glosten, Jagannathan e Runkle (1993). Porém, enquanto isso acontecia, outra pergunta foi deixada de lado: Como a volatilidade agregada afeta os retornos esperados de ativos em um corte transversal?

Sabendo que a volatilidade variante no tempo de um mercado induz mudanças nas oportunidades de investimento alterando as expectativas dos retornos futuros, ou alterando a taxa de risco retorno, a volatilidade pode alterar o risco assumido ao se apostar em um mercado, já que ela representa um fator de risco e deve ser incluída em modelos de fatores. Em Ang et al. (2006), os autores investigam como a volatilidade estocástica de um mercado é precificada dentro de um modelo de corte transversal para os retornos esperados de ativos, tentando determinar o preço do fator de risco estimando o preço do risco da volatilidade agregada concluindo com evidências que a alta volatilidade possui influência nas médias agregadas dos retornos, ainda apontando que uma alta volatilidade idiossincrática de ativos relacionada ao modelo Fama e French (1993) possuem retornos abaixo da média. Assim sendo, para se levar em conta o risco de ativos com atividades instáveis, é incluído como variável relevante a volatilidade ao longo dos últimos trinta dias de cada ativo, conforme utilizado em DeMiguel et al. (2017).

- Valor de Mercado = $P_x \times A_x$

Onde:

P_x = Preço por ativo da empresa x ;

A_x = Quantidade de ativos em circulação da empresa x ;

VDM = Valor de Mercado.

O valor de mercado (*market capitalization*) é calculado através da multiplicação do número de ações da empresa em circulação pelo último preço cotado de fechamento da ação e, no caso específico, todos os ajustes de bonificações, desdobramentos, agrupamentos e reduções são considerados. Enquanto o valor de mercado reflete o preço da empresa no momento observado, ele desconsidera o valor verdadeiro da firma, podendo ela estar sobrevalorizada ou subvalorizada.

A relação do valor de mercado das firmas com o seu retorno foi objeto de estudo em Banz (1981), onde se examinou empiricamente a relação entre os retornos e o valor total de mercado de ativos que compõe a bolsa de valores de Nova Iorque, que indica uma relação do risco ajustado ao retorno por pelo menos quarenta anos da amostra retirada, efeito percebido, principalmente, nas empresas de pequeno porte. Porém, não é um efeito de causa e efeito totalmente linear, sendo observado maior efeito em empresas pequenas e pouco efeito em empresas médias e grandes. Esse efeito, quanto ao tamanho da empresa, já é contemplado. Nos dados a serem expostos será utilizado *VDM* para se referir ao Valor de Mercado.

A literatura também sugere diferentes tipos de relação envolvendo o valor de mercado, como em Griliches (1981), Hall, Jaffe e Trajtenberg (2000, 2005), que investigam a relação do número de citações de patentes com o valor de mercado das firmas. As informações observadas sugerem que a relação com patentes procede do investimento em pesquisa e desenvolvimento, logo, a relação é significativa para o número de patentes e citações de patentes, porém com menor afinidade do que investimento em pesquisa e desenvolvimento.

- $$\text{Beta} = \frac{\text{Cov}[\text{Osc. Ação}, \text{Osc. Ind}]}{\sigma^2[\text{Osc. Ind}]}$$

Onde:

Osc. Ação = Variação da ação;

Osc. Ind = Variação do índice Bovespa.

O termo beta, no universo de finanças, geralmente se refere a inclinação da relação do ajuste feito entre a taxa de retorno de mercado (ou um índice) e a taxa de retorno de um investimento, e indica se essa aplicação é mais ou menos volátil que o mercado como um todo. A referência é trazida do artigo de Sharpe (1963) que o chama de "modelo diagonal", atribuindo a simplicidade como uma de suas qualidades na sua construção comparada com a sua possibilidade de ser construído sem assumir a existência de um inter-relacionamento entre os ativos, e mesmo assim, possuir evidências consideráveis de que ele consegue capturar tais relações; explicitamente a primeira versão da equação possui a seguinte forma:

$$R_i = A_i + B_i I + C_i,$$

porém se utilizarmos a forma que lida com retornos em excesso ao invés das taxas de retornos, temos uma versão mais familiar,

$$\mu_m - \mu_{LR} = \alpha_i + \beta_i(\mu_{bm} - \mu_{LR}) + C_i,$$

no qual α_i e β_i são o intercepto e a curvatura, respectivamente, e C_i uma variável aleatória com valor esperado de erro e variância Q_i , μ_{bm} é o retorno de mercado ou algum índice de mercado, μ_m é o retorno médio da ação estudada e μ_{LR} o retorno médio do ativo livre de risco. Essa equação representa uma linha ajustada aos dados, com termo de erro C_i servindo para ajustar a pontos particulares dos dados. A versão básica a partir da equação explicitada é feita depois de se estimar o valor do beta utilizando MQO (Mínimos Quadrados Ordinários), e basicamente, pode ser explicada pela covariância entre os retornos da ação e do índice Bovespa dividido pela variância dos retornos do índice.

Um exemplo de aplicação pode ser visto em Fama e MacBeth (1973) que utilizam o beta para testar a relação entre os retornos esperados e o risco para ativos comuns da bolsa de valores de Nova Iorque com um modelo de portfólio de dois parâmetros em busca de observar

se a hipótese de que esses modelos de apreçamento de ativos refletem a tentativa de investidores avessos ao risco de manterem investimentos que sejam eficientes em termos de valor esperado e volatilidade dos retornos.

- Alfa = $(\mu_m - \mu_{LR}) - \beta(\mu_{bm} - \mu_{LR})$

onde:

μ_m = Retorno médio da ação sendo estudada;

μ_{LR} = Retorno médio do ativo livre de risco (LR = Livre de risco);

μ_{bm} = Retorno médio do benchmark usado;

β = Beta da ação sendo estudada.

A medida de desempenho Alfa idealizada em Jensen (1968) é um parâmetro que diz respeito ao desempenho absoluto do ativo ou fundo. A ideia é mensurar o desempenho dos ativos em comparação com os retornos que poderiam ter sido esperados de investimentos livre de risco (como títulos do tesouro) enquanto ajusta-se a relação desse mesmo ativo com o mercado, ou seja, tenta buscar uma explicação se um investimento atuou melhor ou pior do que o índice beta sugeriu e, assim, procurar evidências se existe um grau de previsibilidade dos administradores dos fundos em relação ao mercado. O conceito é baseado na ideia de que alguns ativos arriscados apresentam maiores retornos esperados do que outros, e se esses resultados forem ainda mais altos do que o risco ajustado ao retorno do ativo, então ele possui um alfa positivo.

Daniel et al. (1997) introduzem o índice Alfa como um indicador que contribuiria para operadores de fundo mútuo com modelo baseado em características para superar regras simples (baseadas em características como *book-to-market*, momento e valor de mercado), com evidências que sugerem que, em média, fundos mútuos se beneficiam das informações fornecidas.

Apesar de partirem da mesma equação, Alfa e Beta são índices que representam coisas diferentes. Alfa é uma consideração do retorno

ativo de um investimento, ele ajusta o desempenho de um investimento em relação ao índice de mercado que representa o movimento do mercado como um todo, podendo ser resumido ao retorno de um investimento relativo comparado a um índice modelo. Já Beta é a medida de risco sistemático de um ativo ou de uma carteira de investimentos em comparação com o restante do mercado, sendo parte do modelo de CAPM.

$$\bullet \text{ Correlação} = \frac{Cov[\text{Ativo}, \text{Índice}]}{\sigma_{\text{Ativo}}\sigma_{\text{Índice}}}$$

onde:

$Cov[\text{Ativo}, \text{Índice}]$ = Covariância entre a ação e o índice utilizado;

σ_{Ativo} = Desvio-padrão do ativo;

$\sigma_{\text{Índice}}$ = Desvio-padrão do índice.

A troca entre risco e retorno esperado é o centro de equilíbrio da teoria de finanças. De outra perspectiva, pode-se dizer que enquanto o risco sistemático de um mercado aumenta, investidores avessos ao risco demandam maiores retornos como prêmio para manterem a sua renda agregada no mercado. A definição básica para correlação é a medida estatística ao qual o grau em que dois ativos se movem em relação a eles mesmos, o coeficiente de correlação se encontra em um alcance que varia em uma relação totalmente perfeita (ou índice de correlação igual a 1) ou ao contrário, uma relação totalmente inexistente (totalmente não correlacionado ou índice de correlação igual a -1). Da mesma maneira que os ativos podem correlacionar-se, um grupo de ativos também o pode, a questão então passa a envolver o risco agregado que a correlação de uma carteira de ativos tem com o mercado.

Conforme observado por Pollet e Wilson (2010)

If the portfolio of assets whose returns are observable (e.g., stocks) is the same as aggregate wealth, then aggregate risk is identical to stock market risk. Hence, the variance of the return to the market portfolio is directly observable and, under typical assumptions (e.g., Merton, 1973), the stock

market risk premium is related to this observable variable. However, when the stock market portfolio is only a subset of aggregate wealth, the inability to observe the variance of the return on aggregate wealth interferes with the empirical analysis of the aggregate risk-return relationship. In certain circumstances, the correlation between stocks rather than stock market variance may better reveal changes in true aggregate risk, and hence, the stock market risk premium.

A correlação entre os ativos é uma ferramenta que auxilia a construção de estratégias de diversificação, e são incontáveis os artigos que abordam esse tipo de estratégia como uma boa saída para proteção de uma carteira de investimentos. A intenção com a diversificação é de suavização de eventos relacionados ao risco não sistemático a fim de que eventos positivos, em alguns ativos, ajudem a suavizar eventos negativos em outros, e isso só acontece caso a construção do portfólio seja feita observando se inexistente correlação perfeita entre os ativos. A construção de uma carteira diversificada pode ser intencionalmente realizada, conforme observado em Rumelt (1982), que avalia as condições disponíveis com argumentos teóricos a fim de prever a associação a qual os ativos estão sujeitos a efeitos negativos do risco não sistemático.

- $EDR = \text{Desv. Pad}(R_{\text{Ativo},t} - R_{\text{Índice},t})$

onde:

$R_{\text{Ativo},t}$ = Retorno do ativo em questão no tempo t ;

$R_{\text{Índice},t}$ = Retorno do índice escolhido no tempo t .

É a diferença entre o comportamento dos retornos de um ativo ou portfólio e o comportamento dos retornos de um índice (que serve como base comparativa), o erro de rastreamento (*tracking error*) é dado pelos desvios-padrão da diferença dos retornos. A utilidade do erro de rastreamento se mostra quando se quer medir o quão bem está o desempenho de um investimento em comparação com outro que serve de modelo.

Roll (1992) formaliza uma abordagem baseada na volatilidade do erro de rastreamento, onde uma análise com um modelo de média-variância restrito a variância do erro de rastreamento é realizado. Ter uma baixa volatilidade do erro de rastreamento para fundos de investimento é uma meta sensível, porque idealmente implicaria em aumentar o número de vezes que o portfólio superaria outro portfólio modelo, dessa maneira, fazendo o caminho inverso, pode-se aumentar a esperança dos retornos em vista de resultados maiores e aumentando assim o risco assumido do investidor. Observando esse problema, Jorion (2003) tenta mitigar a indução do administrador ao risco proporcionado pela otimização visando espaço nos retornos sem observar o risco do portfólio em geral adicionando restrições se utilizando do valor em risco (*Value at Risk*²) em conjunto com a restrição quanto a variância do erro de rastreamento.

Porém, como não fará parte das restrições utilizadas na otimização, se utilizará um modelo que abrange a informação gerada pelo erro de rastreamento e não seu segundo momento, como Barro e Canestrelli (2009) que o utilizaram em um modelo com equações dinâmicas e compararam com um portfólio igualmente ponderado.

- $Treynor = \frac{\mu_{Ativo} - \mu_{LR}}{\beta}$

onde:

μ_{Ativo} = Retorno médio da ação sendo estudada;

μ_{LR} = Retorno médio do ativo livre de risco (LR = Livre de Risco);

β = Beta da ação sendo estudada.

O índice (ou razão) de Treynor, conforme Treynor (1965), Treynor e Mazuy (1966), é um indicador de retorno em razão do risco que é obtido através do retorno anualizado de um ativo subtraído o retorno de outro ativo livre de risco, dividido pelo β do fundo durante o mesmo período. O objetivo do índice é de encontrar uma medida de desempenho aplicável a todos os investidores, independente de suas preferências

²Ver Jorion (2000) para maiores detalhes sobre *Value at Risk*.

quanto ao risco assumido.

Como um indicador de risco ajustado é utilizado como um mediador da qualidade dos retornos de um fundo ou ativo ao invés de somente avaliar a quantidade dos retornos, no sentido de poder avaliar a quantidade de retorno obtida, comparada com outro ativo livre de risco em detrimento do risco assumido. A premissa por trás desse índice é a de que investidores devem ser compensados pelo risco inerente de todo o mercado, pois a diversificação não removerá esse risco, sendo assim, quanto mais alto melhor. Vale a pena lembrar que o índice de Treynor é atrelado ao risco sistemático do mercado.

O índice de Treynor como métrica auxiliar para observar o desempenho de fundos de investimentos é utilizado em artigos no Brasil, como em Varga (2001), Ceretta e Jr (2001) ou em Bueno (2002) que investiga os dividendos como estratégia de investimentos.

$$\bullet \text{ Liquidez} = \frac{\sum_{i=1}^P \sqrt{\frac{n_i v_i}{N V}}}{P}$$

onde:

n_i = Número de negócios com o ativo a no mercado a vista;

N = Número total de negócios no mercado a vista da BM&FBOVESPA;

v_i = Volume financeiro gerado pelos negócios com o ativo a no mercado a vista;

V = Volume financeiro total do mercado a vista da BM&FBOVESPA;

P = Número total de pregões do período analisado.

A liquidez descreve o grau qual um ativo pode ser operado (vendido ou comprado) no mercado sem afetar o seu preço, sendo assim, a velocidade de transformação do papel da ação de volta ao seu valor em moeda. A discussão acerca da liquidez tem uma relação direta com custos de capital, quanto mais líquido forem os ativos, maior o valor de liquidação que eles terão, pois existe maior procura, aumentando assim a facilidade de levantar capital da empresa.

Existe uma extensa literatura sobre como a influência da liquidez afeta de várias maneiras diferentes a saúde financeira ou o planejamento

das empresas. Pham et al. (2018) fazem uma revisão sobre o assunto enquanto discutem sobre como a liquidez dos ativos de uma empresa está relacionada com a sua capacidade de inovação; a discussão se pauta ao redor da pergunta se a liquidez é um fator importante para gastos com investimento, em razão de que em um mundo perfeito ela não seria de tanta importância, pois as firmas conseguiriam financiar os seus investimentos sem custos de transação. Porém, no mundo real, as imperfeições de mercado afetam suas capacidades de levantar capital e potencialmente influenciam as políticas de investimento. Relações de outros comportamentos que envolvem a liquidez foram investigadas, como em Sibilkov (2009) e Ortiz-Molina e Phillips (2014) que relacionam a liquidez com a estrutura de capital, Schlingemann, Stulz e Walckling (2002), Hovakimian e Titman (2003), Borisova e Brown (2013) que associam a liquidez com a quantia de vendas de ativos e Brown, Fazzari e Petersen (2009) que discorrem sobre os impactos do fluxo de dinheiro para o financiamento de pesquisa e desenvolvimento.

