

Marcos Antonio Lima

**CONHECENDO A GEOMETRIA FRACTAL A PARTIR
DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA
EUCLIDIANA PLANA**

Dissertação submetida ao Programa
de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT para a obtenção do
Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sobottka

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Lima, Marcos Antonio
Conhecendo a Geometria Fractal a partir de
conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana /
Marcos Antonio Lima ; orientador, Marcelo
Sobottka, 2019.
72 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria Euclidiana Plana. 3.
Semelhança. 4. Congruência. 5. Fractais. I.
Sobottka, Marcelo . II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

**CONHECENDO A GEOMETRIA FRACTAL A PARTIR
DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA
EUCLIDIANA PLANA**

**por
Marcos Antonio Lima**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Prof(a). Ph.D. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenador do Curso

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
UFSC
Orientador

Prof. Dr(a). Marianna Ravara Vago
UFSC

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni
UFSC

Prof. Dr. Aldrovando Luís Azeredo Araújo
UFSC

Florianópolis, 08 de Março 2019.

A DEUS.

AGRADECIMENTOS

A todos os professores e colegas de classe, principalmente à Ananda L. Burin pelo apoio nos estudos para que eu pudesse alcançar esta vitória. Ao colega, Luciano Fernando pela efetiva ajuda na montagem estrutural dessa dissertação. Ao meu orientador, Marcelo Sobottka, pela paciência e profissionalismo e à Banca Examinadora por aceitar o convite. Ao Instituto Federal Catarinense-IFC/ Campus Brusque, que me concedeu licença integral, para que pudesse me dedicar totalmente ao PROFMAT.

Em especial, gostaria de agradecer à minha irmã Patrícia Lima pelo apoio intrínseco que sempre tem me dado, à minha querida mãe Maria Lima pelas orações e energias positivas, à minha melhor amiga Andressa Carvalho por estar sempre presente ao longo da minha caminhada, à minha amiga Lúcia Helena Silveira (Tia Lucinha), que sempre esteve ajudando minha família e à minha querida e eterna avó Sibelina que estará guardada para sempre em meu coração.

Também não poderia deixar de agradecer aos meus grandes amigos, Aparecida Lacerda, Ariosvaldo Andrade, André Costa, Angela Ferraz, Luciano David(In memoriam), Maria Auxiliadora Alvarenga, Emerson Rodrigues, Flávia Vieira, Geisiane Fernandes, Gilda Gouveia, Gilvânia Fernandes, Isnard Domingos Ferraz, Iverton Fernandes, Imaculada Janotti, Izabel Cristina Latini, Jackeline Alvarenga, Joana D'Arc Rezende, Julio Alvarenga, Leandro Freitas, Luiza Lemos, Mônica Nogueira, Marília Leal, André Carvalho, Tereza Silveira, Bruno Carvalho, Samira Furlanetto, Núbia Rezende, Raissa Ijanc, Tatiane Sueli, Telma Moraes, Maicon Koschnik, Thiago Nahrung, aos meus irmãos Henrique e Luciana, aos meus queridos sobrinhos Arthur Rabelo e Larissa Lima e ao meu amigo e cunhado Roosevelt Rabelo por tudo que tem feito pela minha família. A todos os meus familiares e demais amigos. Ao PROFMAT, pela oportunidade em me aperfeiçoar cada vez mais.

A vida é como andar de bicicleta:
É preciso estar
em constante movimento
para manter o equilíbrio.

Albert Einstein

RESUMO

O objetivo deste trabalho é conhecer a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana. Para isso, faremos uma abordagem intrínseca desses conceitos e alguns de seus axiomas, proporcionando assim, melhor entendimento dos alunos, em especial do ensino médio, na construção de fractais.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Semelhança. Congruência. Fractais.

ABSTRACT

The purpose of this work is to learn Fractal Geometry from basic concepts of flat Euclidean geometry. In order to achieve that, we will take an intrinsic approach to these concepts and some of their axioms, providing the students, especially those from high school, a better understanding of the construction of fractals.

Keywords: Euclidean geometry. Resemblance. Congruence. Fractals.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representação de ponto e reta	23
Figura 2	Triângulo formado pelos pontos A, B e C	25
Figura 3	Semirreta de origem em A	26
Figura 4	Reta t formada pelos pontos A e B	26
Figura 5	Ângulo formado por duas semirretas de mesma origem .	30
Figura 6	Primeiro caso de congruência (LAL)	31
Figura 7	Segundo caso de congruência (ALA)	31
Figura 8	Semiplano ACBD	33
Figura 9	Triângulo de dois lados não congruentes	34
Figura 10	Triângulo retângulo	35
Figura 11	Ângulos do Triângulo	36
Figura 12	Ângulos do Triângulo	37
Figura 13	Congruência de Triângulos Retângulos	38
Figura 14	Igualdade de Ângulos Correspondentes	39
Figura 15	Retas m e n e ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$	40
Figura 16	Ponto e intersecção P, entre m e n	41
Figura 17	Ângulos correspondentes	42
Figura 18	Distância entre pontos de duas retas paralelas	42
Figura 19	Paralelogramo	43
Figura 20	Reta paralela ao lado de um triângulo	43
Figura 21	Polígonos semelhantes	44
Figura 22	Figuras semelhantes	45
Figura 23	Triângulos semelhantes	45
Figura 24	Construção de triângulos semelhantes	46
Figura 25	Três triângulos semelhantes	47
Figura 26	Imagem de Benoît Mandelbrot	51
Figura 27	Imagem de Kenneth J. Falconer	52
Figura 28	Conjunto de Cantor	54
Figura 29	Iterações do tapete de Sierpinski	55
Figura 30	Iterações da Esponja de Menger	59
Figura 31	Iterações da Curva de Koch	62
Figura 32	71

Figura 33	71
Figura 34	72
Figura 35	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Cálculo das iterações do Tapete de Sierpinski	57
Tabela 2	Cálculo das iterações da Esponja de Menger	60
Tabela 3	Cálculo das iterações da Curva de Koch	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRINCÍPIOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA	23
2.1	OS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM	24
2.2	AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS E ÂNGULOS	27
2.2.1	Congruência	30
2.3	AXIOMAS DAS PARALELAS	39
2.3.1	Semelhança de Polígonos	44
2.3.1.1	Semelhança de Triângulos	45
3	FRACTAIS	51
3.1	EXEMPLOS CLÁSSICOS DE FRACTAIS	53
3.1.1	Conjunto de Cantor	53
3.1.2	Tapete de Sierpinski	55
3.1.3	Esponja de Menger	58
3.1.4	Curva de Koch	61
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
Referências		67
ANEXO A – Anexo		71

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana Plana estuda o comportamento de estruturas no plano, embasando-se nos conceitos primitivos como ponto, reta e plano. Também fazem parte deste estudo, as construções de figuras como quadriláteros, triângulos, círculos, bem como suas propriedades, formas, tamanhos, áreas e perímetros. Conceitos primitivos são aqueles que são aceitos sem demonstrações, denominados axiomas. São apenas noções que auxiliam no entendimento de conceitos mais complexos.

No final da década de 1990, a necessidade do estudo das construções geométricas ressurgiu nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), que reforçaram a importância das construções geométricas no currículo matemático com o emprego de "régua e compasso e a utilização de outros instrumentos, como, por exemplo, esquadro e transferidor" (BRASIL, 1998, p. 68) para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica.

Na Geometria Plana, podemos fazer os seguintes questionamentos:

- Toda reta possui mais de um ponto?
- Três pontos sempre formam um plano?
- O que são pontos colineares?
- Todo plano contém pelo menos 3 pontos?

Para responder a essas e outras indagações, iremos utilizar três axiomas importantes: OS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM, OS AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS E ÂNGULOS e OS AXIOMAS DAS PARALELAS. Abordaremos também os casos de congruência e semelhança em triângulos, de modo a contribuir efetivamente com a construção da ideia de fractais.

Neste sentido, é importante relatar que o termo fractal teve inspiração do latim, mais especificamente do adjetivo fractus, cujo verbo correspondente frangere, que significa quebrar, fragmentar, criar fragmentos irregulares. A Geometria Fractal foi introduzida em 1975 pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot, o qual foi o pioneiro a publicar livros que apresentavam seus estudos e de diversos outros matemáticos famosos como por exemplo Walclaw Sierpinski, George Cantor,

Giuseppe Peano, Félix Hausdorff, que descreviam curvas consideradas 'patológicas' pelo fato de não se adequarem à Teoria do Cálculo. O intuito era representar objetos que continham tantas anormalidades que não poderiam ser representados pelas formas da geometria tradicional. Para ele, por exemplo, uma nuvem não era um conjunto de esferas, o comprimento do litoral de um país não podia ser representado por uma linha poligonal que certamente não retrataria todos os minúsculos detalhes do contorno da costa, entre outros. E as concavidades e protuberâncias dessas figuras, não seriam algo relevantes? Essas curiosidades o levou a pesquisar uma forma de descrever a Natureza - daí o fato da Geometria Fractal ser considerada a Geometria da Natureza.

Fractal é utilizado na medicina para diagnosticar várias patologias como diagnóstico de cancro. Outra área de pesquisa é a difração de ondas por superfícies fractais, o que permite num processo inverso, que se adquira informações sobre a estrutura da superfície. Também está presente nos contornos das formações geológicas e nas fotografias aéreas pouco claras, onde identificam-se domínios fractais que podem discernir entre objetos naturais e objetos artificiais camuflados.

No decorrer deste trabalho, discutiremos com maiores detalhes caminhos intrínsecos da Geometria Plana para se obter Fractais.

