



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

EDUARDO DEUSCHLE

ESTUDO DE CONFIABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO
DIMENSIONADOS COM REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS

FLORIANÓPOLIS

2019

EDUARDO DEUSCHLE

**ESTUDO DE CONFIABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO
DIMENSIONADOS COM REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio

FLORIANÓPOLIS

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Deuschle, Eduardo
ESTUDO DE CONFIABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO
DIMENSIONADOS COM REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS / Eduardo
Deuschle ; orientador, Daniel Domingues Loriggio, 2019.
136 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Concreto Armado. 3. Segurança
Estrutural. 4. Pilares. 5. Redistribuição de Momentos. I.
Loriggio, Daniel Domingues. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil. III. Título.

Eduardo Deuschle

**Estudo de confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados com
redistribuição de esforços**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Professor Américo Campos Filho, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Professor Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina -UFSC

Professor Jano Coelho D'Araújo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina -UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado
adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Professora Poliana Dias de Moraes, Dra.
Coordenadora do Programa

Professor Daniel Domingues Loriggio, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2019.

AGRADECIMENTOS

À Deus, em primeiro lugar, por renovar minhas forças, energias e esperanças a cada dia.

Aos meus pais, Jackson e Maristela, e à minha irmã e colega de profissão, Daniela, pelo carinho, amor incondicional e por sempre me incentivarem a seguir com meus objetivos.

Ao professor e orientador Daniel Domingues Loriggio, de quem tive a honra de ser aluno e orientando desde a graduação, pela dedicação, cooperação, paciência e amizade ao longo deste trabalho, e pelo empenho em transmitir o máximo do seu conhecimento e experiência na Engenharia.

Aos professores Américo Campos Filho, Jano Coelho D'Araujo e Roberto Caldas de Andrade Pinto, membros da banca, e ao professor Wellison José de Santana Gomes, que participou do exame de qualificação, pelas diversas observações e sugestões que muito contribuíram a esta Dissertação.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, em especial ao professor, tutor e amigo Cláudio César Zimmermann, por terem contribuído com minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus colegas e amigos da Universidade Federal de Santa Catarina, pela convivência, companheirismo e troca de conhecimentos. Em especial àqueles com quem, por mais tempo, tive a oportunidade de estudar e conviver, André, Eduardo, Lucas, Rafael, Vinícius e Victor.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), pelo apoio à realização do presente trabalho – Código de Financiamento 001, e pela bolsa de estudos durante a parte inicial do Mestrado.

E, por fim, a todos aqueles que fazem parte da minha vida e que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Muito obrigado!

*“Live and act within the limit of your knowledge
and keep expanding it to the limit of your life.”*

(Ayn Rand)

RESUMO

O projeto de estruturas de concreto armado, usualmente desenvolvido com esforços obtidos em uma análise elástico-linear, também pode utilizar procedimentos de análise que exploram o comportamento não-linear dos materiais, a fim de obter economia para a estrutura ou uma distribuição mais adequada da armadura. Dentre essas alternativas está a análise linear com redistribuição de momentos, empregada em vigas e lajes que possuam ductilidade adequada, ou ainda em pilares desde que a redistribuição seja decorrente de vigas que a eles se ligam. Levantou-se, contudo, a hipótese de que esse método de análise estrutural pode reduzir a segurança dos pilares, caso a plastificação da viga não ocorra para o momento adotado na análise. O objetivo do trabalho, portanto, é avaliar a confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados por meio de análises lineares com redistribuição de momentos e comparar com os dimensionamentos usuais. Para isso, foram desenvolvidos dois modelos mecânicos, o primeiro para determinar a resistência última de pilares, e o segundo para obter esforços solicitantes em pórticos planos de concreto armado, por meio de análises não-lineares com o uso de diagramas momento curvatura. Esses modelos foram empregados em um estudo de confiabilidade, desenvolvido pelo Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância, para estimar a probabilidade de falha em pilares de concreto armado de extremidade. Os pilares do estudo foram dimensionados utilizando a análise elástico-linear, análises com diferentes taxas de redistribuição, análises com redistribuição apenas em vigas, e também com a análise não-linear simplificada da NBR 6118 (2014). Os resultados obtidos sugerem que o uso de uma análise linear com redistribuição de momentos para o dimensionamento de pilares pode resultar em um aumento da probabilidade de falha destes elementos.

Palavras-chave: Concreto armado. Segurança estrutural. Pilares. Redistribuição de momentos.

ABSTRACT

The design of reinforced concrete structures, usually carried out with internal forces obtained with a linear elastic analysis, may also use procedures that take advantage of non-linear behavior of materials in order to achieve cost savings or a better reinforcement distribution. One of the alternatives is the linear elastic analysis with limited redistribution, applied in continuous beams or slabs with adequate ductility, or even in columns provided that the redistribution is due to beams connected to them. However, this method of structural analysis may reduce the safety of columns if the beam reaches the plastic condition at a higher moment than the one adopted in the design. Therefore, the objective of the study is to evaluate the reliability of reinforced concrete columns designed by a linear analysis with moments redistribution, compared to the usual design procedure. Two mechanical models were developed, the first one to estimate the ultimate strength of columns, and the second to obtain the internal forces on reinforced concrete frames with a non-linear analysis, which uses bending moment-curvature relationship. Those models were applied in a reliability study, with an application of the Monte Carlo Method with Importance Sampling, to estimate the failure probability in reinforced concrete columns. Different structural analysis methods were used to design the columns, such as the linear-elastic, the linear analysis with limited moment redistribution, applied to the whole frame or only to the beams, and the simplified non-linear analysis of NBR 6118 (2014). The results suggest that the design of columns with a linear analysis with moment redistribution may increase their probability of failure.

Keywords: Reinforced concrete. Structural safety. Columns. Moments Redistribution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-1 - Análise elástico-linear genérica de um pilar de extremidade	16
Figura 1-2 – Análise elástica com redistribuição na ligação de viga com pilar.....	17
Figura 1-3 –Redistribuição de 50% (a) e viga armada para 75% do momento elástico (b)	18
Figura 3-1 – Diagrama tensão-deformação do aço CA-50.....	31
Figura 3-2 – Diagrama tensão-deformação do concreto	31
Figura 3-3 – Domínios de deformação da seção transversal no ELU	32
Figura 3-4 – Seção transversal, diagrama de deformações e equilíbrio.....	35
Figura 3-5 – Representação do sistema e carregamento (a) e sistema deformado (b).....	37
Figura 3-6 – Força x rotação	37
Figura 3-7 – Diagrama tensão-deformação de material elastoplástico.....	39
Figura 3-8 – Momento fletor x curvatura: material de comportamento não-linear.....	40
Figura 3-9 – “Tension Stiffening” no concreto armado	41
Figura 3-10 – Diagrama momento x curvatura para seções de concreto armado à flexão	42
Figura 3-11 – Deformada de uma viga submetida à flexão pura.....	42
Figura 3-12 – Elemento infinitesimal de viga.....	43
Figura 3-13 – Diagrama de deformações em seção de concreto armado.....	45
Figura 3-14 - Capacidade de rotação de rótulas plásticas.....	49
Figura 3-15 – Funções de probabilidade acumulada (CDF) e densidade de probabilidade (PDF) 51	
Figura 3-16 – Funções densidade de probabilidade de solicitações (S) e resistências (R).....	55
Figura 3-17 – Distribuição da função margem de segurança $Z = R - S$	55
Figura 3-18 – Índice de confiabilidade de Hasofer-Lind	56
Figura 4-1 – Seção transversal – Flexão composta normal.....	66
Figura 4-2 – Deformações do concreto no Estado Limite Último.....	67
Figura 4-3 – Fluxograma do Cálculo do Momento Resistente.....	68
Figura 4-4 – Momentos últimos experimentais e de cálculo (estimados).....	73
Figura 4-5 – Diagrama momento fletor - curvatura	76
Figura 4-6 – Diagrama momento fletor - curvatura bilinear.....	78
Figura 4-7 – Seção transversal homogeneizada no estágio I.....	78
Figura 4-8 – Seção transversal homogeneizada no estágio II	80
Figura 4-9 – Seção transversal da viga- exemplos de diagrama momento-curvatura.....	81
Figura 4-10 – Diagramas momento curvatura – vigas com variação da taxa de armadura	82
Figura 4-11 – Método da secante	84
Figura 4-12 – Seção transversal da viga- exemplos de diagrama momento-curvatura.....	86
Figura 4-13 – Diagramas momento curvatura: pilares com variação de taxa de armadura.....	87
Figura 4-14 – Discretização do modelo de barras da estrutura	88

Figura 4-15 – Rigidez secante pelo diagrama momento curvatura	89
Figura 4-16 – Fluxograma do código de análise não-linear	91
Figura 4-17 – Dados de geometria e carregamentos do exemplo 4.5.1	92
Figura 4-18 – Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado sem redistribuição de esforços	93
Figura 4-19 – Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado com redistribuição de esforços.....	93
Figura 4-20 - Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado segundo IBRACON (2015)	94
Figura 4-21 – Momentos Fletores – Exemplo 4.5.1	95
Figura 6-1 – Representação esquemática: pilar de extremidade (a) e modelo de cálculo (b).....	103
Figura 6-2 – Exemplo 1: Geometria e carregamentos.....	104
Figura 6-3 – Exemplo 1.1: Seções armadas com análise elástico-linear.....	105
Figura 6-4 – Exemplo 1.2: Seções armadas com redistribuição de 25%.....	106
Figura 6-5 – Exemplo 1.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%	106
Figura 6-6 – Exemplo 1.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%.....	107
Figura 6-7 – Exemplo 1.5: Seções armadas com análise não-linear simplificada.....	107
Figura 6-8 – Exemplo 2: Geometria e carregamentos.....	109
Figura 6-9 – Exemplo 3: Geometria e carregamentos.....	111
Figura 6-10 – Exemplo 4: Geometria e carregamentos.....	113
Figura A.1 – Exemplo 2.1: Seções armadas com análise elástico-linear	129
Figura A.2 – Exemplo 2.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%	129
Figura A.3 – Exemplo 2.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%	130
Figura A.4 – Exemplo 2.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%	130
Figura A.5 – Exemplo 2.5: Seções armadas com ANL simplificada	131
Figura A.6 – Exemplo 3.1: Seções armadas com análise elástico-linear	131
Figura A.7 – Exemplo 3.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%	132
Figura A.8 – Exemplo 3.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%	132
Figura A.9 – Exemplo 3.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%	133
Figura A.10 – Exemplo 3.5: Seções armadas com ANL simplificada	133
Figura A.11 - Exemplo 4.1: Seções armadas com análise elástico-linear	134
Figura A.12 – Exemplo 4.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%	134
Figura A.13 – Exemplo 4.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%	135
Figura A.14 - Exemplo 4.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%	135
Figura A.15 – Exemplo 4.5: Seções armadas com ANL simplificada	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 – Compatibilidade de deformações.....	33
Tabela 3-2 – Algumas distribuições de probabilidades contínuas.....	52
Tabela 3-3 – Índices de confiabilidade alvo para ELU - JCSS.....	62
Tabela 3-4 - Índices de confiabilidade alvo para ELU - <i>Model Code</i>	62
Tabela 4-1 – Dados dos pilares ensaiados por KIM & YANG (1995).....	69
Tabela 4-2 – Dados dos pilares ensaiados por CLAESON & GYLLTOFT (1998).....	70
Tabela 4-3 – Dados dos pilares ensaiados por KIM & LEE (2000).....	70
Tabela 4-4 – Dados dos pilares ensaiados por LIMA Jr (2003).....	70
Tabela 4-5 – Dados dos pilares ensaiados por ADORNO (2004)	70
Tabela 4-6 – Dados dos pilares ensaiados por DANTAS (2006).....	70
Tabela 4-7 – Dados dos pilares ensaiados por MELO (2009)	71
Tabela 4-8 – Dados dos pilares ensaiados por NASCIMENTO et. al (2012)	71
Tabela 4-9 – Dados dos pilares ensaiados por FERREIRA (2014).....	71
Tabela 4-10 – Dados dos pilares ensaiados por SANTOS et. al (2017).....	71
Tabela 4-11 – Resultados de resistências dos pilares.....	72
Tabela 4-12 – Variações da taxa de armadura	82
Tabela 4-13 – Deformações específicas da seção transversal	84
Tabela 4-14 – Forças resultantes nas armaduras.....	84
Tabela 4-15 – Força resultante no concreto	85
Tabela 4-16 – Variações da taxa de armadura	86
Tabela 5-1 – Parâmetros estatísticos (em MPa) para concretos de classes C25, C30 e C40.....	98
Tabela 5-2 – Resultados do concreto produzido no Brasil	98
Tabela 5-3 – Parâmetros da Seção Transversal	100
Tabela 5-4 – Parâmetros das variáveis aleatórias	101
Tabela 6-1 - Resumo das diferentes análises do exemplo 1.....	105
Tabela 6-2 – Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 1	108
Tabela 6-3 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 1.....	108
Tabela 6-4 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 2.....	110
Tabela 6-5 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 2.....	110
Tabela 6-6 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 3.....	112
Tabela 6-7 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 3.....	112
Tabela 6-8 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 3.....	113
Tabela 6-9 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 4.....	114

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	13
1.2 OBJETIVOS.....	15
1.2.1 Objetivo geral.....	15
1.2.2 Objetivos específicos.....	15
1.3 JUSTIFICATIVAS.....	15
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	18
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	20
2.1 RESISTÊNCIA ÚLTIMA DE PILARES.....	20
2.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO.....	22
2.3 ESTUDOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	25
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	30
3.1 DIMENSIONAMENTO DE PILARES.....	30
3.1.1 Hipóteses básicas.....	30
3.1.2 Domínios de deformação.....	32
3.1.3 Esbeltez.....	33
3.2 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL.....	34
3.3 NÃO LINEARIDADES.....	36
3.3.1 Não-linearidade geométrica.....	36
3.3.2 Não-linearidade física.....	38
3.3.3 Considerações normativas sobre não-linearidades.....	39
3.3.4 Relação Momento-Curvatura.....	40
3.4 ANÁLISE LINEAR, REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS E ANÁLISE PLÁSTICA.....	45
3.5 TEORIA DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	49
3.5.1 Variáveis aleatórias.....	50
3.5.2 Conceitos de confiabilidade e segurança estrutural.....	52
3.5.3 Problema Fundamental da Confiabilidade Generalizado.....	57
3.5.4 Métodos de Transformação.....	58
3.5.5 Método de Simulação de Monte Carlo.....	59
3.5.6 Confiabilidade Alvo.....	61
4 MODELOS MECÂNICOS DE RESISTÊNCIA E SOLICITAÇÃO.....	64
4.1 MODELO MECÂNICO PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO RESISTENTE DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	64
4.1.1 Contextualização.....	64
4.1.2 Apresentação do Modelo Mecânico de Resistências de Seções à Flexo-Compressão.....	65

4.2 AVALIAÇÃO DO MODELO MECÂNICO DE RESISTÊNCIAS.....	68
4.3 ESTIMATIVA DO ERRO DO MODELO MECÂNICO (θ_r)	74
4.4 MODELO MECÂNICO ASSOCIADO À OBTENÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES	76
4.4.1 Contextualização.....	76
4.4.2 Diagrama Momento-Curvatura – Flexão Simples.....	77
4.4.2.1 Exemplos de diagramas momento-curvatura para vigas.....	81
4.4.3 Diagrama Esforço Normal – Momento Fletor – Curvatura: Flexão Composta Reta.....	83
4.4.3.1 Exemplos de diagramas momento-curvatura para pilares.....	85
4.4.4 Utilização dos Diagramas Momento-Curvatura em análises não-lineares	88
4.4.5 Implementação Computacional do Modelo Mecânico de Solicitações.....	89
4.4.5.1 Análise Matricial	89
4.4.5.2 Funcionamento do Código de Análise Não Linear.....	90
4.5 APLICAÇÃO DO MODELO MECÂNICO DE SOLICITAÇÕES	91
4.5.1 Exemplo de análise não-linear em pórtico	91
5 MODELOS E PROCEDIMENTO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	97
5.1 MODELOS PROBABILÍSTICOS DAS VARIÁVEIS.....	97
5.1.1 Resistência à Compressão do Concreto	97
5.1.2 Propriedades do Aço e das Armaduras.....	99
5.1.3 Propriedades Geométricas	99
5.1.4 Ações	100
5.1.5 Resumo dos Parâmetros Estatísticos das Variáveis Aleatórias	101
5.2 PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	101
6 ESTUDO DE CONFIABILIDADE EM PILARES DE CONCRETO ARMADO.....	103
6.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	103
6.2 EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO.....	104
6.2.1 Exemplo 1	104
6.2.2 Exemplo 2.....	109
6.2.3 Exemplo 3.....	111
6.2.4 Exemplo 4.....	112
6.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	114
7 CONCLUSÃO	116
7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTUROS.....	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
APÊNDICE A – Seções transversais dos exemplos	129

1 INTRODUÇÃO

*“Se falta de tempo fosse uma justificativa
para não tirar seus projetos do papel,
somente os desocupados teriam sucesso.”*

(Flávio Augusto)

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em um projeto estrutural, assim como nos demais empreendimentos de engenharia, visa-se desenvolver a solução mais econômica que ofereça segurança adequada e boas condições de utilização. Em termos de segurança, a estrutura e suas partes não deverão atingir a falha ou o colapso. Quanto às condições de utilização, procura-se limitar a fissuração e evitar deformações e vibrações excessivas.

Em termos matemáticos, busca-se garantir que a estrutura tenha recursos (resistências) superiores às demandas (solicitações) ao longo de toda a sua vida útil, em relação à capacidade resistente dos materiais, à perda de equilíbrio global e em termos de desempenho e durabilidade. Com este objetivo, as instruções normativas de projeto estabelecem uma série de restrições e exigências que resultam em critérios de segurança a serem respeitados pelo projetista. Caso uma estrutura deixe de satisfazer qualquer das suas finalidades, diz-se que ela ultrapassou um Estado Limite. Os Estados Limites Últimos estão ligados ao colapso teórico da estrutura, quando ela deixa de ter a segurança considerada adequada ao projeto, enquanto os Estados Limites de Serviço se referem as condições de utilização da estrutura.

O dimensionamento da estrutura para atender aos Estados Limites é, teoricamente, um processo iterativo, e depende da análise dos esforços a que a estrutura está submetida. Existem várias alternativas para a análise estrutural, em função do tipo de modelagem e das leis constitutivas adotadas para os materiais.

Na prática de projeto, costuma-se utilizar uma análise elástica-linear como base para o dimensionamento e obtenção de esforços em serviço. Contudo, em virtude de fenômenos inerentes ao material, o concreto apresenta resistência à compressão muito superior à de tração, o que resulta na fissuração das seções mais solicitadas, e, por consequência, na redução da sua rigidez. Dessa forma, há uma alteração na distribuição de esforços, caracterizando um comportamento não-linear. A não-linearidade física do concreto armado é mais acentuada quando o concreto comprimido atinge a plastificação

e o aço atinge a tensão de escoamento, de modo que as deformações podem crescer consideravelmente sem que exista um aumento significativo das tensões atuantes.

De modo geral, uma análise elástico-linear tende a ser suficiente para que sejam satisfeitas as condições do Estado Limite Último, desde que sejam satisfeitas determinadas condições, como uma ductilidade mínima dos elementos estruturais. Em contrapartida, análises estruturais mais refinadas, com a consideração dos efeitos não-lineares, permitem a obtenção de esforços solicitantes mais precisos, além de em certos casos possibilitarem economias para a estrutura. Entretanto, ainda que se deseje fazer análises não-lineares, a análise elástica pode ser necessária para definir as armaduras.

O dimensionamento pelo Método dos Estados Limites é feito com o uso de coeficientes parciais de segurança, os quais são aplicados sobre as ações atuantes e resistências dos elementos, a fim de garantir um nível de segurança adequado. No entanto, o uso de coeficientes de segurança, necessário em virtude das incertezas inerentes às variáveis de projeto, não permite determinar rigorosamente o quão segura está a estrutura. Dessa forma, mesmo que esses coeficientes sejam definidos adequadamente, tanto é possível que em certos casos um projeto seja muito conservador e antieconômico, quanto que seja arrojado e não tenha um nível de segurança exatamente adequado.

Análises probabilísticas, por meio da Teoria da Confiabilidade, são uma alternativa aos procedimentos convencionais de projeto adotados pelas normas atuais. Ao considerar as variáveis de projeto como aleatórias, com a modelagem de suas incertezas por meio de distribuições de probabilidade adequadas, permitem avaliar a segurança das estruturas. Para o JCSS (2001), em termos teóricos a confiabilidade requerida corresponde a máxima probabilidade de ruína aceita, para um estado limite particular, entre o domínio seguro e o de falha, ou colapso global da estrutura, em relação a um período de tempo específico.

Nesse contexto, tanto o modelo de confiabilidade quanto o modelo mecânico da estrutura possuem caráter fundamental. O modelo mecânico deve representar de modo adequado o comportamento real da estrutura, em relação às condições de equilíbrio, de compatibilidade geométrica e o comportamento dos materiais. Quanto ao modelo de confiabilidade, deve quantificar, de forma precisa, as probabilidades de falha da estrutura, sem desconsiderar o aspecto computacional, que pode tornar tais modelos inaplicáveis.

A confiabilidade estrutural permite, portanto, não só a análise da segurança das estruturas, mas também para avaliação de alternativas de projeto, ao fornecer uma medida mais precisa do respectivo nível de segurança. Também se torna possível avaliar se

determinadas decisões de projeto são efetivamente adequadas, ou se representam situações críticas, em termos de probabilidade de falha da estrutura.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a influência, no índice de confiabilidade de pilares de concreto armado, do uso de momentos fletores obtidos em análises estruturais com redistribuição de esforços, comparado ao dimensionamento usual.

1.2.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Desenvolver modelos mecânicos para determinar a capacidade resistente de pilares, submetidos à flexo-compressão normal.
- Implementar rotinas computacionais para a construção de diagramas momento-curvatura e análise não-linear de estruturas de pórticos formadas por vigas e pilares de extremidade;
- Desenvolver modelos mecânicos, baseados em análise não-linear, para determinar os momentos fletores que efetivamente atuam na ligação de vigas com pilares de extremidade.
- Realizar estudos de confiabilidade em casos práticos de pilares de concreto armado;
- Comparar os resultados obtidos e avaliar a influência da consideração, ou não, da redistribuição de esforços na probabilidade de falha de pilares.

1.3 JUSTIFICATIVAS

O projeto das estruturas de concreto armado é desenvolvido, de modo geral, a partir de esforços internos obtidos de análises elástico-lineares. Apesar de simples, esta hipótese mostra-se adequada para garantir o Estado Limite Último de estruturas usuais.

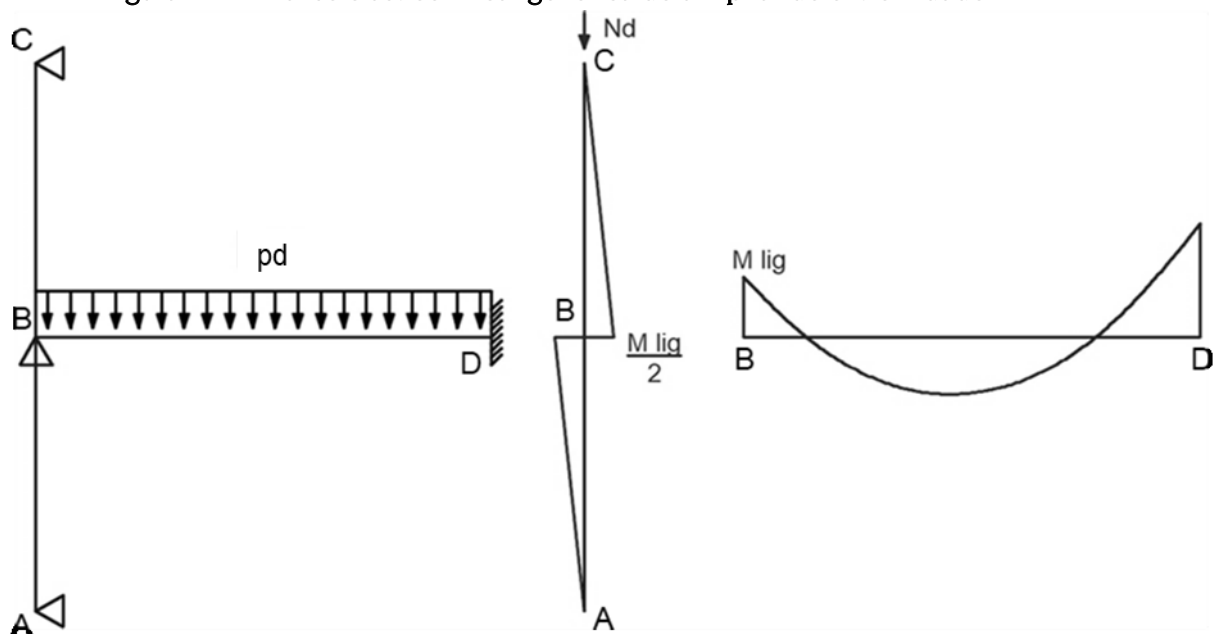
Existem, porém, alternativas de dimensionamento que consideram o comportamento plástico dos materiais. Uma delas é denominada análise linear com

redistribuição, na qual momentos fletores determinados em uma análise elástica linear são redistribuídos na estrutura. Esta solução aproveita o comportamento plástico das seções transversais das vigas, as quais podem ser assimiladas a rótulas plásticas. Assim, quanto mais dúcteis as seções transversais, maiores podem ser as redistribuições.

Análises com redistribuições de esforços alteram a distribuição de momentos nas vigas, e, por consequência, os momentos transmitidos aos pilares. A NBR 6118 (2014) permite adotar redistribuições de esforços em pilares apenas quando decorrentes de vigas que a eles se liguem. Em normas estrangeiras, contudo, essa consideração não é admitida. O ACI 318-14 (2014) trata apenas sobre a redistribuição de momentos em elementos contínuos submetidos à flexão, sem citar pilares ou elementos com esforços de flexo-compressão. Já o Eurocode 2 (2004) deixa claro que, ao se utilizar uma análise linear com redistribuição de momentos, deve-se dimensionar os pilares com momentos elásticos obtidos em análises sem qualquer redistribuição.

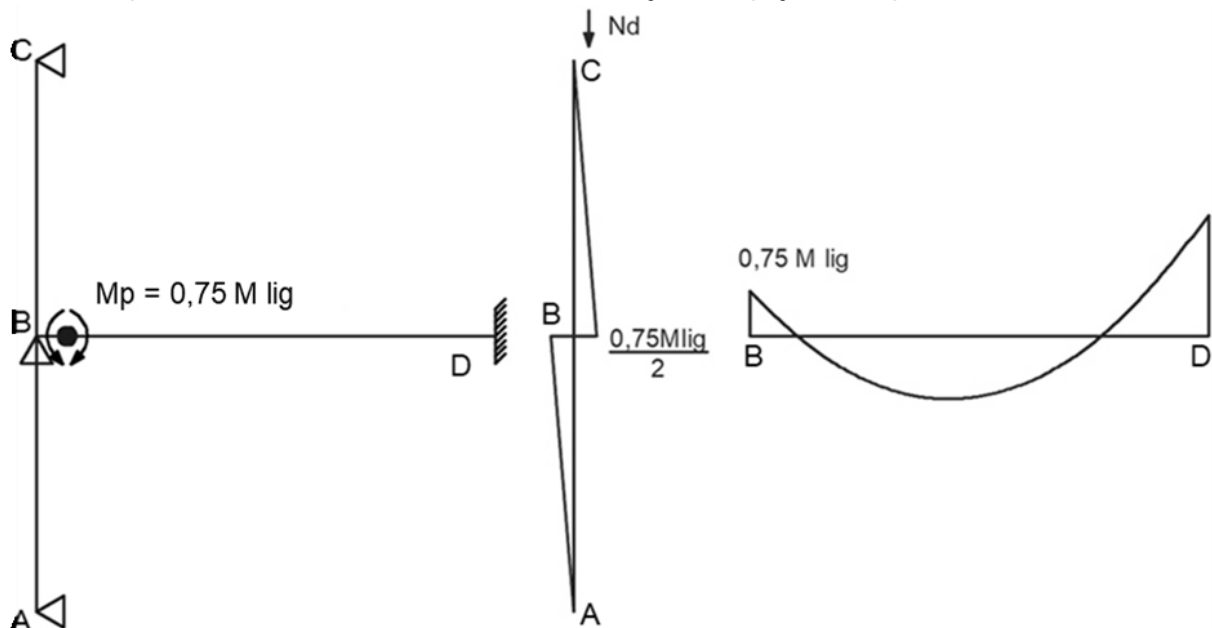
Logo, levantou-se a hipótese de que o procedimento admitido pela norma brasileira pode ser contrário à segurança para o dimensionamento de pilares. Um caso prático se dá pela comparação de um pilar de extremidade, dimensionado com esforços internos advindos de uma análise elástico-linear (Figura 1-1), com um pilar equivalente em que se fez uma redistribuição de 25% do momento fletor negativo da viga (Figura 1-2).

Figura 1-1 - Análise elástico-linear genérica de um pilar de extremidade



Fonte: Autor.

Figura 1-2 – Análise elástica com redistribuição na ligação de viga com pilar

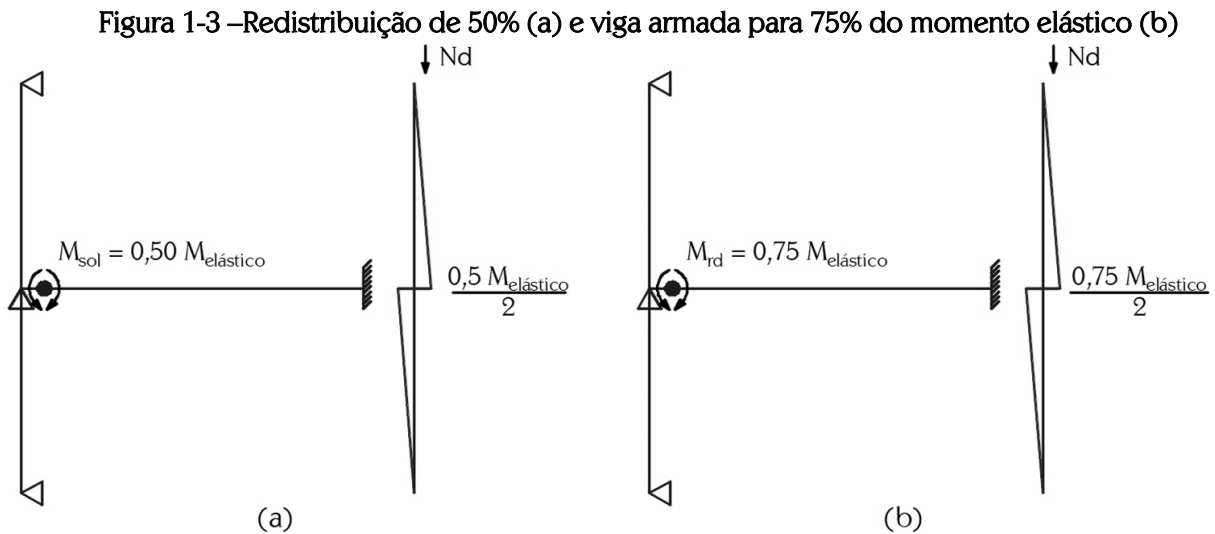


Fonte: Autor.

No primeiro caso, o momento de dimensionamento do pilar será $0,5 M_{lig}$, enquanto no segundo $0,325 M_{lig}$. Portanto, o dimensionamento do pilar depende da suposição, na análise estrutural, de que a viga plastificaria ao atingir 75% do momento elástico-linear. Caso essa hipótese não se concretize, os momentos transmitidos ao pilar seriam maiores e poderiam reduzir o índice de confiabilidade desse elemento.

Uma situação onde isso pode ocorrer é aquela em que se utiliza, na viga, armaduras superiores à necessária para resistir aos momentos atuantes, seja por restrições das bitolas de aço comerciais, seja por decisão do projetista. Assim, o momento de plastificação da viga será superior ao da análise estrutural, conforme exemplificado na Figura 1-3, em que (a) é a análise estrutural utilizada no dimensionamento do pilar, e (b) a resistência efetiva da viga em virtude da armadura negativa utilizada.

Caso a plastificação da seção não ocorra para valor previsto na análise, será transmitido ao pilar momento solicitante superior aquele considerado em seu dimensionamento. Qualitativamente, pode-se perceber que o aumento da armadura negativa da viga, apesar de a princípio não prejudicar a segurança deste elemento, poderia resultar em uma situação adversa em relação ao pilar.



Fonte: Autor.

Esse assunto pode ser melhor compreendido por meio de uma análise de confiabilidade, onde se trabalha com variáveis aleatórias dos parâmetros envolvidos no processo, definidas de acordo com suas médias, desvios-padrão e respectivas distribuições de probabilidade.

Neste caso, os esforços transmitidos ao pilar podem ser bem determinados com uma análise não-linear da estrutura, e esses esforços dependerão da relação de rigidezes entre viga e pilar, do momento resistente da viga na seção de ligação e do carregamento atuante.

Percebe-se que, no caso de dimensionamentos com redistribuição, os esforços transmitidos ao pilar são mais sensíveis à variação do momento resistente e do carregamento do que no caso dos dimensionamentos baseados em análises elásticas lineares.

Diante do exposto, considera-se pertinente o desenvolvimento de estudos de confiabilidade em estruturas de concreto armado, dimensionadas segundo as diretrizes normativas brasileiras por meio de análises elásticas lineares e análises lineares com redistribuição de momentos.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste primeiro capítulo, foram introduzidos o tema da dissertação, o problema proposto e o procedimento adotado para estudá-lo. Apresentou-se também os objetivos do trabalho e as justificativas para realizá-lo.

No capítulo 2, é feita uma revisão da literatura relacionada ao tema do trabalho, na qual são abordados estudos nas áreas de resistência última de pilares, análise não-linear e confiabilidade em estruturas de concreto armado.

No capítulo 3, desenvolve-se uma breve fundamentação teórica acerca de aspectos gerais e dimensionamento de estruturas de concreto armado; procedimento para verificação de seções à flexo-compressão normal; não-linearidades física e geométrica; análise estrutural linear, com redistribuição de esforços e análise plástica; e confiabilidade de estruturas.

No capítulo 4, apresenta-se o modelo mecânico utilizado para determinação da capacidade resistente de seções pilares, analisa-se a precisão da rotina computacional desenvolvida e estima-se o erro de modelo. Também se explana sobre o modelo mecânico para obtenção dos esforços solicitantes, descrevendo o procedimento empregado para a análise não-linear, com a apresentação de exemplos de aplicação e breve análise dos resultados obtidos.

No capítulo 5, aborda-se o método de análise de confiabilidade empregado, incluindo a metodologia de análise e os modelos probabilísticos utilizados para as variáveis aleatórias.

No capítulo 6, é desenvolvido um estudo de confiabilidade de pilares de concreto armado, detalhando-se o problema proposto na introdução e os resultados obtidos.

No capítulo 7, por fim, são feitas considerações finais sobre a pesquisa, quanto aos objetivos atingidos, contribuições e limitações do trabalho, e sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

*“Quem, de três mil anos, não é capaz de se dar conta,
vive nas sombras, na ignorância à mercê dos dias e do tempo.”*

(Goethe)

Neste tópico são apresentados os principais artigos e estudos em nível de pós-graduação relacionados ao tema do trabalho.

2.1 RESISTÊNCIA ÚLTIMA DE PILARES

A verificação da capacidade resistente de pilares pode ser entendida como um dimensionamento em ordem inversa, pois, ao invés de determinar as características de uma seção transversal com base em esforços atuantes, o objetivo é calcular os esforços resistentes máximos da seção. Portanto, convém iniciar esta seção com uma breve revisão das metodologias de cálculo de flexo-compressão normal existentes na literatura.

Os métodos de pequena e de grande excentricidade, propostos por Fusco (1981), são utilizados para o dimensionamento com arranjo simétrico de armaduras. No de grande excentricidade, em que a seção que está ao menos parcialmente tracionada, considera-se que o momento atua no centro de gravidade da armadura de tração, o que permite tratar o problema como flexão simples. Já o método de pequena excentricidade, em que a seção está totalmente comprimida, é resolvido a partir das equações de compatibilidade do domínio 5 de deformações e das equações de equilíbrio da seção, sendo comum admitir, de forma simplificada, compressão uniforme com deformação igual a ϵ_{c2} .

Outra metodologia clássica para dimensionamento de pilares com armaduras simétricas é a resolução por ábacos, nos quais são fixadas algumas variáveis de entrada, como a forma da seção e a disposição da armadura, para resolução do problema de flexo-compressão. Destacam-se os ábacos propostos por Montoya, Méseguer e Cabré (1987), por Venturini e Rodrigues (1987), e, mais recentemente, por Ribeiro (2011), o qual incluiu considerações para a verificação da estabilidade considerando a não linearidade física e não linearidade geométrica.

O método das zonas de solicitação, inicialmente proposto por Silva Jr. (1971) e desenvolvido por Santos (1983), é mais complexo do que as demais metodologias citadas, mas permite a resolução tanto para armaduras simétricas quanto assimétricas.

O método iterativo baseia-se na possibilidade de obter a posição da linha neutra por meio de iterações sucessivas, utilizando equações de deformações e de equilíbrio, até que um par de esforços (normal e momento fletor) equilibrem a seção. Das publicações que contribuíram com o método, pode-se citar Araújo (2010) e Mazetto (2017).

Por fim, a metodologia do equilíbrio direto, proposta por Campos Filho (2014) consiste em realizar cálculos iniciais que vão definir o domínio de deformação correto, além da quantidade de armaduras necessárias. Permite tanto resoluções simétricas quanto assimétricas de armadura, e apresenta uma generalização que permite aplicá-lo para concretos de alto desempenho.

Apresentados os métodos clássicos para dimensionamento de seções à flexo-compressão, cabe destacar algumas publicações em particular que trouxeram contribuições importantes ao estudo e compreensão da capacidade resistente de pilares de concreto armado. Nota-se um emprego crescente de ferramentas computacionais, as quais possibilitam a resolução de problemas de flexo-compressão de forma mais precisa e sem custos computacionais proibitivos. Assim, diversos trabalhos tem buscado otimizar os processos de cálculo, a fim de tornar mais eficientes as práticas de projeto.

Rüsch (1981), ao avaliar a capacidade de carga de elementos estruturais sujeitos à compressão, determinou as situações em que as deformações dos eixos das barras não poderiam ser desprezadas e, portanto, deve-se considerar os efeitos de segunda ordem. Rüsch concluiu que, em elementos comprimidos pouco esbeltos, a capacidade de carga tende a ser limitada pela resistência da seção transversal, e nos mais esbeltos os efeitos de instabilidade são preponderantes.

No Brasil, os estudos acerca da instabilidade local de barras de concreto remontam a meados de 1970. Segundo Borges (1999), até então este fenômeno não era de grande importância devido à robustez característica dos elementos estruturais. Aufiero (1977) desenvolveu um dos primeiros trabalhos a estudar a influência da esbeltez no dimensionamento de pilares isostáticos, sujeitos à flexão composta, por meio do método do pilar padrão e segundo as prescrições normativas da NB-1/76 e do CEB/72.

A partir de 1980, diversas publicações abordaram este assunto, tais como Fusco (1981), Santos (1983) e Araújo (1984). Quanto a aplicações computacionais, Campos Filho (1982) elaborou análises não lineares de pilares com a consideração da fluência e retração pelo método de elementos finitos, e Santos (1994) demonstrou rotinas de programação para dimensionamento de estruturas de concreto armado.

Entre as publicações mais recentes, Smaniotto (2005) desenvolveu rotinas para dimensionamento e detalhamento de pilares submetidos à flexão composta-oblíqua, e diagramas de iteração para obtenção da envoltória de momentos fletores de pilares. Araújo (2010) abordou a análise e dimensionamento de pilares esbeltos com a consideração de não linearidades física e geométrica. Ribeiro (2011) implementou tabelas e diagramas para dimensionamento de pilares de seção transversal retangular submetidos à flexo-compressão normal, com verificação da estabilidade. Campos Filho (2014), apresenta algoritmos para o dimensionamento de seções retangulares de concreto armado sujeitas à flexão composta normal e oblíqua. Mazetto (2017) desenvolveu rotinas para verificação da capacidade resistente de pilares com distribuição genérica das barras de armadura, inclusive com o uso de concretos de alto desempenho. Pinto (2017) analisou a influência das não-linearidades no estado-limite último de instabilidade de pilares, submetidos à flexão composta oblíqua, e discutiu metodologias para verificação da capacidade resistente de pilares, por meio de diagramas momento fletor – força normal – curvatura, para qualquer tipo de seção.

Alguns trabalhos visam também implementar rotinas de otimização para o dimensionamento de pilares de concreto armado. Bordignon e Kripka (2013) elaboraram algoritmos de minimização de custos para pilares de seção retangular com armaduras dispostas ao longo das faces. Alves (2013) utilizou algoritmos genéticos para o dimensionamento ótimo de pilares submetidos à flexo-compressão, sem considerar, contudo, não-linearidades físicas e geométricas. Sias (2014), por sua vez, visou desenvolver métodos determinísticos de otimização de custo para pilares de seções retangulares e circulares, com disposição genérica de armaduras.

Quanto a otimização de pórticos de concreto armado, pode-se citar os trabalhos de Melo *et al.* (2001), Torres (2001), Silva (2002), Ponte (2015) e Salles *et al.* (2018). Outros estudos, tais como Almeida (2008), Nogueira (2010), Alves *et al.* (2017), também avaliaram a otimização de pórticos baseada em confiabilidade, e são abordados na seção 2.3.

2.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Segundo Fusco (1981), cabe ao modelo mecânico estabelecer a ponte entre o conhecimento fenomenológico da microestrutura dos materiais e as leis constitutivas expressas pelas relações tensão-deformação. Portanto, deve garantir que a aproximação matemática resulte em uma resposta coerente para a estrutura analisada.

Em determinadas situações, é admissível supor que as tensões em dada estrutura, provocadas por um sistema de forças externas, não ultrapassam o limite elástico do material, e que as deformações permanecem pequenas. Existem também abordagens de cálculo de estruturas no regime plástico, as quais requerem o conhecimento do comportamento da estrutura quando algum ponto ultrapassa o limite elástico. Um dos primeiros estudos sobre o comportamento plástico de estruturas foi desenvolvido por Maier-Leibnitz (1929), que avaliou experimentalmente vigas metálicas bi-apoiadas, bi-engastadas e contínuas em ensaios de flexão, a partir dos quais ele definiu o estado de tensões de uma seção transversal completamente plastificada.

A Teoria das Rótulas Plásticas, desenvolvida por Baker e Heyman (1969), Horne (1979) e Massonet e Save (1965), dentre outros, apresenta uma formulação clássica para a Análise Limite, cujo objetivo é encontrar o carregamento de colapso das estruturas. Baseada no Teorema do Limite Superior da Teoria da Plasticidade e através de um processo de combinação de mecanismos com o uso da equação dos trabalhos virtuais, pode-se obter o mecanismo de colapso da estrutura.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos no contexto da análise limite de sistemas estruturais. Mello (1999), por exemplo, avaliou a capacidade resistente de pórticos planos de concreto armado utilizando uma análise não-linear. A partir de incrementos de cargas, as inércias à flexão das seções são determinadas pela relação momento fletor-curvatura do tipo elástico não linear-plástico perfeito, resultando em uma nova matriz de rigidez.

Senem (2000) também contribuiu ao estudo e modelagem do comportamento de pórticos planos no regime elastoplástico, com a consideração de não-linearidades físicas por meio de processos iterativos e diagramas momento fletor-curvatura simplificados, a fim de obter a carga de colapso. Sua pesquisa foi direcionada a pórticos metálicos, porém, com algumas alterações na relação momento-curvatura, Senem e Loriggio (2001) aplicaram o procedimento para estruturas de concreto armado.

Com relação ao comportamento não-linear do concreto armado, Branson (1968) estudou o efeito da fissuração na redução da rigidez do material. Com base em experimentação de vigas, determinou que, mesmo com o desenvolvimento de fissuras devido a esforços de tração, existe uma contribuição da rigidez do concreto tracionado entre fissuras, efeito que ficou conhecido por *tension-stiffening*. Dessa forma, propôs uma expressão semi-empírica para o cálculo da rigidez à flexão equivalente, determinada como um valor intermediário entre as rigidezes dos Estádios I e II do concreto armado. Esse

efeito da contribuição do concreto entre fissuras na rigidez já tinha sido observado décadas antes por Mörsch (1909). Após os estudos de Branson, diversas outras metodologias foram propostas para simular o *tension stiffening*, das quais as principais estão listadas em Nogueira (2010) e Coelho (2011).

Existem na literatura duas linhas principais para a representação da não-linearidade do concreto. Na primeira, que apresenta um caráter mais geral, os modelos mecânicos são baseados nas relações tensão-deformação para uma seção transversal, com a determinação dos esforços através de processos de integração numérica. Dentre os trabalhos que seguiram esse rumo, pode-se citar Scanlon (1971), Mazars (1984), Laborderie et al. (1991), Flórez-Lopez (1993), Stramandinoli (2007) e Nogueira (2010).