Para o Brasil, a relação da liquidez com o retorno das ações de mercado é objeto de estudo em Correia, Amaral e Bressan (2008), que investigam a existência da liquidez como papel determinante no processo de formação dos preços de títulos financeiros com uma regressão múltipla, obtendo resultados que indicam uma relação linear positiva entre a liquidez e o retorno. Outro, dos vários estudos já realizados, é o de Machado e Medeiros (2011) em que analisam o prêmio de liquidez existente no mercado acionário brasileiro além dos efeitos da liquidez nos retornos e, dessa vez, a *proxy* de liquidez utilizada nos modelos de construção de portfólios serviria como informação para o risco das carteiras.

- Negociabilidade =
$$\frac{\sum_{i=1}^P \sqrt[3]{\frac{n_i}{N} \left(\frac{v_i}{V}\right)^2}}{P}$$

onde:

n_i = Número de negócios com o ativo a no mercado a vista;

N = Número total de negócios no mercado a vista da BM&FBOVESPA;

v_i = Volume financeiro gerado pelos negócios com o ativo a no mercado

a vista;

V = Volume financeiro total do mercado a vista da BM&FBOVESPA;

P = Número total de pregões do período analisado.

Outro índice que trás informações sobre a facilidade que os ativos são operados no mercado é o de negociabilidade, que dessa vez é construído conforme o manual de procedimentos dos índices da BM&FBOVESPA³ e que servirá como contraponto ao índice de liquidez. Geralmente, ele é utilizado como proxy para modelos que investigam a liquidez e possui resultados significativamente interessantes de acordo com Mussa (2012), para a correlação com medidas como volume financeiro, desvio-padrão do volume financeiro, quantidade de negócios, quantidade de títulos e número de dias sem transação. O mesmo autor cita outras pesquisas acadêmicas que corroboram com a sua visão sobre a qualidade do índice de negociabilidade e sua correlação com outros índices atrelados a liquidez, como em Vieira e Milach (2008), Machado e Me-deiros (2011) e cita também a correlação positiva encontrada entre o índice de negociabilidade e o valor de mercado que reforça os resultados encontrados em Liu (2006).

Curiosamente essa *proxy* era utilizada antes de junho de 2014 com a mesma formulação dada pelo índice de liquidez como base para a formulação do principal índice da bolsa de valores brasileira o Ibovespa, mais explicitamente:

$$I.N_i = \frac{\sum_{i=1}^P \sqrt{\frac{n_i v_i}{N V}}}{P},$$

essa metodologia era utilizada desde a década de 60 e tinha características que somente eram encontradas no mercado brasileiro, diferenciando-se do restante dos mercados de ações; o Ibovespa era ponderado pelas ações que compunham um índice de negociabilidade ao invés de valor de mercado e dessa maneira, privilegiava ações com alto volume de troca. As distorções geradas aconteciam quando o volume de negociações de

³Pode ser visto em BM&FBOVESPA (2014b).

ativos que não necessariamente representassem grande efeito real no mercado (ações com alto volume de trocas, porém com valor próximo de zero) eram indexadas ao índice por algum efeito manada em alguma queda brusca.

O critério de ponderação para o Ibovespa então era feito da seguinte maneira:

$$\omega_i = \frac{I.N_i}{\sum I.N_{85\%}},$$

onde ω_i é o peso do i -ésimo ativo participante do índice, $I.N_i$ o índice de negociabilidade do i -ésimo ativo e $\sum I.N_{85\%}$ a soma de 85% do total dos índices de negociabilidade. Juntamente com a mudança de critério de estruturação do índice a ponderação dos pesos do Ibovespa também foi alterada e passou a considerar uma distribuição do valor de mercado limitado pelo índice de negociabilidade,

$$\omega_i = \frac{V.M_i}{\sum V.M_{85\%}},$$

dessa vez $V.M_i$ representa o valor de mercado da empresa i e $\sum V.M_{85\%}$ o conjunto que representa 85% da soma do total do valor de mercado, outra diferença é que o ω_i agora não pode ser maior que o dobro do índice de negociabilidade da empresa i tão menos ser maior do que 20%. Vale a pena lembrar que para o IBrX 100 e também o IBrX 50 a metodologia de cálculo também foi alterada⁴. O índice de negociabilidade pós-2014 passou a considerar em 2/3 do volume financeiro da empresa (mais especificamente v_i/V) e 1/3 do número de negócios (ou também n_i/N), deixando de beneficiar empresas de alto volume e pouca importância no mercado nacional.

Logo, com ambos os índices de liquidez e negociabilidade existe a possibilidade de capturar os efeitos não só da velocidade de negociação de cada ativo como também as informações para a construção da carteira do índice bovespa e outros importantes para o Brasil.

⁴O documento com todas as mudanças pode ser visto em BM&FBOVESPA (2014a)

- Razão de informação = $\frac{\mu_{\text{Ativo}} - \mu_{\text{LR}}}{\text{EDR}}$

onde:

Razão de informação = Raz. Inf;

EDR = Erro de rastreamento;

μ_{Ativo} = Retorno médio da ação sendo estudada;

μ_{LR} = Retorno médio do ativo livre de risco usado (LR = Livre de Risco).

A razão de informação é uma medida dos retornos de um portfólio teste em relação a outro tomado como modelo (geralmente um índice de mercado) em razão a volatilidade desses retornos e serve como parâmetro para identificar a consistência do desempenho de um investimento em relação ao mercado. Como lembrado por Goodwin (1998), a razão de informação é construída baseando-se na formulação feita por Markowitz, portanto carrega em sua estrutura o mesmo conjunto informacional utilizado no paradigma do portfólio de média-variância, sendo a esperança e a variância dos retornos, estatísticas o suficiente para caracterizar um portfólio (ou a medida de sua qualidade).

Geralmente é utilizado como medida de calibragem das habilidades de administradores de fundos de investimentos, no caso medindo os resultados do gerenciamento ativo dos investimentos pela quantia de risco assumido relativo com o desempenho do mercado, onde quanto maior a razão de informação, maior o retorno ativo obtido com o portfólio em comparação com o risco e mais habilidoso o comandante da operação. Goodwin (1998) conclui que a razão de informação é uma peça valiosa para medir a qualidade de um administrador ativo de fundos, argumentando que entre os índices que trazem informações características da média-variância é discutivelmente o mais importante dos indicadores, porém, conforme a vasta quantia de outras fontes de informação, não deve ser a única fonte a ser requisitada pelos administradores de fundos, tendo evidências de que razões de informações altas no passado não representam resultados significativos no futuro e vice-versa.

- Dividendo por ação = $\frac{D}{S}$

onde:

Dividendo por ação = DPA;

D = Soma dos dividendos pagos ao decorrer de 1 ano;

S = Quantidade de ações em circulação.

O dividendo é o pagamento de parcelas dos lucros obtidos pela empresa aos seus acionistas e que pode ser feito em dinheiro, em ações futuras das empresas ou recompra de ações da própria empresa, caso ela possua uma política de reinvestimento. A quantia de dividendos declarados pagos é calculada por ativo da empresa para cada ação em circulação em mãos do acionista, levando em conta dividendos interinos realizados em período antecedente ao fechamento do exercício social da empresa, caso exista opção de pagamentos semi-anuais.

A importância da política de dividendo vem da atratividade que ela oferece para o acionista que planeja o seu portfólio; essa influência da política de dividendos sobre o comportamento das firmas é um objeto importante para as empresas que planejam maximizar o valor intrínseco de suas ações conforme mostra Miller e Modigliani (1961) que estudam os efeitos de diferentes políticas de dividendo sobre os preços dos ativos em uma conjuntura econômica hipotética. Estudos que buscam o relacionamento entre a política de dividendos e a riqueza dos acionistas são parte da literatura que contempla o assunto, como em Azhagaiah e Priya (2008), em um estudo aplicado para o caso indiano.

A literatura durante algumas décadas analisou as políticas de dividendos e quais influências do comportamento dos dividendos entre as firmas ainda não possui uma explicação universal. Ainda pode se observar que existem divergências entre os pagamentos de dividendos em diferentes países, algumas características como impostos, crescimento do produto interno bruto (PIB), taxa de inflação e até a taxa de juros são características das culturas corporativas em relação aos dividendos pagos, segundo Brealey et al. (2012). Um exemplo é que o aumento de

pagamento de dividendos é também um aumento da dívida de financiamento das empresas, tornando-as mais arriscadas, o que pode sugerir que empresas com alto nível de risco tenham menos tendência a pagar dividendos altos, diminuindo a parcela de pagamento que desejam pagar aos seus acionistas.

A política de dividendos também é alvo de atenção no Brasil, sua importância é reconhecida sobre os mesmos moldes da literatura internacional, analisando-se como a sua influência acontece na estrutura de capital das empresas do país, conforme visto em Futema et al. (2009), que faz uma adaptação do modelo visto em Fama e French (2002) para o caso brasileiro no período de 1995 até 2004,

- Volume médio = $\frac{\sum_{t=1}^h vol_t}{h}$

onde:

Volume médio = Vol. Med;

vol_t = Volume no período t;

h = Períodos de tempo.

Média mensal do volume financeiro negociado de determinado papel em um período. O volume diz respeito aos investidores sobre a atividade do mercado e a liquidez dos ativos, onde períodos de maior volume de negociações estão relacionados a maior liquidez, atividade de ordens de compras e de mercado, notícias, anúncio de produtos, publicação de planejamento e a vários tipos de informações, pode até ser interpretado como os ânimos dos investidores no período. Enquanto outros índices relacionados a liquidez utilizam o volume financeiro e o volume de trocas, aqui temos somente o volume de trocas.

A literatura observa o volume de transações e a sua relação com os preços e retornos em vários casos diferentes, como em Karpoff (1987), que faz uma revisão sobre os estudos datados até a época que buscavam relação entre o volume de negócios e a magnitude da mudança de preços, em Campbell, Grossman e Wang (1993), onde documentam que em curto prazo, o comportamento da autocorrelação dos retornos

no primeiro dia é menor em dias com grande volume de transações do que o contrário, ou nos artigos de Brailsford (1996), Lee e Rui (2002) que buscavam uma relação de causa direta entre o sinal e a magnitude dos efeitos dinâmicos entre o volume de transações e os retornos (ou sua volatilidade), esses casos abordam o volume de negociações realizadas, Chang, Faff e Hwang (2010) faz a mesma coisa para o Japão utilizando-se do volume de negociações como *proxy* para a liquidez.

A relação causal de influência do volume sobre os retornos não acontece de maneira simétrica de acordo com Karpoff (1987), Brailsford (1996), e Lo e Wang (2009), que mostram que a sua ação sobre a volatilidade dos retornos aparenta maior relação com a volatilidade dos retornos.

O volume financeiro é abordado na literatura brasileira em vários artigos como quando utilizam o volume mensal de negociação como *proxy* para a liquidez, como pode ser visto em Vieira e Milach (2008) que se utilizam de vários índices em modelos de regressão múltipla a fim de buscar entendimento para os retornos de ativos financeiros, ou em Correia, Amaral e Bressan (2008) para um caso parecido buscando entender a formação dos preços de títulos financeiros.

$$\bullet \text{ Sortino} = \frac{E[R] - R_{RMA}}{\sigma_{DR}}$$

onde:

$E[R]$ = Retorno esperado;

R_{RMA} = Retorno minimamente aceitável (RMA);

σ_{DR} = Risco negativo, ou desvio-padrão dos retornos negativos dos ativos (DR = *downside risk*).

Outra medida de risco ajustado ao retorno de um ativo é o índice de Sortino, que é parecido com o índice de Sharpe e se diferencia por utilizar o conceito de risco negativo chamado de *downside risk* (nome dado ao risco estimado de um ativo que pode sofrer um declínio em seu valor) que é abordado em Sortino Frank A e Van Der Meer (1991). O risco negativo pode ser visto de maneira intuitiva como o desvio-padrão

anualizado dos retornos abaixo do alvo do portfólio que tem como efeito penalizar os retornos abaixo do alvo definido e pode ser definido como:

$$\sigma_{DR} = \sqrt{\int_{-\infty}^T (R_{RMA} - r)^2 f(r) dr},$$

sendo r a variável aleatória representando os retornos de uma distribuição dos retornos, e $f(r)$ a distribuição dos retornos anuais. De acordo com Jr (2000), citado por Fonseca et al. (2007), a comparação entre o índice de Sharpe e o de Sortino depende da quantia de retorno alvo mínimo que o investidor está disposto a aceitar com o portfólio, ou retorno minimamente aceitável (RMA).

Meade e Beasley (2011) apresentam uma abordagem de otimização não linear inspirado na maximização do índice de Sortino empregando a utilização de um algoritmo genético⁵ a fim de testar a qualidade de estratégias que tentam observar o momento de ativos, comparando-a com um portfólio igualmente ponderado (que não estaria se beneficiando de características como o momento) e obtêm resultados significantes para a seleção de portfólio baseado no índice de Sortino.

- Índice de Força Relativa = $100 \times \frac{\mu_{altas,h}}{(\mu_{altas,h} + \mu_{baixas,h})}$

onde:

IFR-12 = Índice de Força Relativa de baseado nos 12 últimos meses;

IFR-36 = Índice de Força Relativa de baseado nos 36 últimos meses;

$\mu_{altas,h}$ = média das últimas h altas;

$\mu_{baixas,h}$ = média das últimas h baixas;

$\mu_{alta,h} = fec_h - fec_{h-1}$;

$\mu_{baixa,h} = fec_{h-1} - fec_h$;

fec_h = fechamento no dia h .

Desenvolvido por Wilder (1978), o índice de força relativa é utili-

⁵O algoritmo utilizado pode ser visto mais detalhadamente em Beasley, Meade e Chang (2003).

zado como um indicador de oscilação do momento para medir a dimensão da volatilidade dos preços recentes dos ativos a fim de analisar se um ativo se encontra próximo de um momento de tendência de queda depois de um prolongado período de altas subsequentes (sobrecomprado) ou ao contrário (sobrevendido).

O índice de força relativa é amplamente utilizado por investidores que se pautam em análise técnica para seus investimentos, Chiang et al. (2012) investiga estratégias de investimento, avaliando seu desempenho no mercado de ações de Taiwan, com resultados que indicam que a estratégia baseada no índice de força relativa se sobrepôs as outras avaliadas. Outro caso estudado, dessa vez para a bolsa de valores de Londres, Chong, Ng e Liew (2014) avaliam dois índices de análise técnica, sendo um deles o índice de força relativa, conseguindo obter retornos extraordinários para a amostra coletada, podendo ainda ver resultados similares para o *Dow Jones Industrial Average*.

Schulmeister (2009) testa uma grande variedade de indicadores de análise técnica baseando-se agora na frequência dos dados utilizados nos cálculos, o autor procura investigar se a relação de rentabilidade dessas estratégias se perde ao longo do tempo enquanto se resumem a um período menor de efetividade, nos indicadores incluídos estão os fundamentados no momento como o índice de força relativa, que apresentaram sim uma adaptação ao longo do tempo se tornando rentáveis em menor periodicidade.

