Fabio Brinkmann Castanho

Teoria dos Jogos e a greve dos caminhoneiros no Brasil.

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Prossional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

PROFMAT

Orientador: Dr. Leandro Batista Morgado

Florianópolis

17 de abril de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Castanho, Fabio Brinkmann
Teoria dos Jogos e a greve dos caminhoneiros no Brasil. / Fabio Brinkmann Castanho ; orientador, Leandro Batista Morgado, 2019.
93 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Greve. 3. Teoria dos Jogos. 4. Forma Extensivo. I. Morgado, Leandro Batista. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Fabio Brinkmann Castanho

Teoria dos Jogos e a greve dos caminhoneiros no Brasil.

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Dr$^{\text{a}}$ Maria Inez Cardoso Gonçalves
(Coordenador(a))
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Leandro Batista Morgado(Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Leonardo Silveira Borges
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Fabiano Borges da Silva (videoconferência)
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP

Dr. Felipe Lopes Castro,
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 17 de abril de 2019

Agradecimentos

Primeiramente, e mais importante, agradeço a minha família por todo apoio e ajuda nesse longo período, sem eles não teria conseguido.

Agradeço também aos meus amigos, pelos incentivos e pela compreensão nas minhas ausências.

E ao meu orientador Leandro Morgado, pela orientação e compreensão ao longo deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que fizeram parte e me apoiaram nessa etapa da minha vida.

Resumo

Inicialmente, abordaremos aspectos básicos da Teoria dos Jogos, como conceito e elementos de um jogo, estratégias dominantes e dominadas, equilíbrio de Nash, apresentando vários exemplos simples. Passaremos a analisar especificamente os jogos na forma extensiva, em que os jogadores efetuam suas ações sequencialmente. Em seguida, abordaremos o direito de greve dos trabalhadores, tratando mais especificamente dos caminhoneiros, finalizando com a aplicação da Teoria dos Jogos na modelagem da greve dos caminhoneiros ocorrida em 2018 no Brasil.

PALAVRAS CHAVE Matemática; greve; Teoria dos Jogos; forma extensiva.

Abstract

Firstly, basic aspects of game theory will be discussed, such as elements and concepts of a game, dominant and dominance strategies, and Nash equilibrium, also presenting several simple examples. We will then analyze games in their extensive form specifically, in which the players execute their actions sequentially. Finally, the right to a workers' strike will be explored, particularly truck drivers, in order to use game theory to create a model in the truck drivers' strike that happened in Brazil in 2018.

KEYWORDS Mathematics; Game theory; Extensive form; strike.

Lista de tabelas

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Quando utilizado o termo “jogo”, por conta do caráter polissêmico da palavra, são diversas as associações imediatamente estabelecidas. Porém, é preciso traçar uma direção específica quando falamos de Teoria dos Jogos. Tal teoria refere-se a um ramo da matemática aplicada onde os jogadores, estrategicamente, escolhem ações a fim de obter o melhor desfecho. Sendo ela, de certa forma, um estudo referente a tomada de decisões, torna-se fácil estabelecer diálogo com outras áreas do conhecimento. Podendo, por exemplo, servir de ferramenta para análise de acontecimentos de cunho político-econômico.

Um exemplo de fenômeno capaz de produzir grandes implicações, tanto na economia de um Estado quanto na forma como este se organiza perante as demandas populares, é a greve dos caminhoneiros. Dentre os motivos da seleção dessa temática como objeto de análise está a complexidade de eventos que levaram a sua ocorrência, bem como a magnitude dos impactos causados durante os dias de paralisação.

Portanto, para realizar a análise da greve dos caminhoneiros, através da Teoria dos Jogos (objetivo geral), o presente estudo estabelece outros três objetivos norteadores. Primeiramente, faz-se necessário explicitar quais foram as decisões tomadas pelos Jogadores. Em seguida, mapear que outras ações poderiam ter sido desempenhadas e seus desfechos. Por fim, verificar se dentre os possíveis desfechos, o real equivale ao melhor resultado.

Durante o Capítulo 2, intitulado Aspectos Básicos da Teoria dos Jogos, é apresentada uma breve trajetória histórica abordando seu surgimento e seus principais colaboradores. Os conceitos-chave para melhor compreensão do trabalho são definidos e explicados no decorrer desta sessão, que apresenta uma breve explicitação sobre jogo em sua forma normal. No mesmo capítulo, porém em outro subtópico, a ideia de previsão de resultado de um jogo é introduzida. Dentre elas existe a chamada Solução Estratégica ou Equilíbrio de Nash, conceito que assume protagonismo na posterior análise de dados.

O Capítulo 3 aborda, de forma mais específica os Jogos na Forma Sequencial, podendo se dar com informações perfeitas ou imperfeitas. Isto é, quando o jogador tem ou não conhecimento da estratégia utilizada por seu oponente na rodada anterior. Outro ponto de destaque a ser aqui abordado é a indução reversa, algoritmo utilizado para encontrar um Equilíbrio de Nash nessa forma de jogo.

Subsequentemente, o Capítulo 4, nomeado O Instrumento da Greve, introduz aspectos de interdisciplinaridade ao discorrer sobre o conceito e o direito à mobilização coletiva assegurado na Constituição Brasileira. Neste capítulo, além da explanação de alguns dos possíveis motivos pelos quais os caminhoneiros podem ser considerados jogadores em potencial, há também um apanhado referente a greves que aconteceram em outros países e continentes com os mais diversos desfechos. Como, por exemplo, Irã e Grécia.

Por fim, a explicação da greve dos caminhoneiros do Brasil e seus precedentes é apresentada. A partir da explicitação, em ordem cronológica, das ações dos três jogadores - o governo, os caminhoneiros e a população - essa sequência é analisada à luz da Teoria dos Jogos. Como desfecho e ponto final não só da análise, mas também do estudo a que se refere, o último capítulo, Breve Análise da Aplicação do Tema "Greve dos Caminhoneiros" no Ensino Fundamental e Médio, pontua a interdisciplinaridade como ponto importante para o desenvolvimento de indivíduos mais críticos.

2 Aspectos básicos da Teoria dos Jogos

2.1 Antecedentes Históricos

O breve relato histórico do surgimento e evolução da Teoria dos Jogos que apresentamos a seguir foi elaborado com base em Bellhouse [2], Bellhouse e Fillion [3], Benjamin e Goldman [4], bem como Walker [17].

Atribui-se ao começo do século XVIII o surgimento histórico da Teoria dos Jogos, com a troca de cartas entre três amigos -Waldegrave, Bernoulli e Montmort- tendo o intuito de encontrarem soluções matemáticas para o jogo "Le Her".Bernoulli, matemático suíço, doutorou-se na Universidade da Basiléia, em 1709, com uma dissertação sobre aplicações da teoria das probabilidades. Montmort, matemático francês, tornou-se amigo de Bernoulli, com quem manteve importante correspondência, precedendo a publicação por ambos de "Essai d'analyse sur les jeux" de hazard, em 1713. É conhecido ainda pelos seus estudos sobre probabilidade, sobre combinatória no estudo de permutação caótica e sobre diferenças finitas.

"Le Her" é o enunciado de um jogo de cartas. As 52 cartas são embaralhadas, o jogador 1 pega uma carta X (que apenas ele vê), o jogador 2 pega uma carta Y (que apenas ele vê) e uma carta Z é colocada sobre a mesa (que ninguém vê). O jogador 1 joga primeiro, escolhe se mantém a sua carta X ou a troca com a carta Y do jogador 2 que pode se recusar a fazer a troca. Em seguida o jogador 2 escolhe se mantém a sua carta ou a troca com a carta Z. Ganha quem tiver a carta de maior valor. Para muitos acadêmicos, o autor das cartas para Nicolas Bernoulli era James Waldegrave, porém, segundo pesquisa efetuada por David Bellhouse e Nicolas Fillion, existe um equívoco quanto à identidade do missivista, havendo evidências de tratar-se na verdade de Francis Waldegrave. Outra conjectura apontada por eles refere-se à ideia de que a estratégia mista para o jogo “Le Her”, atribuída a Waldegrave, com base nas correspondências citadas, pode ter sido elaborada por Montmort. Segundo os autores, em carta escrita a Bernouli, Montmort reivindica a autoria da solução, afirmando tê-la encontrado pela primeira vez em conversa com Waldegrave que a escreveu.