Scanlon (1971) foi um dos primeiros a propor que a contribuição do concreto fissurado seja considerada por meio de leis constitutivas com um trecho descendente no diagrama tensão-deformação do concreto à tração.

Na década de 80, foram propostas abordagens alternativas com a utilização de conceitos da mecânica do dano, podendo-se citar os modelos de Mazars (1984), Laborderie et al. (1991) e Flórez-Lopez (1993). O objetivo desta metodologia é representar o efeito da deterioração do material nas propriedades dos sólidos solicitados por ações mecânicas ou térmicas. O dano no concreto, associado à microfissuração, tem efeitos no comportamento mecânico macroscópico, com a redução da rigidez e da resistência.

No Brasil, Stramandinoli (2007) desenvolveu modelos de elementos finitos para análise não-linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado, obtendo bons resultados quando comparados a resultados experimentais. A consideração do *tension stiffening* foi feita a partir de uma relação tensão-deformação do concreto com um trecho descendente exponencial na região de fissuração.

Nogueira (2010) apresentou um modelo mecânico que considera os efeitos não-lineares geométricos com a descrição lagrangeana atualizada, a não-linearidade física por modelos de plasticidade e dano, e a contribuição de mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento. Aplicou o modelo para vigas e pórticos planos de concreto armado, realizando estudos de otimização baseada em confiabilidade.

A outra vertente representa o comportamento não-linear do concreto a partir de modelos mecânicos baseados na relação momento-curvatura. Admite-se que as hipóteses do Estádio I são válidas até o início da fissuração. Ultrapassado o momento de fissuração, considera-se que o concreto se comporta de modo intermediário entre o Estádio I e o

Estádio II. Além do modelo de Branson (1968), utilizado pela NBR 6118 (2014) e pelo CEB, pode-se citar os modelos propostos por Ghali e Favre (1986) e por Khuntia e Ghosh (2004).

Dentre os trabalhos que utilizam diagramas momento-curvatura, Pereira (2009) elaborou rotinas computacionais para automatizar processos iterativos de análise não-linear. O modelo foi aplicado para obtenção de esforços solicitantes em serviço de vigas contínuas e lajes de barragens de enrocamento com face de concreto armado.

Araújo (2001) desenvolveu um modelo em elementos finitos, calculando, para cada elemento, a rigidez secante a partir de diagramas momento-curvatura, os quais são construídos com base na teoria clássica de vigas, com deformações calculadas por incrementos de momentos fletores. Utilizou esse modelo para desenvolver um estudo de confiabilidade em relação às flechas de vigas de concreto armado.

Silva (2012) também avaliou a não-linearidade física de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples por meio de diagramas momento-curvatura. Obteve resultados satisfatórios, validados por dados experimentais, tanto para flechas imediatas no Estado Limite de Serviço, quanto para as análises no Estado Limite Último.

2.3 ESTUDOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Nesta seção abordam-se os principais trabalhos que envolvem a confiabilidade estrutural. Os conceitos básicos, tais como incertezas, risco e probabilidade de falha, a teoria da probabilidade, a geração de números aleatórios, os métodos de transformação, o método de Monte Carlo simples e com amostragem por importância, podem ser extraídos de diversos livros. Dentre os quais, consultou-se Ang e Tang (1984, 2006), Papoulis (1991), Degroot e Schervish (2011), Montgomery e Runger (2014), e Melchers e Beck (2018).

Outra referência relevante para este trabalho é o “Joint Committee of Structural Safety” - JCSS (2001), que desenvolveu um código com modelos probabilísticos para muitas variáveis aleatórias utilizadas em análises de confiabilidade de estruturas. Dentre esses modelos, pode-se citar a resistência a compressão do concreto, a tensão de escoamento do aço passivo, as características geométricas de seções transversais de elementos estruturais e os carregamentos atuantes.

No âmbito da verificação da segurança de uma estrutura, segundo Melchers e Beck (2018), a confiabilidade estrutural tem por objetivo estimar a probabilidade de violação de um estado limite (fronteira entre o domínio seguro e o de falha) de um sistema estrutural

de engenharia durante sua vida útil. Para o JCSS (2001), em termos teóricos, a confiabilidade está relacionada a uma probabilidade máxima de ruína aceita, para um estado limite particular ou colapso global da estrutura em um dado período de tempo.

De acordo com Nowak e Collins (2000), as primeiras formulações matemáticas de segurança estrutural são atribuídas a Mayer (1926), Wierzbicki (1926) e Streletzki (1947). Eles constataram que as ações e resistências são variáveis aleatórias e, portanto, toda estrutura tem uma probabilidade de falha finita e não nula. Desta forma, contribuíram para a compreensão de que não há estrutura absolutamente segura.

Cornell (1969) e Hasofer e Lind (1974) são responsáveis por algumas das primeiras aplicações práticas da análise de confiabilidade. O primeiro apresentou a solução do problema fundamental da confiabilidade para duas variáveis aleatórias normais e também o conceito do índice de confiabilidade em segundo momento. Em Hasofer e Lind (1974), é definida uma forma invariante para o índice de confiabilidade β , como sendo a distância, em unidades de desvio-padrão, da origem do sistema de coordenadas no espaço reduzido até o ponto de projeto localizado na superfície de falha da estrutura.

Com relação à confiabilidade de pilares, Mirza e Skrabek (1991) utilizaram o Método de Monte Carlo para simular a variabilidade da resistência última de pilares curtos com seções mistas de aço e concreto armado, com base em variações nos parâmetros de resistência dos materiais e de geometria. Considerando a definição do *ACI 318 Building Code* (1989) de pilares curtos como aqueles cujo índice de esbeltez é pequeno o suficiente para desconsiderar os efeitos de “segunda-ordem” (não-linearidade física), os autores constataram que as maiores variabilidades na resistência ocorrem para pilares próximos a esse limite superior de esbeltez.

Ruiz e Aguilar (1994) avaliaram o índice de confiabilidade de pilares esbeltos de concreto armado, dimensionados de acordo com o *ACI 318 Building Code* (1989) e com as diretrizes da Cidade do México. Foram feitas simulações pelo método de Monte Carlo para determinar a média e o desvio padrão da resistência estrutural e das solicitações, considerando a excentricidade do carregamento como uma variável determinística.

Frangopol et al. (1996) avaliaram a confiabilidade de pilares de concreto armado, também com a utilização de simulações de Monte Carlo. Foram apresentadas metodologias para geração de superfícies de falha em pilares curtos e esbeltos, com a consideração de histórias de carregamentos dependentes no tempo.

Mirza (1996) comparou a confiabilidade de pilares curtos e esbeltos, dimensionados segundo o *ACI 318 Building Code* (1995) e o *American National Standards Institute Standard A58.1* (1982), utilizando o Método de Primeira Ordem e Segundo Momento (FOSM). Os resultados se limitaram a pilares com flexão em apenas uma direção, e a resistência das seções transversais foi determinada a partir da construção de diagramas momento-curvatura, de forma iterativa, para uma dada carga axial.

Um dos primeiros trabalhos do gênero no Brasil foi o de Araújo (2001), que avaliou o índice de confiabilidade de pilares, modelados com elementos finitos e dimensionados com coeficientes parciais de segurança. O método de Monte Carlo foi utilizado para determinar os valores esperados e os desvios padrão da carga de ruptura, com as propriedades do concreto representadas como campos estocásticos gaussianos, e as do aço, armaduras, dimensões da peça e carga axial como variáveis aleatórias.

Real (2000) apresentou um modelo para análise probabilística de estruturas de concreto armado, como vigas e pilares, com a consideração de não linearidades física e geométrica em um modelo de elementos finitos bidimensionais. Avaliou o índice de confiabilidade β de vigas e pilares, dimensionados de acordo com as prescrições da antiga NBR 6118 (1980), com a utilização do método de Monte Carlo.

Gomes (2001) comparou técnicas clássicas de análise de confiabilidade, FORM, Monte Carlo Simples (MC) e com Amostragem por Importância Adaptativa (MCIS), com auxílio de metamodelos de Superfície de Resposta (RS) e de Redes Neurais Artificiais (ANN). As análises foram feitas em barras com carregamento uniaxial e em vigas de concreto armado, modeladas em elementos finitos com a utilização de campos estocásticos multidimensionais para as propriedades dos materiais.

Nogueira (2006) avaliou os níveis de confiabilidade implícitos na NBR 6118 (2003) para pilares curtos de concreto armado sob flexo-compressão normal, por meio do método de Monte Carlo. Assumiu uma correlação perfeita entre a carga axial e o momento fletor, isto é, uma excentricidade constante, e não considerou efeitos de não-linearidades.

Caspeele, Sykora e Taerwe (2014) investigaram a influência do controle de qualidade do concreto na confiabilidade estrutural de vigas e pilares, dimensionados pelas prescrições normativas dos *Eurocodes*, e analisadas pelo Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) com equações básicas de estado limite para flexão e compressão.

Magalhães (2014) também investigou a não conformidade do concreto quanto a resistência à compressão especificada em projeto, e a influência desta na probabilidade

de falha de pilares dimensionados segundo a NBR 6118 (2014). O modelo numérico baseou-se em Elementos Finitos, com a consideração das não-linearidades geométrica e física, porém com momentos fletores proporcionais à carga axial aplicada. A determinação do índice de confiabilidade foi feita pelos métodos FORM e de Monte Carlo. Magalhães, Real e Silva Filho (2016) prosseguiram o estudo, com dados experimentais mais completos para a resistência à compressão do concreto, e também com a validação do modelo não-linear em elementos finitos com resultados experimentais de diversos autores.

Damas (2015) examinou a confiabilidade, através do Método de Monte Carlo, de pilares de concreto de alto desempenho (CAD), cuja resistência característica à compressão é superior a 50 MPa, dimensionados pelas diretrizes da NBR 6118 (2014). Os efeitos de não-linearidade física foram considerados com o uso dos métodos da Curvatura Aproximada e da Rigidez Aproximada.

Marcolan Jr. (2016) estudou a influência das distribuições das propriedades mecânicas do concreto na probabilidade de falha de um pilar curto, de seção quadrada e armadura em duas faces, submetido apenas a carregamentos axiais, por meio do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM).

Outros estudos também foram desenvolvidos com relação à confiabilidade de pórticos de concreto armado, tais como Almeida (2008), Nogueira (2010), Nogueira e Venturini (2011), Pereira e Torres (2016), Mapa (2016), e Alves, Afonso e Motta (2017).

Almeida (2008) compara o projeto ótimo determinístico com o projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado. A estrutura foi modelada em elementos finitos de barra, com a consideração da não-linearidade geométrica, por meio da hipótese de rotações moderadas, e física, assumindo relações tensão-deformação não-lineares.

Nogueira (2010), conforme citado na seção 2.2, desenvolveu modelos mecânicos com a consideração da não-linearidade física e geométrica, aplicando-os a otimização baseada em confiabilidade para vigas e pórticos de concreto armado. Continuando os estudos, Nogueira e Venturini (2011) apresentam um modelo para avaliação da segurança de pórticos de concreto armado, a partir da combinação do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e um modelo mecânico não-linear físico e geométrico. O comportamento da estrutura foi representado com elementos finitos, em conjunto com o modelo de dano de Mazars para o concreto, um modelo elastoplástico com encruamento

isotrópico para o aço e a descrição lagrangeana atualizada para a consideração da não-linearidade geométrica.

Pereira e Torres (2016) avaliaram a segurança de um pórtico de concreto armado utilizando o método analítico FORM para a análise de confiabilidade, sendo o programa computacional ANSYS utilizado para obter a função de falha da estrutura.

Mapa (2016) desenvolveu um modelo para análise de confiabilidade de pórticos metálicos planos via análise estrutural em elementos finitos, considerando efeitos da não-linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações. Foram avaliados tanto o estado limite de deslocamentos em serviço quanto o estado limite último de resistência.

Alves, Afonso e Motta (2017) desenvolveram um procedimento para otimização de pórticos de concreto armado baseado em confiabilidade, utilizando o Método FORM. O modelo da estrutura foi feito utilizando elementos finitos de barra, porém a análise estrutural não levou em consideração as não-linearidades físicas nem geométricas.

Destaca-se, contudo, que não foram encontrados na literatura trabalhos que estudassem a confiabilidade de pilares dimensionados com a consideração de redistribuição dos momentos negativos de vigas (ou plastificação da ligação com as vigas), em cuja temática esta pesquisa se insere.

A fim de avaliar a confiabilidade de pilares de concreto armado, muitos estudos utilizam uma equação de estado limite simplificada, que admite proporcionalidade entre a carga axial e o momento fletor, conforme apresentado na equação (1). Dos trabalhos citados, utilizam este artifício Mirza et al. (1991, 1996), Ruiz e Aguilar (1994), Frangopol et al. (1996), Diniz e Frangopol (1997), Real (2000), Araújo (2001), Nogueira (2006), Magalhães (2014) e Damas (2015). Desta forma, o problema se resume a encontrar os parâmetros estatísticos para a carga axial de ruptura, via procedimento de simulação para excentricidade fixa, e , em seguida, realizar a análise de confiabilidade.

$$g(x) = \left[P^2 + \left(\frac{P e}{h} \right)^2 \right]^{1/2} - \left\{ (G + Q)^2 + \left[(G + Q) \frac{e}{h} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (1)$$

Em que P é a carga axial de ruptura, e a excentricidade da carga, h a dimensão da seção transversal na direção considerada, e G e Q , respectivamente, as cargas permanentes e acidentais atuantes no pilar. Contudo, este critério de falha pode não ser o mais adequado para análise de confiabilidade em pilares, na medida em que os momentos fletores não necessariamente são proporcionais às cargas axiais.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

“Não existe vento favorável para o marinheiro que não sabe onde ir”

(Sêneca)

3.1 DIMENSIONAMENTO DE PILARES

Estruturas podem atingir a falha de diversas formas, a depender do seu tipo, condições de apoio, carregamentos e material constituinte. Com relação ao Estado Limite Último (ELU), a falha se refere ao colapso ou a qualquer forma de ruína estrutural. O ELU pode ser dividido em dois grupos: o esgotamento da capacidade resistente, do todo ou de algum elemento; e a instabilidade ou perda de equilíbrio. Em pilares, a ruína por perda da capacidade resistente é típica de elementos robustos, enquanto a instabilidade é característica de pilares mais esbeltos e pode ser atingida sem que haja o esgotamento da capacidade resistente da seção transversal.

O dimensionamento de pilares de concreto armado consiste na determinação da armadura, para certa seção transversal e ações impostas, que atenda a requisitos normativos e hipóteses de cálculo. Esta seção visa apresentar as principais considerações estabelecidas para o dimensionamento, com maior enfoque nas normas brasileiras.

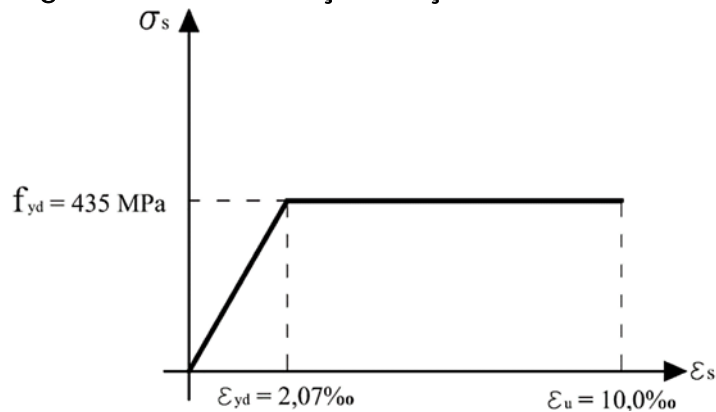
3.1.1 Hipóteses básicas

A NBR 6118 (2014) indica algumas hipóteses básicas para o dimensionamento de elementos lineares submetidos a solicitações normais. Essas hipóteses, utilizadas em diversos procedimentos de cálculo e instruções normativas, permitem o equacionamento e dimensionamento das seções de pilares analisadas, conforme apresentado a seguir:

- **Hipótese de Navier-Bernoulli:** desde a condição indeformada até o ELU, seções transversais originalmente planas permanecem planas após a deformação, de modo que as deformações são proporcionais à distância da linha neutra;
- **Solidariedade dos materiais:** admite-se compatibilidade de deformações entre o aço e o concreto. Portanto, a deformação da barra de armadura é admitida como igual à do concreto adjacente;
- **Resistência à tração do concreto:** as tensões normais de tração do concreto podem ser desprezadas no ELU;

- **Ruína por deformação excessiva:** a ruína no estado limite último se caracteriza por um dos materiais, aço ou concreto, atingir o limite de deformação admissível, conforme Figura 3-3 da seção 3.1.2.
- **Diagrama tensão-deformação do aço:** as tensões na armadura são obtidas pelo diagrama tensão-deformação, item 8.3.6 da NBR 6118 (2014). A Figura 3-1 representa o diagrama para o aço CA-50;

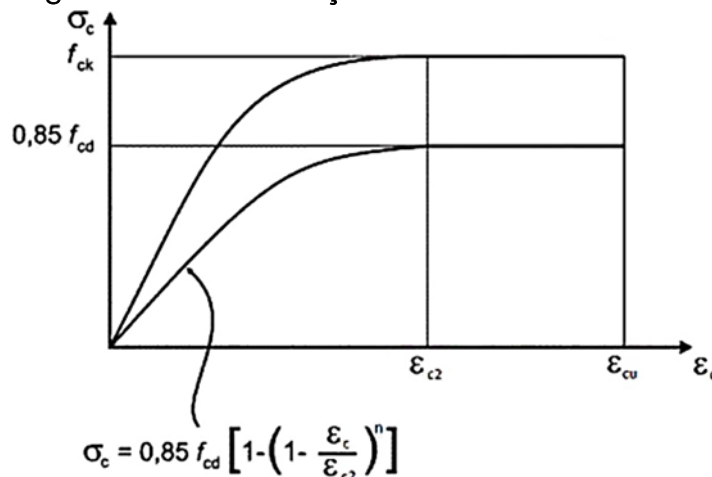
Figura 3-1 – Diagrama tensão-deformação do aço CA-50



Fonte: Adaptado da NBR6118 (2014).

- **Diagrama tensão-deformação do concreto:** as tensões de compressão no concreto são obtidas pelo diagrama parábola-retângulo (Figura 3-2), conforme item 8.2.10.1 da NBR 6118 (2014). Uma alternativa é substituí-lo pelo diagrama retangular simplificado com profundidade $y = \lambda x$ (sendo x a posição da linha neutra e λ uma constante que depende da classe do concreto), cuja resultante de compressão tem quase o mesmo valor e posição do diagrama completo.

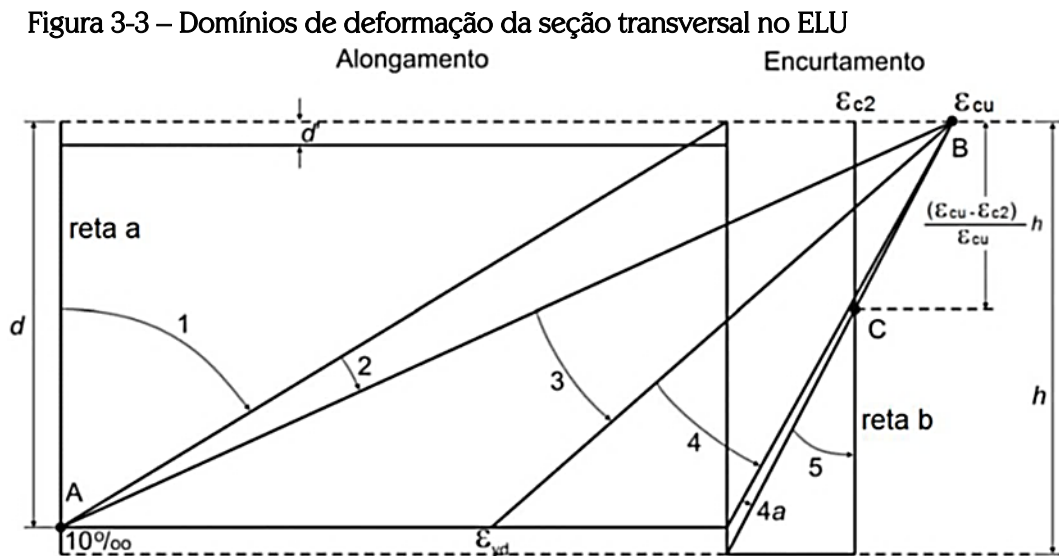
Figura 3-2 – Diagrama tensão-deformação do concreto



Fonte: Adaptado da NBR6118 (2014).

3.1.2 Domínios de deformação

Dentre as hipóteses básicas para o dimensionamento, pressupõe-se a compatibilidade de deformações entre o aço e o concreto. De acordo com a relação entre as deformações destes materiais, são definidos domínios de deformação pela NBR 6118 (2014), os quais são conhecidos a partir da determinação da posição da linha neutra.



Fonte: NBR6118 (2014).

O dimensionamento de pilares recai sobre algum dos domínios de deformação da Figura 3-3. Aqueles cuja ruptura ocorre por deformação plástica excessiva são:

- **Reta a:** tração uniforme em toda a seção;
- **Domínio 1:** tração não uniforme, sem compressão;
- **Domínio 2:** flexão simples ou composta com o máximo alongamento permitido no aço (10 ‰) e sem ruptura do concreto ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$).

Os demais domínios, cuja ruptura ocorre por encurtamento-limite do concreto, são:

- **Domínio 3:** flexão simples ou composta, com ruptura à compressão do concreto e escoamento do aço ($\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$);
- **Domínio 4:** flexão simples ou composta, com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$);
- **Domínio 4a:** flexão composta com armaduras comprimidas.
- **Domínio 5:** compressão não uniforme, sem tração.
- **Reta b:** compressão uniforme.

Para cada domínio de deformação, foram sintetizados na Tabela 3-1 as deformações da borda mais comprimida (ε_c), da armadura menos (ε_s) e mais comprimida (ε'_s), assim como os limites da posição da linha neutra.

Tabela 3-1 – Compatibilidade de deformações

Domínio	ε_c	ε_s	ε'_c	Linha neutra
2	$\frac{x}{d-x} \cdot 10\text{‰}$	10‰	$\frac{x-d'}{d-x} \cdot 10\text{‰}$	$0 < x \leq x_{23}$
3	ε_{cu}	$\varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x}$	$\varepsilon_{cu} \frac{x-d'}{x}$	$x_{23} < x \leq x_{lim}$
4	ε_{cu}	$\varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x}$	$\varepsilon_{cu} \frac{x-d'}{x}$	$x_{lim} < x \leq d$
4a	ε_{cu}	$\varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x}$	$\varepsilon_{cu} \frac{x-d'}{x}$	$d < x \leq h$
5	$\varepsilon_{c2} \frac{x}{x - \left(\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) h}$	$\varepsilon_{c2} \frac{x-d}{x - \left(\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) h}$	$\varepsilon_{c2} \frac{x-d'}{x - \left(\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) h}$	$h < x \leq \infty$

Fonte: Autor.

3.1.3 Esbeltez

A esbeltez de um pilar, grandeza dependente das dimensões da seção transversal e de seu comprimento, está relacionada à susceptibilidade deste a efeitos de instabilidade local (flambagem). O índice de esbeltez (λ) de um pilar retangular é dado pela equação (2), na qual l_e é o comprimento de flambagem e h a dimensão da seção transversal na direção considerada.

$$\lambda = \sqrt{12} \frac{l_e}{h} \quad (2)$$

A NBR 6118 (2014) define um valor limite, λ_1 , abaixo do qual podem-se desconsiderar os efeitos locais (ditos como) de 2ª ordem. Este índice, limitado entre 35 e 90, é dado pela equação (3).

$$\lambda_1 = \frac{25 - 12,5 e_1/h}{\alpha_b} \quad (3)$$

Em que:

e_1 – excentricidade de 1ª ordem;

h – dimensão da seção transversal na direção considerada;

α_b – parâmetro, entre 0,4 e 1,0, para consideração do diagrama de momentos do pilar.

Segundo Scadelai (2004), os pilares podem ser classificados de acordo com o índice de esbeltez em:

- Pilares robustos, curtos ou pouco esbeltos: $\lambda \leq \lambda_1$;
- Pilares de esbeltez média: $\lambda_1 < \lambda \leq 90$;
- Pilares esbeltos ou muito esbeltos: $90 < \lambda \leq 140$;
- Pilares excessivamente esbeltos: $140 < \lambda \leq 200$;

A NBR 6118 (2014) não admite o dimensionamento de pilares com índice de esbeltez superior a 200.

3.2 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

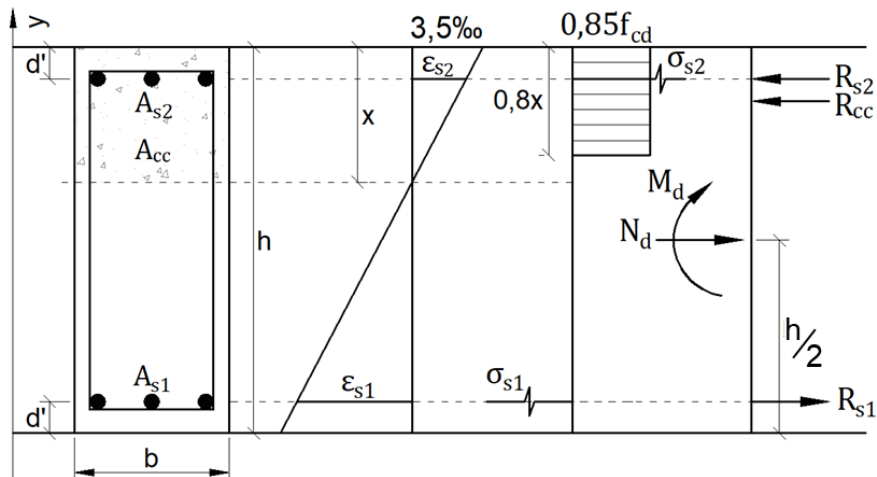
Na revisão de literatura, foram apresentadas diversas metodologias de cálculo de flexo-compressão normal, propostas na literatura, tais como a resolução por ábacos, o método das zonas de sollicitação, o de pequena e grande excentricidade, e o de equilíbrio direto. Nesta seção, é descrito com mais detalhes o método iterativo, por ser de maior interesse para este trabalho.

É feita a dedução das equações válidas para os domínios 3 e 4 de deformações, utilizando o diagrama de tensões retangular simplificado para o concreto. Porém, os princípios de equilíbrio são equivalentes para os demais domínios de deformações e para outras formulações de equações constitutivas para o concreto.

Uma seção transversal genérica é apresentada na Figura 3-4, com largura b , altura h , posição da linha neutra x , área de aço superior A_{s2} , inferior A_{s1} , tensão na armadura σ_s , deformação específica do aço ε_s , resistência à compressão do concreto f_{cd} , resultante na armadura R_s , no concreto R_{cc} , esforço normal de cálculo N_d e momento fletor M_d .

A formulação desenvolvida considera armaduras simétricas em faces opostas, com $A_{s1} = A_{s2}$, porém pode ser estendida para mais camadas de armadura incluindo outras resultantes para o aço.

Figura 3-4 – Seção transversal, diagrama de deformações e equilíbrio.



Fonte: Autor.

Por equilíbrio de força, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 N_d &= R_{cc} + R_{s2} - R_{s1} \\
 N_d &= 0,8 x b (0,85 f_{cd}) + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1} \\
 N_d &= 0,68 x b f_{cd} + A_s (\sigma_{s2} - \sigma_{s1})
 \end{aligned} \quad (4)$$

Agora, por equilíbrio de momentos em relação ao centro geométrico da seção, encontra-se:

$$\begin{aligned}
 M_d &= R_{cc} \left(\frac{h}{2} - 0,4 x \right) + R_{s2} \left(\frac{h}{2} - d' \right) + R_{s1} \left(\frac{h}{2} - d' \right) \\
 M_d &= 0,68 x b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0,4 x \right) + A_s (\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \left(\frac{h}{2} - d' \right)
 \end{aligned} \quad (5)$$

Retomando o diagrama de domínio de deformações apresentado na Figura 3-3 e as equações de compatibilidade de deformações dos materiais da Tabela 3-1, tem-se que:

$$\varepsilon_{s1} = 3,5 \left(\frac{d - x}{x} \right) \quad (6)$$

e

$$\varepsilon_{s2} = 3,5 \left(\frac{x - d'}{x} \right) \quad (7)$$

Visto que os valores do esforço normal e momento fletor de cálculo são conhecidos, o dimensionamento pode ser feito, iterativamente, da seguinte forma:

1. Arbitrar x ;
2. Obter ε_{s1} e ε_{s2} a partir das equações (6) e (7), respectivamente;
3. Calcular σ_{s1} e σ_{s2} pelo diagrama tensão-deformação do aço (Figura 3-1, página 31);
4. Calcular A_s a partir da equação (5);
5. Calcular x pela equação (4);
6. Repetir o processo até a convergência de x , sendo o último valor calculado para A_s a área de aço simétrica necessária para a seção.

Esse processo de dimensionamento pode ser adaptado para a verificação da resistência de uma seção transversal à flexo-compressão normal, caso em que a área de aço é conhecida, mas os esforços solicitantes não. Esse procedimento, com as devidas adaptações, é utilizado no modelo mecânico para determinação do momento resistente da seção de pilares, conforme apresentado na seção 4.1.

3.3 NÃO LINEARIDADES

Na mecânica dos sólidos, diversos comportamentos não-lineares distintos podem ocorrer nas estruturas, tendo estes natureza física, relacionada a propriedades dos materiais, ou geométrica, em que as deformações na estrutura provocam esforços adicionais.

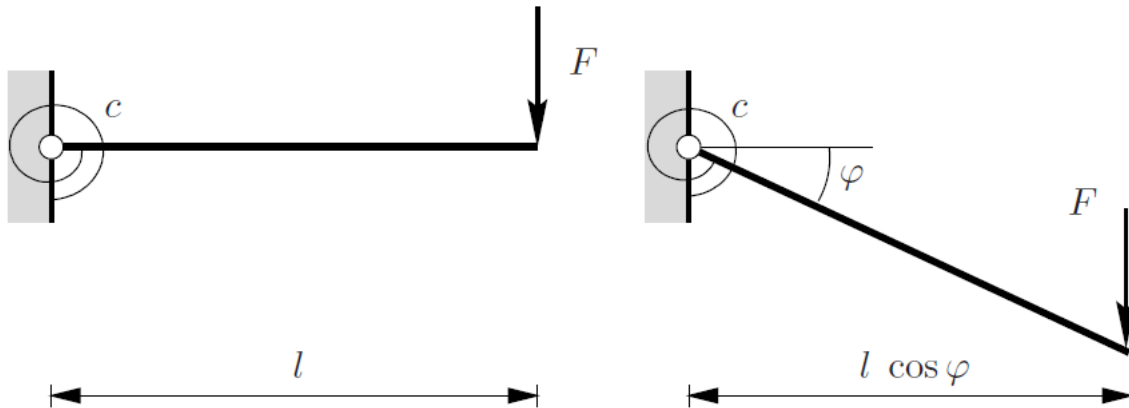
3.3.1 Não-linearidade geométrica

Na análise estrutural, de modo geral são admitidas as suposições de pequenos deslocamentos e deformações, visto que estas condições tendem a ser necessárias para que a estrutura mantenha sua estabilidade. Desta forma, uma equação constitutiva linear pode ser usada quando se tratam de deformações elásticas. Contudo, existem diversos problemas em que grandes deslocamentos ou rotações podem ocorrer, os quais exigem uma teoria não-linear que inclua a geometria de forma exata (WRIGGERS, 2008).

Essa situação é exemplificada a partir do exemplo de uma viga rígida, de comprimento l , conforme Figura 3-5, suportada a sua esquerda por uma mola elástica de rigidez c . O equilíbrio no sistema deformado é dado pela equação (8).

$$F l \cos \varphi = c \varphi \quad (8)$$

Figura 3-5 – Representação do sistema e carregamento (a) e sistema deformado (b)

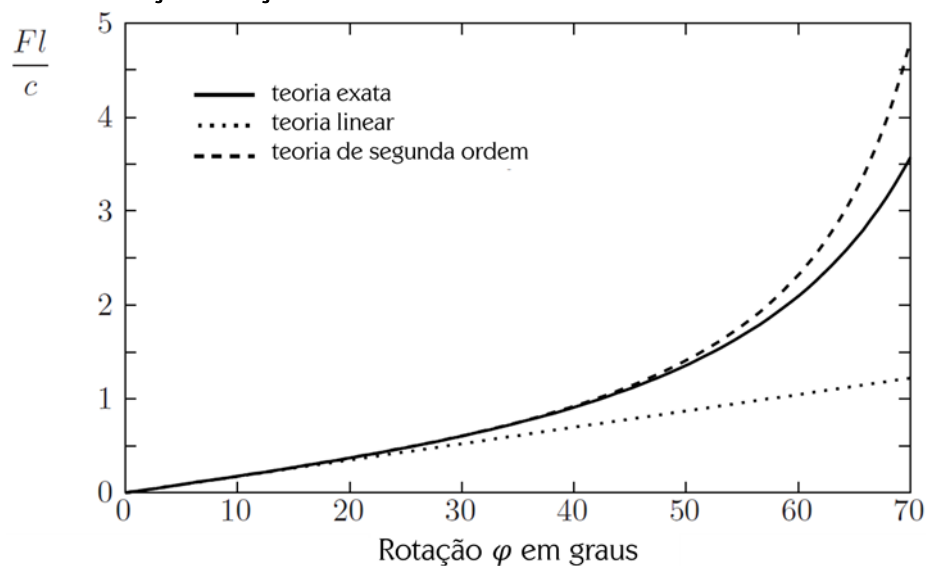


Fonte: WRIGGERS (2008).

A equação (8) relaciona a força F de uma forma não-linear com a rotação da viga φ . A não-linearidade decorre da mudança da geometria na equação de equilíbrio, comportamento conhecido como não-linearidade geométrica.

Para pequenas deformações, o fator $\cos \varphi \approx 1$, de modo que a solução linear $F = c \varphi / l$ é obtida da equação (8). Na Figura 3-6, que apresenta o gráfico da força como função da rotação para ambos os casos, se observa que a solução linear, eficiente para valores pequenos de φ , se afasta da solução não-linear geométrica exata para grandes rotações.

Figura 3-6 – Força x rotação



Fonte: WRIGGERS (2008).

O gráfico anterior também apresenta a solução segundo a frequentemente denominada teoria de segunda ordem. Essa teoria, aplicada para considerar efeitos não-lineares no modelo mecânico de forma aproximada, utiliza uma série de Taylor limitada ao segundo termo (WRIGGERS, 2008).

A não linearidade geométrica está, portanto, relacionada com as mudanças na geometria dos elementos estruturais à medida que o carregamento é aplicado, e a influência desta geometria alterada nos próprios esforços internos. Assim, tem-se que o equilíbrio da posição deformada, diferente da posição original, provoca alterações nos esforços internos, os quais resultam na não-linearidade observada.

3.3.2 Não-linearidade física

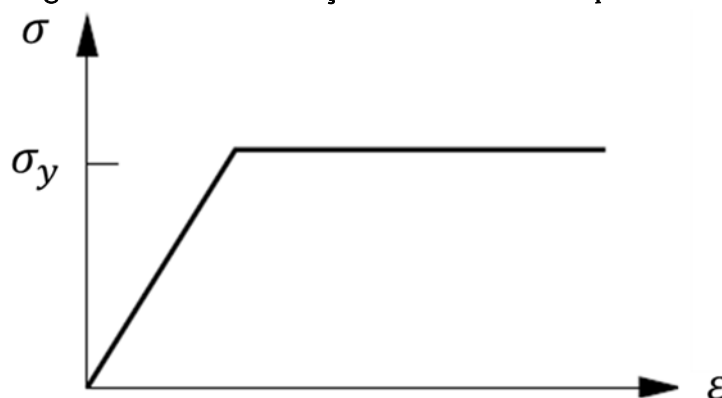
A consideração de relações tensão-deformação elástico lineares tende a ser uma boa aproximação para vários materiais, desde que sob condições restritivas como pequenas deformações. Entretanto, na prática esta relação deixa de ser válida se as deformações ultrapassam determinado limite, tendendo o material a apresentar deformações permanentes, conhecidas como plásticas (WRIGGERS, 2008).

Por comportamento linear, entende-se que o diagrama tensão-deformação é representado por uma linha reta. Para ser considerado elástico, o corpo deve retornar a sua posição original ao ser descarregado, sem apresentar deformações residuais. Quando a tensão não aumenta proporcionalmente a deformação, tem-se um diagrama tensão-deformação que não é linear; se esse material trabalhar apenas no regime elástico, diz-se que apresenta comportamento elástico não-linear. Caso o material apresente deformação residual após o carregamento, possui um comportamento plástico. De modo geral, os materiais costumam apresentar uma combinação destes três comportamentos.

A Figura 3-7 apresenta um exemplo típico de material elastoplástico, o qual se comporta linearmente até atingir a tensão de escoamento, σ_y , a partir do qual apresenta deformações plásticas sem acréscimo de esforços.

A não-linearidade física está relacionada com mudanças no comportamento dos materiais em virtude do nível de esforços internos. No concreto armado, por exemplo, se tensões de tração ultrapassam o limite de resistência do concreto, o elemento estrutural passa a desenvolver fissuras, o que reduz a rigidez de sua seção transversal. Assim, ocorrem alterações na distribuição dos esforços internos.

Figura 3-7 – Diagrama tensão-deformação de material elastoplástico



Fonte: Autor.

Para efeitos de projetos de estruturas, a não-linearidade física pode ser considerada de modo aproximado ou com metodologias mais refinadas. Um exemplo de consideração aproximada é a redução da rigidez dos elementos na etapa de análise estrutural, conforme proposto pelos Comentários Técnicos do IBRACON (2015). Considerações mais refinadas podem ser obtidas com o uso de relações momento-curvatura ou de integração numérica das relações constitutivas tensão-deformação dos materiais.

3.3.3 Considerações normativas sobre não-linearidades

A NBR 6118 (2014) trata, na seção 15, sobre conceitos gerais acerca da instabilidade de estruturas. Os efeitos conhecidos como de “segunda ordem” são “aqueles que se somam aos obtidos na análise de primeira, quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada”. Admite-se que esses efeitos sejam desconsiderados se não causarem acréscimos superiores a 10% em reações e solicitações. Em pilares, os efeitos de “segunda ordem” se dividem em locais e globais.

Os efeitos locais podem ser calculados por um método geral, descrito no item 15.8.3.2 da norma, que consiste em uma análise com a consideração de não-linearidades física, pelo diagrama momento-curvatura, e geométrica. Os métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e com rigidez κ aproximada são alternativas caso o índice de esbeltez seja menor do que 90, e o do pilar-padrão acoplado a diagramas “momento fletor, esforço normal e curvatura” se este for menor do que 140.

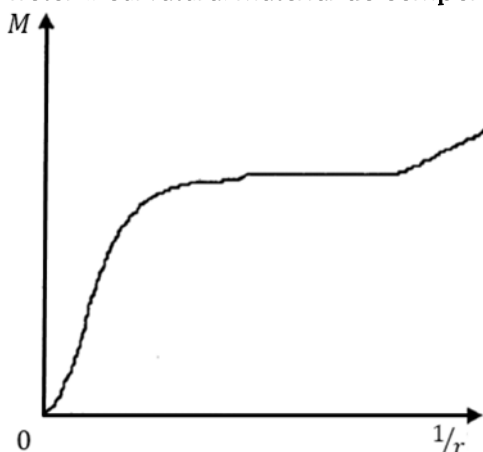
Os efeitos globais de segunda ordem devem ser considerados caso a estrutura seja de nós móveis. O item 15.7.3 da NBR 6118 (2014) fornece alternativas simplificadas, como a alteração da rigidez dos elementos estruturais. Pode-se também adotar procedimentos iterativos para obter a posição deformada final, como o processo conhecido por “P- Δ ”.

Cabe destacar que a soma das não-linearidades física e geométricas podem levar ao Estado Limite Último de Instabilidade para pilares muito esbeltos.

3.3.4 Relação Momento-Curvatura

Na seção anterior, tratou-se sobre o comportamento em geral não-linear observado nos materiais utilizados em estruturas. Além dos diagramas tensão-deformação, esse comportamento pode ser analisado por meio de relações momento fletor-curvatura, conforme o apresentado na Figura 3-8 para um material com patamar de escoamento mais ou menos definido, como o aço, por exemplo.

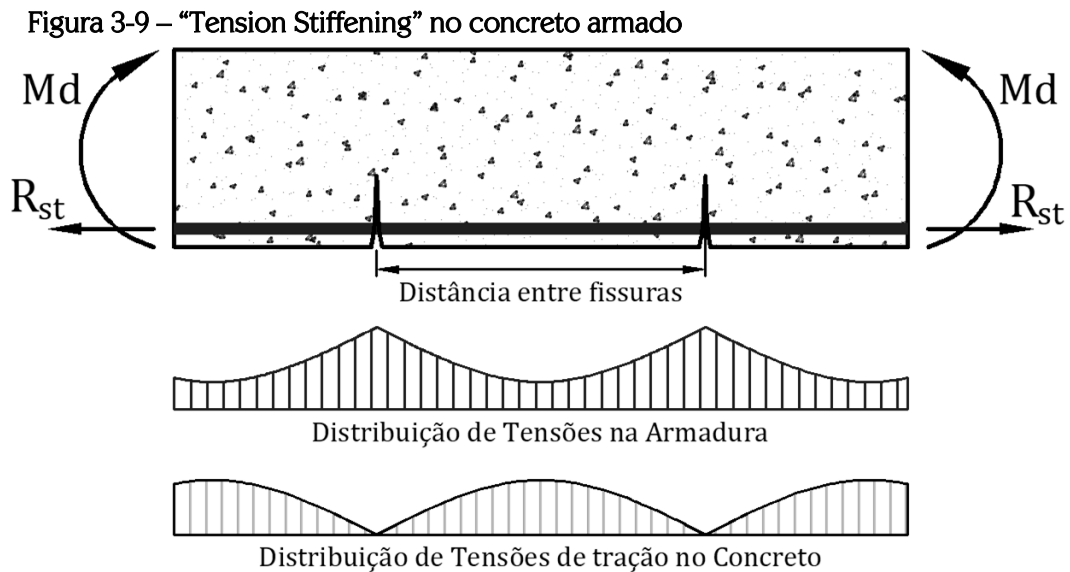
Figura 3-8 – Momento fletor x curvatura: material de comportamento não-linear



Fonte: Adaptado de Senem (2000).

O concreto, por sua vez, apresenta um forte caráter não-linear por conta de fenômenos inerentes aos materiais, tais como a existência de microfissuras no concreto mesmo sem carregamento externo. Com o aumento das tensões de tração, as fissuras no concreto passam a expandir, resultando na resposta não-linear observada em sua curva tensão-deformação (MEHTA E MONTEIRO, 1994).

A fissuração num elemento de concreto armado é maior nas seções em que as tensões de tração são mais elevadas. Ademais, algumas seções entre as fissuras permanecem íntegras, gerando um mecanismo particular de absorção de esforços. Enquanto é nula a tensão de tração nas fissuras, nas demais seções o concreto resiste à tração, de forma crescente em relação ao afastamento das fissuras. Este fenômeno, abordado na seção 2.2, é denominado *tension stiffening* e retratado na Figura 3-9. Verifica-se que a distribuição de tensões é diferente para cada seção transversal do elemento.



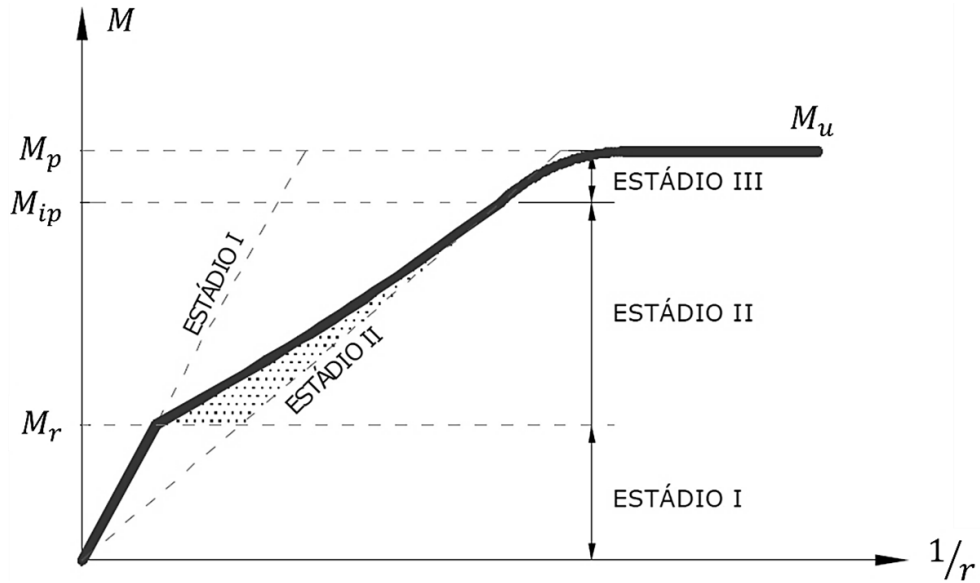
Fonte: Autor.