● Estocástico =

$$- \%K = 100 \times \frac{fec - \text{Min}_5}{\text{Max}_5 - \text{Min}_5}$$

$$- \%D = 100 \times \frac{\mu_{3, fec} - \mu_{3, \text{Min}_5}}{\mu_{3, \text{Max}_5} - \mu_{3, \text{Min}_5}}$$

onde:

Estoc.6 = Estocástico dos 6 últimos dias;

Max₅ = cotação máxima dos últimos 6 dias;

Min₅ = cotação mínima dos últimos 6 dias;

$\mu_{3, \text{fec}}$ = média dos 3 últimos fechamentos;

μ_{3, Max_5} = média dos 3 últimos max6;

μ_{3, Min_5} = média dos 3 últimos min6.

Também chamado de indicador de oscilação estocástica, o índice criado na década de 1950, é um indicador técnico de análise gráfica que mostra o menor preço de fechamento relativo aos seus máximos e mínimos durante um período de tempo, quando criado, sua intuição era tentar definir as direções dos preços através de seu momento, tentando antever padrões de subidas ou descidas dos preços. É um popular índice de análise técnica, e geralmente é utilizado para observar sinais de sobrecompra ou sobrevenda de ativos, poucos anos atrás Ni, Liao e Huang (2015) exploraram o indicador de oscilação estocástica como ferramenta utilizada por investidores na obtenção de lucros sobre operações de ativos argumentando a favor da utilização para prever efeitos manada detectados pelo oscilador.

Apesar de ambos serem índices de oscilação baseados no momento dos preços, o indicador de oscilação estocástica se diferencia do índice de força relativa; enquanto a ideia do oscilador estocástico circunda a hipótese de que o preço de fechamento deve se encerrar próximo a mesma direção que a tendência observada, e o índice de força relativa captura as informações através da velocidade de reajuste dos preços dos ativos. Mesmo assim, de acordo com Murphy (1999) e Kaufman (2013) a literatura incentiva a utilização de ambos os índices conjuntamente.

- $VQAE = \Delta_{QAE}$

onde:

QAE = Quantia de Ações Emitidas;

VQAE = Variação da Quantia de Ações Emitidas.

A variação da quantia de ações emitidas em porcentagem anual pode conter informações sobre a intenção de recompra de ações pré-operações de fusão ou de emissão sazonal de ativos e a intenção de

criação de poupança em dinheiro. Pontiff e Woodgate (2008) encontram informações interessantes sobre a emissão de ativos, uma delas é que ela é uma medida mais potente em termos de previsibilidade dos retornos do que as medidas populares como momento, valor de mercado e VPA/P utilizados em modelos de corte transversal (*cross-section*), sendo a emissão de ativos causada por motivos além dos efeitos associados a essas características; outra informação é a de que as variações de emissões de ativos acontecem por motivos maiores do que os previstos (recompra pré-operação de fusão ou emissão sazonal) e, por último, que existe uma discrepância sobre como as informações se relacionam antes de 1970 e após 1970 entre a emissão de ações e modelos de corte transversal baseados em momento, valor de mercado e VPA/P. Daniel e Titman (2006) encontram evidências que apontam para a emissão de ativos como um bom preditor dos retornos de empresas, motivando o argumento através de que o índice consegue capturar as intenções das administrações de empresas quanto ao levantamento de capital para futuras operações de crescimento.

As investigações ao redor da emissão de ativos ocorrem por várias óticas, como a sua relação com a emissão de ativos e a criação de poupança em dinheiro pelas firmas, investigado em McLean (2011), que observou durante a década de 70 até 2008 que a cada emissão de um dólar americano as firmas poupavam 0,23 centavos de dólar, enquanto em tempos mais recentes esse volume de poupança passou a ser 0,60 centavos de dólar. Identificando assim, que a precaução é o principal motivo para a emissão seguida de poupança em dinheiro, encontrando uma relação inversa significativa sobre os custos de emissão e a poupança em dinheiro. O mesmo autor em um novo artigo investiga a relação de emissão de ações e os retornos esperados em uma análise de corte transversal em McLean, Pontiff e Watanabe (2009) corroborando com os resultados vistos em Pontiff e Woodgate (2008) de que a emissão de ativos possui poder de previsibilidade dos retornos de ações estatisticamente significativa.

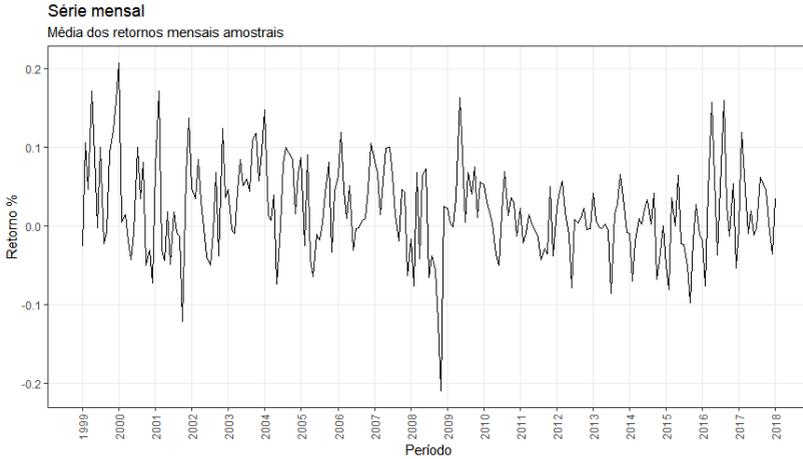
Medeiros e Matsumoto (2006) estudam o evento de reação do

mercado antes, durante e depois da emissões públicas de ativos no Brasil durante dez anos, entre 1992 até 2002, conseguindo evidências de três eventos que o processo de emissão pública de ativos pelas empresas analisadas traziam, a saber o primeiro deles é o indício da existência de conhecimento de informações sigilosas das empresas por parte de alguns acionistas; em segundo, a ocorrência de retornos anormais negativos na data do anúncio e, em terceiro, a obtenção de retornos negativos após ajuste ao risco e ao mercado um ano após a captação de recursos. Esses resultados corroboram com a literatura já consagrada sobre o assunto em Myers e Majluf (1984), Miller e Rock (1985).

5.3 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

A figura 3 informa a média dos retornos mensais de toda a amostra utilizada. Assim a amostra retirada do banco de dados do Econômica tem início em 1995, porém com o recorte de três anos realizado para construção das características relacionadas ao momento, ela volta a se iniciar em dezembro de 1998 com término em dezembro de 2017. Observando a figura, pode-se considerar que o maior pico dos retornos aconteceu no início do ano de 2000 enquanto seu maior vale no final do ano de 2008.

Figura 3: Média dos retornos



Fonte: Elaboração própria.

A tabela 1 possui informações referentes as estatísticas descritivas, sendo formada por quatro indicadores que correspondem a média, o desvio-padrão, a assimetria e a curtose, respectivamente. Foram calculados conforme a amostra estratificada anualmente de acordo com os períodos utilizados para construir a amostra. Pela grande quantidade de empresas utilizadas, reportar as estatísticas descritivas por empresa é inviável, então traçou-se os momentos anuais dos retornos.

As informações antes vistas pela figura 3 agora mais resumidamente podem ser vistas na primeira e segunda coluna das estatísticas descritivas.

Tabela 1: Estatísticas descritivas dos retornos avaliados

Ano	M	Σ	Γ	K
1998	-0.026	0.194	1.005	1.518
1999	0.089	0.174	1.07	3.462
2000	0.007	0.121	0.75	1.749
2001	0.016	0.115	0.694	2.518
2002	0.024	0.132	0.36	2.58
2003	0.067	0.13	0.776	1.514
2004	0.043	0.118	1.356	6.913
2005	0.011	0.103	0.541	1.378
2006	0.037	0.098	0.937	2.908
2007	0.034	0.111	1.266	6.018
2008	-0.029	0.116	0.644	3.706
2009	0.05	0.102	0.799	2.836
2010	0.012	0.097	1.383	7.076
2011	-0.009	0.083	0.522	6.404
2012	0.009	0.098	0.236	2.265
2013	0.004	0.11	1.359	10.021
2014	-0.011	0.116	0.863	9.083
2015	-0.016	0.127	0.48	4.025
2016	0.031	0.148	1.402	7.757
2017	0.028	0.113	1.258	6.676

Fonte: Elaboração própria.

Ademais, algumas variações ocorrendo principalmente na assimetria e na curtose. Quanto a assimetria é interessante atentar-se que apesar de em alguns momentos ela se aproximar de zero (o que indicaria que teríamos valores igualmente distribuídos igualmente em ambos os lados da média, mas não necessariamente em uma distribuição simétrica) na maioria das vezes ela aparentava se distanciar. Sobre a curtose vale lembrar de que essa é a medida do achatamento da curva de função de distribuição de probabilidade, calculado pelo quarto momento centrado na média, e que apesar de não possuir limite superior, apresenta limite inferior. Sobre os dados verifica-se que eles apresentam variação na curtose também, aparentemente sempre acompanhada de variações da assimetria, além disso pode-se notar que em nenhum momento ela apresentou características mesocúrticas, sempre uma vari-

ação entre períodos de leptocúrtica (mais afunilada quando apresentou valores maiores que três) e platicúrtica (mais achatada quando apresentou valores menores que três).

5.4 RESULTADOS

A tabela 2 apresenta os resultados das políticas paramétricas com 21 e 3 características estimados fora da amostra para o período amostral de 19 anos, com restrições a poder operar vendido (especificadas pelo "NS" de *no-short*) e sem restrições a poder operar vendido. Para todas as políticas dessa tabela foram utilizadas uma função utilidade de CRRA com uma aversão ao risco γ de 10.

A tabela 2 base possui os θ 's estimados para as quatro políticas paramétricas calculadas fora da amostra, com 21 e 3 características, sendo elas: Valor de mercado (VDM), *Book-to-market* (VPA/P), Momento de um mês (Mom_1), Beta, Volatilidade (Vol.), Alfa, Correlação (Corr.), Erro de rastreamento (EDR), Índice Treynor (Treynor), Momento de doze meses (Mom_{12}), Momento de 36 meses (Mom_{36}), Liquidez (Liq.), Negociabilidade (Neg.), Razão de informação (RAZ.INF), Dividendo por ação (DPA), Volume médio transacionado (VOL.MED), Índice de Sortino (Sortino), Índice de força relativa de doze meses (IFR_{12}), Índice de força relativa de 36 meses (IFR_{36}), Estocástico de seis meses ($Estoc.6$) e Variação da quantidade de ativos emitivos (VQAE).

As linhas foram divididas em dois grupos, o primeiro mostra os parâmetros resultado da otimização, com cada desvio-padrão especificamente abaixo de cada parâmetro. A princípio foram utilizados os primeiros cinco anos da amostra para se gerar os parâmetros, a partir disso, a cada período mensal se reavaliavam não só o vetor de parâmetros θ até o término do período amostral em dezembro de 2017, mas também as empresas que possuíam informações o suficiente para se poder computar os ótimos, em vista de que por mais que existam maneiras de lidar com a inexistência de dados com a política paramétrica,

o critério utilizado para selecioná-las foi de que todos os períodos em uma faixa de cinco anos tivessem informações.

O segundo grupo contém as informações de como os pesos ficam distribuídos, cada linha representa, respectivamente, a média absoluta do peso em cada ativo, a média do peso mínimo dos ativos, a média do peso máximo dos ativos, a média da soma das posições de venda a descoberto e a média da fração de pesos menores ou iguais a zero. É possível verificar as diferenças em média de uma estratégia quanto aos pesos da outra, o mais evidente fica em relação a primeira linha, a média absoluta dos pesos, essa grande diferença quanto as políticas que permitem venda a descoberto e as que não permitem venda a descoberto é obviamente resultado do maior número de possibilidades de posicionamento que se tem com vendas a descoberto. Curiosamente dentro do grupo de políticas que restringem a venda a descoberto o peso médio absoluto é igual enquanto os máximos são diferentes, possivelmente indicando a existência de informações relevantes para o otimizador em relação a alguns ativos presentes na mesma amostra. Notavelmente os resultados da política na versão com 21 características irrestrita, chamaram a atenção quanto aos maiores mínimos e máximos dos pesos entre todas as outras políticas paramétricas (o que sugere bastante alavacagem do portfólio), assim como uma maior fração dos posicionamentos com estratégias de venda a descoberto. Outro ponto a ser observado é a mudança dos máximos entre as políticas de venda a descoberto de 21 e de 3 características, para que se possa considerar que essa diferença seja valiosa, primeiramente deve-se considerar os índices que mensuram a qualidade dos portfólios, olhar os retornos acumulados no longo prazo e verificar a significância conjunta dessas características; a princípio a ideia de que o aumento do número de características implicou em maiores informações ao otimizador a ponto de encontrar uma melhor alocação é pequena.

Em relação a primeira parte da tabela, as associações dos sinais dos parâmetros demonstram como eles influenciam a análise do otimizador. O sinal dos parâmetros $\theta_{VPA/P}$, θ_{Mom_1} e θ_{VDM} corroboram

com a literatura vista até o momento, sendo os dois primeiros positivos e o último negativo respectivamente. Porém, isso se reafirmou somente no caso das políticas que estavam sob a influência de três parâmetros, no caso da política com 21 parâmetros o sinal do θ_{Mom_1} se inverteu e atuou com maior magnitude em comparação com o caso básico de três parâmetros. Uma possível explicação para essa reversão no sinal talvez seja de que outros parâmetros possuíam também informações relevantes que ajudassem a explicar os retornos e por consequência os efeitos dos momentos nos retornos. Uma peculiaridade que também pode ser vista é a troca de sinal do momento de 12 meses para as políticas sem e com restrições a venda a descoberto. Como esperado, o desvio-padrão de todos os parâmetros é maior nas políticas que não possuem restrição a venda a descoberto, isso acontece devido a não imposição de limites ao parâmetro, consequentemente aumentando a sua variação.

Pode-se observar que a magnitude dos valores tende a ser maior nas políticas irrestritas, contribuindo para a ideia de que o otimizador passa a considerar características com maior interferência na escolha do ponto ótimo quando ele pode assumir tanto estratégias de operação de venda a descoberto quanto restritas. O momento de um mês troca de valor quando alteramos a versão de 21 características para três características, em outro caso pode-se ver a mesma inversão entre as políticas de 21 características com o momento de 12 meses.