Apesar das controvérsias sobre a autoria, parece ser consenso entre os estudiosos do tema que a ideia do equilíbrio de estratégias mistas, por meio de um jogo de cartas, tenha sido elaborada no século XVIII, ainda que sem formalizar o conceito ou tentar estender sua abordagem para uma teoria geral. Antoine Augustin Cournot, matemático e economista, formalizou e utilizou funções matemáticas para descrever conceitos econômicos, analisou os mercados e estabeleceu um ponto de equilíbrio do monopólio (ponto de Cournot), posteriormente, generalizado pelo matemático John Nash Jr. Em 1913, Ernst Friedrich Ferdinan Zermelo, matemático e filósofo conhecido por seu trabalho quanto ao desenvolvimento dos axiomas de Zermelo-Frankel e a prova do Teorema da Boa-Ordenação apresentou o primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos - o Teorema de Zermelo - que apresenta uma estratégia para jogos, como xadrez por exemplo, na qual é assegurada a vitória ou, no mínimo, o empate para o jogador que a efetuar primeiro. Foi, no entanto, durante a Segunda Guerra Mundial, que a Teoria dos Jogos veio a ganhar maior notoriedade no mundo da economia e da matemática aplicada. Em 1944, John von Neumann e Oskar Morgenstern lançaram o livro The Theory of Games and Economic Behaviour, que por meio da análise de jogos com soma zero - quando a vitória de um jogador representa efetivamente a derrota de outro - apresentava soluções para alguns problemas militares, o que causou grande impacto.

John Von Neumann é considerado como um dos mais importantes matemáticos do século XX. Ele contribuiu para a elaboração da teoria dos conjuntos, análise funcional, teoria ergódica, mecânica quântica, ciência da computação, economia, Teoria dos Jogos, análise numérica, hidrodinâmica das explosões e estatística, além de outras áreas da Matemática. Na década posterior, de 1950, John Nash Jr, matemático norte-americano, passou a chamar a atenção com suas contribuições sobre o tema, demonstrando a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não cooperativos, conceito de Equilíbrio de Nash. Trabalhou com a Teoria dos Jogos, geometria diferencial e equações diferenciais parciais. Compartilhou o Prêmio de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel de 1994 com Reinhard Selten e John Harsanyi.

Já em 1970, John Horton Conway, matemático ativo na teoria dos grupos finitos, teoria dos nós, teoria dos números, teoria combinatória dos jogos e teoria dos códigos, ficou bastante conhecido pela invenção do Jogo da Vida. Em 1988, John Harsanyi, demonstrou que o equilibro de Nash poderia ser aplicado a jogos assimétricos (jogos nos quais um jogador possui mais informações que seu oponente). O economista é conhecido por sua contribuição para o estudo da Teoria dos Jogos e sua aplicação à economia, sobretudo para o desenvolvimento da análise de jogos de informação incompleta, os chamados "jogos bayesianos". Também teve papel importante para o raciocínio econômico em filosofia política e moral, muito utilizada pelos utilitaristas, bem como contribuiu para o estudo da seleção de equilíbrio. Em 1994, John Nash e John Harsanyi receberam o Prêmio Nobel de Economia por suas contribuições para a Teoria dos Jogos. Computadores quânticos, criptografia, a formulação de algoritmos, física quântica e várias outras áreas têm sido consideradas aplicações da Teoria dos Jogos, na biologia por exemplo, o zoólogo e professor da Universidade de Oxford (Inglaterra) Richard Dawkins, demonstrou que o comportamento dos genes na evolução das espécies segue alguns padrões que podem ser estudados pela teoria dos jogos. Segundo o autor, os genes, às vezes, evoluem e cooperam entre si para garantir o máximo ganho individual (o que, na teoria dos jogos, denomina-se utilidade), de forma nitidamente egoísta.

2.2 O conceito de Jogo e a Teoria dos Jogos

Nesta seção, vamos abordar vários aspectos introdutórios da Teoria dos Jogos, tais como definições iniciais, elementos, exemplos, entre outros. As ideias foram elaboradas com base em Fiani [6], Santini e Garbugio [12] [13], Abrantes [1], Karlin e Peres [8], Gomes [7], entre outros.

2.2.1 Jogo

A palavra "jogo" pode ser entendida, dentre outras diversas formas, como um conjunto de regras que governam o comportamento de dado número de indivíduos, que são chamados de jogadores. Tais regras consistem em uma sucessão finita de jogadas realizada segundo determinada ordem ou simultaneamente pelos jogadores. Os lances podem ser pessoais ou aleatórios. Lance pessoal é aquele em que o jogador escolhe entre várias alternativas oferecidas. Chama-se de escolha a decisão que ele efetivar. A escolha que for feita, no lance aleatório, será a partir de uma seleção de alternativas. Ou seja, "o jogo é uma sucessão de lances e a partida uma sucessão de escolhas."

O jogo como estando no palco principal, não permite avaliações sofistas, necessariamente se deve observar o que esta bem aparente, mas também o que se encontra na coxia dos dados, a fim de obter-se uma perfeita e clara analise do sistema.

2.2.2 Jogador

A palavra "jogador", a princípio, nos remete às definições e padrões dos dicionários, onde sua classe gramatical de substantivo masculino fica explícita. Porém, definições como "aquele que joga", obrigam o pesquisador a entender o significado da palavra jogo. Ação esta que, circularmente, nos leva à definição "atividade cuja natureza ou finalidade é a diversão, o entretenimento" e facilita a compreensão da maneira pela qual conceituaremos jogador no presente trabalho.

Através da epistemologia da palavra encontra-se a origem do termo em latim: "jocus", que significa gracejo, brincadeira, divertimento e corrobora com a ideia inicial.

Contudo, pode-se perceber que esta definição não contempla a amplitude do conceito jogador para a análise através da Teoria dos Jogos. Ainda assim, podem ser simplificados enquanto agentes de tomada de decisão.

Cada jogador tem um conjunto de estratégias, das quais se vale a cada momento do jogo, de acordo com a informação disponível, planejando suas ações, a fim de obter o melhor resultado.

Quando cada jogador escolhe sua estratégia, delineia-se uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesses ou preferências para determinadas situações no jogo. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma função/utilidade que atribui um número real (o ganho ou payoff do jogador) a cada situação do jogo.

2.2.3 Estratégia

Estratégia é uma palavra de origem grega, originalmente relacionada com a arte de fazer guerra. Por conseguinte seu significado básico leva à ideia de plano, método, manobras ou estratagemas.

O termo grego "strategia", no nascedouro do vocábulo teve seu significado ampliado e aplicado nas mais diversas situações, e não só com as ideias primárias ligadas aos aspectos militares.

O vocábulo estratégia apresenta diversos significados atualmente e é um conceito que está presente em muitos conjuntos de circunstâncias (contexto), sendo este motivo de difícil definição. De modo mais amplo, uma estratégia pode ser entendida como modo de ultrapassar algum problema.

No nosso caso específico, é a descrição da maneira pela qual uma pessoa, que participa de um jogo, pode agir sob quaisquer circunstâncias, ou como um cursor de ação qualquer de um agente em um jogo na forma extensiva. É possível definir e expressar o jogo de forma mais simples e objetiva e por isso de maior importância teórica, chamada forma normal ou forma estratégica.

2.2.4 Recompensa

O termo recompensa pode ser descrito como um retorno por algo que foi feito, ou mesmo um benefício recebido quando determinado resultado é apresentado. No caso da Teoria dos Jogos, a recompensa está fortemente vinculada a ação dos jogadores, em virtude de suas estratégias, bem como ao resultado obtido ao final do jogo.

Nesse sentido, a recompensa está relacionada com todos os elementos anteriores, focando o ganho, o prêmio de cada um dos jogadores em relação ao resultado.

Especificamente na Teoria dos Jogos, chamamos essa recompensa de payoff, e indicamos por um n-upla de números reais (associados aos n jogadores), que é uma representação matemática do benefício obtido por cada jogador com o resultado final do jogo. Em outras palavras, quanto maior o número associado a um jogador, maior o benefício que este teve ao final do jogo.

2.2.5 Jogo na forma normal

A forma normal pode ser entendida como modo desembaraçado de expor objetivamente os dados, através de tabela informativa. Organizar e simplificar as representações e dados torna a visualização dos resultados mais nítida e clara, bem como auxilia a obtenção dos conhecimentos e informações necessárias para avaliação dos dados. Este é o método usual de abarcar os dados e visualizar resultados de forma mais simples e objetiva, por este motivo é o meio mais comumente utilizado.

A organização em forma de tabelas facilita a identificação e análise dos dados. Desse modo, é possível utilizar apenas as estratégias disponíveis para cada jogador e os respectivos resultados associados a cada elemento do conjunto, que é constituído pelo produto cartesiano dos conjuntos de estratégias individuais.

Mais especificamente, temos em um jogo

• Um conjunto finito de jogadores $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$;

• Um conjunto finito de estratégias puras $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{im_i}\}$ associado a cada jogador $g_i, \forall_i$;

• Um perfil de estratégia pura é denominada pelo vetor $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma estratégia do jogador $g_i \in G$;

• Espaço de estratégia pura do jogo é o conjunto de todos os perfis de estratégia pura, que formam o produto cartesiano $S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$;

• Para cada jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade $u_i : \begin{array}{c} S \to \mathbb{R} \\ s \mapsto u_i(s) \end{array}$ que associa o ganho (payoff) $u_i(s)$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $s \in S$.

