UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Anderson Zilio

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS ATRAVÉS DA COMBINATÓRIA E O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Florianópolis

2019

Anderson Zilio

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS ATRAVÉS DA COMBINATÓRIA E O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Felipe Lopes Castro

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zilio, Anderson
Resolução de Problemas Olímpicos através da Combinatória e o Princípio da Casa dos Pombos / Anderson Zilio ; orientador, Felipe Lopes Castro, 2019.
95 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Análise combinatória. 3. Problemas olímpicos. 4. Olimpíadas de matemática. 5. Princípio da casa dos pombos. I. Lopes Castro, Felipe . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Anderson Zilio

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS ATRAVÉS DA COMBINATÓRIA E O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Aldrovando Luis Azeredo Araújo
UFSC

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
UFSC

Prof. Dr. Mario Roldan (suplente)
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso
Data: 19/12/2019 21:34:24-0300
CPF: 908.897.119-68

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

UFSC
Assinado de forma digital por Felipe Lopes Castro:83506071068
Localização: Florianópolis, SC, Brasil
Dados: 2019.12.20 02:45:34 -03'00'

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Orientador

Florianópolis, 20 de Dezembro 2019.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Dr. Felipe Lopes Castro, por me guiar neste caminho, não só pelo conhecimento, mas principalmente pela paciência e carinho, com que me orientou, não tem com descrever a gratidão por tudo.

Aos professores da banca, pelas contribuições e dicas valiosas.

Aos professores do Profmat, por toda dedicação e ensinamentos.

Aos colegas de mestrado, pelas horas de ensino que dedicamos.

Aos meus pais, por acreditarem em mim e nunca desistirem.

À minha esposa, por estes anos de paciência e amor.

Ao Profmat e a UFSC, por ter proporcionado a oportunidade deste mestrado.

"A Matemática é a ciência mais barata. Não requer qualquer equipamento caro, ao contrário da Física ou da Química. Tudo o que precisamos para a Matemática é de um lápis e papel."

George Polya, 1962

RESUMO

Apresentaremos nesta dissertação uma abordagem da análise combinatória na resolução de problemas olímpicos de cunho nacional e internacional, analisando e mostrando para o leitor diversos exemplos e aplicações de diversas áreas da combinatória. Pouco é mostrado nas salas de aula de nível superior quando o assunto é esse ramo da matemática, em muitas grades curriculares a abordagem da mesma é através de uma, duas disciplinas dentro da grade de ensino. E apesar disso, é um dos tópicos que sempre está em provas olímpicas dentro e fora do Brasil. Trazemos um pouco do contexto da análise combinatória e juntamente, exemplificamos cada passo utilizando exercícios que foram aplicadas nessas olímpiadas. Além disso, trabalhamos um dos princípios mais conhecidos dessa área, o princípio da casa dos pombos de Dirichlet, evidenciando como, apesar de simples, o mesmo pode ser utilizado não somente na área de combinatória também como em outras áreas da matemática.
Palavras-chave: Análise combinatória, problemas olímpicos, olimpíadas de matemática, princípio da casa dos pombos

ABSTRACT

We will show in this dissertation an approach of combinatorial analysis in solving national and international Olympic problems, analyzing and showing to the reader several examples and applications of various areas of combinatorics. Little is shown in undergraduated classrooms when it comes to this branch of mathematics, in many curriculums the approach is through one, two disciplines within the curriculum. And yet, it is one of the topics that is always in Mathematical Olympiads, in Brazil and abroad. We bring a bit of the context of the combinatorial analysis and together we exemplify each step using exercises that were applied in Olympiads. In addition, we worked on one of the most well-known principles in this area, the Dirichlet's pigeonhole principle, showing how, even being simple. This principle can be used not only in combinatorics but in other areas of mathematics as well.
Keywords: Combinatorial analysis, olympic problems, math olympics, pigeonhole principle

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OBM	Olímpiada Brasileira de Matemática
RMO	Russian Mathematics Olympiad
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
AHSME	American High School Mathematics Examination
AMC	American Mathematics Competition
AIME	American Invitational Mathematics Examination
IMC	International Mathematics Competition
BMO	British Mathematical Olympiad
CMC	China Mathematic Competition
EFOMM	Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PMWC	Primary Math World Competition
IMO	International Mathematical Olympiad
ISOMB	International Students Olympiad MathOpen Belarus
IMO Shortlist	International Mathematical Olympiad Shortlisted Problems
PUTNAM	The William Lowell Putnam Mathematical Competition
USAMO	United States of America Mathematical Olympiad
PTST	Poland Team Selection Test
FAMAT	Faculdade de Matemática
ITST	Iran Team Selection Team
SATST	South Africa Team Selection Test

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sendo eu um professor dos ensinos fundamental e médio, muitas vezes me deparo procurando respostas para perguntas corriqueiras que assombram, imagino eu, colegas que lecionam outras disciplinas também: “Porque temos que aprender isso?”, “Onde vou usar isso na minha vida?”. Por inúmeras vezes, busco uma aplicação direta do assunto em questão e tento exemplificar com situações do cotidiano. Por mais que boa parte do conteúdo tenha alguma utilidade futura a esses adolescentes, não se pode negar que outra boa parte será irrelevante se os mesmos não seguirem carreira nas áreas de Matemática ou Física.

Essas comparações com situações reais do dia a dia, muitas vezes facilitam para que o aluno possa entender com mais clareza determinados problemas e possa também encontrar mais de um caminho para poder resolve-los, melhorando assim sua forma de compreensão, aguçando sua curiosidade e deixando que sua criatividade se torne cada vez mais presente, seria interessante se todos os professores agissem ou pelo menos pensassem desta forma, com certeza haveria menos adolescentes com medo ou ódio pela matemática. O foco deveria estar nos processos que levam a um resultado, e não apenas no resultado em si.

Na matemática existe uma área onde em geral é possível de visualizar os problemas fora do abstrato e facilmente traze-los ao “*mundo real*”: a análise combinatória.

Na combinatória existem problemas com níveis variados de dificuldade e que podem ser compreendidos por estudantes de diversos níveis de ensino. Qual a vantagem disso? Esses problemas geralmente podem ser resolvidos utilizando diversos métodos, desde técnicas simples de contagem até o uso estratégico de listas e manipulações de formulas, ou seja, um único problema combinatório pode ser apresentado de forma relevante a estudantes de anos iniciais e também a estudantes universitários.

Tendo estado inerte à margem da ciência matemática por séculos, a análise combinatória se transformou nas últimas décadas em um dos ramos de mais rápido crescimento da matemática, isto pode ser notado graças ao número de publicações que aparecem neste campo (aplicações em outros ramos da matemática e em outras ciências, e juntamente com isto, o interesse de cientistas, economistas e engenheiros em raciocínios combinatórios). O mundo matemático foi atraído pelo sucesso da álgebra e da análise e só nos últimos anos tornou-se claro que a combinatória tem seus próprios problemas e princípios. Esses são independentes daqueles em álgebra e análise, mas, enfrentam os mesmos em dificuldade, interesse prático e teórico e beleza.

Todos os anos, em cada uma das principais olimpíadas matemáticas, tanto de nível nacional quanto internacional, há pelo menos um problema envolvendo análise combinatória. São problemas que exigem dos participantes um alto nível de inteligência e criatividade para que possam encontrar uma solução. Mesmo nas competições mais recentes, há problemas tão difíceis que com uma única e brilhante ideia podem ser resolvidos. No entanto, para que se possa enfrentar esses problemas com um certo conforto é necessário ter enfrentado problemas de dificuldade menor ou similares e ter um bom conhecimento das técnicas que são normalmente utilizadas para resolvê-los.

A principio esta dissertação foi escrita com dois propósitos em mente: O primeiro seria explicar a base da teoria e algumas técnicas necessárias para resolver muitos dos problemas combinatórios que aparecem em olimpíadas de nível nacional e internacional, com exemplos claros de como as ferramentas aqui descritas podem ser inseridas nas soluções. O segundo seria de proporcionar aos estudantes que procuram participar de olimpíadas (e outros leitores interessados) uma vasta lista de problemas com sugestões e soluções. Essa dissertação pode então ser usada para fins de treinamento em olimpíadas de matemática ou como parte complementar em um curso de Análise Combinatória.

Muitos dos problemas e exemplos encontrados aqui já apareceram em olimpíadas de Matemática, procurei fornecer referências de quando apareceram pela primeira vez.

Este trabalho foi divididos em duas partes. O primeiro capítulo trata da teoria básica de Análise Combinatória, desde o Princípio Fundamental da Contagem até Permutações Caóticas. Cada passo dado nesse capítulo é acompanhado da parte teórica e demonstrações. Além disso, nos tópicos abordados aqui existem exemplos e problemas olímpicos aplicados para cada assunto.

No capítulo seguinte, é dada ênfase no princípio de gavetas de Dirichlet, ou Princípio da casa dos pombos. Essa é uma das ferramentas mais usadas em combinatória e uma das mais simples. É aplicada frequentemente em teoria de grafos, combinatória enumerativa e geometria combinatorial. Será visto que suas aplicações alcançam outras áreas da matemática, como Teoria de Números, Análise, entre outras. Nas olimpíadas, o uso deste princípio é considerado como uma regra de ouro, e os competidores devem sempre estar atentos na possível existência de uma maneira de aplicá-lo.

Mesmo que, em geral, boa parte dos problemas combinatórios tenham uma solução rápida ou fácil, isso não significa que o problema a ser resolvido não seja difícil. Diversas vezes a dificuldade de um problema em Analise Combinatória está no fato de que a ideia que dá início à solução está muito bem escondida. Graças a isso, a única maneira de realmente aprender a combinatória é resolver muitos problemas, ao invés de ler muita teoria. Esta prática é o que precisamente ensina o estudante a procurar e ir atrás destas ideias criativas e ocultas.

Ao final, é possível dizer que o objetivo principal desta dissertação não é simplesmente ensinar um pouco de combinatória, mas também ser uma leitura agradável aos leitores. Resolver problemas é uma disciplina aprendida com prática constante e que leva a uma grande sensação de satisfação.

1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Análise combinatória é frequentemente definida resumidamente como o ramo da matemática que estuda sobre contagem, e quando falamos em contagem estamos, em geral, querendo determinar a quantidade de elementos de algum conjunto finito.

Adotaremos a seguinte nomenclatura ao longo deste capítulo: evento é o nosso objeto de investigação, uma determinada condição ou proposição que desejamos investigar; decisão é cada escolha – ou possibilidade de escolha – que determina o evento. Para resolver problemas de contagem é comum subdividirmos o evento principal em sub-eventos ou estudá-lo através de uma analogia com outras situações já estudadas. Assim, problemas de contagem consistem em determinar a quantidade de possibilidades de um evento ocorrer.

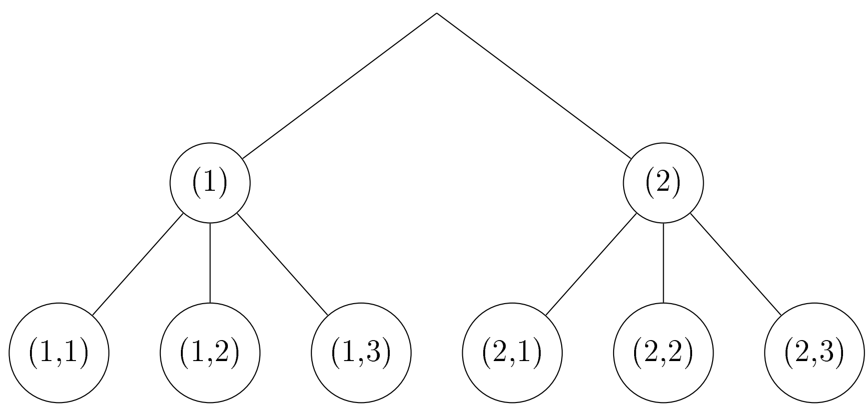
Iniciaremos pelo Princípio Fundamental da Contagem.

1.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Proposição 1.1 (Princípio Fundamental da Contagem). *Se há m modos de tomar uma decisão e se tomada essa decisão há n modos de tomar outra decisão, então há mn modos de tomar sucessivamente as duas decisões.*

Observação 1.2. O princípio fundamental da contagem pode ser representado através de um diagrama tipo árvore, onde os modos de tomar uma decisão são representados pelos galhos.

Considerando que tenhamos 2 formas de tomar a decisão 1 e que tomada essa decisão tenhamos 3 formas de tomar a segunda decisão, então obtemos a seguinte árvore:



De forma geral, se há n decisões a serem tomadas, $D_1, D_2, \ldots, D_n$, de forma que há x_1 modos de se tomar a decisão D_1, e tomada essa decisão há x_2 modos de se tomar a decisão D_2, e assim sucessivamente, até a decisão D_n, com x_n modos de tomá-la, então existem $x_1x_2\cdots x_n$ formas de tomar sucessivamente as decisões $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Esse princípio também é conhecido como *Princípio Multiplicativo.*

Observação 1.3. Dependendo do problema analisado, a ordem das decisões pode influenciar ou não no resultado final, assim devemos prestar atenção nesse aspecto quando resolvemos um problema.

Em muitos casos, uma decisão depende da(s) anterior(es), portanto a ordem não pode ser alterada. Em outros casos, as decisões são independentes da ordem em que as decisões são tomadas.

Problema 1.4. *Bruce possui 5 blusas, 3 calças e 2 pares sapatos. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?*

Solução. Vamos primeiro contar o número de maneiras que Bruce pode escolher a blusa e a calça. Para qualquer calça que Bruce escolha existem cinco possibilidades de escolher a blusa. Como ele possui cinco blusas e três calças, logo existem $5 \times 3 = 15$ modos de escolher o par (calça, blusa). Agora, para cada maneira de escolher esse par ele ainda tem duas maneiras de escolher os sapatos. Assim, Bruce pode se vestir de $5 \times 3 \times 2 = 30$ maneiras diferentes. Neste exemplo podemos ver que a ordem que Bruce escolhe as peças não importa para o resultado final. □

Problema 1.5 (MORGADO)**.** *Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?*

Solução. Neste problema não podemos assumir que a solução é: $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. Isso não garante que o número será menor que 5000 ou divisível por 5 (por ex. 5324). Temos que neste caso analisar as posições:

O último algarismo deve ser 5 (1 opção). O primeiro algarismo deve ser 2, 3 ou 4 (3 opções). E o segundo e terceiro algarismos não possuem restrições (4 opções cada).

Assim a resposta é: $3 \times 4 \times 4 \times 1 = 48$ números menores que 5000 e divisíveis por 5. □

Problema 1.6 (OBM 2006)**.** *Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?*

Solução. Precisamos que em todos os dígitos sejam exibidos números pares, mas como os dígitos das horas são de 00 a 23 e os dígitos dos minutos vão são de 00 até 59, logo existem restrições nos dígitos das horas e no primeiro dos dígitos que marcam os minutos. Dessa forma, em vez de pensar em cada dígito separadamente, vamos pensar em três "blocos de dígitos".

O primeiro bloco, que é formado pelos dois primeiros algarismos, pode assumir 7 valores diferentes: 00, 02, 04, 06, 08, 20 ou 22. O segundo bloco é formado apenas pelo terceiro dígito e pode assumir 3 valores: 0,2 ou 4. E o último dígito, que pode assumir 5 valores: 0, 2, 4, 6 ou 8.

Deste modo, pelo Princípio Fundamental da Contagem a quantidade de vezes em que todos os algarismos do relógio são pares é $7 \times 3 \times 5 = 105$. □

Problema 1.7 (RMO)**.** *Um número natural n é dito elegante se pode ser escrito como a soma de cubo com um quadrado $n = a^3 + b^2$, onde $a, b \in \mathbb{N}$. Entre 1 e 1.000.000 existem mais números que são elegantes ou que não são?*

Solução. Inicialmente podemos determinar a quantidade de quadrados perfeitos e a quantidade de cubos perfeitos que existem entre 1 e 1000000. Como todo número elegante é obtido a partir de um par (quadrado perfeito, cubo perfeito), assim a quantidade de números elegantes é menor ou igual ao produto dessas quantidades.

Como, existem $1000 = \sqrt{1000000}$ quadrados perfeitos nesse intervalo e existem $100 = \sqrt[3]{1000000}$ cubos perfeitos nesse mesmo intervalo, logo existem menos de $1.000 \times 100 = 100.000$ números elegantes.

Portanto, existem mais números não elegantes do que elegantes entre 1 e 1000000. □

O segundo princípio básico para resolver problemas de contagem é o princípio aditivo que é usado quando separamos o problema em casos distintos, definido a seguir.

Definição 1.8 (Princípio Aditivo)**.** Sejam A e B conjuntos finitos disjuntos, então a quantidade de elementos de $A \cup B$ é

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

onde $|X|$ denota a quantidade de elementos do conjunto finito X.

Problema 1.9. *Quantos números de 3 algarismos são maiores que 390 e têm todos os algarismos diferentes?*

Solução. Como os números desejados devem ser maiores que 390, logo o terceiro algarismo não poderá ser 1 ou 2. Mais ainda, a quantidade de modos de escolher o segundo algarismo muda se o terceiro algarismo for 3 ou for 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Assim, vamos contar separadamente os casos.

Se o número começar por 3, há 1 modo de escolher o terceiro dígito, 1 modo de escolher o segundo (deve ser igual a 9) e 7 modos de escolher o primeiro. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $1\times1\times7 = 7$ números distintos de três algarismos maiores que 390 e que começam por 3.

Se o número não começar pelo algarismo 3, existem 6 modos de selecionar o terceiro algarismo, 9 de selecionar o segundo e 8 do primeiro. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $6 \times 9 \times 8 = 432$ números de três algarismos maiores que 390 e que começam por 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.

Então, pelo princípio aditivo, temos $432 + 7 = 439$ números de 3 dígitos que são maiores que 390 e que têm todos os dígitos diferentes. □

Problema 1.10. *Quantos são os números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?*

Solução. Existem $9\times10\times10\times10 = 9000$ números naturais de 4 dígitos e $9\times9\times8\times7 = 4536$ naturais de 4 dígitos diferentes.

Como queremos somente os números que algum dígito repete pelo menos uma vez. pelo princípio aditivo, temos $9000 - 4536 = 4464$ números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais. □

Problema 1.11 (OBMEP 2017). *João escreveu todas as potências de 2, 3 e 5 maiores que 1 e menores que 2017 em uma folha de papel. Em seguida, ele realizou todos os produtos possíveis de dois números distintos dessa folha e os escreveu em outra folha de papel. Qual a quantidade de inteiros que João registou na segunda folha?*

Solução. Inicialmente, devemos encontrar as potências de 2, 3 e 5 registradas na primeira folha. Como $2^{10} < 2017 < 2^{11}$, $3^6 < 2017 < 3^7$ e $5^4 < 2017 < 5^5$, logo as potências escritas na primeira folha podem ser divididas em três conjuntos:

$$P_2 = \left\{2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}\right\}, \qquad P_3 = \left\{3^1, 3^2, \ldots, 3^6\right\} \qquad \text{e} \qquad P_5 = \left\{5^1, 5^2, 5^3, 5^4\right\}$$

Em virtude da fatoração única em números primos, P_1, P_2 e P_3 são conjuntos dois-a-dois disjuntos e os números obtidos pela multiplicação de elementos distintos desses conjuntos são também distintos. Assim, pelo princípio multiplicativo e aditivo, existem $10 \times 6 + 10 \times 4 + 6 \times 4 = 124$ produtos de duas potências de bases distintas.

Resta agora contarmos quantos produtos existem entre potências de mesma base. Dado um número primo q e o conjunto $P_q = \{q^1, q^2, \ldots, q^k\}$, o menor produto de potências distintas é $q^1q^2 = q^3$ e o maior é $q^{k-1}q^k = q^{2k-1}$. Verificaremos agora que todas as potências q^t com expoente t entre 3 e $2k-1$ podem ser obtidas como produto de dois números desse conjunto, analisando a paridade de t.

Se t é par, podemos escrever $t = 2m$, para algum inteiro m, e dado que $3 < t < 2k - 1$, temos $1 < m < k - 1$. Como q^{m-1} e q^{m+1} pertencem ao conjunto P_q, logo q^t é obtido por $q^{m-1} \cdot q^{m+1} = q^{2m} = q^t$.

Se t é ímpar, podemos escrever $t = 2m + 1$, para algum m inteiro, e dado que $3 < t < 2k - 1$, temos $0 < m < k - 1$. Como q^m e q^{m+1} pertencem a P_q, então obtemos $q^m \cdot q^{m+1} = q^{2m+1} = q^t$.

Deste modo existem exatamente $2k - 3$ produtos de potências distintas obtidas pela multiplicação de dois elementos de P_q. Aplicando essa contagem com $q = 2, 3$ *e* 5, podemos concluir que existem mais $17 + 9 + 5 = 31$ potências distintas de mesma base na segunda folha.