Tabela 2: Política paramétrica de portfólio

	PPP ₂₁	PPP ₃	PPP _{NS21}	PPP _{NS3}
θ_{VDM}	-0.069	-0.097	-0.017	-0.085
Desv. Pad.	0.032	0.052	0.018	0.042
$\theta_{VPA/P}$	0.045	0.11	0.008	0.039
Desv. Pad.	0.036	0.109	0.011	0.048
θ_{Mom1}	-0.192	0.04	-0.043	0.005
Desv. Pad.	0.115	0.183	0.023	0.101
θ_{Beta}	-0.068	-	-0.005	-
Desv. Pad.	0.091	-	0.02	-
$\theta_{Vol.}$	-0.311	-	-0.064	-
Desv. Pad.	0.175	-	0.026	-
θ_{Alfa}	0.021	-	0.008	-
Desv. Pad.	0.058	-	0.021	-
$\theta_{Corr.}$	-0.147	-	-0.082	-
Desv. Pad.	0.062	-	0.033	-
θ_{EDR}	-0.191	-	-0.009	-
Desv. Pad.	0.109	-	0.019	-
$\theta_{Treygnor}$	0.028	-	0.006	-
Desv. Pad.	0.03	-	0.011	-
θ_{Mom12}	0.076	-	-0.014	-
Desv. Pad.	0.112	-	0.022	-
θ_{Mom36}	-0.041	-	-0.006	-
Desv. Pad.	0.108	-	0.041	-
$\theta_{Liq.}$	-0.155	-	-0.009	-
Desv. Pad.	0.071	-	0.013	-
$\theta_{Neg.}$	-0.167	-	-0.01	-
Desv. Pad.	0.074	-	0.015	-
θ_{RAZINF}	0.086	-	0.028	-
Desv. Pad.	0.042	-	0.015	-
θ_{DPA}	0.065	-	0.04	-
Desv. Pad.	0.081	-	0.044	-
$\theta_{VOL.MED}$	-0.125	-	-0.01	-
Desv. Pad.	0.062	-	0.011	-
$\theta_{Sortino}$	0.118	-	0.058	-
Desv. Pad.	0.043	-	0.013	-
θ_{IFR12}	0.25	-	0.07	-
Desv. Pad.	0.108	-	0.012	-
θ_{IFR36}	0.142	-	0.03	-
Desv. Pad.	0.052	-	0.022	-
$\theta_{Estoc.6}$	0.24	-	0.067	-
Desv. Pad.	0.12	-	0.017	-
θ_{VQAE}	-0.323	-	-0.057	-
Desv. Pad.	0.194	-	0.027	-
$ w_i \times 100$	1.375	1.022	1.014	1.014
Min $w_i \times 100$	-5.058	-0.91	0.001	0.015
Max $w_i \times 100$	5.124	3.189	3.238	2.902
$\Sigma w_i I(w_i < 0)$	-0.009	-0.003	-	-
$\Sigma I(w_i \leq 0)/N_i$	0.206	0.014	-	-

Fonte: Elaboração própria.

Observa-se na figura 4 os retornos mensais acumulados das estratégias paramétricas calculadas para os quatro formatos (sem e com restrições a venda a descoberto e com 3 e 21 características) abordados com índice de aversão de risco igual a 10. Observando o gráfico, nota-se que as divergências acontecem, principalmente, entre a política que considera 21 características em relação a todas as outras (que "caminham mais unidas") apresentando por curtos períodos retornos acumulados maiores, porém, no fim da amostra, um menor desempenho. O que explica esse fato é que o menor número de diversidade de informações contidas nos modelos com 3 características os fazem menos propensos a se diferenciar quando possuem restrições a venda a descoberto ou não, e no caso com 21 características um efeito parecido agora que o número de possíveis estratégias é limitada

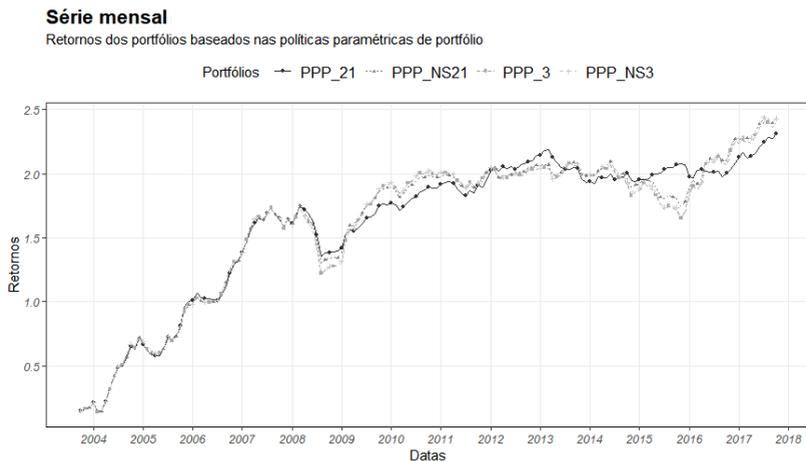
Ao passo em que é observável o crescimento do retorno acumulado das políticas paramétricas, indicando ganhos consistentes ao longo do tempo, também é possível observar como contraponto a variação dos custos de transação das políticas conforme a figura 5 (também exibindo o caso para $\gamma = 10$), dando a entender uma trajetória crescente dos custos de transação para a política sem restrições de venda a descoberto com 21 características. A relação dos custos entre as outras três políticas é próxima se comparada com a PPP_{21} e variam em torno dos níveis de 0.5% e 0.15% ao mês, com pequenos avanços ao final de 2014 pela PPP_3 .

Curiosamente, no período do início da amostra até meados de 2008 durante a crise todas as estratégias possuíram retornos acumulados próximos, desvencilhando-se no primeiro momento de retomada dos retornos positivos e mantendo um padrão próximo excluindo-se o caso com 21 características sem restrição de venda a descoberto.

Quanto aos custos a mesma avaliação não pode ser feita, a trajetória crescente de cada reposicionamento da PPP_{21} é evidente desde os primeiros anos exibidos, com aparente consistência até o último período de estimação, enquanto os outros três casos aparentam certa estabilidade. A figura 5 apresenta os custos de transação do reposicionamento

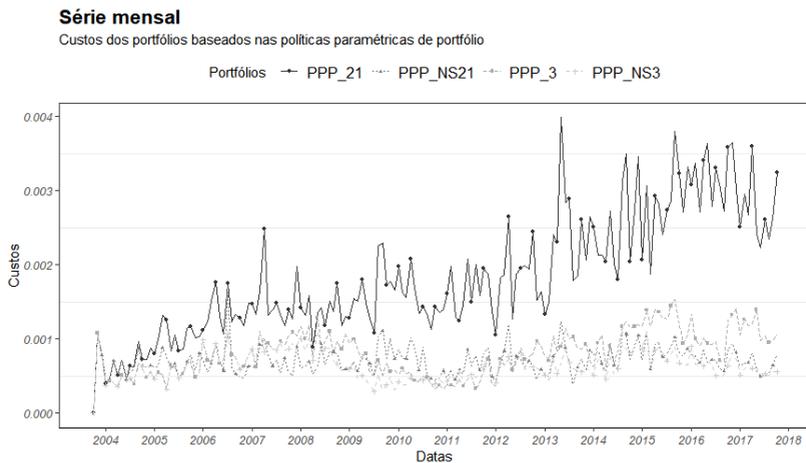
dos ativos

Figura 4: Retornos brutos acumulados das PPP's



Fonte: Elaboração própria.

Figura 5: Custos das PPP's



Fonte: Elaboração própria.

Os pesos das outras estratégias estimadas também fora da amostra podem ser vistos na tabela 3, esta é construída com as mesmas in-

formações da tabela 2, cada coluna representa a média absoluta do peso em cada ativo, a média do peso mínimo dos ativos, a média do peso máximo dos ativos, a média da soma das posições de venda a descoberto e a média da fração de pesos menores ou iguais a zero, respectivamente. A média absoluta dos pesos de todas as políticas restritas (quanto a venda a descoberto) foram todas próximas, isso fica evidente quando se está avaliando absolutamente todos os valores distribuídos dentro do mesmo universo. A variação mais notável é observada em relação ao portfólio de média-variância, onde são observados os maiores extremos se comparado a todas as outras políticas. Em seguida, a política de mínima-variância irrestrita também apresenta alocações extremas para só daí as políticas paramétricas irrestritas ocuparem os pesos mais extremos. Uma observação em relação aos máximos é que em poucas estratégias houveram uma grande dispersão em média das alocações entre todos os ativos ao longo do tempo, pois, se notado, apenas a volatilidade no tempo e a igualmente ponderada possuem máximos abaixo de 10%, indicando posicionamento disperso em toda a amostra durante os meses de estimação.

Também há de se notar que existem políticas que naturalmente impunham restrição a venda a descoberto, como a volatilidade no tempo, o retorno ao risco no tempo, o retorno ao risco no tempo CAPM (Beta) e as estratégias simplórias.

Tabela 3: Distribuição dos portfólios

Políticas	$ w_i \times 100$	Min $w_i \times 100$	Max $w_i \times 100$	$\Sigma w_i I(w_i < 0)$	$\Sigma I(w_i \leq 0)/N_t$
VoT1	1.014	0.041	7.73	-	-
RRT	1.014	0	12.027	-	-
RRTBeta	1.014	0	17.629	-	-
MiVI	2.015	-7.637	16.148	-0.013	0.383
MiVR	1.014	0	19.396	-	-
MeVI	9.16	-55.279	69.114	-0.088	0.465
MeVR	1.014	0	27.297	-	-
MiVR2.5	1.015	-1.142	27.297	-0.001	0.005
IP	1.014	0.532	1.887	-	-
PV	1.014	0	22.795	-	-

Fonte: Elaboração própria.

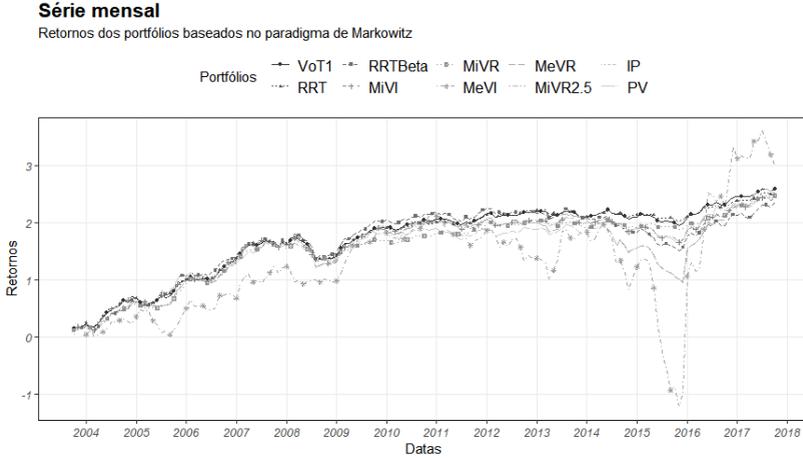
Na figura 6 observa-se o retorno acumulado das outras políticas de portfólios apresentadas até agora. A primeira vista não se pode deixar de observar a variação dos retornos acumulados do portfólio de média-variância, afinal este apresentou cerca de um retorno bruto 20% maior do que a média dos outros portfólios e uma variância em torno de 300% mais elevada também. Porém, a esse passo acelerado de alterações de reposicionamento os custos implicados também foram elevados, resultando em uma taxa de rotatividade acima da média. A despeito disso, a relação de todas as outras políticas em consideração aos retornos acumulados parece ser próxima, porém guiadas pela estratégia de volatilidade no tempo que acumulou os maiores resultados ao fim do período. Das políticas consideradas, os cinco maiores índices de sharpe brutos são observados em sua maioria em políticas que atendem ao paradigma de Markowitz, sendo os quatro primeiros a mínima-variância restrita, a mínima-variância irrestrita, a volatilidade no tempo e o retorno ao risco no tempo, respectivamente, e, então, acompanhadas pela política paramétrica de portfólio com 21 características irrestrita.

Quanto aos custos é inegável, observando a figura 7, que a estratégia mais prejudicada se deu pela média-variância, enquanto as outras políticas mantinham uma relação aparentemente próxima, isso corrobora com a visão da literatura em relação a irrestrição do modelo de média-variância. Deve ser salientado que os custos exibidos tanto na figura 5 quanto na figura 7 foram sobre a margem mais alta utilizada nas demonstrações de 50 pontos base e, a partir disso, alterações para menores níveis implicariam somente em reduções do nível dos fatores e não da alteração de sua relação ordinal.

O efeito observado na figura 4 agora é parcialmente parecido, já que até meados da crise de 2008, a maioria das políticas testadas possuíam retornos acumulados próximos, apresentando afastamento crescente nos anos a frente, exceto pelo caso apresentado pela política de média-variância irrestrita, que já nos primeiros períodos relatados apresenta retornos acumulados menores se comparado a outras políticas e uma maior variação entre os anos de 2014 e 2016. Os custos, ao que

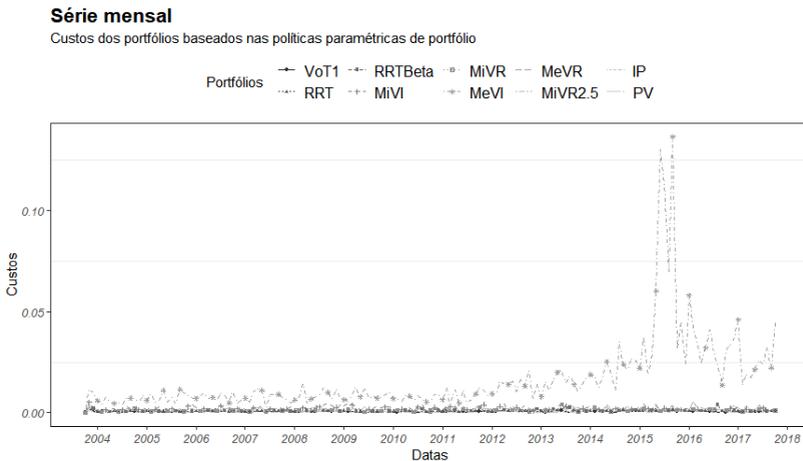
tudo indica, mantiveram relativa estabilidade durante todo o período, enquanto apresentaram maior fragilidade nos períodos posteriores a 2014.

Figura 6: Retornos brutos acumulados dos portfólios



Fonte: Elaboração própria.

Figura 7: Custos dos portfólios



Fonte: Elaboração própria.

Esse aumento da instabilidade da política de média-variância pode ser explicado comparando-se os períodos na figura 2. Durante o mesmo período o aumento do número de firmas toma uma maior aceleração, aumentando a proporção de empresas analisadas a cada período, proporcionando assim também o aumento do erro de estimação incorporado na média e na matriz de covariâncias, corroborando com a literatura. O mesmo aumento na instabilidade posterior a 2014 causou diminuição nos retornos também na política de média variância restrita, que acompanhou a queda da média-variância irrestrita até meados de 2016, quando retorna a grande corrente composta pela maioria dos portfólios analisados.

Já na tabela 4 são reportados os dados referentes ao desempenho de todas as políticas avaliadas, assim como os testes de significância HAC aplicados ao índice de Sharpe e a variância. Ela está dividida em sete colunas, reportando, respectivamente, o retorno bruto do portfólio, o desvio-padrão do retorno, a rotatividade, o índice de Sharpe bruto, o índice de sharpe líquido baseado em 50, 25 e 10 pontos base. A princípio, pode-se observar que os retornos brutos são em média próximos e que o efeito visual do arredondamento dos números a três dígitos acaba influenciando, porém, é possível observar, também, que a política com maior retorno (cerca de 24% maior), maior desvio-padrão e maior rotatividade é a média-variância, e que é algo bem explorado pela literatura, onde quando em vista de uma grande quantia de ativos, uma pequena alteração nos retornos gera mudanças bruscas nos pesos. As políticas paramétricas possuem retornos mais tímidos, porém não atrás da média das outras políticas. Se comparado com as demais, aparentam mais parcimônia em relação ao desvio-padrão e a rotatividade.