Exemplos 2.2.1. *(O dilema do prisioneiro) Antônio e Bento são suspeitos de um crime. Na prisão são colocados em celas diferentes sem comunicação entre si. Uma maneira de incriminá-los é a confissão. O delegado faz uma proposta para cada um com as seguintes regras: existem duas escolhas, confessar ou negar o crime. Se nenhum dos dois confessar, ambos pegarão pena de 1 ano. Se os dois confessarem, ambos terão pena de 5 anos. Caso um confessar e o outro negar, o que confessou será libertado e o outro terá a pena de 10 anos de prisão. Nesse contexto, temos:*

• *Os jogadores* $G = \{Antônio,\ Bento\}$;

• *As estratégias* $S_A = \{confessar, negar\}, S_B = \{confessar, negar\}$;

• *O espaço de estratégias*

$S = \{(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar, negar)\}$;

- *As duas funções utilidade:*

i. $u_A : S \to \mathbb{R}$,*que é dada por* $u_A(confessar, confessar) = -5$, $u_A(confessar, negar) = 0$, $u_A(negar, confessar) = -10$ *e* $u_A(negar, negar) = -1$

ii. $u_B : S \to \mathbb{R}$,*que é dada por* $u_B(confessar, confessar) = -5$, $u_B(confessar, negar) = -10$, $u_B(negar, confessar) = 0$ *e* $u_B(negar, negar) = -1$

Representando esses payoffs dos jogadores através de uma matriz, temos:

		Bento	
		Confessar	Negar
Antônio	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Tabela 1 – Matriz payoff do Dilema do Prisioneiro

2.3 Solução de um jogo

A solução de um jogo – prescrição ou previsão de seu resultado – leva em conta que os jogadores devam jogar de uma forma racional e que desejem maximizar sua recompensa. Desse modo, iremos abordar aqui os dois conceitos mais aplicados para a solução de um jogo: dominância de estratégias puras e equilíbrio de Nash.

2.3.1 Solução de um jogo com dominância de estratégias puras.

Uma estratégia dominante é uma estratégia vantajosa para um jogador independente da estratégia escolhida pelo outro jogador, ou seja, todas menos uma estratégia é estritamente dominada.

Vamos denotar por

$s_{-i} = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$

uma escolha de estratégias para todos os jogadores, menos o jogador g_i. Com isso, podemos denotar um perfil de estratégia por $s = (s_{ij_i}, s_{-i}) = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, s_{nj_n})$. Iremos usar isso quando a estratégia de um único jogador $g_i \in G$ for variar, enquanto as estratégias dos demais jogadores permanecerão fixas.

Definição 2.3.1. *(Estratégia pura estritamente dominada) Dizemos que uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se, independentemente das escolhas dos demais jogadores, o jogador g_i ganhar mais escolhendo $s_{ik'}$ do que s_{ik}, isto é, se $u_i(s_{ik'}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.*

Uma maneira de procurarmos a solução de um jogo é realizarmos o processo de dominância estrita iterada, no qual a redução a um único perfil, levará ao término do jogo. No entanto, é preciso perceber que esse processo nem sempre apresenta a solução desejada, já que nem sempre é possível fazer tal redução.

Definição 2.3.2. *(Dominância estrita iterada) É o processo de solução de um jogo no qual eliminamos sequencialmente as estratégias estritamente dominadas.*

Se o processo da dominância estrita iterada reduz o jogo para um único perfil de estratégias puras s^*, temos uma situação de equilíbrio de estratégia estritamente dominante, e este perfil é considerado a solução do jogo.

Voltemos ao exemplo dos prisioneiros Antônio e Bento. Qual seria a melhor escolha? Confessar ou negar? Imaginando que ambos queiram minimizar suas penas, qual a melhor estratégia? Suponhamos que o raciocínio de Antônio seja o seguinte: Bento pode confessar ou negar; se Bento confessar então é melhor que eu confesse também. Se Bento negar e eu confessar, então eu fico livre. Melhor eu confessar então. Porém se o raciocínio de Bento for o mesmo, os dois pegarão a pena de 5 anos. Para Teoria dos Jogos os dois jogadores, Antônio e Bento possuem estratégias dominantes, ou seja, todas menos uma estratégia é estritamente dominada. No jogo existe a possível resolução por dominância estrita iterada e o jogo termina em uma solução que é um equilíbrio de estratégia dominante.

Apresentamos a seguir outro exemplo deste método de solução, em que a eliminação das estratégias dominadas é feita em várias iterações:

Exemplos 2.3.1. *Considere o jogo determinado pela matriz de payoffs abaixo*

g_2

g_1		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
	s_{11}	(5, 2)	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(0, 0)	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(7, 0)	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(9, 5)	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Tabela 2 – Exemplo 2.3.1 - 1ª Matriz

Observando a matriz de payoffs, temos que para o jogador g_2 a estratégia s_{21} é estritamente dominada pela s_{24}, assim a coluna s_{21} pode ser eliminada.

g_2

g_1		s_{22}	s_{23}	s_{24}
	s_{11}	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Tabela 3 – Exemplo 2.3.1 - 2ª Matriz

Agora, temos para o jogador g_1 a estratégia s_{11} é estritamente dominada pela s_{12} e a estratégia s_{14} é estritamente dominada por s_{13}, ficando assim a matriz payoff a seguir.

		g_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{12}	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)

Tabela 4 – Exemplo 2.3.1 - 3ª Matriz

Temos agora que para o jogador g_2 que a estratégia s_{23} e s_{24} são estritamente dominadas pela s_{22}.

		g_2
		s_{22}
g_1	s_{12}	(3, 2)

Tabela 5 – Exemplo 2.3.1 - 4ª Matriz

Por fim, a estratégia s_{13} é estritamente dominada pela estratégia s_{12} do jogador g_1. Ficando assim com apenas um perfil de estratégia estritamente dominante.

2.3.2 Solução estratégica ou equilíbrio de Nash

John Nash propôs um princípio simples mas importante para entender o comportamento dos jogadores. A ideia básica, mesmo quando não há estratégias dominantes, é que os jogadores usem estratégias que são melhores respostas para si. Um jogo pode ter vários equilíbrios de Nash ou nenhum.

Definição 2.3.3. *(Equilíbrio de Nash) Dizemos que um perfil de estratégia*
$s^* = (s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*) \in S$ *é um equilíbrio de Nash se*
$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*)$
para todo i=1, ... , n e para todo $j_i = 1, ..., m_i$ *com* $m_i \geq 2$.

Aplicando o equilíbrio de Nash no exemplo dos prisioneiros, ainda sob a perspectiva de Antônio:

Se eu negar e Bento negar também nossa pena seria de 1 ano, mas não posso negar, correndo o risco de Bento confessar e a pena de 10 anos ser só minha. (não é equilíbrio de Nash). O ideal seria Bento e eu confessarmos, assim ambos teremos uma pena menor, de 5 anos. (O único equilíbrio de Nash do jogo é confessar, confessar). De fato:
$u_{Antonio}$(confessar, confessar)$= -5 > -10 = u_{Antonio}$(negar, confessar)
e u_{Bento} (confessar, confessar)$= -5 > -10 = u_{Bento}$(confessar, negar)

Todo equilíbrio com estratégias dominantes é um equilíbrio de Nash, mas nem todo equilíbrio de Nash é um equilíbrio com estratégias dominantes.

Não necessariamente um equilíbrio de Nash é mais vantajoso no ponto de vista coletivo, como no exemplo acima, quando o melhor resultado pensando individualmente seria a liberdade, ou para os dois juntos que seria pegar apenas 1 ano cada.

Exemplos 2.3.2. *(Caça ao Cervo). Dois caçadores estão procurando um cervo, quando um coelho passa por eles. Os caçadores têm duas opções de escolhas: continuar rastreando o cervo, ou perseguir o coelho. Para pegar o cervo os caçadores precisarão ir os dois juntos, já o coelho eles conseguem pegar sozinhos. Além disso, o cervo é muito maior, valendo quatro vezes mais pegá-lo do que o coelho. Caso eles peguem algum animal junto, eles dividem a recompensa. Com isso temos a seguinte matriz de payoff:*

		Caçador 2	
		Cervo	Coelho
Caçador 1	Cervo	(4, 4)	(0, 2)
	Coelho	(2, 0)	(1, 1)

Tabela 6 – Matriz payoff da Caça ao Cervo

Repare que os dois irem atrás do coelho será um equilíbrio de Nash, pois nenhum dos dois tem um incentivo a mudar de opção sem o outro mudar, ou seja, o caçador 1 não ira mudar para ir atrás *do cervo, pois ele não irá ganhar nada, o mesmo pensamento para o jogador 2. E os dois irem atrás do cervo também será um equilíbrio de Nash, pois terão um prêmio menor caso resolva mudar de estratégia, esse seria um equilíbrio de Nash onde ambos teriam um maior payoff.*

Exemplos 2.3.3. *Dois animais estão disputando um pedaço de comida e precisam decidir como irão dividir entre eles. Para isso eles podem optar por ter um comportamento agressivo ou um comportamento passivo. Se ambos forem passivos, vão repartir a comida igualmente, cada um recebendo +3. Se um for passivo e o outro agressivo, o agressivo ganharia +5 e o passivo +1. Mas se ambos forem agressivos, eles destroem a comida e ambos ficam com 0. Para esse jogo temos a matriz de payoff a seguir:*

Animal 2

		Passivo	Agressivo
Animal 1	Passivo	(+3, .3)	(+1, +5)
	Agressivo	(+5, +1)	(0, 0)

Tabela 7 – Matriz payoff do Exemplo 2.3.3

Nesse jogo temos dois equilíbrios de Nash, que seria quando temos um animal passivo e o outro agressivo. Vamos analisar no caso do animal 1 ser passivo e o animal 2 ser agressivo, tendo o payoff (+1, +5).