Submetido a esforços de flexão, o concreto armado apresenta três etapas distintas de comportamento. A primeira (estádio I) se caracteriza pelo comportamento elástico-linear da seção. A segunda (estádio II) começa com a fissuração devido à tração no concreto, em que o momento atuante é maior ou igual ao momento de fissuração (M_f). Em seções sub-armadas, a terceira etapa (estádio III) inicia quando a seção atinge o momento de plastificação (M_{IP}), na qual se supõe que a tensão no aço tracionado se iguala à de escoamento, e termina quando a seção atinge o momento último (M_u), levando-a à ruína.

Os diagramas momento-curvatura permitem que se ilustre esse comportamento particular do concreto armado, representando a não-linearidade física advinda do comportamento conjunto desses materiais. Portanto, podem servir de apoio para uma análise não-linear em vigas, pilares ou pórticos de concreto armado. Um diagrama típico, com a consideração da contribuição do concreto entre fissuras (“*tension stiffening*”), é retratado na Figura 3-10.

A relação momento-curvatura depende das dimensões da seção de concreto, das propriedades do concreto e do aço, e, no caso de pilares, do esforço normal aplicado. Pode ser calculada por um procedimento iterativo, a partir das equações de equilíbrio e compatibilidade de deformações da seção. O gradiente desta relação representa a rigidez elástica secante (E_{sec}) da seção em uma condição típica de carregamento. Além disso, permite a obtenção do momento último admissível e a curvatura correspondente, referentes ao ponto de ruptura da seção.

Figura 3-10 – Diagrama momento x curvatura para seções de concreto armado à flexão

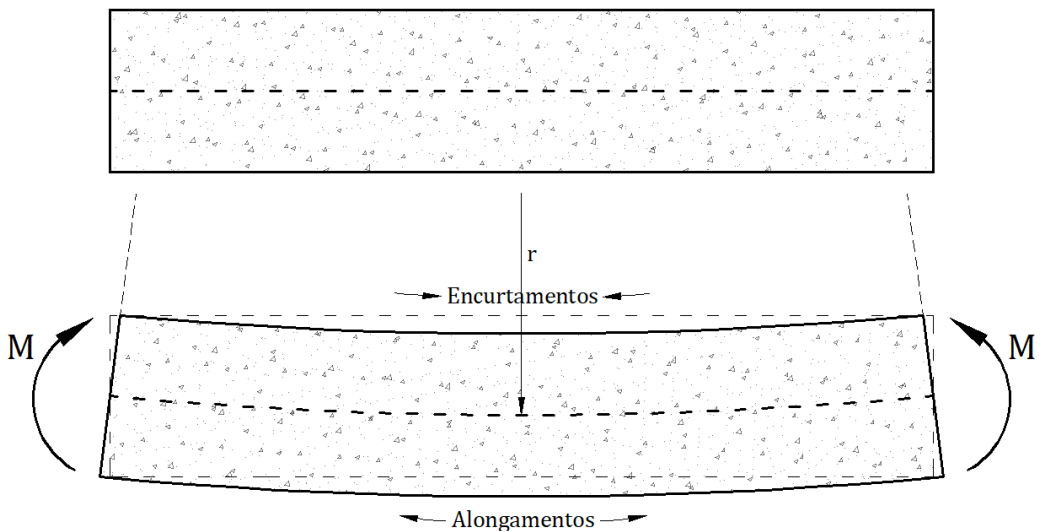


Fonte: Adaptado de Pereira (2009).

A fim de definir a expressão que representa a curvatura, considere a deformada de uma viga submetida à flexão pura, pela teoria de Euler-Bernoulli, conforme apresentado na Figura 3-11. Adotam-se, então, as seguintes hipóteses:

- Deformação por cisalhamento desprezáveis;
- Hipótese de Navier: seções transversais permanecem planas após aplicação de carregamento;
- O eixo da viga deformada forma um arco circular de raio r .

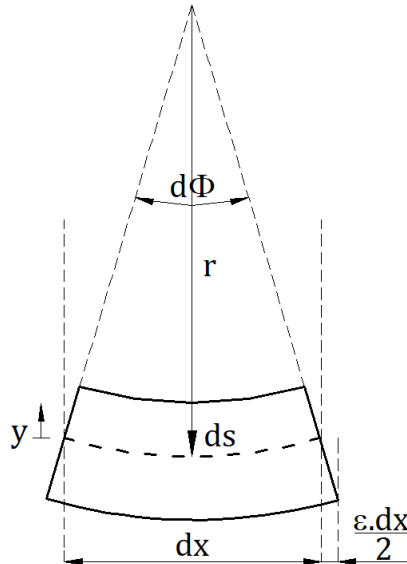
Figura 3-11 – Deformada de uma viga submetida à flexão pura



Fonte: Autor.

A curvatura é definida pelo inverso do raio r da deformada da viga. Pode-se isolar um segmento infinitesimal genérico da viga (Figura 3-12), e estabelecer uma relação entre a curvatura e o momento atuante na seção transversal.

Figura 3-12 – Elemento infinitesimal de viga



Fonte: Autor.

O comprimento de arco ds , sobre a linha neutra, pode ser dado em função do ângulo $d\Phi$, em radianos:

$$ds = d\Phi \cdot r \quad (9)$$

Dado que o comprimento indeformado do elemento, dx , é aproximadamente igual a ds , tem-se:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{r} \quad (10)$$

Para um arco a uma distância y qualquer, a partir de um eixo que passa pelo centro de gravidade da seção:

$$dx + \varepsilon \cdot dx = d\Phi \cdot (r - y) \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1 - \varepsilon}{r - y} \quad (12)$$

Igualando (10) e (12):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \varepsilon}{r - y} \quad (13)$$

$$r + r \varepsilon = r - y \quad (14)$$

Após dividir a equação (14) por r e reordenar os termos, chega-se a:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{-y} \quad (15)$$

Da teoria da resistência dos materiais, para seções transversais submetidas à flexão, e da Lei de Hooke, válida para materiais com comportamento elástico-linear, tem-se as equações (16) e (17), respectivamente. De ambas resulta a equação (18).

$$\sigma = -\frac{M}{I} \cdot y \quad (16)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{-y} = \frac{M}{EI} \quad (18)$$

Agora, ao comparar a equação recém obtida com a (15), obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (19)$$

A expressão para a curvatura apresentada em (19) também pode ser escrita em função das deformações específicas em uma seção. A partir da Figura 3-13, nota-se que a curvatura equivale à tangente do ângulo α , conforme equação (20).

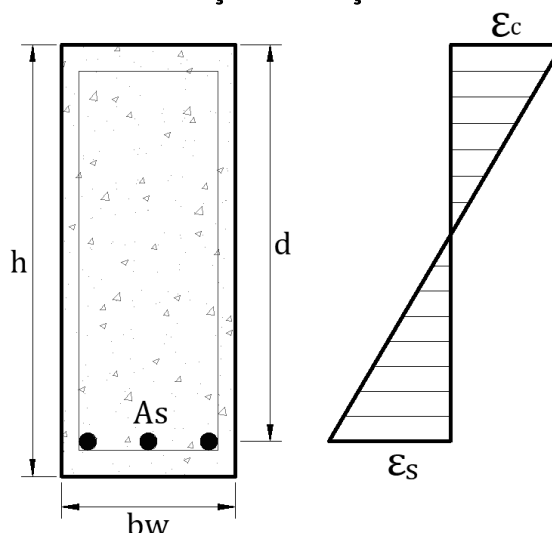
$$\frac{1}{r} = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \quad (20)$$

Em que ε_c é a deformação específica do concreto na borda mais comprimida; ε_s é a deformação específica no centro de gravidade da armadura; e d é a altura útil da seção.

Neste trabalho, optou-se por utilizar uma grandeza adimensional (θ) análoga à curvatura, definida na equação (23), visto que apresenta uma ordem de grandeza mais conveniente.

$$\theta = 1000 \cdot h \cdot \frac{1}{r} \quad (21)$$

Figura 3-13 – Diagrama de deformações em seção de concreto armado



Fonte: Autor.

3.4 ANÁLISE LINEAR, REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS E ANÁLISE PLÁSTICA

Segundo Fontes e Pinheiro (2005), a análise estrutural consiste na determinação dos efeitos das ações em uma estrutura, isto é, esforços solicitantes e deslocamentos, por meio de modelos matemáticos. Estes idealizam fatores como o comportamento das ações, dos materiais, das ligações entre elementos e as respostas destes frente às ações. Tem por objetivo possibilitar as verificações dos estados limites últimos e de serviço.

Os modelos para dimensionamento de estruturas utilizam, em geral, uma análise elástico-linear. Nesta análise, supõe-se válida a Lei de Hooke, segundo a qual os materiais apresentam um comportamento elástico (sem deformações residuais) linear (deformações diretamente proporcionais às tensões). Apesar de simples, essa hipótese tende a ser adequada para o estado limite último em estruturas de concreto armado que não possuam comportamentos não-lineares significativos.

Essa premissa pode ser entendida a partir do Teorema Estático, ou do Limite Inferior, da Teoria da Plasticidade, segundo o qual, se existe um sistema de cargas, em equilíbrio com um campo de tensões, que satisfaça a condição estática de plasticidade, é um limite inferior para a carga de ruptura (HILL, 1998). Portanto, uma estrutura de concreto armado dimensionada pela análise elástico-linear estaria em uma situação igual ou inferior ao seu estado limite último, desde que apresente comportamento plástico adequado.

Uma vez realizada a análise linear da estrutura, pode-se efetuar uma redistribuição dos esforços calculados, decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais. A

fissuração de determinadas seções transversais resulta em um remanejamento dos esforços solicitantes para seções com maior rigidez (FONTES E PINHEIRO, 2005).

A análise linear com redistribuição pode ser usada para reduzir os momentos fletores sobre os apoios de vigas contínuas, com o respectivo aumento dos momentos nos vãos. A redistribuição se dá com a multiplicação dos momentos nos apoios por um coeficiente δ , e posterior correção dos momentos nos vãos. A capacidade de redistribuição de esforços dos elementos de concreto armado está diretamente relacionada a sua ductilidade.

Segundo Park e Paulay (1975), dentre as vantagens da redistribuição de momentos, torna-se possível evitar dimensionamentos de vigas com altas taxas de armadura nos apoios, o que representa uma dificuldade construtiva. Há, ainda, a possibilidade de reduzir os picos do diagrama de momentos fletores para as diferentes situações de carregamento acidental, podendo-se obter economia de armadura.

A NBR 6118 (2014) apresenta algumas condições para que sejam redistribuídos os esforços determinados em uma análise linear:

- As condições de equilíbrio e de ductilidade devem ser satisfeitas;
- Esforços internos devem ser recalculados, a fim de garantir o equilíbrio dos elementos estruturais isolados e da estrutura como um todo;
- Efeitos advindos da redistribuição de esforços devem ser observados em todos os aspectos do projeto, inclusive condições de ancoragem, corte das armaduras e esforços a ancorar;
- Redistribuições de momentos fletores e de torção em pilares só podem ser adotadas se decorrentes de redistribuições de momentos de vigas que a eles se liguem.

Também são impostas condições de ductilidade e limites para redistribuição dos momentos, em função da capacidade de rotação dos elementos estruturais. Esta depende da posição da linha neutra no Estado Limite Último, logo é inversamente proporcional à relação x/d . Em vigas e lajes, mesmo sem a consideração de redistribuição de esforços solicitantes, esta relação é limitada em:

- $x / d \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;
- $x / d \leq 0,35$ para concretos em que 50 MPa $< f_{ck} \leq 90$ MPa.

Caso realizada a redistribuição de esforços, com a multiplicação do momento fletor em uma determinada seção transversal por um coeficiente δ , a profundidade x/d nessa seção deve ser limitada por:

- $x / d \leq (\delta - 0,44) / 1,25$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;
- $x / d \leq (\delta - 0,56) / 1,25$ para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$ MPa.

O coeficiente δ de redistribuição deve ser superior a 0,90 para estruturas de nós móveis e 0,75 nos demais casos. É admitida redistribuição acima desse limite, desde que a estrutura seja calculada por meio da análise não-linear ou da análise plástica, com verificação da capacidade de rotação de rótulas plásticas.

Cabe ressaltar que em outras instruções normativas não se admite o uso de análises com redistribuição para o dimensionamento de pilares. O ACI 318-14 (2014), por exemplo, comenta apenas sobre a redistribuição de momentos em elementos contínuos submetidos à flexão, sem citar pilares ou elementos com esforços de flexo-compressão. Já o Eurocode 2 (2004) deixa claro que, ao se utilizar uma análise linear com redistribuição de momentos, deve-se dimensionar os pilares com momentos elásticos sem qualquer redistribuição.

Outra possibilidade de análise estrutural, que aproveita a ductilidade dos materiais e a capacidade de guardarem deformações residuais, é a análise plástica. Em projeto, as principais teorias que permitem que os elementos sofram deformações permanentes são a das rótulas plásticas, para elementos lineares, e a das charneiras plásticas, para elementos que trabalham como placas (FONTES E PINHEIRO, 2005).

Em estruturas reticuladas, ao aumentar continuamente o carregamento, um ou mais pontos poderão atingir o momento fletor de plastificação total, entrando no regime de escoamento. Ainda que ocorra um aumento de carregamento na estrutura, o momento nesta seção não ultrapassará o momento de plastificação, o que resulta em uma rotação plástica, com a formação de uma articulação ou rótula plástica. Essa situação é representada pelo trecho final de diagramas momento-curvatura, como representado pelo momento de plastificação " M_p " na Figura 3-10 da página 42.

A formação da primeira rótula plástica não significa o colapso. Eventuais acréscimos de carregamento irão implicar em uma redistribuição de momentos na estrutura, na medida em que a seção com rótula plástica não admite mais nenhum aumento de momento. Nesse caso, outros pontos da estrutura podem atingir o momento de

plastificação, o que acarreta em novas rótulas plásticas, até que se atinja um número limite, a partir do qual a estrutura entrará em colapso.

Nesta situação, a estrutura se encontra com o carregamento crítico. Este número limite de rótulas depende da estrutura e define a configuração de colapso, denominada de “mecanismo de colapso”. Segundo Senem (2000), uma dada estrutura possui diversos possíveis mecanismos de colapso, no entanto apenas um destes satisfaz as condições de equilíbrio para o carregamento e as de escoamento ($M \leq M_p$) em todos os pontos.

Por conseguinte, estruturas hiperestáticas possuem, em geral, uma “reserva de capacidade resistente”, visto que é necessária a formação de mais de uma rótula plástica para que se forme um mecanismo de colapso (SENEM, 2000).

Observa-se que a plastificação no concreto armado ocorre pelo escoamento da armadura, que resulta na elevação da linha neutra e, por consequência, tem-se um aumento do braço de alavanca em relação ao obtido em regime elástico. Entretanto, o momento resistente praticamente não se altera até a ruptura, pois o aumento do braço de alavanca apenas compensa a redução da zona de concreto comprimido. Logo, o diagrama momento-curvatura do concreto armado pode ser aproximado por três retas, representando a rótula plástica por uma reta horizontal com o momento de plastificação igual ao momento último (MORETTO, 1970).

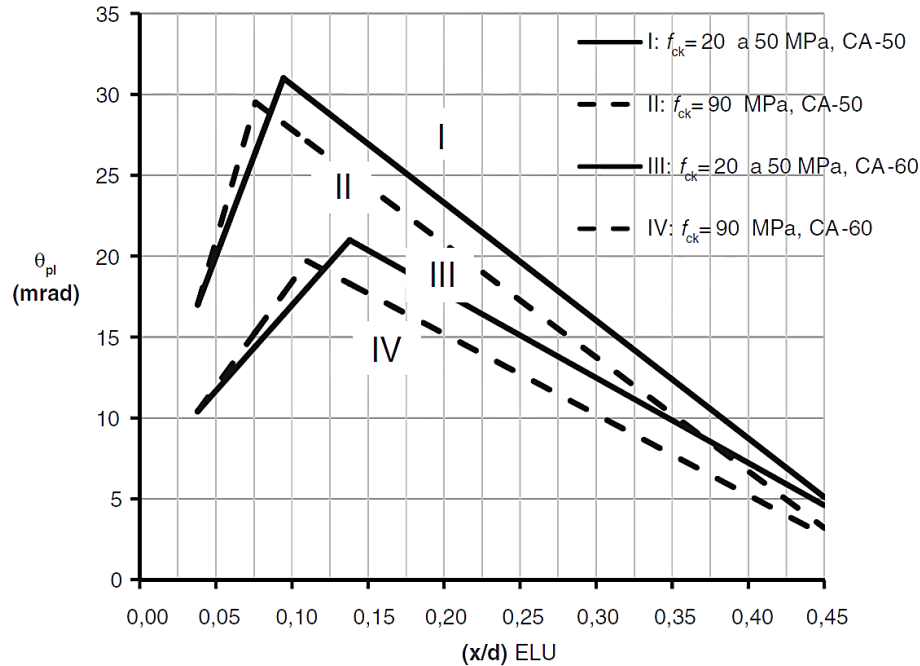
A NBR6118 (2014) também apresenta recomendações acerca da análise plástica. Além de restringir seu uso às verificações do Estado Limite Último, também o veta em caso de existirem “efeitos de segunda ordem global” significativos ou se a ductilidade dos elementos for insuficiente para atingir as configurações do mecanismo de colapso.

As verificações de Estados-Limites últimos podem ser efetuadas, segundo a norma, com a simulação de rótulas plásticas nas seções críticas, verificada a capacidade de rotação plástica das seções transversais correspondentes para cada uma das combinações de carregamento consideradas.

A NBR6118 (2014) admite que, quanto menor a posição relativa da linha neutra (x/d), maior é a capacidade de rotação do elemento estrutural. Em função desse parâmetro, define-se o limite da capacidade de rotação da rótula plástica, θ_{pl} , conforme dado na Figura 3-14. Os valores obtidos no gráfico devem ser multiplicados por $\sqrt{(a/d)/3}$, em que $a = M_{sd}/V_{sd}$; M_{sd} é o momento fletor solicitante; e V_{sd} a força cortante, ambos na seção crítica. Para classes de concreto entre 50 MPa e 90 MPa, pode-se fazer uma interpolação linear dos valores dados na Figura 3-14.

É dispensada pela norma a verificação explícita da capacidade de rotação plástica caso a posição da linha neutra seja limitada em 0,25, para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa, ou 0,15 para $f_{ck} > 50$ MPa.

Figura 3-14 - Capacidade de rotação de rótulas plásticas



Fonte: Adaptado da NBR6118 (2014).

3.5 TEORIA DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A fim de garantir que as estruturas tenham um nível de segurança adequado, os códigos e instruções normativas tendem a adotar uma abordagem semiprobabilística, estabelecendo coeficientes de segurança parciais para ações e resistências. Portanto, a metodologia de dimensionamento ainda é baseada em uma abordagem determinística para os parâmetros de resistência e solicitação. Apesar de representar de modo satisfatório o comportamento estrutural, essa abordagem não é necessariamente adequada para levar em conta o grau de incerteza presente nas variáveis.

Na engenharia estrutural, as incertezas são intrínsecas a qualquer sistema, seja uma estrutura ou um elemento estrutural em particular, devido à aleatoriedade natural aos processos envolvidos. Desta forma, é impossível saber, com exatidão, qual será o espectro de carregamentos atuantes em determinado elemento estrutural ao longo de sua vida útil, assim como a resistência mecânica exata de seus componentes.

Além de relacionada à resistência e solicitação da estrutura, incertezas também são inerentes aos modelos de cálculo e dimensionamento, em virtude, por exemplo, do conhecimento limitado em relação aos sistemas projetados e das simplificações adotadas.

Neste contexto, a confiabilidade tem por objetivo avaliar, a partir do estudo das incertezas envolvidas, qual a probabilidade de que um sistema - ou um modelo deste - apresente um desempenho satisfatório, cujos requisitos são expressos analiticamente por meio de equações de estado limite. Estas equações, a fim de possibilitar a estimativa da probabilidade dos modos de falha (estados limites), são descritas por meio de variáveis aleatórias, representadas, por sua vez, por distribuições de probabilidade e seus respectivos parâmetros. O cálculo probabilidade de falha - ou do índice de confiabilidade associado - pode ser feito por métodos de transformação ou de simulação.

Esta seção discorre acerca de cada um desses conceitos da confiabilidade estrutural e de seus métodos de avaliação, a fim de fornecer o embasamento teórico necessário para as etapas subsequentes.

3.5.1 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória é um artifício matemático utilizado para representar de forma analítica os possíveis resultados de um experimento aleatório. Podem ser definidas como funções que mapeiam (ou transformam) eventos de um espaço amostral em um sistema numérico; isto é, atribuem números reais a cada possível resultado de um fenômeno (ANG & TANG, 2007; MONTGOMERY & RUNGER, 2014).

Matematicamente, uma variável aleatória X é caracterizada como uma função que relaciona, para cada ponto amostral ω de um experimento em um espaço amostral Ω , um número real x (PAPOULIS, 1991; DEGROOT & SCHERVISH, 2011).

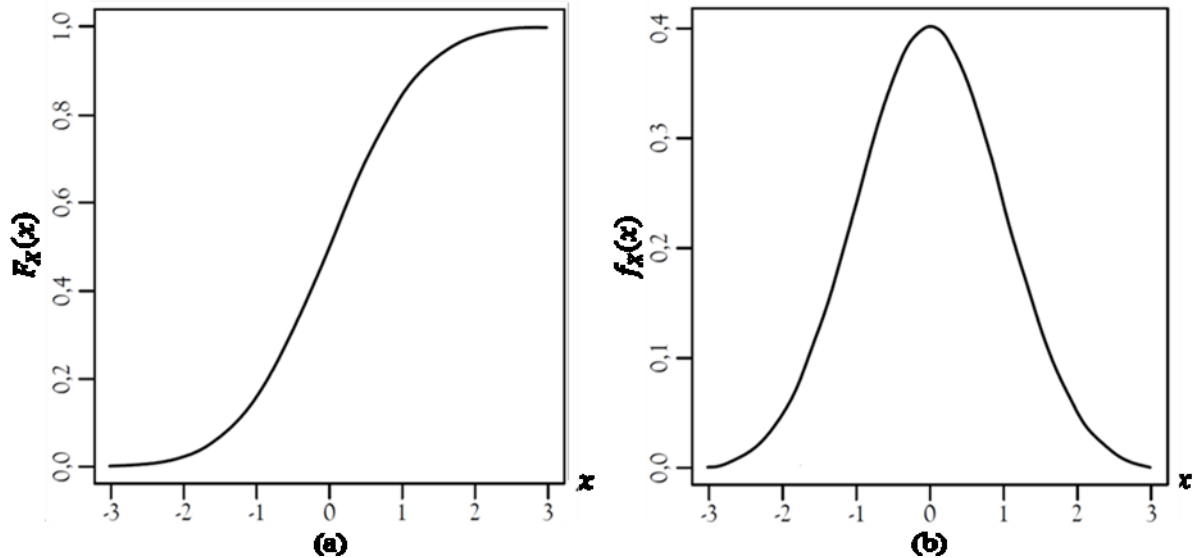
Logo, a probabilidade de ocorrência de um evento $\{X \leq x\}$, formado por todos os pontos amostrais ω tais que $X(\omega) \leq x$, é dada por uma função de distribuição acumulada de probabilidades (CDF - *Cumulative Distribution Function*) da variável aleatória X , definida para cada x no intervalo $-\infty$ a ∞ (PAPOULIS, 1991), conforme equação (22). Um exemplo da função $F_X(x)$ é apresentado na Figura 3-15 (a).

A função de densidade de probabilidades (PDF - *Probability Density Function*), ilustrada na Figura 3-15 (b), representa a probabilidade de ocorrência relacionada a um dado intervalo de valores de X , e pode ser obtida pela derivada da CDF em relação à x , conforme equação (23).

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad (22)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (23)$$

Figura 3-15 – Funções de probabilidade acumulada (CDF) e densidade de probabilidade (PDF)



Fonte: Autor.

Um dos parâmetros estatísticos que representam uma variável aleatória é o valor esperado, ou média, que indica sua tendência central e é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mu_X \quad (24)$$

Outra medida utilizada para descrever variáveis aleatórias é a variância, a qual reflete a dispersão da variável em torno da média, e descrita pela equação (25), onde σ_X é o desvio-padrão de X .

$$Var[X] = E[(X - \mu)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (25)$$

A fim de que se possa comparar a dispersão em torno da média entre variáveis aleatórias distintas, pode-se utilizar o coeficiente de variação, CV , uma medida adimensional definida por:

$$CV = \sigma_X / \mu_X \quad (26)$$

Algumas funções de densidade de probabilidade usuais em problemas de engenharia, e de interesse para este trabalho, são apresentadas na Tabela 3-2, elaborada com base em Papoulis (1991) e Melchers & Beck (2018).

Tabela 3-2 – Algumas distribuições de probabilidades contínuas

Distribuição	$f_X(x)$	Média - E(X)	Variância - var(X)
Normal N (μ, σ)	$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]$	μ_X	σ_X^2
Lognormal LN (λ, ε)	$\frac{1}{x \varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\varepsilon} \right)^2 \right]$	$\exp \left(\lambda + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$	$\mu_X^2 \cdot [\exp(\varepsilon^2) - 1]$
Gamma GM (k, v)	$\frac{v^k (t)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-kv}$	$\frac{k}{v}$	$\frac{k}{v^2}$
Gumbel EV - I (μ, α)	$\alpha \exp[\alpha(u - x) - e^{\alpha(u-x)}]$	$u + \gamma_1/\alpha$	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$

$\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma; $\gamma_1 = -0,57722$ é a constante de Euler.

Fonte: Papoulis (1991) e Melchers & Beck (2018).

3.5.2 Conceitos de confiabilidade e segurança estrutural

As estruturas e seus elementos devem ser projetados, construídos e conservados de modo a atender critérios de durabilidade e de funcionalidade ao longo de toda sua vida útil, desempenhando as funções a que se destina com o máximo de economia e eficiência.

Os projetos de engenharia consistem, portanto, no dimensionamento dos elementos de um sistema a fim de que satisfaçam diversos critérios quando submetidos a certas demandas. Contudo, existem inúmeras fontes de incertezas nos parâmetros de demanda e capacidade deste sistema, os quais dificultam o atendimento destas necessidades de projeto (COELHO, 2011). As incertezas envolvidas nos sistemas estruturais são classificadas por Melchers e Beck (2018) em:

- Incertezas fenomenológicas: se referem a fenômenos aparentemente inimagináveis, o que inviabiliza estimar seus efeitos corretamente;
- Incertezas de decisão: estão relacionadas a definição sobre a efetiva ocorrência, ou não, de um determinado fenômeno. Um exemplo típico é a decisão de quando a fissuração ou as flechas de um elemento estrutural é excessiva;
- Incertezas de modelo: são associadas ao uso de relações simplificadas entre as variáveis básicas para representar o fenômeno de interesse, como ocorre com aproximações teóricas do comportamento real das estruturas. Podem ser incorporadas a uma análise de confiabilidade por meio de uma variável que represente a razão entre a resposta de ensaios e a obtida pelo modelo;

- Incertezas de previsão: remetem à previsão de condições futuras de um processo ou sistema, tais como a estimativa, na fase de projeto, sobre a resistência dos materiais a serem utilizados na construção;
- Incertezas físicas: são aquelas identificadas com a natureza inerentemente aleatória das variáveis, como ocorre com a variabilidade da resistência dos materiais, dos carregamentos impostos e das dimensões físicas dos componentes da estrutura;
- Incertezas estatísticas: são causadas pela determinação dos estimadores estatísticos, como média e demais momentos, por meio de amostras, pois em geral as observações da variável não a representam perfeitamente, podendo conter um viés nos dados;
- Incertezas devido à fatores humanos: resultam do envolvimento humano nas fases de projeto, execução e utilização das construções, e podem ser decorrentes de erro humano ou de intervenção humana;

Ao longo do tempo, conforme relatado por FUSCO (1976), houve uma evolução dos critérios de segurança em estruturas, partindo dos métodos chamados intuitivos, nos quais os construtores se baseavam no empiricismo e na cópia de construções anteriores. Em seguida, o Método das Tensões Admissíveis foi uma boa tentativa de quantificar a segurança no projeto de estruturas, ao definir uma tensão limite para o material, que deveria ser inferior a tensão resultante da somatória dos efeitos das ações externas.

A partir de 1960, surgiu o conceito de projeto em estados limites, com a utilização de modelos teóricos para avaliação da capacidade resistente, e fatores de ponderação que consideram as incertezas das variáveis ação e resistência, denominados fatores parciais de segurança. No Método dos Estados Limites, a segurança é verificada pela comparação das solicitações majoradas com a correspondente capacidade resistente minorada.

As diretrizes normativas utilizam, em geral, o conceito de estados limites, e estabelecem que as estruturas deverão atender, com níveis adequados de confiança, aos requisitos de estados limites últimos, de estados limites de serviço e de durabilidade. Os estados limites últimos são relativos ao colapso ou qualquer outra forma de ruína estrutural; enquanto os estados limites de serviço (ELS) estão relacionados ao conforto dos usuários e boa utilização das estruturas.

De acordo com o JCSS – *Probabilistic Model Code* (2001), a expressão “com níveis de segurança adequados” denota que o grau de confiabilidade adotado deverá ser

adaptado a situação de projeto, ao uso e ao tipo de estrutura ou elemento estrutural, dentre outros. A escolha do nível de confiabilidade deverá considerar também as possíveis consequências do colapso, e o nível de esforço necessário para reduzir esse risco.

O método dos estados limites é considerado como semi-probabilístico, na medida em que os coeficientes de segurança parciais, que ponderam as ações, os esforços solicitantes e os parâmetros de resistência dos materiais, passaram por determinado tratamento estatístico, e, certas vezes, foram calibrados com análises probabilísticas.

Entretanto, conforme Melchers e Beck (2018), é necessária a realização de uma análise de confiabilidade para fornecer medidas da segurança das estruturas, levando em consideração as configurações de ruína possíveis e as incertezas relacionadas a estrutura. Neste aspecto, o termo confiabilidade estrutural pode ser definido como a medida probabilística de segurança, ou o grau de confiança, de determinado sistema ou estrutura em relação a um determinado desempenho esperado.

De acordo com Melchers e Beck (2018), o problema básico da confiabilidade estrutural é assegurar que a resistência (R) seja superior ao efeito do carregamento (S) ao longo da vida útil de um dado elemento ou sistema estrutural. Cada parâmetro é descrito por uma função de densidade de probabilidade conhecida, $f_R(r)$ e $f_S(s)$. Assim, a probabilidade de falha da estrutura pode ser escrita pela equação (27).

$$p_f = P(R - S \leq 0) = P[G(R, S) \leq 0] = \int_D \int f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (27)$$

onde $G(R - S)$ é denominada equação ou função de estado limite, $f_{R,S}(r, s)$ a função conjunta de densidade de probabilidades e D o domínio de falha.

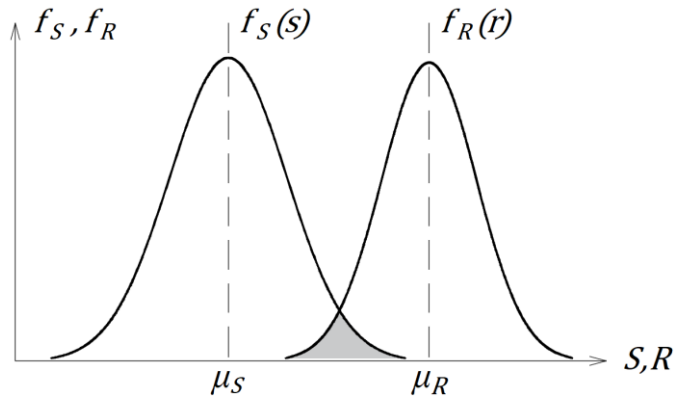
No caso em que R e S são independentes, a probabilidade de falha se resume a:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{S \geq r} f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (28)$$

em que F_R é a função de distribuição acumulada de R .

Seja o caso especial em que R e S são variáveis aleatórias normais e independentes, com médias μ_R e μ_S e variâncias σ_R^2 e σ_S^2 , respectivamente. A Figura 3-16 ilustra as funções de densidade de probabilidade marginais de solicitação e resistência, cuja sobreposição representa a região do domínio de falha. A função margem de segurança $Z = R - S$ possui, portanto, parâmetros de média e desvio padrão conforme equações (29) e (30).

Figura 3-16 – Funções densidade de probabilidade de solicitações (S) e resistências (R)



Fonte: Autor.

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \tag{29}$$

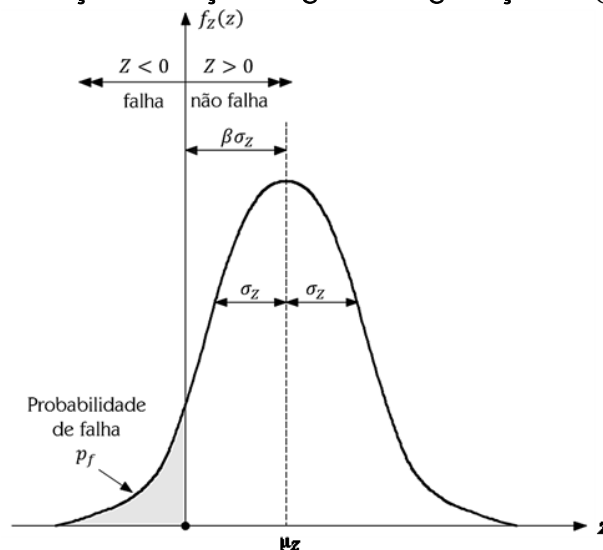
$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2} \tag{30}$$

Visto que Z possui distribuição normal, a partir de (27), (29) e (30) encontra-se uma medida da probabilidade de falha, apresentada na equação (31), onde $\Phi[]$ é a função de distribuição normal padrão, e β é o índice de confiabilidade de Cornell (1969), cuja representação gráfica é o valor absoluto da ordenada em $Z = 0$ no gráfico de probabilidades normal padrão, conforme

Figura 3-17. Para esta situação, o índice de confiabilidade é calculado pela equação (32).

$$p_f = P[Z \leq 0] = \Phi \left[\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \right] = \Phi(-\beta) \tag{31}$$

Figura 3-17 – Distribuição da função margem de segurança $Z = (R - S)$



Fonte: Adaptado de Melchers & Beck (2018).

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \quad (32)$$

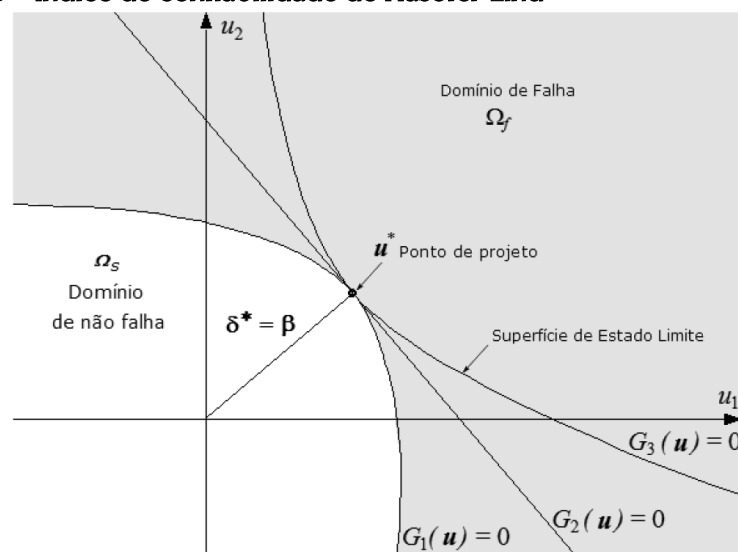
A partir da definição do índice de confiabilidade β de Cornell (1969), Hasofer e Lind (1974) propuseram utilizar um espaço de funções normais Gaussianas, com média nula e desvio padrão unitário, $N(0,1)$, para obter uma forma invariante do índice β , independente da representação no espaço físico. Este espaço é denominado “espaço reduzido” ou “espaço normal padrão”.

O índice de confiabilidade é corretamente definido como a menor distância (δ^*) da origem à $G(u_i) = G(T(x_i)) = 0$, onde G é a superfície de ruína, x o espaço físico e u o espaço normal padrão. Uma vez que a função de estado limite é, em geral, não linear, o ponto de projeto não é conhecido previamente, e precisa ser determinado pela solução do problema de otimização da equação (33).

$$\beta = \min_{u \in (G(u) = 0)} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad \text{com } G(u_i) \leq 0 \quad (33)$$

O ponto de ruína mais provável, definido com o retorno das coordenadas ótimas no espaço normal padrão u para o espaço físico x , é chamado de ponto de projeto. Portanto, o índice de confiabilidade β é uma medida geométrica da probabilidade de falha, que corresponde à mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão, conforme representado na Figura 3-18.

Figura 3-18 – Índice de confiabilidade de Hasofer-Lind



Fonte: Adaptado de Coelho (2011).

3.5.3 Problema Fundamental da Confiabilidade Generalizado

Para muitas aplicações de engenharia, uma formulação simples do tipo $R - S$ não é completamente adequada, visto que pode não ser viável reduzir o problema a variáveis aleatórias independentes de resistência e solicitação. De modo geral, R é uma função das propriedades dos materiais e dimensões do elemento ou estrutura, enquanto S é uma função dos carregamentos aplicados, densidades dos materiais e dimensões da estrutura, em que cada propriedade pode ser uma variável aleatória (MELCHERS & BECK, 2018).

Ademais, R e S podem não ser independentes, quando, por exemplo, um dos carregamentos se opõe à falha ou uma mesma dimensão afeta tanto R quanto S . A formulação supracitada também não é válida caso haja mais de uma resultante de tensões agindo em uma seção, ou mais de um fator a contribuir para a resistência da estrutura. A partir das variáveis básicas de projeto, contudo, é possível apresentar uma versão generalizada da equação de estado limite (MELCHERS & BECK, 2018).

Seja \mathbf{X} o vetor que representa todas as variáveis aleatórias relevantes do problema, a função de estado limite pode ser representada por $G(\mathbf{X}) = G(X_1, X_2, \dots, X_n)$, em que $G(\cdot)$ expressa a relação entre o estado limite e as variáveis básicas. A equação de estado limite $G(\mathbf{X}) = 0$, por conseguinte, define o limiar entre o domínio satisfatório, $G > 0$, e o domínio de falha, $G < 0$, no espaço “n-dimensional” das variáveis básicas. Desta forma, a generalização da eq. (28) resulta em:

$$p_f = p[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int \dots \int_{G[\mathbf{X}] \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (34)$$

em que $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ é a função conjunta de densidade de probabilidades para o vetor “n-dimensional” \mathbf{X} . A resistência R e a solicitação S não aparecem mais na formulação, estando implícitas em \mathbf{X} .

A região de integração $G[\mathbf{X}] \leq 0$ representa o “hiperespaço” em que ocorre a violação do estado limite. Com o aumento da complexidade do termo integrando $f_{\mathbf{X}}(\cdot)$ e do domínio de integração $G[\mathbf{X}] \leq 0$ da equação (34), torna-se impraticável a solução analítica do problema. Dentre as alternativas de solução na literatura estão os de métodos de transformação aproximados, como o FORM e o SORM, e a abordagem por simulação numérica de Monte Carlo (MELCHERS & BECK, 2018), conforme apresentado a seguir.

3.5.4 Métodos de Transformação

O objetivo dos métodos de transformação é aproximar a função conjunta de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ com base na informação existente, que em geral se limita as funções de distribuição marginais e, em alguns casos, a coeficientes de correlação entre pares de variáveis aleatórias. Estão baseados em um mapeamento do vetor de variáveis aleatórias do problema, \mathbf{X} , com qualquer distribuição conjunta de probabilidades, em um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{Y} , com distribuição normal padrão (MELCHERS & BECK, 2018). Este processo de transformação é feito por meio da equação (35), de Hasofer e Lind (1974).

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (35)$$

O método de primeira ordem e segundo momento (FOSM – *First Order Second-Moment*), no qual se aproxima a equação de estado limite por um hiperplano no ponto de projeto, é caracterizado por utilizar apenas os dois primeiros momentos (média e desvio padrão) para construir a função conjunta de distribuição (RANGANATHAN, 1999).

O método de confiabilidade de primeira ordem (FORM – *First Order Reliability Method*) surgiu a partir de melhorias implementadas ao método FOSM, e permite obter soluções aproximadas com relativamente poucas avaliações da equação de estado limite. Ao contrário do FOSM, permite incorporar à análise as funções originais de distribuição de probabilidades, além da correlação das variáveis aleatórias do problema (MELCHERS & BECK, 2018). A transformação para o espaço normal padrão pode ser realizada pela transformação de Rosenblatt (1952) ou composta de Nataf (1962). O ponto de projeto para a equação de estado limite pode ser encontrado através de algoritmos de otimização, tal como o HLRF, desenvolvido por Hasofer & Lind (1974) e Rackwitz & Fiessler (1978).

Quanto ao método de confiabilidade de segunda ordem (SORM – *Second Order Reliability Method*), assemelha-se ao FORM em diversos aspectos, porém aproxima a equação de estado limite no ponto de projeto por uma função quadrática ou parabólica. Desta forma, podem fornecer aproximações melhores do que os métodos de primeira ordem para equações de estado limite não-linear (RANGANATHAN, 1999).

3.5.5 Método de Simulação de Monte Carlo

A simulação, segundo Ang & Tang (1984), é um procedimento teórico ou experimental que visa reproduzir o mundo real com base em suposições e modelos pré-concebidos. O método de simulação teórica pode ser aplicado numericamente para prever ou estudar a performance de um dado sistema. Em problemas descritos por variáveis aleatórias com distribuição de probabilidades conhecidas, pode-se recorrer a simulação de Monte Carlo.

As origens do método de Monte Carlo remontam ao ano de 1949, com a publicação do artigo “The Monte Carlo Method” pelos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam (ECKHARDT, 1987; COELHO, 2011). Este método, amplamente empregado não só na engenharia, mas em diversos outros campos, é de fácil compreensão e implementação computacional. É denominado de método exato, pois, em teoria, o resultado da simulação tende ao valor exato na medida em que o número de simulações tende ao infinito. A precisão dos resultados depende do número de simulações e da qualidade dos números aleatórios utilizados (ANG & TANG, 2006; MELCHERS & BECK, 2018).

De modo simplificado, o método de Monte Carlo é um procedimento numérico em que são feitos repetidos cálculos para um dado modelo matemático, e cada resultado numérico passa a ser considerado um ponto amostral da solução. As variáveis deste procedimento são aleatórias e seus valores são amostrados, a cada repetição, a partir das respectivas distribuições de probabilidade (ANG & TANG, 2006).

A fim de determinar a probabilidade de falha de um componente ou sistema estrutural sobre um domínio de falha D_f e uma função densidade de probabilidade conjunta $f_X(\mathbf{X})$, a equação (34) pode ser reescrita na seguinte integral multidimensional:

$$p_f = \int_{D_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (36)$$

O domínio de falha é definido através de uma equação de estado limite ou uma combinação de estados limites em série e/ou em paralelo. Seja $I[\mathbf{x}]$ uma função indicadora, que assume valor 1 quando ocorre falha e 0 em caso de sobrevivência, a integração em todo o domínio pode ser efetuada:

$$p_f = \int_{D_f} I[\mathbf{x}] \cdot f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong E[I[\mathbf{x}]] \quad (37)$$

A equação (37) representa, para uma amostra com tamanho infinito, o valor esperado da função indicadora $I[\mathbf{x}]$. Visto que, de fato, trabalha-se com amostras finitas de n_{si} pontos amostrais, ou n_{si} simulações, o valor esperado da probabilidade de falha é calculado pela equação (38).

$$p_f \cong \frac{1}{n_{si}} \sum_{i=1}^{n_{si}} I[\mathbf{x}_i] \quad (38)$$

Percebe-se que o cálculo da estimativa da probabilidade de falha, para uma amostra finita, se resume a dividir o número de simulações em que ocorreram falhas, denominado n_f , pelo número total de simulações, n_{si} , conforme equação (39).

$$p_f \cong \frac{n_f}{n_{si}} \quad (39)$$

A probabilidade de falha calculada desta forma é uma aproximação, a qual tende ao valor exato quando o número de simulações tender ao infinito. Por conseguinte, quanto maior o número de simulações realizadas, maior a precisão. Em vista da probabilidade de falha nos problemas de confiabilidade estrutural ser, de modo geral, baixa, costuma ser necessário um elevado número de simulações para se obter precisão adequada.