Portanto, o total de números na segunda folha é $124 + 31 = 155$. □

Problema 1.12 (AHSME 1989)**.** *Sr. e Sra Zeta querem nomear seu filho recém-nascido de modo que a primeira inicial, a inicial do meio e a última inicial seja um monograma*[1] *em ordem alfabética sem letras repetidas. Quantos monogramas são possíveis?*

Solução. Como o sobrenome dos pais (Zeta) acompanha o nome completo do filho, a última inicial é fixa Z. Se a primeira inicial for A, a segunda inicial deve ser $B, C, D, \ldots, Y$, no total de 24 escolhas. Se a primeira inicial for B, existem 23 escolhas para a segunda: $C, D, E, \ldots, Y$. Continuando neste pensamento, pelo processo aditivo, a quantidade de monogramas possíveis é:

$$24 + 23 + 22 + \cdots + 2 + 1.$$

Relembrando a fórmula

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

obtemos que existem $\dfrac{24 \times 25}{2} = 300$ monogramas possíveis. □

1.2 PERMUTAÇÕES, ARRANJOS E COMBINAÇÕES

Os principais tópicos de análise combinatória estudados no Ensino Médio são as permutações simples, arranjos e combinações.

Teorema 1.13 (Número de permutações.)**.** *A quantidade de modos de se organizar n elementos distintos em uma fila (onde a ordem dos elemento é relevante) é dada por*

$$P_n = n!$$

[1]Segundo Aurélio: Monograma é o entrelaçamento das letras iniciais ou principais no nome de pessoa ou entidade.

Demonstração. Para provar a fórmula acima, usaremos o método de indução matemática. Assim, devemos verificar para $n = 1$ e, em seguida, para provar que se a fórmula for verdadeira para um inteiro positivo k, então é verdadeira para o seu sucessor $k + 1$.

Se $n = 1$, o conjunto contém apenas um objeto. Neste caso, apenas a permutação trivial é possível colocando este objeto na primeira posição. Como $1! = 1$, logo a fórmula do número de permutações é válida para $n = 1$, e a base de indução matemática está estabelecida.

Suponhamos que a fórmula

$$P_k = k! \tag{1.1}$$

é verdadeira para algum inteiro positivo k, ou seja, o número de permutações do conjunto de k objetos distintos é igual a $k!$. Agora considere o conjunto de $k + 1$ objetos. Vamos escolher e marcar qualquer objeto do conjunto e considerar o conjunto de $k + 1$ objetos como a união do objeto marcado e o subconjunto de todos os objetos restantes. Note que o subconjunto tem k objetos.

Qualquer permutação do conjunto de $k+1$ objetos contém o elemento marcado na primeira posição, ou em alguma posição entre os elementos restantes. Portanto, considere todas as permutações de $k + 1$ objetos que tenham o elemento marcado na primeira posição. O número de tais permutações é igual ao número de todas as permutações dos k elementos restantes é $k!$ de acordo com a premissa de indução 1.1.

Em seguida, considere todas as permutações de $k+1$ objetos que tenham o elemento marcado na segunda posição. Mais uma vez, temos $k!$ restantes k elementos.

Mais ainda, para qualquer i entre 1 e $k + 1$ a quantidade de todas as permutações dos $k + 1$ objetos que possuem o elemento marcado na i-ésima posição é igual a $k!$.

Tudo isso nos fornece $(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$ permutações possíveis do conjunto de $k + 1$ objetos. É claro que todas essas permutações são diferentes e qualquer permutação possível de $k + 1$ objetos distintos é coberta dessa maneira.

Assim, provamos que se o número de permutações de k objetos é igual a $k!$, então o número de permutações de $k + 1$ objetos é igual a $(k + 1)!$. Por indução, o resultado é verdadeiro para todo n. □

Exemplo 1.14. Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra PROFMAT?

Solução. Como a palavra PROFMAT possui sete letras distintas (nossos elementos), utilizando a fórmula recém demonstrada temos:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

anagramas. □

Problema 1.15 (AMC 2001). *Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada uma das suas oito patas. Em quantas ordens diferentes a aranha pode colocar suas meias e sapatos, assumindo que, em cada pata, a meia deve ser colocada antes do sapato?*

Solução. Deixe a aranha tentar colocar todos os 16 itens em uma ordem aleatória. Cada uma das permutações de 16! é igualmente provável. Para qualquer pata fixa, existem dois tipos de situação, uma em que as meias foram colocadas antes dos sapatos e outra em que os sapatos foram colocados antes das meias. Como queremos somente a situação em que a meia entra antes do sapato, precisamos dividir a quantidade de possibilidades por 2. Como a aranha precisa colocar corretamente as meias antes dos sapatos em todas as pernas precisamos dividir a quantidade total por 2 para cada pata da aranha isto é, a quantidade total de permutações vezes $\frac{1}{2^8}$. Portanto, o número de permutações corretas deve ser $\frac{16!}{2^8}$. □

Problema 1.16 (OBM 2016). *Uma permutação* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ *dos números do conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *é* legal *se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de 3 e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de 3. Por exemplo,* $(4, 6, 2, 5, 3, 1)$ *é uma permutação legal dos números do conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Entretanto,* $(1, 2, 5, 3, 4, 6)$ *não é uma permutação legal do mesmo conjunto, pois os números 1 e 2 são vizinhos e sua soma é um múltiplo de 3. Além disso, outra razão para ela não ser legal, é que os vizinhos do número 4, que são o 3 e o 6, diferem por um múltiplo de 3.*

(a) Determine o número de permutações legais do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) Determine o número de permutações legais do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$.

Observação: Uma permutação de um conjunto é uma sequência ordenada contendo cada um de seus elementos uma única vez.

Solução. Para resolvermos este problema, vamos começar considerando apenas os restos deixados pela divisão por 3, que são 0, 1 e 2.

Considerando a primeira restrição, perceba que os números que deixam resto 1 e 2 não podem ser vizinhos, pois sua soma resultaria num múltiplo de 3, pelo mesmo motivo, números que deixam resto 0 também não podem ser consecutivos. Consideremos inicialmente uma permutação que inicia-se com um número que deixa resto 0, as possibilidades para o termo seguinte são deixar resto 1 ou resto 2.

Considerando a segunda restrição, perceba que os vizinhos de um número não podem deixar mesmo resto, pois a diferença destes seria divisível por 3. Portanto, considerando a permutação acima que se inicia com um número que deixa resto 0, temos 2 casos:

Caso 1: Se escolhermos um número cujo resto é 1, pelas considerações anteriores, o próximo termo também teria que deixar resto 1, depois deste, o próximo termo deixaria resto 0, o próximo teria que deixar resto 2, o próximo resto 2, o próximo resto 0, o próximo resto 1 e assim voltaríamos para a situação inicial e a sequência de restos estaria definida.

A sequência de restos deste caso seria da seguinte forma:

$$0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, \ldots$$

Caso 2: Se escolhermos um número cujo resto é 2, o próximo termo também teria que deixar resto 2 e utilizando o mesmo raciocínio do primeiro caso, a sequência de restos também estaria definida e se daria da seguinte forma:

$$0, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, \ldots$$

Caso a sequência começasse com números que deixam resto 1 ou 2, ao escolhermos o segundo termo, a sequência de restos também estaria definida. Por exemplo, se ela começasse com um termo que deixa resto 1, teríamos, novamente, dois casos:

Caso (i): Escolhemos um número que deixa 0 como segundo termo, a única possibilidade para o terceiro termo seria deixar resto 2 e estaríamos na situação do Caso 2.

Caso (ii): Escolhemos um número que deixa resto 1 como segundo termo, assim, a única escolha possível para o terceiro termo seria um número que deixa resto 1 e estaríamos na situação do caso 1.

Procedendo de forma análoga, mas considerando uma sequência que começasse com um número que deixa resto 2, tendo escolhido o termo seguinte, a sequência de restos também estará definida.

Ou seja, verificamos que escolhidos os restos dos dois primeiros termos o restante da sequência de restos está definida. Agora basta descobrir de quantas formas podemos escolher os dois primeiros restos e permutarmos cada número de acordo com seu resto. Perceba que sem considerar as restrições, a sequência de restos pode começar de 9 formas distintas: temos 3 possibilidades para o primeiro termo e 3 para o segundo. No entanto, considerando as restrições, os pares de restos 1 e 2, 2 e 1, 0 e 0 não devem ser considerados, portanto, temos 6 formas de começar a sequência de restos.

Agora, basta permutar cada número dentro de seus respectivos restos, perceba que as duas sequências do problema têm um número de termos que é divisível por 3, na primeira, que tem 6 termos, cada resto aparece duas vezes, pois $\frac{6}{3} = 2$. Na segunda, com 2016 termos, cada resto aparece $\frac{2016}{3} = 672$ vezes. Seja k a quantidade que cada resto aparece, então os números com um mesmo resto podem ser permutados de $k!$ formas, como temos 3 restos possíveis, dada uma sequência de restos, o número total de permutações possíveis para esta sequência é dado por $k! \cdot k! \cdot k! = (k!)^3$. Portanto, sabendo que há 6 sequências de restos possíveis, o número total de permutações legais dos conjuntos do problema é dado por $6 \cdot (k!)^3$. Calculando, temos:

(a) $6 \times (2!)^3 = 6 \times 8 = 48$ permutações legais.

(b) $6 \times (672!)^3$ permutações legais. □

Teorema 1.17 (Arranjo Simples). *Seja um conjunto com n elementos. O número de modos de se dispor p elementos deste conjunto em sequência (onde a ordem dos elemento é relevante), denotado por $A_{n,p}$ é dado por*

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Demonstração. O primeiro elemento da permutação pode ser escolhido de n maneiras, porque existem n elementos no conjunto. Assim, porque existem $n-1$ elementos restantes no conjunto depois de usar o elemento escolhido para a primeira posição. Da mesma forma, existem $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento, e assim por diante, até que existam exatamente $n-(p-1) = n-p+1$ maneiras de escolher o p-ésimo elemento.

Consequentemente, pela princípio multiplicativo, existem

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

permutações do conjunto. Além disso,

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

□

Problema 1.18 (MORGADO). *Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os times da primeira rodada?*

Solução. Precisamos escolher os 12 times e arranjá-los em 6 jogos, tomamos então o arranjo $A_{12,6}$ de possibilidades. Porém nestas escolhas, o jogo do time A contra o time

B, por exemplo, foi contado duas vezes (AB e BA). Precisamos então dividir por 2 as escolhas feitas. Igualmente para os demais 5 jogos. Portanto, o número possível de jogos é:

$$\frac{A_{12,6}}{2^6} = \frac{12!}{6! \times 2^6} = 10395 \text{ modos.} \qquad \square$$

Esta é uma das maneiras de resolver o problema. Existem uma outra solução que utiliza o método da combinação (que veremos mais a frente).

Problema 1.19 (AHSME 1994)**.** *Nove cadeiras seguidas serão ocupadas por seis alunos e pelos Professores Alfa, Beta e Gama. Esses três professores chegam antes dos seis alunos e decidem escolher suas cadeiras para que cada professor fique entre dois alunos. De quantas maneiras os Professores Alpha, Beta e Gamma escolhem suas cadeiras?*

Solução. Como cada professor deve sentar-se entre dois alunos, eles não podem se sentar nos assentos 1 ou 9 (os assentos em cada extremidade da fila).

Imagine os seis estudantes de pé em fila antes deles sentarem. Existem 5 espaços entre eles, cada um que pode ser ocupado por um dos três professores. Assim sendo, existem $A_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras dos professores escolherem seus lugares. $\square$

Problema 1.20. *Quantos números de quatro dígitos existem com dígitos distintos?*

Solução. O número total de arranjos é: $A_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)!}$

Mas esses arranjos também incluem os números que têm zero (0) na posição dos milhares. Esses números não são números de quatro dígitos e, portanto, precisam ser excluídos.

Quando 0 é fixado na posição da unidade de milhar, temos que organizar os restantes 9 dígitos, tomando 3 de cada vez de uma forma $\dfrac{9!}{(9-3)!}$.

Daí o número total de números de quatro dígitos é:

$$\frac{10!}{(10-4)!} - \frac{9!}{(9-3)!} = 5040 - 504 = 4536$$

$\square$

Teorema 1.21 (Combinação Simples)**.** *O número de modos de escolher p elemento dentre n possíveis, onde a ordem dos elementos é irrelevante é dado por*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Demonstração. O número de modos de escolher p elementos dentre n é dada por $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Como neste caso, a ordem dos elementos não é relevante, basta dividir pelo número de permutações de p elementos. Logo, o número de combinações é dado por $\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$. $\square$

Problema 1.22 (MORGADO). *Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os times da primeira rodada?*

Solução. Como comentado anteriormente este problema possui uma outra forma de resolver, vejamos:

Precisamos selecionar 2 dos times para cada jogo da primeira rodada (levando em conta que a ordem das escolhas das equipes não faz diferença), então para cada partida teremos:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10! \times 2!} = \frac{132}{2} = 66,$$
$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{90}{2} = 45,$$
$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{56}{2} = 28,$$
$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{30}{2} = 15,$$
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{12}{2} = 6,$$
$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{0! \times 2!} = \frac{2}{2} = 1.$$

Pelo princípio multiplicativo temos:

$$66 \times 45 \times 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 7.484.400.$$

Como a ordem das partidas também não faz diferença, dividimos o resultado por $6! = 720$.

Obtendo,

$$\frac{7484400}{720} = 10395 \text{ modos.}$$ □

Problema 1.23 (AIME 1996). *Duas casas de um tabuleiro 7×7 são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas equivalentes se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?*

Solução. Existem $\binom{49}{2}$ maneiras possíveis para selecionar dois quadrados para serem pintados de amarelo. Existem quatro maneiras possíveis de girar cada pintura. Dado um par arbitrário de quadrados amarelos, essas quatro rotações produzirão duas ou quatro placas equivalentes, mas distintas.

Note que um par de quadrados amarelos produzirá apenas 2 tabuleiros distintos, somente se os quadrados amarelos forem rotacionados simetricamente em torno do quadrado central; existem $\dfrac{49-1}{2} = 24$ tais pares.

Existem, então, $\dbinom{49}{2} - 24$ pares que geram 4 tabuleiros distintos após a rotação; em outras palavras, para cada um dos pares $\dbinom{49}{2} - 24$, existem outros três pares que geram uma pintura equivalente.

Assim, o número de tabuleiros inequivalentes é $\dfrac{\dbinom{49}{2} - 24}{4} + \dfrac{24}{2} = 300.$ □

Problema 1.24 (AIME 2005). *Um jogo usa um baralho de n cartas diferentes, onde n é um inteiro e $n \geq 6$. O número de conjuntos possíveis de 6 cartas que podem ser retiradas do baralho é 6 vezes o número de conjuntos possíveis de 3 cartas que podem ser sorteadas. Encontre n.*

Solução. O número de maneiras de sacar seis cartas de n é dado por

$$\binom{n}{6} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

E o número de maneiras de escolher três cartas entre n possíveis é

$$\binom{n}{3} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3 \times 2 \times 1}.$$

O problema nos fornece que $\dbinom{n}{6} = 6\dbinom{n}{3}$ logo:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3 \times 2 \times 1}.$$

Cancelando os termos semelhantes, ficamos com $(n-3)\,(n-4)\,(n-5) = 720$

Temos que encontrar uma fatoração do lado esquerdo desta equação em três inteiros consecutivos. Como 720 é próximo a $9^3 = 729$, tentamos 8, 9 e 10, o que funciona, então $n - 3 = 10$ e, portanto, $n = 13$. □

Problema 1.25 (IMC 2002). *Duzentos alunos participaram de um concurso de matemática. Eles tinham seis problemas para resolver. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 participantes. Provar que deve haver dois participantes de tal forma que cada problema foi resolvido por pelo menos um desses dois alunos*

Solução. Vamos supor que o contrário é verdadeiro. Ou seja, para quaisquer dois alunos, há algum problema que nenhum deles resolveu. Isso nos leva a contar os pares de alunos com seus problemas não resolvidos.

Vamos considerar a seguinte matriz obtida a partir dos dados do problema. Nós temos seis linhas, cada uma representando um problema, e 200 colunas, cada uma representando um aluno. À luz da observação acima, fazemos uma entrada da matriz 1 se o aluno correspondente à coluna não resolveu o problema correspondente à linha, e fazemos uma entrada 0 caso contrário. Uma configuração é ilustrada abaixo:

$$\begin{array}{r} \text{Problema 1} \\ \text{Problema 2} \\ \text{Problema 3} \\ \text{Problema 4} \\ \text{Problema 5} \\ \text{Problema 6} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Seja τ o conjunto de pares de 1's que pertencem à mesma linha. Vamos considerar a cardinalidade de τ de duas perspectivas diferentes:

Contando por colunas: assumimos que para quaisquer dois alunos, havia um problema que nenhum deles resolveu. Assim, para cada duas colunas, há pelo menos um par de 1's entre essas duas colunas que pertencem à mesma linha. Assim, podemos encontrar um elemento de τ em cada par de colunas. Já que existem $\binom{200}{2}$ pares de colunas, nos temos $|\tau| \geq \binom{200}{2} = 19900$.

Contando por linhas: nos é dito que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 alunos. Isso significa que há no máximo 80 1's em cada linha. Então, cada linha contém, no máximo, $\binom{80}{2}$ pares de 1's. Já que existem 6 linhas, temos $|\tau| \leq 6 \times \binom{80}{2} = 18960$.

Combinando as duas desigualdades acima, obtemos $19900 \leq |\tau| \leq 18960$, o que é claramente absurdo. Assim sendo, nossa suposição inicial deve ser falsa. Portanto, existem dois alunos de tal forma que cada problema foi resolvido por pelo menos um desses dois estudantes. $\square$

Problema 1.26 (BMC 2001)**.** *Doze pessoas estão sentadas em volta de uma mesa circular. De quantas maneiras seis pares de pessoas podem se envolver em apertos de mão de modo que nenhum braço se cruze?*

Solução. A seguir, assumimos que todos devem apertar as mãos, pois isso é fortemente implicado pela pergunta.

Considere a pessoa 1, ela só pode apertar as mãos das pessoas com um número ímpar de assentos de distância. Caso contrário, seu aperto de mão subdivide o conjunto em dois subconjuntos de números ímpares de pessoas, os quais assim devem ser novamente separados em apertos não cruzados, o que é uma impossibilidade.

Então, se nós chamarmos a_{2n} o número de empareamentos de apertos não cruzados possíveis para $2n$ pessoas sentadas em uma mesa redonda, então podemos raciocinar da seguinte maneira para a_{12}:

Considerando que a pessoa 1 está no assento 0, então esta deve apertar a mão de um dos indivíduos nos assentos $1, 3, 5, 7, 9$ ou 11, assentos orientados no sentido horário. Em cada caso, o número de possíveis pares de apertos de mão não cruzado para as pessoas restantes é $a_0a_{10}, a_2a_8, a_4a_6, a_6a_4, a_8a_2$ e $a_{10}a_0$, respectivamente, já que podemos tratar cada subconjunto criado pelo aperto de mão da pessoa 1 como uma 'mesa redonda' menor de apertos não cruzados (veja a Figura 1).

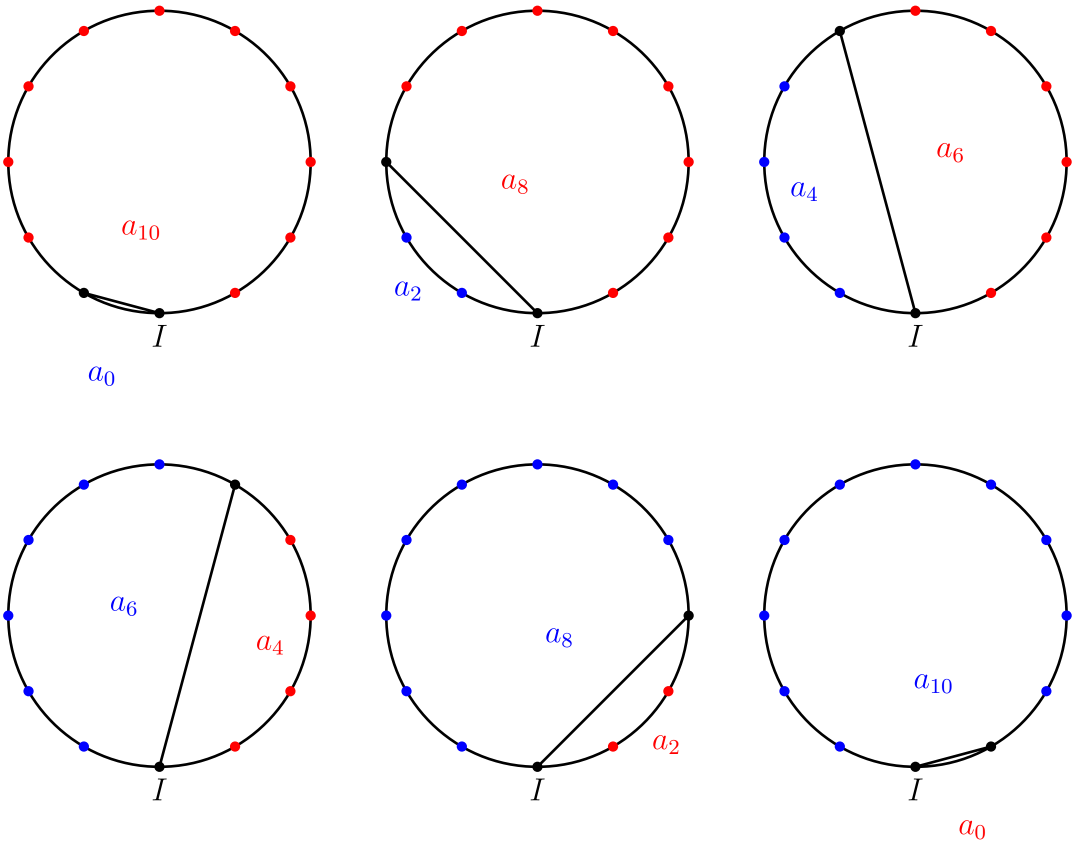


Figura 1: Apertos de mãos

Assim, o número total de pares de apertos de mão não cruzados de 12 pessoas em torno de uma mesa circular é dado pela soma dessas possibilidades

$$a_{12} = a_0a_{10} + a_2a_8 + a_4a_6 + a_6a_4 + a_8a_2 + a_{10}a_0.$$

De fato, em geral, para $2n$ pessoas em torno de uma mesa se colocarmos $c_n = a_{2n}$, então, na verdade, temos a recorrência do número de Catalan[2] para c_n:

$$c_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Como temos o mesmo valor inicial $c_0 = a_0 = 1$ e a recorrência para c_n quando $n \geq 1$, concluímos que c_n são, eles próprios, números de Catalan.