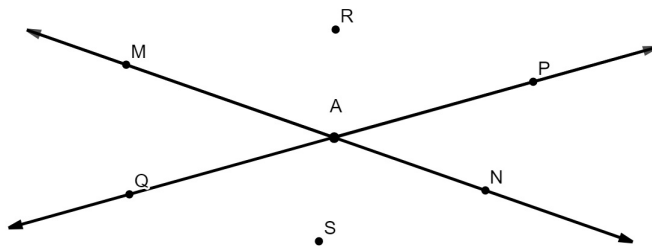
2 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Euclides de Alexandria nasceu na Síria e frequentou seus estudos na Academia de Platão, em Atenas. Estudou Matemática na academia de Alexandria, onde destacou-se pelo seu método de ensinar Geometria, disciplina essa conhecida por matemáticos que o antecederam. A partir de estudos mais aprofundados criou uma das maiores obras primas que englobava Aritmética e Geometria, conhecida como “**Os Elementos**”.

Segundo Euclides, axiomas são verdades inquestionáveis aplicadas a todas as ciências. Já as verdades sobre determinados temas, denominou-se como postulados. Para ele, um *ponto* é aquilo que não tem partes, e *reta* é uma linha traçada uniformemente com os *pontos* sobre si.

Observe que os pontos A, M, N, P, Q estão sobre uma das retas dadas e os pontos R e S não estão sobre nenhuma delas.

Figura 1 – Representação de ponto e reta



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

A partir de 10 axiomas, Euclides baseou a construção da sua Geometria. Ele os dividiu em dois grupos: O primeiro grupo era composto por cinco deles, classificados como *noções comuns*, que são as hipóteses aceitáveis pelas ciências e o segundo grupo era composto pelos outros cinco restantes axiomas, denominados como postulados, que são hipóteses características da geometria. As cinco *noções comuns* eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.

5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Os postulados eram:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

É importante ressaltar que grande parte dos postulados, dos axiomas, dos teoremas, das definições e das demonstrações contidas neste trabalho, foram retiradas do livro GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA, o qual está inserido nas referências bibliográficas.

Vejamos a seguir alguns axiomas e postulados importantes que servirão de base na construção da Geometria Fractal.

2.1 OS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM

Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos Axiomas de Incidência.

Axioma 2.1.1. Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

Axioma 2.1.2. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.

Proposição 2.1.1. . *Duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam em um único ponto.*

Demonstração 1. Consideremos m e n duas retas distintas. A intersecção entre elas não pode conter dois ou mais pontos, do contrário, pelo axioma 2.1.2, elas coincidiriam. Logo a intersecção de m e n é vazia ou contém apenas um ponto.

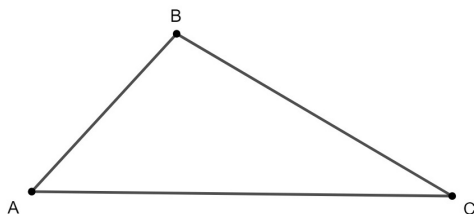
Agora veremos o segundo grupo, conhecido como *Axiomas de Ordem*, onde trata-se de que um ponto localizado entre dois outros é uma relação entre pontos de uma mesma reta que satisfaz os axiomas a seguir.

Axioma 2.1.3. Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os dois.

Definição 2.1.1. O conjunto constituído por dois pontos A e B, e por todos os pontos que se encontram entre A e B, é chamado de segmento \overline{AB} . Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidade do segmento.

Inúmeras figuras são construídas por segmentos. O triângulo da figura 2, por exemplo, é formado por três segmentos construídos a partir de três pontos A, B e C, não colineares (pontos que não estão sobre a mesma reta), onde esses pontos compõem os seus vértices.

Figura 2 – Triângulo formado pelos pontos A, B e C



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

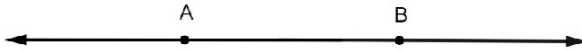
Definição 2.1.2. Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento \overline{AB} e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de **semirreta** de origem A contendo o ponto B e é representado por \overrightarrow{AB} . O ponto A é denominado origem de \overrightarrow{AB} .

Figura 3 – Semirreta de origem em A



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Observe pela figura 4, que dois pontos A e B determinam duas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} que contém o segmento \overline{AB} .

Figura 4 – Reta t formada pelos pontos A e B 

Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Proposição 2.1.2. $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ é a reta determinada por A e B .

Demonstração 2. Tome t a reta determinada por A e B . Como \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} são formadas por pontos de t , então $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset t$. Por outro lado, se C é um ponto da reta t então, de acordo com o axioma 2.1.3, uma das três possibilidades exclusivas ocorre:

- i)* C está entre A e B ;
- ii)* A está entre B e C ;
- iii)* B está entre A e C ;

Em *(i)* C pertence ao segmento \overline{AB} ; no caso *(ii)* C pertence a \overline{BA} ; e no caso *(iii)*, C pertence a \overline{AB} . Portanto em qualquer caso, C pertence a $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

Axioma 2.1.4. Dados dois pontos A e B sempre existem: um ponto C entre eles e um ponto D tal que B está entre A e D .

Podemos relatar duas consequências imediatas deste axioma:

1. Entre quaisquer dois pontos de uma reta, existem infinitos pontos.
2. Uma semirreta \overrightarrow{AB} possui infinitos pontos além daqueles contidos no segmento \overline{AB} .

Considere uma reta n e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Então, A e B estão dos mesmo lado de n se o segmento \overline{AB} não a intercepta.

Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a ela. O conjunto formado pelos pontos de m e por todos pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m é chamado de **semi-plano** determinado por m contendo A e será representado por P_{mA} .

Axioma 2.1.5. Uma reta r determina exatamente dois semi-planos distintos cuja intersecção é a reta r .

2.2 AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS E ÂNGULOS

A **régua graduada** é o instrumento utilizado para medir comprimento de segmento. Já para medir ângulos, utilizamos como apoio o **transferidor**.

No que se refere à medida de segmento e ângulo, retrataremos seis axiomas importantes. Inicialmente, vamos abordar aqueles relacionados aos segmentos:

Axioma 2.2.1. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é igual a zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.

O número a que se refere este axioma é chamado de **distância entre os pontos** ou **comprimento do segmento** determinado pelos dois pontos.

Axioma 2.2.2. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre esses números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Denomina-se Correspondência biunívoca uma relação que associa cada elemento de um conjunto com um único elemento de outro conjunto e assim simultaneamente. Nos tempo antigos, os homens para garantir o controle da quantidade de animais que possuíam, representavam cada animal por uma pedra.

Ifrah (2009) em sua obra “Os números”, também infere-se a esta correspondência:

Pegemos um ônibus. Com exceção do motorista e do cobrador, que têm assentos determinados, temos diante de nós dois conjuntos: os assentos e os passageiros. Com uma só olhada rápida podemos constatar se esses dois conjuntos comportam ou não ‘o mesmo número’ de elementos; caso contrário, podemos até indicar sem hesitação qual dos dois tem ‘mais’ elementos. Esta apreciação do número, obtida sem recorrer à contagem, deve-se precisamente ao procedimento de correspondência um a um. (IFRAH, 2009, p. 26).

Sendo assim, ao aplicarmos este axioma, denomina-se coordenada o número que corresponde a um ponto da reta. Por outro lado, de acordo com o axioma 2.2.1, o comprimento de um segmento AB é sempre maior do que zero. Logo, se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor destes números, ou seja, considerar o valor absoluto da diferença entre a e b . Portanto

$$\overline{AB} = |b - a| = |a - b|$$

Axioma 2.2.3. Se o ponto C encontra-se entre A e B , então $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$

A partir dos axiomas 2.2.1, 2.2.2 e 2.1.3, podemos relacionar a ordenação dos pontos de uma reta introduzida através dos axiomas 2.1.1 e 2.1.2, com a ordem dos números reais. Os números reais são ordenados pela relação ‘menor do que’ ou ‘maior do que’ e faz sentido dizer-se que um número c está entre dois outros a e b , quando ocorre $a < c < b$ ou $b < c < a$.

Proposição 2.2.1. Se em uma semirreta \overrightarrow{AB} , considerarmos um segmento \overline{AC} com $\overline{AC} < \overline{AB}$ então, o ponto C estará entre A e B .

Demonstração 3. De fato o ponto A não pode estar entre B e C , já que eles estão na mesma semirreta de origem A . Se o ponto B estivesse

entre A e C então, pelo axioma 2.2.3 teríamos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e como consequência $\overline{AB} < \overline{AC}$, ou seja, contradição, pois por hipótese temos que $\overline{AC} < \overline{AB}$. Sendo assim, é o ponto C que está entre A e B .

Teorema 2.2.1. *Sejam A , B e C pontos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a , b e c . O ponto C está entre A e B se e somente se o número c está entre a e b .*

Demonstração 4. Caso entre A e B esteja C , então, pelo axioma 2.2.3, temos que $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, ou seja $|a - b| = |c - a| + |b - c|$. Seja $a < b$. De acordo com a igualdade acima, temos que $|c - a| < b - a$ e $|b - c| < b - a$. Consequentemente, $c - a < b - a$ e $b - c < b - a$, isto é, $c < b$ e $a < c$, comprovando que c está entre a e b . O caso em que $b < a$ faz-se de maneira análoga. Da mesma forma, se o número c está entre os números a e b então, $|c - a| + |b - c| = |a - b|$. Logo, $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$. Em particular $\overline{AC} < \overline{AB}$ e $\overline{BC} < \overline{AB}$. Consideremos as semirretas determinadas pelo ponto A . Se C e B pertencem à mesma semirreta então é uma consequência da proposição 2.2.1, que C está entre A e B . Afirimo que C e B não podem pertencer às semirretas distintas, isto é não podem ser separados pelo ponto A , caso contrário A quem estaria entre B e C , ou seja $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$ onde resulta $\overline{BA} < \overline{BC}$, o que está em contradição com a desigualdade obtida acima. Isto prova a afirmação e conclui a demonstração do teorema.