Tabela 4: Estatísticas descritivas e testes *HAC* com base na IP

Políticas	R. Bruto	Desv. Pad.	Turnover	I.S. Bruto	I.S. Liq. 0.5%	I.S. Liq. 0.25%	I.S. Liq. 0.1%
PPP ₂₁	0.014	0.045***	0.367	0.303	0.261	0.282	0.295
PPP ₃	0.014	0.055	0.161	0.265	0.25	0.257	0.262
PPP _{NS21}	0.014	0.055***	0.141	0.287*	0.273	0.28	0.284*
PPP _{NS3}	0.014	0.055	0.127	0.266	0.255	0.261	0.264
VoT1	0.015	0.045***	0.099	0.326***	0.315***	0.32***	0.324***
RRT	0.015	0.045***	0.133	0.321*	0.307	0.314	0.318
RRTBeta	0.014	0.063***	0.194	0.233	0.217	0.225	0.23
MiVI	0.013	0.032***	0.441	0.352	0.292	0.322	0.34
MiVR	0.015	0.045***	0.225	0.378**	0.349**	0.364**	0.373**
MeVI	0.018	0.235***	3.239	0.075*	0.008**	0.042**	0.062
MeVR	0.015	0.077**	0.324	0.188	0.167	0.178	0.184
MiVR2.5	0.015	0.077**	0.327	0.191	0.17	0.181	0.187
IP	0.015	0.055	0.095	0.269	0.26	0.264	0.267
PV	0.015	0.063***	0.082	0.228	0.222	0.225	0.227

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Um, dois ou três asteriscos (*) indicam se a diferença é significativa a um nível de 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Vale a pena ser mencionado que tanto nos retornos quanto nos desvios-padrão, o arredondamento dos números para três casas decimais os fizeram parecer valores próximos, e se observado o índice de Sharpe, mesmas quantias de retornos brutos e desvios-padrão (como no caso da PPP₃ e PPP_{NS21}) podem resultar em valores próximos, mas não iguais. Os menores índices de rotatividade aconteceram entre as políticas simplórias, as paramétricas com restrição a venda a descoberto, a volatilidade no tempo e o retorno ao risco no tempo; enquanto as políticas simplórias, volatilidade no tempo e retorno ao risco no tempo possuíam a proposta de baixa rotatividade entre os ativos, novamente os maiores extremos foram observados pela média-variância irrestrita, com uma média de rotatividade de 300% da carteira a cada período de tempo, seguido pela mínima-variância irrestrita e por fim pela política paramétrica com 21 características irrestrita.

Das variâncias analisadas, somente duas não foram estatisticamente significantes quando feito o teste de hipóteses em relação à política igualmente ponderada, estas foram as políticas paramétricas de portfólio de três características, com e sem restrições a venda a descoberto. Como os portfólios das políticas paramétricas montadas possuíam como base a política igualmente ponderada, a não significância

da variância representaria que ambas as políticas variaram de maneira relativamente próxima a níveis significantes. Outra possibilidade é referente a distribuição empírica que os portfólios com três características podem ter assumido, uma vez que a diferença entre as distribuições podem ter realmente acontecido, porém, pelo seu formato ainda assim se interceptavam de modo a não gerar resultados significantes.

Quanto aos índices de sharpe (quarta coluna) as políticas paramétricas apresentaram desempenho interessante, apesar de não possuírem os maiores indicadores (ficando atrás da volatilidade no tempo, retorno ao risco no tempo e mínima-variância restrito e irrestrito) apresentaram ainda assim desempenho superior ou próximo ao de algumas políticas. Ao mesmo tempo em que possuem índices de Sharpe razoáveis se comparados aos outros, nem todas as políticas paramétricas apresentaram significância alguma para poder explicar um nível de diferença considerável do índice de Sharpe, somente a versão restrita a venda a descoberto com 21 características a um nível menor que 10% de significância. Isso pode indicar que as informações contidas na combinação de três características não teriam poder para explicar diferenças razoáveis na amostra utilizada, ou a distribuição empírica dos retornos novamente atuou como fator diferencial no teste. Algumas outras políticas de portfólio que possuem índices de Sharpe acima da estratégia igualmente ponderada também apresentaram não significância quando testados, como o caso da mínima-variância irrestrito ou da política paramétrica irrestrita com 21 características.

Porém, a significância dos índices de Sharpe para a política paramétrica parece não se manter com alterações quanto a aversão ao risco da função utilidade CRRA. A tabela 5 trás os resultados das otimizações realizadas com diferentes índices de aversão ao risco e fornece informações a fim de compará-las com a estratégia igualmente ponderada. A princípio pode-se observar que a significância dos índices de Sharpe se alteraram com a variação do índice de aversão ao risco γ para 5 e 2, indicando que a um nível menor que 5% de significância existem diferenças quanto a distribuição dos índices de sharpe líquidos

calculados a partir de 50 pontos base e a um nível menor que 10% para o mesmo índice, porém, agora calculado a partir de 25 pontos base. Notadamente, enquanto houve essa alteração em relação ao nível do índice de Sharpe o mesmo não se repetiu em relação a variância dos retornos.

Tabela 5: Comparativo de variações da aversão ao risco

Políticas	R. Bruto	Desv. Pad.	Turnover	SR. Bruto	SR. Liq. 0.5%	SR. Liq. 0.25%	SR. Liq. 0.1%
$\gamma = 30$							
PPP ₂₁	0.013	0.045***	0.454	0.301	0.249	0.275	0.291
PPP ₃	0.014	0.055	0.82	0.25	0.178**	0.214	0.236
PPP _{NS21}	0.014	0.045***	0.168	0.286	0.269	0.277	0.282
PPP _{NS3}	0.014	0.055	0.129	0.269	0.257	0.263	0.266
$\gamma = 5$							
PPP ₂₁	0.013	0.045***	0.345	0.293	0.255	0.274	0.286
PPP ₃	0.014	0.055	0.134	0.264	0.251**	0.258*	0.261
PPP _{NS21}	0.014	0.055***	0.143	0.283	0.269	0.276	0.28
PPP _{NS3}	0.014	0.055	0.131	0.268	0.256	0.262	0.265
$\gamma = 2$							
PPP ₂₁	0.013	0.045***	0.327	0.28	0.245	0.262	0.273
PPP ₃	0.014	0.055	0.132	0.263	0.251**	0.257*	0.261
PPP _{NS21}	0.014	0.055***	0.135	0.269	0.256	0.262	0.266
PPP _{NS3}	0.015	0.055	0.127	0.269	0.257	0.263	0.266
IP	0.015	0.055	0.095	0.269	0.26	0.264	0.267

Fonte: Elaboração própria.

Se comparar as políticas de menor índice de aversão ao risco com as de maior nível de aversão ao risco (2 e 5 comparada com 10, respectivamente), pode-se notar que os efeitos da aversão ao risco não necessariamente ajudaram a construir estratégias com maiores índices de Sharpe em todos os casos. Como com as políticas irrestritas com 21 e 3 características e com a política restrita com 21 características, que apesar de pequenos obtiveram maiores resultados com maior índice de aversão ao risco, além de apresentarem casos significativamente diferentes da política igualmente ponderada, onde a política irrestrita com 3 características deixa de ter significância e a versão restrita a venda a descoberto com 21 características passa a obter significância a um nível menor que 10% para o índice de Sharpe bruto e líquido com 10 pontos

base. Observando todas as tabelas que possuem testes de significância é possível ver que, em todos os casos, os desvios-padrão foram significativamente relevantes fora da amostra a um nível de 0.01, exceto os casos das políticas com três características, o caso se repete para vários índices de aversão ao risco, mesmo quando estas tem índices de Sharpe significantes. Contudo esse efeito também se manteve com um índice de aversão maior (aqui considerado o caso extremo de $\gamma = 30$) também, onde se observado, apesar do menor índice de Sharpe encontrado entre as políticas paramétricas existe um nível de significância para se considerar que o índice de Sharpe líquido baseado em 50 pontos base é estatisticamente diferente do mesmo na política igualmente ponderada.

A tabela 6 possui os coeficientes dos vetores de parâmetros θ estimados fora da amostra para as quatro políticas paramétricas variando os índices de aversão ao risco entre 2, 5 e 30 pontos contendo as mesmas seleções de 21 e 3 características, mantendo também a mesma divisão da tabela em dois grupos, sendo a primeira repartição das linhas especificamente destinado as médias e desvios-padrão dos parâmetros obtidos, enquanto na segunda contém as informações com as descrições das distribuições dos pesos dos portfólios contidos na tabela. Os sinais de todas as características das PPP's₃ mantiveram-se iguais nos dois primeiros casos ($\gamma = 2$ e $\gamma = 5$), e a diferença surge quando se observa aversão ao risco extrema (relatada aqui quando $\gamma = 30$) que trouxe não só médias maiores para cada um dos parâmetros como troca de sinal na avaliação do momento de 1 mês para o caso da PPP₃, que a princípio era negativo e passou a se tornar positivo. O mesmo ocorre com outros parâmetros, trocas de sinais, alterações drásticas tanto da média quanto do desvio-padrão podem ser vistos em várias características. Outros exemplos notáveis podem ser observados na PPP₂₁ para a volatilidade, índice Alfa, correlação, DPA e VQAE.

Tabela 6: Políticas paramétricas de portfólios com diferentes γ 's

	$\gamma = 2$				$\gamma = 5$				$\gamma = 30$			
	PPP ₂₁	PPP ₃	PPP _{NS21}	PPP _{NS3}	PPP ₂₁	PPP ₃	PPP _{NS21}	PPP _{NS3}	PPP ₂₁	PPP ₃	PPP _{NS21}	PPP _{NS3}
θ_{VDM}	-0.113	-0.112	-0.033	0.106	-0.093	-0.097	-0.013	-0.024	-0.004	-0.826	0.036	0.018
Desv. Pad	0.049	0.05	0.02	0.189	0.041	0.045	0.011	0.063	0.031	0.7	0.023	0.149
$\theta_{VFA/P}$	0.007	0.009	0.012	0.016	0.019	0.03	0.015	0.02	0.122	0.725	0.008	0.031
Desv. Pad	0.019	0.02	0.013	0.022	0.024	0.039	0.011	0.029	0.073	0.561	0.018	0.075
θ_{Mom1}	-0.016	-0.073	0.005	-0.027	-0.099	-0.05	-0.02	0.029	-0.324	0.972	-0.044	0.02
Desv. Pad	0.066	0.083	0.013	0.094	0.091	0.103	0.019	0.106	0.11	1.011	0.027	0.079
θ_{Beta}	-0.08	-	-0.017	-	-0.076	-	0.001	-	-0.097	-	-0.007	-
Desv. Pad	0.077	-	0.039	-	0.081	-	0.029	-	0.149	-	0.016	-
θ_{Vol}	-0.093	-	-0.012	-	-0.194	-	-0.035	-	-0.504	-	-0.099	-
Desv. Pad	0.083	-	0.014	-	0.128	-	0.018	-	0.204	-	0.038	-
θ_{Alfa}	0.091	-	0.027	-	0.064	-	0.019	-	-0.049	-	-0.04	-
Desv. Pad	0.07	-	0.017	-	0.055	-	0.02	-	0.101	-	0.045	-
θ_{Corr}	0.038	-	-0.002	-	-0.046	-	-0.033	-	-0.366	-	-0.13	-
Desv. Pad	0.027	-	0.009	-	0.02	-	0.009	-	0.129	-	0.064	-
θ_{EDR}	-0.151	-	-0.05	-	-0.172	-	-0.016	-	-0.164	-	0.029	-
Desv. Pad	0.086	-	0.021	-	0.101	-	0.013	-	0.094	-	0.025	-
θ_{Feynor}	0.052	-	-0.005	-	0.046	-	0.004	-	-0.035	-	-0.017	-
Desv. Pad	0.037	-	0.028	-	0.031	-	0.01	-	0.075	-	0.024	-
θ_{Mom12}	0.053	-	0.005	-	0.064	-	-0.009	-	0.175	-	0.006	-
Desv. Pad	0.116	-	0.022	-	0.116	-	0.031	-	0.125	-	0.03	-
θ_{Mom36}	-0.075	-	0.001	-	-0.052	-	-0.012	-	-0.028	-	-0.026	-
Desv. Pad	0.114	-	0.024	-	0.107	-	0.034	-	0.135	-	0.049	-
θ_{Liq}	-0.1	-	-0.02	-	-0.126	-	-0.022	-	-0.221	-	-0.011	-
Desv. Pad	0.059	-	0.011	-	0.065	-	0.012	-	0.077	-	0.021	-
θ_{Neg}	-0.108	-	-0.031	-	-0.136	-	-0.028	-	-0.24	-	-0.015	-
Desv. Pad	0.063	-	0.015	-	0.069	-	0.012	-	0.08	-	0.021	-
θ_{RAZINF}	0.146	-	0.056	-	0.124	-	0.036	-	-0.012	-	0.046	-
Desv. Pad	0.083	-	0.019	-	0.064	-	0.017	-	0.061	-	0.015	-
θ_{DPA}	-0.076	-	-0.022	-	-0.013	-	0.053	-	0.234	-	0.116	-
Desv. Pad	0.045	-	0.027	-	0.058	-	0.064	-	0.092	-	0.05	-
θ_{VOLMED}	-0.083	-	0.004	-	-0.102	-	-0.009	-	-0.174	-	0.004	-
Desv. Pad	0.051	-	0.016	-	0.056	-	0.012	-	0.068	-	0.023	-
$\theta_{Sortino}$	0.162	-	0.073	-	0.147	-	0.056	-	0.066	-	0.055	-
Desv. Pad	0.084	-	0.023	-	0.067	-	0.014	-	0.062	-	0.013	-
θ_{FRI2}	0.215	-	0.075	-	0.238	-	0.081	-	0.275	-	0.064	-
Desv. Pad	0.136	-	0.021	-	0.129	-	0.021	-	0.072	-	0.02	-
θ_{FR36}	0.089	-	0.023	-	0.125	-	0.031	-	0.096	-	0.011	-
Desv. Pad	0.082	-	0.023	-	0.075	-	0.015	-	0.062	-	0.031	-
$\theta_{Estoc.6}$	0.163	-	0.031	-	0.198	-	0.064	-	0.316	-	0.099	-
Desv. Pad	0.102	-	0.016	-	0.111	-	0.019	-	0.123	-	0.029	-
θ_{VQAE}	-0.194	-	-0.05	-	-0.247	-	-0.053	-	-0.453	-	-0.042	-
Desv. Pad	0.101	-	0.026	-	0.138	-	0.021	-	0.293	-	0.022	-
$ w_i \times 100$	1.193	1.014	1.014	1.014	1.263	1.014	1.014	1.014	1.642	1.631	1.014	1.014
Min $w_i \times 100$	-3.285	-0.175	0.02	0.017	-3.735	-0.15	0.021	0.056	-8.408	-19.243	0.001	0.004
Max $w_i \times 100$	4.882	3.04	3.246	3.754	4.856	3.047	3.238	2.8	9.771	20.929	5.144	3.293
$\Sigma w_i I(w_i < 0)$	-0.006	-0.001	-	-	-0.007	-0.001	-	-	-0.013	-0.027	-	-
$\Sigma I(w_i \leq 0)/N_t$	0.155	-	-	-	0.181	-	-	-	0.243	0.114	-	-

Fonte: Elaboração própria.