A fim de reduzir o tamanho das amostras, tem-se a possibilidade de empregar técnicas de amostragem por importância. Estas buscam evitar a simulação excessiva de pontos longe do domínio de falha, região de interesse. Os pontos de amostragem são deslocados para o domínio de falha com a função de amostragem $h_X(\mathbf{x})$ (MELCHERS E BECK, 2018):

$$p_f = \int_Z I[\mathbf{x}] \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (40)$$

O valor esperado dessa expressão pode ser estimado com base em uma amostra de tamanho n_{si} :

$$p_f \cong \frac{1}{n_{si}} \sum_{i=1}^{n_{si}} I[\mathbf{x}_i] \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{h_X(\mathbf{x}_i)} \quad (41)$$

3.5.6 Confiabilidade Alvo

Os requisitos necessários para garantir o desempenho de uma estrutura ou componente estrutural estão relacionados a um critério de aceitação do risco estrutural, representado por uma probabilidade de falha mínima requerida. Essa probabilidade de falha aceitável, para um período de referência especificado, é denominada de confiabilidade alvo (JCSS, 2001; CEB-FIP, 2010; MELCHERS & BECK, 2018).

A definição do índice alvo depende, além do período de referência, das possíveis consequências da falha e dos custos relativos para aumentar a segurança. Desta forma, o *Joint Committee on Structural Safety - JCSS* (2001) estabelece classes de consequências baseadas em uma relação (ρ) entre os custos totais (i.e., custos de construção somados aos de reconstrução ou recuperação devido à falha) pelos custos de construção.

- Classe 1: Risco a vida, em caso de falha, é pequeno ou negligenciável, assim como as consequências econômicas ($\rho < 2$);
- Classe 2: Risco a vida, em caso de falha, é médio, ou as consequências econômicas são consideráveis ($2 \leq \rho < 5$);
- Classe 3: Risco a vida, em caso de falha, é alto, ou as consequências econômicas são consideráveis ($5 \leq \rho < 10$).

Ainda de acordo com o JCSS (2001), deve-se estar ciente que as consequências dependem também do tipo de falha, que pode ser dúctil com reserva de capacidade resistente devido ao encruamento; dúctil sem reserva de capacidade resistente; ou frágil. Em vista disso, um elemento estrutural que poderia sofrer colapso repentino deve ser projetado com um nível de confiabilidade mais alto do que aquele em que o colapso é precedido por algum tipo de aviso. Para os estados limites últimos, recomenda os índices de confiabilidade alvo indicados na Tabela 3-3, considerando um período de referência de um ano.

O valor hachurado em cinza na tabela deve ser adotado nas situações mais comuns de projeto na engenharia, pois corresponde a riscos medianos de morte, caso ocorra falha, com consequências econômicas consideráveis. Exemplos típicos de estruturas que se enquadram nessa situação são edifícios residenciais, comerciais e industriais. Estruturas agrícolas, silos e postes correspondem a classes inferiores, enquanto pontes, hospitais e edifícios muito altos a classes mais elevadas.

Tabela 3-3 – Índices de confiabilidade alvo para ELU - JCSS

Custo relativo da medida de segurança	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Elevado	$\beta_T = 3,1$ ($P_f \approx 1.10^{-3}$)	$\beta_T = 3,3$ ($P_f \approx 5.10^{-4}$)	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 1.10^{-4}$)
Médio	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 1.10^{-4}$)	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 1.10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5.10^{-6}$)
Pequeno	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 1.10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5.10^{-6}$)	$\beta_T = 4,7$ ($P_f \approx 1.10^{-6}$)

Fonte: Adaptado de JCSS (2001).

De forma semelhante ao JCSS (2001), o CEB-FIP, no *Model Code* 2010, classificam-se as estruturas de acordo com a probabilidade de falha, e se estabelecem valores mínimos de índices de confiabilidade para os estados limites últimos em períodos de referência de 1 e 50 anos, conforme apresentado na Tabela 3-4.

Tabela 3-4 - Índices de confiabilidade alvo para ELU - *Model Code*

Consequência da falha	Baixa	Média	Elevada
Período de referência 50 anos	$\beta_T = 3,1$ ($P_f \approx 1.10^{-3}$)	$\beta_T = 3,8$ ($P_f \approx 7.10^{-5}$)	$\beta_T = 4,3$ ($P_f \approx 9.10^{-6}$)
Período de referência 1 ano	$\beta_T = 4,1$ ($P_f \approx 2.10^{-5}$)	$\beta_T = 4,7$ ($P_f \approx 1.10^{-6}$)	$\beta_T = 5,1$ ($P_f \approx 2.10^{-7}$)

Fonte: Adaptado de CEB-FIP (2010).

Os índices de confiabilidade alvo da tabela anterior são válidos para componentes estruturais dúcteis ou sistemas com redundâncias, os quais tendem a dar sinais antes da ocorrência do colapso. Para elementos ou sistemas estruturais em que a falha tende a ocorrer de forma repentina, o CEB-FIP (2010) recomenda que sejam utilizados índices de confiabilidade mais elevados do que os recomendados para os elementos dúcteis.

Nowak e Collins (2000) também afirmam que o valor ótimo do índice de confiabilidade alvo (β_T) deve ser determinado com base nas consequências da falha e do custo necessário para incremento da segurança. Em vista disso, Nowak e Szerszen (2003) estabeleceram índices de confiabilidade alvo para vigas, lajes e pilares, assumindo que os índices de confiabilidade dos componentes estruturais dimensionados pelo ACI-318

(1999) seriam aceitáveis. Concluíram que um β alvo de 3,5 é adequado para a maior parte dos elementos estruturais, com exceção dos pilares, cujo β alvo foi definido como 4,0. Cabe ressaltar que apenas pilares carregados axialmente foram avaliados por Nowak e Collins (2000), e, portanto, pilares submetidos à flexão composta podem ter um índice de confiabilidade alvo distinto.

Desta forma, nas análises de confiabilidade de pilares de concreto armado deste trabalho, a faixa de valores de referência para o índice β alvo será entre 4,2 e 4,3, sendo 4,0 o valor mínimo aceitável.

4 MODELOS MECÂNICOS DE RESISTÊNCIA E SOLICITAÇÃO

“A simplicidade é o mais alto grau de perfeição”

(Leonardo da Vinci)

Em análises de confiabilidade estruturais, para que os resultados representem satisfatoriamente a probabilidade de falha do sistema, é necessário utilizar um modelo mecânico que obtenha, com precisão adequada, a resposta da estrutura. A não-linearidade geométrica não foi simulada nos modelos mecânicos de solicitações, pois, de forma simplificada, considerou-se que os efeitos de “segunda ordem” seriam pequenos, em função da rigidez adotada para os pilares dos exemplos.

No presente trabalho, a primeira parte do modelo se refere à resistência mecânica última dos pilares. A validação do modelo é feita a partir de comparações entre ensaios experimentais existentes na literatura e a resposta obtida através do modelo. Esses resultados também permitem estimar o erro do modelo mecânico.

Em seguida, é definido o modelo mecânico de solicitações, o qual utiliza diagramas momento-curvatura para representar o comportamento não-linear físico (dos materiais). Por fim, é feito um exemplo de aplicação deste modelo em pórtico plano de concreto armado.

4.1 MODELO MECÂNICO PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO RESISTENTE DA SEÇÃO TRANSVERSAL

4.1.1 Contextualização

Em problemas de flexo-compressão, não há uma solução única para a capacidade resistente de uma dada seção transversal, pois existem infinitos pares de valores de esforços normais e momentos fletores que satisfazem as condições de equilíbrio. Cada par equivale a uma posição diferente da linha neutra, e representa uma resposta válida para a resistência do elemento estrutural (FUSCO, 1981).

Em contrapartida, caso seja conhecido o valor da solicitação normal, é possível determinar a posição da linha neutra e, por consequência, o momento último correspondente. Portanto, a resistência última de um pilar, submetido à flexo-compressão normal, pode ser definida como o momento fletor que causa a falha da seção transversal, para um dado esforço normal atuante.

Deste modo, o modelo mecânico desenvolvido calcula o momento resistente último de seções transversais retangulares de pilares de concreto armado, a partir de um esforço normal conhecido. A determinação da capacidade resistente é feita através de um procedimento computacional iterativo, conhecido como método da secante, na medida em que não é conhecida a priori a posição da linha neutra que equilibra os esforços da seção. O procedimento é descrito para uma seção transversal com duas camadas de armaduras simétricas, posicionadas em faces opostas. Porém pode ser extrapolado para “n” camadas de armaduras, basta equacionar o equilíbrio da seção para “n” reações.

Salienta-se que o modelo mecânico tem diferenças relevantes em relação ao de projeto, apresentado nas seções 3.1 e 3.2. Conceitualmente, enquanto em projeto se busca um dimensionamento com um nível de segurança adequado, adotando simplificações favoráveis à segurança, o modelo mecânico visa representar, da melhor forma possível e sem custos computacionais excessivos, a resistência mecânica efetiva dos pilares de concreto armado. Por conseguinte, não se utiliza nenhum dos coeficientes de segurança de dimensionamento. Também é desconsiderado o efeito Rüschi ao comparar o modelo com resultados experimentais, visto que estes são obtidos em ensaios de curta duração.

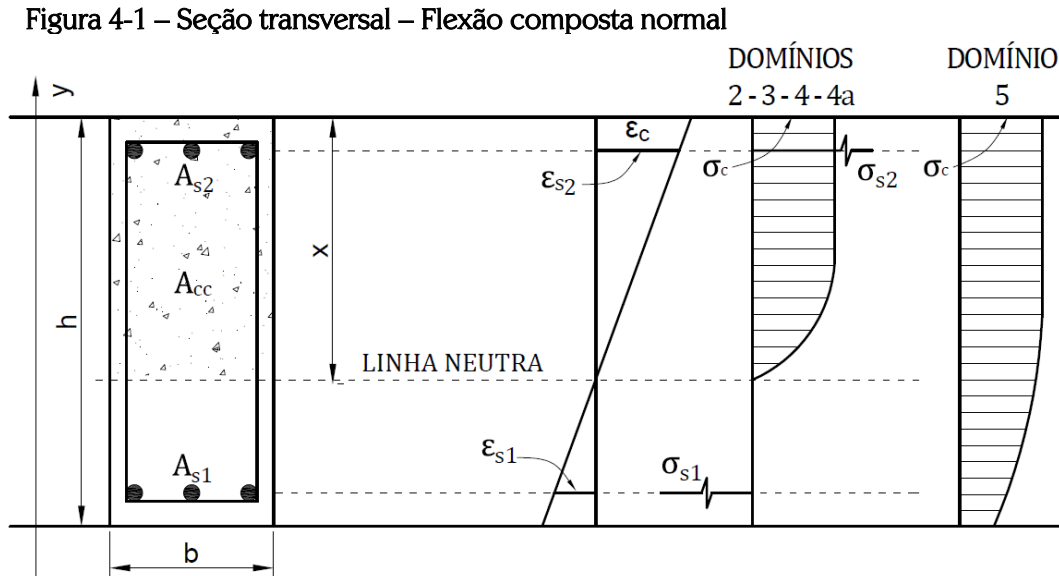
Dado que este modelo será utilizado em análises de confiabilidade, em relação ao Estado Limite Último de ruptura por flexo-compressão, o objetivo é representar apenas o momento de ruína, ou momento resistente, para um certo esforço normal. Essa alternativa é válida para o estudo de confiabilidade deste trabalho, uma vez que o esforço normal atuante é definido como uma variável aleatória, logo seu valor é conhecido a cada iteração de Monte Carlo.

Para a determinação da resposta em flexo-compressão normal das estruturas de concreto armado, é necessário definir condições iniciais, tais como a compatibilidade de deformações, as propriedades dos materiais e as equações de equilíbrio da seção. Em seguida, é possível a formulação de um modelo determinístico para obtenção do comportamento da estrutura em relação ao estado limite último.

4.1.2 Apresentação do Modelo Mecânico de Resistências de Seções à Flexo-Compressão

Seja uma seção transversal genérica de pilar, conforme apresentado na Figura 4-1, com resistência mecânica à compressão f_c , cuja armadura é simétrica, com área A_{si} , tensão de escoamento f_y e módulo de elasticidade E_s . A seção transversal possui largura b , altura h , a posição da linha neutra é representada por x , e a respectiva área de concreto

comprimido por A_{cc} . A Figura 4-1 também representa os diagramas de deformações específicas e de tensões de uma seção submetida à flexão composta normal, em que ϵ_{si} é a deformação específica da armadura, ϵ_c a deformação específica do concreto, σ_{si} a tensão nas armaduras e σ_c a tensão (de compressão) no concreto.



Fonte: Autor.

Neste caso, as condições de equilíbrio são dadas por:

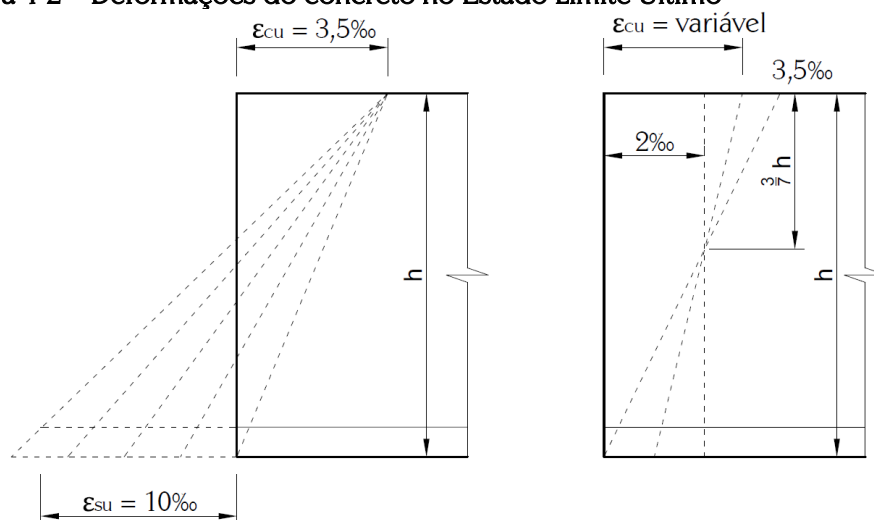
$$N_r = \int_{A_{cc}} \sigma_c \, dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \quad (42)$$

$$M_r = \int_{A_{cc}} \sigma_c \cdot y \, dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot y_{si} \quad (43)$$

O diagrama de tensões utilizado para o concreto à compressão foi o parábola-retângulo, conforme definições da NBR 6118 (2014), para concretos de classe até C50 ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$), que são os utilizados neste trabalho. Neste modelo, a ruína por ruptura do concreto comprimido ocorre quando este atinge uma deformação de compressão $\epsilon_{cu} = 3,5\%$, caso a linha neutra esteja dentro da seção. Se a seção estiver totalmente comprimida, o encurtamento último admissível para o concreto varia entre $2,0\% \leq \epsilon_{cu} \leq 3,5\%$ (Figura 4-2). Para o aço, admite-se a ruína por alongamento plástico excessivo para uma deformação $\epsilon_{su} = 10\%$, independente da deformação do concreto comprimido.

As condições de compatibilidade decorrem da manutenção da forma plana da seção transversal. Deste modo, dada a posição da linha neutra e a deformação específica de um ponto da seção, ficam definidas as deformações específicas dos demais pontos e, por conseguinte, as tensões respectivas, conforme apresentado na seção 3.1.2.

Figura 4-2 – Deformações do concreto no Estado Limite Último



Fonte: Autor.

Poderiam ser utilizadas outras relações constitutivas para o concreto submetido à compressão, desenvolvidas de forma empírica, tais como Hognestad (1951), Saenz (1964), Popovics (1970), Wang *et al.* (1978), Tsai (1988), Balan *et al.* (1997) e Kwon & Spacone (2002). Embora existam diversas expressões para a curva tensão-deformação, a maioria não representa o comportamento para todos os tipos de concreto e condições de teste (COELHO, 2011). Ademais, Carreira e Chu (1985) afirmam que definir uma relação tensão-deformação geral para o concreto é um problema complexo, pois depende não só das propriedades dos materiais, mas também das condições do teste, em especial da taxa de deformação.

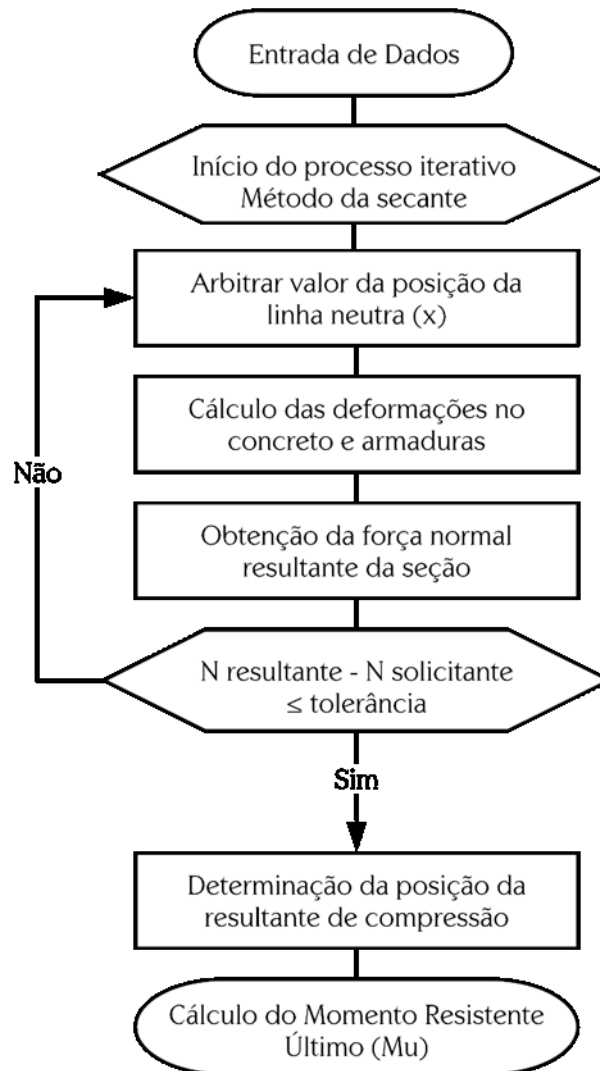
Em vista disto, no presente trabalho optou-se pelo modelo da NBR 6118 (2014), devido à sua simplicidade e por este fornecer bons resultados para o Estado Limite Último, em termos do valor da resultante de compressão e de sua posição (MOURA, 2019).

Desprezou-se a resistência à tração do concreto, considerando-se que a seção crítica estaria fissurada na região tracionada e, portanto, não contribuiria para a resistência, hipótese adequada quando se trata de Estado Limite Último (FUSCO, 1981).

Portanto, a solução do problema consiste em determinar, iterativamente, a posição da linha neutra que equilibre os esforços internos, calculados pelas equações (42) e (43),

utilizando as condições de compatibilidade para obter as tensões no concreto e no aço. Em seguida, calcula-se a posição da resultante de compressão do concreto, pelo momento estático de área do diagrama de tensões, e, por fim, o momento atuante na seção, que equivale ao momento resistente. Este procedimento foi sistematizado na Figura 4-3.

Figura 4-3 – Fluxograma do Cálculo do Momento Resistente



Fonte: Autor.

4.2 AVALIAÇÃO DO MODELO MECÂNICO DE RESISTÊNCIAS

A fim de avaliar a eficiência da rotina de cálculo do momento resistente, foram selecionados na literatura ensaios de pilares submetidos à flexo-compressão normal. A partir dos dados fornecidos nos estudos, utilizou-se o modelo mecânico para estimar o momento resistente dos pilares, representado por $M_{u,calc}$, comparando-os aos resultados experimentais para o momento resistente último, denominado de $M_{u,exp}$.

Limitaram-se os pilares avaliados àquelas cujas resistências à compressão simples estavam na faixa entre 25 MPa e 50 MPa, visto que a rotina foi desenvolvida com a formulação da NBR 6118 (2014) para as classes C25 à C50. Também se restringiu aos ensaios que forneceram o momento resistente último ($M_{u,exp}$) ou todos os dados necessários para o cálculo deste, tais como excentricidade inicial do ponto de aplicação da força, a força resistente última e o deslocamento máximo no momento da ruptura. Foram desconsiderados, ainda, ensaios em que os autores relataram terem ocorridos falhas para aferir este deslocamento máximo.

Foram selecionados 52 pilares retangulares de concreto armado, oriundos de 10 trabalhos, cujos dados são apresentados nas Tabelas 4-1 a 4-10. São 4 pilares de Kim & Yang (1995), conforme Tabela 4-1; 6 pilares de Claeson & Gylltoft (1998), Tabela 4-2; 6 pilares de Kim & Lee (2000), Tabela 4-3; 3 pilares de Lima Jr. (2003), Tabela 4-4; 4 pilares de Adorno (2004), Tabela 4-5; 5 pilares de Dantas (2006), Tabela 4-6; 18 pilares de Melo (2009), Tabela 4-7; 2 pilares de Nascimento et. al (2012), Tabela 4-8; 2 pilares de Ferreira (2014), Tabela 4-9; e 2 pilares de Santos (2017), Tabela 4-10. Nestas tabelas, tem-se que:

b: é a dimensão referente à base do pilar;

h: é a dimensão da altura do pilar;

λ : é o índice de esbeltez do pilar;

A_{si} , A_{ss} e A_{sc} : são, respectivamente, a área das armaduras superior, inferior e central;

f_y : tensão de escoamento do aço;

E_s : módulo de elasticidade do aço;

f_c : resistência à compressão do concreto;

N_r : força normal de ruptura do pilar;

e_0 : excentricidade inicial de aplicação da força, em relação ao eixo central do pilar;

Δh : deslocamento máximo em relação ao eixo central do pilar para a carga crítica;

$M_{u,exp}$: momento resistente último, determinado experimentalmente.

Tabela 4-1 – Dados dos pilares ensaiados por KIM & YANG (1995)

Pilar	b	h	λ	A_{si}	A_{ss}	f_y	E_s	f_c	N_r	e_0	Δh	$M_{u,exp}$
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
KY1	8,0	8,0	62,4	0,634	0,634	387,0	205000	25,5	63,7	2,40	1,49	2,48
KY2	8,0	8,0	62,4	0,634	0,634	387,0	205000	25,5	65,7	2,40	1,62	2,64
KY3	8,0	8,0	103,9	0,634	0,634	387,0	205000	25,5	38,2	2,40	2,98	2,06
KY4	8,0	8,0	103,9	0,634	0,634	387,0	205000	25,5	37,2	2,40	3,27	2,11

Tabela 4-2 – Dados dos pilares ensaiados por CLAESON & GYLLTOFT (1998)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	Asc	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
C5	12,0	12,0	69,3	2,240	2,240	2,240	684,0	207000	43,0	320,0	2,00	2,60	14,72
C6	12,0	12,0	69,3	2,240	2,240	2,240	684,0	207000	43,0	280,0	2,00	2,40	12,32
C7	20,0	20,0	52,0	3,980	3,980	3,980	636,0	207000	33,0	990,0	2,00	2,20	41,58
C8	20,0	20,0	52,0	3,980	3,980	3,980	636,0	207000	33,0	990,0	2,00	2,10	40,59
C9	20,0	20,0	69,3	3,980	3,980	3,980	636,0	207000	37,0	900,0	2,00	4,00	54,00
C10	20,0	20,0	69,3	3,980	3,980	3,980	636,0	207000	37,0	920,0	2,00	3,60	51,52

Tabela 4-3 – Dados dos pilares ensaiados por KIM & LEE (2000)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
KL11	10,0	10,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	119,0	4,00	1,60	6,66
KL12	10,0	10,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	126,0	4,00	1,81	7,32
KL13	10,0	20,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	204,0	4,00	1,56	11,34
KL14	10,0	20,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	206,0	4,00	1,73	11,80
KL15	10,0	20,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	418,0	4,00	0,48	18,73
KL16	10,0	20,0	34,6	1,425	1,425	595,0	190000	27,0	443,0	4,00	0,40	19,49

Tabela 4-4 – Dados dos pilares ensaiados por LIMA Jr (2003)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
L17	15,0	15,0	32,3	2,384	2,384	597,5	197750	39,2	823,0	1,04	0,79	15,09
L18	15,0	15,0	32,3	2,384	2,384	597,5	197750	39,2	653,0	2,00	1,05	19,89
L19	15,0	15,0	32,3	2,384	2,384	597,5	197750	39,2	500,0	3,05	1,22	21,33

Tabela 4-5 – Dados dos pilares ensaiados por ADORNO (2004)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
A20	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	540,0	210000	38,8	553,0	1,50	2,00	19,37
A21	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	540,0	210000	40,2	566,0	1,50	1,58	17,45
A22	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	540,0	210000	40,5	291,0	3,00	1,80	13,98
A23	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	540,0	210000	41,3	298,0	3,00	1,72	14,05

Tabela 4-6 – Dados dos pilares ensaiados por DANTAS (2006)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
D24	25,0	12,0	40,4	1,571	1,571	540,0	210000	36,0	447,0	1,50	2,30	16,99
D25	25,0	12,0	40,4	1,571	1,571	540,0	210000	34,0	255,0	3,00	2,90	15,05
D26	25,0	12,0	40,4	1,571	1,571	540,0	210000	34,0	170,0	4,00	3,90	13,43
D27	25,0	12,0	40,4	1,571	1,571	540,0	210000	38,0	155,0	5,00	5,50	16,28
D28	25,0	12,0	40,4	1,571	1,571	540,0	210000	38,0	131,0	6,00	7,60	17,82

Tabela 4-7 – Dados dos pilares ensaiados por MELO (2009)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
M29	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	38,5	662,0	1,68	1,53	21,24
M30	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	45,8	456,0	2,52	1,45	18,09
M31	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	37,2	317,0	3,16	1,92	16,09
M32	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	37,2	294,0	4,22	2,82	20,70
M33	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	37,2	232,0	5,33	3,17	19,72
M34	25,0	12,0	57,7	2,356	2,356	595,0	190000	38,5	198,4	6,35	3,37	19,29
M35	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	43,1	670,4	1,70	1,50	21,39
M36	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	41,6	360,8	2,53	1,55	14,72
M37	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	45,8	336,0	3,14	2,02	17,34
M38	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	41,6	248,0	4,10	2,84	17,21
M39	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	41,6	201,2	5,00	4,36	18,83
M40	25,0	12,0	72,2	2,356	2,356	595,0	190000	43,1	164,8	6,44	3,97	17,15
M41	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	35,8	1053,0	0,31	0,64	9,95
M42	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	39,6	652,0	0,60	2,16	17,94
M43	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	39,6	535,0	1,39	1,94	17,79
M44	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	39,7	460,5	2,15	1,61	17,30
M45	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	37,6	155,0	5,39	4,16	14,80
M46	25,0	12,0	86,6	2,356	2,356	595,0	190000	37,6	131,0	6,70	2,83	12,48

Tabela 4-8 – Dados dos pilares ensaiados por NASCIMENTO et. al (2012)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
N47	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	612,0	252900	42,3	140,0	6,00	2,56	11,98
N48	25,0	15,5	45,1	1,571	1,571	612,0	252900	42,3	450,0	4,25	1,77	27,09

Tabela 4-9 – Dados dos pilares ensaiados por FERREIRA (2014)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
F49	25,0	12,0	58,3	1,571	1,571	584,0	210000	41,9	126,7	6,00	3,42	11,94
F50	25,0	15,5	45,1	1,571	1,571	584,0	210000	41,3	542,2	4,25	1,92	33,45

Tabela 4-10 – Dados dos pilares ensaiados por SANTOS et. al (2017)

Pilar	b	h	λ	Asi	Ass	fy	Es	fc	Nr	e0	Δh	Mu,exp
	cm	cm		cm ²	cm ²	MPa	MPa	MPa	kN	cm	cm	kN.m
S51	25,0	12,0	43,9	2,356	2,356	596,0	198000	33,0	254,2	3,00	1,33	15,39
S52	25,0	12,0	43,9	2,356	2,356	596,0	198000	33,0	141,0	6,00	4,39	14,84

Fonte: Autor e referências indicadas.

Os ensaios utilizaram um sistema de aplicação de cargas e de vinculação que simula pilares birrotulados, com momentos constantes ao longo do comprimento, e excentricidades iniciais iguais em seus extremos na direção de menor inércia da seção transversal. Os pilares foram instrumentados para medir deslocamentos verticais,

horizontais e rotações em diversos pontos. Quanto ao sistema de aplicação de cargas, nos ensaios de Kim e Yang (1995), Claeson e Gylltoft (1998), Kim e Lee (2000) e Lima Jr (2000), aplicaram-se incrementos constantes de deslocamentos verticais até a ruína, de modo que o ponto final do ensaio não representava a carga crítica. Nestes casos, o Momento Último foi considerado como o do maior esforço normal, e seu respectivo deslocamento. Nos demais estudos, foram aplicados incrementos graduais e constantes de carga até a ruína, logo o ponto final do ensaio corresponde ao carregamento crítico.

A partir da rotina de cálculo desenvolvida, calcularam-se os momentos resistentes dos pilares ($M_{u,calc}$), comparados aos respectivos resultados experimentais na Tabela 4-11. A razão entre o momento último experimental e o calculado pelo modelo é representada pela letra grega η . Quanto mais eficiente o modelo, mais próximos de 1,0 são os valores de η , devendo seguir uma distribuição normal com baixo coeficiente de variação.

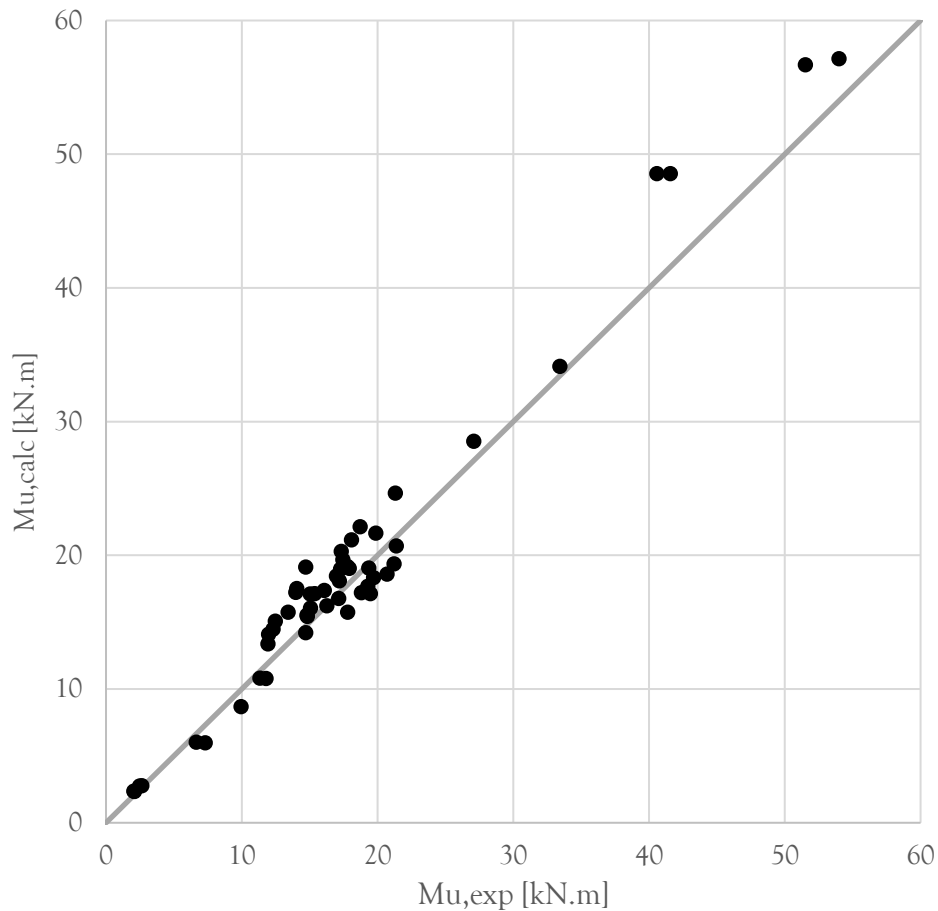
Tabela 4-11 – Resultados de resistências dos pilares

Pilar	$M_{u,exp}$	$M_{u,calc}$	$\frac{M_{u,exp}}{M_{u,calc}}$	Pilar	$M_{u,exp}$	$M_{u,calc}$	$\frac{M_{u,exp}}{M_{u,calc}}$	Pilar	$M_{u,exp}$	$M_{u,calc}$	$\frac{M_{u,exp}}{M_{u,calc}}$
	[kN.m]	[kN.m]			[kN.m]	[kN.m]			[kN.m]	[kN.m]	
KY1	2,48	2,75	0,90	L18	19,89	21,66	0,92	M35	21,39	20,70	1,03
KY2	2,64	2,77	0,95	L19	21,33	24,66	0,86	M36	14,72	19,13	0,77
KY3	2,06	2,36	0,87	A20	19,37	19,06	1,02	M37	17,34	20,30	0,85
KY4	2,11	2,34	0,90	A21	17,45	19,67	0,89	M38	17,21	18,09	0,95
C5	14,72	14,22	1,04	A22	13,98	17,24	0,81	M39	18,83	17,21	1,09
C6	12,32	14,49	0,85	A23	14,05	17,53	0,80	M40	17,15	16,77	1,02
C7	41,58	48,56	0,86	D24	16,99	18,45	0,92	M41	9,95	8,69	1,15
C8	40,59	48,56	0,84	D25	15,05	17,12	0,88	M42	17,94	19,04	0,94
C9	54,00	57,15	0,94	D26	13,43	15,76	0,85	M43	17,79	19,17	0,93
C10	51,52	56,70	0,91	D27	16,28	16,24	1,00	M44	17,30	18,99	0,91
KL11	6,66	6,04	1,10	D28	17,82	15,76	1,13	M45	14,80	15,54	0,95
KL12	7,32	5,99	1,22	M29	21,24	19,37	1,10	M46	12,48	15,08	0,83
KL13	11,34	10,82	1,05	M30	18,09	21,15	0,86	N47	11,98	14,10	0,85
KL14	11,80	10,81	1,09	M31	16,09	17,39	0,93	N48	27,09	28,53	0,95
KL15	18,73	22,15	0,85	M32	20,70	18,59	1,11	F49	11,94	13,37	0,89
KL16	19,49	17,13	1,14	M33	19,72	18,33	1,08	F50	33,45	34,14	0,98
L17	15,09	16,05	0,94	M34	19,29	17,70	1,09	S51	15,39	17,13	0,90

Fonte: Autor e referências indicadas.

Os resultados também foram plotados no gráfico da Figura 4-4, no qual se pode notar certa simetria em torno da linha média, com pontos tanto acima quanto abaixo desta, o que é um indicativo de ausência de tendenciosidade no modelo.

Figura 4-4 – Momentos últimos experimentais e de cálculo (estimados)



Fonte: Autor.

O valor médio da razão η , entre o momento resistente de experimental e o calculado pela rotina, foi de 0,955, com um desvio padrão de 0,106 e um coeficiente de variação de 11,1%. A diferença de 4,5% entre os valores experimentais e os calculados é pequena, o que indica que o modelo mecânico desenvolvido apresenta bons resultados. Ademais, essa diferença pode ser explicada, em parte, por dificuldades relatadas em alguns estudos para aferir a excentricidade dos pilares quando estes estão próximos da ruptura, o que tende a subestimar o valor do momento resistente último experimental.

Cabe destacar que os ensaios focam, em geral, na determinação da carga axial de ruína do pilar, por ser de mais fácil aferição em laboratório do que o momento resistente último, o qual depende das excentricidades iniciais e deslocamentos horizontais no instante da falha.

A fim de avaliar estatisticamente a qualidade do ajuste do modelo aos resultados experimentais, pode-se submeter os valores obtidos para a razão η a um teste de aderência à distribuição normal de probabilidades. Três dos testes mais utilizados são o

chi-quadrado, o de Kolmogorov-Smirnov e o de Anderson-Darling. Neste trabalho, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S), cuja premissa básica é verificar a máxima discrepância entre a frequência cumulativa da amostra com a função de probabilidade acumulada (FDA) do modelo teórico (ANG & TANG, 2007).

Para a amostra da Tabela 4-11, com $n = 52$, aplicando-se o teste K-S obtém-se que a máxima distância entre função de frequência cumulativa experimental e a FDA teórica foi de 0,125. Uma vez que o limite estabelecido para o teste, considerando um nível de significância de 95%, é de 0,189, tem-se que a hipótese de normalidade é aceitável.

4.3 ESTIMATIVA DO ERRO DO MODELO MECÂNICO (θ_r)

Conforme explicado anteriormente, o modelo mecânico será utilizado para o cálculo dos momentos resistentes nas análises probabilísticas. Entretanto, a imprecisão desta rotina de cálculo, conforme demonstrado na seção 4.2, não pode ser desconsiderada na avaliação da confiabilidade.

Portanto, além das variabilidades inerentes aos materiais e aos carregamentos da estrutura, as incertezas dos modelos numéricos também devem ser consideradas na análise. A estimativa do erro de modelo seguiu as recomendações apresentadas por Mirza & Skrabek (1991), Magalhães (2014) e Moura (2019), e utilizou os resultados da análise comparativa entre o modelo mecânico e dados experimentais apresentados em 4.2.

Contudo, não é razoável supor que toda a variabilidade verificada entre os resultados experimentais e os obtidos pelo modelo mecânico sejam advindas de erros de modelo. Variabilidades em relação às dimensões, resistências dos materiais e inerentes ao processo experimental de ensaio também possuem influência. Essa relação entre os resultados pode ser expressa pela equação (44), proposta por Mirza & Skrabek (1991).

$$V_{\eta} = V_{modelo}^2 + V_{lote}^2 + V_{ensaio}^2 \quad (44)$$

Na qual:

V_{η} é o coeficiente de variação da razão η ;

V_{modelo} é o coeficiente de variação do erro proporcionado pelo modelo;

V_{lote} é o coeficiente de variação dos resultados dos ensaios de laboratório das variáveis do sistema, tais como dimensões e resistências;

V_{ensaio} é o coeficiente de variação devido aos processos de ensaio.

O coeficiente de variação do erro do modelo mecânico pode ser determinado pela equação (45).

$$V_{modelo} = \sqrt{V_{\eta}^2 - V_{lote}^2 - V_{ensaio}^2} \quad (45)$$

O coeficiente de variação da razão η foi determinado através dos 52 resultados experimentais ($V_{\eta} = 0,111$).

O coeficiente de variação de ensaio, conforme definido por Magalhães (2014), deve ser menor ou igual a 0,04 e depende da excentricidade relativa (e/h). Como este valor varia entre cada ensaio, porém boa parte deles possui excentricidade elevada, neste trabalho adotou-se o valor de 0,04.

O coeficiente de variação do lote foi adotado, conforme Magalhães (2014), como 0,044.

Desta forma, através da equação (45), encontra-se que $V_{modelo} = 0,0938$.

Quanto à média do erro de modelo, esta tende a ser próxima a 1,0 e pode ser determinada pela equação (46).

$$\mu_{\eta} = \mu_{modelo} \cdot \mu_{lote} \cdot \mu_{ensaio} \quad (46)$$

Considerando-se a média do lote e a do ensaio unitárias, chega-se à média do modelo:

$$\mu_{modelo} = \frac{\mu_{\eta}}{\mu_{lote} \cdot \mu_{ensaio}} = 0,955 \quad (47)$$

A partir destes parâmetros, o erro de modelo, representado por θ_R , será considerado como uma variável aleatória nas análises de confiabilidade, e irá corrigir o valor do momento resistente do pilar obtido pelo modelo numérico, de acordo com a equação

$$M_{u,corr} = \theta_R \cdot M_{u,mod} \quad (48)$$

4.4 MODELO MECÂNICO ASSOCIADO À OBTENÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

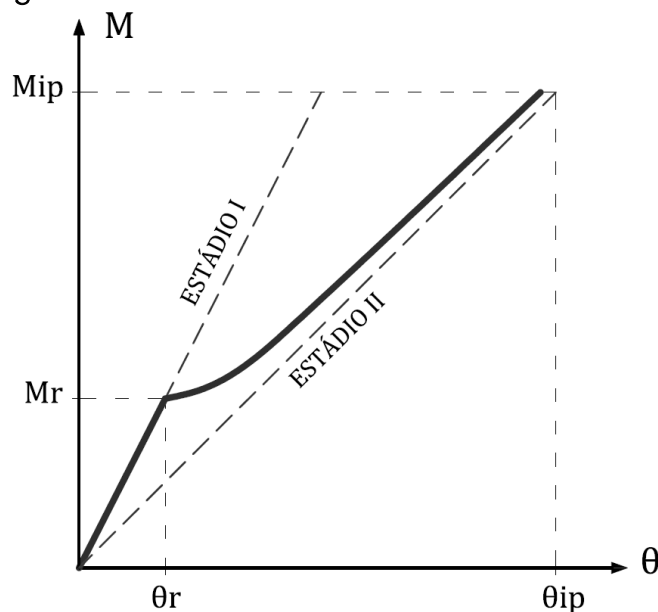
4.4.1 Contextualização

Da mesma forma que apresentado na seção 4.1 para as resistências, a fim de que as análises de confiabilidade de estruturas tenham significância, é necessário que o modelo mecânico que represente também, com precisão adequada, as solicitações atuantes. Quanto às estruturas de concreto armado, deve-se levar em consideração que o comportamento conjunto dos materiais é significativamente não linear, o que é denominado por não linearidade física.

Esse comportamento é diretamente influenciado pela fissuração das peças submetidas à flexão, que se inicia quando as tensões no concreto superam o valor da resistência à tração. Devido ao seu caráter discreto, entre fissuras consecutivas existe uma parcela de concreto ainda íntegro que contribui com a resistência à tração, devido às tensões de aderência com a armadura. Esse acréscimo de resistência produz um “enrijecimento” da estrutura, conhecido como “*tension stiffening*”.

O “*tension stiffening*” faz com que a relação momento-curvatura para seções de concreto, submetidas à flexão, fique entre dois limites, correspondentes a seção não fissurada (Estádio I) e a seção totalmente fissurada (Estádio II), conforme Figura 4-5.

Figura 4-5 – Diagrama momento fletor - curvatura



Fonte: Autor.

O enrijecimento influencia o comportamento das deformações das estruturas de concreto armado, especialmente em condições de serviço. Portanto, para analisar os deslocamentos, afetados diretamente pela rigidez dos elementos estruturais, é necessário empregar metodologias que modelem de forma precisa essa não linearidade física.

Quanto aos esforços atuantes em estruturas hiperestáticas, por serem proporcionais à rigidez relativa entre os elementos, não são tão sensíveis a variações na rigidez quanto os deslocamentos, pois a rigidez altera-se em todos os elementos da estrutura, na proporção dos respectivos carregamentos. Logo, mesmo teorias mais simplificadas podem ser adequadas para representar o comportamento não linear das estruturas de concreto armado, principalmente em regiões próximas à falha, pois em tais situações o comportamento das seções converge para o Estádio II (PEREIRA, 2009).

No presente trabalho, a fim de representar o comportamento não linear do concreto armado, fez-se o uso de diagramas momento-curvatura, os quais fornecem a inércia da seção transversal de acordo com os esforços internos a que está submetida.

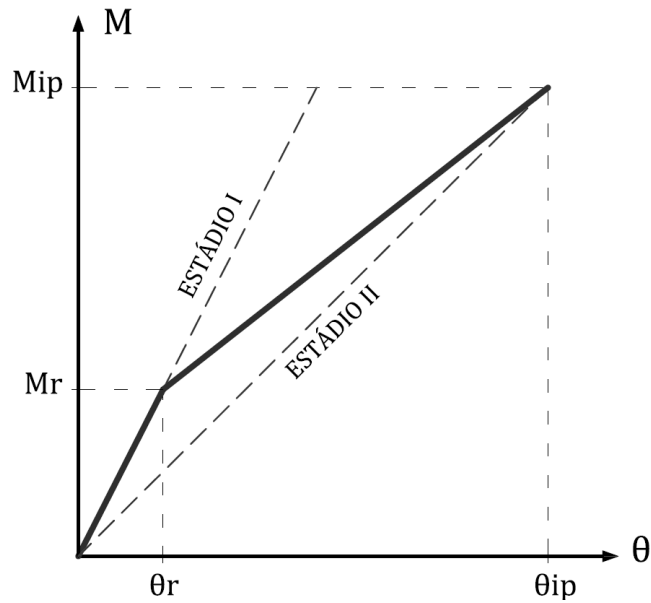
Conforme evidenciado no capítulo de revisão de literatura, em outra linha de análises não lineares utilizam-se diretamente os diagramas tensão-deformação dos materiais. O uso de diagramas momento-curvatura é uma alternativa à integração das tensões normais da seção transversal que, além de facilitar a programação, também proporciona uma melhor compreensão do comportamento da estrutura. Esses diagramas fornecem um ponto de apoio intermediário entre os parâmetros iniciais e os resultados da análise não-linear, de modo que ajudam em sua validação.

Nas próximas seções, serão descritos os procedimentos para determinar diagramas momento-curvatura para seções transversais com esforços de flexão simples e flexão composta reta, utilizando valores característicos, hipóteses de serviço e de estado limite último. Destaca-se, contudo, que na análise de confiabilidade várias dessas variáveis serão tratadas como aleatórias, tais como as resistências do concreto e da armadura.