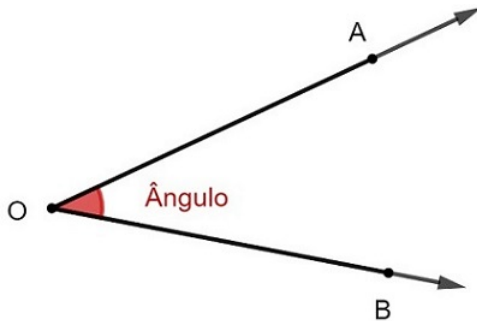
Definição 2.2.1. Chamamos de ponto médio do segmento \overline{AB} a um ponto C deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

A ideia de distância é uma das noções mais básicas da geometria. Ela obedece às seguintes propriedades:

- i) Quaisquer dois pontos distintos A e B do plano tem-se, \overline{AB} positivo;
- ii) $\overline{AC} = 0$ se e somente se $A = B$;
- iii) Para quaisquer dois pontos A e B tem-se $\overline{AB} = \overline{BA}$;
- iv) Para quaisquer três pontos A, B e C do plano, tem-se que \overline{AC} é menor ou igual do que a soma entre \overline{AB} e \overline{BC} . Esta propriedade é conhecida como **desigualdade triangular**, cuja demonstração será feita mais adiante.

Agora vamos abordar os axiomas relacionados á medição de ângulos, para isso, vamos definir ângulo como uma figura formada por duas semirretas com mesma origem, conforme a figura abaixo:

Figura 5 – Ângulo formado por duas semirretas de mesma origem



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Os **lados do ângulo** são as semirretas e a origem comum delas é o **vértice do ângulo**, representado pelo ponto O.

Axioma 2.2.4. Todo ângulo tem medida maior ou igual a zero. A medida é zero se e somente se as semirretas que o compõe forem coincidentes.

Definição 2.2.2. Uma semirreta divide um semi-plano se ela estiver contida neste semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Definição 2.2.3. Sejam \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} semirretas de mesma origem. Se o segmento \overline{AB} interceptar \overrightarrow{OC} diremos que \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma 2.2.5. Se uma semirreta \overrightarrow{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$

2.2.1 Congruência

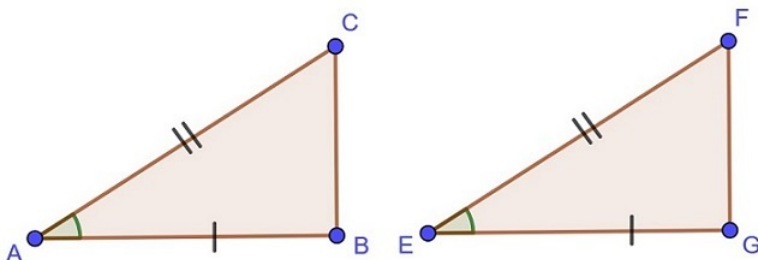
Definição 2.2.4. Dois ângulos são congruentes quando eles têm a mesma medida.

Definição 2.2.5. Dois segmentos são congruentes quando eles têm a mesma medida.

Definição 2.2.6. Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Axioma 2.2.6 (Primeiro caso de congruência de triângulo). Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\overline{AB} = \overline{EG}$, $\overline{AC} = \overline{EF}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, então $ABC = EFG$.

Figura 6 – Primeiro caso de congruência (LAL)

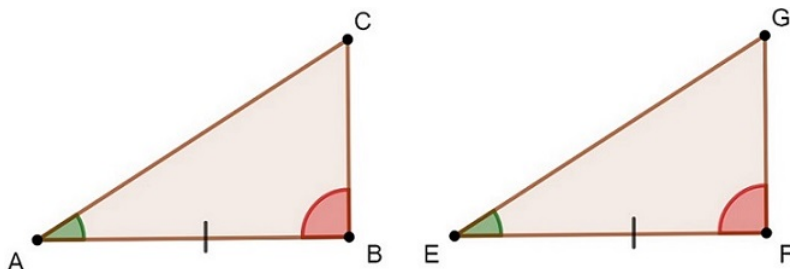


Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

De acordo com a definição 2.2.6, para verificarmos se dois triângulos são congruentes temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados e dos três pares de ângulos correspondentes. O axioma acima afirma que é suficiente verificar apenas três delas.

Teorema 2.2.2 (Segundo caso de congruência de triângulo). Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\overline{AB} = \overline{EF}$, e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$.

Figura 7 – Segundo caso de congruência (ALA)



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Demonstração 5. Consideremos ABC e EFG dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Tome D um ponto da semi-reta \overrightarrow{AC} de

modo que $\overline{AD} = \overline{EG}$. Compare os triângulos ABD e EFG . Visto que $\overline{AD} = \overline{EG}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, concluímos, pelo axioma 2.2.6, que $ABD = EFG$. Como consequência, tem-se que $\hat{A}BD = \hat{E}$ mas, por hipótese, $\hat{E} = \hat{A}BC$. Logo $\hat{A}BD = \hat{A}BC$. Logo, as semi-retas \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{BC} coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e, sendo assim, coincidem os triângulos ABC e ABD . Como já provamos que $ABD = EFG$, então $ABC = EFG$.

Definição 2.2.7. Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base.

Proposição 2.2.2. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração 6. Para provarmos que $\hat{B} = \hat{C}$ tome ABC um triângulo em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Para isto, compare o triângulo ABC com ele mesmo de modo a corresponder os vértices da seguinte maneira:

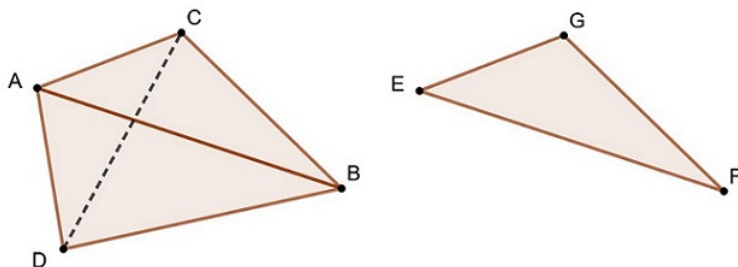
$$A \longleftrightarrow A, B \longleftrightarrow C \text{ e } C \longleftrightarrow B$$

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Como $\hat{A} = \hat{A}$, segue pelo axioma 2.2.6, que esta correspondência define uma congruência. Como consequência $\hat{B} = \hat{C}$.

Teorema 2.2.3 (Terceiro caso de congruência de triângulo). *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.*

Demonstração 7. Vamos considerar os triângulos ABC e EFG em que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Vamos provar que $ABC = EFG$, conforme a figura 8 construída a partir da semi-reta \overrightarrow{AB} e no semi-plano oposto ao que contém C , um ângulo côngruo ao \hat{E} . Tomando o lado deste ângulo que não contém B marcamos um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e ligue D a B . Como, por hipótese, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e por construção $\overline{AD} = \overline{EG}$ e $D\hat{A}B = \hat{E}$, então $ABD = EFG$. Agora vamos mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Traçamos \overline{CD} . Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$ e logo que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD = ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD = EFG$, então $ABC = EFG$.

Figura 8 – Semiplano ACBD



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

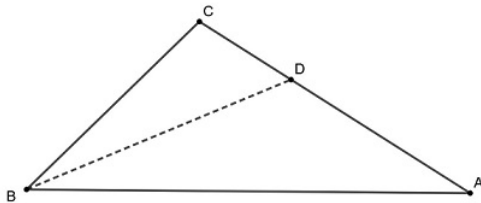
Proposição 2.2.3. *Se em um triângulo ABC , tem-se somente dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.*

Demonstração 8. Consideremos o triângulo ABC em que $\hat{B} = \hat{C}$. Para mostrarmos que $\overline{AB} = \overline{AC}$, comparemos o triângulo ABC com ele próprio, de modo a corresponder os vértices $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Como $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ por hipótese, e $\overline{BC} = \overline{CB}$, segue-se pelo teorema 2.2.2, que esta correspondência define uma congruência, como consequência $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Proposição 2.2.4. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos não são iguais e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração 9. A primeira parte desta proposição é consequência imediata das proposições 2.2.2 e 2.2.3. Para provar a segunda parte considere um triângulo ABC em que $\overline{BC} < \overline{AC}$ e vamos mostrar que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$.

Figura 9 – Triângulo de dois lados não congruentes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Para isso marque sobre a semi-reta \overrightarrow{CA} , um ponto D tal que $\overline{CD} = \overline{BC}$. Como $\overline{BC} < \overline{AC}$ então este ponto D pertence ao segmento \overline{AC} e, como consequência, a semi-reta \overrightarrow{BD} divide o ângulo $C\hat{B}A$. Portanto, tem-se $C\hat{B}A > C\hat{B}D$. Agora observe que $C\hat{B}D = C\hat{D}B > C\hat{A}B$, como queríamos mostrar.