Se o animal 1 resolver trocar e ter um comportamento agressivo, nós teríamos o payoff (0, 0), o que ele sairia perdendo pois teria um payoff +1 para um 0. Agora se o animal 2 mudar seu comportamento para passivo o payoff mudará para (+3, +3), onde ele sairia de um payoff +5 para um +3, não sendo vantagem. Então temos que esse é um equilíbrio de Nash, pois nenhum jogador tem interesse de mudar sua estratégia caso o outro também não mude.

Exemplos 2.3.4. *Duas empresas A e B têm a mesma estrutura de custos e a mesma procura. Cada empresa pode escolher entre manter* *o preço ou baixá-lo no sentido de levar o rival à falência.*

Se ambas as empresas mantiverem o preço, conseguem obter lucros de 50, se baixarem o seu preço de venda reduzem o lucro do concorrente para 20 e transformam o seu lucro em prejuízo de -20. Se ambas baixarem os preços, terão as duas lucro zero. Tendo a matriz dos payoffs a seguir:

		Empresa B	
		Preço normal	Preço baixo
Empresa A	Preço normal	(50, 50)	(20, -20)
	Preço baixo	(-20, 20)	(0, 0)

Tabela 8 – Matriz payoff do Exemplo 2.3.4

Nessa situação o equilíbrio de Nash são as duas manter o preço normal, pois ambas teriam o maior payoff possível (+50, +50) não tendo o porquê trocar.

Exemplos 2.3.5. *Suponha que dois países A e B podem adotar uma política de comércio livre ou adotar uma política que cria barreiras para o comércio internacional. Vamos admitir que os países não tem um diálogo pra decidir o melhor.*

Nessa situação temos a seguinte matriz de payoffs:

		País B	
		Comércio livre	Protecionismo
País A	Comércio livre	(300, 600)	(-200, 700)
	Protecionismo	(400, -500)	(200, 500)

Tabela 9 – Matriz payoff do Exemplo 2.3.5

Repare que a melhor situação seria ambas adotarem o comércio livre, payoff de (300, 600), mas esse não é um equilíbrio de Nash, pois se um dos jogadores mudar para protecionismo, ele aumentaria o seu payoff e, consequentemente, diminuiria o do outro. Como ambos teriam *esse mesmo estímulo de trocar para protecionismo, encontraríamos o nosso equilíbrio de Nash, de payoff (200, 500). E nesse caso nenhum vai querer mudar de estratégia, pois se o outro país manter a estratégia, ele sairia perdendo.*

Na próxima seção, veremos que a estratégia de um jogador pode ser executar as suas ações de forma aleatória, seguindo alguma distribuição de probabilidade.

2.4 Estratégias mistas

Existem alguns jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras, para esses jogos usaremos as probabilidades de cada estratégia. Um desses jogos é o jogo de combinar moedas. Este jogo possui dois jogadores, cada um com uma moeda, e exibem-nas ao mesmo tempo. Se ambas as moedas forem iguais o primeiro jogador ganha a moeda do segundo, caso as moedas sejam diferentes o segundo jogador ganha a moeda do primeiro. Observe a seguir matriz de payoff desse jogo.

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(+1, -1)	(-1, +1)
	s_{11}	(-1, +1)	(+1, -1)

Tabela 10 – Matriz payoff do jogo de combinar moedas

Vamos analisar esse jogo se o jogador g_1 coloca cara em $\frac{1}{4}$ das vezes e coroa $\frac{3}{4}$ das vezes e o jogador g_2 $\frac{1}{3}$ de ser cara e $\frac{2}{3}$ coroa, ou seja, vai escolher as distribuições de probabilidades $p_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $p_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Temos:

$$u_1(p) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}.(+1) + \frac{1}{4}.\frac{2}{3}.(-1) + \frac{3}{4}.\frac{1}{3}.(-1) + \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.(+1) = +1/6$$

$u_2(p) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.(-1) + \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.(+1) + \frac{2}{3}.\frac{1}{4}.(+1) + \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.(-1) = -1/6$

Com esse exemplo podemos generalizar o conceito de estratégias mistas. Temos que uma estratégia mista p_i para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades, ou seja, p_i é um elemento do conjunto

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, ..., x_{m_i}) \in \mathbb{R} | x_1 \geq 0, ..., x_{m_i} \geq 0 e \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}.$$

Assim, se $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_1})$, então $p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0, ..., p_{im_1} \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$

Denominamos espaço de estratégia mista o produto cartesiano $\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times ... \times \Delta_{m_n}$ E perfil de estratégia mista é um vetor $p \in \Delta$. Usaremos p_{-i} para representar as estratégias de todos os jogadores menos do jogador g_i.

Exemplos 2.4.1. *Um casal resolve ir ao cinema, o homem quer ver um filme de ficção e a mulher uma comédia romântica. Apesar das preferências distintas, para verem um filme juntos precisam optar apenas por um deles, se escolherem cada um sua preferência verão sozinhos ou ainda a opção de não ver filme nenhum. O equilíbrio de Nash indica a situação melhor para os dois ao mesmo tempo e não a melhor individualmente. Precisam coordenar suas decisões para melhor escolha e existem dois equilíbrios (ficção,ficção ou comédia, comédia)*

		Mulher	
		Ficção	Comédia
Homem	Ficção	(2, 1)	(0, 0)
	Comédia	(0, 0)	(1, 2)

Tabela 11 – Matriz payoff do Exemplo 2.4.1

- *Sejam p_1 e p_2 as probabilidades com que o homem e a mu-*

lher escolhem ficção.

- *O payoff esperado do homem será dado por*

$2.p_1.p_2 + (1 - p_1).(1 - p_2) = p_1.(3p_2 - 1) + 1 - p_2.$

- *O payoff esperado da mulher será dado por*

$p_1.p_2 + 2.(1 - p_1).(1 - p_2) = p_2.(3.p_1 - 2) + 2 - 2p_1.$

2.4.1 Soluções em estratégias mistas

Todos os critérios de soluções em estratégias puras podem ser estendidos para estratégias mistas.

Definição 2.4.1. *(Equilíbrio de Nash em estratégias mistas) Dizemos que um perfil de estratégia mista* $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times ... \times \Delta_{m_n}$ *é um equilíbrio de Nash se* $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p, p_{-i}^*)$ *para todo* $p \in \Delta_{m_i}$.

Vamos analisar o jogo de combinar moeda com $p_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e ver que é um equilíbrio de Nash.

$$u_1(p) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(+1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(+1) = 0$$
$$u_2(p) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(+1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(+1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) = 0$$

Repare que com essa distribuição nenhum dos jogadores tem uma chance menor de ganhar, ambos ficaram com 0, sendo assim nenhum dos jogadores tem um motivo de alterar sua estratégia sem que o outro mude, tendo esse como sendo o equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

3 Jogos na forma sequencial ou extensiva

Quando os jogadores escolhem suas estratégias simultaneamente ou o fazem sem conhecer as estratégias dos outros jogadores, estamos diante de uma forma normal de jogo. Há, no entanto, situações em que os jogadores tomam suas decisões de forma sequencial, após terem observado a ação de um outro jogador. Neste caso, temos um jogo na forma sequencial, também chamado de forma extensiva, ou seja, aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada.

Esse capítulo será dedicado a esta forma de representar um jogo, e as ideias apresentadas a seguir foram elaboradas com base em Karlin e Peres [8], Shoham e Leyton-Brown [14], Fiani [6], bem como Santini e Garbugio [13].