4.4.2 Diagrama Momento-Curvatura – Flexão Simples

Para seções de concreto armado sujeitas a esforços de flexão simples, uma das possibilidades é o diagrama momento-curvatura bilinear (Figura 4-6). Este é definido por dois seguimentos de reta a partir dos valores de momentos de fissuração, de início de plastificação e das curvaturas correspondentes. Dessa forma, leva-se em consideração o efeito do “*tension stiffening*” de modo aproximado.

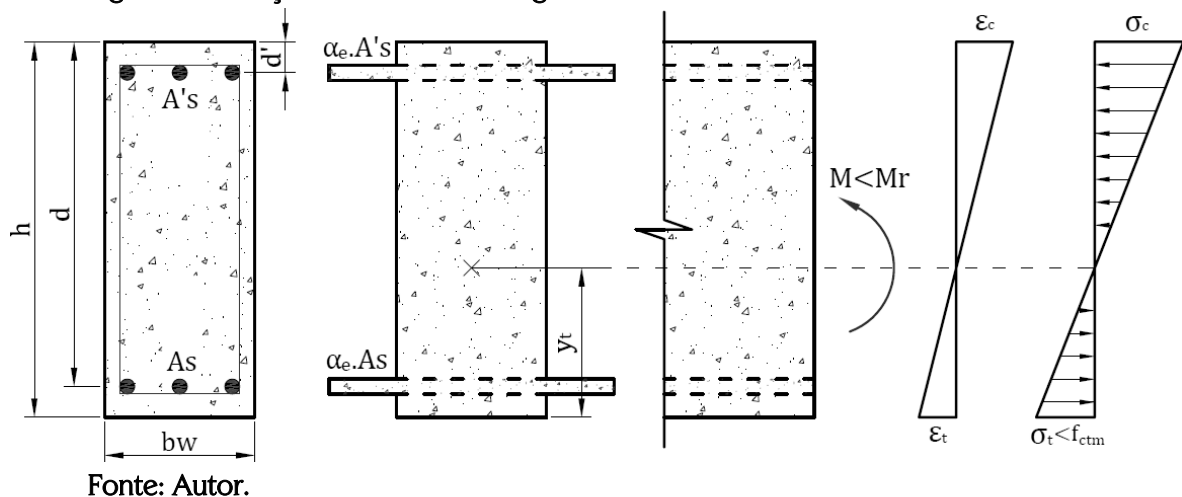
Figura 4-6 – Diagrama momento fletor - curvatura bilinear



Fonte: Autor.

Para esforços iguais ou inferiores ao momento de fissuração (M_r), a seção transversal trabalha no estágio I, em que o concreto resiste a tensões tanto de compressão quanto de tração, o que configura uma relação linear de tensões e deformações. A rigidez proporcionada pela armadura pode ser considerada como uma área equivalente de concreto, procedimento denominado homogeneização da seção transversal (Figura 4-7).

Figura 4-7 – Seção transversal homogeneizada no estágio I



Fonte: Autor.

O momento de fissuração é calculado pela formulação da NBR 6118 (2014), porém considerando-se a seção homogeneizada, conforme apresentado a seguir.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ctm} \cdot I_I}{y_t} \quad (49)$$

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - y_t\right)^2 + (\alpha_e - 1)[A_s(y_t - h + d)^2 + A'_s(h - y_t - d')] \quad (50)$$

$$y_t = \frac{S_t}{b \cdot h + (\alpha_e - 1) \cdot (A_s + A'_s)} \quad (51)$$

$$S_t = \frac{b \cdot h^2}{2} + (\alpha_e - 1) \cdot [A_s \cdot (h - d) + A'_s \cdot (h - d')] \quad (52)$$

Onde: α é um fator que correlaciona a resistência à tração na flexão e à tração direta, cujo valor é 1,2 para seções T ou duplo T e 1,5 para seções retangulares; $f_{ctm} = 0,3 \cdot fck^{2/3}$, é a resistência à tração média do concreto (em MPa); I_I é o momento de inércia no estágio I; $\alpha_e = E_s/E_c$ é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto; y_t é a distância do centro de gravidade da seção homogeneizada até a fibra mais comprimida; e S_t é o momento estático da seção em relação à fibra mais tracionada.

A curvatura (θ_r) que corresponde ao momento de fissuração no diagrama é definida por:

$$\theta_r = 1000 \cdot h \cdot \frac{M_r}{E_c \cdot I_I} \quad (53)$$

O módulo de elasticidade do concreto (E_c) é o valor secante definido pela NBR 6118 (2014) a partir da equação (54), em que E_{cs} é o módulo secante em MPa; E_{ci} é o módulo tangente inicial, com E_{ci} e fck dados em MPa; e α_E um coeficiente que varia conforme o tipo de agregado graúdo.

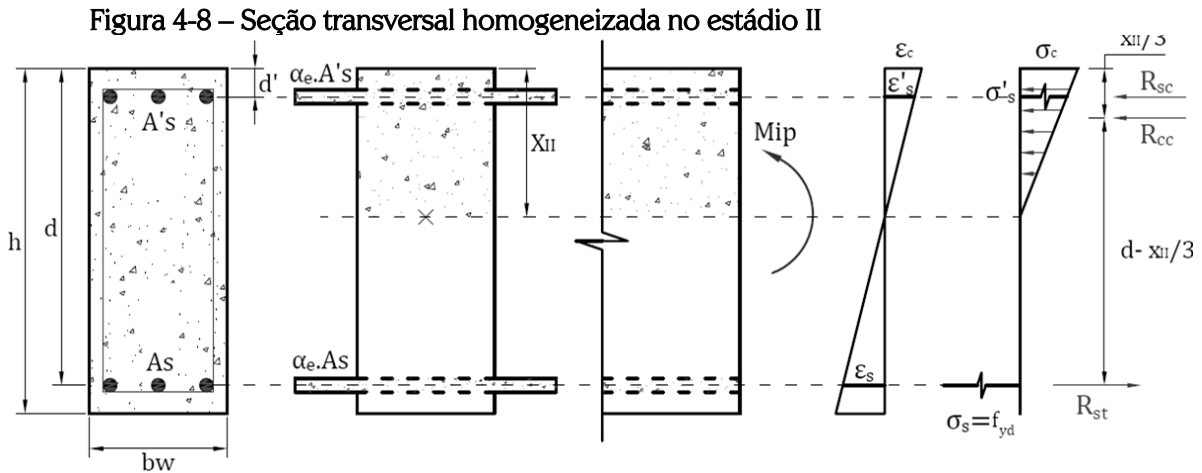
$$E_{cs} = \left(1 - \frac{fck}{80}\right) \cdot E_{ci} \quad (54)$$

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{fck} \quad (55)$$

Com relação ao momento de início de plastificação (M_{ip}), adotam-se hipóteses do estágio II puro:

- Distribuição de tensões triangular para o concreto comprimido;
- Os esforços de tração são resistidos apenas pela armadura da região tracionada, desprezando-se, portanto, a resistência à tração do concreto.

Considera-se como início de plastificação o ponto em que o aço atinge a tensão de escoamento. O momento correspondente é obtido por meio das equações de equilíbrio da seção transversal (Figura 4-8).



Fonte: Autor.

As suposições feitas são adequadas para seções nos domínios II e III, nos quais a armadura atinge o patamar de escoamento; não são válidas, portanto, para seções superarmadas (domínio IV), cujo estado limite último corresponde a deformações excessivas no concreto sem que o aço entre em escoamento.

O somatório dos momentos na posição da resultante de compressão fornece:

$$M_{ip} = R_{st} \cdot (d - x_{II}/3) + R_{sc} \cdot (x_{II}/3 - d')$$

$$M_{ip} = A_s \cdot f_y \cdot (d - x_{II}/3) + A'_s \cdot \sigma'_s \cdot (x_{II}/3 - d') \quad (56)$$

onde: R_{st} e R_{sc} são as forças resultantes nas armaduras inferiores e superiores, respectivamente; f_y é a resistência ao escoamento do aço; e x_{II} é a posição da linha neutra no estágio II. Do equilíbrio de forças na seção transversal obtém-se:

$$\frac{b \cdot x_{II}^2}{2} + A'_s \cdot \alpha_E (x_{II} - d') = A_s \cdot \alpha_E (d - x_{II}) \quad (57)$$

ou

$$x_{II} = \alpha_E \cdot \frac{(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_E} \left(\frac{b \cdot d}{A_s + A'_s} \right) \cdot \left(\frac{A_s + A'_s \cdot d'/d}{A_s + A'_s} \right)} \right] \quad (58)$$

O momento de inércia à flexão no estágio II é dado por:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} + A_s \cdot \alpha_E (d - x_{II})^2 + A'_s \cdot \alpha_E (x_{II} - d')^2 \quad (59)$$

A curvatura adimensional que corresponde ao momento de início de plastificação pode ser escrita por:

$$\theta_{ip} = 1000 \cdot h \cdot \frac{M_{ip}}{E_c \cdot I_{II}} \quad (60)$$

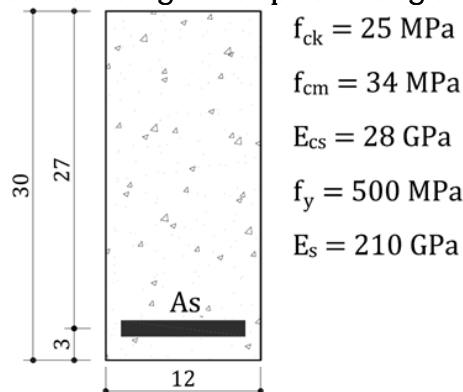
Após o início da plastificação, o momento resistente da seção praticamente não se altera até a ruptura, ocorrendo a formação de uma rótula plástica. Esta pode ser simulada por um trecho retilíneo ao final do diagrama momento-curvatura, que converge para o momento último da seção. Portanto, este momento de plastificação final determina o momento máximo que pode ser transmitido ao pilar.

Para o diagrama momento-curvatura de vigas, adotou-se, de forma simplificada, que a rótula plástica se formaria com o momento de início de plastificação, com hipóteses do estágio II. Destaca-se que foram feitos testes com modelos mais sofisticados para determinar o momento final de plastificação, adotando hipóteses do domínio III e o diagrama parábola-retângulo para as tensões de compressão do concreto, porém as diferenças encontradas foram pouco significativas.

4.4.2.1 Exemplos de diagramas momento-curvatura para vigas

São apresentados exemplos ilustrativos de diagramas bilineares variando-se a taxa de armadura (Tabela 4-12) da seção transversal, representada na Figura 4-9, na qual as dimensões foram representadas em centímetros. Para a resistência do concreto e da armadura são utilizados valores médios, a fim de que os diagramas obtidos fossem mais semelhantes aos utilizados nas análises de confiabilidade. Para as demais variáveis, empregou-se valores característicos. Sobre a parte final do diagrama, considerou-se que há a formação de rótulas plásticas quando o momento da seção atinge o momento de início de plastificação, conforme detalhado na seção 3.4.

Figura 4-9 – Seção transversal da viga- exemplos de diagrama momento-curvatura



Fonte: Autor.

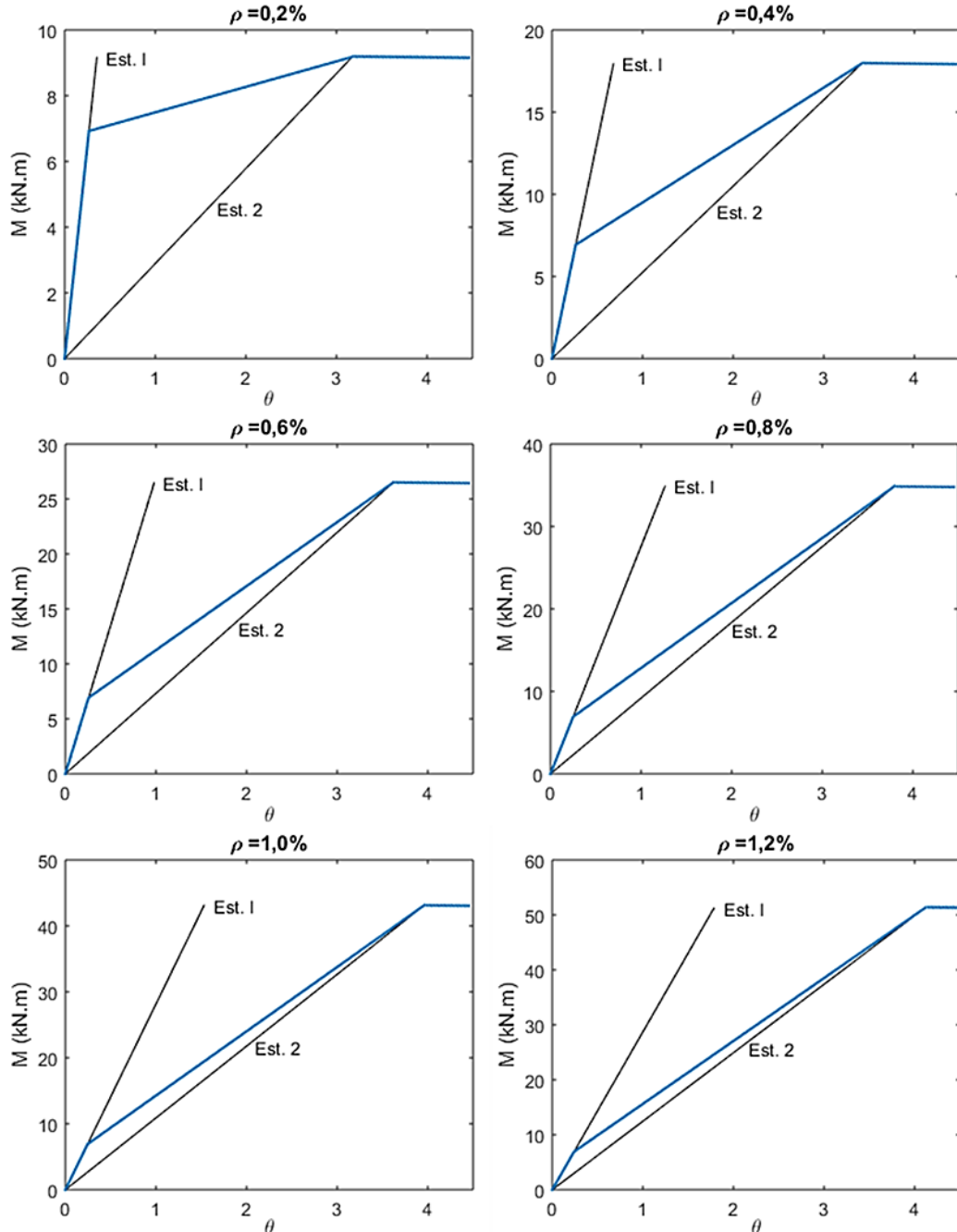
Tabela 4-12 – Variações da taxa de armadura

ρ	0,20%	0,40%	0,60%	0,80%	1,00%	1,20%
As (cm ²)	0,72	1,44	2,16	2,88	3,60	4,32

Fonte: Autor.

Os diagramas momento-curvatura são apresentados na Figura 4-10. Nota-se, quanto maior a taxa de armadura, maior é a proximidade do diagrama com a reta do Estádio II e, portanto, menor é a contribuição da resistência à tração do concreto entre fissuras.

Figura 4-10 – Diagramas momento curvatura – vigas com variação da taxa de armadura



Fonte: Autor.

4.4.3 Diagrama Esforço Normal – Momento Fletor – Curvatura: Flexão Composta Reta

A determinação do diagrama momento-curvatura para seções submetidas à flexão composta reta envolve um processo iterativo, por meio de aproximações sucessivas. O procedimento de obtenção deste diagrama para uma seção transversal retangular com armaduras simétricas, dispostas em faces opostas, é apresentado a seguir. Destaca-se que a inclusão de mais camadas de armaduras apenas aumenta o número de reações (R_s) no somatório de forças e de momentos da seção.

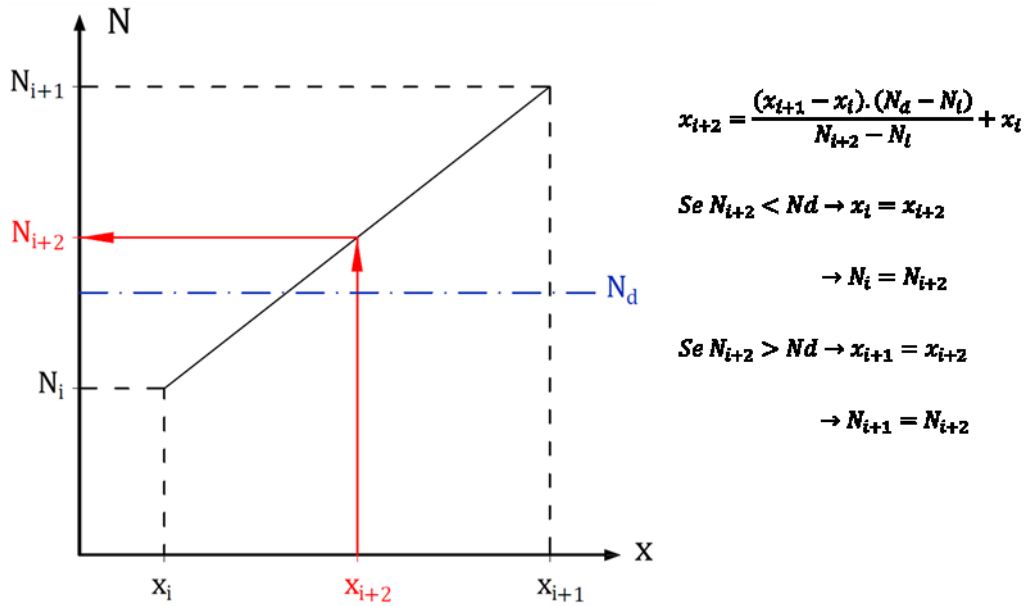
Da mesma forma que para flexão simples, nesta seção as deduções são feitas considerando-se valores característicos, hipóteses de serviço e de cálculo. Porém, para a análise de confiabilidade, vários parâmetros são considerados como variáveis aleatórias.

- Inicia-se com uma curvatura $\theta = 0$;
- Arbitram-se duas posições para a linha neutra;
- Calculam-se as deformações no concreto (ε_c) e nas armaduras inferior (ε_{si}) e superior (ε_{ss}) pelas expressões da Tabela 4-13;
- Determinam-se as resultantes nas armaduras inferior (R_{si}) e superior (R_{ss}), segundo a Tabela 4-14, e no concreto (R_{cc}), conforme a Tabela 4-15;
- Encontra-se o esforço normal atuante na seção a partir do somatório das forças resultantes ($N_{atuante} = R_{cc} + R_{si} + R_{ss}$);
- Caso $N_{atuante} \neq N_d$, adota-se um novo valor para a posição da linha neutra, a partir do método da secante, e repetem-se as etapas anteriores;
- Se $N_{atuante} = N_d$, calcula-se o valor da distância (Z_g) entre a resultante no concreto e o centroide da seção transversal, pelas expressões da Tabela 4-15
- Determina-se o momento atuante:

$$M = R_{cc} \left(\frac{h}{2} - Z_g \right) + R_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i \right) + R_{ss} \left(\frac{h}{2} - d_s \right);$$
- Repete-se o procedimento para incrementos $\Delta\theta$ na curvatura adimensional enquanto o momento atuante for inferior ao momento resistente da seção;

O método da secante, utilizado para determinar a posição da linha neutra da seção para uma dada curvatura, é representado na Figura 4-11. Neste procedimento, a cada iteração faz-se uma interpolação linear entre duas iterações anteriores.

Figura 4-11 – Método da secante



Fonte: Autor.

Tabela 4-13 – Deformações específicas da seção transversal

Deformação	Formulação
Concreto (fibra superior)	$\varepsilon_c = \frac{\theta \cdot x}{h}$
Concreto (fibra inferior)	$\varepsilon_{ci} = \frac{\theta \cdot (x - h)}{h}$
Aço (armadura superior)	$\varepsilon_{ss} = \frac{\theta \cdot (x - d_s)}{h}$
Aço (armadura inferior)	$\varepsilon_{si} = \frac{\theta \cdot (x - d_i)}{h}$

Fonte: Autor.

Tabela 4-14 – Forças resultantes nas armaduras

Condições de deformação		Formulação
Armadura superior	$ \varepsilon_{si} > \varepsilon_{yd} $	$R_{si} = A_{si} \cdot \sigma_{si}$
	$ \varepsilon_{si} \leq \varepsilon_{yd} $	$R_{si} = A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot \varepsilon_{si} / \varepsilon_{yd}$
Armadura inferior	$ \varepsilon_{ss} > \varepsilon_{yd} $	$R_{ss} = A_{ss} \cdot \sigma_{ss}$
	$ \varepsilon_{ss} \leq \varepsilon_{yd} $	$R_{ss} = A_{ss} \cdot \sigma_{ss} \cdot \varepsilon_{ss} / \varepsilon_{yd}$

Fonte: Autor.

Tabela 4-15 – Força resultante no concreto

Condições	Formulação
$\varepsilon_c \leq 2\text{‰}$ $x \leq h$	$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot b \cdot x \left(\frac{\varepsilon_c}{2} - \frac{\varepsilon_c^2}{12} \right)$
	$Z_g = \frac{x(8 - \varepsilon_c)}{4(6 - \varepsilon_c)}$
$\varepsilon_c \leq 2\text{‰}$ $x > h$	$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot b \cdot h \left(\varepsilon_c + \frac{\varepsilon_c \cdot \theta}{4} - \frac{\varepsilon_c^2}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{12} \right)$
	$Z_g = \frac{\varepsilon_c \cdot h}{\theta} - \frac{h \left[\frac{\varepsilon_c^3}{3} - \frac{\varepsilon_c^4}{16} - \frac{(\varepsilon_c - \theta)^3}{3} + \frac{(\varepsilon_c - \theta)^4}{16} \right]}{\theta^2 \left(\varepsilon_c + \frac{\varepsilon_c \cdot \theta}{4} - \frac{\varepsilon_c^2}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{12} \right)}$
$\varepsilon_c > 2\text{‰}$ $x \leq h$	$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot b \cdot x \left(1 - \frac{2}{3 \cdot \varepsilon_c} \right)$
	$Z_g = x \frac{(3 \cdot \varepsilon_c^2 - 4 \cdot \varepsilon_c + 2)}{2 \cdot \varepsilon_c (3 \cdot \varepsilon_c - 2)}$
$\varepsilon_c > 2\text{‰}$ $x > h$	$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot b \cdot h \left(\frac{12 \cdot \varepsilon_c - 8 - (\varepsilon_c - \theta)^2 \cdot (6 - \varepsilon_c + \theta)}{12 \cdot \theta} \right)$
	$Z_g = \frac{h}{\theta} \cdot \left[\varepsilon_c - \frac{24 \cdot \varepsilon_c^2 - 16 - (\varepsilon_c - \theta)^3 \cdot (16 - 3 \cdot \varepsilon_c + 3 \cdot \theta)}{48 \cdot \varepsilon_c - 32 - 4 \cdot (\varepsilon_c - \theta)^2 \cdot (6 - \varepsilon_c + \theta)} \right]$

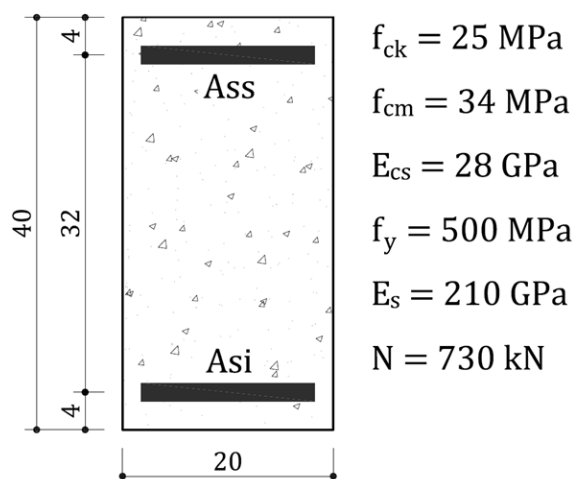
Fonte: Adaptado de Ribeiro (2011) e Nogueira (2010).

4.4.3.1 Exemplos de diagramas momento-curvatura para pilares

A seguir, são desenvolvidos exemplos de diagramas de seções à flexão composta reta, vide Figura 4-12, para diferentes taxas de armadura, conforme Tabela 4-16. Os diagramas são apresentados na Figura 4-13.

Assim como nos exemplos de flexão simples, utilizam-se valores médios de resistência para o concreto e o aço. Dessa forma, os diagramas momento-curvatura têm um formato mais próximo aos das análises de confiabilidade. Para as demais variáveis, empregou-se valores característicos.

Figura 4-12 – Seção transversal da viga- exemplos de diagrama momento-curvatura



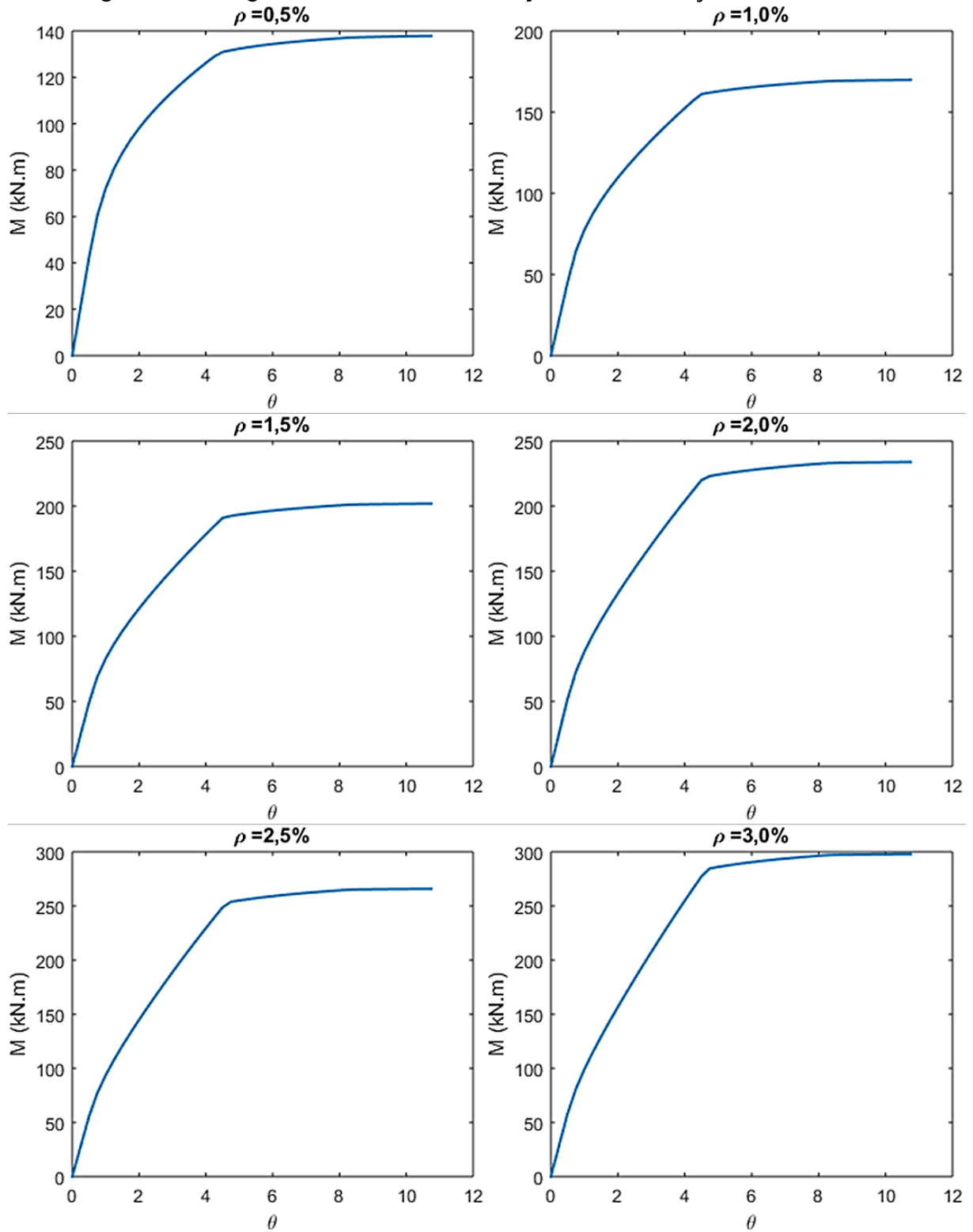
Fonte: Autor.

Tabela 4-16 – Variações da taxa de armadura

ρ	0,50%	1,00%	1,50%	2,00%	2,50%	3,00%
As (cm ²)	0,72	1,44	2,16	2,88	3,60	4,32

Fonte: Autor.

Figura 4-13 – Diagramas momento curvatura: pilares com variação de taxa de armadura

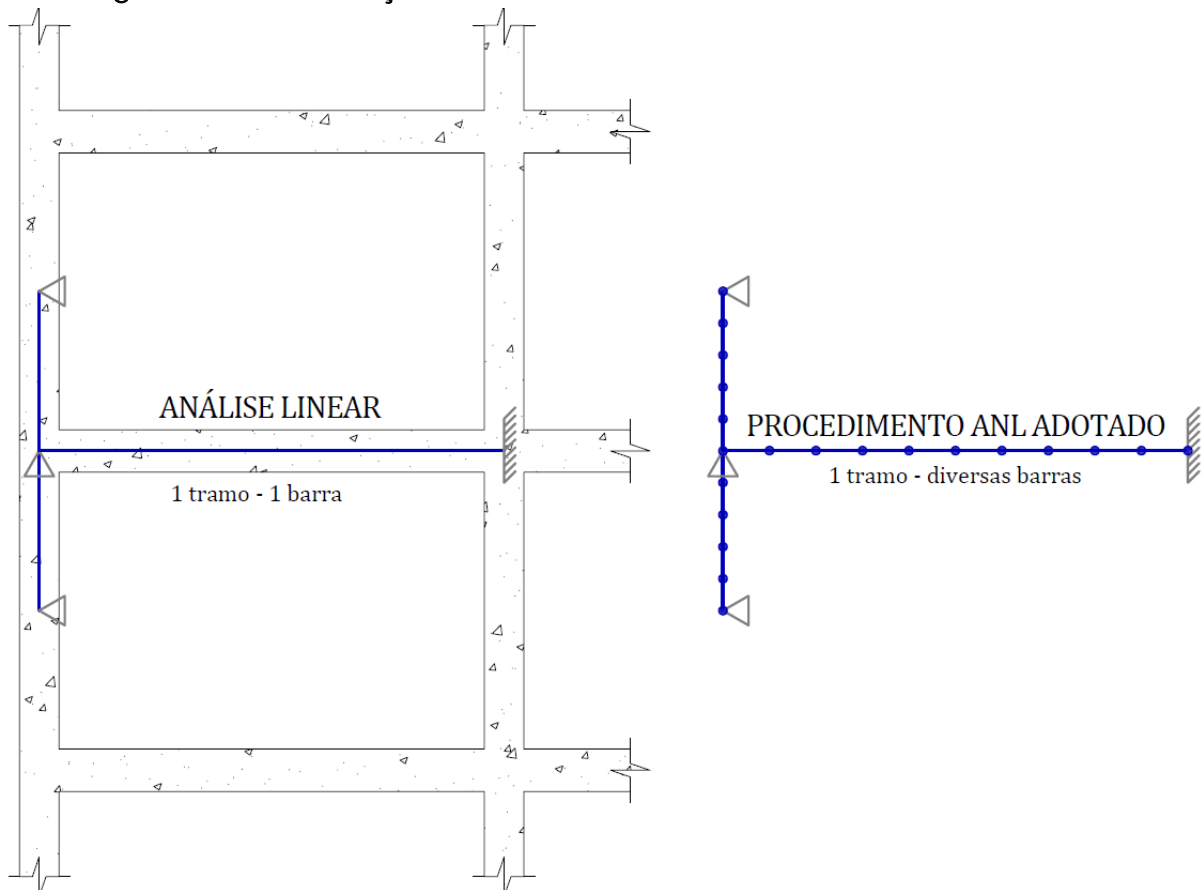


Fonte: Autor.

4.4.4 Utilização dos Diagramas Momento-Curvatura em análises não-lineares

O procedimento de análise não-linear consiste na discretização do modelo de barras da estrutura do pórtico plano em pequenos elementos (Figura 4-14), submetidos a diferentes esforços internos, com estágios de fissuração distintos e, portanto, com rigidez própria. A solução da estrutura é feita pelo método dos deslocamentos, o qual, devido à discretização empregada, pode ser definido como um método de elementos finitos com elementos de barra. Essa discretização precisa ser tal que se obtenha uma boa aproximação do comportamento não-linear do concreto armado, de modo que os elementos sejam representativos da alteração da armadura ao longo da estrutura e de rigidez das seções devido à fissuração.

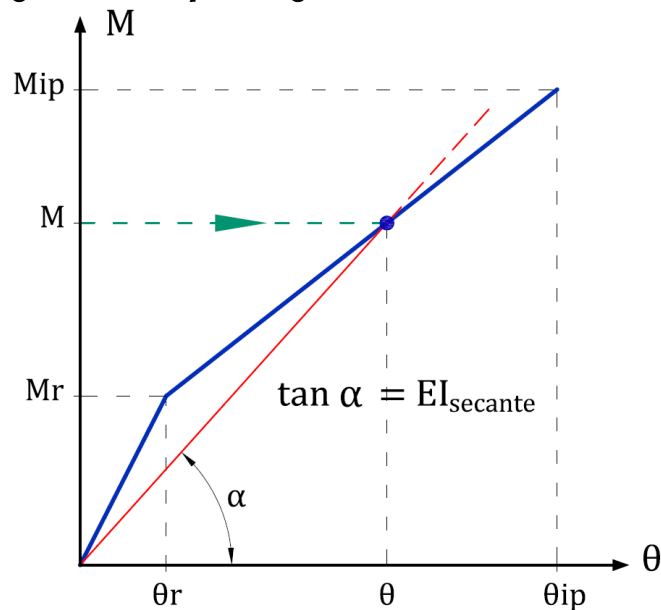
Figura 4-14 – Discretização do modelo de barras da estrutura



Fonte: Autor.

Após definição dos dados de geometria e do dimensionamento da estrutura, são elaborados diagramas momento-curvatura para cada seção transversal. Com os diagramas e os esforços de cada elemento, obtidos por meio de uma análise elástico-linear, calcula-se um novo valor para a rigidez secante, conforme exemplificado na Figura 4-15.

Figura 4-15 – Rigidez secante pelo diagrama momento curvatura



Fonte: Autor.

Com os valores atualizados de rigidez para cada elemento, é refeita a etapa de análise estrutural, de modo a obter novos valores de esforços internos e deslocamentos. Repete-se este procedimento até que a diferença entre iterações sucessivas seja pouco significativa, com base em um critério de parada pré-definido, verificando-se a convergência em todos os nós da estrutura.

4.4.5 Implementação Computacional do Modelo Mecânico de Solicitações

A implementação computacional da análise não-linear se resume a utilização de um código de análise matricial de estruturas, por meio do Método dos Deslocamentos, de rotinas para o cálculo de diagramas momento-curvatura e atualização das inércias das seções de vigas e pilares. Desta forma, o problema não-linear pode ser transformado em uma sequência de análises lineares. Utilizou-se um ambiente de programação com linguagem Matlab para o desenvolvimento destas rotinas.

4.4.5.1 Análise Matricial

Os procedimentos de Análise Matricial de Estruturas têm por objetivo a determinação de esforços internos e deslocamentos de estruturas reticuladas. Neste trabalho, optou-se pelo Método dos Deslocamentos, ou Método da Rigidez, devido à compatibilidade em automatizar o procedimento de análise e possibilidade de aproveitar as capacidades computacionais para resolver sistemas de equações. Nesta seção é dada

uma breve explicação sobre o método; para aprofundamento no assunto, pode-se consultar Weaver & Gere (1990), McGuire, Gallagher & Ziemian (2014) e Soriano (2016).

O método consiste na determinação dos deslocamentos e rotações nodais para, a partir destes, calcular os esforços solicitantes e as reações de apoio através da resolução das equações de equilíbrio, conforme o sistema representado em (61).

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (61)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura; \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais; e \mathbf{F} é o vetor de cargas nodais externas da estrutura.

4.4.5.2 Funcionamento do Código de Análise Não Linear

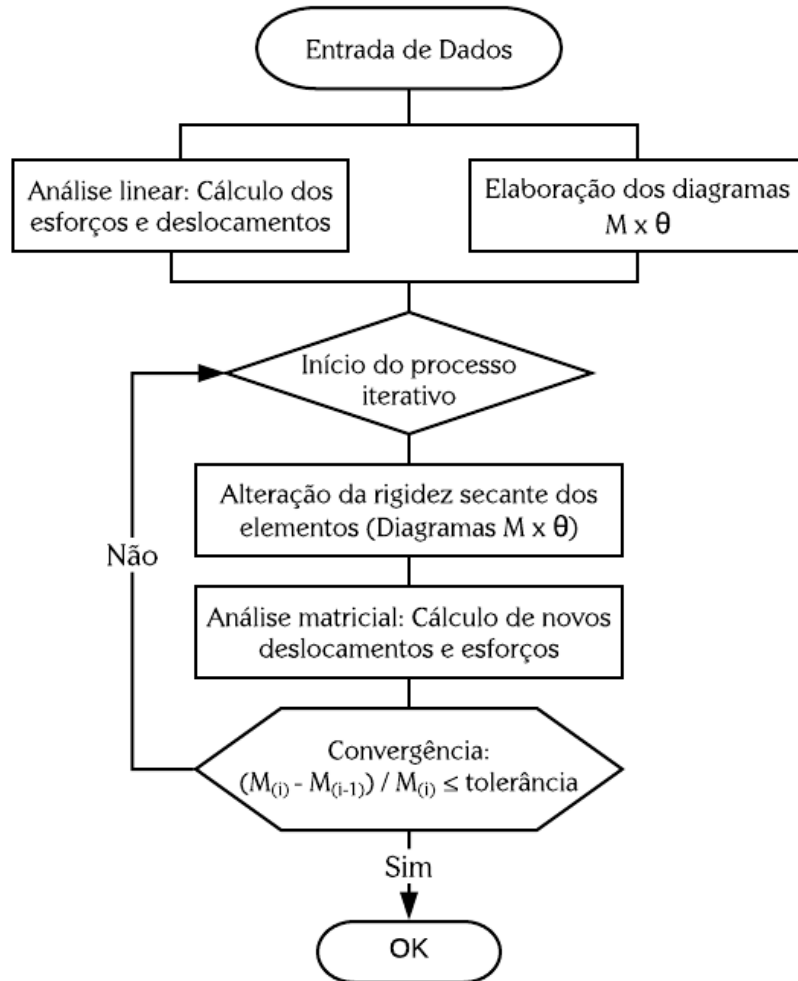
A não-linearidade física do concreto armado é considerada a partir da implementação de uma função em um programa de pórtico plano. É condição necessária para utilizar esta função que a estrutura esteja dimensionada, detalhada, e discretizada em um número adequado de barras a fim de obter um bom resultado, conforme comentado em 4.4.4. Também são elaborados os diagramas momento-curvatura para cada seção, segundo os procedimentos descritos em 4.4.2 e 4.4.3.

Em seguida, resolve-se matricialmente a estrutura, utilizando inércias brutas e módulos de elasticidade iniciais, o que corresponde a uma análise elástico-linear. A partir dos esforços obtidos, o processo iterativo é iniciado, por meio da atualização dos valores de rigidez secante de cada elemento. Optou-se por alterar o valor do módulo de elasticidade, mantendo-se os dados de inércia das seções.

Em seguida, a análise estrutural é refeita, obtendo-se novos valores de esforços e deslocamentos, os quais são comparados aos resultados da iteração anterior para verificação da convergência. Os esforços são também utilizados para atualizar os valores dos módulos de elasticidade. Tal processo se repete até que as diferenças entre duas iterações sucessivas sejam desprezáveis, dado certo critério de tolerância pré-definido. No presente trabalho, optou-se por empregar, como critério de convergência, os momentos fletores no centro de cada elemento de barra, e admitiu-se uma tolerância máxima de 0,01%. Entendeu-se ser este critério mais adequado, visto que o objetivo é a obtenção dos momentos fletores através de uma análise não-linear.

Na Figura 4-16 ilustrou-se este procedimento de análise não-linear.

Figura 4-16 – Fluxograma do código de análise não-linear



Fonte: Autor.

4.5 APLICAÇÃO DO MODELO MECÂNICO DE SOLICITAÇÕES

4.5.1 Exemplo de análise não-linear em pórtico

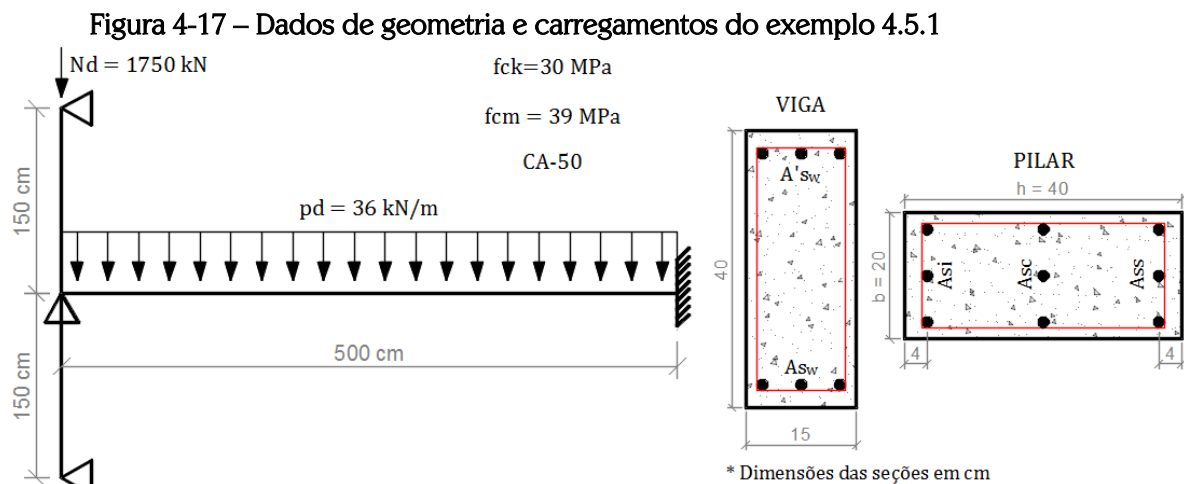
O exemplo de pórtico plano apresentado na Figura 4-17, que representa um pilar de extremidade, é utilizado para ilustrar o funcionamento do modelo mecânico de solicitações. Avalia-se a configuração da redistribuição dos esforços por meio de análises não-lineares, em casos de vigas dimensionadas com e sem a plastificação dos momentos negativos.

O pórtico foi dimensionado, inicialmente, com esforços obtidos em análise elástico-linear. A Figura 4-18 apresenta os diagramas de momentos fletores e os detalhamentos das seções transversais da viga e do pilar. Em seguida, fez-se nova análise

estrutural, a partir da análise elástico-linear, com uma redistribuição de 25% do momento negativo na ligação com o pilar, conforme Figura 4-19.

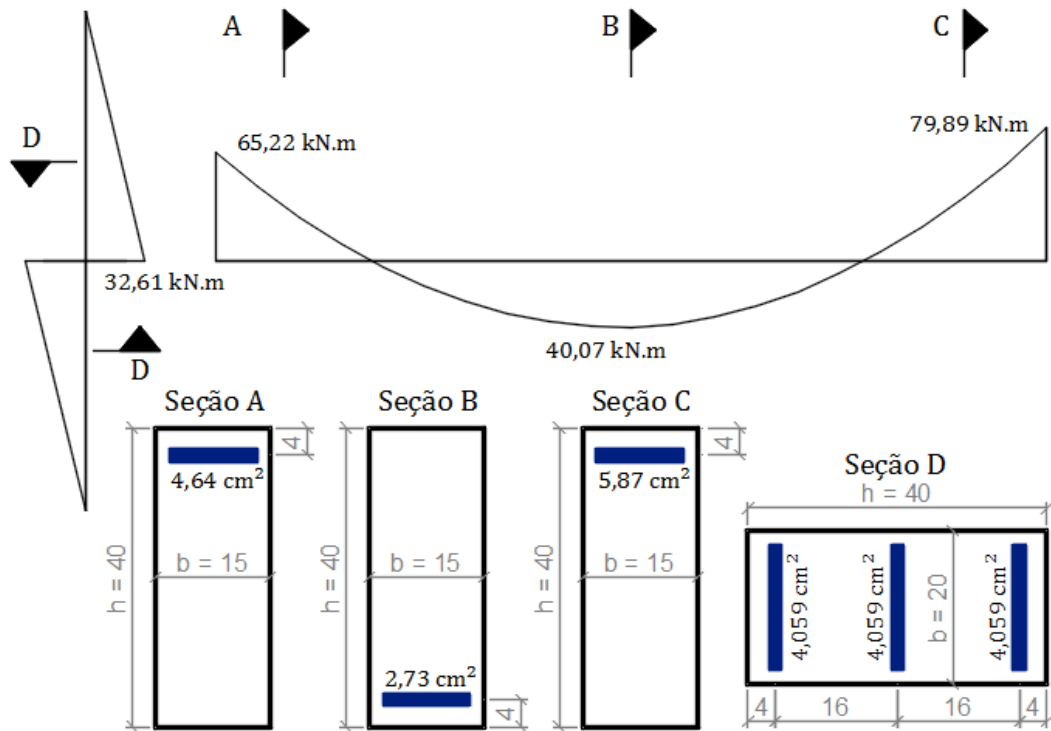
Uma terceira análise levou em consideração as recomendações dos Comentários e Exemplos de Aplicação da ABNT NBR 6118:2014 (IBRACON, 2015) para uma análise estrutural com a consideração da não linearidade física de forma aproximada. Segundo o IBRACON (2015), pode-se dimensionar uma estrutura de pórtico em concreto armado utilizando uma inércia aproximada para vigas de $0,4 \cdot E_{ci} \cdot I_c$ e para pilares de $0,8 \cdot E_{ci} \cdot I_c$. O diagrama de momento resultante e o detalhamento das seções são expostos na Figura 4-20.