Então, em geral, onde c_n é o enésimo número catalão:

"Para $2n$ pessoas sentadas em torno de uma mesa circular, há c_n pares de apertos de mãos não cruzados."

Pode ser mostrado que o enésimo número de Catalan[3] é dado por:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Então temos nossa resposta:

$$a_{12} = c_6 = \frac{1}{7}\binom{12}{6} = 132 \text{ maneiras.}$$

□

1.3 PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Permutação em um círculo é chamada de permutação circular.

Se considerarmos uma mesa redonda e três pessoas, então o número de arranjos de assentos diferentes que podemos ter ao redor da mesa redonda é um exemplo de permutação circular.

A permutação circular é um caso muito interessante. Vamos tentar resolver o seguinte problema. Se tivermos 3 pessoas e quisermos organizá-las de maneira linear, o número total de permutações de 3 pessoas tomadas uma de cada vez é $P_3 = 3! = 6$. Agora, pelo bem de nossa conveniência, vamos represená-los como A, B e C. Assim, teremos os seguintes arranjos lineares:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

Agora a parte circular, se organizarmos estas 3 pessoas em torno de uma mesa

[2]Em combinatória os números de Catalan formam uma sequência de números naturais que ocorre em vários problemas de contagem, frequentemente envolvendo objetos definidos recursivamente. O nome é uma referência ao matemático belga Eugène Charles Catalan (1814 - 1894).

[3]Algumas demonstrações de como chegar nesta igualdade a partir da recorrência mostrada podem ser encontradas no livro Catalan Numbers with Applications, de Thomas Koshy.

redonda, como mostra a Figura 2 e a Figura 3, notamos que três dos arranjos que eram diferentes agora são iguais.Por exemplo, se você se mover no sentido horário, comece com A, ao redor da mesa na Figura 2, você sempre obterá ABC.

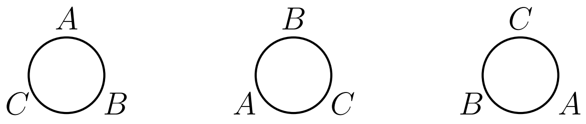


Figura 2: Disposição ABC

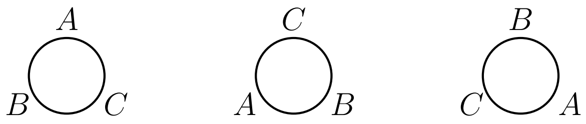


Figura 3: Disposição ACB

Então, verifica-se que 3 permutações lineares acabam se tornando uma mesma permutação circular.

Em geral, se tivermos n elementos, então a permutação linear total de n elementos tomados todos de uma vez é $n!$ E observamos que cada n permutações lineares correspondem a 1 permutação circular, assim obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.27 (Permutações Circulares)**.** *A quantidade de permutações circulares de n elementos distintos é dada por*

$$PC_n = (n-1)!.$$

Demonstração. Podemos verificar a igualdade de duas maneiras:
Primeira: Se não considerássemos equivalentes disposições que possa coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Segunda: Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há um modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há um modo de colocar o 2º objeto(ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há dois modos de colocar o 3º objeto(imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo), há três modos de colocar o 4º objeto (imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo ou imediatamente após o terceiro)...; há $n-1$ modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo,

$$PC_n = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!. \qquad \square$$

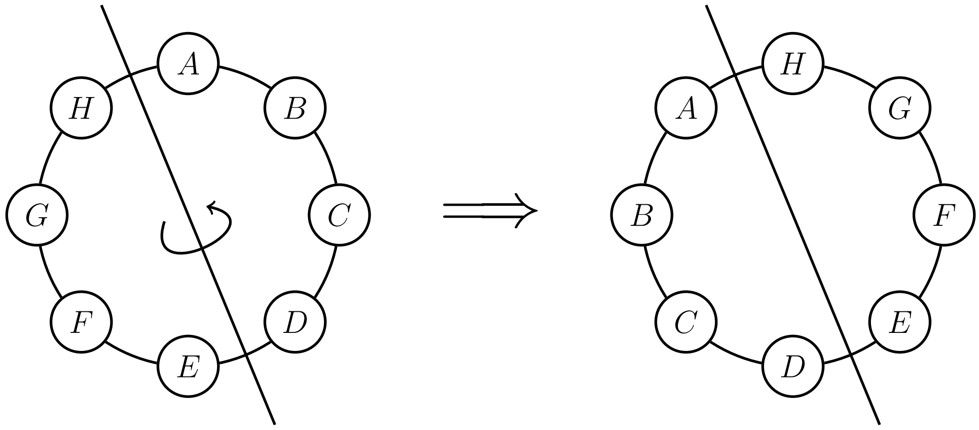


Figura 4: Pulseiras

Problema 1.28 (PLINIO). *De quantas maneiras 8 contas* [4] *distintas podem ser colocadas em um cordão elástico de modo a formar uma pulseira?*

Solução. Para uma dada pulseira, há $(8-1)! = 7! = 5040$ possibilidades. No entanto, este número conta duas vezes cada pulseira, pois cada uma tem sua simétrica obtida através de um giro em torno de um eixo diametral. Podemos observar na Figura 4 uma exemplificação de duas pulseira idênticas que estariam sendo contadas duas vezes nesta contagem de 5040 possibilidades (as letras de A a H representam as 8 contas):

Desta forma, são $\dfrac{5040}{2} = 2520$ pulseiras diferentes. □

Problema 1.29 (MORGADO). *De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?*

Solução. No total são 11 pessoas, destas 5 são mulheres. Para que elas permaneçam juntas vamos tomá-las como uma única "pessoa", e então teremos 6 homens mais uma "pessoa", utilizando permutação circular nestes sete indivíduos,

$$PC_7 = (7-1)! = 6! = 720.$$

Porém, são 5 mulheres que podem ficar de diversas formas na roda mesmo estando juntas, devemos então permutá-las de modo a descobrir quantas maneiras elas podem ficar juntas, que é igual a $5! = 120$.

Portanto, o total de modos de organizar estas 11 pessoas numa mesa redonda é $720 \times 120 = 84600$. □

Problema 1.30 (CMC 2004). *Nove bolas, numeradas de 1 a 9, são colocadas aleatoriamente em 9 pontos espaçados em um círculo, cada ponto com uma bola. Seja S a*

[4] Segundo Aurélio: Contas são ornatos feitos para enfeitar braceletes e pulseiras

soma dos valores absolutos das diferenças dos números de duas bolas vizinhas. Encontre a quantidade de casos que faz S ter o valor mínimo. (Observação: Se um arranjo das bolas for congruente a outro depois de uma rotação ou uma reflexão, os dois arranjos são considerado como o mesmo).

Solução. Nove bolas com números diferentes são colocadas em 9 pontos espaçados em um círculo, um ponto para cada bola. Isso é equivalente a um arranjo circular de 9 elementos distintos em um círculo. Assim, há 8! arranjos. Considerando as reflexões, existem $\frac{8!}{2}$ arranjos diferentes.

Em seguida, calculamos o número de arranjos, que fazem S ser mínimo. Ao longo do círculo existem duas rotas de 1 a 9, o arco maior e arco menor. Para cada um deles, seja $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os números das bolas sucessivas no arco, então

$$\begin{aligned}
&|1 - x_1| + |x_1 - x_2| + \cdots + |x_k - 9| \\
&\quad \geq |\,(1 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_k - 9)\,| \\
&\quad = |1 - 9| = 8.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se e somente se $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 9$, i.e. os números das bolas em cada arco estão aumentando de 1 até 9. Assim sendo, $S_{min} = 2 \times 8 = 16$.

Da análise acima, quando os números das bolas $\{1, x_1, x_2, \ldots, x_k, 9\}$ em cada arco são fixos, o arranjo que contém o valor mínimo é determinado exclusivamente. Divida o conjunto de 7 bolas $\{2, 3, \ldots, 8\}$ em dois subconjuntos, então o subconjunto que contém menos elementos tem $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 2^6$ casos. Cada caso corresponde a um arranjo exclusivo, que atinge o valor mínimo de S. Assim, o número de arranjos quando S leva o valor mínimo é $2^6 = 64$. □

1.4 PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES

Uma permutação de um conjunto de objetos é uma ordenação desses objetos. Quando alguns desses objetos são idênticos, a situação é transformada em um problema de permutações com repetição.

Problemas desta forma são bastante comuns na prática; por exemplo, pode ser desejável encontrar ordenações de meninos e meninas, estudantes de diferentes graus ou carros de certas cores, sem a necessidade de distinguir entre alunos da mesma série, ou carros da mesma cor, ou pessoas da mesma classe ou gênero. Nesse caso, o problema é implicitamente sobre permutações com repetição; os objetos repetidos são aqueles que não precisam ser distinguidos.

Teorema 1.31. *O número de permutações diferentes de n objetos, onde existem n_1 objetos idênticos do tipo 1, n_2 objetos idênticos do tipo 2, e, continuamente, n_k objetos idênticos do tipo k, é dado por*

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Demonstração. Para determinar o número de permutações, primeiro observe que os n_1 objetos do tipo 1 podem ser colocados entre as n posições em $\binom{n}{n_1}$ maneiras, deixando $n - n_1$ posições livres. Então os objetos do tipo dois podem ser colocados em $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneiras, deixando $n - n_1 - n_2$ posições livres. Continuando colocando os objetos do tipo três, até os objetos do tipo $k-1$, até que no último estágio, os objetos n_k do tipo k possam ser colocados em $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$ maneiras. Assim, pela regra do produto, o número total de diferentes permutações é

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \\
&= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.
\end{aligned}$$

□

Problema 1.32 (ADAPTADO MORGADO)**.** *Quantos anagramas podem ser formados com a palavra MISSISSIPPIS?*

Solução. São 12 letras ao total, sendo que se repetem cinco S's, quatro I's e dois P's. Logo, total de anagramas é:

$$P_{12}^{5,4,2} = \frac{12!}{5! \times 4! \times 2!} = 83160.$$

□

Problema 1.33 (AIME 2007)**.** *Uma mãe compra 5 pratos azuis, 2 pratos vermelhos, 2 pratos verdes e 1 prato laranja. Quantas maneiras existem para ela arrumar esses pratos para o jantar em torno de sua mesa circular, se ela não quer que os dois pratos verdes sejam adjacentes?*

Solução. Vamos encontramos o número total de casos em que os dois lugares verdes são adjacentes e subtrairemos do número total de casos.

Existem $(10-1)! = 9!$ de arrumar os partos em volta da mesa sem se preocupar com as cores, porém, como algumas cores repetem precisamos dividir por estas permutações, temos logo

$$\frac{9!}{5! \times 2! \times 2! \times 1!} = \frac{362880}{480} = 756 \text{ maneiras de arrumar os pratos.}$$

Se os dois pratos verdes estão adjacentes, podemos pensar neles como uma única entidade, de modo que agora há 9 objetos a serem colocados ao redor da mesa de maneira circular. Usando o mesmo argumento, existem

$$\frac{(9-1)!}{5! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{40320}{240} = 168 \text{ maneiras de ordenar os pratos.}$$

Portanto, o número de maneiras que existem é $756 - 168 = 588$. □

Problema 1.34 (EFOMM 2017 (adaptado)). *Quantos anagramas é possível formar com a palavra CAVALEIRO, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?*

Solução. A palavra cavaleiro tem 5 vogais e 4 consoantes, sendo nas vogais 2 letras A. Para que não haja duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas, o anagrama deve ser da forma:

vogal - consoante - vogal - consoante - vogal - consoante - vogal - consoante - vogal

Dessa forma, as posições de vogais e consoantes no anagrama estão bem definidas. Basta, agora, permutar as 4 consoantes distintas entre si e as 5 vogais entre si, lembrando que, por ter 2 letras A, é necessário utilizar permutação com elementos repetidos.

Portanto, a quantidade de anagramas que satisfazem as condições do enunciado é

$$P_4 P_5^2 = 4! \times \frac{5!}{2!} = 24 \times 60 = 1440.$$ □

Problema 1.35 (OBMEP 2019). *A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?*

Solução. Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de x, y e z o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, temos que:

$$x + y + z = 5, \text{ já que a rã pula 5 vezes}$$
$$x + 2y + 3z = 9, \text{ já que são 9 espaços a percorrer}$$

Subtraindo as duas equações, encontramos $y + 2z = 4$. Analisando a equação, as possibilidades para os saltos são: $\{1, 2, 2, 2, 2\}$, $\{1, 1, 2, 2, 3\}$ ou $\{1, 1, 1, 3, 3\}$. Mas como a ordem que a rã pula em cada caso não é especifica (por exemplo, no terceiro caso ela poderia ter pulado na ordem $\{1, 3, 3, 1, 1\}$), temos que levar em conta estas possibilidades.

Assim, para a primeira possibilidade temos $P_5^4 = \dfrac{5!}{4!} = 5$, para a segunda possibilidade temos $P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$ e para a terceira possibilidade, $P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = 10$.

Totalizando uma quantidade de $5 + 30 + 10 = 45$ possibilidades de Zinza chegar na pedra 10. $\square$

1.5 COMBINAÇÕES COMPLETAS

Imagine a seguinte problemática: De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em um bar que vende 4 tipos de refrigerante?

A solução para esse problema seria C_4^3, se ele afirmasse que deveríamos escolher 3 refrigerantes, dentre 4 diferentes a nossa disposição. Porém nesse problema temos 4 tipos de refrigerantes e podemos comprar mais de um de cada tipo.

Por exemplo, se os tipos de refrigerantes são Coca-Cola (C), Fanta (F), Soda (S) e Guarana (G), podemos escolher os 3 refrigerantes da seguinte forma:

CCC	CCF	CCS	CCG
FFF	FFC	FFS	FFG
SSS	SSC	SSF	SSG
GGG	GGC	GGF	GGS
CFS	CFG	CSG	FSG

Tabela 1: Maneiras de comprar os refrigerantes.

Essas são as 20 combinações completas possíveis para esse caso. Podemos pensar nesse problema da seguinte forma:

Seja a equação $C + F + S + G = 3$, com C, F, S e G naturais. Podemos interpretar que cada solução para essa equação linear representa uma possível forma de escolhermos os 3 refrigerantes. Por exemplo, a solução $(1, 0, 0, 2)$ significa que desses 4 refrigerantes que temos a disposição compramos 1 refrigerante C e 2 refrigerantes G (é o caso GGC mostrado acima).

Agora, vamos resolver a equação $C + F + S + G = 3$ nos inteiros não negativos. Observe o esquema a seguir:

$$C + F + S + G = 3$$

$$|+|+\ +| \qquad \text{(representa a solução } C = 1, F = 1, S = 0 \text{ e } G = 1)$$

$$+||+||+ \qquad \text{(representa a solução } C = 0, F = 2, S = 2 \text{ e } G = 0).$$

Para cada mudança de posição desses 6 símbolos, sendo 3 sinais (|) e 3 sinais (+) temos uma e somente uma única nova solução para essa equação. Basta agora determinarmos de quantos modos podemos *permutar* esse 6 símbolos, sendo que um deles aparece repetido 3 vezes e o outro também 3 vezes. Logo, o total de permutações é $P^{6}_{3,3} = C^{3}_{6} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$. Portanto, essa equação tem 20 soluções nos inteiros não negativos, que é a mesma quantidade encontrada anteriormente.

No caso geral, procuramos determinar o total de soluções inteiras não negativas de uma equação linear da forma

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = p.$$

Teorema 1.36 (Combinações Completas)**.** *A quantidade de combinações completas (com repetição) de n objetos escolhidos dentre p disponíveis, sendo possível considerar o mesmo objeto repetidas vezes, é dado por*

$$CR^{p}_{n} = C^{p}_{n+p-1}.$$

Demonstração. Para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = p$ teríamos p-vezes o símbolo | e $n-1$-vezes o símbolo $+$. Logo,

$$CR^{p}_{n} = P^{p,n-1}_{p+n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = C^{p}_{n+p-1}.$$

Portanto, $CR^{p}_{n} = C^{p}_{n+p-1}$. □

Vejamos alguns exemplos encontrados em Olimpíadas.

Problema 1.37 (PLINIO)**.** *Dispondo de um número ilimitado de moedas de cada um de 3 tipos distintos, de quantas maneiras podemos selecionar 20 moedas?*

Solução. O que importa na seleção que devemos efetuar é o número de moedas de cada um dos três tipos que for escolhido. Podemos, então, pensar na equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ para representar o problema. Nela, x_1, x_2 e x_3 representam o número respectivo de moedas de cada um dos três tipos distintos que forem escolhidos. Atribuindo o valor 20 à soma, estamos impondo que que o número total de moedas seja sempre igual a este valor.

Assim, a resposta ao nosso problema é igual a

$$CR^{20}_{3} = C^{20}_{3+20-1} = C^{20}_{22} = C^{2}_{22} = 231.$$

□

Problema 1.38 (ENEM 2017). *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados. No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis (mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo). Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?*

Solução. As cores dos 10 carrinhos podem ser amarelo (A), branco (B), laranja (L) e verde (V). Sabemos que deve haver pelo menos 1 carrinho de cada cor, ou seja:

$$A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1 \text{ e } D \geq 1.$$

Assim, podemos dizer que a quantidade de carrinhos no caminhão-cegonha é igual a $A+1+B+1+C+1+D+1 = 10$. Melhorando esta igualdade, ficamos com $A+B+C+D = 6$.

Temos assim uma situação para separar 4 cores em 6 carrinhos, usando combinação com repetição ficamos com:

$$CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84 \text{ modelos.}$$

□

Problema 1.39 (AIME 1998). *Seja n o número de quadruplas ordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) de números inteiros ímpares positivos que satisfazem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$. Determine* $\dfrac{n}{100}$.

Solução. Seja $x_1 = 2a + 11$, $x_2 = 2b + 1$, $x_3 = 2c + 1$ e $x_4 = 2d + 1$ onde a, b, c e d são inteiros positivos. Isso faz com que x_1, x_2, x_3 e x_4 números inteiros positivos ímpares. Fazendo nossas substituições e simplificando, ficamos

$$2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 + 2d + 1 = 98,$$

assim

$$2\left(a + b + c + d\right) + 4 = 98,$$

logo

$$a + b + c + d = 47.$$

Tudo o que precisamos fazer agora é encontrar a quantidade de quadruplas (a, b, c, d).

Podemos pensar utilizando a representação com os símbolos | e +. Utilizando combinação completa temos

$$CR_4^{47} = C_{4+47-1}^{47} = C_{50}^{47} = C_{50}^{3} = 19600.$$

Como queremos $\frac{n}{100}$, obtemos $\frac{19600}{100} = 196$. □

1.6 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO - EXCLUSÃO

Considere uma pesquisa, com 100 pessoas, onde seja perguntado qual animal de estimação a pessoa tem: gato ou cachorro. Os resultados foram os seguintes: 55 responderam que tem como animal de estimação um gato, 58 responderam que tem como animal de estimação um cachorro e 20 pessoas que tem como animal de estimação ambos. Quantas pessoas têm gato ou cachorro?