Inicialmente, vale considerar que uma maneira de se representar um jogo na forma extensiva é através de uma árvore, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplos 3.0.1. *Na figura a seguir, o jogador 1 joga primeiro: ele pode escolher entre as ações a e b. Depois, é a vez do jogador 2 escolher sua ação. Se 1 jogou a, então 2 pode escolher entre c ou d e, se 1 jogou b, então 2 pode escolher entre e ou f. Depois que todos jogadores realizaram (sequencialmente) suas ações, cada jogador recebe o seu ganho. A convenção é que a primeira coordenada do vetor de payoffs represente o ganho de quem jogou em primeiro lugar, a segunda coordenada represente o ganho de quem jogou em segundo lugar, e assim por diante.*

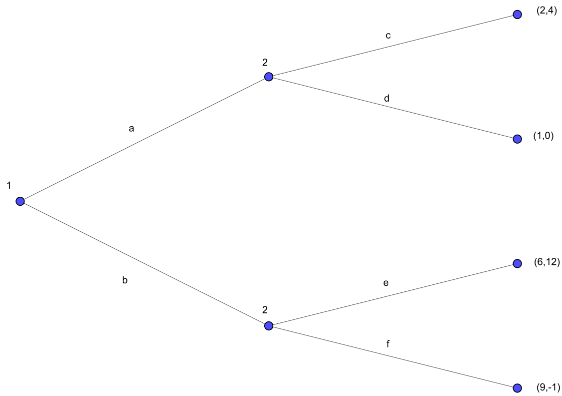

Figura 3.0.1 – Exemplo 3.0.1

Trataremos inicialmente dos jogos sequencias de informação perfeita: os ganhos são de conhecimento comum de todos os jogadores, um único jogador faz um movimento por vez e cada jogador conhece as escolhas dos jogadores que o antecedem toda vez que for jogar.

Exemplos 3.0.2. *(Jogo da Centopéia) O modo básico do jogo da centopéia possui dois jogadores, A e B, sentados nas extremidades de um tabuleiro, e um leiloeiro. O leiloeiro coloca uma nota de 1 dólar sobre o tabuleiro. O jogador A pode pegar a nota, e encerrar o jogo. Caso ele não pegue, o leiloeiro coloca mais uma nota e dá a chance do jogador B de pegá-las, se o B pegar o jogo se encerra, se o B não pegar o leiloeiro coloca outra nota e dá a chance novamente para o jogador A. Repetindo assim por diante até um jogador pegar as notas, ou atinja uma quantidade máxima já pré-estabelecida, por exemplo, 50 dólares.*

Há alguns resultados racionais para esse jogo: o mais otimista, seria o jogador B pegar a última quantia de 50 dólares, porque o

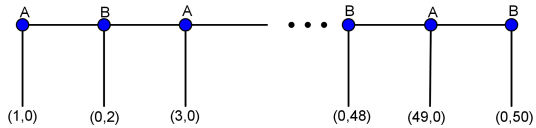

Figura 3.0.2 – Jogo da Centopéia

jogador A supõe que ele estará disposto a dividir o valor, ambos ficando com metade do valor máximo, 25 dólares. Outra solução, sem essa suposição de dividir a quantia, consiste no jogador A pegar o montante na penúltima jogada, com 49 dólares, não dando a chance de B pegar o valor total. Mas o jogador B poderia pensar dessa mesma maneira, antecipando e levando com 48 dólares, seguindo esse mesmo raciocínio acabaria com o jogador A pegando 1 dólar na primeira rodada. Esse raciocínio é conhecido como método da indução reversa.

3.1 Jogos com informação perfeita

O jogo da centopeia é um caso de jogo extensivo de informações perfeitas, isto é, cada jogador sabe qual estratégia seu oponente usou na rodada anterior. Nos jogos de informação perfeita cada jogador sabe o que ocorreu antes de escolher sua estratégia, ou seja, cada jogador sabe em que nó está.

Definição 3.1.1. *(jogos de informações perfeitas) Um jogo na forma extensiva será de informações perfeitas quando:*

- *G é um conjunto de n jogadores;*
- *A é um conjunto das ações;*
- *H é um conjunto de nós não terminais;*
- *Z é um conjunto de nós terminais;*

• $x : H \mapsto 2^A$ *é a função que atribui cada nó à um conjunto de ações possíveis;*

• $\rho : H \mapsto G$ *é a função que atribui cada nó não terminal à um jogador* $i \in G$ *que escolhe uma ação nesse nó;*

• $\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$ *a função que mapeia um nó não terminal e uma ação à um novo nó não terminal ou nó terminal;*

• $u = (u_1, \ldots, u_n)$,*quando* $u_{1i} : Z \mapsto \mathbb{R}$ *é uma função que dá os payoffs dos jogadores nos nós terminais.*

Exemplos 3.1.1. *A árvore a seguir é um exemplo de jogo de informação perfeita, pois os jogadores sabem qual foi a ação do outro jogador, ou seja, o jogador sabe perfeitamente em que nó está para aí poder decidir sua ação. Mas para verificar isso, vamos analisar todos os itens na definição 3.1.1.*

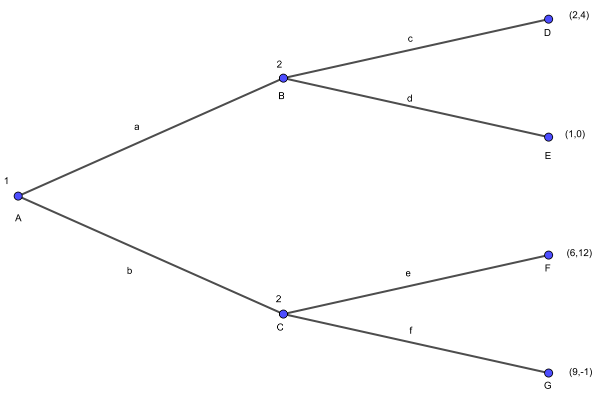

Figura 3.1.1 – Jogo de informação perfeita

• *Conjunto de jogadores:* $G = \{1, 2\}$*;*

- *Conjunto de ações:* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- *Conjunto de nós não terminais:* $H = \{A, B, C\}$*;*
- *Conjunto de nós terminais:* $Z = \{D, E, F, G\}$*;*
- *Função x, com:* $A \mapsto \{a, b\}, B \mapsto \{c, d\}, C \mapsto \{e, f\}$*;*
- *Função* ρ*, com:* $A \mapsto 1, B \mapsto 2, C \mapsto 2$*;*
- *Função* σ*, com:*

$(A, a) \mapsto B, (A, b) \mapsto C, (B, c) \mapsto D, (B, d) \mapsto E, (C, e) \mapsto F, (C, f) \mapsto G$*;*

- *Vetores de payoffs:*

$u_1 = (D \mapsto 2, E \mapsto 1, F \mapsto 6, G \mapsto 9)$*;*

$u_2 = (D \mapsto 4, E \mapsto 0, F \mapsto 12, G \mapsto -1)$*;*

- *Conjuntos de estratégias: Sabemos que as estratégias no jogo de forma extensiva é uma n-upla com as ações definidas em cada nó, por exemplo: o jogador 2 pode escolher a estratégia (c,e) que significa, se ele estiver no nó B irá usar a ação c e se estiver no nó C usará a ação e. Sabendo disso, vamos listar todas estratégias possíveis de cada jogador, e o plano de ação desse modelo:*

Estratégias do jogador 1: $S_1 = \{a, b\}$*;*

Estratégias do jogador 2: $S_2 = \{(c, e), (c, f), (d, e), (d, f)\}$*;*

Conjunto de estratégias: $S = S_1 \times S_2 =$

$\{(a, (c, e)), (a, (c, f)), (a, (d, e)), (a, (d, f)), (b, (c, e)), (b, (c, f)), (b, (d, e)).$

Dessa forma, todos os tópicos da definição apresentada foram satisfeitos. Assim, de fato, este é um jogo na forma extensiva de informação perfeita.

Na seção a seguir vamos ver os jogos onde o jogador tem que decidir sua ação sem saber em que nó está, ou seja, não sabe qual foi a jogada do outro jogador. Esses jogos são chamados de informação imperfeita.

3.2 Jogos com informação imperfeita

Quando o jogador tem que fazer sua escolha de estratégia sem saber o que seu oponente escolheu anteriormente, teremos um jogo na forma extensa de informações imperfeitas. Sendo assim, o jogador não sabe em que nó esta, tendo então que os nós terão as mesmas estratégias.

Definição 3.2.1. *(jogos de informações imperfeitas) Um jogo na forma extensiva será de informações imperfeitas quando:*

- *Ter os mesmos conjuntos e as mesmas funções dos jogos com informações perfeitas* $(G, A, H, Z, x, \rho, \sigma)$*;*
- $I = (I_1, ..., I_n)$ *quando* $I_1 = (I_{i,1}, ..., I_{i,k_1})$ *é um conjunto de classes de equivalência* $\{h \in H : \rho(h) = i\}$ *com a propriedade que* $x(h) = x(h')$ *e* $\rho(h) = \rho(h')$ *sempre que existir um* j *para o qual* $h \in I_{i,j}$ *e* $h' \in I_{i,j}$.

Representaremos na árvore a informação imperfeita como uma linha pontilhada, como o exemplo a seguir onde o jogador 2 não sabe se está no nó B ou no C.