A NBR 6118 (2014) afirma que essa aproximação é adequada para análise dos esforços globais de 2ª ordem de estruturas reticuladas. Entretanto, o IBRACON (2015) argumenta que esta consideração também pode ser utilizada para dimensionamento das estruturas, pois na prática consiste em aproveitar indiretamente a capacidade de rotação plástica e de redistribuição de esforços das vigas.



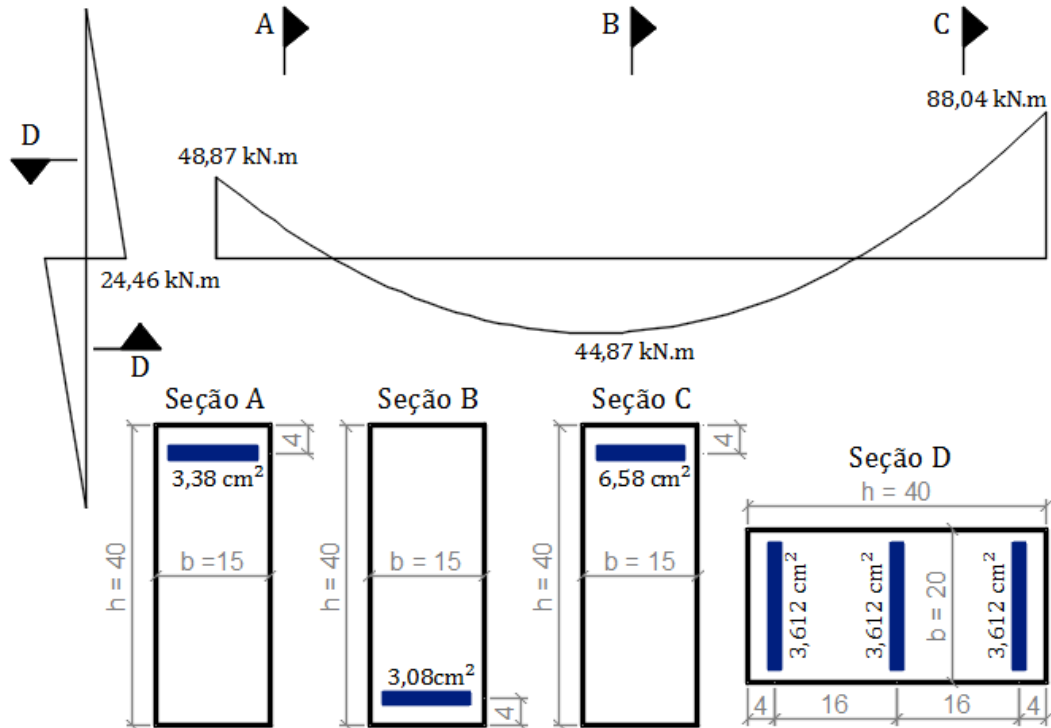
Fonte: Autor.

Figura 4-18 – Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado sem redistribuição de esforços



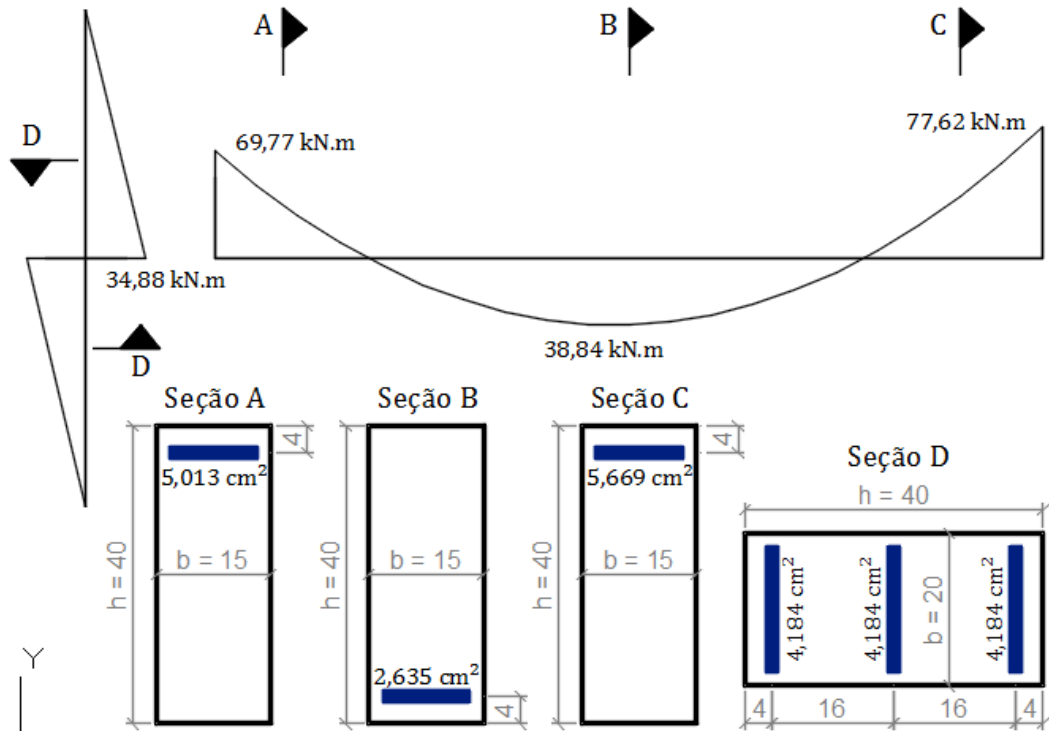
Fonte: Autor.

Figura 4-19 – Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado com redistribuição de esforços



Fonte: Autor.

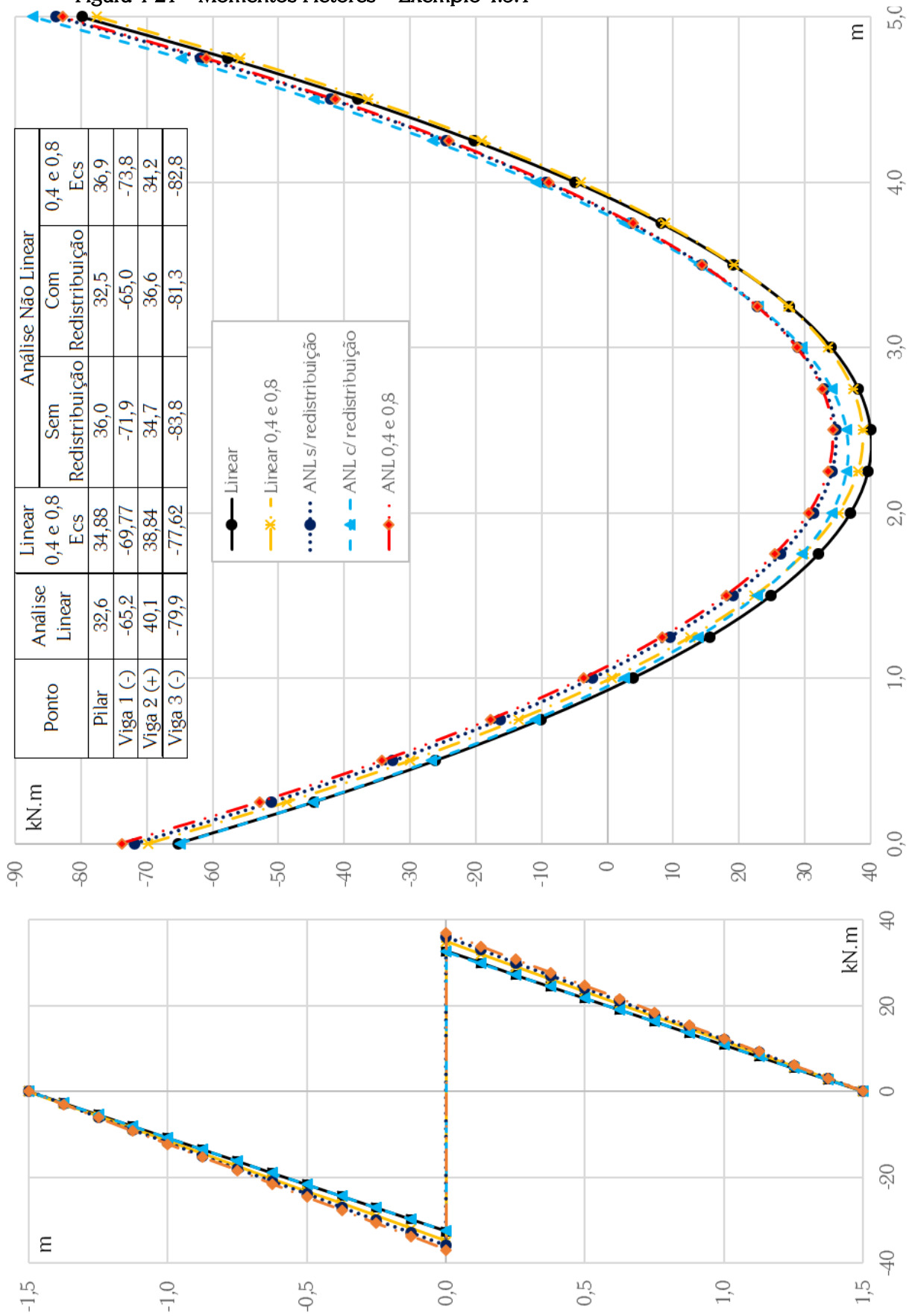
Figura 4-20 - Exemplo 4.5.1 – Pórtico armado segundo IBRACON (2015)



Fonte: Autor.

Na Figura 4-21 apresentam-se os diagramas de momentos fletores da viga e pilares do exemplo 4.5.1, obtidos via análises linear, linear com inércias alteradas, não linear sem redistribuição de esforços, não linear com redistribuição de 25% dos momentos fletores e não-linear com considerações do IBRACON (2015).

Figura 4-21 – Momentos Fletores – Exemplo 4.5.1



Fonte: Autor.

A partir dos gráficos, pode-se notar que, nas análises não lineares, os momentos positivos na viga tendem a diminuir, com um aumento dos momentos negativos no engaste (lado direito). Com relação ao momento na ligação com o pilar, na análise sem redistribuição de esforços este teve um acréscimo de cerca de 10%, enquanto na análise com redistribuição não houve alteração significativa.

Ressalta-se que os momentos negativos obtidos nas análises não-lineares superam os de cálculo porque foram utilizados valores médios para a resistência do concreto e tensão de escoamento do aço na elaboração dos diagramas momento-curvatura. Caso contrário, seria de se esperar que essas seções plastificariam, redistribuindo os esforços pela estrutura.

Uma consideração importante pode ser feita com base nos resultados, referente aos momentos no apoio esquerdo – e, conseqüentemente, nos pilares. Percebe-se que o dimensionamento com a consideração da plastificação do momento negativo do apoio esquerdo resultou, efetivamente, em uma redução deste momento, quando comparado à análise não-linear feita com o pórtico dimensionado pela análise linear. Entretanto, esta redução foi bem inferior à redistribuição de esforços adotada (10,8% ante 25%).

5 MODELOS E PROCEDIMENTO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

*“The fool believes that the tallest mountain in the world
will be equal to the tallest one he has observed.”*

(Nassim Taleb)

5.1 MODELOS PROBABILÍSTICOS DAS VARIÁVEIS

Conforme visto na seção 3.5, sempre existirão incertezas quanto ao valor das propriedades mecânicas e geométricas da estrutura real. Portanto, estes parâmetros são variáveis aleatórias, e podem ser representados por um valor médio, uma variância e uma distribuição de probabilidades.

A fim de que as análises de confiabilidade tenham precisão adequada, além de um modelo mecânico realista para determinar as resistências e solicitações da estrutura, é imprescindível que se adote um modelo probabilístico adequado para descrever as variáveis.

Neste trabalho, são consideradas como variáveis aleatórias: a resistência à compressão do concreto; a tensão de escoamento do aço; as áreas das armaduras e a respectiva posição dos centros de gravidade; as dimensões da seção transversal; as ações permanentes e acidentais; e as incertezas adicionais quanto ao erro de modelo, que foi apresentado na seção 4.3. Todos estes parâmetros são admitidos como independentes.

5.1.1 Resistência à Compressão do Concreto

A NBR 12655 (2015), assim como o ACI 318 (2014), utiliza a distribuição de probabilidades Normal para representar a variabilidade da resistência à compressão do concreto. Magalhães (2014), Santiago e Beck (2017), e a maior parte da bibliografia consultada que estuda a resistência e a variabilidade da resistência à compressão do concreto, também utilizam essa distribuição.

Quanto aos parâmetros de variabilidade da resistência à compressão do concreto, a NBR 12655 (2015) classifica o concreto em três condições, de acordo com o controle e a forma de preparo. Apenas a condição A é aplicável para concretos com resistência característica à compressão (f_{ck}) igual ou superior 25 MPa. Nesta situação, a norma admite um desvio padrão (σ_d) de 4,0 MPa para a resistência à compressão do concreto.

Para a determinação do valor da resistência média à compressão do concreto, f_{cm} , a NBR 12655 (2015) apresenta a seguinte equação (62).

$$f_{cm} = f_{ck} + 1,65 \sigma_d \quad (62)$$

A variabilidade da resistência dos corpos de prova cilíndricos de concreto (V_{cil}) pode ser calculada pela razão entre o desvio padrão e a resistência média. Porém, em uma estrutura de concreto armado, outros fatores, além da variação do corpo de prova cilíndrico, podem influenciar a variabilidade da resistência do concreto. Para Choi *et al.* (2010), o valor correspondente do coeficiente de variação do concreto (V_c) é dado por:

$$V_c^2 = V_{cil}^2 + 0,0084 \quad (63)$$

A Tabela 5-1 resume esses parâmetros para concretos de classe C25, C30 e C40.

Tabela 5-1 – Parâmetros estatísticos (em MPa) para concretos de classes C25, C30 e C40

f_{ck}	σ_d	f_{cm}	V_{cil}	V_c
25,0	4,0	31,6	0,127	0,156
30,0	4,0	36,6	0,109	0,143
40,0	4,0	46,6	0,086	0,126

Fonte: Autor.

Para Mirza *et al.* (1979), o coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto assume valores de 0,10, 0,15 e 0,20 para classes de concreto de qualidade excelente, média e baixa, respectivamente. Santos, Stucchi e Beck (2014) sugerem considerar a variabilidade estatística do concreto com um coeficiente de variação de 0,15.

Santiago e Beck (2017), ao avaliar a conformidade dos concretos produzidos no Brasil atualmente, por meio de mais de vinte e sete mil corpos de prova moldados in loco em diferentes obras de todas as regiões do país, chegaram aos resultados da Tabela 5-2.

Tabela 5-2 – Resultados do concreto produzido no Brasil

Classe	f_{ck} est	f_{cm}	σ_d	V_{cil}
C20	19,2	26,2	4,3	0,164
C30	29,2	37,3	4,9	0,131
C40	38,5	44,7	3,8	0,084
C50	48,0	56,1	4,9	0,088

Fonte: SANTIAGO E BECK (2017).

5.1.2 Propriedades do Aço e das Armaduras

Segundo Mirza e MacGregor (1979), a variabilidade da resistência ao escoamento do aço (f_y) em uma mesma barra de aço é pequena, e o coeficiente de variação para barras de um mesmo fabricante varia entre 1% e 4%. O valor médio da tensão de escoamento (f_{ym}) pode ser tomado como 1,09 do valor característico (f_{yk}), e a distribuição de probabilidades a Normal. Os autores afirmam também que a área de armadura pode ser tomada como 99% da área nominal, e que o coeficiente de variação é em torno de 2,4%.

Para o JCSS (2001), pode-se adotar a área média da armadura de uma seção transversal de concreto como igual à área nominal, e o coeficiente de variação igual a 2%. Já a tensão de escoamento média do aço é dada pelo valor característico mais duas vezes o desvio padrão ($f_{ym} = f_{yk} + 2 \cdot \sigma_s$), e o coeficiente de variação é aproximadamente 7%.

Ellingwood e Galambos (1982) adotam uma tensão de escoamento média como 1,05 do valor característico, com um coeficiente de variação de 11%. Nowak e Szerszen (2003) consideram o valor de f_{ym} como 1,10 de f_{yk} , com um coeficiente de variação entre 4% e 6,5% a depender do diâmetro da barra.

Santos, Stucchi e Beck (2014), ao compararem diversos estudos internacionais com referências brasileiras, indicaram o valor de 1,08 f_{yk} para a tensão de escoamento média do aço, com coeficiente de variação de 5%.

5.1.3 Propriedades Geométricas

Imperfeições geométricas durante a fase de construção são inevitáveis, e dependem das técnicas de construção, equipamentos e treinamento do pessoal envolvido na construção (MIRZA E MacGREGOR, 1979).

O JCSS (2001) apresenta valores médios e desvios padrões para as dimensões das seções transversais de elementos de concreto moldados in loco, assim como para o cobrimento das armaduras superiores e inferiores. Também informa que se pode adotar uma distribuição Normal para esses parâmetros.

Com relação às dimensões externas das seções transversais de elementos de concreto, o valor médio é, em geral, entre 0 e 0,3 cm maior do que o valor nominal. O desvio padrão pode ser tomado como: $0,4 \text{ cm} + 0,0006 \cdot \text{valor nominal} \leq 1,0 \text{ cm}$ (JCSS, 2001).

Quanto ao cobrimento de concreto, que reflete diretamente na posição do centro de gravidade das armaduras, há diferenças entre os tipos de elementos. Em vigas, tanto para as armaduras superiores quanto para as inferiores, o cobrimento médio pode ser tomado como 1,0 cm maior do que o valor nominal, e o desvio padrão varia entre 0,5 e 1,5 cm, sendo o valor mais usual 1,0 cm. Para pilares, o valor médio é entre 0 e 0,5 cm maior do que o nominal, com desvio padrão entre 0,5 e 1,0 cm.

Santos, Stucchi e Beck (2014) adotam os valores apresentados na Tabela 5-3 para vigas de concreto armado.

Tabela 5-3 – Parâmetros da Seção Transversal

Dimensão	Média	Coef. Var.	Distribuição
h	h_{nom}	0,045	Normal
b	h_{nom}	0,060	Normal
d'	d'_{nom}	0,275	Lognormal
d''	d''_{nom}	0,275	Lognormal

Fonte: SANTOS, STUCCHI E BECK (2014).

5.1.4 Ações

As ações atuantes nas estruturas são classificadas pela NBR 6118 (2014) em permanentes, variáveis e excepcionais. As ações permanentes são aquelas cujas variações no tempo, em torno da média, são pequenas e lentas; as ações variáveis apresentam variações no tempo grandes e frequentes; e as ações excepcionais, apesar de possuírem baixa probabilidade de ocorrência ao longo da vida útil da estrutura, podem ter magnitude considerável (JCSS, 2001). Neste trabalho, adotou-se, em relação ao valor de cálculo, uma proporção de 75% para ações permanentes e 25% para as variáveis, a qual é usual para edificações comerciais.

Segundo Ellingwood e Galambos (1982), as ações permanentes podem ser modeladas por meio de distribuições normais de probabilidade, com valor médio igual a 1,05 vezes o valor nominal e coeficiente de variação de 10%. Para as ações variáveis em análises de estado limite último, utiliza-se a distribuição de extremos de Gumbel para máximos (Tipo 1), para um período de 50 anos, com média igual ao valor nominal e coeficiente de variação de 25%.

Nowak e Szerszen (2003) apresentam valores semelhantes aos de Ellingwood e Galambos (1982), alterando apenas o coeficiente de variação das ações variáveis para 18%.

Já Santos, Stucchi e Beck (2014) adotam, para as ações permanentes, valores médios iguais aos característicos e coeficiente de variação de 10%. Para as ações variáveis, o valor médio equivale a 0,93 do característico, e o coeficiente de variação é igual a 20%.

5.1.5 Resumo dos Parâmetros Estatísticos das Variáveis Aleatórias

Os modelos probabilísticos e os parâmetros das variáveis aleatórias adotados neste trabalho estão resumidos na Tabela 5-4.

Tabela 5-4 – Parâmetros das variáveis aleatórias

Categoria	Variável	Unid.	Distr.	Média (μ_X)	Desvio Padrão (σ_X)	Valor Característico
Materiais	Concreto f_c	MPa	Normal	1,22 f_{ck}	0,15 μ_X	f_{ck}
	Tensão Escoamento Aço f_y	MPa	Normal	1,08 f_{yk}	0,08 μ_X	500 MPa
	Área Armadura Pilar A_{s_p}	cm ²	Normal	0,99 $A_{s_p \text{ nom}}$	0,024 μ_X	A_{s_p}
	Área Armadura Viga A_{s_w}	cm ²	Normal	0,99 $A_{s_w \text{ nom}}$	0,024 μ_X	A_{s_w}
Dimensões	Largura Pilar b_p	cm	Normal	$b_{p \text{ nom}} + 0,3$	0,060 μ_X	b_p
	Altura Pilar h_p	cm	Normal	$h_{p \text{ nom}} + 0,3$	0,045 μ_X	h_p
	Dist. C.G. Armadura Pilar d_p	cm	Normal	$d'_{p \text{ nom}} + 0,5$	0,275 μ_X	d'_p
	Largura Viga b_w	cm	Normal	$b_{w \text{ nom}} + 0,3$	0,060 μ_X	b_w
	Altura Viga h_w	cm	Normal	$h_{w \text{ nom}} + 0,3$	0,045 μ_X	h_w
	Dist. C.G. Armadura Viga d_w	cm	Normal	$d'_{w \text{ nom}} + 1,0$	0,275 μ_X	d'_w
Ações	Permanente Concentrada N_G	kN	Normal	1,05 N_{Gk}	0,1 μ_X	N_{Gk}
	Permanente Distribuída g	kN/m	Normal	1,05 g_k	0,1 μ_X	g_k
	Variável Concentrada N_Q	kN	Gumbel	0,93 N_{Qk}	0,2 μ_X	N_{Qk}
	Variável Distribuída q	kN/m	Gumbel	0,93 q_k	0,2 μ_X	q_k
Incertezas de Modelo	Resistência do Pilar à Flexocompressão θ_R	-	Normal	0,955	0,0896	-

Fonte: Autor.

5.2 PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

O estudo de confiabilidade do capítulo 6 é desenvolvido pelo método de Monte Carlo, o qual consiste em realizar certo número de “sorteios” para cada variável aleatória, de acordo com os respectivos parâmetros e distribuição de probabilidades. Os valores de cada simulação são aplicados ao modelo para o cálculo dos momentos resistente e

solicitante, os quais são comparados com o uso da equação (64) para determinar a ocorrência, ou não, de falha.

$$g(x) = \theta_R \cdot M_R - (M_G + M_Q) \quad (64)$$

Nas análises de confiabilidade, utilizou-se a *toolbox open-source* para Matlab denominada FERUM 4.1 (*Finite Element Reliability Using Matlab*), desenvolvida na Universidade da Califórnia (BOURINET, 2010). Esta ferramenta possui rotinas específicas para realizar análises de confiabilidade, tendo como dados de entrada os parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias e a função de estado limite.

O FERUM permite que a análise seja desenvolvida com o uso do Método de Monte Carlo com amostragem por importância a partir de ponto de projeto, em que este ponto é definido com o uso do método FORM. Visto que o uso de amostragem por importância desloca o eixo das médias das variáveis aleatórias para o ponto de projeto, aumenta-se muito a proporção de falhas em relação ao número de simulações de Monte Carlo. Portanto, reduz-se de forma considerável o tempo e o número de simulações necessárias para obter um resultado com relevância estatística (baixa variância). De modo geral, nos exemplos desenvolvidos no estudo de confiabilidade do capítulo 6, o tamanho da amostra, para uma convergência dos resultados com coeficiente de variação abaixo de 5%, variou entre 5.000 e 10.000.

Quanto à “função de estado limite”, a resistência dos pilares é avaliada conforme apresentado na seção 4.1, com o uso dos valores sorteados para as propriedades dos materiais, da seção transversal do pilar e dos esforços normais. Após o cálculo do momento resistente, este é multiplicado pela variável aleatória de erro de modelo para ser comparado ao momento solicitante. Ressalta-se que este momento solicitante, transmitido pela viga ao pilar, é limitado pelo momento de plastificação da viga.

O modelo mecânico de solicitações se baseia na análise não-linear apresentada na seção 4.4, com a utilização de um modelo de pórtico plano, discretizado em elementos de barra, cuja rigidez é definida por meio de diagramas momento curvatura. Desta forma, pode-se calcular o momento solicitante máximo do pilar em cada iteração, o qual, se for superior ao momento resistente efetivo da seção transversal, representa a ocorrência de uma falha.

6 ESTUDO DE CONFIABILIDADE EM PILARES DE CONCRETO ARMADO

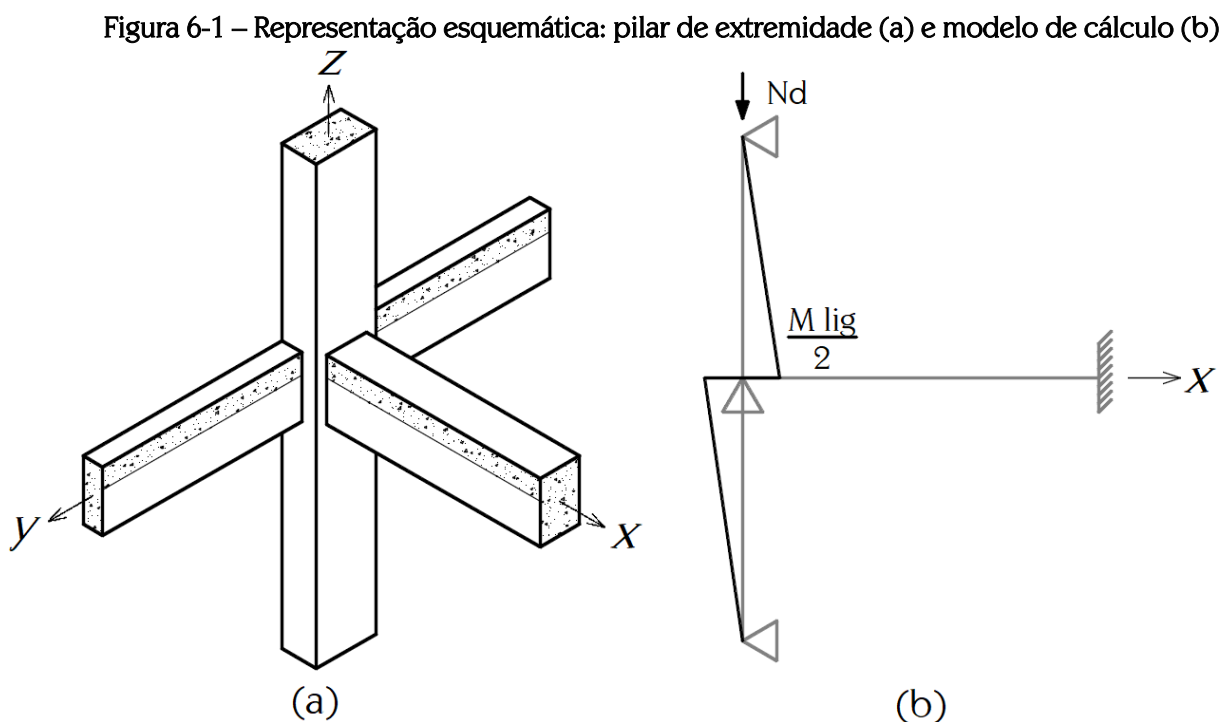
“If you don’t know, the thing to do is not to get scared, but to learn”

(Ayn Rand)

Neste capítulo é apresentado um estudo de confiabilidade em pilares de concreto armado submetidos à flexão composta reta, isto é, a carregamentos axiais e momentos fletores em uma direção.

6.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Os exemplos analisados são uma simplificação do caso de pilar de extremidade, conforme ilustrado na Figura 6-1 (a). O modelo de cálculo considera o pilar como birrotulado nas extremidades, a fim de simular os pontos de momento nulo supostos na metade do vão. Quanto às solicitações, considera-se que os momentos em uma das dimensões se equilibram, de modo que o pilar é submetido à flexão composta reta (Figura 6-1 (b)). Justifica-se o uso desse exemplo devido à simplicidade de análise e programação, em relação à flexão composta oblíqua, e por este caso ilustrar bem o problema que se deseja analisar.



Fonte: (a) Adaptado de FUSCO (1981); (b) Autor.

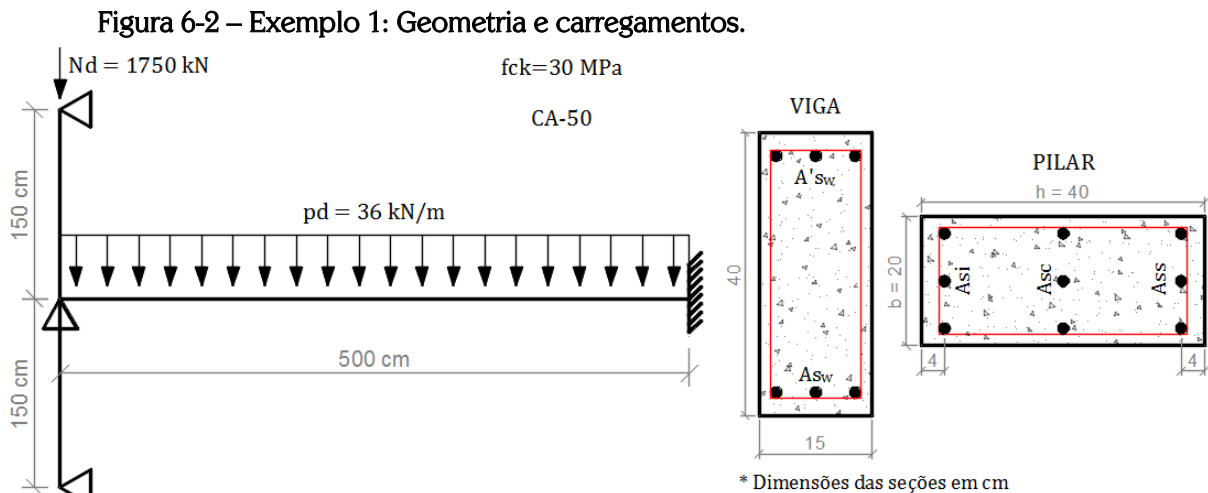
Definidos os parâmetros básicos dos exemplos, como dimensões dos elementos e carregamentos atuantes, é feito o dimensionamento das seções transversais críticas por meio de esforços obtidos em análises elástico-lineares, ou em análises elásticas com redistribuição de momentos, conforme procedimento convencional de projeto. Para o dimensionamento, são utilizadas as hipóteses de Estado Limite Último da NBR 6118 (2014).

Ao invés de detalhar as seções com diâmetros comerciais das barras de aço, se utiliza a área de aço estritamente necessária para resistir aos esforços. Desta forma, desconsideram-se efeitos de possíveis folgas nas armaduras, as quais influenciariam na probabilidade de falha do problema e prejudicariam comparações entre os exemplos.

6.2 EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO

6.2.1 Exemplo 1

Este primeiro exemplo é semelhante ao apresentado na seção 4.5, o qual foi utilizado para ilustrar o modelo mecânico de solicitações. Os valores característicos dos carregamentos, geometria e resistência dos materiais do são apresentados na Figura 6-2.



São analisados cinco casos distintos de análise estrutural. No primeiro caso, os elementos são dimensionados com esforços obtidos em uma análise elástico-linear. No segundo, fez-se uma redistribuição de 25% do momento negativo da viga no apoio esquerdo, e utiliza-se o momento fletor advindo desta análise para o dimensionamento do pilar. O terceiro caso também utiliza uma redistribuição de 25% para a viga, porém difere do segundo pois o pilar é dimensionado com o momento elástico-linear obtido na análise

sem redistribuição, conforme recomendação do Eurocode 2 (2004). O quarto caso considera uma redistribuição de 50% no momento negativo no apoio esquerdo da viga. Por fim, no quinto caso utilizam-se as hipóteses de consideração aproximada da não-linearidade física da NBR 6118 (2014), em que a inércia secante das vigas e pilares são, respectivamente, 40% e 80% da inércia bruta das seções.

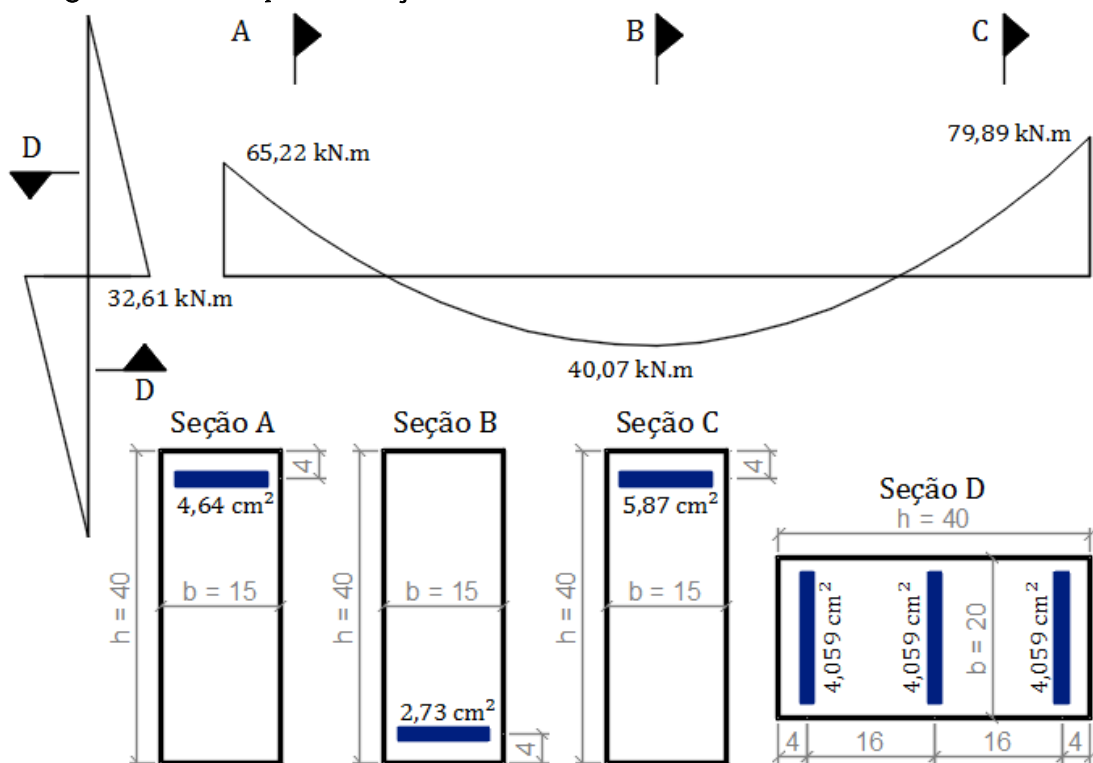
As diferenças entre os casos são resumidas na Tabela 6-1, enquanto os respectivos diagramas e detalhamentos das seções transversais são apresentados nas Figuras 6.3 a 6.7.

Tabela 6-1 - Resumo das diferentes análises do exemplo 1

Exemplo	Dimensionamento	Redistribuição viga	Redistribuição pilar
1.1	Análise Linear	Não	Não
1.2	Análise Linear	25%	25%
1.3	Análise Linear	25%	Não
1.4	Análise Linear	50%	0,5
1.5	ANL Simplificada	Não	Não

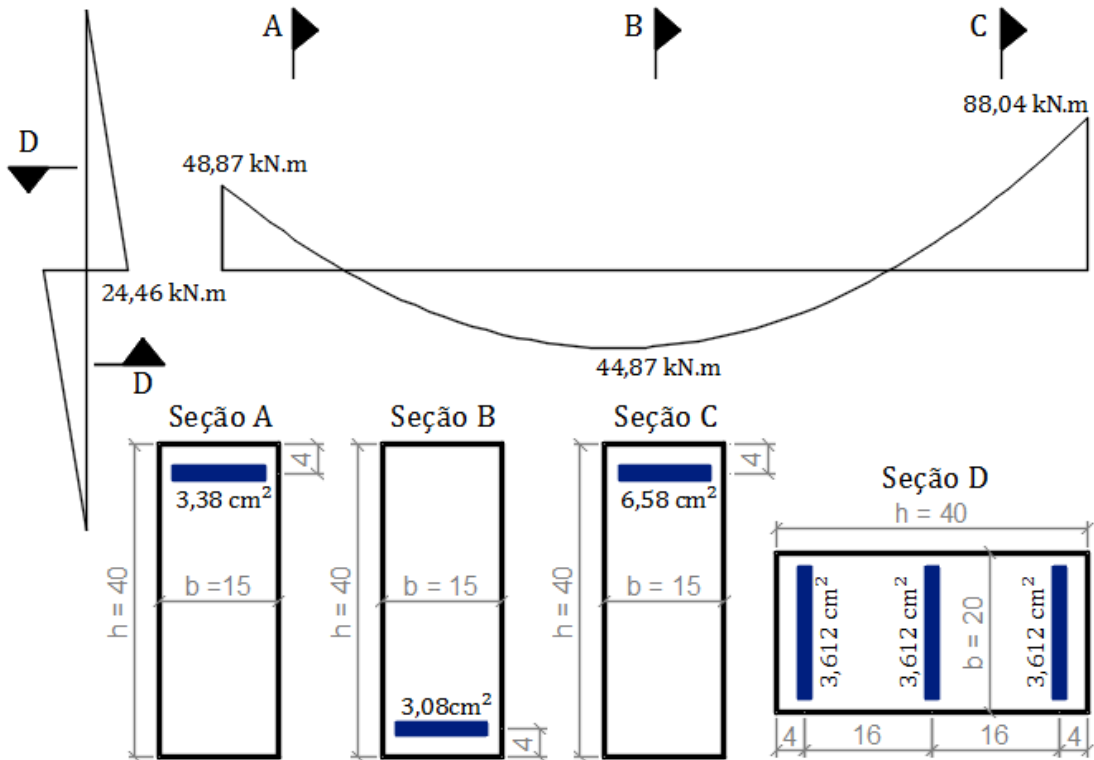
Fonte: Autor.

Figura 6-3 – Exemplo 1.1: Seções armadas com análise elástico-linear



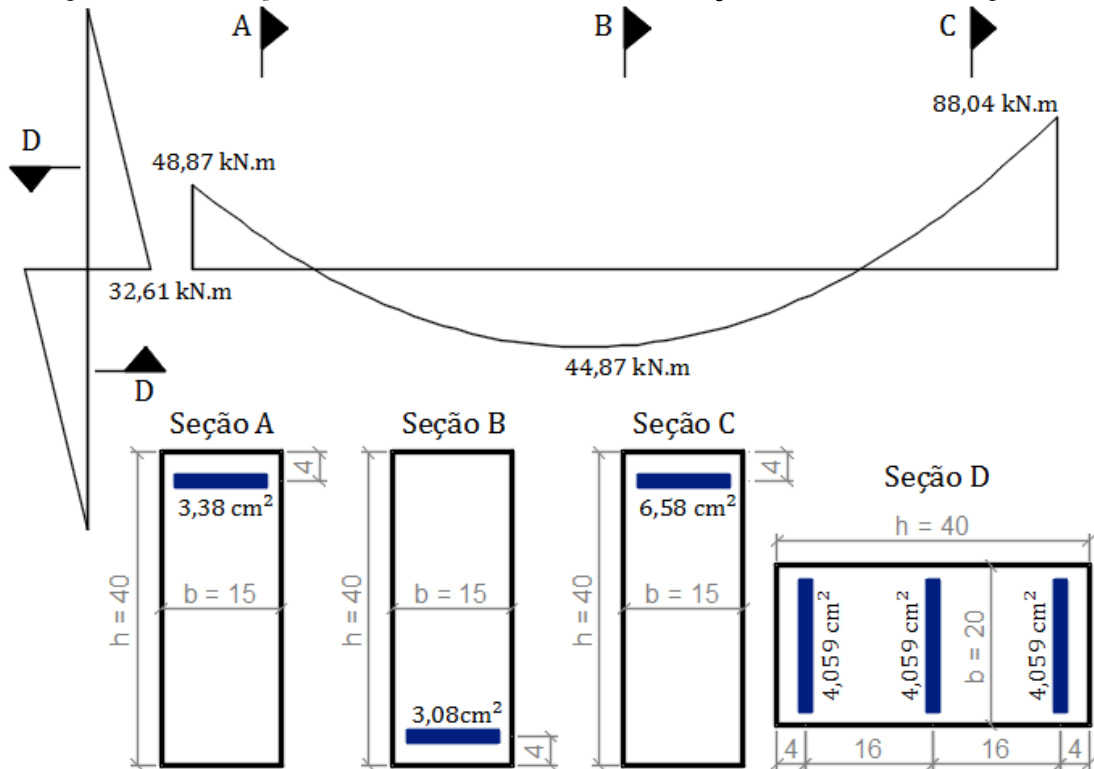
Fonte: Autor.

Figura 6-4 – Exemplo 1.2: Seções armadas com redistribuição de 25%



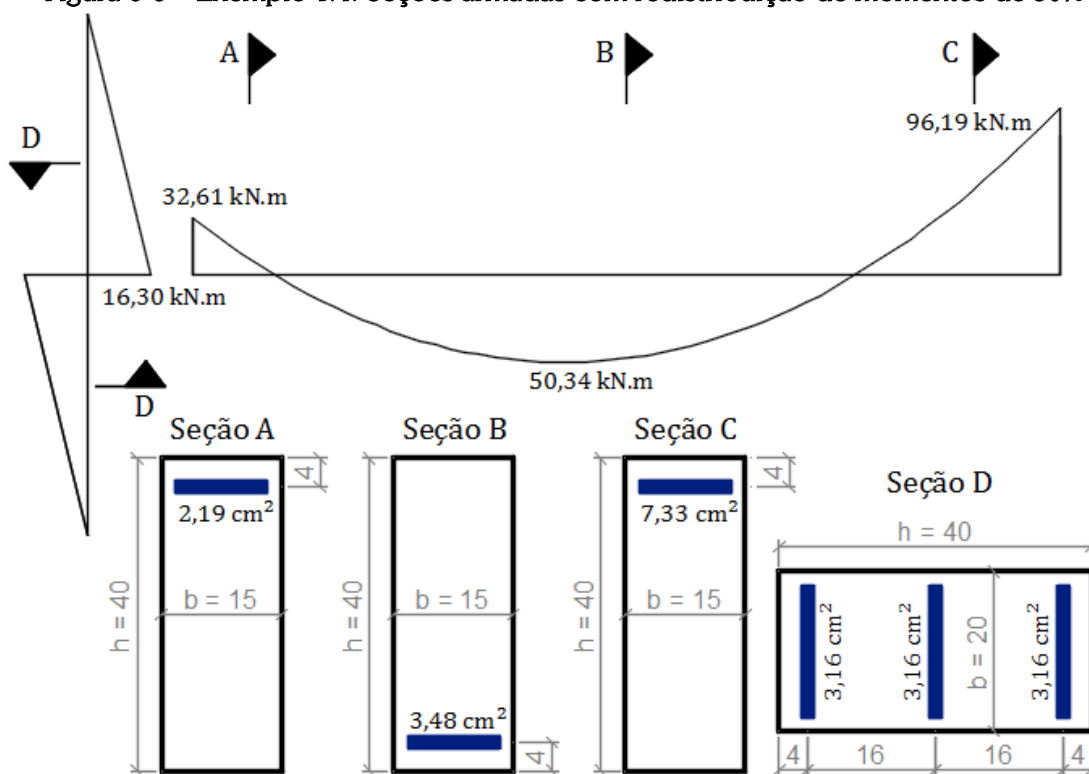
Fonte: Autor.