Podemos ingenuamente pensar na seguinte solução para este problema: "*já que 55 pessoas têm gatos e 58 têm cachorros, logo* $55 + 58 = 113$ *têm um ou outro*". Este pensamento está errado, pois ignora que algumas pessoas – 20 delas – têm ambos, e acabamos contando essas pessoas duas vezes, quando somamos 55 e 58. Para corrigir a nossa resposta, devemos subtrair dessa soma o número 20, deste modo $55 + 58 - 20 = 93$ pessoas têm gatos ou cachorros.

Este é um exemplo simples do princípio da inclusão-exclusão.

Proposição 1.40 (Princípio da Inclusão - Exclusão (para 2 conjuntos))**.** *Dados dois conjuntos (finitos) A e B, a quantidade de elementos da união desses conjuntos é dado por*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Denotando a quantidade de elementos comuns a A e B por x_2, a quantidade de elementos que pertençam a A e não a B por x_1 e a quantidade de elementos que pertençam a B mas não a A por x_3, como mostra a Figura 5
temos então que

$$|A \cup B| = x_1 + x_2 + x_3$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} |A| + |B| - |A \cap B| &= (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) - x_2 \\ &= x_1 + x_2 + x_3 = |A \cup B|. \end{aligned}$$

□

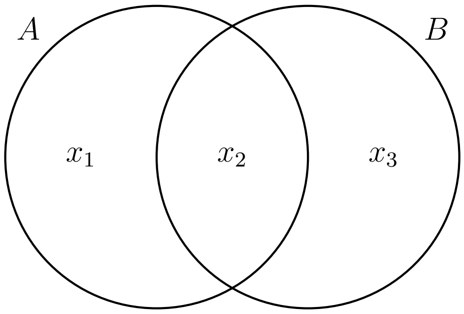


Figura 5: Figura

Exemplo 1.41. Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 5 ou 11?

Solução. Vamos definir como A o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 5. E por B o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 11.

Queremos calcular $|A \cup B|$. Temos que

$$|A| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200,$$

em que [ ] representa a parte inteira de um número real.

$$|B| = \left[\frac{1000}{11}\right] = 90,$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{1000}{55}\right] = 18,$$

pois $(A \cap B)$ é o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 5 e 11, isto é, que são divisíveis por 55.

Pelo Princípio da Inclusão–Exclusão para dois conjuntos (Proposição 1.40), temos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 200 + 90 - 18 = 272.$$

que é a quantidade procurada. $\square$

Agora, o Princípio da Inclusão - Exclusão para três conjuntos (finitos), A, B, C, afirma que:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

De modo geral, a quantidade de elementos da união é encontrada adicionando o número de elementos de cada conjunto subtraindo a quantidade de elementos da intersecção de dois conjuntos, adicionando o número de elementos da interseção de três conjuntos, subtraindo a quantidade de elementos da interseção de quatro conjuntos, e assim por diante. Essa soma alternada termina adicionando ou subtraindo o número de elementos da interseção de todos os conjuntos.

Teorema 1.42 (Princípio da Inclusão – Exclusão)**.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ quaisquer conjuntos (finitos). Então a quantidade de elementos da união é dada por*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{1\leq i\leq k} |A_i| - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\ + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k|.$$

Uma forma muito elegante e sucinta de se escrever a fórmula de Inclusão-Exclusão é dada por

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Demonstração. Vamos proceder a demonstração por indução em k. Para $k=1$, a fórmula reduz-se à identidade trivial $|A_1| = |A_1|$. O passo de indução de k para $k+1$ faz uso do caso especial $k=2$, que foi discutido acima na Proposição 1.40.

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right| \\
&= \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{k+1}| - \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} (A_i \cap A_{k+1})\right| \\
&= \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{k+1}| - \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{k+1\}} A_i\right| \\
&= \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k+1\}\\ k+1\notin I, I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k+1\}\\ k+1\in I}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k+1\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.
\end{aligned}$$

Isto completa a indução. □

Problema 1.43 (OBMEP 2014). *Em uma orquestra de cordas, sopro e percussão, 23 pessoas tocam instrumentos de corda, 18 tocam instrumentos de sopro e 12 tocam instrumentos de percussão. Nenhum de seus componentes toca os três tipos de instrumentos, mas 10 tocam instrumentos de corda e sopro, 6 tocam instrumentos de corda e percussão e alguns tocam instrumentos de sopro e percussão. No mínimo, quantos componentes há nessa orquestra?*

Solução. Defina os conjuntos:

$A_1 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de corda;

$A_2 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de sopro;

$A_3 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de percussão.

Com isso temos:

$|A_1| = 23, |A_2| = 18$ e $|A_3| = 12$. Além disso, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0, |A_1 \cap A_2| = 10, |A_1 \cap A_3| = 6$ e $|A_2 \cap A_3| = y$, para algum $y \in \mathbb{N} - \{0\}$

Logo o número de componentes da orquestra é:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$
$$= 23 + 18 + 12 - 10 - 6 - y + 0 = 37 - y.$$

Observe que $|A_1 \cap A_2| = 10$ e $|A_1 \cap A_3| = 6$, com isto resta apenas 8 pessoas em A_2 e 6 pessoas em A_3, caso contrário, teríamos $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \neq 0$. Logo, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ é mínimo quando y for máximo, ou seja, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 37 - 6 = 31$ pessoas. □

Problema 1.44 (PLINIO). *Considerando 6 lançamentos de um dado comum (6 faces distintas) e o resultado obtido em cada um deles, responda:*

(a) Qual o número de lançamentos possíveis?

(b) Calcule o número de maneiras que os lançamentos resultem em 6 faces iguais, exatamente 2 distintas, exatamente 3 distintas, e assim por diante, até o número de maneiras que resultem em 6 faces distintas. Verifique, em seguida, se a soma das parcelas obtidas condiz com o número encontrado no item (a).

Solução.

(a) Cada lançamento pode resultar em 6 valores distintos e, como são 6 os lançamentos, o número de possibilidades é $6^6 = 46656$.

(b) Por razões simples, vamos dividir o problema em casos:

(i) Número de maneiras de resultarem seis faces idênticas: É fácil ver que, como só temos seis valores possíveis, são apenas 6 as possibilidades nesse caso.

(ii) Número de maneiras de resultarem exatamente duas faces distintas: Sejam, por exemplo, tomadas as faces 1 e 2 dos dados. Calcularemos o número de maneiras de que exatamente tais faces resultem no lançamento. Como temos 6 dados e cada um deverá resultar em 1 ou 2, são 2^6 as possibilidades. Nesse número, porém, estão embutidos os dois casos em que só uma das faces ocorre (só o valor 1 ou só o valor 2). Então, para cada par de faces distintas, temos $2^6 - 2$ opções em que exatamente duas faces ocorrem. Ocorre, ainda, que são $\binom{6}{2}$ as escolhas possíveis das duas faces. Então, o resultado é $\binom{6}{2} \times \left(2^6 - 2\right) = 15 \times 62 = 930$.

(iii) Número de maneiras de resultarem exatamente três faces distintas: Aplicando um resolução parecida à da parte *ii*, tomemos as faces 1, 2 e 3 dos dados e vejamos qual o número de maneiras das três ocorrem sem exceção. São 3^6 as possibilidades de que pelo menos uma das três ocorra. Neste número, porém, estão incluídos os casos em que pelo menos uma das três faces não ocorre. Definamos os conjuntos $A_i = \{\text{lançamentos em que a face } i \text{ não ocorre}\}$, para $i = 1, 2, 3$. Temos, pois, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão 1.42, que o número de possibilidades de pelo menos uma das faces não ocorrer é igual a:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 3 \times 2^6 - 3 \times 1^6 + 0 \\
&= 189.
\end{aligned}$$

Logo, como o total de lançamentos é 3^6, para cada trio de faces distintas, temos $3^6 - 189 = 540$ lançamentos em que exatamente três faces distintas são obtidas. Assim, temos $\binom{6}{3} \times 540 = 10800$ maneiras possíveis, sendo que $\binom{6}{3}$ escolhe quais são as três faces distintas.

(iv) Número de maneiras de resultarem exatamente quatro faces distintas: Repetindo o raciocínio do item anterior, consideremos apenas as faces 1, 2, 3 e 4 e A_i's os conjuntos formados pelos lançamentos nos quais a face i não ocorre. Então, procuramos:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - \\
& - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap |A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \\
& + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
& = 4 \times 3^6 - 6 \times 2^6 + 4 \times 1^6 - 0 = 2536.
\end{aligned}$$

Logo, são $4^6 - 2536 = 1560$ as possibilidades para cada quatro faces escolhidas.

Portanto, são $\binom{6}{4} \times 1560 = 23400$ as possibilidades de que exatamente quatro faces distintas apareçam no lançamento.

(v) Número de maneiras de resultarem exatamente cinco faces distintas: O raciocínio empregado é o mesmo que o dos itens anteriores. Sem tantos detalhes, vem como resposta:

$$\binom{6}{5} \times \left\{5^6 - \left[\binom{5}{1} \times 4^6 - \binom{5}{2} \times 3^6 + \binom{5}{3} \times 2^6 - \binom{5}{4} \times 1^6 + 0\right]\right\} =$$
$$= 6 \times (15625 - 20480 + 7290 - 640 + 5) = 10800.$$

Observe que a resposta deste caso coincide com a do caso iii.

(vi) Número de maneiras de resultarem exatamente seis faces distintas: Este caso pode ser resolvido de uma maneira mais simples. Como são seis as faces distintas e são também seis os lançamentos possíveis, é claro que temos à nossa disposição $6! = 720$ possibilidades nesse caso.

Observe agora que, somando as parcelas obtidas nos itens i ao vi, temos $6 + 930 + 10800 + 23400 + 10800 + 720 = 46656$, valor idêntico ao do item (a).

□

Problema 1.45 (AHSME 1998). *Chame um número de telefone de sete dígitos* $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ *de memorável se a sequência de prefixo* $d_1d_2d_3$ *for exatamente igual a qualquer uma das sequências* $d_4d_5d_6$ *ou* $d_5d_6d_7$ *(possivelmente ambas). Assumindo que cada* d_i *pode ser qualquer um dos dez dígitos decimais* $0, 1, 2, \ldots, 9$*, a quantidade de números de telefone memoráveis é?*

Solução. Seja A o conjunto dos números de telefone cujos quais $d_1d_2d_3$ são os mesmos que $d_4d_5d_6$ e seja B o conjunto dos números de telefone que $d_1d_2d_3$ coincidem com $d_5d_6d_7$. Um número de telefone $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ pertence a $A \cap B$ somente se $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7$. Consequentemente, $|A \cap B| = 10$. Assim, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 10^3 \times 1 \times 10 + 10^3 \times 10 \times 1 - 10 = 19990. \end{aligned}$$ □

1.7 PERMUTAÇÕES CAÓTICAS

Pensemos no seguinte problema:

"De quantas maneiras distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto?"

Esse problema foi originalmente proposto por Nicolaus Bernoulli (1687 – 1759), sobrinho dos eminentes matemáticos Jacob (1654 – 1705) e Johann (1667 – 1748), da prestigiosa família Bernoulli, que mais produziu matemáticos em toda história. A contribuição de Bernoulli para o estudo e desenvolvimento da matemática pode ser aferida na numerosa correspondência (mais de 560 cartas!) que trocou com vários colegas, dentre os quais Leonard Euler (1707 – 1783).

Ao longo de sua prolifera vida, Euler foi um grande solucionador de problemas matemáticos. Alguns desses problemas abriram novos campos de pesquisa matemática, como o problema formulado acima. Talvez Euler se interessou pelo problema das cartas mal endereçadas por se tratar de uma questão curiosa e desafiadora da teoria das permutações, hoje chamada permutação caótica.

Definição 1.46 (Permutações Caóticas)**.** Uma permutação de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é chamada de caótica quando nenhum dos a_i se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Teorema 1.47. *A quantidade de permutações caóticas de n elementos distintos é*

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Quando $n = 1$, temos somente uma letra. Logo não existe forma de colocar esta letra em uma posição que não seja a dela e, portanto, $D_1 = 0$. Quando $n = 2$, podemos permutar as letras a e b apenas de uma forma: ba. Assim, $D_2 = 1$. Quando $n = 3$, podemos permutar as letras a, b, c de 6 maneiras: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, onde bca e cab são as únicas permutações caóticas e, portanto, $D_3 = 2$. Continuando a análise de casos particulares, verifica-se que $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$, mas, a partir daí, as alternativas tornam-se muito numerosas de tal modo que é preciso deduzir matematicamente qual a lei de formação de D_n.

Demonstração. Seja D_n o número de permutações caóticas, isto é, a quantidade de permutações das n letras $a, b, c, \ldots$ nas quais nenhuma delas ocupa sua posição original.

Vejamos como Euler raciocinou para encontrar o valor de D_n. Seja $a, b, c, d, e, \ldots$ um arranjo inicial de n letras. Desarranjando-as de modo que nenhuma retorne à sua posição original, existem $n-1$ opções para a primeira letra, já que ela não pode ser o a. Suponha que a primeira letra seja b. Assim, D_n será dado pelo produto do número de variações das demais letras por $n-1$ (já que existem $n-1$ opções para a primeira letra). Sendo b a primeira letra de uma destas permutações, temos duas possibilidades:

Primeiro: A segunda letra é o a. Nesse caso, precisamos reordenar as $n-2$ letras restantes de modo que nenhuma volte à sua posição de origem. Mas, esse é o mesmo problema inicial, reduzido de 2 letras, havendo portanto, D_{n-2} formas de fazê-lo.

Segundo: A segunda letra não é o a. O problema agora é reordenar as $n-1$ letras restantes que ficarão à direita de b, isso pode ser feito de D_{n-1} maneiras.

Como os rearranjos das duas alternativas pertencem a conjuntos disjuntos, temos que, quando b é a primeira letra, existem $D_{n-1}+D_{n-2}$ permutações possíveis. Como há $n-1$ opções para a primeira letra, pelo Princípio Multiplicativo de Contagem temos:

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right). \tag{1.2}$$

Obtemos assim, uma fórmula de recorrência que resolve o problema, mas tem o inconveniente de não fornecer D_n como uma função explícita do número n.

Fazendo $n=3$ em (1.2), temos:

$$D_3 = 2(D_2+D_1) = 2D_2+2D_1.$$

Reescrevendo a expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} D_3 &= (-D_2+3D_2)+2D_1 \\ D_3-3D_2 &= -D_2+2D_1 \\ D_3-3D_2 &= -\left(D_2-2D_1\right). \end{aligned}$$

Analogamente, para $n=4$ e $n=5$, temos:

$$D_4-4D_3 = -\left(D_3-3D_2\right),$$

e,

$$D_5-5D_4 = -\left(D_4-4D_3\right)$$

Logo, para qualquer inteiro $n, n\geq 3$, têm-se:

$$\begin{aligned} D_3-3D_2 &= -\left(D_2-2D_1\right), \\ D_4-4D_3 &= -\left(D_3-3D_2\right), \\ D_5-5D_4 &= -\left(D_4-4D_3\right), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$D_n - nD_{n-1} = -\left(D_{n-1} - (n-1)\, D_{n-2}\right).$$

Multiplicando essas $n-2$ igualdades, temos:

$$\begin{aligned}
&(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)(D_5 - 5D_4)\ldots(D_n - nD_{n-1}) = \\
&(-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)\ldots(D_{n-1} - (n-1)\, D_{n-2}) \\
&(D_n - nD_{n-1}) = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Como $(-1)^{n-2} = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e $D_2 - 2D_1 = 1 - 2 \times 0 = 1$, logo, substituindo em 1.2

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \Rightarrow D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \forall n \geq 3. \tag{1.4}$$

Note que 1.3 é verdadeira para $n = 2$. De fato, sabemos $D_2 = 1$. Por outro lado, $D_2 = 2D_1 + (-1)^2 = 2 \times 0 + 1 = 1$. Logo, 1.3 é verdadeira para $n = 2$. Observe ainda, que o mesmo não ocorre para $n = 1$, já que $D_1 = 1D_0 + (-1)^1 = 1 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Da igualdade 1.3, temos:

$$\begin{aligned}
&D_3 = 3D_2 - 1, \\
&D_4 = 4D_3 + 1 = 4(3D_2 - 1) + 1 = 4 \times 3D_2 - 4 + 1 = 4 \times 3 - 4 + 1, \\
&D_5 = 5D_4 - 1 = 5(4 \times 3 - 4 + 1) - 1 = 5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 + 5 - 1.
\end{aligned}$$

Observe que

$$5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 + 5 - 1 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&D_5 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right), \\
&D_6 = 6D_5 + 1 = 6(5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 + 5 - 1) + 1 = \\
&\quad = 6 \times 5 \times 4 \times 3 - 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 - 6 + 1 = 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que:

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 2. \tag{1.5}$$

De fato, para $n = 2$, tem-se:

$$D_2 = 2!\left(\frac{1}{2!}\right) = 1, \text{ que é claramente verdadeira}$$

Suponha que a Equação (1.5) seja verdadeira para $n-1$, ou seja,

$$D_{n-1} = (n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right).$$

Daí, multiplicando ambos os membros desta igualdade por n:

$$nD_{n-1} = n\,(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right).$$

De 1.3, temos que:

$$nD_{n-1} = D_n - (-1)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_n - (-1)^n &= n\,(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\\
D_n &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right) + (-1)^n\\
D_n &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right), \text{ como queríamos.}
\end{aligned}$$

Lembrando que $D_1 = 0$, finalmente temos que o número procurado é:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 1. \qquad \square$$

Problema 1.48 (PMWC 2005)**.** *Existem 4 homens: A, B, C e D. Cada um tem um filho. Os quatro filhos são convidados a entrar em um quarto escuro. Então A, B, C e D entram no quarto escuro, e cada um deles sai com apenas um filho. Se nenhum deles sair com o próprio filho, de quantas maneiras isso pode acontecer?*

Solução. Este é apenas um problema de permutação caótica (enviando o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ para outro conjunto de forma que nenhum dos elementos originais esteja no mesmo lugar). A fórmula é:

$$D_4 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9. \qquad \square$$

Problema 1.49. *Uma professora distribui nove livros diferentes para nove crianças. Um mês depois recolhe os livros e, novamente, distribui um livro para cada criança. De quantas maneiras os livros podem ser distribuídos de modo que somente três crianças receba o* *mesmo livro desta vez?*

Solução. Vamos escolher 3 crianças dentre as 9 para receber o mesmo livro, que podemos fazer de $\binom{9}{3}$ maneiras distintas. Daí restam 6 crianças que não poderão receber o mesmo livro que podem ser distribuídos de D_6 maneiras diferentes. Portanto a solução para o problema é:

$$\begin{aligned}\binom{9}{3} \times D_6 &= \binom{9}{3} \times 6! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\ &= \binom{9}{3} \times 265 = 22260.\end{aligned}$$

□

Problema 1.50 (IMO 1987)**.** *Seja $p_n(k)$ o número de permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, que tem exatamente k pontos fixos. Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

Solução. Mostramos primeiro que o número de permutações de n objetos sem pontos fixos é

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right),$$

que é a definição mostrada por nós pelo teorema 1.46. Daí o número de permutações de n objetos com exatamente r pontos fixos é igual ao número de de maneiras de escolher os r pontos fixos vezes o número de permutações dos demais $n - r$ objetos sem ponto fixo, que é:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \times (n-r)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-r} \frac{1}{(n-r)!}\right).$$

Assim, queremos provar a igualdade:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r-1)!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-r} \frac{1}{(n-r)!}\right) = 1.$$

Usaremos indução sobre n. É verdade para $n = 1$. Suponha que seja verdade para n. Então a soma para $n + 1$ menos a soma para n é:

$$1 \times \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1!}{1!} \times \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \times \frac{1}{0!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0.$$

Por isso é verdade para $n + 1$, e daí para todo n. □

2 PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E APLICAÇÕES

Há centenas de anos, matemáticos estudam o princípio da casa dos pombos e aplicam essa lei em situações da vida real. Este princípio apresenta a parte mais essencial e básica na matemática da contagem e classificação. Neste capítulo apresentaremos o tópico do Princípio do da casa dos pombos, incluindo teoremas que podem ser mostrados a partir desta. Veremos também vários exercícios relacionados tanto ao princípio quanto à estes teoremas. Serão apresentadas questões em matemática relacionadas com a teoria de conjuntos e grafos

A primeira declaração do princípio da casa dos pombos foi feita por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) em 1834 sob o nome de "Schubfachprinzip" (princípio da "gaveta" ou "princípio de prateleira"). Por essa razão, também é comumente chamado de princípio da caixa de Dirichlet, princípio da gaveta de Dirichlet ou simplesmente "princípio de Dirichlet". A frase "princípio da casa dos pombos" foi usado primeiramente em um jornal de matemática sério pelo matemático Raphael M. Robinson (1911 – 1995) no ano de 1940.