Exemplos 3.2.1. *Analisando a árvore de possibilidades a seguir, temos:*

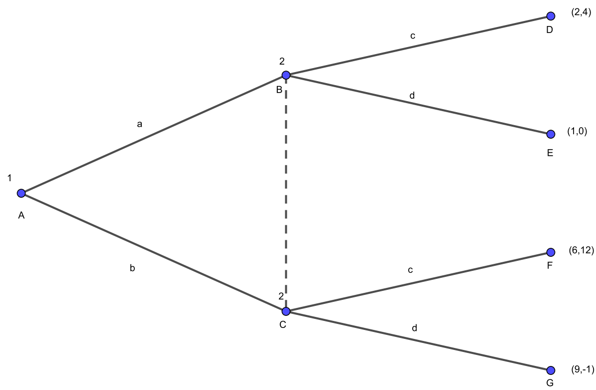

Figura 3.2.1 – Jogo de informação imperfeita

- *Conjunto de jogadores:* $G = \{1, 2\}$;
- *Conjunto de ações:* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- *Conjunto de nós não terminais:* $H = \{A, B, C\}$;
- *Conjunto de nós terminais:* $Z = \{D, E, F, G\}$;
- *Função* x*, com:* $A \mapsto a, A \mapsto b, B \mapsto c, B \mapsto d, C \mapsto e, C \mapsto f$;
- *Função* ρ*, com:* $A \mapsto 1, B \mapsto 2, C \mapsto 2$;
- *Função* σ*, com:*

$(A, a) \mapsto B, (A, b) \mapsto C, (B, c) \mapsto D, (B, d) \mapsto E, (C, e) \mapsto F, (C, f) \mapsto G$;

- *Vetores de payoffs:*

$u_1 = (D \mapsto 2, E \mapsto 1, F \mapsto 6, G \mapsto 9)$;

$u_2 = (D \mapsto 4, E \mapsto 0, F \mapsto 12, G \mapsto 1)$;

- *Conjunto de informações:*

$I_1 = \{\{A\}\}$

$I_2 = \{\{B, C\}\}$

- *Conjuntos de estratégias:*

Estratégias do jogador 1: $S_1 = \{a, b\}$;

Estratégias do jogador 2: $S_2 = \{(c, e), (c, f), (d, e), (d, f)\}$;

Conjunto de estratégias: $S = S_1 \times S_2 =$

$\{(a, (c, e)), (a, (c, f)), (a, (d, e)), (a, (d, f)), (b, (c, e)), (b, (c, f)), (b, (d, e)), (b, (d,$

Exemplos 3.2.2. *(O dilema do prisioneiro) Este é um jogo da forma normal que podemos transformar em um jogo na forma extensiva de informações imperfeitas. Considere que Antonio decidirá primeiro se confessa ou nega, logo Bento não sabe qual a estratégia de Antonio para decidir a sua, ou seja, não sabe se está no nó B ou no C. Observe o jogo na árvore a seguir:*

É interessante verificar que para a Teoria dos Jogos, a informação disponível ao jogador no momento da tomada de decisão interessa mais do que o tempo em que essa decisão é tomada. Nesse sentido, o dilema do prisioneiro pode ser visto como um jogo de ações simultâneas (representado na forma normal), ou mesmo um jogo de ações sequenciais (representado na forma extensiva), onde o segundo jogador não tem conhecimento da ação tomada pelo primeiro.

3.3 Equilíbrio de Nash nos jogos de forma extensiva

A definição de equilíbrio de Nash para jogos sequenciais é a mesma de para jogos na forma normal.

Definição 3.3.1. *Um perfil de estratégia*
$s^* = (s^*_1, ..., s^*_{(i-1)}, s^*_i, s^*_{(i+1)}, ..., s^*_n) \in S$

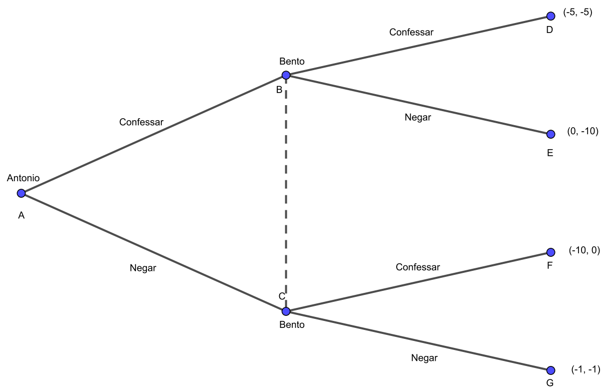

Figura 3.2.2 – Árvore do dilema do prisioneiro

é um equilíbrio de Nash se
$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*)$
para todo i=1, ... , n e para todo $j_i = 1, ..., m_i$ *com* $m_i \geq 2$

Exemplos 3.3.1. *Dado o jogo da figura a seguir*

Temos as estratégias do jogadores:

$S_1 = \{a, b\}$ *e* $S_2 = \{(c,e),(c,f),(d,e),(d,f)\}$.

Tendo 8 perfis de estratégias:

$S = \{(a,(c,e)),(a,(c,f)),(a,(d,e)),(a,(d,f)),(b,(c,e)),(b,(c,f)),(b,($

Repare que o perfil (a, (c, f)) não é um equilíbrio de Nash, pois nele o jogador 1 escolheria o caminho a e o jogador 2 o caminho c, ou seja, $u_1(a,(c,f)) = 2$ *e* $u_2(a,(c,f)) = 4$*,já o perfil (b, (c, f)) tem* $u_1(b,(c,f)) = 5$*, portanto* $u_1(a,(c,f)) < u_1(b,(c,f))$.

Perceba que o perfil (b, (c, f))é um dos equilíbrios de Nash,

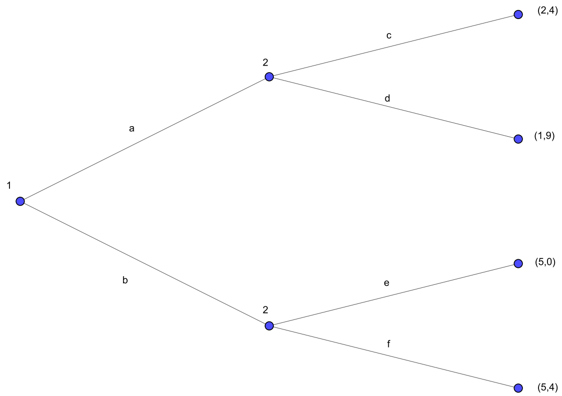

Figura 3.3.1 – Exemplo 3.3.1

pois cada jogador não tem intenção de mudar de estratégia se o outro jogador também não mudar, ou seja, eles tem maiores payoffs nessa estratégia se o outro manter a mesma estratégia. Como mostramos a seguir:

$$u_1(a,(c,f)) < u_1(b,(c,f)) \ e$$

$$u_2(b,(c,f)) = 4 > 0 = u_2(b,(c,e)),$$

$$u_2(b,(c,f)) = 4 > 0 = u_2(b,(d,e)),$$

$$u_2(b,(c,f)) = 4 \geq 4 = u_2(b,(d,f)).$$

Exemplos 3.3.2. *Uma determinada empresa A tem a possibilidade de entrar ou não em determinada indústria. Se ela entrar, uma outra empresa B pode optar por reagir, por exemplo, mudar para uma política mais agressiva de preços, ou pode optar por não reagir.*

Se a empresa resolve não entrar, acaba o jogo, onde a em-

presa B ganharia 5 e a empresa A não altera nada, ganha 0. Agora se a empresa A entrar e a B reagir, teremos um payoff (-2, 1), pois a empresa B irá atrapalhar os planos da empresa A, deixando-a com prejuízo, mas em consequência a empresa B teria um lucro menor. Agora se a empresa B apenas aceitar, elas dividirão os lucros ficando com o payoff (3, 3). Vamos representar o jogo na árvore a seguir:

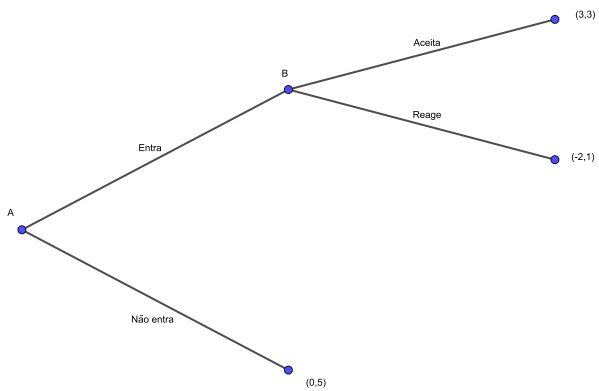

Figura 3.3.2 – Exemplo 3.3.2

Nesse jogo a estratégia (entra, aceita) é um equilíbrio de Nash, pois nenhuma empresa tem um incentivo para mudar sua estratégia, caso a outra não altere. Repare, se a empresa A mude a estratégia e não entre no mercado. o seu payoff muda de 3 para 0, o que não seria uma vantagem. Agora se a empresa B mudar, seu payoff mudaria de 3 para 1, o que para si também não seria vantajoso.