Outros detalhes são observados na alocação do portfólio. Pouca diferença é notada quando se observa a aversão ao risco entre 2 e 5 e as maiores mudanças acontecem novamente quando focamos na versão extrema. Agora, a média absoluta dos pesos da PPP₂₁ e da PPP₃ aumentam, pois as alocações carregam estratégias maiores de venda a descoberto do observado nos casos anteriores. O crescimento mais expressivo acontece na política com três características que agora passa

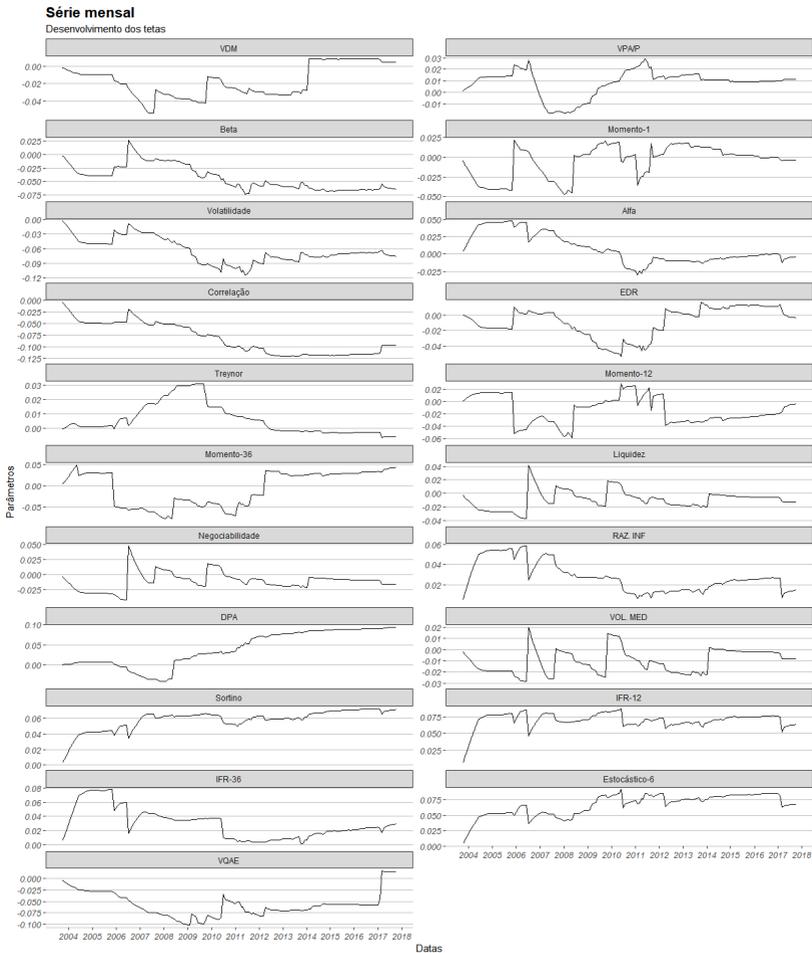
a ter alocações mais extremas no máximo e no mínimo registrado. As diferenças no desempenho de ambos os portfólios possuem várias explicativas, uma delas que vale a pena ser ilustrada é a possibilidade de portfólios irrestritos de contemplarem pesos negativos e positivos nas previsões, diferentemente de suas versões restritas.

A figura 8 apresenta o desenvolvimento dos parâmetros θ ao longo do tempo para um índice de aversão ao risco de $\gamma = 10$ para a versão com restrição a venda a descoberto. É possível observar algumas similaridades no comportamento de alguns dos parâmetros citados, como o índice beta, a volatilidade e a correlação, todos são indicadores relacionados ao risco dos ativos na carteira e demonstram uma tendência decrescente e de inversão de sinal na avaliação do otimizador. Outros que possuem comportamento similar são as características relacionadas a rotatividade de ativos e a sua disponibilidade no mercado, como a liquidez, a negociabilidade e o volume médio de transações, que assumiram valores positivos após 2005 até o final do período de otimização. Enquanto isso, o índice de Sortino, estocástico e o índice de força relativa de doze meses também possuíram comportamentos próximos durante o período de estimação, assim como a razão de informação Alfa e o índice de força relativa de 36 meses também se portaram de maneira parecida.

O comportamento parecido do posicionamento do otimizador em relação a diferentes características pode indicar informações que possuem mesmo valor significativo na análise. É comum, então, esperar que índices que remetam informações ao risco possuam trajetórias aparentemente semelhantes nos valores estimados para as PPP's.

Ao mesmo passo, existem índices que aparentemente não compartilham comportamentos semelhantes, como o dividendo por ação, variação da quantia de ativos emitidos e o erro de rastreamento, que estão mais relacionadas a como o comportamento da empresa influencia nas ações do investidor.

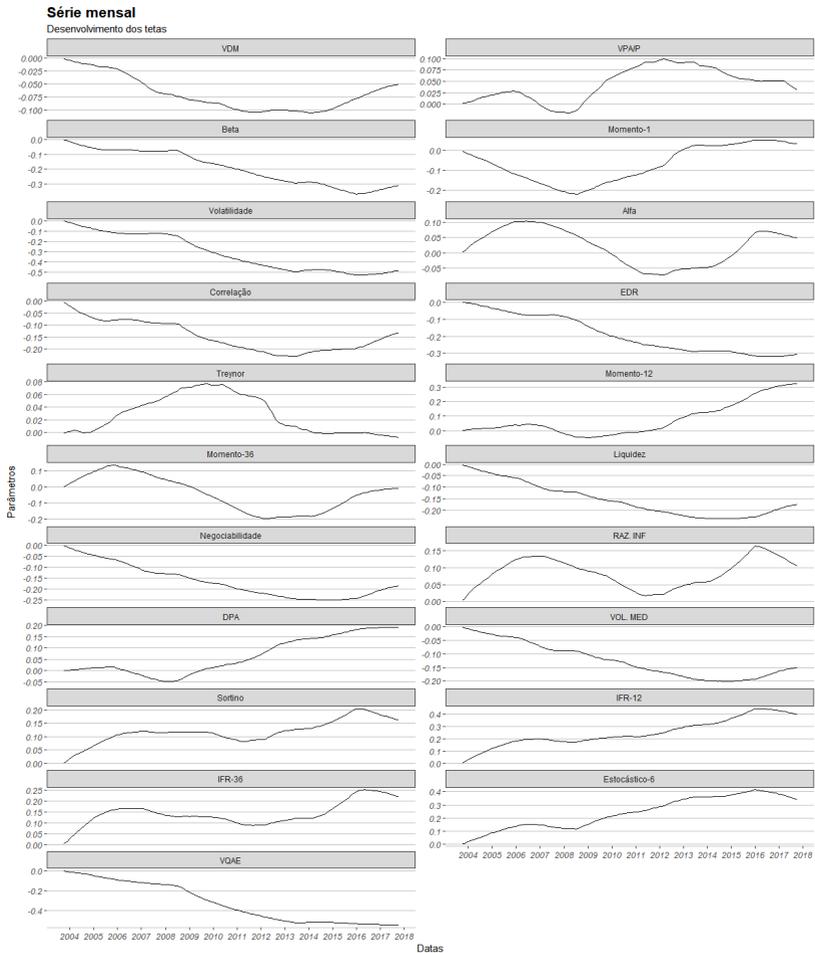
Figura 8: Desenvolvimento dos parâmetros θ para PPP_{NS21}



Fonte: Elaboração própria.

Para que se tenha discernimento entre as diferenças como a restrição de venda a descoberto influencia no comportamento dos parâmetros estimados a figura 9 mostra o desenvolvimento do vetor de parâmetros θ ao longo do tempo para as políticas paramétricas com índice de aversão de $\gamma = 10$ sem restrições de venda a descoberto.

Figura 9: Desenvolvimento dos parâmetros θ para PPP₂₁



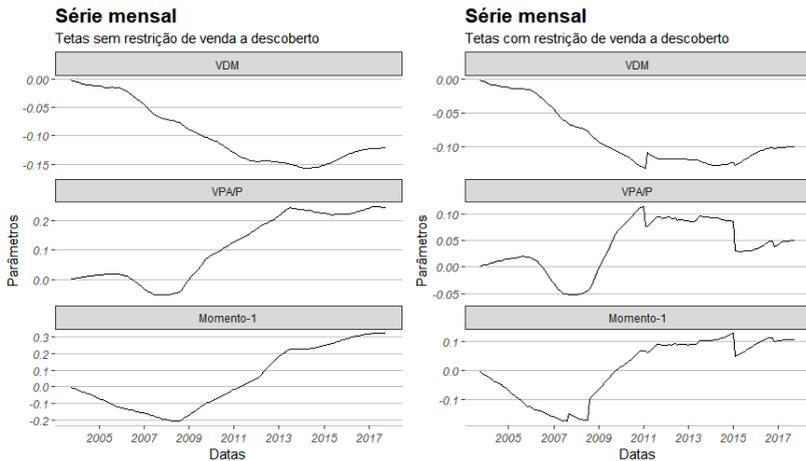
Fonte: Elaboração própria.

Verificando a imagem, é observável uma estrutura com transições mais suaves. Agora que o horizonte de previsão assume a existência de pesos negativos e positivos, a compensação de um pelo outro permite que as mudanças de como o otimizador considera não só o sinal mas também a magnitude das informações, aconteça de forma suave a cada nova janela de tempo. Com uma análise mais detalhada sobre a tendên-

cia de cada reta é possível ver grandes diferenças entre as abordagens; a exemplo de que é claramente visível a inversão de tendência do erro de rastreamento entre as duas políticas e para o caso sem restrição de venda a descoberto uma tendência clara de sinal negativo é vista desde o início dos resultados até o fim, possuindo também maior magnitude, enquanto há uma reversão durante a trajetória na versão com restrição de venda a descoberto.

Mudanças parecidas também são visíveis em outros parâmetros, como na negociabilidade em que para o caso restrito não é possível observar uma tendência clara, porém em sua maior parte possui sinal positivo e pouca grandeza, ao contrário do caso irrestrito que demonstra sinal, tendência e maior proporção; também quando foca-se na variação da quantia de ativos uma reversão de sinal é percebida entre as duas situações. Quanto aos momentos, todos possuíram visíveis mudanças, mais perceptivelmente na proporção.

Figura 10: Comparação entre PPP's



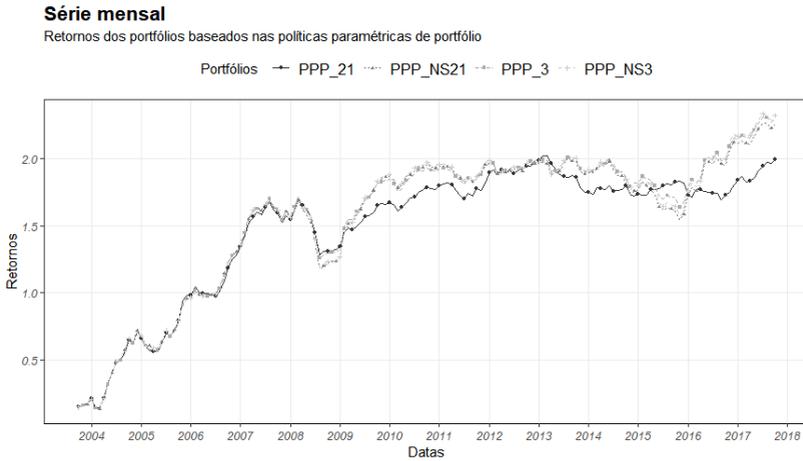
Fonte: Elaboração própria.

A figura 10 coloca lado a lado as trajetórias de ambas as políticas com relação a política de venda a descoberto para o caso de um índice de aversão ao risco de $\gamma = 10$, porém focado no caso com 3 característi-

cas. Curiosamente, poucas mudanças foram observadas na maioria dos casos, o que se deve maior atenção é para o momento do mês que sofreu as maiores mudanças na grandeza do parâmetro quando avaliado para o caso com restrição de venda a descoberto. O VPA/P também possui alterações mais modestas, porém, além dos citados, só a diferença de suavidade entre as séries é mais aparente. A menor diferença entre as políticas nesse caso ajuda a levantar suspeita de que as outras informações envolvidas no caso de 21 características ajudam a observar mais horizontes de possibilidade de otimização; uma das suspeitas que ajudaria a corroborar com essa ideia é que de todos os modelos avaliados, para todos os casos de aversão ao risco γ estritamente acima de 2, as versões com 21 características demonstraram maior índice de sharpe, maior tanto para os casos com restrições de venda a descoberto quanto para os casos irrestritos. Claramente a ideia de desempenho não pode pautar-se apenas no retorno ajustado ao risco, pois em casos de um investidor avesso a custos de transação, as versões de 21 características apresentam os maiores índices.

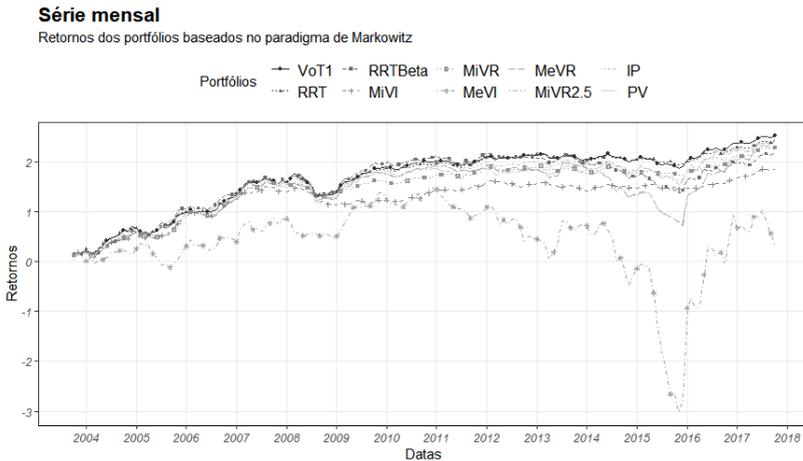
Por fim, pode-se observar nas figuras 11 e 12 os resultados dos retornos acumulados, dessa vez descontados os custos de transação de remanejamento do posicionamento do portfólio para um índice de aversão ao risco $\gamma = 10$ e para um custo de 50 pontos base. Como é possível ver, das estratégias paramétricas, os resultados acumulados da versão com 21 características irrestrito possuiu o menor valor ao longo dos anos, enquanto as outras três políticas restantes se mantêm próximas até o final do período; dado essa informação, pode-se inferir que a irrestrrição dos pesos, para este caso de várias características diminuiu a qualidade do portfólio talvez pelo grande número de informações que ajudariam a confundir o sinal pelo barulho, limitando a qualidade dessa versão, porém o mesmo não é visto quando restringimos os pesos, ou seja, para 21 características irrestritamente possuímos ainda os melhores resultados fora da amostra para todos os índices de aversão ao risco em suas versões líquidas, deixando créditos para a política com 21 características.