Teorema 2.1. *Dados $n+1$ objetos dentro de n gavetas então, pelo menos, uma das gavetas contém mais de um objeto.*

Demonstração. Suponha que possamos colocar $n+1$ objetos nas n gavetas e que todas elas tenham no máximo um objeto. Desta forma, teríamos no máximo n objetos guardados (um em cada gaveta), portanto temos um absurdo, pois havíamos suposto que iríamos colocar $n+1$ objetos nestas n gavetas. Logo o princípio é válido. □

Vejamos alguns exemplos simples deste princípio.

Exemplo 2.2 (Paradoxo do Aniversário)**.** Em um dia quente de verão, uma escola primária está comemorando uma grande festa de aniversário para o antigo diretor, o professor Anderson. Na festa, Mark, um aluno da segunda série, perguntou a sua mãe: "Mãe, quantas pessoas estão na festa do professor Anderson?"

"367." Sua mãe respondeu.

"Existe alguém na festa compartilhando o aniversário com o professor?"

"Não, acho que não, o aniversário de todo mundo é diferente."

"Você deve ter contado de forma errada." Mark sorriu.

"Não, não poderia ser. Eu contei duas vezes." A mãe de Mark argumentou.

Exemplo 2.3. Em um experimento, os cientistas querem encontrar duas pessoas com o mesmo agrupamento de sangue ABO. Para economizar tempo, as amostras de sangue serão coletadas e processadas simultaneamente. Qual é o menor número de amostras deve ser coletado?

Solução. Sabe-se que existem 4 tipos de sangue no grupo sanguíneo ABO, ou seja, A, B, AB e O. Se os tratarmos como 4 compartimentos, e considerarmos os pacientes como pombos (para serem colocados nos espaços). Para garantir que há pelo menos dois pombos em um mesmo espaço, os cientistas devem coletar pelo menos 5 amostras. □

Exemplo 2.4. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostremos que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Toma-se o quadrado proposto e dividimos ele em quatro quadrados de lado 1. Como precisamos escolher 5 pontos dentro deste quadrado maior, assim, pelo principio da casa dos pombos, temos que pelo menos dois dos cinco pontos estarão dentro de um destes quadrados menores formado pela divisão.

Sabemos que a diagonal de um quadrado qualquer de lado l mede $l\sqrt{2}$ e portanto a diagonal deste quadrados menores medem $\sqrt{2}$, e que é a maior distância que podemos obter. Portanto, dentro de um destes quadradinhos formados, na pior das hipóteses, a maior distância entre os dois pontos será $\sqrt{2}$. □

Podemos generalizar o Princípio da casa dos pombos da seguinte forma:

Teorema 2.5. *Se m objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta contém $\left\lfloor \frac{m-1}{n} + 1 \right\rfloor$ objetos.*

Demonstração. Se cada gaveta contiver no máximo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ objetos, então o número de objetos será no máximo

$$n \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n.\frac{m-1}{n} = m-1 < m$$

o que é uma contradição. □

Exemplo 2.6. O professor Ander de Son, que está lecionando em uma escola primária, quer ensinar em aula um cálculo simples nesta manhã. Ele pretende usar maçãs como bônus quando as crianças responderem corretamente. Quando ele está segurando aquelas maçãs frescas em suas mãos, uma ideia vem à mente dele: será que ele pode distribuir essas 19 maçãs para 9 crianças com todo mundo ganhando duas maçãs e nenhuma maçã sobrando? Se ele não comer nenhuma maçã. A resposta deve ser impossível, mas qual é a razão por trás disso? Como são 19 objetos (maças) e 9 gavetas (crianças), pelo menos uma delas irá receber

$$\left\lfloor \frac{19-1}{9} + 1 \right\rfloor = 3 \text{ maças.}$$

Vejamos alguns problemas olímpicos que utilizam o Princípio da casa dos pombos em suas resoluções.

Problema 2.7 (OBMEP 2017)**.** *Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com 3 cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?*

Solução. Joãozinho quer retirar um grupo de 7 bolas com as especificações do enunciado, então:

Para termos certeza que haverá duas cores nas bolas retiradas devemos retirar pelo menos 11 bolas (10 que poderiam ser de uma única cor e mais outra que será de uma segunda cor, imaginando a pior das hipóteses).

Para termos certeza que teremos três cores, devem ser retiradas 21 bolas (tendo a mesma ideia).

Nesta linha de pensamento, teríamos três bolas de uma cor, duas de uma segunda cor e uma bola com a terceira cor. Se retirar uma bola a mais, esta poderia ser da quarta cor. E se retirar mais uma bola esta será da terceira cor ou da quarta. Assim tendo, três bolas de uma cor, duas de uma segunda cor e duas de uma terceira cor.

Ao total, Joãozinho deverá retirar 23 bolas para poder garantir a situação que ele quer. □

Problema 2.8 (ISOMB 2007)**.** *Todo ponto de coordenadas inteiras no plano é pintado de vermelho, azul ou verde. Prove que existe um retângulo no plano que possui os quatro vértices com a mesma cor.*

Solução. Consideremos um espaço 4×19 no plano. Para cada linha com 4 pontos, pelo Princípio da casa dos pombos, dois devem ser da mesma cor, por exemplo verde. Denotamos esta linha como “linha verde” (uma linha pode ser duas cores simultaneamente) e consideremos as cores das 19 linhas. Novamente pelo princípio da casa dos pombos, 7 destas linhas devem ser da mesma cor. Sem perda de generalidade, assumamos esta cor verde.

Agora considere a distribuição de dois pontos verdes em uma linha com quatro pontos. Existem $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de colocar dois pontos verdes dentre quatro escolhidos, pelo Princípio da casa dos pombos, duas das 7 linhas devem ter a mesma distribuição.

Escolhendo os quatro pontos verdes nestas duas linhas, formamos um retângulo monocromático. $\square$

Problema 2.9 (IMO 1972). *Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B disjuntos cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.*

Solução. Para começar, o número de subconjuntos não vazios é

$$2^{10} - 1 = 1023$$

Os valores das somas que podemos ter com estes subconjuntos varia entre 10 e

$$90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = 945$$

ou seja,temos 935 somas diferentes possíveis.

Como a quantidade de subconjuntos é maior que a de somas possíveis, logo pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos dois subconjuntos S_1 e S_2 compartilham da mesma soma.

Se S_1 e S_2 são disjuntos, o problema está resolvido. Se não forem, removemos de ambos os elementos em comum. Como estamos retirando o mesmo número de ambos os conjuntos logo a soma dos elementos que restaram será igual. Tendo, ainda, dois subconjuntos disjuntos com a mesma soma. $\square$

Problema 2.10 (ENGEL). *Um enxadrista (jogador de xadrez) tem 77 dias para se preparar para um torneio. Ele quer jogar pelo menos um jogo por dia, mas não mais de 132 jogos no total. Prove que existe uma sequência de dias sucessivos em que ele joga exatamente 21 jogos ao todo nesses dias.*

Solução. Seja a_i o número de jogos disputados até o i-ésimo dia. Em cada dia o jogador tem que jogar pelo menos um jogo

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq a_1 + 1, a_3 \geq a_2 + 1, \ldots, a_{77} \geq a_{76} + 1$$

assim

$$a_1 \geq 1, a_2 > a_1, a_3 > a_2, \ldots, a_{77} > a_{76}$$

Como o total de jogos não pode ser maior que 132, logo $a_{77} \leq 132$.

Temos então

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$$

ou ainda

$$a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153$$

Deste modo, $a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \ldots, a_{77}+21$ são 154 números positivos. E além disto, os valores destes 154 números (pombos) variam entre 1 e 153. Ou seja, só podem haver 153 valores distintos (casas de pombos) para estes números.

Como $154 > 153$, pelo Princípio da casa dos pombos, pelo menos uma casa é ocupada por mais de um pombo, isto é, existem dois números tendo o mesmo valor.

Como $a_1 < a_2 < \cdots < a_{77}$, nenhum dos a_i são iguais. Analogamente, de $a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21$ temos que nenhum dos $a_j + 21$ são iguais. Logo,

$$a_i = a_j + 21,$$

para algum i, j, o que implica

$$a_i - a_j = 21.$$

Ou seja do $(j+1)$-ésimo dia até o i-ésimo dia o enxadrista jogou 21 partidas. □

Problema 2.11 (CMC 1994). *Doze músicos $M_1, M_2, \ldots, M_{12}$ reúnem-se para tocar em um festival que dura uma semana. Cada dia, existe um concerto agendado e alguns dos músicos tocam enquanto os outros ouvem como membros da audiência. Para $i = 1, 2, \ldots, 12$, seja t_i o número de concertos que o musico M_i toca, e seja $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{12}$. Determine o menor valor de t tal que seja possível para cada musico ouvir, como membro da audiência, a todos os outros músicos.*

Solução. *Observação 1.* Para que o problema 2.11 seja possível, quaisquer 3 músicos devem se apresentar em pelo menos 3 concertos. De fato, se eles se apresentarem em dois concertos, pelo principio da casa dos pombos 2.1, dois deles devem se apresentar em um dos concertos. Então eles não conseguem se observar naquele dia. Ou seja eles precisam se observar em outro concerto, o que é impossível.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Apresentando	M_1M_2	M_2M_3	M_2M_3
Observando	M_3	M_1	M_2

Tabela 2: Possibilidades para três músicos.

Observação 2. Para que o problema 2.11 seja possível, quaisquer 7 músicos ou mais devem se apresentar em pelo menos 4 concertos. De fato, se eles se apresentarem em 3 concertos, pelo principio da casa dos pombos 2.1, existem pelo menos 3 músicos se apresentando em um concerto, assim eles não podem se observar neste dia. Eles precisam se observar em outros dois concertos, que é impossível pela observação 1.

Observação 3. Para que o problema 2.11 seja possível, quaisquer 9 músicos devem se apresentar em pelo menos 5 concertos. Se eles se apresentarem em 4 concertos, então cada um deles pode se apresentar no máximo em 3 concertos, se não eles não conseguiram ouvir os outros 8 músicos. Note que se apenas um deles se apresentar em 1 concerto, então todos os demais 8 irão observá-lo. Então estes 8 músicos tem apenas 3 concertos para se observarem entre si, o que é impossível pela observação 2. Note também que se um deles se apresentar em 3 concertos, então ele só poderá ouvir no quarto concerto. Isto leva, novamente, a situação que os demais 8 músicos devem se observar em 3 concertos, o que é impossível pela observação 2. Assim sendo, cada um dos 9 músicos se apresentam em dois concertos. Existem $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de escolher dois concertos para se apresentar. Por principio da casa dos pombos 2.1, existem dois músicos que possuem o mesmo dia de apresentação, então eles não podem se apresentar, impossibilitando o problema 2.11.

Assumiremos que existem k músicos que se apresentam em apenas um concerto. Estes k músicos devem se apresentar em concertos diferentes caso contrário eles não conseguiram se observar. Consequentemente $0 \leq k \leq 7$. Note que cada um desses k concertos devem ser solo. Os demais $12 - k$ músicos devem se apresentar em no mínimo 2 concertos, e devem observar cada um dos outros nos $7 - k$ concertos que sobrarem. É fácil ver que é impossível para $k = 7$ ou 6. Se $k = 5$, 7 músicos devem se observar em dois concertos, o que é impossível pela observação 2; se $k = 4$, 8 músicos precisam se observar em outros 3 concertos, impossível pela observação 2; e se $k = 3$, 9 músicos devem se observam em 4 concertos, impossível pela observação 3. Logo, $k \leq 2$, então $t \geq k + 2\,(12 - k) \geq 22$.

Finalmente, damos um exemplo que mostra que $t = 22$ é de fato possível. Sejam os músicos M_1 e M_2 que se apresentem solo nos dias 1 e 2. Cada um dos outros 10 músicos irá se apresentar duas vezes. Existem 5 dias sobrando e consequentemente $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de escolher quais dias se apresentarem. Portanto deixando cada músico se apresentar em pares de dias diferentes completa o exemplo. □

Problema 2.12 (IMO Shortlist 1991). *Mostre que existem infinitos múltiplos de 1991 da forma 19999...99991.*

Solução. 1991 é claramente um desses números. Como há infinitos números da forma $199\ldots91$, com mais de dois noves(esses são os objetos) e o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1991 é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 1990$ (essas são as gavetas), então dois números deixam o mesmo resto. Se subtrairmos esses dois números obtemos um número múltiplo de 1991 (os restos se cancelam). Assim, existem k e l tais que $1\underbrace{99\ldots9}_{k}1 - 1\underbrace{99\ldots9}_{l}1 = 199\ldots9800\ldots0$ é múltiplo de 1991.

Podemos cortar os zeros à direita e o número continua múltiplo de 1991, mas mantemos três deles: $199\ldots98000$ é múltiplo de 1991. Somando 1991 obtemos $199\ldots98000 + 1991 = 199\ldots99991$ que é múltiplo de 1991. É fácil ver que esse número tem pelo menos três noves. Supõe que esse número tem m noves.

Agora considere os infinitos números da forma $199\ldots91$, com mais de $t+1$ noves. Seguindo a mesma estratégia acima encontramos um múltiplo de 1991 com pelo menos $t+1$ noves. Esse raciocínio pode ser continuado para a obtenção do resultado. $\square$

Problema 2.13 (PUTNAM 2002)**.** *Dados quaisquer cinco pontos em uma esfera, mostre que quatro deles devem estar em um mesmo hemisfério fechado.*

Solução. Denotemos os pontos por $x_1, \ldots, x_5$ e denote a esfera por S. Seja P o plano contendo x_4, x_5 e a origem. Seja H_1 e H_2 os semi-espaços fechados com limite P. Se pelo menos dois de x_1, x_2 e x_3 (digamos x_1 e x_2) estão em H_1, então x_1, x_2, x_4 e x_5 são quatro pontos no hemisfério fechado $H_1 \cap S$. Se apenas um (digamos x_1) de x_1, x_2 e x_3 estão em H_1, então x_2, x_3, x_4, x_5 estão em $H_1 \cap S$. Se nenhum de x_1, x_2 e x_3 estão em H_1, então todos os cinco de $x_1, \ldots, x_5$ estão em $H_2 \cap S$. De qualquer forma, pelo menos quatro pontos estão em um hemisfério fechado. $\square$

Apesar do princípio da casa dos pombos ser um tanto quanto simples, podemos utiliza-lo na demonstração de teoremas conhecidos, os quais alguns poderiam nunca imaginar que poderiam ser demonstrados utilizando este princípio.

2.1 TEOREMA CHINÊS DO RESTO

O problema de restos mais antigo do mundo foi descoberto em um tratado matemático chinês do século III, de nome Sun Zi Suanjing (Clássico Matemático de Sun Zi), cujo o autor era desconhecido. Atualmente, o problema dos restos de Sun Zi Suanjing é conhecido popularmente como o Teorema Chinês do Resto, já que apareceu pela primeira vez em um tratado matemático chinês.

O Teorema Chinês do resto de Sun Zi Suanjing diz:

> Agora, há um número desconhecido de coisas. Se contarmos por três, há como resto 2, se contarmos por cinco, há um resto de 3, se contarmos por sete, há resto 2. Encontre o número de coisas.

Além do problema, o autor de Sun Zi Suanjing também fornece a resposta e os métodos de solução para tal problema:

> Resposta: 23.
> Método: Se contarmos por três e houver resto 2, coloque 140. Se contarmos por cinco e há resto 3, coloque 63. Se contarmos por sete e há resto 2, coloque 30. Some-os para obter 233 e subtrair 210 para obter a resposta.
> Se contarmos por três e existe resto 1, coloque 70. Se contarmos por cinco e há resto 1, coloque 21. Se contarmos por sete e houver resto 1, 15. Quando (o número) excede 106, o resultado é obtido subtraindo 105.

Desde antigamente, muitas pesquisas utilizando o teorema chinês do resto forma desenvolvidas, e hoje esse teorema evoluiu para um teorema sistemático que pode ser facilmente encontrado em muitos textos matemáticos elementares.

Iniciemos com um exercício simples:

Problema 2.14. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números inteiros. Mostre que existe uma soma consecutiva $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}$ divisível por n.*

Solução. Considere as somas parciais desses números:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n
\end{aligned}
$$

Todas estas somas são somas de termos consecutivas, então se uma delas é divisível por n, o problema acabou. Se não, dividindo cada uma delas por n, o resto da divisão obtido é diferente de zero, assim temos os restos $r_1 r_2, \ldots, r_n$ com $r_1 \equiv s_1 \pmod{n}, r_2 \equiv s_2 \pmod{n}$, e assim sucessivamente, até $r_n \equiv s_n \pmod{n}$. Estes restos tem valores dentro do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Chamando estes $n-1$ restos de casas, colocamos cada uma das n somas dentro delas com seu respectivo resto. Duas destas somas irão cair na mesma casa, ou seja $s_i \equiv s_j \pmod{n}$, para algum $j > i$, i.e., $s_j - s_i$ é divisível por n, e logo $s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$, como queríamos mostrar. □

Com este exercício, um argumento similar pode ser utilizado para provar o **Teorema Chinês do Resto**.

Teorema 2.15 (Teorema Chinês do Resto)**.** *Sejam a, b, m e n números inteiros tais que $0 \leq a < m$ e $0 \leq b < n$. Se m e n são relativamente primos, então existe um inteiro x tal que $a \equiv x \pmod{m}$ e $b \equiv x \pmod{n}$.*

Demonstração. Considere os inteiros $a, a+m, a+2m, \ldots, a+(n-1)m$, cada um com resto a quando dividido por m. Queremos mostrar que um destes inteiros tem resto b quando dividido por n, para que neste caso tal número satisfaça a propriedade desejada.

Por contradição, suponha que não haja. Sejam os restos

$$r_0 \equiv a \pmod n, r_1 \equiv a+m \pmod n, \ldots, r_{n-1} \equiv a+(n-1)m \pmod n$$

Nomeie $n-1$ caixas com os números $0, 1, 2, 3, \ldots, b-1, b+1, \ldots, n-1$. Coloque cada r_i dentro da caixa nomeado com seu valor. Dois restos acabam dentro da mesma caixa, digamos r_i e r_j, com $j > i$, assim $r_i = r_j = r$. Isto quer dizer

$$a + im = q_1 n + r \text{ e } a + jm = q_2 n + r$$

Consequentemente,

$$a + jm - (a + im) = q_2 n + r - (q_1 n + r)$$

$$(j - i)m = (q_2 - q_1)n$$

Já que n é relativamente primo com m, significa que $n \mid (j-i)$. Mas como i e j são distintos e pertencem à $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $0 < j - 1 < n$, então $n \nmid (j-i)$. Com essa contradição terminamos a prova. □

Problema 2.16 (USAMO 1986)**.** *(a) Existem 14 inteiros positivos consecutivos tais que, cada um é divisível por um ou mais primos p do intervalo $2 \leq p \leq 11$? (b) Existem 21 inteiros positivos consecutivos tais que, cada um é divisível por um ou mais primos p do intervalo $2 \leq p \leq 13$?*

Solução. (a) Suponha que existam tais inteiros. Desses 14 inteiros consecutivos, 7 são números pares. Vamos observar os ímpares: $a, a+2, a+4, a+6, a+8, a+10$ e $a+12$. Podemos ter no máximo três deles divisíveis por 3, dois por 5, um por 7 e um por 11. Veja que $3+2+1+1 = 7$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, cada um desses ímpares é divisível por exatamente um primo do conjunto $\{3, 5, 7, 11\}$. Veja que os múltiplos de 3 só podem ser $\{a, a+6, a+12\}$. Dois dos números restantes ($a+2, a+4, a+8$ e $a+10$) são divisíveis por 5. Mas isto é impossível.

(b) Sim. Como os números $\{210, 11, 13\}$ são primos entre si, dois a dois, pelo Teorema Chinês do Resto existe um inteiro positivo $n > 10$ tal que:

$$n \equiv 0 \pmod{210}$$
$$n \equiv 1 \pmod{11}$$

$$n \equiv -1 \pmod{13}$$

Veja que o conjunto $\{n-10, n-9, \ldots, n+9, n+10\}$ satisfaz as condições do item (b). $\square$

Problema 2.17 (IMO 2009). *Sejam n um inteiro positivo e $a_1, \ldots, a_k, (k \geq 2)$, inteiros distintos no conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tal que n divide $a_i\,(a_{i+1} - 1)$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Prove que n não divide $a_k\,(a_1 - 1)$.*

Solução. Denote para simplificar $a = a_1$ e $b = a_2$, logo $a \neq b$ e ambos são menores que n.

Assim, $n \mid a\,(b-1)$ se existem s e t, $st = n$, tal que $s \mid a$ e $t \mid (b-1)$. Como tanto a quanto b são menores do que n, nem s ou t pode ser igual a 1, significando que ambos são fatores não-triviais de n.