Uma maneira de achar o equilíbrio de Nash em um jogo da forma da extensiva é usando o método da indução reversa, que será visto na próxima seção.

3.4 Indução reversa

O processo de indução reversa é um algoritmo usado para achar um equilíbrio de Nash em estratégias puras em jogos na forma extensiva. O algoritmo é bem simples: você começa pelos nós de decisões finais, e nele escolhe a estratégia com o maior payoff possível para a decisão do último jogador. Em caso de empate, escolha arbitrariamente uma delas. Depois de escolhido essa estratégia vamos para os penúltimos nós, e ignore todas as outras estratégias não usadas. Nesses penúltimos nós, repetimos o mesmo processo, e assim por diante, até chegar ao início da árvore.

Exemplos 3.4.1. *Vamos usar o jogo a seguir:*

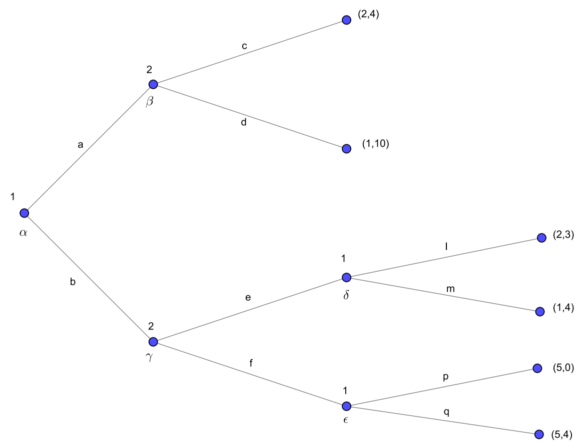

Figura 3.4.1 – Indução reversa

Os jogadores devem pegar os últimos nós, no primeiro passo a ser dado, e devem escolher os maiores payoffs possíveis para si mesmos. Sendo assim, o jogador 2 escolhe a ação d (no nó β); o jogador 1 escolhe *a ação l (no nó δ). Após, no nó ϵ o jogador 1 pode escolher qualquer uma das duas, mas faremos a escolha incidir sobre p.*

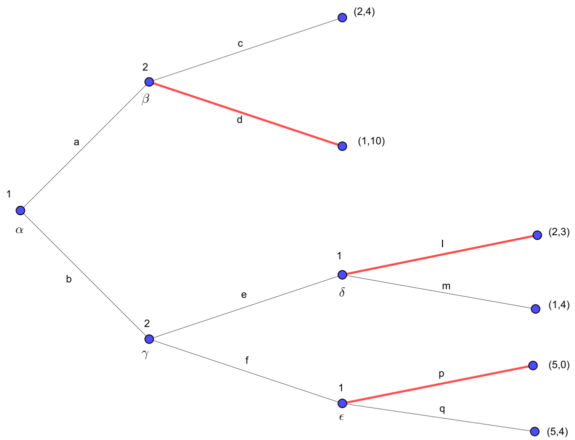

Figura 3.4.2 – Indução reversa - passo 1

No segundo passo, o jogador 2 deve escolher a ação e no nó γ.

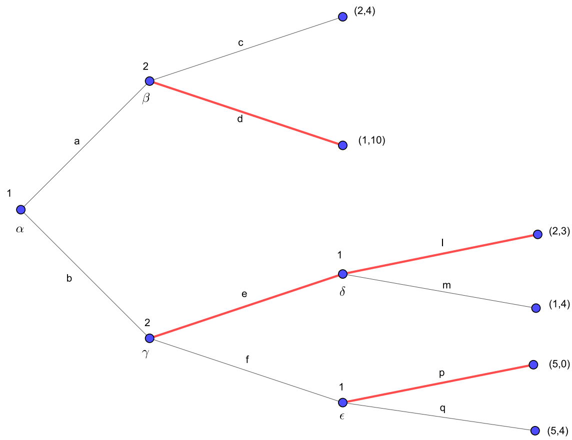

Figura 3.4.3 – Indução reversa - passo 2

Por ultimo, no nó α o jogador 1 deve escolher a ação b. Definindo o perfil de estratégias ((b, l, p), (d, e)).

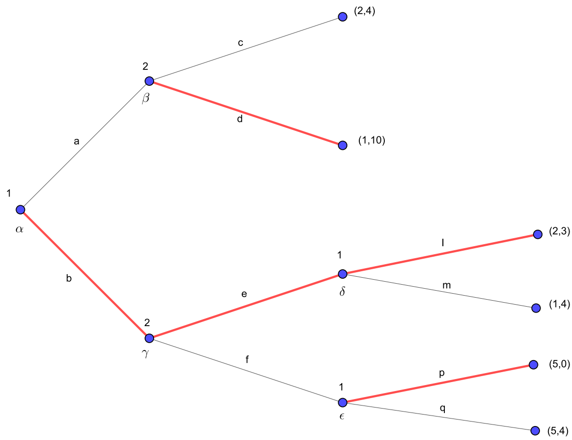

Figura 3.4.4 – Indução reversa - passo 3

Exemplos 3.4.2. *Dois jogadores decidem a melhor forma de dividir 100 euros. O jogador 1 tem duas alternativas iniciais: propor uma divisão 50-50 ou uma divisão 75-25. Perante a primeira opção, o jogador 2 pode aceitá-la (e os payoffs são 50-50) ou propor uma nova distribuição, 25-75. Neste último caso, o jogador 1 volta a entrar no jogo, para aceitar a proposta do jogador 2 ou para a rejeitar (caso em que nenhum deles fica com qualquer parte do dinheiro). Se o jogador 1 faz a proposta inicial 75-25, o jogador 2 vai aceitá-la ou, alternativamente, faz a contra-proposta 40-60. Esta, ou é aceite pelo jogador 1 ou, sendo rejeitada, os 100 euros não são distribuídos entre jogadores. A árvore do jogo é:*

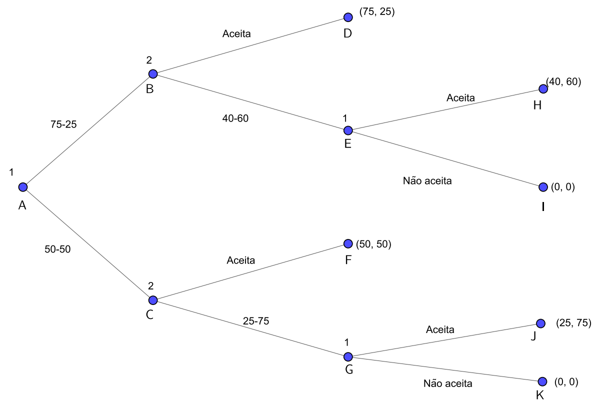

Figura 3.4.5 – Exemplo 3.4.2

Vamos usar o algoritmo da indução reversa para achar o equilíbrio de Nash. Nos nós terminais H, I J e K, o jogador 1 terá que escolher os de maiores payoffs para si, então acaba escolhendo o de nó H e de nó J, como mostrada na arvore a seguir:

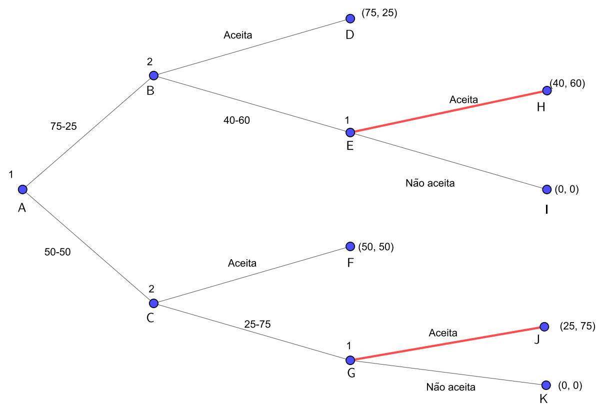

Figura 3.4.6 – Exemplo 3.4.2 - passo 1

Agora é a vez do jogador 2, ele terá que ver em qual nó deve prosseguir tal que dê o maior payoff, então entre os nós D e E ele seguiria pelo E, e entre o F e o G ele iria pelo G. Como temos a seguir:

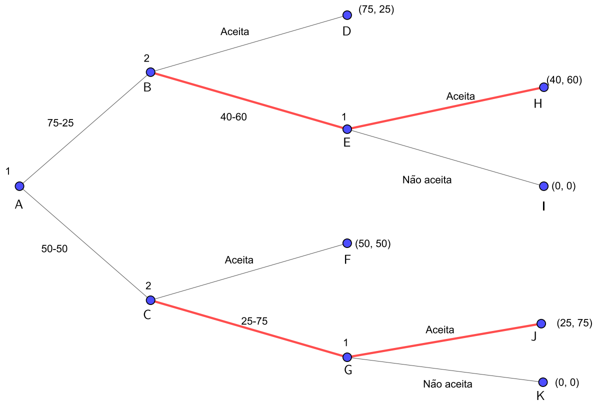

Figura 3.4.7 – Exemplo 3.4.2 - passo 2

E por fim, o jogador tem que escolher seu passo, escolhendo entre ir para o nó B ou para o C, e o que da um payoff maior é indo para o nó B sendo esse o equilíbrio de Nash do jogo, tendo um payoff final (40, 60).