Figura 6-5 – Exemplo 1.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%



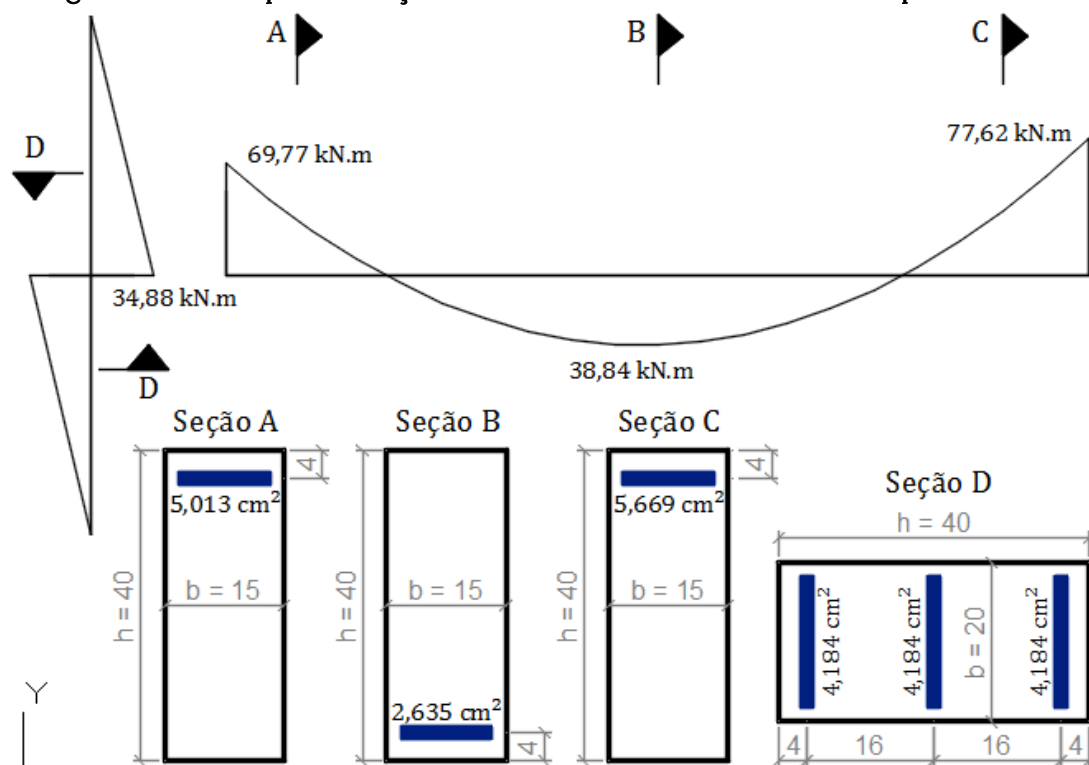
Fonte: Autor.

Figura 6-6 – Exemplo 1.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%



Fonte: Autor.

Figura 6-7 – Exemplo 1.5: Seções armadas com análise não-linear simplificada



Fonte: Autor.

Apresentados os valores característicos e de cálculo das variáveis, os parâmetros de média e desvio padrão para a análise de confiabilidade são determinados a partir dos modelos probabilísticos da seção 5.1, conforme resumido na Tabela 6-2.

Tabela 6-2 – Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 1

Variável	Unid	Dist	Ex 1.1		Ex 1.2		Ex 1.3		Ex 1.4		Ex 1.5	
			μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x
Ng	kN	Normal	984,38	98,44	984,38	98,44	984,38	98,44	984,38	98,44	984,38	98,44
Nq	kN	Gumbel	290,63	58,13	290,63	58,13	290,63	58,13	290,63	58,13	290,63	58,13
pg	kN/m	Normal	20,25	2,03	20,25	2,03	20,25	2,03	20,25	2,03	20,25	2,03
pq	kN/m	Gumbel	5,98	1,20	5,98	1,20	5,98	1,20	5,98	1,20	5,98	1,20
bp	cm	Normal	20,3	1,218	20,3	1,218	20,30	1,22	20,30	1,22	20,3	1,218
hp	cm	Normal	40,3	1,814	40,3	1,814	40,30	1,81	40,30	1,81	40,3	1,814
hw	cm	Normal	15,3	0,918	15,3	0,918	15,30	0,92	15,30	0,92	15,3	0,918
bw	cm	Normal	40,3	1,814	40,3	1,814	40,30	1,81	40,30	1,81	40,3	1,814
fc	MPa	Normal	36,60	5,49	36,60	5,49	36,60	5,49	36,60	5,49	36,60	5,49
fy	MPa	Normal	540,0	27,00	540,0	27,00	540,0	27,00	540,0	27,00	540,0	27,00
Ass	cm ²	Normal	4,019	0,0965	3,576	0,0858	4,019	0,0965	3,130	0,0752	4,142	0,0994
Asi	cm ²	Normal	4,019	0,0965	3,576	0,0858	4,019	0,0965	3,130	0,0752	4,142	0,0994
Asc	cm ²	Normal	4,019	0,0965	3,576	0,0858	4,019	0,0965	3,130	0,0752	4,142	0,0994
Asw	cm ²	Normal	4,594	0,1102	3,344	0,0803	3,344	0,0803	2,170	0,0520	4,963	0,1191
di	cm	Lognormal	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238
ds	cm	Lognormal	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238	4,50	1,238
dw	cm	Lognormal	5,00	1,375	5,00	1,375	5,00	1,375	5,00	1,375	5,00	1,375
θ_R	-	Normal	0,955	0,0896	0,955	0,0896	0,955	0,0896	0,955	0,0896	0,955	0,0896

Fonte: Autor.

Os resultados da análise de confiabilidade para os quatro casos do exemplo 1 são apresentados na Tabela 6-3.

Tabela 6-3 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 1

Exemplo		β (Monte Carlo)	Probabilidade de falha	$pf/pf_{1.1}$
1.1	AL s/ red.	4,24	$1,12 \cdot 10^{-5}$	1,00
1.2	AL 25% red.	4,12	$1,88 \cdot 10^{-5}$	1,68
1.3	25% red, M elast. pilar	4,28	$9,18 \cdot 10^{-6}$	0,82
1.4	AL 50% red.	4,01	$2,98 \cdot 10^{-5}$	2,66
1.5	ANL Simplificada	4,28	$9,25 \cdot 10^{-6}$	0,83

Fonte: Autor.

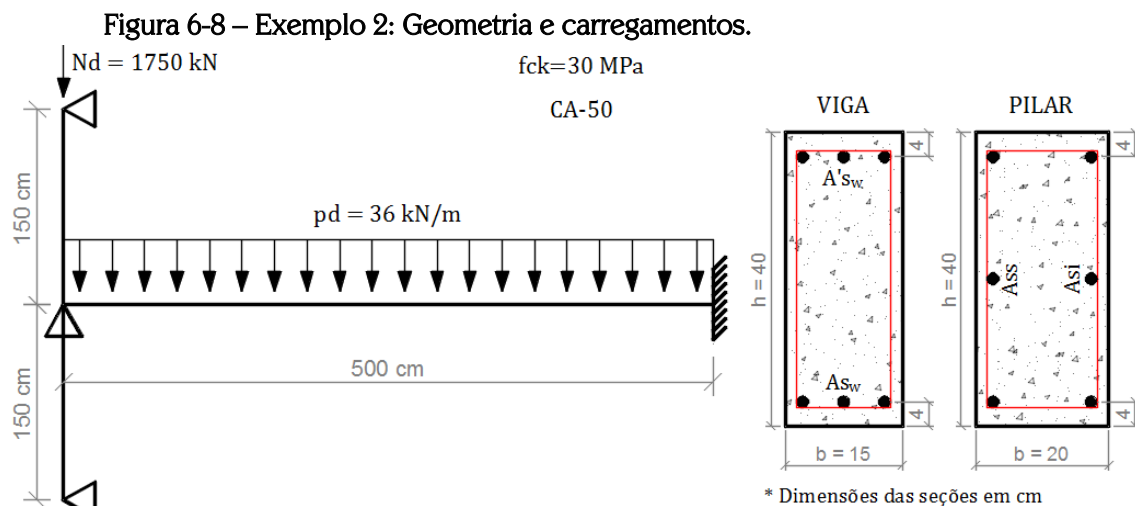
Deste primeiro exemplo, cabe ressaltar que a probabilidade de falha do pilar do caso 1.2, com redistribuição de esforços de 25%, foi aproximadamente 68% superior ao do 1.1, cuja estrutura é dimensionada pela análise elástico-linear. Quanto a análise com redistribuição de 50% do momento do apoio esquerdo (1.4), a probabilidade de falha aumentou 166% em relação ao caso 1.1. Portanto, esses resultados corroboram a tese inicial da dissertação de que não é adequado usar esforços oriundos de análises com redistribuição para dimensionar os pilares.

Quanto ao caso 1.3, que seguiu a recomendação do Eurocode 2 (2004), ao dimensionar o pilar com o momento elástico-linear apesar da redistribuição de momentos na viga, nota-se uma redução de cerca de 18% na probabilidade de falha do pilar em relação ao exemplo 1.1. Resultado semelhante ocorreu no caso 1.5, dimensionado utilizando a análise não-linear simplificada da NBR 6118 (2014).

Com relação aos valores do índice de confiabilidade, no exemplo 1.1 foi próximo ao β alvo de 4,2 definido pelo JCSS (2001) para as situações comuns de engenharia, com riscos medianos de morte e consequências econômicas consideráveis em caso de falha. Nos casos em que os pilares foram dimensionados a partir de análises com redistribuição de momentos, o índice de confiabilidade se afastou negativamente do β alvo.

6.2.2 Exemplo 2

O exemplo 2 é semelhante ao primeiro, porém com a seção transversal do pilar invertida, com 40cm de base e 20cm de altura. As demais propriedades geométricas e de carregamento permanecem as mesmas, conforme ilustrado na Figura 6-8.



São analisados os mesmos cinco casos do exemplo anterior: seções dimensionadas com a análise elástico-linear (2.1); redistribuição de 25% no momento da viga na ligação com o pilar (2.2); redistribuição de 25% para a viga, porém utilizando o momento da análise elástica para o pilar (2.3); redistribuição de 50% do momento (2.4); e consideração aproximada da não-linearidade física da NBR 6118 (2014), com inércia secante das vigas e pilares, respectivamente, 40% e 80% da inércia bruta das seções (2.5).

Em relação às distribuições e parâmetros estatísticos utilizados nas análises de confiabilidade, permanecem os mesmos valores apresentados na Tabela 6-2 da seção 6.2.1, com exceção das armaduras das seções transversais, detalhadas no Apêndice A, e das dimensões da base e altura do pilar, cujos valores se invertem (Tabela 6-4).

Tabela 6-4 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 2

Variável	Unid	Dist	Ex 2.1		Ex 2.2		Ex 2.3		Ex 2.4		Ex 2.5	
			μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x
bp	cm	Normal	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814
hp	cm	Normal	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218
Asi	cm ²	Normal	7,391	0,1774	5,935	0,1424	7,391	0,1774	5,370	0,1289	8,330	0,1561
Ass	cm ²	Normal	7,391	0,1774	5,935	0,1424	7,391	0,1774	5,370	0,1289	8,330	0,1561
Asw	cm ²	Normal	3,193	0,0766	2,347	0,0563	3,193	0,0766	1,535	0,0368	4,008	0,0962

Fonte: Autor.

Os resultados da análise de confiabilidade para os quatro casos do exemplo 2 são apresentados na Tabela 6-5.

Tabela 6-5 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 2

Exemplo		β (Monte Carlo)	Probabilidade de falha	$pf/pf_{1.1}$
2.1	AL s/ red.	4,35	$6,78 \cdot 10^{-6}$	1,00
2.2	AL 25% red.	4,16	$1,57 \cdot 10^{-5}$	2,32
2.3	25% red, M elast. pilar	4,38	$5,94 \cdot 10^{-6}$	0,87
2.4	AL 50% red.	3,98	$3,47 \cdot 10^{-5}$	5,12
2.5	ANL Simplificada	4,52	$3,10 \cdot 10^{-6}$	0,54

Fonte: Autor.

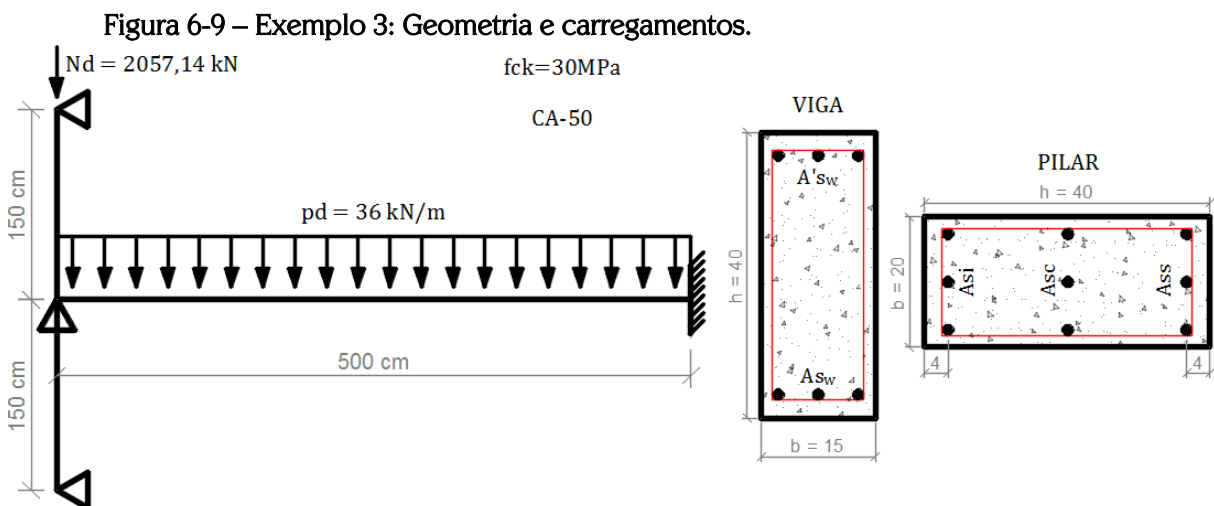
Da mesma forma que no exemplo 1, o dimensionamento de seções transversais com redistribuição de momentos resultou em um aumento da probabilidade de falha do pilar. Contudo, as diferenças relativas foram mais significativas do que no exemplo anterior, com um aumento da probabilidade de 132% entre os casos 2.2 e 2.1, e 412% entre

o 2.4 e o 2.1. Cabe citar também que o índice de confiabilidade do pilar dimensionado pela análise elástico-linear ficou um pouco acima do valor alvo do JCSS (2001) e pelo Model Code (2010). Já o índice β do exemplo com redistribuição de 25% ficou abaixo deste limite de 4,2, e o do caso com 50% de redistribuição ficou abaixo inclusive do limite de 4,0 definido por Nowak e Szerszen (2003).

Quanto ao exemplo 2.3, com redistribuição de momentos no dimensionamento da viga e o momento elástico-linear no do pilar, repete-se o que se observou no exemplo 1, com uma leve queda na probabilidade de falha o pilar em relação ao caso padrão. O mesmo ocorre para o caso 2.5, dimensionado com a análise não-linear simplificada da NBR 6118 (2014).

6.2.3 Exemplo 3

No terceiro exemplo, representado na Figura 6-9, foram mantidas as características da seção transversal do exemplo 01, e alterou-se o valor da força normal de cálculo para $N_d = 2057,14 \text{ kN}$. Em termos de esforço normal reduzido (ν), enquanto nos casos anteriores este era igual a $\nu = 1,02$, para o exemplo 3 utilizou-se $\nu = 1,20$.



Fonte: Autor.

Os cinco casos analisados são equivalentes aos dos exemplos anteriores. Em relação às distribuições e parâmetros estatísticos utilizados nas análises de confiabilidade, permanecem os mesmos valores apresentados para o exemplo 1, na Tabela 6-2 da seção 6.2.1, com exceção das armaduras da seção transversal do pilar, detalhadas no Apêndice

A, e dos valores dos esforços normais. Os parâmetros de média e desvio padrão que diferem do exemplo 3 são expostos na Tabela 6-6.

Tabela 6-6 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 3

Variável	Unid	Dist	Ex 3.1		Ex 3.2		Ex 3.3		Ex 3.4		Ex 3.5	
			μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x
Ng	kN	Normal	1157,1	115,71	1157,1	115,71	1157,1	115,71	1157,1	115,71	1157,1	115,71
Nq	kN	Gumbel	341,63	68,33	341,63	68,33	341,63	68,33	341,63	68,33	341,63	68,33
Asi	cm ²	Normal	6,380	0,1531	5,935	0,1424	6,380	0,1531	5,492	0,1318	6,504	0,1561
Asc	cm ²	Normal	6,380	0,1531	5,935	0,1424	6,380	0,1531	5,492	0,1318	6,504	0,1561
Ass	cm ²	Normal	6,380	0,1531	5,935	0,1424	6,380	0,1531	5,492	0,1318	6,504	0,1561

Fonte: Autor.

Os resultados da análise de confiabilidade para os quatro casos do exemplo 3 são apresentados na Tabela 6-7.

Tabela 6-7 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 3

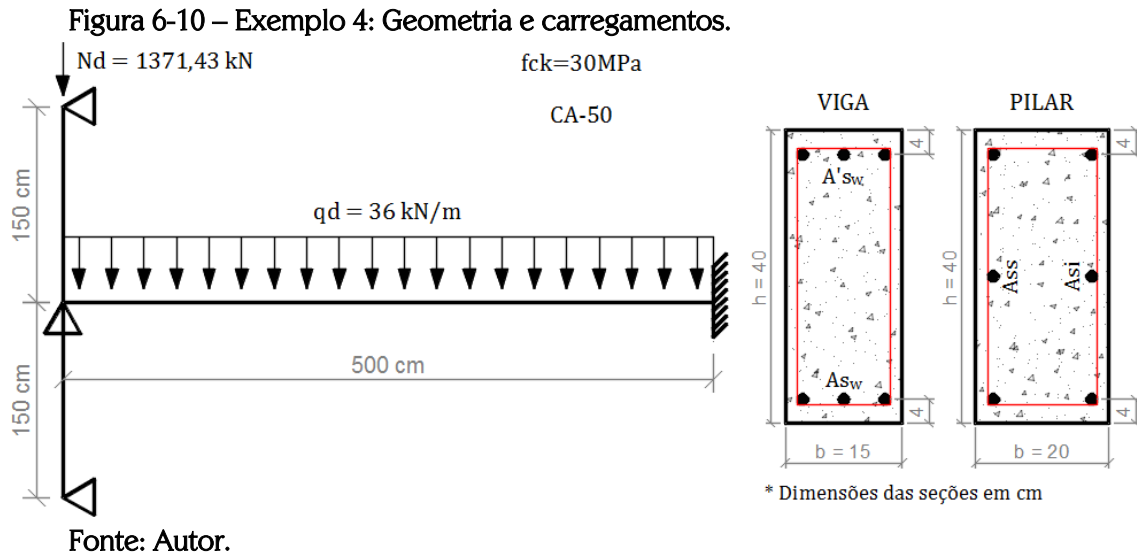
Exemplo		β (Monte Carlo)	Probabilidade de falha	$pf/pf_{1.1}$
3.1	AL s/ red.	4,40	$5,39 \cdot 10^{-6}$	1,00
3.2	AL 25% red.	4,27	$9,58 \cdot 10^{-6}$	1,78
3.3	25% red, M elast. pilar	4,42	$4,86 \cdot 10^{-6}$	0,90
3.4	AL 50% red.	4,18	$1,45 \cdot 10^{-5}$	2,70
3.5	ANL Simplificada	4,52	$4,52 \cdot 10^{-6}$	0,84

Fonte: Autor.

Observam-se resultados semelhantes aos anteriores. No entanto, cabe ressaltar que a probabilidade de falha de todos os cinco casos foi inferior à observada anteriormente, e que os índices de confiabilidade estão acima ou muito próximos à confiabilidade alvo do JCSS (2001) e do Model Code (2010).

6.2.4 Exemplo 4

No quarto exemplo, foram mantidas as características da seção transversal do exemplo 02, e reduziu-se o valor do esforço normal atuante de $\nu = 1,02$ para $\nu = 0,80$, conforme ilustrado na Figura 6-10.



São analisados cinco casos para o exemplo 4: seções dimensionadas com a análise elástico-linear (4.1); redistribuição de 25% no momento da viga na ligação com o pilar (4.2); redistribuição de 25% para a viga, porém utilizando o momento da análise elástica para o pilar (4.3); redistribuição de 35% no momento da viga na ligação com o pilar (4.4); e análise não-linear simplificada da NBR 6118:2014 (4.5). Não foi feito um exemplo com redistribuição de 50% de momentos porque a taxa de armadura para a seção do pilar seria muito inferior à utilizada em projeto, de modo que este caso não teria aplicação prática.

Com relação às distribuições e parâmetros estatísticos utilizados nas análises de confiabilidade, permanecem os mesmos valores apresentados para o exemplo 2, com exceção das armaduras da seção transversal do pilar, detalhadas no Apêndice A, e dos valores dos esforços normais. Os parâmetros de média e desvio padrão que diferem do exemplo 2 são expostos na Tabela 6-9.

Tabela 6-8 - Distribuições de probabilidade e parâmetros das variáveis do exemplo 3

Variável	Unid	Dist	Ex 4.1		Ex 4.2		Ex 4.3		Ex 4.4		Ex 4.5	
			μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x	μ_x	σ_x
Ng	kN	Normal	771,43	77,14	771,43	115,71	771,43	77,14	771,43	77,14	771,43	77,14
Nq	kN	Gumbel	227,73	45,55	227,73	45,55	227,73	45,55	227,73	45,55	227,73	45,55
bp	cm	Normal	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814	40,30	1,814
hp	cm	Normal	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218	20,30	1,218
Asi	cm ²	Normal	2,911	0,0699	1,935	0,0464	2,911	0,0699	1,570	0,0377	3,912	0,0939
Ass	cm ²	Normal	2,911	0,0699	1,935	0,0464	2,911	0,0699	1,570	0,0377	3,912	0,0939
Asw	cm ²	Normal	3,193	0,0766	2,347	0,0563	3,193	0,0766	1,535	0,0368	4,008	0,0962

Fonte: Autor.

Os resultados da análise de confiabilidade para os quatro casos do exemplo 4 são apresentados na Tabela 6-9.

Tabela 6-9 – Resultados da análise de confiabilidade do exemplo 4

Exemplo	β (Monte Carlo)	Probabilidade de falha	$pf/pf_{1.1}$
4.1	4,10	$2,03 \cdot 10^{-5}$	1,00
4.2	3,89	$4,97 \cdot 10^{-5}$	2,44
4.3	4,14	$1,73 \cdot 10^{-5}$	0,85
4.4	3,82	$6,62 \cdot 10^{-5}$	3,26
4.5	4,30	$8,50 \cdot 10^{-6}$	0,42

Fonte: Autor.

De modo geral, os resultados são semelhantes aos exemplos anteriores, em termos de probabilidade de falha relativa entre os casos. Todavia, cabe destacar que o índice de confiabilidade de todos os casos, com exceção do 4.5, dimensionado com a análise não-linear simplificada da NBR 6118 (2014), é inferior à confiabilidade alvo do JCSS (2001). Apesar disso, apenas os casos dimensionados com redistribuição de esforços tiveram índice β abaixo do limite de 4,0 definido por Nowak e Szerszen (2003).

6.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Dos resultados obtidos para os quatro exemplos, pode-se observar que o dimensionamento da estrutura por meio de análises com redistribuição de esforços reduziu a confiabilidade dos pilares, quando comparados aos que foram dimensionados com a análise elástico-linear. Em termos numéricos, para uma redistribuição de 25%, o aumento da probabilidade de falha variou entre 78% e 144%. Destaca-se também que esse aumento ultrapassou 400% em um dos exemplos com redistribuição de 50%.

Em contrapartida, o uso do momento elástico-linear para dimensionar os pilares, nos casos com redistribuição de esforços nas vigas, resultou em um aumento da confiabilidade nos pilares, mesmo comparado aos pórticos dimensionados apenas com a análise elástico-linear. Esse aumento da probabilidade de falha variou entre 10% e 18%.

O mesmo ocorreu para os casos dimensionados por meio da análise não-linear simplificada da NBR 6118 (2014), os quais resultaram nas menores probabilidades de falha para os pilares dentre as situações analisadas. Em um dos exemplos, a redução na probabilidade de falha foi de mais de duas vezes em relação ao caso padrão, dimensionado por meio da análise elástico linear.

Em termos de índice de confiabilidade, nas situações dimensionadas a partir da análise elástico-linear, estes ficaram próximos ao β alvo de 4,2 definido pelo JCSS (2001). Já para os casos dimensionado por meio de análises com redistribuição, o índice de confiabilidade ficou abaixo do limite de 4,2 em todos os exemplos, com exceção do terceiro. Ademais, em alguns dos casos dimensionados com redistribuição de esforços, o índice de confiabilidade ficou abaixo do limite de 4,0, estabelecido por Nowak e Szerszen (2003), atingindo um valor mínimo de 3,82 para a redistribuição de 35% do exemplo 4.

Da comparação entre os exemplos, nota-se que uma menor taxa de armadura para a seção transversal dos pilares parece estar associada a valores mais baixos de confiabilidade, em função da maior variabilidade do concreto em relação à armadura. A redução da altura da seção transversal também impactou negativamente na confiabilidade do pilar.

Por fim, os resultados sugerem que seria recomendado propor uma alteração na norma brasileira, de modo que não se utilizem momentos advindos de análises com redistribuição de esforços em vigas para o dimensionamento de pilares, seguindo nesse ponto o que é prescrito pelo Eurocode 2 (2004). Cabe, entretanto, realizar estudos mais aprofundados neste tema, com maior número de exemplos e situações analisadas, para confirmar esses resultados.

7 CONCLUSÃO

“All is in a man’s hand and he lets it all slip from cowardice, that’s an axiom.”

(Fiodor Dostoiévski)

Este trabalho está inserido no contexto da mecânica dos materiais, da análise e projeto de estruturas e da segurança estrutural através da teoria da confiabilidade. De forma geral, o objetivo é avaliar e comparar o índice de confiabilidade de pilares de concreto armado, dimensionados por meio de análises elástico-lineares e de análises com redistribuição de esforços.

Enquanto a análise elástica-linear é usual na prática de projeto, análises com a consideração do comportamento plástico dos materiais podem permitir economias para a estrutura e distribuições construtivas mais adequadas para as armaduras. Nessas análises, as redistribuições de momentos em vigas alteram os esforços transmitidos aos pilares, os quais dependem da relação de rigidezes entre viga e pilar, do momento de plastificação da viga na seção de ligação e do carregamento atuante.

Assim, levantou-se a hipótese de que o dimensionamento de pilares com momentos advindos de análises com redistribuição de esforços em vigas, procedimento permitido pela NBR 6118 (2014), pode reduzir a confiabilidade dos pilares. O ACI 318 (2014) e o Eurocode 2 (2004), por exemplo, não admitem essa possibilidade. Esse assunto pode ser melhor compreendido por meio de um estudo de confiabilidade, que depende da utilização de um modelo mecânico que represente de modo preciso o comportamento real da estrutura.

Dessa forma, foi desenvolvido um modelo para verificar a capacidade resistente de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal, o qual é definido em termos do momento resistente último da seção transversal para dado esforço normal. Utiliza-se um procedimento iterativo com base nas condições de equilíbrio da seção transversal, nas relações constitutivas dos materiais e de compatibilidade de deformações. Esse modelo foi validado a partir de resultados experimentais de 52 pilares de concreto armado obtidos na literatura, e demonstrou resultados satisfatórios. Com os dados experimentais também foi possível obter parâmetros estatísticos para uma variável aleatória de erro do modelo de resistências, utilizada nas análises de confiabilidade.

Além do modelo de resistências, foi desenvolvido um modelo mecânico, baseado em análise não-linear, para determinar os esforços internos efetivos em pórticos de

concreto armado. A fim de representar o comportamento não-linear do concreto armado, foram utilizados diagramas momento-curvatura, os quais fornecem a inércia da seção transversal de acordo com os esforços internos a que está submetida. Os diagramas foram implementados para seções submetidas à flexão simples e à flexo-compressão normal. A análise não-linear do modelo mecânico consiste, portanto, em um procedimento iterativo, com a discretização da estrutura em pequenos elementos de barra, e sua resolução pelo método dos deslocamentos. Com os esforços internos obtidos, determina-se a rigidez de cada elemento por meio do diagrama momento-curvatura, repetindo-se o processo até a convergência.

A partir desses modelos mecânicos, desenvolveu-se um estudo de confiabilidade para pilares de concreto armado, via Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância, com a utilização da *toolbox FERUM 4.1*. A função de estado limite, utilizada para determinar a ocorrência ou não de falha no pilar, compara o momento resistente da seção transversal, multiplicado pelo erro de modelo de resistências, com o momento solicitante máximo do pilar.

O estudo de confiabilidade consistiu de quatro exemplos de pórticos planos, simulando pilares de extremidade de concreto armado. Procurou-se manter os exemplos similares entre si, para avaliar a influência da variação de um dado parâmetro, como o valor do esforço normal específico e das dimensões da seção transversal do pilar.

Em cada exemplo foram analisados cinco casos, sendo o primeiro dimensionado com uma análise elástico linear; o segundo com uma redistribuição de esforços de 25%; o terceiro com redistribuição de 25% apenas na viga, utilizando o momento da análise elástico-linear para o pilar; no quarto exemplo foi feita uma redistribuição mais significativa, de 35% ou 50%; e o quinto consistiu na análise não-linear simplificada, proposta pela NBR 6118 (2014), na qual a inércia da viga e do pilar são tomadas, respectivamente, como 40% e 80% da inércia bruta.

Em todos os exemplos, o uso de análises com redistribuição de esforços reduziu a confiabilidade dos pilares, quando comparados aos casos dimensionados pela análise elástico linear. Enquanto o índice de confiabilidade dos casos sem redistribuição ficou próximo à faixa entre 4,2 e 4,3, conforme definido pelo JCSS (2001) e pelo CEB-FIP (2010), em três dos quatro exemplos com redistribuição o índice de confiabilidade ficou abaixo destes valores. Em alguns dos exemplos dimensionados com redistribuição, o índice β ficou inclusive abaixo de 4,0, limite estabelecido por Nowak e Szerszen (2003), tendo

atingido um valor mínimo de 3,82. Em termos de probabilidade de falha, houve um aumento entre 78% e 144% para uma redistribuição de momentos de 25%, e entre 166% e 412% para redistribuições maiores.

Em contrapartida, a recomendação do Eurocode 2 (2004), de dimensionar os pilares com o momento da análise elástico-linear caso sejam feitas redistribuições nas vigas, aumentou o índice de confiabilidade dos pilares, ainda que comparado aos casos sem redistribuição. Também cabe destacar que a análise não-linear simplificada resultou nos maiores índices de confiabilidade (menores probabilidades de falha) das situações avaliadas.

É importante ressaltar que os valores obtidos para o índice de confiabilidade, e conseqüentemente para a probabilidade de falha, são muito sensíveis aos parâmetros de média e desvio padrão utilizados para as variáveis aleatórias. Desta forma, a comparação com um índice de confiabilidade alvo deve ser feita com parcimônia. No entanto, ainda que fosse utilizado algum coeficiente inadequado para alguma das variáveis, esse erro não invalidaria os resultados. Quantitativamente, pode haver mudança do índice de confiabilidade, mas, qualitativamente, os resultados relativos entre os diversos casos permaneceriam válidos, pois as conclusões obtidas da comparação entre eles tenderiam a manter-se. A padronização das variáveis aleatórias, melhoraria, portanto, a qualidade dos valores de β obtidos em uma análise de confiabilidade.

A partir dos resultados apresentados, observa-se que o uso de análises com redistribuição de momentos, ainda que decorrentes de redistribuições em vigas, pode não ser adequado para o dimensionamento de pilares por reduzir a confiabilidade destes elementos. De forma conservadora, pode-se seguir a recomendação do Eurocode 2 (2004) e utilizar momentos elástico-lineares sem nenhuma redistribuição para o dimensionamento de pilares, caso se adote uma análise com redistribuição de esforços para as vigas. Destaca-se, contudo, que a redução do índice de confiabilidade para a maioria dos casos analisados não foi tão expressiva, e que uma conclusão mais efetiva requer estudos mais aprofundados sobre o tema.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTUROS

Com relação à estudos futuros, uma primeira possibilidade é o refinamento dos modelos mecânicos desenvolvidos, a fim de que representem, de forma ainda mais precisa, a resposta da estrutura, sem que o custo computacional fique proibitivo. Outra

sugestão é avaliar, por meio de resultados experimentais, o modelo mecânico associado à obtenção de esforços, da mesma forma que foi feito para o modelo de resistências. Desse estudo, poderia ser obtida uma variável aleatória do erro de modelo.

Outro assunto de grande interesse na área é a padronização dos parâmetros estatísticos e das distribuições de probabilidade utilizadas para modelar as variáveis aleatórias. Essa padronização é importante tanto para avaliar se o índice de confiabilidade das estruturas é efetivamente adequado, quanto para permitir a comparação entre resultados de diferentes estudos de confiabilidade.

Enquanto o foco deste trabalho está na confiabilidade dos pilares, outro estudo interessante seria avaliar, de forma conjunta, a probabilidade de falha das vigas e dos pilares. Existe, pois, a possibilidade de que a situação crítica dos exemplos analisados fosse a falha das vigas, e não dos pilares. Ressalta-se, contudo, que se pode admitir um índice de confiabilidade alvo mais baixo para vigas, devido à capacidade de redistribuir esforços pela estrutura e também porque tendem a dar sinais antes da ocorrência da falha, ao contrário do que ocorre em pilares.

Por fim, a principal sequência aos estudos iniciados neste trabalho está na avaliação da confiabilidade para outras situações de projeto, podendo ser feitas variações nas seções dos pilares, nas armaduras, nos padrões de carregamentos e nas demais variáveis. Além disso, existem outros casos a serem analisados, tais como o de pilares de canto submetidos à flexão composta oblíqua. O uso de armaduras maiores do que a efetivamente necessária na seção da viga de ligação com o pilar também pode afetar a confiabilidade do pilar, na medida em que aumentaria o momento de plastificação da viga naquela seção. Uma terceira situação a ser avaliada é a de pilares intermediários com momentos fletores diferentes à esquerda e à direita, e o efeito que a utilização da média destes momentos tem na probabilidade de falha do pilar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADORNO, A. L. C. **Análise teórica e experimental de pilares em concreto simples e armado sob flexo-compressão reta**. 2004. 399 p. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil). Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2004.
- ALMEIDA, A. F. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil, Ênfase em Estruturas). 2008. 147 p. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- ALVES, L. R. M. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal utilizando programação matemática e algoritmos genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). 2013. 92 p. Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2013.
- ALVES, B. S.; AFONSO, S. M. B.; MOTTA, R. S. **Projeto ótimo de pórtico de concreto armado baseado em confiabilidade**. *XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, 2017.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-14: Building Code Requirements for Structural Concrete**. Farmington Hills, 2014.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. v. 2. 420 p.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design: Decision, risk and reliability**. New Jersey: John Wiley & Sons, 1984. v. 2. 562p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12655: Concreto – Preparo, controle e recebimento**. Rio de Janeiro, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2003.
- ARAÚJO, J. M. **A confiabilidade no Projeto de Pilares de Concreto Armado**. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, n. 2, p. 1-8, 2001.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. v. 3.
- AUFIERO, L. **Estabilidade de Colunas Isostáticas de Concreto Armado**. 1977. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1977.
- BALAN, T. A.; FILIPPOU, F. C.; POPOV, E. P. **Constitutive Model for 3D Cyclic Analysis of Concrete Structures**. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 123, n. 2, p. 143-153, 1997

BAKER, John; HEYMAN, Jacques. **Plastic design of frames**, vol. 1. London: Cambridge University Press, 1969.

BORDIGNON, R.; KRIPKA, M. **Dimensionamento Otimizado da Seção Transversal de Pilares em Concreto Armado Submetidos à Flexo-Compressão**. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural. ASAAE*. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Passo Fundo. Passo Fundo, 2013. 21 p.

BORGES, A. C. L. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Solicitados à Flexo-Compressão Oblíqua**. 1999. 98 p. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo: São Carlos, 1999.

BOURINET, J. M. **FERUM 4.1 User's Guide**. 2010. 21 p. Manual Básico do Usuários - Institut Français de Mécanique Avancée, Clermont-Ferrand. Disponível em: < <https://www.sigma-clermont.fr/en/ferum-documentation> >. Acessado em 05/03/2018.

BRANSON, D. E. **Design Procedures for Computing Deflections**. *Journal of the American Concrete Institute*, v. 65, n. 9, p. 730-742, 1968.

CAMPOS FILHO, A. **Análise de Pilares de Concreto Armado Submetidos à Flexo-Compressão Oblíqua**. 1982. 125 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1982.

CAMPOS FILHO, A. **Dimensionamento de Seções Retangulares de Concreto Armado à Flexão Composta Normal**. 2014. 34 p. Apostila UFRGS. Disponível em: <http://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/solicitacoes_normais.pdf>. Acessado em 20/02/2018.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. H. **Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension**. *ACI Journal*, v. 86, n. 6, p. 797-804, 1985.

CASPEELE, R.; SYKORA, M.; TAERWE, L. **Influence of Quality Control of Concrete on Structural Reliability: Assessment Using a Bayesian Approach**. *Materials and Structures*, v. 45, p. 105-116, 2014.

CLAESON, C.; GYLLTOFT, K. **Slender High-Strength Concrete Columns Subjected to Eccentric Loading**. *Journal of Structural Engineering*, v. 124, n. 3, p. 233-240, 1998.

COELHO, J. A. **Confiabilidade de Vigas de Concreto Armado no Estado Limite de Serviço**. 2011. 272 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 2010: final draft**. Paris: *Bulletin D'Information*, 2012. 357 p.

CORNELL C.C. **A probability-based structural code**. *Journal of the American Concrete Institute*, v. 66, n. 12, p. 974-985, 1969.

DAMAS, A. P. **Estudo de Confiabilidade no Projeto de Pilares Esbeltos de Concreto de Alta Resistência**. 2015. 183 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

DANTAS, A. B. **Estudo de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta reta**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil). 2006. 180 p. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

DEGROOT, M. H., SCHERVISH, J. M. **Probability and Statistics**. 4. ed. Boston: Pearson Education, 2011. 893 p.

DINIZ, S. M. C.; FRANGOPOL, D. M. **Reliability Bases for High-Strength Concrete Columns**. *Journal of Structural Engineering*, v. 123, n. 10, p. 1375-1381, 1997.

ECKHARDT, R. **Stan Ulam, John Von Neumann and the Monte Carlo Method**. *Los Alamos Science Special Issue*, v. 15, p. 131-137, 1987.

ELLINGWOOD, B. R.; GALAMBOS, T. V. **Probability-based criteria for structural design**. *Structural Safety*, v. 1, 15-26, 1982.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of Concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings**. Brussels: 2004.

FERREIRA, D. B. **Análise experimental de pilares de concreto armado, reforçados com concreto auto adensável e conectores**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). 2014. 199 p. Escola de Engenharia Civil, Universidade de Goiás, Goiânia, 2014.

FLÓREZ-LOPEZ, J. **Calcul simplifié de portiques endommageables**. *Revue Européenne des Éléments Finitis*, v.2, n.1, p.47-74, 1993.

FONTES, F. F.; PINHEIRO, L. M. **Análise linear com redistribuição e análise plástica de vigas de edifícios**. *Anais do 47º Congresso Brasileiro do Concreto*, p. 72-85, 2005.

FRANGOPOL, D. M., et al. **A New Look at Reliability of Reinforced Concrete Columns**. *Structural Safety*, v. 18, n. 2/3, p. 123-150, 1996.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: Fundamentos do Projeto Estrutural**. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 298p.

FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto: Solicitações Normais**. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

GHALI, A.; FAVRE, R. **Concrete Structures: Stresses and Deformations**. *Chapman and Hall*, Nova Iorque: 1986. 352 p.

GOMES, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. 2001. 231p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HASOFER A. M.; LIND N. C. **Exact and invariant second moment code format**. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE100, p. 111-121, 1974.

HILL, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. New York: Oxford University Press Inc, 1998. 355 p.

HOGNESTAD, E. **Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**. 1951. 134 f. University of Illinois Bulletin, v. 49, n. 33 – University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana-Champaign, 1951.

HORNE, M. R. **Plastic theory of structures**. London: Pergamon Press, 1979.

IBRACON. **Comentários e Exemplos de Aplicação da ABNT NBR 6118:2014**. São Paulo: Instituto Brasileiro do Concreto, 2015. 484 p.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY – JCSS. **Probabilistic Model Code**. Joint Committee on Structural Safety, 12th draft, 2001.

KHUNTIA, M.; GHOSH, S. K. **Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach**. *ACI Structural Journal*, v. 101, n. 3, p. 351-363, 2004.

KIM, J. K.; YANG, J. K. **Buckling behavior of slender high-strength concrete columns**. *Engineering Structures*, v. 17, n. 1, p. 39-51, 1995.

KIM, J. K.; LEE, S. S. **The behavior of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending**. *Engineering Structures*, v. 23, p. 1518-1528, 2000.

KWON, M.; SPACONE, E. **Three-dimensional finite element analyses of reinforced concrete columns**. *Computer and Structures*, v. 80, n. 2, p. 199-212, 2002.

LA BORDERIE, C.; MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. **Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings**. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Rapport Interne, n. 123, 1991.

LIMA JR., H. C. **Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos à flexo-compressão reta com e sem adição de fibras metálicas**. 2003. 324 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

LORIGGIO, D. D. **Lajes Alongadas de Pontes Dimensionadas pela Teoria das Charneiras Plásticas**. 1993. Tese de Concurso para Prof. Titular. UFSC.

LORIGGIO, D. D. **Notas de Aula “Estruturas em regime elastoplástico” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil**. 2001. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

MAGALHÃES, F. C. **A Problemática dos Concretos não Conformes e sua Influência na Confiabilidade de Pilares de Concreto Armado**. 2014. 262 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

MAGALHÃES, F. C.; REAL, M. V.; SILVA FILHO, L. C. P. **The Problem of Non-Compliant Concrete and Its Influence on the Reliability of Reinforced Concrete Columns.** *Materials and Structures*, v. 49, n. 4, p. 1485-1497, Apr. 2016.

MAIER-LEIBNITZ, H., (1929), **Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-Form aus St. 37.** *Bautechnik*, Vol.7, 313, 1929.

MAPA, D. L. S. **Confiabilidade estrutural de pórticos metálicos planos.** 2016. 134 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

MARCOLAN JR., A. C. **Influência de Distribuições de Probabilidade Ajustadas a Propriedades Mecânicas sobre Probabilidades de Falha Estrutural.** 2016. 139 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

MASSONNET, C. E.; SAVE, M. A. **Plastic analysis and design: Beams and Frames.** New York: Blaisdell Publishing, 1965.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure.** 1984. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.

MAZETTO, G. S. **Estudo da Flexo-Compressão para Pilares em Concretos de Alto Desempenho.** 2017. 231 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis.** 2. Ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. 482 p.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estruturas, propriedades e materiais.** São Paulo: Editora Pini, 1994.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural Reliability: Analysis and prediction.** 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2018. 506 p.

MELLO, F. **Modelo elastoplástico para avaliação da capacidade resistente de pórticos planos de concreto armado.** *41º Congresso Brasileiro de Concreto*, Salvador, 1999.

MELO, C. E. L. **Análise experimental e numérica de pilares birrotulado de concreto armado submetidos a flexo-compressão normal.** Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil). 2009. 415 p. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

MELO, A.M.C.; VAZ, L.E.; SHEHATA, I.AE.M. **Optimum design of RC plane frames with nonlinear response.** *ISSMO Conference on Engineering Design Optimization*, v. 1, p. 165–172, 2001.

MIRZA, S. A. **Reliability-Based Design of Reinforced Concrete Columns.** *Structural Safety*, v. 18, n. 2/3, p. 179-194, 1996.

MIRZA, S. A.; HATZINIKOLAS, M.; MacGREGOR, J. **Statistical description of the strength of concrete.** *Journal of the Structural Division*, ASCE 105(6), 1021-1037, 1979.

MIRZA, S. A.; MacGREGOR, J. G. **Variability of mechanical properties of reinforcing bars.** *Journal of the Structural Division*, ASCE 105(5), 921-937, 1979.

MIRZA, S. A., SKRABEK, B. W. **Reliability of Short Composite Beam-Column Strength Interaction.** *Journal of Structural Engineering*, v. 117, n. 8, p. 2320-2339, 1991.

MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability Engineers.** 6. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. 832 p.

MONTOYA, P. J.; MESEGUER, Á. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón Armado.** 12. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 1987.

MORETTO, O. **Curso de hormigón armado.** 2. ed. Buenos Aires: Libreria "El Ateneo", 1970.

MÖRSCH, E. **Concrete-Steel Construction.** Tradução da 3a Edição por E. P. Goodrich, New York: *McGraw-Hill Book Co.*, 1909. 368 p.

MOURA, M. W. **Avaliação da confiabilidade de longarinas de concreto protendido de pontes rodoviárias em relação ao estado limite último de flexão.** 2019. 209 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

NASCIMENTO, P. P.; GOMES, R. B.; BORGES, L. L. J.; DAVID, D. L. **Análise experimental de pilares de concreto armado reforçados com concreto auto-adensável e conectores.** *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 5, n. 3, p. 305-315, 2012.