Seja $k = 2$, e suponha que $n \mid b\,(a-1)$. Nenhum fator não-trivial de t pode dividir b, e nenhum fator não-trivial de s pode dividir $a-1$, implicando que $s \mid b$. Estamos, portanto, em condições de aplicar o Teorema Chinês do Resto:

$$b \equiv 1 \pmod{t}$$
$$b \equiv 0 \pmod{s}$$

O teorema nos diz que existe uma solução única no módulo $mmc\,(s,t) = n$. No entanto, devido à simetria nas condições para a e b, também temos

$$a \equiv 1 \pmod{t}$$
$$a \equiv 0 \pmod{s}$$

O que contradiz a suposição de que a e b são distintos.

Para $k = 3$, nos é dado que $n \mid b\,(c-1)$ onde $c = a_3$. Suponha, como antes, $n \mid c\,(a-1)$.

Existem s e t diferentes de 1 e n tais que $s \mid a$ e $t \mid (b-1)$. Nenhum fator não-trivial de t pode dividir b. De $n \mid b\,(c-1)$ segue-se então que $t \mid (c-1)$. Se não é s, então um dos seus fatores, digamos, s_0 divide b: $s_0 \mid b$, $s_1 t \mid (c-1)$, onde $s = s_0 s_1$.

Similarmente, $n \mid c\,(a-1)$ implica que $\sigma_0 \mid c$ e $\sigma_1 s_1 t \mid (a-1)$, onde $\sigma_0\sigma_1 = s_0$. Agora é um dos dois: ou $\sigma_1 s_1 = 1$ ou não. No primeiro caso, o Teorema 2.15 leva a uma contradição. No último caso, aparece um fator não trivial comum a a e $a-1$. Novamente uma contradição.

Para k maior, sempre temos $t \mid a_{i+1} - 1$. À medida que progredimos de 1 para um i maior, fatores adicionais podem ser emprestados de s. Se isso acontecer, então a e $a-1$

terão mostrado fatores comuns. Caso contrário, uma contradição é alcançada através do teorema chinês do resto. □

Problema 2.18 (IMO 1989). *Prove que para todo inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos tais que nenhum deles é uma potência de primo.*

Solução. Considere os seguintes números:

$$\begin{aligned} 2 &+ (2(n+1))!, \\ 3 &+ (2(n+1))!, \\ 4 &+ (2(n+1))!, \\ &\vdots \\ (n+1) &+ (2(n+1))! \end{aligned}$$

Note que existem n destes números. O objetivo é mostrar que esses números não são potência de primo.

Por exemplo, consideremos os casos iniciais:

$n = 1)$ Neste caso, temos $2 + (2(n+1))! = 2 + 4! = 26 = 2 \times 13$.

$n = 2)$ Neste caso,

$$2 + (2(n+1))! = 2 + 6! = 722 = 2 \times 361$$
$$3 + (2(n+1))! = 3 + 6! = 723 = 3 \times 241$$

Como 361 não é potência de 2, nem 241 é potência de 3, logo esses dois números não são potência de primos.

$n = 3)$ Neste caso,

$$2 + (2(n+1))! = 2 + 8! = 40322 = 2 \times 20161$$
$$3 + (2(n+1))! = 3 + 8! = 40323 = 3 \times 13441$$
$$4 + (2(n+1))! = 4 + 8! = 40324 = 4 \times 10081$$

Como 20161 não é potência de 2, 13441 não é potência de 3 e 10081 não é potência de 4, logo esses três números (40322, 40323 e 40324) não são potência de primo.

Dado qualquer número inteiro positivo k tal que $2 \leq k \leq (n+1)$, temos que $4 \leq 2k \leq 2(n+1)$ e, assim, $k^2 \mid (2(n+1))!$. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} 2 + (2(n+1))! &\equiv 0 \pmod{2} \\ 3 + (2(n+1))! &\equiv 0 \pmod{3} \\ &\vdots \\ (n+1) + (2(n+1))! &\equiv 0 \pmod{(n+1)} \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2 + (2(n+1))! &= 2 + 2^2 \cdot m_2 = 2(1 + 2m_2), \\ 3 + (2(n+1))! &= 3 + 3^2 \cdot m_3 = 3(1 + 3m_3), \\ &\vdots \\ (n+1) + (2(n+1))! &= (n+1) + (n+1)^2 \cdot m_{n+1} = (n+1)(1 + (n+1)m_{n+1}), \end{aligned}$$

com $m_2, m_3, \ldots, m_{n+1}$ números inteiros.

Analisando o primeiro número, temos que $2 \mid 2+(2(n+1))!$, logo se $2+(2(n+1))!$ fosse potência de primo, seria uma potência de 2. Porém $2 + (2(n+1))! = 2(1 + 2m_2)$ e $(1 + 2m_2)$ não é múltiplo de 2, portanto $2 + (2(n+1))!$ não é uma potência de primo. De modo análogo, podemos mostrar que $k + (2(n+1))!$ não é potência de primo, para qualquer $2 < k \leq (n+1)$. $\square$

2.2 TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Bernhard Bolzano (1781 – 1848) nasceu em Praga, Tchecoslováquia. Ele tinha inclinação para lógica e a matemática, especialmente a análise, e pode ser considerado como "Pai da Aritmetização da Análise". Infelizmente o trabalho matemático de Bolzano foi grandemente ignorado por seus contemporâneos, e muitos desses aguardaram uma redescoberta posterior ao seu tempo, por exemplo, em 1843, ele construiu uma função contínua num intervalo que, surpreendentemente, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo. Essa função não se tornou conhecida e credita-se a Weierstrass, cerca de 40 anos mais tarde, o primeiro exemplo dessa espécie.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) é uma exceção a regra que diz que um matemático com potencial de primeira linha deve começar os estudos nessa área cedo, Weierstrass teve sua iniciação matemática bem mais tarde, aos quarenta anos de idade conseguiu um lugar como instrutor na Universidade de Berlim e somente oito anos mais tarde tornou-se professor titular, quando pode enfim dedicar-se integralmente à matemática avançada e tornou-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve.

Há um teorema famoso, conhecido pelo nome desses dois matemáticos, o *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, cujo enunciado afirma que todo conjunto de pontos, infinito e limitado, tem um ponto de acumulação. Coube a Weierstrass o mérito da demonstração desse teorema tão importante para os fundamentos da teoria dos conjuntos.

Vamos mostrar a seguir a demonstração deste teorema utilizando uma ideia semelhante ao Princípio da Casa dos Pombos. O que aconteceria se um infinito bando de pombos pousasse em um número finito de casas? A resposta é clara: pelo menos um dos buracos conteria um sub-bando infinito! Chamaremos esse argumento simples de "Princípio Infinito da casa dos pombos". Isso nos permitirá resolver vários problemas importantes.

Seja M um subconjunto limitado finito da reta real $\mathbb{R}$. A palavra "limitado" significa que existe um número positivo m tal que $\mid x \mid< m$ para todo x em M. Um ponto p de $\mathbb{R}$ é dito ser um *ponto de acumulação* do conjunto M se para cada $\epsilon > 0$ o segmento $[p-\epsilon, p+\epsilon]$ contiver infinitos pontos de M.

Agora estamos prontos para um resultado clássico da matemática.

Teorema 2.19 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo subconjunto limitado infinito M da reta real $\mathbb{R}$ tem (pelo menos) um ponto de acumulação.*

Demonstração. Considere os pontos de M como pombos. Assim, M é um bando infinito de pombos. Como M é limitado, existe um número inteiro positivo m tal que $\mid x \mid< m$ para todo x em M. Agora consideramos os seguintes intervalos fechados da reta real

$$[-m, -m+1]\,, [-m+1, -m+2]\,, \ldots, [-1, 0], [0, 1], \ldots, [m-1, m] \tag{2.1}$$

como as casas dos pombos. Então, devido ao Princípio Infinito das Casas dos Pombos, pelo menos um deles, digamos, $[1, 2]$, contém infinitos pombos. Assim, temos infinitos pombos que estão no formato decimal $1, a_1a_2a_3\ldots$, onde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são dígitos.

O próximo passo é considerar os seguintes intervalos em $[1, 2]$,

$$[1,0; 1,1], [1,1; 1,2], \ldots, [1,8; 1,9], [1,9; 2,0] \tag{2.2}$$

como nossas novas casas de pombos. Mais uma vez concluímos que um deles, digamos, $[1,4; 1,5]$, contém infinitos pombos. Assim, temos infinitos pontos da forma $1, 4a_2a_3\ldots.$

Agora dos seguintes intervalos

$$[1,40;1,41],[1,41;1,42],\ldots,[1,49;1,50] \tag{2.3}$$

existe um, digamos $[1,43;1,44]$, que contém infinitos pombos.

Repetindo esse procedimento, percebemos x é um ponto de acumulação do conjunto M. De fato, dado um número positivo ϵ, escolhemos um inteiro m, tal que $\dfrac{1}{10^m} < \epsilon$. Além disso, seja x_m fração decimal finita que obtemos de x removendo todos os dígitos decimais de x exceto os primeiros m dígitos após o ponto decimal. Então o intervalo $\left[x_m, x_m + \dfrac{1}{10^m}\right]$ contém infinitos pontos de M e está contido no segmento $[x-\epsilon, x+\epsilon]$. Portanto, $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ contém infinitos pontos de M. Isso conclui a prova. □

Problema 2.20. *Prove que para $n \geq 1$ a equação $x^n + x - 1 = 0$ tem uma única raíz no intervalo $(0,1]$. Se x_n denota esta raíz, prove que a sequência (x_n) é convergente*

Solução. É claro que x_n é limitado pois $x_n \in (0,1], \forall n \geq 1$, isto é suficiente para provar a monotonicidade[1] (limitado pelo Teorema 2.19).

Para $n = 1$, nossa raíz é simplesmente $2x - 1 = 0$, logo $x = \dfrac{1}{2}$. Para $n = 2$ nossa raíz $x^2 + x - 1 = 0$, assim obtemos $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approxeq 0,618$.

Vejamos que para todo $n \geq 1$, a raiz de $x^n + x - 1$ é menor ou igual à raiz de $x^{n+1} + x - 1$ em $(0,1]$. Provamos isto por contradição. Suponha que temos $x_n > x_{n+1}$, para algum n, então

$$x_n^n + x_n - 1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 1$$

Como $x_n > x_{n+1}$ e $n \geq 2$, logo $x_n^n \geq x_{n+1}^n > x_{n+1}^{n+1}$, deste modo (usando a desigualdade acima) $x_n^n + x_n > x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}$, que contradiz $x_n^n + x_n - 1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1$. Portanto, (x_n) é uma sequencia monótona, limitada e, consequentemente, (x_n) é uma sequência convergente. □

Problema 2.21 (Poland TST)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que, para qualquer número natural n, o número $a \cdot 2^n + b$ é um quadrado perfeito. Prove que $a = 0$.*

Solução. Usaremos contradição. Suponha que $a \neq 0$. Então, naturalmente $a > 0$, do contrário o número $a \cdot 2^n + b$ seria negativo. De acordo com a hipótese, existe uma sequencia de inteiros positivos $(x_n)_{n \geq 1}$ dada por,

$$x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}.$$

[1]Uma sequência é dita ser monotônica se for uma sequência não-crescente (para todo n natural, $a_n \geq a_{n+1}$) ou uma sequência não-decrescente (para todo n natural, $a_n \leq a_{n+1}$)

Deste modo, calculamos o seguinte limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2x_n - x_{n+2} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} - \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} - \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}\right)\cdot \frac{\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} + \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}}{\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} + \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot 2^{n+2}+4b-(a\cdot 2^{n+2}+b)}{\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} + \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3b}{\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} + \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Então, temos que $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n - x_{n+2}) = 0$ e isso implica que existe um número natural N, tal que, para todo $n \geq N$, temos $2x_n - x_{n+2} < 1$ e, como (x_n) é uma sequência de números inteiros positivos, temos obrigatoriamente que $2x_n = x_{n+2}$.

Mas $2x_n = x_{n+2}$ é equivalente a $\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+4b} = \sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}$, ou seja, $a\cdot 2^{n+2} + 4b = a\cdot 2^{n+2}+b$, i.e., $4b = b$ e, portanto, $b = 0$. Deste modo, a e $2a$ são ambos quadrados perfeitos, o que é impossível para qualquer número inteiro positivo a. Isto mostra, que nossa suposição estava errada e, portanto, $a = 0$. □

Problema 2.22 (IMO 2012 Shortlist)**.** *Sejam f e g dois polinômios diferentes de zero com coeficientes inteiros tais que $\partial f > \partial g$*([2])*. Suponha que, para infinitos primos p, o polinômio $pf + g$ tenha uma raiz racional. Prove que f tem uma raiz racional.*

Solução. Suponha, sem perda de generalidade, que f seja mônico e considere (x_n) uma sequência de números racionais e (p_n) uma sequência crescente de números primos de tal forma que

$$p_n f(x_n) + g(x_n) = 0, \text{ ou seja, } f(x_n) + \frac{1}{p_n} g(x_n) = 0 \tag{2.4}$$

Vamos verificar que x_n é limitado por algum M. Como f e g são polinômios tais que $\partial f > \partial g$, logo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 0$. Deste modo existe $M > 0$ tal que $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| < 1$ e $f(x) \neq 0$, para todo x com $|x| > M$. Assim, temos que

$$|pf(x)+g(x)| = \left|f(x)\left(p + \frac{g(x)}{f(x)}\right)\right| = |f(x)|\left|\left(p+\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right| \geq |f(x)|\left(p - \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\right) > 0,$$

para $|x| > M$ e para qualquer número primo p. Portanto, $x_n \in [-M, M]$.

Como o intervalo $[-M, M]$ é fechado, logo existe uma subsequência de x_n que converge para algum x em $[-M, M]$. Então vamos apenas supor sem perda de generalidade (descartando todos os outros x_n) que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

[2] ∂h denota o grau do polinômio h.

Note que, x é uma raiz de f. De fato, como $f(x_n) + \frac{1}{p_n} g(x_n) = 0$, para todo n, assim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \frac{1}{p_n} g(x_n) \\ &\overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_n} \cdot g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &= f(x) + 0 \cdot g(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato que f e g são funções contínuas.

Basta mostrar que x é racional. De fato, vamos mostrar que x é um número inteiro.

Temos dois casos: x_n é racional e não inteiro apenas para finitos n's; x_n é racional e não inteiro para infinitos n's.

No primeiro caso, podemos desconsiderar aqueles valores que não são inteiros, e assim x será inteiro. No segundo caso, descarte todos os valores de x_n inteiros e considere a sequência restante (que será composta inteiramente por números racionais não inteiros). Assim, temos que $x_n = \frac{k_n}{q_n}$, para k_n, q_n inteiros com $\mathrm{mdc}(k_n, q_n) = 1$ e $q_n > 1$. Como $\partial f > \partial g$, logo o coeficiente líder de $p_n f(x) + g(x)$ é p_n e, pelo Teorema da Raiz Racional[3],temos que $q_n \mid p_n$ Como $q_n > 1$, logo $q_n = p_n$, para todos n. Assim, como $x_n = \frac{k_n}{p_n}$ é raiz de $p_n f(x) + g(x)$, temos

$$0 = p_n f\left(\frac{k_n}{p_n}\right) + g\left(\frac{k_n}{p_n}\right).$$

Mais ainda, multiplicando por ${p_n}^d$, segue que

$$0 = {p_n}^{d+1} f\left(\frac{k_n}{p_n}\right) + {p_n}^d g\left(\frac{k_n}{p_n}\right), \tag{2.5}$$

onde $d = \partial g$. Denotando $f(x) = x^D + a_{D-1}x^{D-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, \ldots, a_{D-1} \in \mathbb{Z}$, onde D denota o grau de $f(X)$, temos da Equação (2.5) que o seguinte número é inteiro

$$\begin{aligned} & {p_n}^{d+1}\left(\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^D + a_{D-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{D-1} + \cdots + a_{d+1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{d+1}\right) \\ &\qquad = {p_n}^{d+1}\left(\frac{{q_n}^D + a_{D-1}{q_n}^{D-1}p_n + \cdots + a_{d+1}{q_n}^{d+1}{p_n}^{D-(d+1)}}{{p_n}^D}\right) \\ &\qquad = \frac{{q_n}^D + a_{D-1}{q_n}^{D-1}p_n + \cdots + a_{d+1}{q_n}^{d+1}{p_n}^{D-(d+1)}}{{p_n}^{D-(d+1)}}. \end{aligned}$$

[3]O Teorema da Raiz Racional nos permite determinar todas as raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros, da seguinte maneira:*Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros e $x = \frac{a}{b}$ é uma raiz de f, com $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, então $a \mid a_0$ e $b \mid a_n$, onde a_0 e a_n denotam os coeficientes independente e líder de $f(x)$, respectivamente.*

Como $D > d$, logo $D-(d+1) \geq 0$. Suponhamos que $D-(d+1) > 0$, assim temos que $p_n \mid \left({q_n}^D + a_{D-1}{q_n}^{D-1}p_n + \cdots + a_{d+1}{q_n}^{d+1}{p_n}^{D-(d+1)}\right)$. Como $p_n \mid \left(a_{D-1}{q_n}^{D-1}p_n + \cdots + a_{d+1}{q_n}^{d+1}{p_n}^{D-(d+1)}\right)$, logo $p_n \mid {q_n}^D$, o que contradiz o fato que $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$. Portanto $D-(d+1) = 0$, ou seja, $D = d+1$.

Desta forma, temos na Equação (2.5) que ${q_n}^{d+1} + c \cdot {q_n}^d$ é múltiplo de p_n, onde c é o coeficiente líder de $g(x)$, ou seja, $p_n \mid q_n^d(q_n + c)$. Como p_n é primo e $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$, logo $p_n \mid (q_n + c)$. Portanto, temos que $\dfrac{q_n + c}{p_n} \in \mathbb{Z}$, para todo n, ou seja, $x_n + \dfrac{c}{p_n} \in \mathbb{Z}$, para todo n. Deste modo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \dfrac{c}{p_n}\right) \in \mathbb{Z}$, mas por outro lado $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \dfrac{c}{p_n}\right) = x + 0 = x$, já que p_n cresce infinitamente. Portanto, $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

2.3 TEOREMA DE ERDÖS-SZEKERES

Paul Erdös (1913 – 1996) era conhecido por muitas coisas, principalmente por suas excentricidades pessoais, habilidades cognitivas inimagináveis e pureza na sua crença da verdadeira matemática. Nascido no Império Austro-Húngaro dois anos antes do início da Primeira Guerra Mundial, ele ensinou a si mesmo matemática através de livros e podia multiplicar números com três dígitos em sua cabeça antes dos quatro anos de idade. Vivendo com uma mala, viajando de universidade em universidade (o qual lhe rendeu o apelido de nômade), ao longo de sua vida, ele sobreviveu palestras e doações de várias universidades. Na adolescência, ele descobriu uma prova mais simples para o teorema de Chebyshev[4] antes dos 20 anos. Ele recebeu um doutorado em matemática, além de sua graduação aos 21 anos. Em seus 83 anos de vida, ele publicou mais de 1500 trabalhos acadêmicos com mais de 500 colaboradores, fazendo dele o matemático mais prolífico da história, comparável apenas com Leonard Euler.

George Szekeres (1911 – 2005) demonstrou grande interesse e talento em matemática logo no início de sua vida, porém, ele acabou estudando engenharia química na Universidade Tecnológica de Budapeste e depois trabalhou em uma fábrica de couro da família. Mas ele não desistiu de seu interesse em matemática e continuava se encontrando com outros matemáticos para resolver problemas. Alguns destes matemáticos eram Paul Erdös e Esther Klein (1910 – 2005). Foi num destes encontros que Esther apresentou um problema: “Dados cinco pontos no plano, não havendo três colineares, prove que quatro deles formam um quadrilátero convexo.” Szekeres e Erdös escreveram um artigo em 1935 generalizando o resultado do problema para polígonos com n lados. E foi Erdös quem escolheu o nome: “Problema do Final Feliz”, já que dois anos após essa divulgação Szekeres

[4]Para qualquer n, sempre há um primo entre n e $2n$.

e Esther casaram-se.

Uma outra utilização do princípio da casa dos pombos é Teorema de Erdös-Szekeres que teve sua demonstração divulgada no mesmo jornal que foi apresentado o problema do final feliz. Segue que:

Teorema 2.23 (Teorema de Erdös-Szekeres)**.** *Seja (a_i) uma sequência de números reais distintos com n^2+1 termos, com $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma subsequência crescente ou decrescente de comprimento $n+1$.*

Por exemplo, consideremos a sequência (com $n = 4$)

$$(a_i) = (4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13, 17).$$

Note que existem subsequências decrescentes de comprimento 4 mas não de comprimento 5, mas existem subsequências crescentes de comprimento 5, como por exemplo, temos a subsequência crescente $(1, 7, 11, 15, 17)$.

É possível provar o caso $n = 4$ do teorema listando todas as 17! subsequências possíveis e checando cada uma. Mas para $n = 10$ existem 101! subsequências da sequência original e uma aproximação por força bruta não pode ser feita antes do sol se apagar. Assim, faremos outra abordagem para a demonstração desse teorema.