Proposição 2.2.5. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração 10. . A primeira parte da proposição é uma consequência imediata das proposições 2.2.2 e 2.2.3. Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$ e vamos mostrar que $\overline{BC} < \overline{AC}$. Observe que existem três possibilidades: $\overline{BC} < \overline{AC}$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ e $\overline{BC} = \overline{AC}$. Se $\overline{BC} > \overline{AC}$, então pela proposição anterior, deveríamos ter $C\hat{A}B > C\hat{B}A$, o que é contrário a nossa hipótese. Do mesmo modo, se ocorresse $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo seria isósceles e $C\hat{A}B = C\hat{B}A$, o que também está em desacordo com a nossa hipótese. Logo deve ocorrer, $\overline{BC} < \overline{AC}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 2.2.4. *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração 11. Dado um triângulo ABC mostraremos a operação entre segmentos dada por $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. Para isto, marque um ponto D na semi-reta \overrightarrow{AB} , de modo que $\overline{AD} = \overline{BC}$. Então, $\overline{BD} = \overline{CB}$ e, portanto o triângulo BCD é isósceles com base CD . Logo teremos $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Como B está entre A e D , então $B\hat{C}D < B\hat{D}C$. Logo, pela proposição anterior $\overline{AC} < \overline{AD}$ Mas então $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$

Teorema 2.2.5 (Desigualdade Triangular). *Dados três pontos do plano A , B e C , tem-se $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. Igualdade ocorre se, e somente se B pertence ao intervalo \overline{AC} .*

Demonstração 12. Se A , B e C não são colineares, então eles determinam um triângulo e a desigualdade é consequência do teorema 2.2.4. Caso contrário, sejam a , b e c , respectivamente as suas coordenadas. Neste caso é simples verificar que

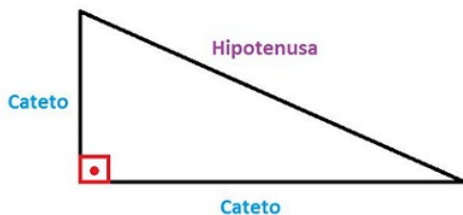
$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

e que a desigualdade ocorre se, e somente se, b está entre a e c . O resultado agora é consequência do teorema 2.2.4.

Definição 2.2.8. Ângulo é dito reto quando mede 90° .

Definição 2.2.9. Um triângulo que possui um ângulo reto (90°) é chamado de triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois são denominados catetos.

Figura 10 – Triângulo retângulo



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Definição 2.2.10. Ângulo menor do que 90° é dito agudo e maior do que 90° é dito obtuso.

Definição 2.2.11. Ângulo raso é aquele que mede 180° .

Corolário 2.2.1. *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

Demonstração 13. De fato, se um triângulo possuísse dois ângulos não agudo sua soma seria maior ou igual a 180° . Como veremos mais á frente, a soma dos três ângulos internos de um triângulo vale 180° , chegaríamos a um absurdo.

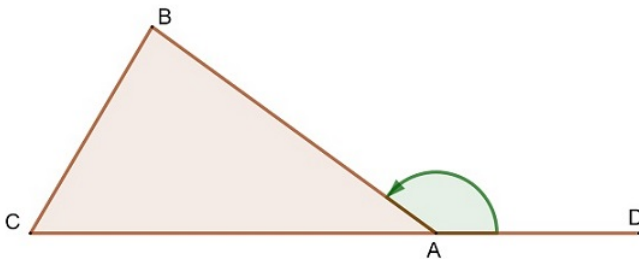
Definição 2.2.12. Duas retas são perpendiculares entre si quando estão no mesmo plano e o ângulo entre elas medir 90° .

Corolário 2.2.2. Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira então m e n não se interceptam.

Demonstração 14. Se m e n se interceptassem iriam formar um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo pelo corolário 2.2.1.

Definição 2.2.13. Se ABC é um triângulo, os seus ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são chamados de *ângulos internos* ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de *ângulos externos* do triângulo.

Figura 11 – Ângulos do Triângulo



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

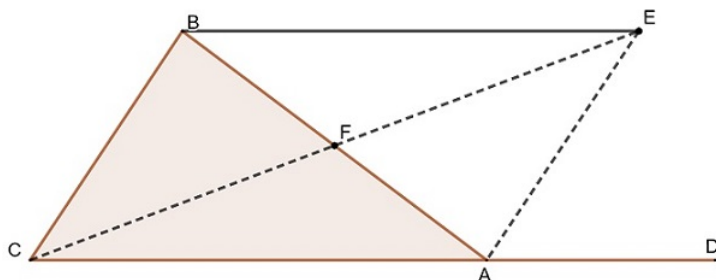
Na figura acima o ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno $C\hat{A}B$.

Teorema 2.2.6 (Ângulo Externo). *Todo o ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração 15. Seja ABC um triângulo. Na semirreta \overrightarrow{AC} marque um ponto D tal que A esteja entre C e D , como indicado na figura 12. Devemos provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos inicialmente

provar que o ângulo \widehat{BAD} é maior que o ângulo \widehat{B} . Para isso considere o ponto médio E do segmento \overline{AB} .

Figura 12 – Ângulos do Triângulo



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Na semirreta \overrightarrow{CE} marque um ponto F tal que $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace \overline{AF} . Compare os triângulos CEB e FAE como $\overline{BE} = \overline{AE}$ (já que E é o ponto médio de \overline{AB}), $\overline{CE} = \overline{EF}$ (por construção) e $\widehat{BEC} = \widehat{AEF}$ (por serem opostos pelo vértice), segue-se que $\widehat{BEC} = \widehat{AEF}$. Consequentemente $\widehat{B} = \widehat{EAF}$. Como a semirreta \overrightarrow{AF} divide o ângulo \widehat{BAD} , então $\widehat{EAF} < \widehat{BAD}$. Portanto $\widehat{B} < \widehat{BAD}$. Deixamos a cargo do leitor a prova de que $\widehat{BAD} > \widehat{C}$.

Teorema 2.2.7 (Congruência de Triângulos retângulos). *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \widehat{C} e \widehat{C}' . Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:*

- 1) $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$,
- 2) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, e
- 3) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{a} = \widehat{a}'$.

Os casos acima podem ser identificados como igualdade entre

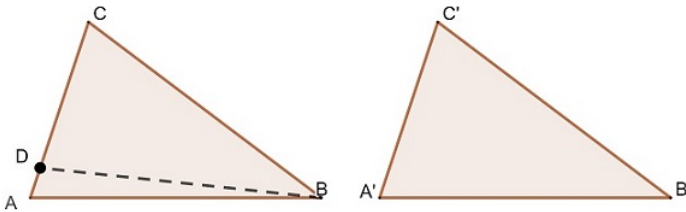
- 1) (c.a) cateto e ângulo oposto,
- 2) (h.c) hipotenusa e cateto, e
- 3) (h.a) hipotenusa e ângulo agudo.

Demonstração 16. (Caso 1) Nossas hipóteses são, neste caso, as seguintes:

$$\hat{C} = \hat{C}' \text{ (reto)}, \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}'.$$

Observe que, apesar de termos informações sobre dois ângulos e um lado, não podemos aplicar o “2º caso de congruência”. Para provar que ABC e $A'B'C'$ são congruentes marque um ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{CA} de sorte que $\overline{CD} = \overline{C'A'}$. Os triângulos CDB e $C'A'B'$ são então congruentes, pelo primeiro caso de congruência.

Figura 13 – Congruência de Triângulos Retângulos



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Como consequência, tem-se que $C\hat{D}B = \hat{A}'$. Desde que $C\hat{A}B = \hat{A}'$ (por hipótese), concluímos que

$$C\hat{D}B = C\hat{A}B.$$

Afirmo que os pontos A e D coincidem. De fato, se tal não ocorrer A , D e B formam um triângulo em que os ângulos $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são ângulos externo e interno não adjacentes. Portanto a igualdade acima não pode ocorrer de acordo com o teorema 2.2.6 do ângulo externo. Então A e D coincidem e logo $CAB = CDB$. Como $CDB = C'A'B'$ conclui-se que $CAB = C'A'B'$, como queríamos demonstrar. As demonstrações dos outros dois casos são deixadas a cargo do leitor.

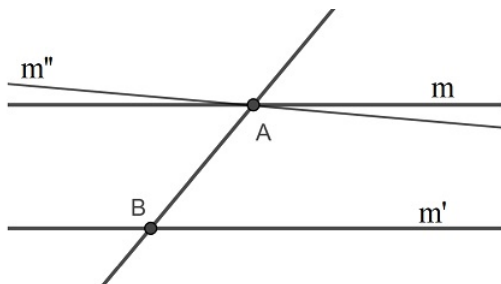
Proposição 2.2.6. *Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 , então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.*

Demonstração 17. Suponha que n_1 e n_2 não coincidem e são paralelas a reta m . Se n_1 e n_2 não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de intersecção, digamos P . Mas então n_1 e n_2 seriam distintas paralelas à reta m passando por P . Isto contradiz o axioma 2.3.1. Logo n_1 e n_2 são paralelas.

Proposição 2.2.7. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais.*

Demonstração 18. Sejam m e m' duas retas paralelas e seja n uma reta que corta m e m' nos pontos A e B , respectivamente. Considere uma reta m'' passando pelo ponto A e formando com a transversal quatro ângulos iguais aos ângulos correspondentes formados pela reta m' com a mesma transversal. De acordo com a proposição anterior m' e m'' são paralelas. De acordo com a proposição 2.2.6 m e m'' são coincidentes. Portanto m forma ângulos com a reta n iguais aos correspondentes formados por m' com a reta n .

Figura 14 – Igualdade de Ângulos Correspondentes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

2.3 AXIOMAS DAS PARALELAS

A existência de retas paralelas é uma consequência dos postulados apresentados. O axioma a seguir afirma que duas retas paralelas a uma terceira e com um ponto em comum são coincidentes.

Axioma 2.3.1. Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m .

Proposição 2.3.1. Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 , então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.