Figura 11: Retornos líquidos acumulados das PPP's



Fonte: Elaboração própria.

Figura 12: Retornos líquidos acumulados dos portfólios



Fonte: Elaboração própria.

Ao mesmo tempo, pode-se observar os resultados das outras políticas estimadas em que os resultados visualmente são próximos dos adquiridos com as políticas paramétricas, sendo estes liderados pela

volatilidade no tempo com os maiores retornos no fim do período. Novamente, os custos de transação gerados pelas alocações extremas da política de média-variância colaboraram para resultados desastrosos principalmente próximo ao final do período de estimação.

Tabela 7: Retorno acumulado ao final da amostra para as PPP's

	PPP ₂₁	PPP ₃	PPP _{NS21}	PPP _{NS3}
Ret. Liq.	199.6%	226.2%	230.4%	232.2%

Fonte: Elaboração própria.

O retorno líquido acumulado das políticas paramétricas de portfólio ao final do período analisado é observado na tabela 7. Como pode-se observar as versões que mais acumularam retornos líquidos foram as restritas com proximidade entre a versão com 3 e com 21 características. Isso pode ser explicado devido ao baixo custo que essas parametrizações tiveram se comparadas com suas versões irrestritas; enquanto isso, quando não se restringiu as estratégias, a maior perda de retorno acumulado ocorre com 21 características, o que indicaria um excesso de ruído na análise.

Tabela 8: Retorno acumulado ao final da amostra

	MeVI	MiVI	RRTBeta	MeVR	MiVR2.5	MiVR	IP	PV	RRT	VoT1
Ret. Liq.	31.7%	184.7%	219.4%	225.6%	225.9%	228.7%	237.1%	241.7%	242.3%	251.6%

Fonte: Elaboração própria.

Já na tabela 8 conseguimos comparar os retornos líquidos acumulados para todas as outras estratégias utilizadas como comparativo. Como observado anteriormente, as estratégias irrestritas de média e mínima-variância obtiveram os menores acúmulos, enquanto isso o desempenho das outras analisadas parecem se manter próximos das PPP's. Curiosamente, as políticas que mais obtiveram acúmulo nos retornos foram as que não necessitavam explicitamente de um algoritmo de otimização como plano de fundo, as quatro primeiras estratégias obtiveram retornos acima das políticas paramétricas, chegando a uma diferença próxima de 19% no caso mais extremo.

6 CONCLUSÕES

Esta dissertação focou nas aplicações da chamada política paramétrica de portfólio para o caso brasileiro, expandindo a análise no sentido de incorporação de mais fatores característicos que poderiam influenciar no desempenho de sua execução. A proposta apresentada contava com 21 características que contemplavam o universo de finanças e que poderiam contribuir ao modelo, além disso, desenvolveu-se o tema abrangendo a restrição de venda a descoberto já contemplada na literatura e a construção equacional do modelo. A flexibilidade oferecida pela equação oferecida pode ser adequada para se testar o efeito conjunto de índices popularmente utilizados nas operações de investimento ao redor do mundo como os de análise técnica e uma das principais veias dos estudos de finanças como os modelos baseados em fatores e anomalias.

A aplicação utilizou-se de 273 empresas que atuaram no mercado acionário brasileiro dentro do período de 1998 até 2017, que passa pelo mesmo processo de ajuste dos dados feitos nos artigos seminais, como a padronização das informações inseridas e o processo de winsorização dos dados, além de ter sido utilizada uma janela de estimação de 60 meses e 169 períodos de realocação do posicionamento, ou seja, 169 períodos fora da amostra são avaliados. A análise incorporou restrição de venda a descoberto, custos de transação, teste conjunto de informações e comparação deste com outras estratégias de otimização de portfólio já contempladas pela literatura, que conseguiram oferecer resultados satisfatoriamente comparáveis e robustos.

Mesmo oferecendo boas qualidades quanto a facilidade de estimação e abordagem prática em comparação com outros métodos, as políticas paramétricas possuíram, para essa amostra de ativos retirados do mercado acionário brasileiro, desempenho dentro da média; não se conseguiu apresentar os maiores retornos, nem as menores variâncias, porém um meio termo disso, somado com informações que as luzes dos

testes estatísticos ajudavam a compreender o comportamento dos retornos e, assim, prever boas alocações de recursos intertemporalmente entre os ativos, cabe lembrar de que esse tipo de abordagem ainda é terreno rico para pesquisas e que está em um processo de evolução até os dias de publicação desse trabalho.

Sobre os testes realizados, pode-se inferir que dada a flexibilidade da abordagem, a inserção de informações que participam de diferentes visões da literatura de finanças pode conter resultados significativamente positivos a um nível de 10% quando analisadas sobre um nível de aversão ao risco de $\gamma = 10$, ajudando assim a semear o solo que pode servir para maiores estudos sobre relevância de informações no mundo das finanças. Esses frutos que servem tanto aos praticantes ativos das mesas de operações quanto para o universo acadêmico que circunda essa atividade.

Quando trata-se de observar os retornos líquidos acumulados, as políticas paramétricas não alcançaram os melhores resultados, perdendo para estratégias simplórias e também para outras abordagens modernas que possuem relação com o paradigma de Markowitz; indicando possível como algumas vezes já observado na literatura que construção de carteiras que observam minimizar o risco utilizando-se de estratégias de diversificação, ponderação conforme volatilidade ou retorno ajustado ao risco possuem boas qualidade quando se tenta alcançar desempenhos acima da média ao longo do tempo.

Como já embasado pela literatura, o caso representativo de três características (valor de mercado, *book-to-market* e momento de um mês) também foi estatisticamente significativo a níveis de 5% (e 10% para alguns casos com custos a 25 pontos) em diferentes níveis de custos de transação, corroborando com trabalhos difundidos no universo acadêmico. É claro que os indícios registrados aqui servem como bandeira para análises cuidadosas para futuros modelos propostos para a mesma abordagem, sugerindo a necessidade de continuidade de pesquisas.

Mesmo sendo uma amostra do poder das políticas paramétri-

cas, a disponibilidade de novas pesquisas ao redor do assunto existe, em vista de que é necessário explorar mais afundo o assunto a fim de melhoras qualitativas na abordagem do modelo em futuras publicações e com maior desempenho em comparação com outras estratégias já contempladas na literatura. A princípio, a busca de relevância das características inseridas no modelo pode ser abordada por uma avaliação independente entre as características, isso evitaria problemas de alto nível de correlação entre as variáveis; seguinte a isso, a estruturação de um novo modelo novamente testando-se a significância conjunta das informações poderia ajudar a conhecer as melhores parametrizações possíveis, aumentando o desempenho das PPP's.

APÊNDICE A - Correlograma

Tabela 9: Correlograma das características utilizadas

	VDM	VPA/P	Mom1	Beta	Vol.	Alfa	Corr.	EDR	Treygnor	Mom12	Mom36	Liq.	Neg.	RAZ.INF	DPA	VOL.MED	Sortino	IFR12	IFR36	Estoc.6	VQAE	
VDM	1																					
VPA/P	-0.024	1																				
Mom1	-0.16	-0.625	1																			
Beta	-0.263	-0.22	0.216	1																		
Vol.	0.295	-0.225	0.588	0.02	1																	
Alfa	0.176	-0.514	0.255	0.154	0.449	1																
Corr.	-0.233	-0.263	-0.122	-0.047	-0.419	-0.016	1															
EDR	0.342	0.022	0.391	0.032	0.842	0.298	-0.78	1														
Treygnor	0.065	-0.271	0.123	0.082	0.154	0.584	-0.643	0.09	1													
Mom12	-0.505	-0.335	0.295	0.395	-0.353	0.06	0.019	-0.271	0.17	1												
Mom36	-0.656	-0.07	-0.119	-0.019	-0.466	-0.057	0.496	-0.645	-0.01	0.293	1											
Liq.	0.4	0.282	-0.416	-0.185	-0.18	-0.23	0.113	-0.152	-0.155	-0.358	-0.207	1										
Neg.	0.436	0.308	-0.43	-0.127	-0.064	0.274	0.741	-0.141	0.301	0.497	-0.402	-0.235	1									
RAZ.INF	0.658	-0.23	-0.702	-0.259	-0.485	-0.02	0.475	-0.52	-0.082	-0.369	0.219	0.443	0.406	1								
DPA	0.282	0.236	-0.702	-0.259	-0.485	-0.02	0.475	-0.52	-0.082	-0.369	0.219	0.443	0.406	0.262	1							
VOL.MED	0.277	0.139	-0.363	-0.123	-0.231	-0.107	0.239	-0.25	-0.081	-0.173	-0.088	0.911	0.844	0.157	0.426	1						
Sortino	0.562	-0.177	-0.151	-0.048	-0.214	0.753	-0.126	0.235	0.529	-0.146	-0.165	0.035	0.03	0.94	0.28	0.073	1					
IFR12	0.691	-0.224	-0.162	-0.132	0.207	0.686	-0.152	0.258	0.462	-0.152	-0.407	0.135	0.134	0.972	0.291	0.16	0.917	1				
IFR36	0.631	0.035	-0.485	-0.333	-0.282	0.005	0.301	-0.332	-0.011	-0.471	0	0.507	0.526	0.412	0.792	0.441	0.417	0.476	1			
Estoc.6	0.507	-0.478	0.249	-0.022	0.347	0.377	-0.118	0.336	0.059	-0.159	-0.16	-0.046	-0.058	0.45	-0.045	0.011	0.426	0.454	0.336	1		
VQAE	0.064	0.279	-0.648	-0.284	-0.408	0.003	0.392	-0.472	0.024	-0.376	0.523	0.214	0.22	0.098	0.767	0.203	0.25	0.132	0.644	0.008	1	

APÊNDICE B - Acrônimos

Tabela 10: Acrônimos e variáveis utilizadas

Acrônimo	Nome
θ_{VDM}	Valor de Mercado
$\theta_{VPA/P}$	VPA/P
θ_{Mom1}	Momento de um mês
θ_{Beta}	Beta
$\theta_{Vol.}$	Volatilidade
θ_{Alfa}	Alfa
$\theta_{Corr.}$	Correlação
θ_{EDR}	Erro de Rastreamento
$\theta_{Trey nor}$	Treynor
θ_{Mom12}	Momento de doze meses
θ_{Mom36}	Momento de 36 meses
$\theta_{Liq.}$	Liquidez
$\theta_{Neg.}$	Negociabilidade
$\theta_{RAZ.INF}$	Razão de informação
θ_{DPA}	Dividendo por ação
$\theta_{VOL.MED.}$	Volume médio
$\theta_{Sortino}$	Índice de Sortino
θ_{IFR12}	Índice de força relativa de doze meses
θ_{IFR36}	Índice de força relativa de 36 meses
$\theta_{Estoc.6}$	Estocástico de 6 meses
θ_{VQAE}	Variação na quantidade de ações emitidas

1. Aqui estão todos os acrônimos das variáveis inseridas nos modelos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. Ribeiro de; JR, W. E. Estimando o retorno das ações com decomposição do índice book-to-market: Evidências na bovespa. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 8, n. 4, 2010.
- ALMGREN, R. et al. Direct estimation of equity market impact. *Risk*, v. 18, n. 7, p. 5862, 2005.
- ANDREWS, D. W. Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 817–858, 1991.
- ANDREWS, D. W.; MONAHAN, J. C. An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 953–966, 1992.
- ANG, A. et al. The cross-section of volatility and expected returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 61, n. 1, p. 259–299, 2006.
- AZHAGAIAH, R.; PRIYA, S. The impact of dividend policy on shareholders wealth. *International Research Journal of Finance and Economics*, v. 20, n. 1, p. 180–7, 2008.
- BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981.
- BARAHONA, R. M. d. S. M. et al. *Parametric portfolio policies: An application for a global tactical asset allocation model*. Tese (Doutorado) — NSBE-UNL, 2012.
- BARRO, D.; CANESTRELLI, E. Tracking error: a multistage portfolio model. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 165, n. 1, p. 47–66, 2009.
- BEASLEY, J. E.; MEADE, N.; CHANG, T.-J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 148, n. 3, p. 621–643, 2003.

BEST, M. J.; GRAUER, R. R. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 4, n. 2, p. 315–342, 1991.

BEST, M. J.; GRAUER, R. R. The analytics of sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 17–37, 1992.

BLOOMFIELD, T.; LEFTWICH, R.; JR, J. B. L. Portfolio strategies and performance. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 201–218, 1977.

BM&FBOVESPA. *Histórico de adequações metodológicas dos índices da BM&FBOVESPA*. 2014. <http://www.b3.com.br/data/files/03/62/60/11/44541510FE0C840592D828A8/Historico-das-Adequacoes-Methodologicas-dos-Indices-da-BMFBOVESPA-Julho-2014.pdf>. Acessado: 2018-09-30.

BM&FBOVESPA. *Manual de definições e procedimentos dos índices da BM&FBOVESPA*. 2014. <http://bvmf.bmfbovespa.com.br/indices/download/Manual-de-procedimentos-pt-br.pdf>. Acessado: 2018-09-30.

BONDT, W. F. D.; THALER, R. Does the stock market overreact? *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 40, n. 3, p. 793–805, 1985.

BORISOVA, G.; BROWN, J. R. R&d sensitivity to asset sale proceeds: New evidence on financing constraints and intangible investment. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 37, n. 1, p. 159–173, 2013.

BRAILSFORD, T. J. The empirical relationship between trading volume, returns and volatility. *Accounting & Finance*, Wiley Online Library, v. 36, n. 1, p. 89–111, 1996.

BRANDT, M. Handbook of financial econometrics. North Holland, Ch. Portfolio choice problems, 2010.

BRANDT, M. W.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. Parametric portfolio policies: Exploiting characteristics in the cross-section of equity returns. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 22, n. 9, p. 3411–3447, 2009.

- BREALEY, R. A. et al. *Principles of corporate finance*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2012.
- BROADIE, M. Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 45, n. 1, p. 21–58, 1993.
- BROWN, J. R.; FAZZARI, S. M.; PETERSEN, B. C. Financing innovation and growth: Cash flow, external equity, and the 1990s r&d boom. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 64, n. 1, p. 151–185, 2009.
- BUENO, A. F. Os dividendos como estratégia de investimentos em ações. *Revista Contabilidade & Finanças*, SciELO Brasil, v. 13, n. 28, p. 39–55, 2002.
- CAMPBELL, J. Y.; GROSSMAN, S. J.; WANG, J. Trading volume and serial correlation in stock returns. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 108, n. 4, p. 905–939, 1993.
- CAMPBELL, J. Y.; HENTSCHEL, L. No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 281–318, 1992.
- CERETTA, P. S.; JR, N. C. da C. Avaliação e seleção de fundos de investimento: um enfoque sobre múltiplos atributos. *Revista de Administração Contemporânea*, SciELO Brasil, v. 5, n. 1, p. 7–22, 2001.
- CHAN, L. K.; HAMAOKA, Y.; LAKONISHOK, J. Fundamentals and stock returns in japan. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 46, n. 5, p. 1739–1764, 1991.
- CHAN, L. K.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. The risk and return from factors. *Journal of financial and quantitative analysis*, Cambridge University Press, v. 33, n. 2, p. 159–188, 1998.
- CHAN, L. K.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. On portfolio optimization: Forecasting covariances and choosing the risk model. *The review of Financial studies*, Oxford University Press, v. 12, n. 5, p. 937–974, 1999.
- CHANG, Y. Y.; FAFF, R.; HWANG, C.-Y. Liquidity and stock returns in japan: New evidence. *Pacific-Basin Finance Journal*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 90–115, 2010.