Demonstração. Para cada i, denotemos por $c(i)$ o comprimento da maior subsequência crescente começando com a_i, e por $d(i)$ o comprimento da maior subsequência decrescente começando com a_i.

Suponhamos, por absurdo, que a alegação do teorema não é válida, ou seja, que não existem subsequências (de)crescentes de comprimento $n+1$, logo $c(i) \leq n$ e $d(i) \leq n$, para todo i. Assim existem no máximo n^2 pares $(c(i), d(i))$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, Teorema 2.1, existem dois pares iguais, ou seja, $(c(i), d(i)) = (c(j), d(j))$, com $i \neq j$, i.e., $c(i) = c(j)$ e $d(i) = d(j)$.

Como todos os termos da sequência são distintos, logo $a_i < a_j$ ou $a_i > a_j$. Se $a_i < a_j$, então existe uma subsequência crescente (a_{n_k}) iniciada em a_j e de comprimento $c(j)$, assim podemos construir uma subsequência crescente iniciada em a_i e de comprimento $c(j) + 1 = c(i) + 1$, ou seja, obtivemos uma subsequência crescente iniciada em a_i e de comprimento maior que $c(i)$, o que é uma contradição. De modo análogo, se $a_i > a_j$ obteremos uma contradição (usando subsequências decrescentes).

Portanto, existe uma subsequência crescente ou decrescente de comprimento $n+1$.

□

Podemos generalizar o enunciado do Teorema de Erdös-Szekeres, como enunciado no resultado a seguir. A demonstração deste é análoga a daquele e fica a cargo do leitor.

Problema 2.24. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, $n = ab + 1$, e (x_i) uma sequência com n números reais distintos. Então esta sequência contém uma subsequência crescente com $a + 1$ termos ou uma subsequência decrescente com $b + 1$ termos.* □

Problema 2.25. *Seja A um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ com $(n + 1)$ elementos. Prove que existem dois elementos de A tais que um é divisível pelo outro.*

Solução. Primeiramente, vamos particionar o conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ em n subconjuntos disjuntos. De fato, considere os seguintes subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1 \times 2^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \times 2^k \leq 2n\} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\} \\ A_3 &= \{3 \times 2^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ e } 3 \times 2^k \leq 2n\} = \{3, 6, 12, 24, \ldots\} \\ &\vdots \\ A_{2n-1} &= \{(2n-1) \times 2^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ e } (2n-1) \times 2^k \leq 2n\} = \{2n - 1\} \end{aligned}$$

Note que esses conjuntos são disjuntos e que $\{1, 2, \ldots, 2n\} = A_1 \cup \cdots \cup A_{2n-1}$. Mais ainda, por construção dados dois elementos em um mesmo subconjunto, temos que um é divisível pelo outro.

Como A possui $n + 1$ elementos, logo pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem dois elementos de A que pertencem ao mesmo subconjunto. Assim, pelo observado anteriormente, um desses elementos divide o outro. □

Problema 2.26 (PUTNAM 1966)**.** *Dada uma sequência de $mn + 1$ números inteiros distintos, mostre que há uma subsequência de comprimento $m + 1$ na qual nenhum termo divide outro, ou então uma subsequência de comprimento $n + 1$ em que cada termo divide todos os termos consecutivos.*

Solução. Como todos os termos da sequência são diferentes, assim podemos supor sem perda de generalidade, que os termos estão em ordem crescente.

Dado qualquer a_i na sequência, seja $f(a_i)$ o comprimento da maior subsequência iniciada em a_i tal que todo termo dessa subsequência divida os termos seguintes. Se $f(a_i) > n$, para algum i, então o problema está resolvido. Então suponhamos que para todo termo a_i da sequência, $f(a_i) \leq n$. Assim, f só pode atingir n valores possíveis. Como existem $mn + 1$ termos na sequência, então pelo Princípio da Casa dos Pombos (Teorema 2.5) deve haver pelo menos $m + 1$ termos $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m+1}}$ com o mesmo valor em f, ou seja, tais que $f(a_{k_1}) = f(a_{k_2}) = \cdots = f(a_{k_{m+1}}) = h$.

Agora, note que nenhum dos termos dessa subsequência pode dividir o outro, pois se $a_{k_i} \mid a_{k_j}$, com $i < j$, então obtemos uma subsequência de comprimento $h+1$ começando por a_{k_i} e tal que todo termo divide os termos seguintes, o que contradiz o fato que a maior dessas subsequências tem comprimento h. Portanto, $(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m+1}})$ é uma subsequência de comprimento $m+1$ e tal que nenhum termo divide nenhum outro termo. $\square$

2.4 TEOREMA DOS DOIS QUADRADOS DE FERMAT

Pierre de Fermat(1601? – 1665)[5] era filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Com trinta anos alcançou o posto de conselheiro do parlamento de Toulouse, e sendo um advogado humilde e discreto, reservou o melhor do seu tempo de lazer à matemática. Embora tenha publicado muito pouco durante sua vida, manteve correspondência científica com muitos dos principais matemáticos do seu tempo e exerceu considerável influência sobre seus contemporâneos. Fermat enriqueceu tantos ramos da matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números. A intuição e o talento de Fermat eram extraordinários e muitas de suas contribuições ao assunto se deram na forma de enunciados e notas escritas nas margens de uma tradução que possuía da *Aritmética* de Diofanto. Muitos dos teoremas enunciados por Fermat mostraram-se depois verdadeiros.

Um destes data de 1640, Fermat afirmou que um número primo ímpar p pode ser escrito como a soma de dois quadrados se e somente se tiver o resto 1 quando dividido por 4 (isto é, $p = 4m+1$ onde m é algum inteiro positivo). Acredita-se que a primeira prova foi dada por Euler em 1747.

Abaixo é mostrada uma das provas para este fato, que é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.27. *Um número primo p pode ser escrito como uma soma de dois quadrados se e somente se p for da forma $4m+1$ para algum número natural m.*

Definição 2.28. Uma **relação de equivalência** em um conjunto S é uma relação binária $\sim$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Reflexividade: para todo $a \in S$, temos $a \sim a$.

[5] Existe um conflito com a data de nascimento de Fermat, a julgar pelas informações de vários escritores, o nascimento dele varia de 1590 a 1608.

(2) Simetria: para todo $a, b \in S$, se $a \sim b$, então $b \sim a$.

(3) Transitividade: para todo $a, b, c \in S$, se $a \sim b$ e $b \sim a$, então $a \sim c$.

Dado um conjunto S e uma relação de equivalência $\sim$ em S. Definimos **classe de equivalência** de $a \in S$ como

$$[a] := \{b \in S \mid b \sim a\}$$

Então a é chamado de representante de $[a]$. Denotamos a coleção de todas as classes de equivalência por $S/\sim := \{[a] \mid a \in S\}$.

Aqui está um exemplo. Seja p um número primo. Seja $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\sim$, onde $\sim$ é definido por: para todo, $a, b \in \mathbb{Z}, a \sim b$ se e somente se $p \mid (a - b)$, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $pk = a - b$.

Denotamos $\mathbb{Z}_p$ por $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$. Então definimos $(\mathbb{Z}_p)^{\times}$ como sendo a coleção de elementos não-nulos $\{1, \ldots, p - 1\}$

Lema 2.29. *Para primos da forma $p = 4m + 1$, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$s^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

Demonstração. Seja $p = 4m + 1$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Então para todo $x \in (\mathbb{Z}_p)^{\times}$, consideremos o conjunto $\{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\}$ onde $-x$ é o inverso aditivo (oposto) de x e $\bar{x}$ é o inverso multiplicativo de x. Primeiro, notemos que $x \neq -x$ porque p é um número primo ímpar. Pela mesma razão, $\bar{x} \neq -\bar{x}$. Portanto, $\mid \{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\} \mid = 2$ ou 4.

Agora vamos considerar os dois casos para quais $\mid \{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\} \mid = 2$.

Caso 1: $x = \bar{x}$. isto implica que $x^2 = 1$, então $(x - 1)(x + 1) = 0$ pertence a $(\mathbb{Z}_p)^{\times}$. Isto quer dizer que x pode ser somente 1 ou $p - 1$. Seja $A_0 := \{1, p - 1\}$.

Caso 2: $x = -\bar{x}$. isto implica que $x^2 = -1$

Mostraremos que caso 2 acontece para algum $x \in (\mathbb{Z}_p)^{\times}$. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\} \mid x \in (\mathbb{Z}_p)^{\times}\} \\ \mathcal{B} &= \{A \in \mathcal{A} \mid\mid A \mid = 2\} \\ \mathcal{C} &= \mathcal{A} - \mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \mid = 4\} \end{aligned}$$

Já que $p - 1 = \mid (\mathbb{Z}_p)^{\times} \mid = \mid \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \mid = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mid A \mid = 2 \mid \mathcal{B} \mid + 4 \mid \mathcal{C} \mid$ é divisível por 4, temos que $\mid \mathcal{B} \mid$ é par. Também sabemos que $A_0 \in \mathcal{B}$, então $\mid \mathcal{B} \geq 2$, consequentemente existe $A_1 \in \mathcal{B}$ com $A_1 \neq A_0$, digamos $A_1 = \{s, p - s\}$ para algum $s \in (\mathbb{Z}_p)^{\times}$. Então A_1 cai no caso 2. Implicando que $s^2 = -1$. $\square$

Proposição 2.30. *Qualquer número primo na forma $p = 4m + 1$ é a soma de dois* *quadrados.*

Demonstração. Sabemos que existem $\left(\lfloor\sqrt{p}\rfloor+1\right)^2 \geq p$ pares de inteiros (x', y') com $0 \leq x', y' \leq \sqrt{p}$. Pelo Princípio da casa dos pombos, existem dois pares $(x', y'), (x'', y'')$ tal que

$$x' - sy' \equiv x'' - sy'' \pmod p$$

Consequentemente, $x \equiv \pm sy \pmod p$, onde $x = \mid x' - x'' \mid, y = \mid y' - y'' \mid$. Podemos tomar s tal que $s^2 \equiv -1 \pmod p$. Então, $x^2 \equiv s^2y^2 \equiv -y^2 \pmod p$. Assim sendo, encontramos $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ com $0 < x^2 + y^2 < 2p$ e $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod p$. Já que p é o único primo entre 0 e $2p$ divisível por p, concluímos que $x^2 + y^2 = p$. □

Proposição 2.31. *Nenhum número na forma $n = 4m + 3$ é a soma de dois quadrados.*

Demonstração. Seja $n = 4m + 3$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Assumimos $n = x^2 + z^2$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$.

Então podemos ver rapidamente que $x^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. Analogamente, $y^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. Com isto, $n \not\equiv 3 \pmod p$, então temos uma contradição. Portanto, n não é a soma de dois quadrados. □

Exemplo 2.32 (FAMAT)**.** O inteiro 459 não pode ser escrito como a soma de dois quadrados, pois $459 = 4 \times 114 + 3$, mas o inteiro 153 pode, pois

$$153 = 3^2 \times 17 = 3^2\left(4^2 + 1^2\right) = 12^2 + 3^2$$

Um pouco mais complicado é o exemplo $n = 5 \times 7^2 \times 13 \times 17$. Neste caso temos:

$$n = 5 \times 7^2 \times 13 \times 17 = 7^2\left(2^2 + 1^2\right)\left(3^2 + 2^2\right)\left(4^2 + 1^2\right)$$

Precisamos trabalhar muito mais estes parênteses, utilizando a identidade: de Brahmagupta-Fibonacci $\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, temos:

$$\left(3^2 + 2^2\right)\left(4^2 + 1^2\right) = (12 + 2)^2 + (3 - 8)^2 = 14^2 + 5^2$$

e do mesmo modo

$$\left(2^2 + 1^2\right)\left(14^2 + 5^2\right) = (28 + 5)^2 + (10 - 14)^2 = 33^2 + 4^2$$

Combinando tudo isto temos que,

$$n = 7^2\left(33^2 + 4^2\right) = 231^2 + 28^2.$$

Problema 2.33 (BURTON)**.** *Prove que um inteiro positivo n tem tantas representações como a soma de dois quadrados assim como o inteiro $2n$.*

Solução. Seja $n = a^2 + b^2$ para $a, b \in \mathbb{Z}$. Então $2n = (a+b)^2 + (a-b)^2$, então existe uma representação de $2n$ como a soma de dois quadrados.

Suponha de modo reciproco que $2n = c^2 + d^2$. Já que c e d são ambos pares ou ambos ímpares, segue que $c - d$ e $c + d$ são ambos números pares e consequentemente,

$$n = \left[\frac{(c+d)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(c-d)}{2}\right]^2 \qquad \square$$

Problema 2.34 (BURTON)**.** *Prove que de quatro inteiros consecutivos, pelo menos um deles não é escrito como uma soma de dois quadrados.*

Solução. Dados quaisquer quatro inteiros consecutivos, um deles, digamos n, satisfaz $n \equiv 3 \pmod 4$. Assim, a Proposição 2.31 garante que n não é soma de dois quadrados. $\square$

Problema 2.35 (Iran TST 2015)**.** *Seja $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$ a sequencia de todos os números naturais que são somas de dois quadrados. Prove que existem infinitos números naturais m tais que $b_{m+1} - b_m = 2015$.*

Solução. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_{2014}$ números primos distintos tais que $p_i \equiv 3 \pmod 4$, assim temos que nenhum dos p_i's é soma de dois quadrados. Pelo Teorema 2.15, o sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 8 \\ x \equiv p_1 - 1 & \pmod{{p_1}^2} \\ \quad\vdots & \\ x \equiv p_{2014} - 2014 & \pmod{{p_{2014}}^2} \end{cases}$$

possui um conjunto infinito S de soluções.

Então, da primeira equação do sistema, temos que para qualquer $x \in S$, $x = 2(4k+1)$ e, logo, $x + 2015 = 4l + 1$, consequentemente x e $x + 2015$ podem ser escritos como a soma de dois quadrados, enquanto que $x + i$ (com $1 \leq i \leq 2014$) é divisível por p_i mas não por p_i^2, portanto $x + i$ não pode ser escrito como a soma de dois quadrados, para $i \in \{1, \ldots, 2014\}$. Assim, como x é soma de dois quadrados, logo existe m tal que $b_m = x$. Mais ainda, como $x + 1, \ldots, x + 2014$ não podem ser escritos como soma de dois quadrados e $x + 2015$ é soma de dois quadrados, segue que $b_{m+1} = x + 2015$ e, portanto, $b_{m+1} - b_m = 2015$, como queríamos. $\square$

2.5 LEMA DE KÖNIG

Dénes König (1884 – 1944) foi um matemático húngaro judeu que trabalhou e escreveu o primeiro livro texto no campo de teoria dos grafos. Seu maior apoio à geração mais jovem foi seu ensino. As palestras que ele ministrou como instrutor universitário tiveram sempre um pequeno público, mas os poucos ouvintes conheceram e se familiarizaram com vários ramos modernos da matemática e foram introduzidos a uma nova disciplina, teoria dos grafos, enquanto ainda estava sendo desenvolvida.

König tinha a capacidade de apresentar bem seus pensamentos: ele sabia como enfatizar os pontos essenciais, como despertar o interesse e - como o principal especialista em teoria dos grafos - como fazer perguntas interessantes. Sob sua influência, vários matemáticos se voltaram à esse campo dos grafos, um deles Paul Erdös, que frequentou suas aulas em seu primeiro ano de ensino.

Uma de suas contribuições foi o Lema de König, mas antes de introduzirmos esse lema (e o Teorema de Ramsey mais a frente), devemos nos atentar para algumas definições sobre a teoria dos Grafos. Elas são necessárias uma vez que essas são as estruturas centrais desses teorema.

Definição 2.36. Um *grafo* $G = (V, E)$ é um par onde V é um conjunto de pontos, chamados vértices, e E é um conjunto de pares de vértices, chamado de arestas.

Definição 2.37. Um *subgrafo* $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Definição 2.38. Um grafo completo com n vértices, que denotaremos por K_n, é um grafo de n vértices com a propriedade que todos os pares de vértices são conectados por uma aresta.

Definição 2.39. Uma coloração de arestas de um grafo é uma atribuição de cores para as arestas do grafo. Um grafo qualquer que tenha arestas coloridas é chamado um grafo monocromático se todas arestas são da mesma cor.

Teorema 2.40 (Lema de König)**.** *. Se G é um grafo conectado com um número infinito de nós tal que cada nó possui grau finito (isto é, tem uma quantidade finita de nós adjacentes), então G possui uma ramificação simples infinitamente longa, isto é, uma ramificação que não possui nós repetidos. Outra forma: Suponha que T seja uma árvore finitamente dividida com infinitos vértices. Então T tem um ramo infinito.*

Lembrando do princípio infinito da casa dos pombos: Se $S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$ é infinito então algum S_i deve ser infinito. (Este é a contrapositiva do fato óbvio que uma união finita de conjuntos finitos é finita). A chave para provar o lema de König é usar repetidamente o princípio infinito da casa dos pombos para encontrar uma sequência $v_0, v_1, \ldots$ dos vértices tais que cada v_i tem infinitos muitos vértices abaixo dele na árvore.

Demonstração. Seja v_0 a raiz de T. Como T é finitamente ramificado, podemos listar seus "filhos" como $\{c_1, \ldots, c_k\}$ para alguns k. Definimos

$$S_i = \{v \in T \mid v \text{ é um descendente de } c_i\}$$

Então, desde que $T \backslash \{v_0\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, e $T \backslash \{v_0\}$ é infinito, o princípio infinito da casa dos pombos nos diz que existe algum S_i que é infinito. Escolhemos um, e definimos $v_1 = c_i$. De modo geral, suponha que tenhamos $v_0, v_1, \ldots, v_n$ um caminho em T, e v_n com infinitos descendentes. Desde que v_n tenha apenas finitos filhos, o mesmo raciocínio, como acima, mostra que pelo menos um deles tem infinitos descendentes, e permitimos que $v_n + 1$ seja uma criança. Como podemos fazer isso para qualquer n, obtemos um ramo infinito $v_0, v_1, v_2, \ldots$ □

Problema 2.41. *Defina uma palavra para ser qualquer sequência finita não vazia de símbolos. Cada palavra é boa ou ruim. Dada uma sequência infinita de símbolos, mostre que além de algum ponto, a sequência pode ser quebrada em palavras que são todas boas ou que são todos ruins.*

Solução. A estratégia para prova é construir uma árvore S fora da sequência dada. A raiz da árvore é um símbolo especial; os nós restantes são rotulados com números naturais. O nó rotulado 0 tem raiz como pai; o nó rotulado j tem um pai i se a palavra $S_i, S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}$ é boa, e i é o maior valor abaixo de j a ter essa propriedade. Se não existe tal i, então o pai de j é a raiz.

De acordo com o lema de König, há um caminho infinito - nesse caso toda a sequência S pode ser dividida em palavras boas - ou um nó com grau infinito. Neste último caso, deixe que os filhos do nó tenham rótulos $k_0, k_1, \ldots$ Cada palavra começando em k_t e terminando em $k_{t+1} - 1$ é uma palavra ruim, para todo t. □

2.6 TEORIA DE RAMSEY

Segundo as palavras de Theodore S. Motzkin (1908 – 1970): "A completa desordem é impossível".

Em 1927, Frank Plumpton Ramsey (1903 – 1930), lógico inglês, estava lutando com um problema na lógica matemática. Para resolvê-lo, parecia-lhe que ele precisava mostrar que os sistemas matemáticos que ele estava estudando sempre teriam uma certa ordem neles. À primeira vista, os sistemas eram livres para serem tão desordenados quanto quisessem, mas Ramsey achou que, mesmo da maneira mais indisciplinada, o tamanho do sistema deveria forçar partes dele a exibir algum tipo de ordem.

Ao provar que sua intuição estava correta, ele inventou um novo ramo da matemática, que agora é conhecido como Teoria de Ramsey. Ele leu o artigo resultante para a Sociedade Matemática de Londres, mas morreu, aos 26 anos de idade, antes de sua teoria ter sido publicada.

A Teoria de Ramsey ainda tem aplicações no estudo da lógica. Mas também é um assunto muito atraente por si só, pois suas ideias básicas podem ser entendidas com muita facilidade e envolvem desenhos coloridos. Por outro lado, também é uma área de pesquisa ativa, pois levanta algumas questões espetacularmente difíceis. Veremos que a Teoria de Ramsey tem a capacidade de fazer perguntas simples, que desafiaram todas as tentativas de respondê-las até agora. Nesta seção, apresentaremos o Teorema de Ramsey e alguns corolários.

O Problema da Festa é uma das principais questões quando falamos sobre a aplicação do teorema de Ramsey, apesar de ser um problema simples, entender seu funcionamento é extremamente necessário para darmos os primeiros passos em direção ao teorema de Ramsey. Veremos a seguir um exemplo do Problema da Festa e uma de suas variações.