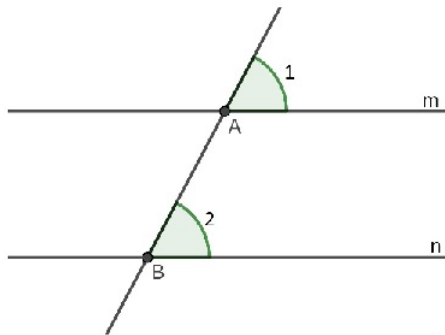
Demonstração 19. A priori, vamos considerar que n_1 e n_2 são não coincidentes, mas são paralelas a reta m . Se elas não fossem paralelas entre si, teriam um ponto de interseção X . Mas então, n_1 e n_2 seriam distintas paralelas à reta m passando por X , o que consequentemente contradiz o axioma 2.3.1, sendo assim, n_1 e n_2 são paralelas.

Corolário 2.3.1. *Se uma reta corta uma de duas retas paralelas, então corta também a outra.*

Demonstração 20. Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Se uma reta m cortasse n_1 e não cortasse n_2 , então m e n_2 seriam paralelas. Assim, n_2 seria paralela a m e a n_1 . Como m e n_1 não são paralelas entre si nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição 2.3.1. Logo m corta também n_2 .

Proposição 2.3.2. *Sejam $m, n, \hat{1}, \hat{2}$ como na figura 15. Se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.*

Figura 15 – Retas m e n e ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$



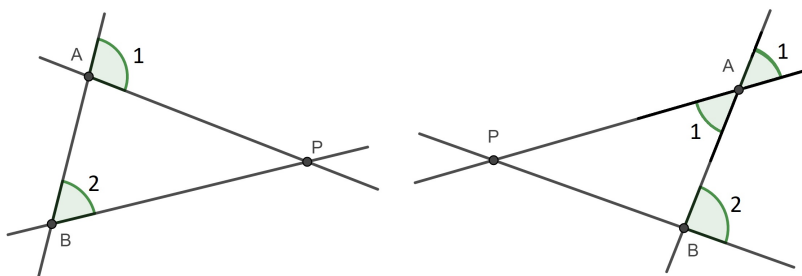
Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Demonstração 21. De fato, se m interceptasse n em algum ponto P , como na figura abaixo, formar-se-ia um triângulo ABP . Nele, $\hat{1}$ é ângulo externo e $\hat{2}$ é ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{1}$ ou vice-versa. Assim, pelo teorema 2.2.6 do ângulo externo teríamos $\hat{1}$ diferente de $\hat{2}$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto, m e n não se interceptam.

Quando duas retas são cortadas por uma transversal, pela proposição 2.2.7 formam-se oito ângulos como indicado na figura 17. Quatro deles são correspondentes aos outros quatro, a saber

$$\hat{1} \longleftrightarrow \hat{2}$$

Figura 16 – Ponto e intersecção P, entre m e n



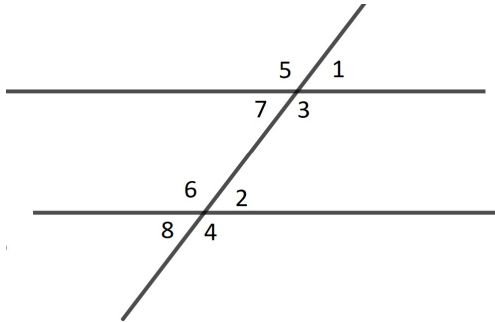
Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

$$\hat{3} \leftrightarrow \hat{4}$$

$$\hat{5} \leftrightarrow \hat{6}$$

$$\hat{7} \leftrightarrow \hat{8}$$

Figura 17 – Ângulos correspondentes



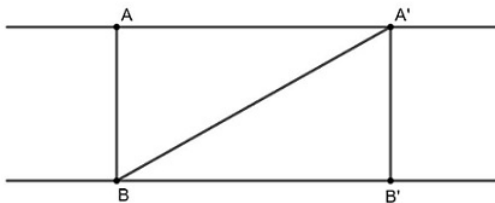
Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Observe que $\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{2} = \hat{8}$, $\hat{3} = \hat{5}$ e $\hat{4} = \hat{6}$ por serem opostos pelo vértice. Como consequência, se $\hat{1} = \hat{2}$, então todos os outros pares de ângulos correspondentes serão iguais. E ainda teremos que $\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$.

Teorema 2.3.1. *Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão á mesma distância da reta n .*

Demonstração 22. Sejam m e n retas paralelas. Sobre m tome dois pontos A e A' , e deles baixe perpendiculares à reta n . Sejam B e B' respectivamente os pés destas perpendiculares. Devemos provar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Para isto, trace $\overline{A'B}$ como indicado na figura 18:

Figura 18 – Distância entre pontos de duas retas paralelas



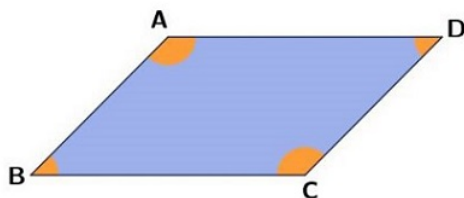
Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Veja que $\hat{AA'B} = \hat{A'B'B}$ e que $\hat{A'AB} = 90^\circ$. Portanto os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa comum. Logo pelo axioma 2.2.6, eles são congruentes, onde $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Definição 2.3.1. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Proposição 2.3.3. Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.

Figura 19 – Paralelogramo



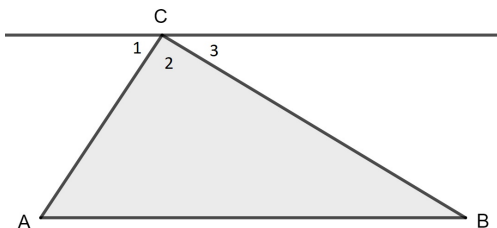
Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Demonstração 23. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Trace a diagonal \overline{AC} . Como \overline{AB} e \overline{DC} são paralelos, então $\hat{BAC} = \hat{ACD}$. Como \overline{AD} e \overline{BC} são paralelos, então $\hat{CAD} = \hat{ACB}$. Como, além disso, \overline{AC} é comum aos triângulos ABC e CDA , então estes triângulos são congruentes. Logo, $\hat{B} = \hat{D}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$, portanto, $\hat{A} = \hat{C}$.

Teorema 2.3.2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Demonstração 24. Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C trace uma reta paralela ao lado \overline{AB} . Numere os ângulos formados com o vértice C , como indicado na figura 20:

Figura 20 – Reta paralela ao lado de um triângulo



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Tem-se $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ângulo raso). Como \overline{AC} é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição anterior

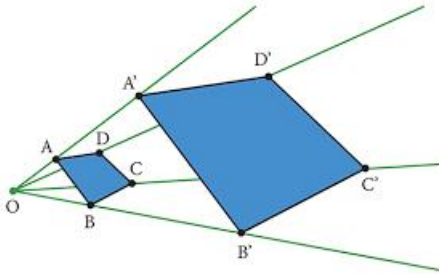
que $\hat{1} = \hat{A}$. Como \overline{BC} é também transversal às duas paralelas, então $\hat{3} = \hat{B}$. Sendo assim, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{ACB} = \hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$

2.3.1 Semelhança de Polígonos

Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem, simultaneamente, duas condições:

- (i) As medidas dos lados que se correspondem são proporcionais.
- (ii) As medidas dos ângulos que se correspondem são iguais.

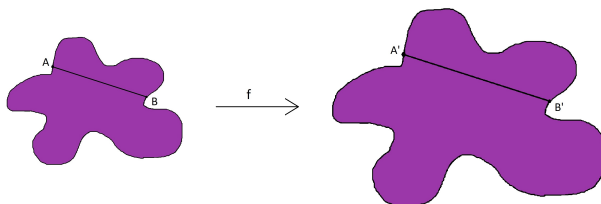
Figura 21 – Polígonos semelhantes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Podemos dizer então, que a semelhança de duas figuras A e A' , com razão de semelhança k ($k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$), é uma relação biunívoca entre seus pontos, $f : A \rightarrow A'$, que indica uma semelhança, com a seguinte propriedade: se A e B são pontos quaisquer de L e $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$ são seus correspondentes em L' , então $A'B' = k \cdot AB$. Esta correspondência biunívoca $f : L \rightarrow L'$, juntamente à propriedade de multiplicar a constante k pela distância de A a B denota-se uma semelhança entre L e L' de razão k . Vejamos na figura abaixo:

Figura 22 – Figuras semelhantes

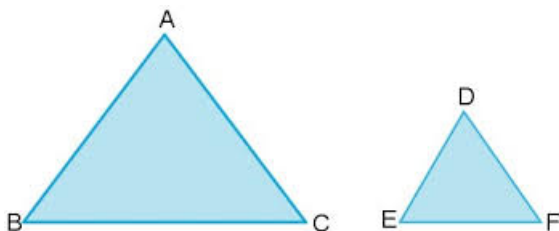


Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

2.3.1.1 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes seja iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 23 – Triângulos semelhantes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Com isso queremos afirmar que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$ e $C \rightarrow F$ é a correspondência que estabelece semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$$

e

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

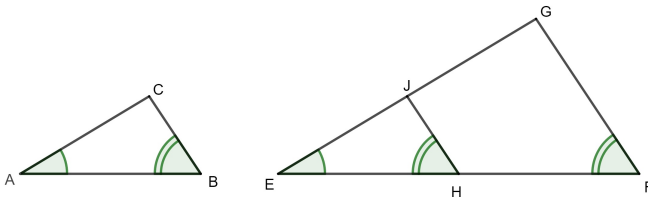
O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes

é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos. Veja que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um.