CHIANG, Y.-C. et al. Are technical trading strategies still profitable? evidence from the taiwan stock index futures market. *Applied Financial Economics*, Taylor & Francis, v. 22, n. 12, p. 955–965, 2012.

CHONG, T. T.-L.; NG, W.-K.; LIEW, V. K.-S. Revisiting the performance of macd and rsi oscillators. *Journal of risk and financial management*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 1, p. 1–12, 2014.

CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. In: *HANDBOOK OF THE FUNDAMENTALS OF FINANCIAL DECISION MAKING: Part I*. [S.l.]: World Scientific, 2013. p. 365–373.

COCHRANE, J. H. Presidential address: Discount rates. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 66, n. 4, p. 1047–1108, 2011.

CORREIA, L. F.; AMARAL, H. F.; BRESSAN, A. A. O efeito da liquidez sobre a rentabilidade de mercado das ações negociadas no mercado acionário brasileiro. *BASE–Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos*, v. 5, n. 2, p. 109–119, 2008.

CROESSMANN, R. A sharpe ratio neutral prior for bayesian portfolio selection. 2017.

DANIEL, K. et al. Measuring mutual fund performance with characteristic-based benchmarks. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 3, p. 1035–1058, 1997.

DANIEL, K.; HIRSHLEIFER, D.; SUBRAHMANYAM, A. Investor psychology and security market under-and overreactions. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 53, n. 6, p. 1839–1885, 1998.

DANIEL, K.; TITMAN, S. Market reactions to tangible and intangible information. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 61, n. 4, p. 1605–1643, 2006.

DAVIS, M. H.; NORMAN, A. R. Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of operations research*, INFORMS, v. 15, n. 4, p. 676–713, 1990.

DEMIGUEL, V. et al. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, Informs, v. 55, n. 5, p. 798–812, 2009.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the $1/n$ portfolio strategy? *The review of Financial studies*, Oxford University Press, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2007.

DEMIGUEL, V. et al. A portfolio perspective on the multitude of firm characteristics. 2017.

DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J.; UPPAL, R. Stock return serial dependence and out-of-sample portfolio performance. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 27, n. 4, p. 1031–1073, 2014.

ERGEMEN, Y. E.; TAAMOUTI, A. et al. *Parametric Portfolio Policies with Common Volatility Dynamics*. [S.l.], 2015.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 55–84, 1996.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Testing trade-off and pecking order predictions about dividends and debt. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 15, n. 1, p. 1–33, 2002.

FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973.

FENG, Y. Dynamic asset allocation: A bayesian approach. 2014.

FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 56, n. 1, p. 329–352, 2001.

FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing using “realized“ volatility. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 67, n. 3, p. 473–509, 2003.

FONSECA, N. F. et al. Recent performance analysis of mutual funds in Brazil (análise do desempenho recente de fundos de investimento no Brasil). 2007.

FROST, P. A.; SAVARINO, J. E. For better performance: Constrain portfolio weights. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 15, n. 1, p. 29–34, 1988.

FUTEMA, M. S. et al. Estrutura de capital, dividendos e juros sobre o capital próprio: testes no Brasil. *Revista Contabilidade & Finanças*, Universidade de São Paulo, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, v. 20, n. 49, p. 44–62, 2009.

GARCIA, A. S.; SANTOS, A. A. P. Dissecando anomalias com o modelo de cinco fatores para mercado acionário brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 16, n. 1, 2018.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993.

GOODWIN, T. H. The information ratio. *Financial Analysts Journal*, JSTOR, p. 34–43, 1998.

GREEN, J.; HAND, J. R.; ZHANG, X. F. The supraview of return predictive signals. *Review of Accounting Studies*, Springer, v. 18, n. 3, p. 692–730, 2013.

GREEN, J.; HAND, J. R.; ZHANG, X. F. The characteristics that provide independent information about average US monthly stock returns. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 30, n. 12, p. 4389–4436, 2017.

GREEN, R. C.; HOLLIFIELD, B. When will mean-variance efficient portfolios be well diversified? *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 5, p. 1785–1809, 1992.

GRILICHES, Z. Market value, R&D, and patents. *Economics Letters*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 183–187, 1981.

HALL, B. H.; JAFFE, A.; TRAJTENBERG, M. Market value and patent citations. *RAND Journal of Economics*, JSTOR, p. 16–38, 2005.

HALL, B. H.; JAFFE, A. B.; TRAJTENBERG, M. *Market value and patent citations: A first look*. [S.l.], 2000.

HANSEN, L. P. Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1029–1054, 1982.

HASBROUCK, J. Measuring the information content of stock trades. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 46, n. 1, p. 179–207, 1991.

HOVAKIMIAN, G.; TITMAN, S. *Corporate investment with financial constraints: Sensitivity of investment to funds from voluntary asset sales*. [S.l.], 2003.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 58, n. 4, p. 1651–1683, 2003.

JAMES, W.; STEIN, C. Estimation with quadratic loss. In: *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. [S.l.: s.n.], 1961. v. 1, n. 1961, p. 361–379.

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993.

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Profitability of momentum strategies: An evaluation of alternative explanations. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 56, n. 2, p. 699–720, 2001.

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Momentum. *Annu. Rev. Financ. Econ.*, Annual Reviews, v. 3, n. 1, p. 493–509, 2011.

JENSEN, M. C. The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 23, n. 2, p. 389–416, 1968.

JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Estimation for markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 75, n. 371, p. 544–554, 1980.

JOBSON, J. D.; KORKIE, R. M. Putting markowitz theory to work. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 7, n. 4, p. 70–74, 1981.

- JORION, P. International portfolio diversification with estimation risk. *Journal of Business*, JSTOR, p. 259–278, 1985.
- JORION, P. Bayesian and capm estimators of the means: Implications for portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 717–727, 1991.
- JORION, P. Value at risk. McGraw-Hill Professional Publishing, 2000.
- JORION, P. Portfolio optimization with tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal*, JSTOR, p. 70–82, 2003.
- JR, A. M. D. Análise de performance de investimentos. *Unibanco Global Risk Management*, 2000.
- KAN, R.; ZHOU, G. Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 42, n. 3, p. 621–656, 2007.
- KARPOFF, J. M. The relation between price changes and trading volume: A survey. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 22, n. 1, p. 109–126, 1987.
- KAUFMAN, P. J. *Trading Systems and Methods, + Website*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- KIRBY, C.; OSTDIEK, B. It,s all in the timing: simple active portfolio strategies that outperform naive diversification. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 47, n. 2, p. 437–467, 2012.
- KOLM, P. N.; TÛTÛNCÛ, R.; FABOZZI, F. J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 356–371, 2014.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, i shrunk the sample covariance matrix. 2003.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust performance hypothesis testing with the sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 15, n. 5, p. 850–859, 2008.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust performances hypothesis testing with the variance. *Wilmott*, Wiley Online Library, v. 2011, n. 55, p. 86–89, 2011.

- LEE, B.-S.; RUI, O. M. The dynamic relationship between stock returns and trading volume: Domestic and cross-country evidence. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 51–78, 2002.
- LELAND, H. Optimal portfolio management with transactions costs and capital gains taxes. 1999.
- LEWELLEN, J. The cross section of expected stock returns. 2014.
- LILLO, F.; FARMER, J. D.; MANTEGNA, R. N. Econophysics: Master curve for price-impact function. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 421, n. 6919, p. 129, 2003.
- LIU, W. A liquidity-augmented capital asset pricing model. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 82, n. 3, p. 631–671, 2006.
- LO, A. W.; WANG, J. Stock market trading volume. *Handbook of financial econometrics*, Amsterdam: North-Holland/Elsevier, v. 2, p. 241–342, 2009.
- MACHADO, M. A. V.; MEDEIROS, O. R. D. Modelos de precificação de ativos e o efeito liquidez: evidências empíricas no mercado acionário brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 9, n. 3, 2011.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MCLEAN, R. D. Share issuance and cash savings. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 99, n. 3, p. 693–715, 2011.
- MCLEAN, R. D.; PONTIFF, J.; WATANABE, A. Share issuance and cross-sectional returns: International evidence. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 94, n. 1, p. 1–17, 2009.
- MEADE, N.; BEASLEY, J. E. Detection of momentum effects using an index out-performance strategy. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2, p. 313–326, 2011.
- MEDEIROS, M. C.; PASSOS, A. M.; VASCONCELOS, G. F. Parametric portfolio selection: Evaluating and comparing to markowitz portfolios. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 12, n. 2, 2014.

- MEDEIROS, O. R. d.; MATSUMOTO, A. S. Emissões públicas de ações, volatilidade e insider information na bovespa. *Revista contabilidade & finanças*, SciELO Brasil, v. 17, n. 40, p. 25–36, 2006.
- MEMMEL, C. Performance hypothesis testing with the sharpe ratio. 2003.
- MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 323–361, 1980.
- MICHAUD, R. O. The markowitz optimization enigma: Is optimized optimal? *Financial Analysts Journal*, CFA Institute, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989.
- MILLER, M. H.; MODIGLIANI, F. Dividend policy, growth, and the valuation of shares. *the Journal of Business*, JSTOR, v. 34, n. 4, p. 411–433, 1961.
- MILLER, M. H.; ROCK, K. Dividend policy under asymmetric information. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 40, n. 4, p. 1031–1051, 1985.
- MURPHY, J. J. *Technical Analysis of the Futures Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications*, New York Institute of Finance. [S.l.]: Prentice-Hall, 1999.
- MUSSA, A. *A liquidez e os modelos de precificação de ativos: um estudo empírico no mercado acionário brasileiro de 1995 a 2011*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- MUSSA, A. et al. A estratégia de momento de Jegadeesh e Titman e suas implicações para a hipótese de eficiência do mercado acionário brasileiro. *Seminários em Administração*, v. 10, p. 2007, 2007.
- MYERS, S. C.; MAJLUF, N. S. Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 187–221, 1984.
- NAGEL, S. Empirical cross-sectional asset pricing. *Annu. Rev. Financ. Econ.*, Annual Reviews, v. 5, n. 1, p. 167–199, 2013.
- NI, Y.; LIAO, Y.-C.; HUANG, P. Momentum in the chinese stock market: Evidence from stochastic oscillator indicators. *Emerging Markets Finance and Trade*, Taylor & Francis, v. 51, n. sup1, p. S99–S110, 2015.

ORTIZ-MOLINA, H.; PHILLIPS, G. M. Real asset illiquidity and the cost of capital. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 49, n. 1, p. 1–32, 2014.

PASTOR, L.; VERONESI, P. Learning in financial markets. *Annu. Rev. Financ. Econ.*, Annual Reviews, v. 1, n. 1, p. 361–381, 2009.

PHAM, L. T. M. et al. Asset liquidity and firm innovation. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 58, p. 225–234, 2018.

PICCOLI, P. G. R. et al. Revisitando as estratégias de momento: o mercado brasileiro é realmente uma exceção? *Revista de Administração*, Universidade de São Paulo, FEA-Departamento de Administração, v. 50, n. 2, p. 183, 2015.

POLLET, J. M.; WILSON, M. Average correlation and stock market returns. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 96, n. 3, p. 364–380, 2010.

PONTIFF, J.; WOODGATE, A. Share issuance and cross-sectional returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 63, n. 2, p. 921–945, 2008.

RICHARDSON, S.; TUNA, I.; WYSOCKI, P. Accounting anomalies and fundamental analysis: A review of recent research advances. *Journal of Accounting and Economics*, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 410–454, 2010.

RODRIGUES, M. R. O efeito valor, o efeito tamanho e o modelo multifatorial: evidências do caso brasileiro. *XXIV Encontro da Associação Nacional de Pós-Graduação em Administração (Enanpad), Florianópolis. Anais... Rio de Janeiro: Anpad, (CD-ROM)*, 2000.

ROLL, R. A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 18, n. 4, p. 13–22, 1992.

ROSENBERG, B.; REID, K.; LANSTEIN, R. Persuasive evidence of market inefficiency. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 11, n. 3, p. 9–16, 1985. ISSN 0095-4918. <<http://jpm.ijjournals.com/content/11/3/9>>.

ROSENBERG, B.; REID, K.; LANSTEIN, R. market inefficiency. *Streetwise: the best of the Journal of portfolio management*, Princeton University Press, p. 48, 1998.

RUMELT, R. P. Diversification strategy and profitability. *Strategic management journal*, Wiley Online Library, v. 3, n. 4, p. 359–369, 1982.

SCHÄFER, J.; STRIMMER, K. A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics. *Statistical applications in genetics and molecular biology*, De Gruyter, v. 4, n. 1, 2005.

SCHLINGEMANN, F. P.; STULZ, R. M.; WALKLING, R. A. Divestitures and the liquidity of the market for corporate assets. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 64, n. 1, p. 117–144, 2002.

SCHULMEISTER, S. Profitability of technical stock trading: Has it moved from daily to intraday data? *Review of Financial Economics*, Wiley Online Library, v. 18, n. 4, p. 190–201, 2009.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, INFORMS, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963.

SHARPE, W. F. The sharpe ratio. *Journal of portfolio management*, INSTITUTIONAL INVESTOR INC 488 MADISON AVENUE, NEW YORK, NY 10022, v. 21, n. 1, p. 49–58, 1994.

SIBILKOV, V. Asset liquidity and capital structure. *Journal of financial and quantitative analysis*, Cambridge University Press, v. 44, n. 5, p. 1173–1196, 2009.

SORTINO FRANK A E VAN DER MEER, R. Downside risk. *Journal of portfolio Management*, v. 17, n. 4, p. 27–31, 1991.

SUBRAHMANYAM, A. The cross-section of expected stock returns: what have we learnt from the past twenty-five years of research? *European Financial Management*, Wiley Online Library, v. 16, n. 1, p. 27–42, 2010.

TREYNOR, J.; MAZUY, K. Can mutual funds outguess the market. *Harvard business review*, v. 44, n. 4, p. 131–136, 1966.

TREYNOR, J. L. How to rate management of investment funds. *Harvard business review*, HARVARD BUSINESS SCHOOL PUBLISHING CORPORATION 60 HARVARD WAY, BOSTON, MA 02163, v. 43, n. 1, p. 63–75, 1965.

VARGA, G. Índice de sharpe e outros indicadores de performance aplicados a fundos de ações brasileiros. *Revista de Administração Contemporânea*, SciELO Brasil, v. 5, n. 3, p. 215–245, 2001.

VIEIRA, K. M.; MILACH, F. T. Liquidez/iliquidez no mercado brasileiro: Comportamento no período 1995-2005 e suas relações com o retorno. *Base*, v. 5, n. 3, 2008.

WILDER, J. W. *New concepts in technical trading systems*. [S.l.]: Trend Research, 1978.