NATAF A. **Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données.** *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, v. 255, p. 42-43, 1962.

NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de Modelos Mecânicos, de Confiabilidade e de Otimização para Aplicação em Estruturas de Concreto Armado.** 2010. 345 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S. **Teoria da Confiabilidade Aplicada na Avaliação da Influência da Não-Linearidade Geométrica em Pórticos de Concreto Armado.** *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 13, n. 58, p. 84-98, 2011.

NOGUEIRA, H. A. T. **Avaliação da Confiabilidade de Pilares Curtos em Concreto Armado Projetados Segundo a NBR 6118:2003.** 2006. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures.** Nova Iorque: McGraw-Hill, 2000. 338 p.

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. **Calibration of design code for buildings (ACI 318): Part 1 – Statistical models for resistance.** *ACI Structural Journal*, New York, v. 100, n. 3, p. 377-382, 2003.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.** 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1991. 666 p.

PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced concrete structures.** New York: John Wiley & Sons, 1975, 800p.

PEREIRA, J. S. **Modelo não Linear de Viga para a Obtenção de Esforços em Serviço Aplicado a Lajes de Barragem de Enrocamento com Face de Concreto.** 2009. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

PEREIRA, V. W. A.; TORRES, J. V. S. **Avaliação da segurança de um pórtico plano de concreto armado utilizando o Ansys.** *XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, 2016.

PINTO, V. S. **Dimensionamento de Pilares de Concreto com Seção Transversal Retangular Usando Envoltórias de Momentos.** 2017. 312 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil - Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

PONTE, D.S. **Estudo do comportamento e otimização do projeto estrutural de edifícios de concreto armado.** 2015. 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

POPOVICS, S. **A review of Stress-Strain Relationships for Concrete.** *ACI Journal*, v. 67, n. 3, p. 243-248, 1970.

RACKWITZ R.; FIESSLER B. **Structural Reliability under combined load sequences,** *Computers & Structures*, v. 9, p. 489-494, 1978.

RANGANATHAN, R. **Structural Reliability Analysys and Design.** Mumbai, India: Jaico Publishing House, 1999. 439 p.

REAL, M. R. **Análise Probabilística de Estruturas de Concreto Armado, sob Estado Plano de Tensão, através do Método dos Elementos Finitos.** 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

RIBEIRO, K. **Diagramas para Verificação de Pilares Retangulares em Concreto Armado Submetidos à Flexão Composta Normal.** 2011. 308 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

ROSENBLATT M. **Remarks on a multivariate transformation,** *Annals of Mathematical Statistics*, v. 23, p. 470-472, 1952.

RUIZ, S. E.; AGUILAR, J. C. **Reliability of Short and Slender Reinforced-Concrete Columns.** *Journal of Structural Engineering*, v. 120, n. 6, p. 1850-1865, June 1994.

RÜSCH, H. **Concreto armado e protendido: propriedades dos materiais e dimensionamento.** Do original: Hórmigon Armado y Hórmigon Pretensado. Tradução de Yára Penha Melichar. Rio de Janeiro: Campus, 1981. 396p.

SAENZ, L. P. **Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete," by Desayi and Krishnan.** *ACI Journal*, v. 61, n. 9, p. 1229-1235, 1964.

SALLES, H. S.; LOMEU, P. F. S.; PETERS, F. C.; MANSUR, W. J. **Otimização de um pórtico tridimensional de concreto armado.** *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, v. 2, p. 6-14, 2018.

SANTIAGO, W. C.; BECK, A. T. **A new study of Brazilian concrete strength conformance.** *IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 10, n. 4, p. 906-923, 2017.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. **Reliability of Beams Designed in Accordance With Brazilian Codes.** *IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 7, n. 5, p. 723-746, 2014.

SANTOS, L. M. **Cálculo de Concreto Armado, Segundo a Nova NB-1 e o CEB.** São Paulo: LMS, 1983.

SANTOS, L. M. **Sub-Rotinas Básicas do Dimensionamento de Concreto Armado.** São Paulo: Editora THOT, 1994.

SANTOS, J. R. F.; NETA, I. C. A.; LIMA, H. J. N.; MELO, C. E. L.; OLIVEIRA, M. H. **Análise experimental de pilares de concreto armado reforçados com PRFC submetidos a flexo-compressão normal.** *Anais do 59º Congresso Brasileiro do Concreto*, Bento Gonçalves, 2017.

SCADELAI, M. A. **Dimensionamento de Pilares de Acordo com a NBR6118:2003.** 2004. 124 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

SCANLON, A. **Time dependent deflections of reinforced concrete slabs.** 1971. PhD Thesis, University of Alberta, Edmonton, Alta, Canada, 1971.

SENE, P. R. **Contribuições para a Análise de Pórticos Planos com Não-Linearidade Material.** 2000. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

SENE, P. R.; LORIGGIO, D. D. **Análise Limite de Estruturas de Concreto Armado.** In: 43º Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON, 2001, Foz do Iguaçu. *Anais do 43º Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON.* São Paulo: IBRACON, 2001.

SIAS, F. M. **Dimensionamento Ótimo de Pilares de Concreto Armado**. 2014. 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

SILVA, A. A. E. F. **Contribuições ao estudo da não-linearidade física em vigas de concreto armado**. 2012. 173 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2012.

SILVA, E.E. **Algoritmos Genéticos aplicados no dimensionamento ótimo de estruturas de concreto armado**. *5º Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, volume único, p. 441–448, 2002.

SILVA JR, J. F. **Dimensionamento de concreto armado**. Ed. Arquitetura e Engenharia. 1971.

SMANIOTTO, A. **Dimensionamento e Detalhamento Automático de Pilares Retangulares Submetidos à Flexão Composta Oblíqua**. 2005. 220 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas: Formulações Clássicas**. São Paulo: Livraria da Física, 2016. 422 p.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 2007. 327 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

TORRES, J.V.S. **Otimização de pórticos de concreto armado utilizando o sistema computacional Ansys**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2001.

TSAI, W. T. **Uniaxial Compression Stress-Strain Relation of Concrete**. *Journal of Structural Engineering*, v. 114, n. 9, p. 297-307, 1988.

VENTURINI, W. S.; RODRIGUES, R. O. **Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987. 133 p.

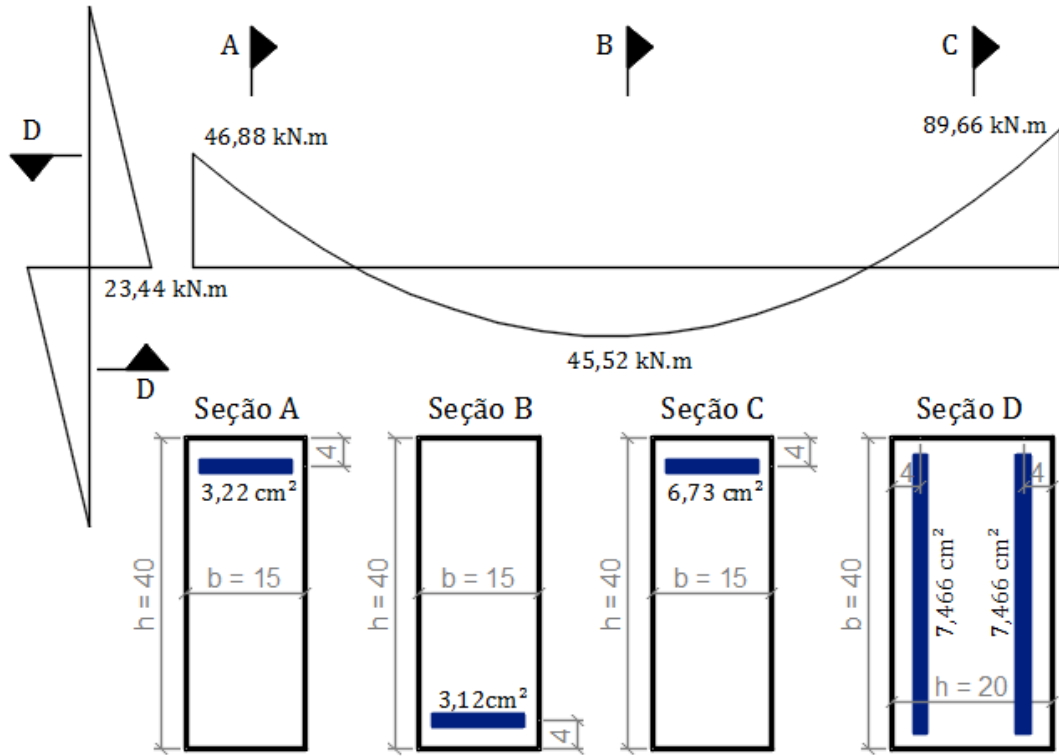
WANG, P. T.; SHAH, S. P.; NAAMAN, A. E. **Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression**. *Journal of the American Concrete Institute*, v. 75, n. 11, p. 603-611, 1978.

WEAVER, W. Jr.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of Framed Structures**. 3. ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

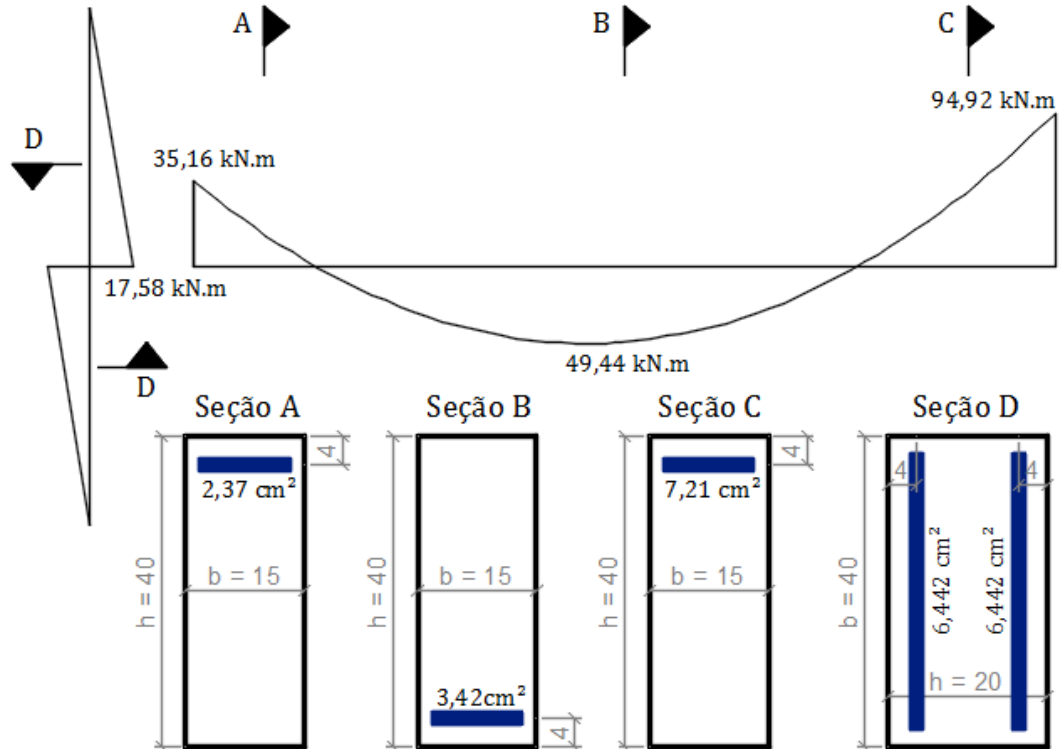
APÊNDICE A – Seções transversais dos exemplos

Figura A.1 – Exemplo 2.1: Seções armadas com análise elástico-linear



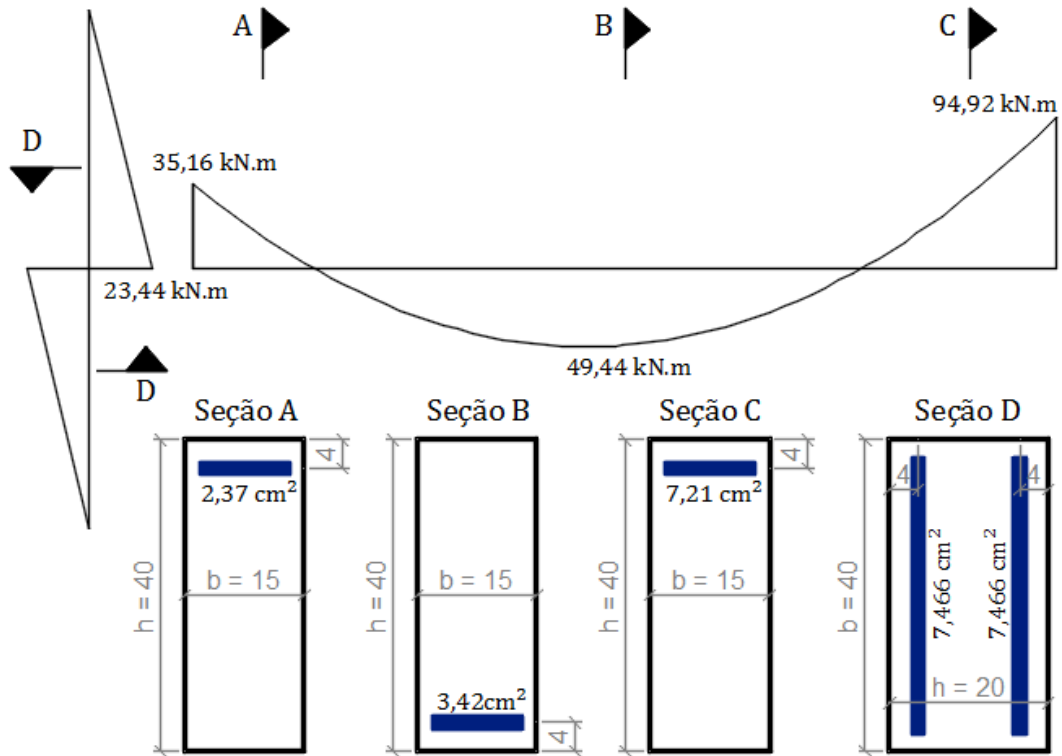
Fonte: Autor.

Figura A.2 – Exemplo 2.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%



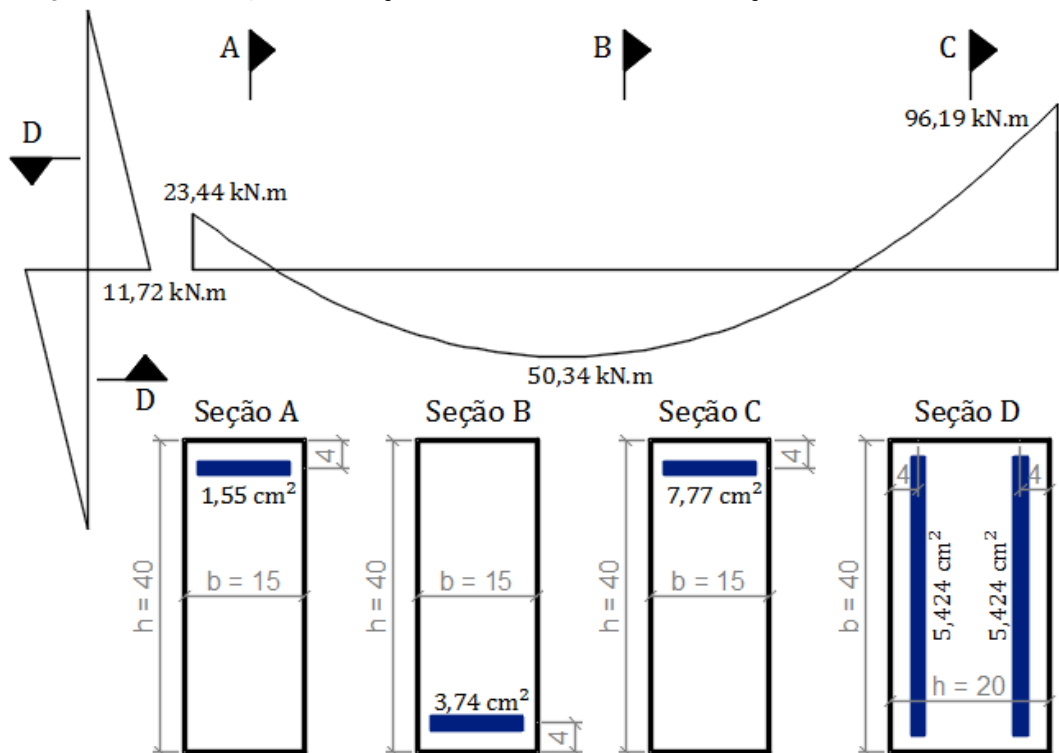
Fonte: Autor.

Figura A.3 – Exemplo 2.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%



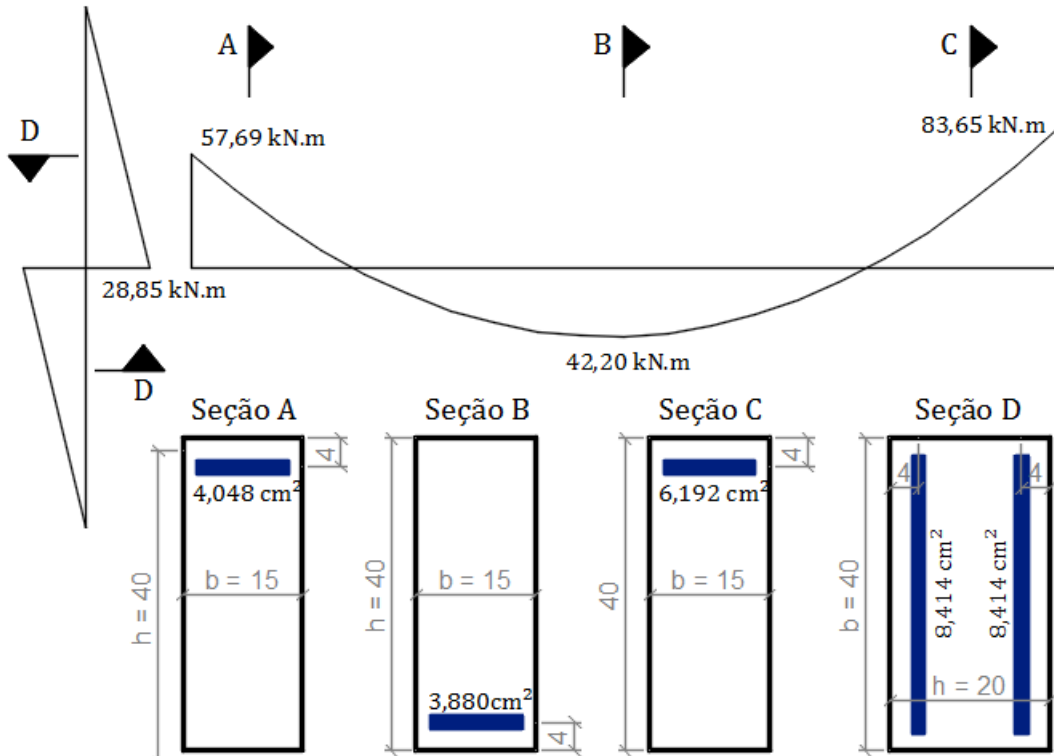
Fonte: Autor.

Figura A.4 – Exemplo 2.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%



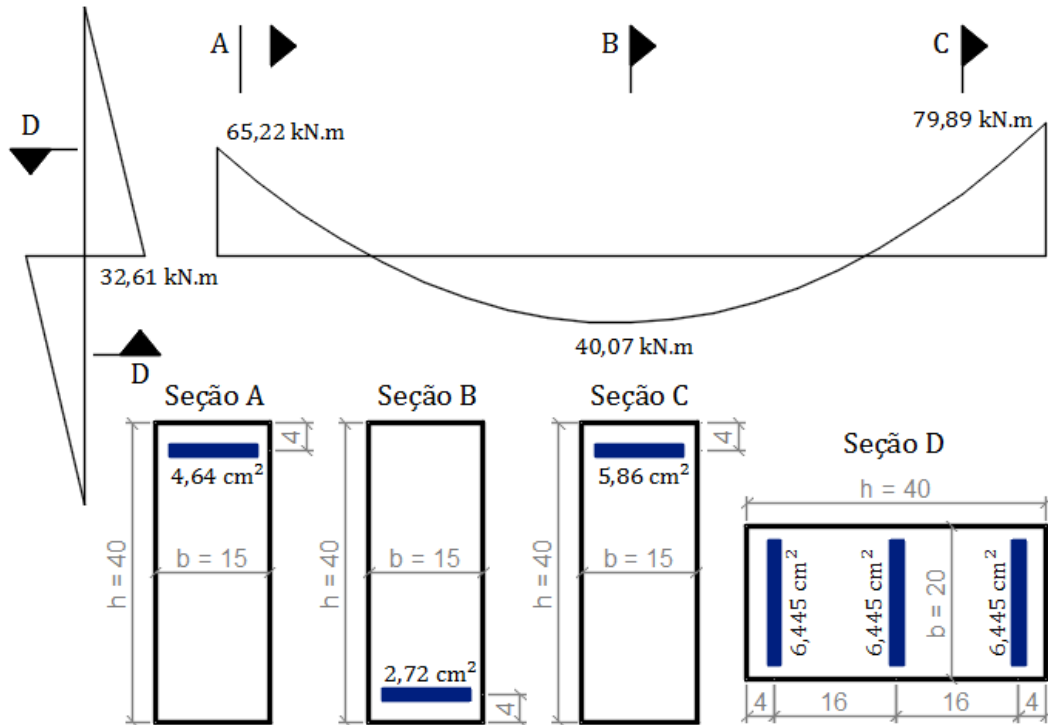
Fonte: Autor.

Figura A.5 – Exemplo 2.5: Seções armadas com ANL simplificada



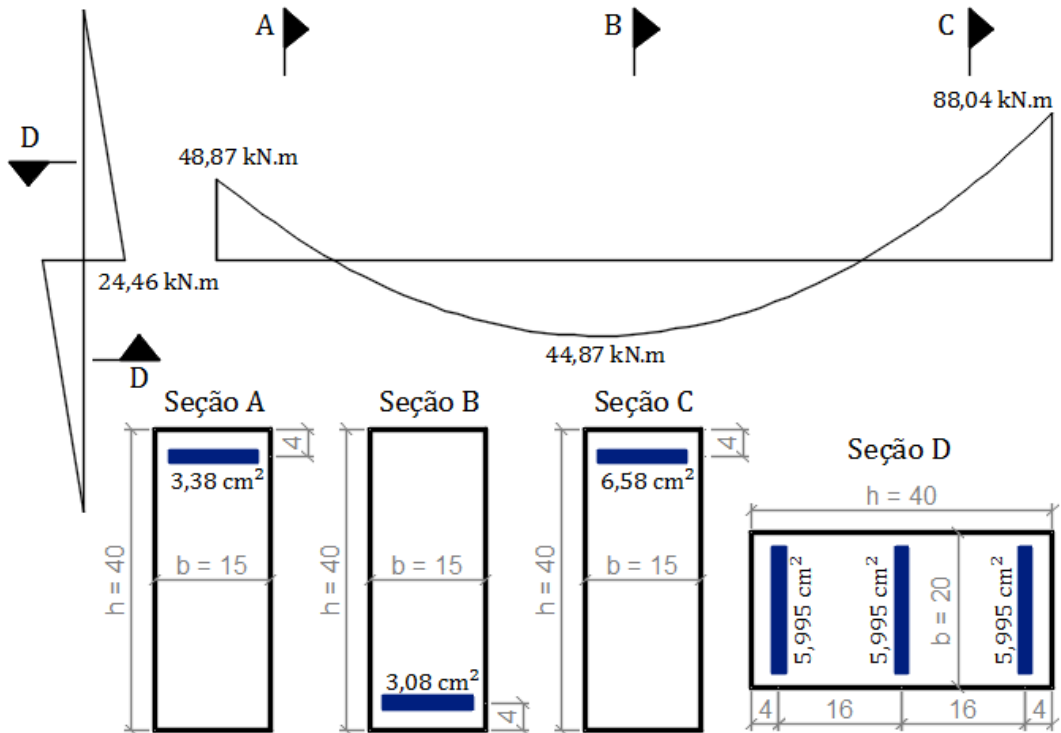
Fonte: Autor.

Figura A.6 – Exemplo 3.1: Seções armadas com análise elástico-linear



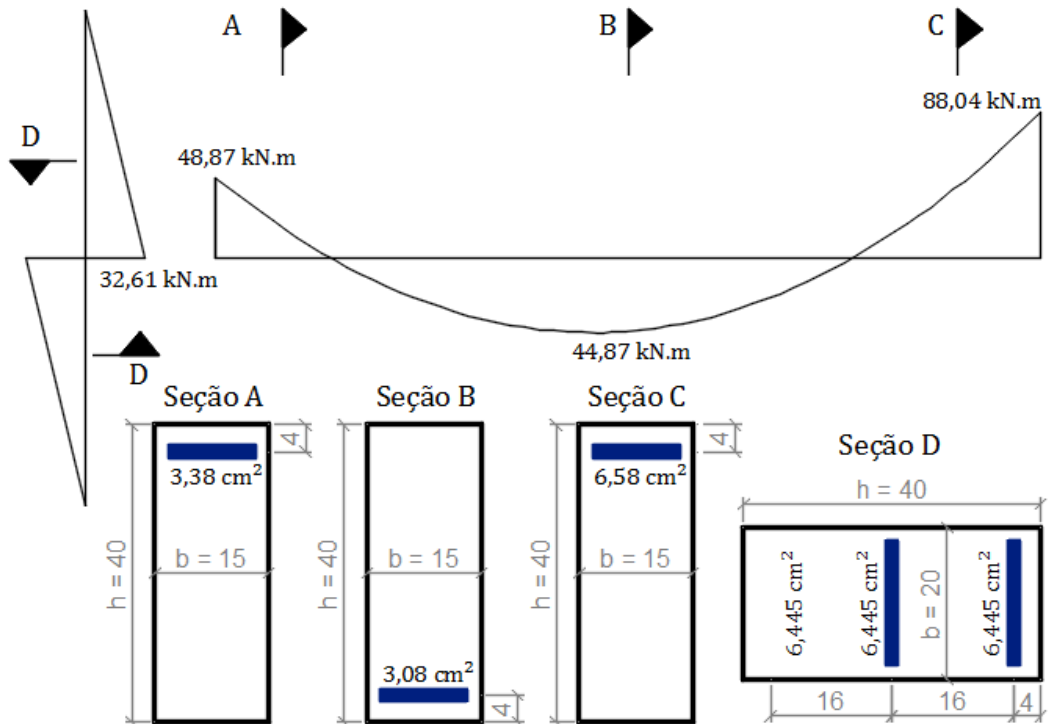
Fonte: Autor.

Figura A.7 – Exemplo 3.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%



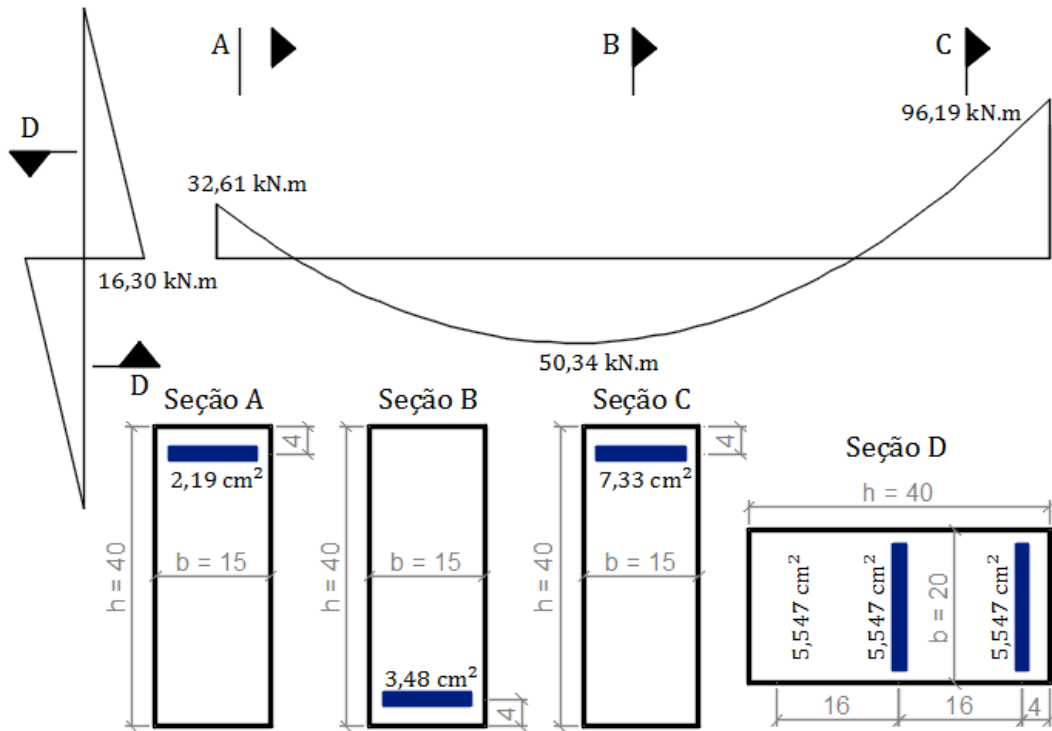
Fonte: Autor.

Figura A.8 – Exemplo 3.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%



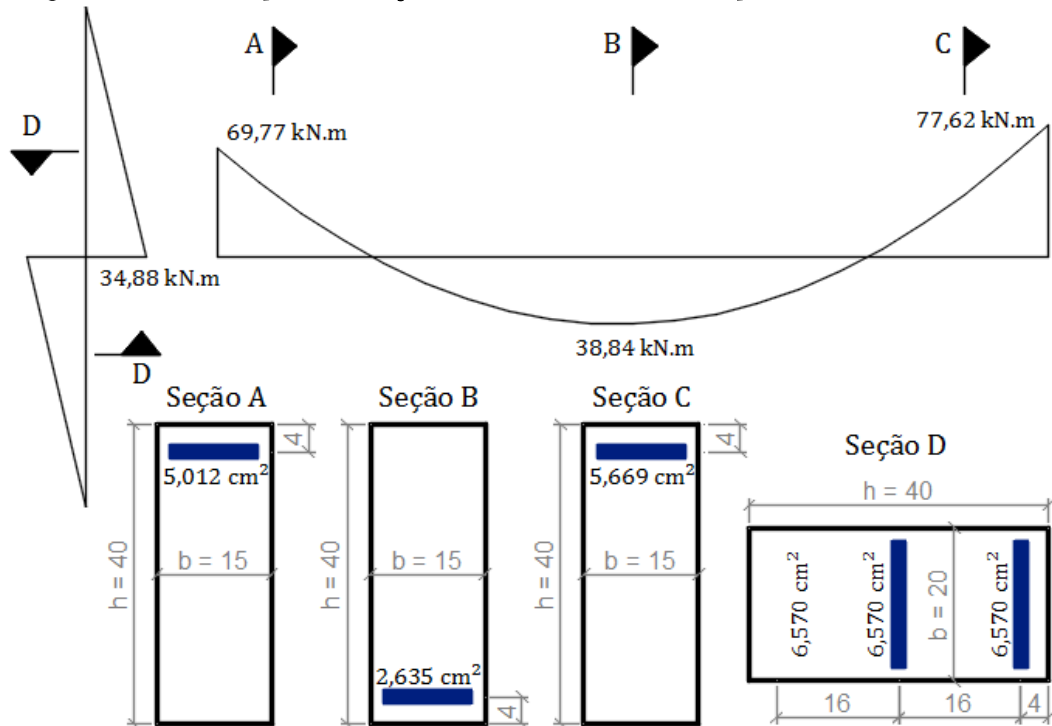
Fonte: Autor.

Figura A.9 – Exemplo 3.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%



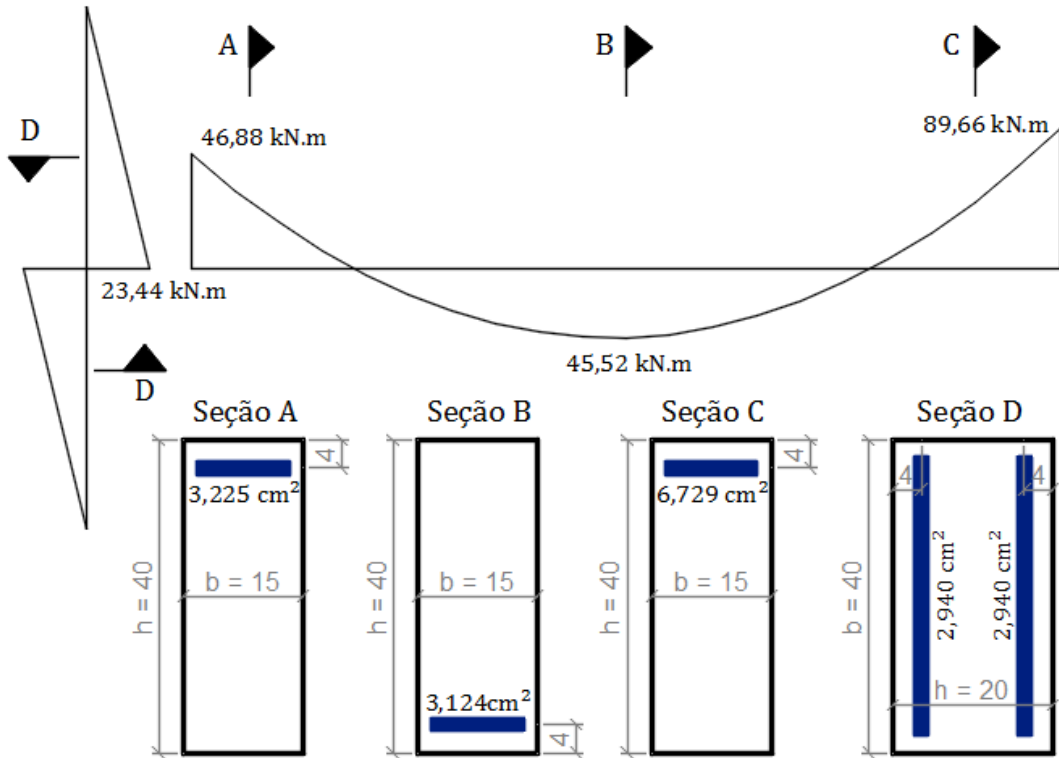
Fonte: Autor.

Figura A.10 – Exemplo 3.5: Seções armadas com ANL simplificada



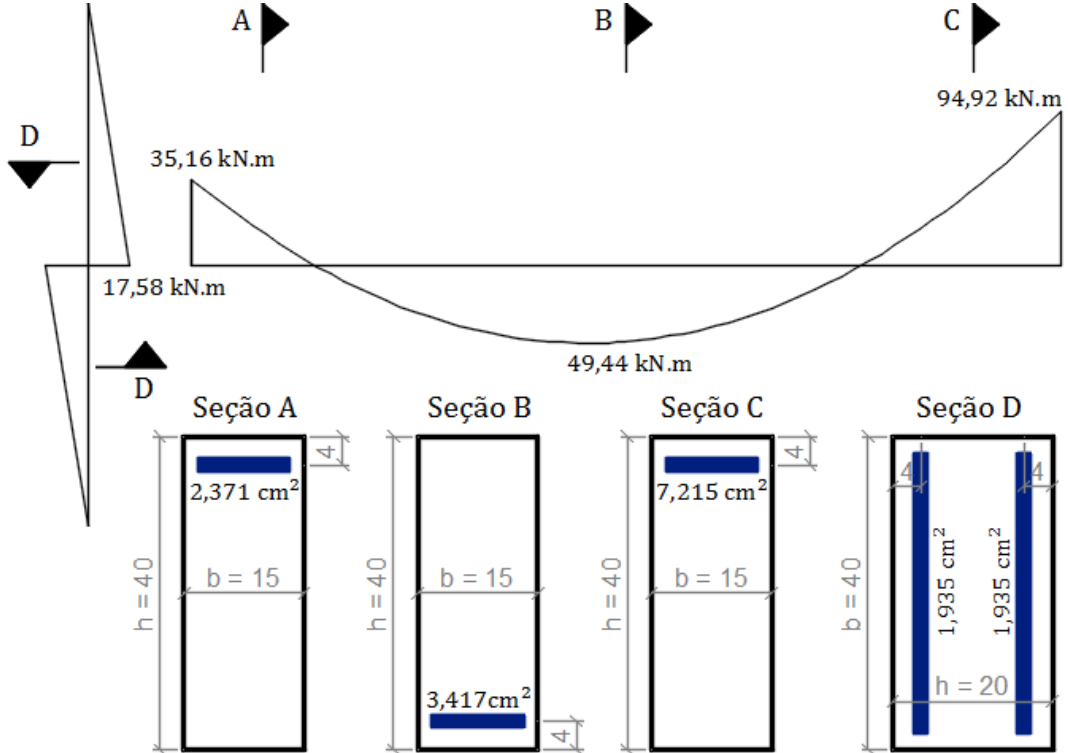
Fonte: Autor.

Figura A.11 - Exemplo 4.1: Seções armadas com análise elástico-linear



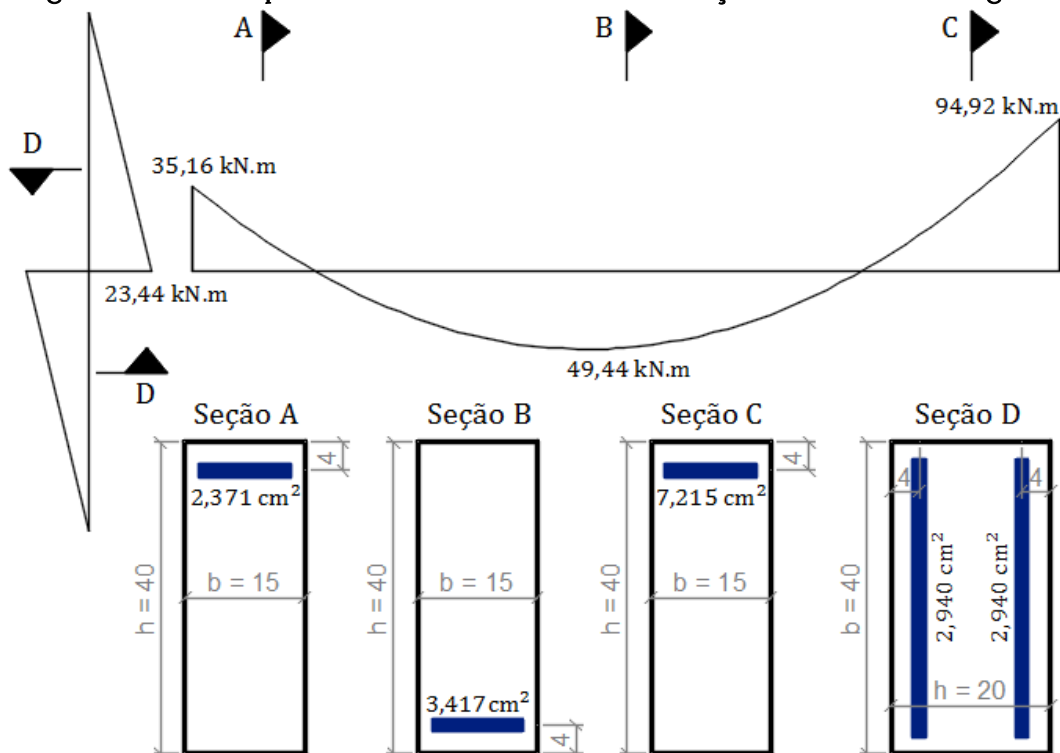
Fonte: Autor.

Figura A.12 – Exemplo 4.2: Seções armadas com redistribuição de momentos de 25%



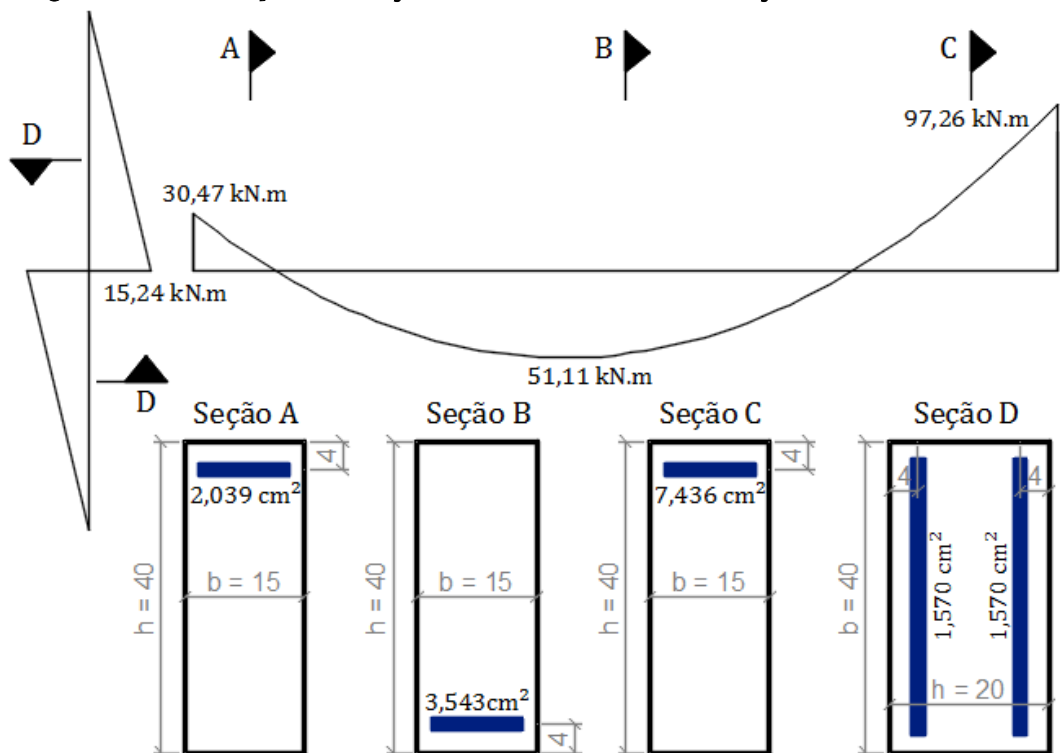
Fonte: Autor.

Figura A.13 – Exemplo 4.3: Pilar armado sem redistribuição de momentos e viga com 25%



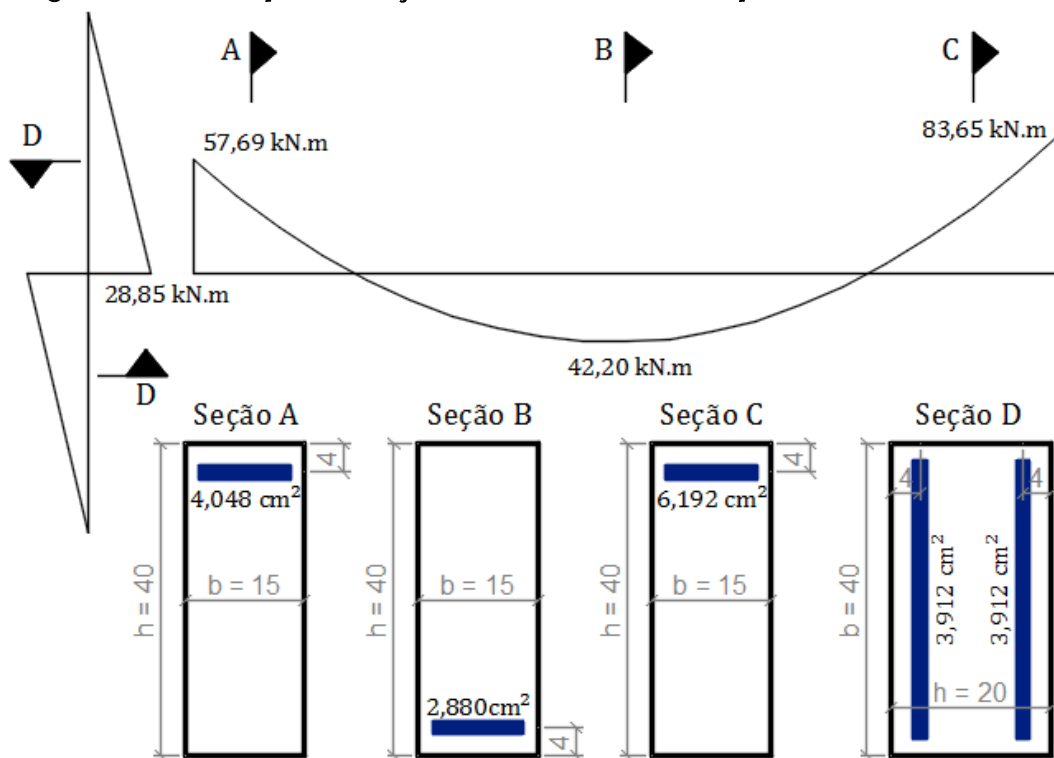
Fonte: Autor.

Figura A.14 - Exemplo 4.4: Seções armadas com redistribuição de momentos de 50%



Fonte: Autor.

Figura A.15 – Exemplo 4.5: Seções armadas com ANL simplificada



Fonte: Autor.