Teorema 2.3.3. *Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração 25. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a igualdade dos ângulos \hat{A} e \hat{E} , e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} acarreta na igualdade dos ângulos \hat{C} e \hat{G} . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semi-reta \overrightarrow{EF} o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$, conforme a figura 24. Pelo ponto H trace uma reta paralela a \overline{FG} .

Figura 24 – Construção de triângulos semelhantes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Esta corta a semi-reta \overrightarrow{EG} num ponto J , formando um triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC , uma vez que $\hat{A} = \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EH}$ e $\hat{B} = \hat{F} = \hat{H}$. Esta última igualdade deve-se ao paralelismo de \overline{JH} e \overline{GF} . Segue-se agora pelo teorema de Tales, que =

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}$$

. Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$ então, da igualdade acima demonstra-se que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

.De maneira análoga demonstra-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$$

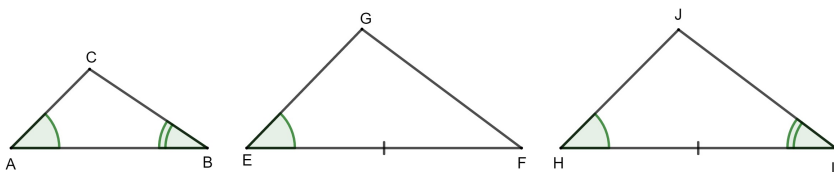
Teorema 2.3.4. *Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração 26. Construa um triângulo HIJ que tenha $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.

Figura 25 – Três triângulos semelhantes



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

De acordo com o teorema anterior, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Por conseguinte,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$$

Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

e a igualdade acima implicam que $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$, podemos concluir que ABC e EFG são semelhantes.

Decorre daí, que além da igualdade acima, também ocorre:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$$

. Segue-se (daí e da hipótese do teorema) que $\overline{IJ} = \overline{FG}$. Como já tínhamos que $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$ então, por construção, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, HIJ e EFG são congruentes.

Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema.

IMPORTANTE

Antes de abordarmos sobre Fractais, daremos algumas noções sobre LIMITES e SEQUÊNCIAS, que servirão de auxílio no estudo das iterações de alguns exemplos de Fractais. Inicialmente, escrevemos: $\lim_{x \rightarrow a} F(X) = L$, se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente próximo, mas diferente, de a . Essa afirmação é vaga. O que significa arbitrariamente próximo? Dizemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L se pudermos fazer $|f(x) - L|$ arbitrariamente pequeno. Formalmente, a afirmação acima corresponde à:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ para qualquer } \varepsilon > 0$$

Similarmente, a frase “ x suficientemente próximo de a ” é formalizada através da proposição: Existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

Definição 2.3.2. Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente o próprio a . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} F(X) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

O limite também é usado no estudo das Séries, como veremos a seguir.

A soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

, é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**, é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Denotamos a série

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Definição 2.3.3. Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

O número s é chamado **soma** da série.

Exemplo: A série geométrica de razão r , $\sum_{n=1}^{\infty} = a + ar + ar^2 + \dots$

converge se $|r| < 1$ e a sua soma é $\sum_{n=1}^{\infty} = ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$, $|r| < 1$. Se $|r| > 1$, a série diverge.

3 FRACTAIS

Conforme dito na introdução, segundo Benoît Mandelbrot, a geometria tradicional não possui ferramentas suficientes para descrever em sua totalidade os objetos Fractais, uma vez que esta não retrata as rugosidades e asperezas destes objetos. Mandelbrot dedicou boa parte de sua vida desenvolvendo ferramentas matemáticas capazes de explicar e medir a complexidade do mundo real. Ele fez várias contribuições para outras Ciências, dentre elas podemos citar: ruídos durante a transmissão de dados em linhas telefônicas, medida de uma linha costeira, padrões existentes no mercado econômico e fisiologia humana.

Figura 26 – Imagem de Benoît Mandelbrot



Fonte: <https://users.math.yale.edu/mandelbrot/>

Formalmente, Benoît Mandelbrot definiu Fractal como apresentado a seguir:

Definição 3.0.1. Definição por Mandelbrot: Fractal é um subconjunto F , em R^m , cuja dimensão de Hausdorff excede estritamente a sua dimensão topológica.

O próprio Mandelbrot reconheceu que esta definição era insatisfatória, pois a maioria dos leitores não eram capazes de entendê-la a não ser que tivessem noções de Teoria da Medida, uma vez que ela se divide basicamente em duas partes:

a) Definir uma medida que associe a cada conjunto de uma família em um dado espaço um valor significativo do seu tamanho. b)

Definir uma teoria de integração para as funções que tomam valores neste espaço.

Sendo assim, Kenneth J. Falconer, um matemático britânico nascido em 25 de janeiro de 1952, pesquisador de Geometria Fractal e áreas correlatas, professor de Matemática Pura da Escola de Matemática e Estatística da Universidade de Saint Andrews, Escócia, propôs uma definição diferente. Para ele, a definição de fractal deve ser comparada à definição de vida. Não há uma definição formal para a vida, apenas uma lista de propriedades que caracterizam um ser vivo, tais como capacidade para se reproduzir ou mover. Por mais que se tente rebuscar a lista de características de um ser vivo, sempre alguns deles não apresenta uma ou outra e nem por isso deixa de ser considerado como vivo.

Figura 27 – Imagem de Kenneth J. Falconer



Fonte: <http://www.mcs.st-and.ac.uk/~kenneth/>

Definição 3.0.2. Definição por Falconer: Um conjunto F é fractal se ele apresenta todas ou a maioria das propriedades listadas a seguir.

- (a) F tem "estrutura fina", isto é, apresenta detalhes em qualquer escala arbitrariamente pequena;
- (b) F é, localmente ou globalmente, muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional;
- (c) F apresenta alguma forma de autossimilaridade, ou seja, cada parte de F é uma cópia reduzida do todo. Esta autossimilaridade, as vezes, é aproximada ou estatística.
- (d) A dimensão fractal de F (definida de algum modo) é maior que sua dimensão topológica;
- (e) F é obtido por um processo recursivo simples.

Corroborando esta ideia, utilizaremos conceitos básicos da geometria euclidiana plana na obtenção de fractais, de modo a possibilitar melhor entendimento dos alunos do ensino médio sobre esta temática.

3.1 EXEMPLOS CLÁSSICOS DE FRACTAIS

Tratamos aqui de alguns objetos fractais clássicos, bem como seu processo de construção e suas propriedades. Procuramos usar uma linguagem mais simples possível, mas nem sempre isso é tarefa fácil na geometria fractal.

3.1.1 Conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwing Phillip Cantor, nasceu em São Petersburgo, na Rússia, em 03 de março de 1845. Ele mostrou que conjuntos infinitos não têm todos a mesma cardinalidade, além disso, estabeleceu uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números Naturais \mathbb{N} e o conjunto dos números Racionais \mathbb{Q} . Também provou que, para o conjunto dos números reais, não é possível estabelecer essa correspondência biunívoca, concluindo assim, que este conjunto é não-enumerável. Pelo fato do não reconhecimento de sua obra, Cantor esteve deprimido por diversas vezes ao longo de sua vida acadêmica, pois naquela época suas teorias sofreram forte oposição. Vamos apresentar a seguir a construção desse fractal. Cada etapa será denominada K_N , para $N = 0, 1, 2, 3, \dots$. Para obtê-lo partimos do intervalo unitário $[0; 1]$ e então fazemos uma seqüência de remoções como será descrito a seguir. Seja K_0 o intervalo $[0, 1]$.

0 ----- 1

K_1 é obtido pela remoção do intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, que corresponde a terça parte central de k_0 .

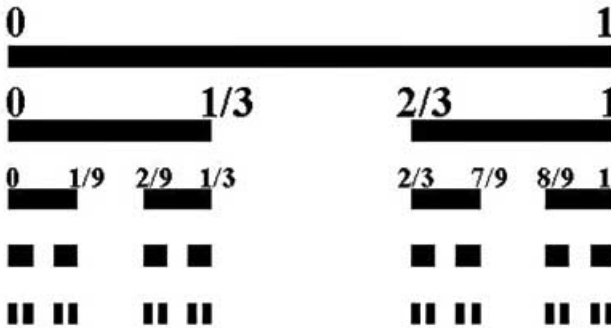
0 ----- $\frac{1}{3}$ ----- $\frac{2}{3}$ ----- 1

Obtemos k_2 ,removendo os intervalos abertos correspondentes ao terço médio central de cada um desses dois intervalos.

$$0 \text{ --- } \frac{1}{9} \qquad \frac{2}{9} \text{ --- } \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \text{ --- } \frac{7}{9} \qquad \frac{8}{9} \text{ --- } 1$$

Repetindo esse processo, cada etapa K_{N+1} é obtida pela remoção dos intervalos abertos correspondentes a terça parte central de cada um dos intervalos que constituem K_N . Logo, K_N é formado pela união de 2^N intervalos fechados, cada um deles com comprimento igual a 3^{-N} . O Conjunto de Cantor, que denotamos por K é o limite da sequência de conjuntos K_N com N tendendo a infinito.

Figura 28 – Conjunto de Cantor



Fonte:

<https://matemelga.wordpress.com/2018/09/29/el-conjunto-de-cantor/>

Vamos citar algumas características do Conjunto de Cantor K de modo a considerá-lo como objeto fractal. (a) O conjunto K é autossimilar. Podemos observar que as interseções de K com cada um dos intervalos de K_1 , resulta em conjuntos semelhantes a K , com fator de escala $\frac{1}{3}$. Em K_2 , as interseções entre K e os quatro intervalos que compõem essa iteração são semelhantes a K , com fator de escala $\frac{1}{9}$. Para todo K_N , a intersecção entre K e cada um dos intervalos que compõem K_N resulta em um conjunto semelhante a K , com fator de escala 3^{-N} .