Problema 2.42. *Em uma festa com seis pessoas, existem três pessoas que são mutuamente conhecidas entre si ou três pessoas que são mutuamente estranhas entre si.*

Solução. Vamos chamar uma pessoa da festa de Φ que é um vértice de um grafo K_6, onde cada pessoa representa um vértice deste grafo. Ela tem visão de outras 5 pessoas, das quais podemos afirmar, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que pelo menos 3 são conhecidas ou desconhecidas por ϕ. Vamos usar as cores azul (linha cheia) para "conhece" e vermelho (linha pontilhada) para "não conhece". Sendo assim, sem perder a generalidade, consideremos as 3 arestas azuis e denotemos seu vértices como A, B e C. Se existir alguma dessas arestas, AB, AC e BC, com a cor azul, temos um triângulo da mesma cor e está provado. Vamos considerar então que as arestas não serão coloridas com a cor azul. Mas se nenhuma pode ser azul então todas devem ser vermelhas e se todas são vermelhas, existe um $\triangle ABC$ com todas as arestas vermelhas (Figura 6).

Logicamente, o Problema da Festa é apenas um caso particular do teorema de Ramsey. Vamos expressar a solução do problema da festa agora através da linguagem da teoria dos grafos. No caso do Problema 2.42, podemos dizer que um grafo K_6 colorido por duas cores, admite um subgrafo K_3 de cor azul ou um subgrafo K_3 de cor vermelha.

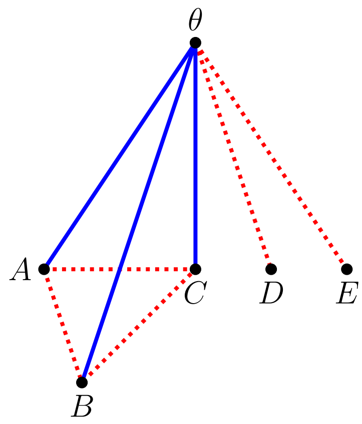


Figura 6: Problema da Festa $\square$

Teorema 2.43 (Teorema de Ramsey para duas cores)**.** *Sejam $k, l \geq 2$. Existe um menor inteiro positivo $R = R(k,l)$ tal que toda a coloração de arestas de K_R, com as cores vermelho e azul, admite um subgrafo K_k vermelho ou um subgrafo K_l azul.*

Demonstração. Vamos estabelecer primeiro nosso método de indução, notemos que $R(k,2) = k$ para todo $k \geq 2$ e $R(2,l) = l$ para todo $l \geq 2$. Para $k+l = 4$ e $k+l = 5$, notemos que também é fácil, pois $R(2,2) = 2$ e $R(3,2) = 3$ respectivamente. Consequentemente, seja $k+l \geq 6$, com $k, l \geq 3$, nós podemos assumir que existe $R(k, l-1)$ e $R(k-1, l)$. Vamos mostrar que $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$, para $k, l \geq 3$, provando assim o teorema. Nosso grafo será K_n, com $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Vamos chamar um destes vértices de v, sendo assim existem $n-1$ vértices conectados através de uma aresta à v. Suponhamos por absurdo que $A < R(k-1,l)$ e $B < R(k,l-1)$. Sendo assim, A e B como $A \leq R(k-1,l) - 1$ e $B \leq R(k,l-1) - 1$.

Então:

$$\begin{aligned} A + B &\leq \{R(k-1,l) - 1\} + \{R(k,l-1) - 1\} \\ A + B &\leq \underbrace{R(k-1,l) + R(k,l-1)}_{n} - 2 \\ A + B &\leq n - 2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

O que é um absurdo! Logo, $A \geq R(k-1,l)$ ou $B \geq R(k,l-1)$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $A \geq R(k-1,l)$. Seja V o conjunto de vértices conectado à v por arestas vermelhas, temos que $V \geq R(k-1,l)$. Pela hipótese de indução, K_V contém um subgrafo vermelho K_{k-1} ou um subgrafo azul K_l. Se tem um subgrafo azul K_l, está provado. Se contém um subgrafo vermelho K_{k-1}, estando apenas conectado por arestas vermelhas ao vértice v, nós temos um subgrafo K_k, uma vez que só podemos conectá-lo por arestas vermelhas (ou obteremos um subgrafo K_l azul). E assim a prova do teorema está completa. $\square$

Os números $R(k,l)$ são conhecidos como o número de Ramsey para duas cores. A solução para o problema da festa nos diz que $R(3,3) = 6$. Pelo Teorema de Ramsey, nós podemos estender o problema da festa de várias outras formas. Por exemplo, nós sabemos que existe um número n de forma que, estando n pessoas em uma festa, então deveria ter ou um grupo de quatro pessoas mutuamente conhecidas ou um grupo de cinco pessoas mutuamente estranhas. Esse número n é o Numero de Ramsey $R(4,5)$.

Há outros meios de estender o problema da festa. No exemplo a seguir nós consideramos o caso onde as pessoas se amam, ou se odeiam, ou são indiferentes entre si. Nessa situação queremos encontrar três pessoas que se amam, ou três pessoas que se odeiam, ou três pessoas que são indiferentes entre si.

Vamos ver o problema a seguir:

Problema 2.44 (IMO 1964)**.** *Dezessete cientistas se comunicam por cartas entre si. Em todas suas cartas eles discutem somente sobre um entre três temas. Cada par de cientistas fala sobre um único tema. Mostre que existe pelo menos três cientistas que conversam entre si sobre o mesmo assunto.*

Solução. Pegue qualquer um destes 17 cientistas. Ele escreve para 16 pessoas, então, pelo Princípio da casa dos pombos 2.1, ele deve escrever para pelo menos 6 pessoas sobre o mesmo assunto. Se algum dos 6 escrever um para o outro sobre esse tópico, então temos um grupo de três escrevendo um para o outro sobre o mesmo tópico, o que conclui o problema. Porém, suponha que todos escrevam um para o outro nos outros dois tópicos. Pegue qualquer um deles, B. Ele deve escrever para pelo menos 3 dos outros 5 no mesmo tópico. Se dois deles escrevem um para o outro sobre este tópico, então eles formam um grupo de três com B. Caso contrário, todos eles devem escrever um para o outro no terceiro tópico e assim de um grupo de três. □

Este é um exemplo de um número de Ramsey para 3 cores. Mais geralmente, pode-se facilmente generalizar o teorema de Ramsey de duas cores para $r \geq 3$ cores, em qualquer caso o número de Ramsey será denotado por $R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$. No caso $k_i = k$ para $i = 1, \ldots, r$, usa-se uma notação simples $R_r(k)$. Então, por exemplo, no Problema 2.44 nós temos $R(3,3,3) = R_3(3) = 17$.

A existência dos números de Ramsey tem sido conhecida desde 1930. No entanto, existe uma imensa dificuldade em calcular seus valores. Alguns dos valores que são conhecidos $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(3,6) = 18$, $R(3,7) = 23$, $R(3,8) = 28$, $R(3,9) = 36$, $R(4,4) = 18$, $R(4,5) = 25$ e $R(3,3,3) = 17$

Problema 2.45 (Africa do Sul TST 1997)**.** *Seis pontos são unidos aos pares por segmentos vermelhos ou azuis. Deve existir um caminho fechado consistindo de quatro dos segmentos, todos da mesma cor?*

Solução. Sim, existe um caminho fechado consistindo de quatro dos segmentos, todos da mesma cor.

Suponhamos que não exista um caminho fechado consistindo de quatro dos segmentos, todos da mesma cor. Denotemos os vértices por a, b, c, d, e, f. Pelo Teorema de Ramsey, Teorema 2.43, existe um triângulo monocromático, suponhamos, sem perda de generalidade, que abc seja um triângulo azul.

Como estamos supondo que não existe um caminho fechado de quatro segmentos de mesma cor, logo d não pode ter 2 segmentos azuis com a, b, c. O mesmo é válido para e e f. Além disso, se olharmos dois vértices de abc e comparamos com dois dos vértices restantes, digamos, a, b e d, e, não podem os segmentos ad, ae, bd e be serem todos vermelhos. Portanto, a única configuração possível é ter um único segmento azul ligando cada vértice de abc com um vértice se def diferente. Sem perda de generalidade, podemos supor que os segmentos azuis são ad, be, cf.

Analisando os segmentos de e ef, se qualquer um deles for azul, digamos de azul, então teremos o seguinte caminho fechado azul $abed$. Deste modo, ambos os segmento são vermelhos e, portanto, obtemos que o caminho fechado $bdef$ é todo vermelho. □

Surpreendentemente, o teorema de Ramsey não foi o primeiro, nem mesmo o segundo, teorema na área agora conhecida como Teoria de Ramsey. Os primeiros resultados da chamada teoria de Ramsey são atribuídos a David Hilbert(1862 – 1943), Issai Schur (1875 – 1941) e Bartel Van Der Waerden (1903 – 1996). Todos esses resultados que precedem o teorema de Ramsey, lidam com as colorações em números inteiros. Curiosamente, mesmo o teorema de Ramsey sendo um resultado sobre grafos, é possível utilizá-lo na teoria dos números (inteiros).

Vamos apresentar um teorema, provado por Issai Schur em 1916, que é um dos resultados iniciais na teoria de Ramsey.

Teorema 2.46 (Teorema de Schur)**.** *Para qualquer $r \geq 1$, existe um menor inteiro positivo $s = s(r)$ tal que, para qualquer r-coloração de $[1, 2, \ldots, s]$, existe uma solução monocromática para $x + y = z$.*

Demonstração. O teorema de Ramsey afirma, em particular, que para qualquer $r \geq 1$ existe um inteiro $n = R(3, r)$ de forma que para qualquer r-coloração de K_n existe um subgrafo monocromático. Numeremos os vértices de K_n por $1, 2, \ldots, n$. Peguemos os números $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ e coloquemos arbitrariamente em r conjuntos, ou seja, para cada

$x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ atribuiremos uma cor. Peguemos dois vértices j, i de K_n, onde $j, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e i, j, e coloriremos as arestas ligadas por este vértice de acordo com o conjunto do qual $\mid j - i \mid$ é membro. Pelo teorema de Ramsey, um subgrafo K_3 monocromático deve existir. Seja os vértices deste subgrafo monocromático $a < b < c$. Consequentemente, $b - a, c - b$ e $c - a$ são todos da mesma cor. Podemos reescrever então que $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$, onde notamos que $x + y = z$ é monocromático. □

Um exemplo próximo do teorema de Schur é o seguinte problema:

Problema 2.47 (IMO 1978). *Uma sociedade internacional tem membros de 6 países diferentes. A lista de membros contém 1978 nomes, numerados* $1, 2, \ldots, 1978$. *Prove que existe pelo menos um membro cujo número é a soma dos números de dois membros de seu próprio país, ou é igual ao dobro do número de um membro de seu próprio país.*

Solução. Suponha o oposto. Nós temos $1978 = 6 \times 329 + 4$, portanto há um país A contendo pelo menos 330 membros na lista.

Sejam $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330}$ os 330 membros de A. Considere as pessoas identificadas pelas seguintes diferenças $a_2 - a_1, \ldots, a_{330} - a_1$. Há 329 delas e nenhuma delas pertence a A, pois se pertencesse então teríamos $a_i - a_1 = a_j$, para algum j, e assim $a_i = a_j + a_1$, o que contradiz a nossa suposição. Como $329 = 65 \times 5 + 4$, portanto um dos outros países B contem 66 desses membros, ou seja, $a_{k_1} - a_1, \ldots, a_{k_{66}} - a_1$ são os membros de B. Denotando por $b_i = a_{k_i} - a_1$, temos que $b_1 < \cdots < b_{66}$. Vamos agora repetir o argumento acima para os elementos de B.

Considere as seguintes diferenças $b_2 - b_1, \ldots, b_{66} - b_1$. Nenhuma delas pertence a A ou B, portanto elas pertencem aos outros 4 países. Como $66 = 4 \times 16 + 2$, portanto um dos outros países C contem 17 dessas diferenças, denotados por $c_1, \ldots, c_{17}$. Considere as diferenças $c_2 - c_1, \ldots, c_{17} - c_1$, que não pertencem a A, B ou C. Como $16 = 3 \times 5 + 1$, portanto há pelo menos 6 desses membros no país D, digamos $d_1 < \cdots < d_6$.

Considere $d_2 - d_1, \ldots, d_6 - d_1$. Como $5 = 2 \times 2 + 1$, logo há um país E que contém pelo menos 3 deles, denotados por $e_1 < e_2 < e_3$. Em seguida, considere as diferenças $e_2 - e_1$ e $e_3 - e_1$, como eles não pertencem a A, B, C, D ou E, assim eles pertencem ao último país F. Denotando por f_1 e f_2, temos que a diferença $f_2 - f_1 \in \{1, \ldots, 1978\}$, mas $f_2 - f_1$ não pertence a nenhum dos países, o que é um absurdo. Portanto, há pelo menos um membro cujo número é a soma dos números de dois membros de seu próprio país, ou duas vezes maior que o número de um membro de seu próprio país. □

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aos olhos deste autor, a busca por problemas olímpicos foi algo incrível e desafiador. A análise combinatória é um ramo enorme da matemática e a quantidade de problemas, teoremas, exercícios, entre outras coisas, é gigantesca. Desde a escolha do tema até o encerramento da tese, os caminhos traçados foram cheios de dúvidas e incertezas. Mas o prazer em ver algo completo e acabado simplesmente é indescritível.

A dissertação poderia ter muito mais conteúdo, alguns "braços" da análise combinatória foram deixados de fora, não por serem irrelevantes, mas por possuírem uma grande quantidade de exercícios e muito mais conteúdo para este trabalho, que não seria possível acrescentar no tempo hábil para defesa. Poderia ser escrito uma quantidade gigantesca de páginas adicionais de conteúdo e ainda teríamos espaço para mais.

O trabalho feito aqui é para mostrar, aos que têm interesse em iniciar esta jornada nas olimpíadas e competições matemáticas, um pouco do que podem esperar quando se trata de problemas em combinatória. Quem quiser se aprofundar ainda mais no tema, as referências deste trabalho contêm uma gama de livros e artigos que possuem exercícios e problemas nesta e em várias outras áreas da matemática.

Quem sabe no futuro, este autor não tenha seu próprio livro de problemas olímpicos para ser utilizado por vários outros futuros mestres e doutores.

REFERÊNCIAS

AKIYAMA, J.; KANO, M. *Discrete and Computational Geometry: Japanese Conference, JCDCG 2002, Tokyo, Japan, December 6-9, 2002, Revised Papers*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Lecture Notes in Computer Science). ISBN 9783540444008. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VD1sCQAAQBAJ>.

ANDREESCU, T.; DOSPINESCU, G. *Problems from the Book*. XYZ Press, 2010. (XYZ Series). ISBN 9780979926907. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-7W9PgAACAAJ>.

ANDREESCU, T.; ENESCU, B. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhäuser Boston, 2011. (SpringerLink : Bücher). ISBN 9780817682538. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=550P8T4-1BAC>.

ANDREESCU, T.; FENG, Z. *Mathematical Olympiads 1998-1999: Problems and Solutions from Around the World*. Mathematical Association of America, 2000. (MAA Problem Book Series). ISBN 9780883858035. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=T0CnqnoKu6QC>.

ANDREESCU, T.; FENG, Z. *102 Combinatorial Problems: From the Training of the USA IMO Team*. Birkhäuser Boston, 2013. ISBN 9780817682224. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=mLQPBwAAQBAJ>.

ANDREESCU, T.; KEDLAYA, K.; ZEITZ, P. *Mathematical Olympiads 1995-1996: Olympiad Problems and Solutions from Around the World*. [S.l.]: American Mathematics Competitions, 1997.

BIN, X.; YEE, L. P. *Mathematical Olympiad in China (2007-2008): Problems and Solutions*. World Scientific Publishing Company, 2009. ISBN 978-9814261142. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/7218>.

BURTON, D. M. *Elementary Number Theory*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011. ISBN 9780073383149.

CARVALHO, P. C. P. O princípio das gavetas. *EUREKA, a revista da Olimpíada Brasileira de Matemática*, n. 05, p. 27 – 33, 1999. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka5.pdf>.

CHEN, C.; KOH, K.; KHEE-MENG, K. *Principles and Techniques in Combinatorics*. World Scientific, 1992. ISBN 9789810211394. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gFo4LJmSe6gC>.

COMPE, W. et al. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000: Problems, Solutions and Commentary*. Mathematical Association of America, 2002. (MAA Problem Book Series). ISBN 9780883858073. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=QZ1QY4CWZv4C>.

CRAVEIRO, I. M.; TEIXEIRA, M. A. G. Uma interpretação combinatória para os números de catalan. *PORANDU*, n. 01, p. 41 – 48, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/porandu/article/view/6659/6087>.

DJUKIĆ, D. et al. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition*. Springer New York, 2011. (Problem Books in Mathematics). ISBN 9781441998545. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=okx0d9jdM8oC>.

ENGEL, A. *Problem-Solving Strategies*. Springer New York, 2008. (Problem Books in Mathematics). ISBN 9780387226415. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IJLzBwAAQBAJ>.

EVES, H.; DOMINGUES, H. *Introdução à história da matemática*. UNICAMP, 2004. ISBN 9788526806573. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=isVoPgAACAAJ>.

FERNANDES, R. S. Dissertação, *Combinatória*: dos princípios fundamentais da contagem à álgebra abstrata. São Carlos: [s.n.], 2017. (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.55.2018.tde-31012018-161438>.

GUICHARD, D. *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory*. n/a, 2016. Disponível em: <https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/>.

HARDY, K.; WILLIAMS, K. *The Green Book of Mathematical Problems*. Dover Publications, 2013. ISBN 9780486169453. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rTnDAgAAQBAJ>.

HONSBERGER, R. *From Erdös to Kiev: Problems of Olympiad Caliber*. Mathematical Association of America, 1996. (Dolciani Mathematical Expositions, v. 17). ISBN 9780883853245. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=OIpZxK8naikC>.

ING, L. H. The history of the chinese reminder theorem. *Mathematical Medley*, n. 30, p. 55 – 62, 2003. Disponível em: <http://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/smsmedley.aspx>.

KATZ, M.; REIMANN, J. *An Introduction to Ramsey Theory*. American Mathematical Society, 2018. (Student Mathematical Library). ISBN 9781470442903. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2ThxDwAAQBAJ>.

KOMJATH, P.; TOTIK, V. *Problems and Theorems in Classical Set Theory*. Springer New York, 2006. (Problem Books in Mathematics). ISBN 9780387302935. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rbCmt-2NxtIC>.

KOSHY, T. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford University Press, 2009. ISBN 9780199868766. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=9NjbvQEACAAJ>.

MANFRINO, R.; ORTEGA, J.; DELGADO, R. *Topics in Algebra and Analysis: Preparing for the Mathematical Olympiad*. Springer International Publishing, 2015. ISBN 9783319119465. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=C2GYBgAAQBAJ>.

MOREIRA, C. G. T. A. O teorema de ramsey. *EUREKA, a revista da Olimpíada Brasileira de Matemática*, n. 06, p. 23 – 29, 1999. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka6.pdf>.

MORGADO, A. et al. *Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 9788585818012. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=s3qaSgAACAAJ>.

PANSERA, D.; VALMÓRBIDA, E. O princípio da casa dos pombos e suas aplicações. *Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina*, n. 7, p. 46–50, 2010. ISSN 16797612. Disponível em: <http://orm.mtm.ufsc.br/revista.php>.

PLINIO, J.; ESTRADA, E. *Problemas resolvidos de combinatória*. Ciência Moderna, 2007. ISBN 9788573936247. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=prxrXwAACAAJ>.

POLYA, G.; CONWAY, J. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, 2014. (Princeton Science Library). ISBN 9781400828678. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=X3xsgXjTGgoC>.

QUADRATIC Reciprocity. In: PROBLEMS in Algebraic Number Theory. New York, NY: Springer New York, 2005. p. 81–97. ISBN 978-0-387-26998-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/0-387-26998-3_7>.

SHINE, C. Y. Grafos e contagem dupla. *EUREKA, a revista da Olimpíada Brasileira de Matemática*, n. 12, p. 31 – 39, 2001. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka12.pdf>.

SHKLARSKY, D.; CHENTZOV, N.; YAGLOM, I. *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, 2013. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486319865. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XuHCAgAAQBAJ>.

SILVA, L. J. *Teoria de Ramsey*. Dissertação (Dissertação) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2017.

SOBERÓN, P. *Problem-Solving Methods in Combinatorics: An Approach to Olympiad Problems*. Springer Basel, 2013. (SpringerLink : Bücher). ISBN 9783034805971. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2btDAAAAQBAJ>.

WAGNER, S. Combinatorics. In: *Strathmore conference*. [s.n.], 2017. Disponível em: <http://math.sun.ac.za/swagner/Strathmore.html>.

WU, E. Themes and heuristics in analysis-flavored olympiad problems. In: *Research/-Capstone Project*. [s.n.], 2017. Disponível em: <https://docplayer.net/102313615-By-farrell-eldrian-wu.html>.