(b) O Conjunto K tem “estrutura fina”, ou seja, ele contém cada vez mais detalhes a medida que N tende a infinito.

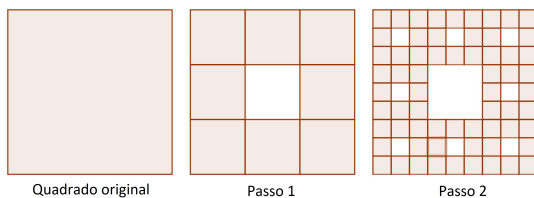
(c) K é obtido de forma recursiva, isto é, a construção de cada iteração K_N , $N > 0$ consiste na repetição do processo descrito anteriormente.

3.1.2 Tapete de Sierpinski

Waclaw Franciszek Sierpinski, nasceu em 14 de março de 1882, em Varsóvia, na Polônia. Seus estudos foram dedicados com maior profundidade no campo da Teoria dos conjuntos. Entre os anos de 1908 e 1910 publicou três livros: A Teoria dos Números Irracionais (1910), Esboço da Teoria dos Conjuntos (1912) e Teoria dos Números (1912). Apresentamos, a seguir, a construção das etapas iniciais T_N , $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ desse fractal. Para construirmos o Tapete de Sierpinski, iniciamos com um quadrado de lado d e a partir dele fazemos remoções de quadrados menores. Segue a representação da primeira iteração T_0 do Tapete de Sierpinski.

Para obter a iteração T_1 , dividimos o quadrado inicial em nove quadrados idênticos, entre si, cujos lados têm medida igual a $\frac{d}{3}$ e retiramos o interior do quadrado central. Em cada um dos oito quadrados remanescentes de T_1 , repetimos os procedimentos descritos anteriormente, ou seja, dividimos cada um deles em nove quadrados congruentes com lados de medida igual a $\frac{d}{9}$ e retiramos os interiores dos quadrados centrais. A seguir, temos a representação geométrica das iterações T_1 e T_2 .

Figura 29 – Iterações do tapete de Sierpinski



Fonte: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/09/produto-educacional-Luis-Eduardo-Reyes-Perez.pdf>

Veja que inicialmente T_0 , temos um quadrado de lado d . Em T_1 temos uma figura composta por 8 quadrados congruentes, cujos lados têm medida igual a $\frac{d}{3}$. Em T_2 , a figura é composta por 64 quadrados de lados com medida igual a $\frac{d}{9}$. Já T_3 , é composta por 512 quadrados congruentes, com lados de medida igual a $\frac{d}{27}$. O objeto fractal obtido

por $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^N = 0$ é o conjunto conhecido por Tapete de Sierpinski que denotaremos por T . A tabela a seguir traz cálculos acerca de algumas iterações do conjunto T .

Tabela 1 – Cálculo das iterações do Tapete de Sierpinski

ITERAÇÃO	NÚMERO DE QUADRADOS REMANES.	MEDIDA DOS LADOS DE CADA QUAD.	ÁREA TOTAL
T_0	$1 = 8^0$	d	$A_0 = d^2$
T_1	$8 = 8^1$	$\frac{d}{3} = \frac{d}{3^1}$	$A_1 = 8 \left(\frac{d}{3}\right)^2$ $= \frac{8}{9}d^2$
T_2	$64 = 8^2$	$\frac{d}{9} = \frac{d}{3^2}$	$A_2 = 8^2 \left(\frac{d}{3^2}\right)^2$ $= \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$
T_3	$512 = 8^3$	$\frac{d}{27} = \frac{d}{3^3}$	$A_3 = 8^3 \left(\frac{d}{3^3}\right)^2$ $= \left(\frac{8}{9}\right)^3 d^2$
...
T_N	8^N	$\frac{d}{3^N}$	$A_N = 8^N \left(\frac{d}{3^N}\right)^2$ $= \left(\frac{8}{9}\right)^N d^2$

Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Assim, concluímos que, na iteração T_N , $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, temos 8^N quadrados, cada um deles com lados de medida igual a $d \cdot 3^{-N}$ e a

área de cada iteração pode ser obtida pela expressão

$$A_N = \left(\frac{8}{9}\right)^N d^2$$

Algumas análises podem ser feitas, mediante esta tabela:

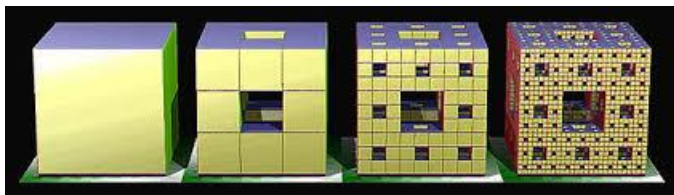
- Os dados da coluna referente à quantidade de quadrados remanescentes em cada iteração, formam a sequência numérica $(1, 8^1, 8^2, 8^3, \dots, 8^N, \dots)$, que representa uma progressão geométrica crescente de razão 8.
- Os dados da coluna referente à medida do lado de cada quadrado em cada iteração, formam a sequência numérica $(d, \frac{d}{3}, \frac{d}{3^2}, \dots, \frac{d}{3^N}, \dots)$, que representa uma progressão geométrica, decrescente e com razão $q = \frac{1}{3}$. Quando N tende a infinito, a medida dos lados dos quadrados tende de zero.
- Os dados da coluna que indica a área da figura, a cada iteração, formam uma progressão geométrica decrescente de razão $q = \frac{8}{9}$. Isso indica que quando N tende a infinito, a área da figura converge para zero, pois $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^N = 0$.

3.1.3 Esponja de Menger

Karl Menger nasceu 13 de janeiro de 1902, em Viena, ingressou na Universidade de Viena em 1920 para estudar Física, onde participou do curso "O que há de novo sobre o conceito de uma curva", em março de 1921 e a partir daí seus interesses foram redirecionados para a matemática. Nas aulas, Hans Hahn, professor ministrante do curso, salientou que não havia, na época, nenhuma definição satisfatória para uma curva. Citou inclusive os estudos de matemáticos renomados tais como Cantor e Hilbert e enfatizou que, mesmo estes, ainda não haviam conseguido chegar a uma definição satisfatória de curvas. Menger, fascinado por esse tema e ainda estudante de graduação, conseguiu, poucas semanas depois, impressionar Hahn apresentando sua teoria. O interesse de Menger por esse tópico o levou a seu trabalho *Curvas e Teoria da Dimensão*. Em 1924 recebeu seu PhD da Universidade de Viena. Contribuiu efetivamente nas áreas de Geometria, Topologia, Lógica, Teoria de Conjuntos, Teoria dos Grafos, Geometria Diferencial, Teoria dos Jogos, Economia e Filosofia. Em 1938, aceitou convite para

trabalhar na Universidade de Notre Dame, EUA. Lá ele desenvolveu trabalhos em geometria hiperbólica, geometria probabilística e álgebra de funções. Em 1948, Menger foi para o Instituto de Tecnologia de Illinois, Chicago, EUA. A carreira de Menger durou cerca de 60 anos e ele publicou 234 trabalhos, 65 deles antes dos 30 anos de idade. Ele faleceu no dia 05 de outubro de 1985, em Chicago. Para construirmos a Esponja de Menger, a representamos por E . Iniciamos com um cubo de arestas com medida igual d . Essa será nossa iteração E_0 . Para obter a iteração E_1 , dividimos esse cubo em 27 cubos congruentes, entre si, com arestas de medida igual $\frac{d}{3}$ e retiramos o interior de sete desses cubos: do cubo central de cada uma das seis faces e também do cubo que contém o centro do cubo inicial, ou seja, aquele que contém o ponto de interseção das diagonais do cubo inicial. Para obtermos E_2 , repetimos esses procedimentos para cada um dos 20 cubos remanescentes, compondo assim, $20 \cdot 20 = 400$ cubos, congruentes entre si, com arestas de medida igual a $\frac{d}{9}$. Portanto, para obtermos a iteração E_{N+1} , aplicamos os procedimentos descritos em cada um dos 20^N cubos da iteração E_N .

Figura 30 – Iterações da Esponja de Menger



Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Esponja_de_Menger

Tabela 2 – Cálculo das iterações da Esponja de Menger

ITER.	Nº DE CUBOS REMANES.	MED. DAS AREST. DE CADA CUBO	VOLUME DA FIGURA
E_0	$1 = 20^0$	$d = \frac{d}{3^0}$	$V_0 = d^3$
E_1	$20 = 20^1$	$\frac{d}{3} = \frac{d}{3^1}$	$V_1 = 20 \left(\frac{d}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}d^3$
E_2	$400 = 20^2$	$\frac{d}{9} = \frac{d}{3^2}$	$V_2 = 20^2 \left(\frac{d}{3^2}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 d^3$
E_3	$8000 = 20^3$	$\frac{d}{27} = \frac{d}{3^3}$	$V_3 = 20^3 \left(\frac{d}{3^3}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 d^3$
...
E_N	20^N	$\frac{d}{3^N}$	$V_N = 20^N \left(\frac{d}{3^N}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^N d^3$
E_{N+1}	20^{N+1}	$\frac{d}{3^{N+1}}$	$V_{N+1} = 20^{N+1} \left(\frac{d}{3^{N+1}}\right)^3$ $= \left(\frac{20}{27}\right)^{N+1} d^3$

Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Assim, concluímos que, na iteração E_N , $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, temos 20^N cubos, cada um deles com lados de medida igual a $d \cdot 3^{-N}$ e o volume de cada iteração pode ser obtido pela expressão

$$v_N = \left(\frac{20}{27}\right)^N d^3$$

Algumas análises podem ser feitas, mediante esta tabela:

- Os dados da coluna referente à quantidade de cubos remanescentes em cada iteração, formam a sequência numérica $(1, 20, 20^2, 20^3, \dots, 20^N, \dots)$, que representa uma progressão geométrica crescente de razão 20.

- Os dados da coluna referente à medida da aresta de cada cubo em cada iteração, formam a sequência numérica $(d, \frac{d}{3}, \frac{d}{3^2}, \dots, \frac{d}{3^N}, \dots)$, que representa uma progressão geométrica, decrescente e com razão $q = \frac{1}{3}$.

Quando N tende a infinito, a medida dos lados dos cubos tende de zero.

- Os dados da coluna que indica o volume da figura, a cada iteração, formam uma progressão geométrica decrescente de razão $q = \frac{20}{27}$. Isso indica que quando N tende a infinito, o volume da figura converge para

zero, pois $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^N = 0$.

3.1.4 Curva de Koch

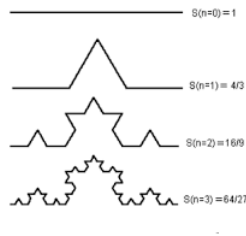
Esta curva foi criada pelo matemático Niels Fabian Helge von Koch, nascido em 25 de janeiro de 1870, em Estocolmo, Suécia. Concluiu sua graduação na Universidade de Estocolmo, onde foi mais tarde, professor. Em 1901, Koch escreveu o artigo sobre a distribuição de números primos intitulado "Sur la Distribution de Nombres Premiers" e em 1906, publicou um de seus trabalhos mais conhecidos cujo título original é "Sur une Courbe Continue sans Tangente, Obtenue par une Construction Géométrique". Esse estudo referia-se à Curva de Koch.

Para construirmos a curva de Koch, vamos partir de um segmento de reta de comprimento d que representa a iteração V_a . Dividimos esse segmento de reta em três segmentos congruentes de medida igual a $\frac{d}{3}$. Acrescentamos dois outros segmentos, também com medida igual a $\frac{d}{3}$, de modo que as extremidades do terço central do segmento inicial e dos dois novos segmentos sejam vértices de um triângulo equilá-

tero. Em seguida, retiramos o segmento aberto correspondente ao terço central do segmento inicial. A figura assim obtida é uma curva contínua formada pela união de quatro segmentos de reta congruentes entre si. Ela corresponde à iteração V_b desse fractal. Para obter a iteração V_c , repetimos os procedimentos descritos anteriormente, em cada um dos quatro segmentos da iteração V_b , ou seja, cada um dos quatro segmentos é dividido em três segmentos congruentes, cada um com medida igual a $\frac{d}{9}$. Dois outros segmentos de igual medida são acrescentados de modo a formarem um triângulo equilátero com o segmento correspondente ao terço central e em seguida o segmento correspondente ao terço central é retirado. Obtemos dessa forma, uma curva, contínua, formada por 16 segmentos de reta, cada um deles com comprimento igual a $\frac{d}{9}$.

Repetindo esses procedimentos x vezes, $x \rightarrow \infty$, obtemos um fractal cuja curva limite é denominada Curva Koch. A cada iteração, a Curva de Koch se torna mais complexa, apresentando mais detalhes. Cada parte da curva preserva a propriedade de semelhança, isto é, cada etapa da construção de uma iteração $V_x, x > 1$, é uma figura formada por 4 cópias reduzidas da iteração V_{x-1} , conforme a Tabela 3.

Figura 31 – Iterações da Curva de Koch



Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

Tabela 3 – Cálculo das iterações da Curva de Koch

ITERAÇÃO	Nº DE SEGMENTOS.	MED. DE CADA SEGMENTO.	PERÍMETRO
E_0	$1 = 4^0$	$d = \frac{d}{3^0}$	$2P_0 = 4^0 d$
E_1	$4 = 4^1$	$\frac{d}{3} = \frac{d}{3^1}$	$2P_1 = 4 \left(\frac{d}{3} \right) = \frac{4}{3} d$
E_2	$16 = 4^2$	$\frac{d}{9} = \frac{d}{3^2}$	$2P_2 = 4^2 \left(\frac{d}{3^2} \right) = \left(\frac{4}{3} \right)^2 d$
E_3	$64 = 4^3$	$\frac{d}{27} = \frac{d}{3^3}$	$2P_3 = 4^3 \left(\frac{d}{3^3} \right) = \left(\frac{4}{3} \right)^3 d$
...
E_X	4^X	$\frac{d}{3^X}$	$2P_X = 4^X \left(\frac{d}{3^X} \right) = \left(\frac{4}{3} \right)^X d$
E_{X+1}	4^{X+1}	$\frac{d}{3^{X+1}}$	$2P_{X+1} = 4^{X+1} \left(\frac{d}{3^{X+1}} \right)$ $= \left(\frac{4}{3} \right)^{X+1} d$

Fonte: Marcos Antonio Lima (2019)

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria Euclidiana Plana é um conteúdo da matemática presente em diversas áreas do conhecimento, como nas Engenharias, na Física, na História, entre outros. Ela também está presente em outras geometrias, como na Espacial e na Fractal. Nesta última, vimos sua presença desde a divisão de segmentos até a construção de figuras planas, como quadrados. Abordamos propriedades de semelhanças e congruências, de modo que possibilitasse melhor entendimento dos alunos sobre a construção de Fractais.

É importante relembrar que a Geometria Fractal também pode ser construída a partir da Teoria da medida, mas como esse tema é complexo para alunos de ensino médio, procuramos embasar sua construção em conceitos primitivos da Geometria Plana.

Vimos o uso da Álgebra (Progressões) na obtenção de fórmulas que representassem os procedimentos contidos nas tabelas dos Fractais supracitadas durante este trabalho, mas não entramos em detalhes sobre esse assunto uma vez que nosso foco principal era conhecer a Geometria Fractal a partir dos conceitos primitivos da Geometria Euclidiana Plana. Relatamos também, inúmeros axiomas que tornaram verdadeiras diversas propriedades relacionadas aos conceitos primitivos da Geometria Plana.

Referindo -se ao ensino médio, a Geometria Plana, em geral, é aplicada na Trigonometria, na Geometria Espacial e na Geometria Analítica, portanto, a ideia foi aplicá-la em outra geometria que fosse acessível aos alunos desse nível de ensino. A escolha pela Geometria Fractal foi algo desafiador, mas gratificante.

Tendo em vista isso, foi proposta uma atividade de construção para que os alunos despertem o interesse pela matemática, de modo a observar a importância dos conteúdos contidos neste trabalho em sua vida cotidiana.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana. Coleção do professor.** [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BRASIL, M. d. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2018.>.

EDGAR, G. **Measure, Topology and Fractal Geometry. 2a. ed.** [S.l.]: New York: Springer, 2008.

FALCONER, K. **Fractal Geometry. 2a. ed.** [S.l.]: UK: University of St. Andrews, 2003.

IFRAH, G. **Os números: A história de uma grande invenção.** [S.l.]: São Paulo: Editora Globo, 2009.

MANDELBROT, B. **Les Objects Fractals: Form, hasart et dimension. 4a. ed.** [S.l.]: França: Flamarion, 1995.

REZENDE ELIANE Q. F. E QUEIROZ, M. L. B. d. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Série Livro Texto.** [S.l.]: São Paulo: Editora da Unicamp, 2008.

SALLUM, I. M. **Fractais no Ensino Médio, Revista do Professor de Matemática. n.57. p. 1-8.** [S.l.]: São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2005.

THOMAS, G. B. **Cálculo, Vol2. 10a. ed.** [S.l.]: São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2003.

ANEXO A – Anexo

Atividade : Construção de um Fractal numa Folha de Cartolina:
 Material: Folha de cartolina e Tesoura
 Instruções:

1. Meça o comprimento a da folha
2. Meça a largura b da folha
3. Dobre a folha de cartolina ao meio
4. Faça **2** cortes de comprimento $\frac{a}{4}$ afastados de cada lado da folha $\frac{b}{4}$.

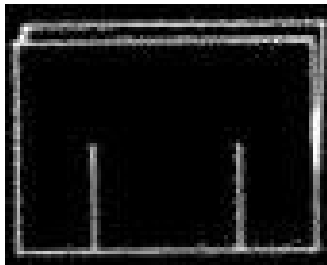


Figura 32

5. Dobre segundo o segmento criado pelos dois cortes



Figura 33

6. Repita os passos 1 - 5, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar.
7. Continue o processo o máximo de vezes possíveis
8. Dobre a folha formando um ângulo reto

9. Dobre a parte da folha obtida no passo 5, de modo a formar um ângulo reto com a dobra do passo 8.
10. Repita o passo 9 para as outras partes da folha

Problema adaptado de "Fractal Cards: A Space for Exploration"

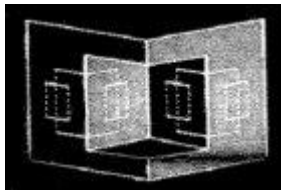


Figura 34

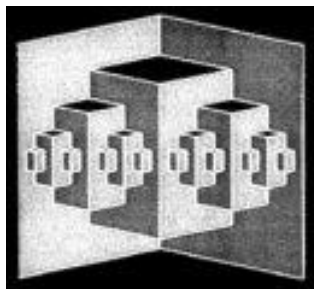


Figura 35

in Geometry and Discrete Mathematics”, The Mathematics Teacher, 1998.