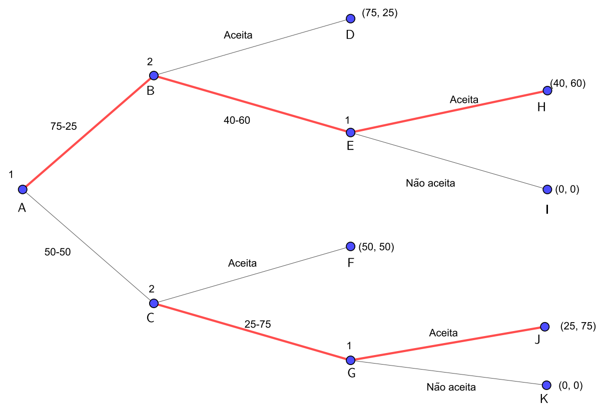

Figura 3.4.8 – Exemplo 3.4.2 - passo 3

Exemplos 3.4.3. *Seja o jogo representado a seguir:*

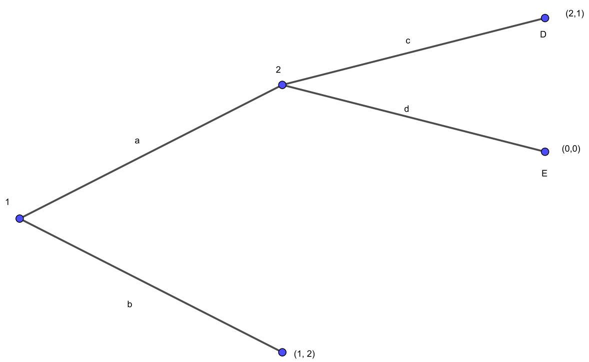

Figura 3.4.9 – Exemplo 3.4.3

Por indução reversa iríamos chegar na estratégia (a,c), o que é um equilíbrio de Nash, mas a estratégia (b,d) também é um equilíbrio de Nash pois os jogadores não têm incentivo para mudar de estratégia caso o outro também não mude, Observe: o jogador 1 não irá querer alterar sua estratégia já que seu payoff mudaria de 1 para 0, e o jogador 2 também não, pois seu payoff mudaria de 2 para 0. Com isso podemos concluir que nem todo equilíbrio de Nash pode ser obtido por indução reversa.

Vimos alguns jogos na forma extensiva e existem muitos outros, alguns deles podem ser muito extensos oque dificulta a analise, mas para esses casos poderemos usar os subjogos, que explicaremos a seguir, e analisar partes de um jogo.

3.5 Subjogo

Subjogo é um subconjunto de um jogo em forma extensiva. Nele se escolhe um nó de decisão e copia todas as informações que o sucedem, ou seja, copia todos os nós de decisão, ramos e payoffs que vem depois desse nó escolhido.

Mais especificamente, para ser um subjogo tem que obedecer três condições:

- Sempre se inicia um único nó de decisão;
- Contém todos os nós que seguem ao nó inicial;
- Se conter qualquer nó de um conjunto de informações, ele conterá todos os nós do conjunto de informações.

Exemplos 3.5.1. *Vamos ver quais são os subjogos do jogo a seguir:*

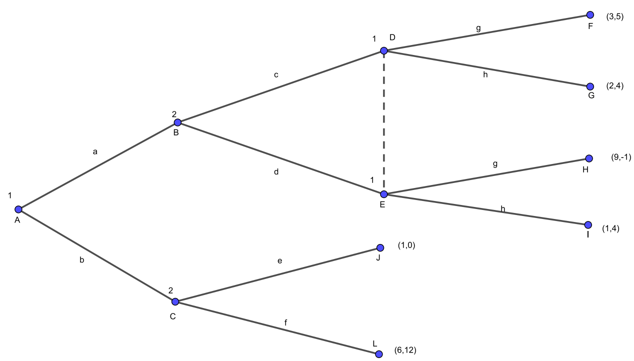

Figura 3.5.1 – Subjogos

O primeiro subjogo que veremos é escolhendo inicialmente o nó B. Chamaremos esse subjogo de SB1, e está em destaque com a cor *vermelha:*

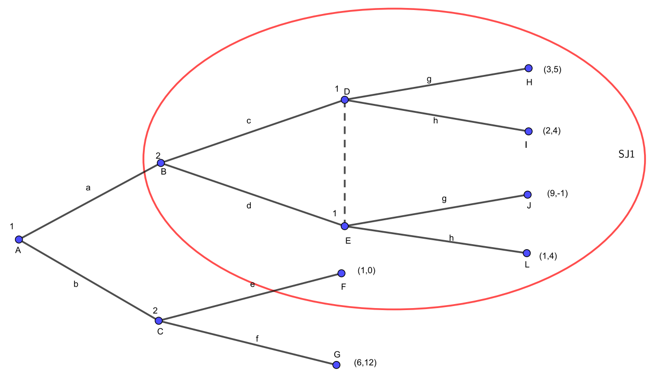

Figura 3.5.2 – Subjogo 1

O próximo subjogo será o do nó C. Chamaremos de SB2 e está em destaque na cor rosa:

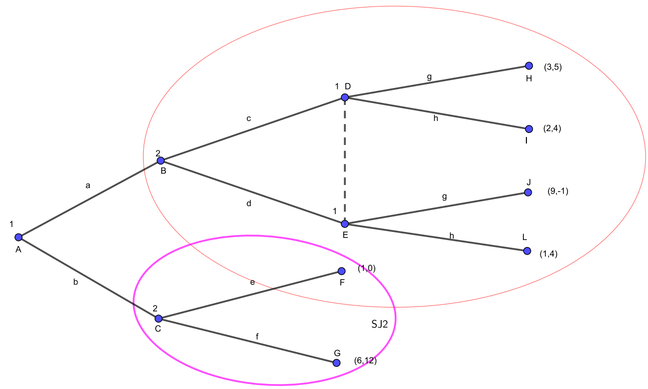

Figura 3.5.3 – Subjogo 2

Finalmente vamos pegar o subjogo com o nó A, note que esse subjogo é o próprio jogo. Chamaremos de SB3 e estará em cor verde:

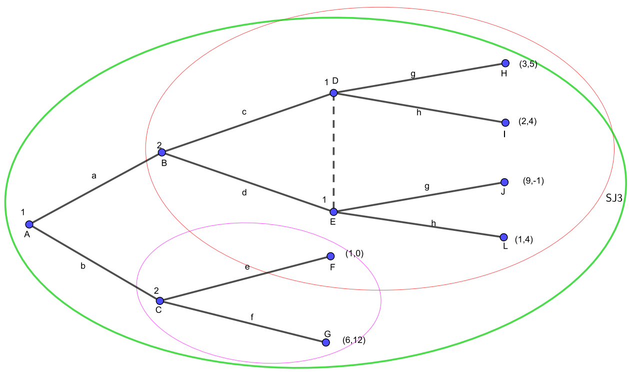

Figura 3.5.4 – Subjogo 3

Note que não podemos escolher o nó D, pois nele fura o terceiro item de subjogo (Se conter qualquer nó de um conjunto de informações, ele conterá todos os nós do conjunto de informações.) .

3.5.1 Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos

Para uma combinação de estratégias ser um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, terá que satisfazer duas condições:

- Ser um equilíbrio de Nash em sua totalidade;
- Ser um equilíbrio de Nash para cada subjogo.

Uma informação importante é que todo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é um equilíbrio de Nash, mas nem todo equilíbrio de Nash é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Vaje o exemplo a seguir:

4 O instrumento da greve

Inicialmente, vamos apresentar o significado político-jurídico de greve, seguido de um breve histórico de como os trabalhadores utilizaram este instrumento para reivindicar melhores condições de trabalho e salários em todo o mundo. Esses aspectos foram elaborados com base em Tavares [15], Carone [5], Zotto [16], e na página de notícias [21].

4.1 O conceito e o direito de greve

O termo "greve" refere-se à interrupção do trabalho, de maneira coletiva e voluntária, por parte dos trabalhadores, com o objetivo de obter alguns benefícios, tais como melhoria de condições de trabalho e aumento salarial, ou evitar que algum direito adquirido seja perdido. Por conseguinte, pode dizer respeito à cessação de qualquer atividade, remunerada ou não, a fim de protestar contra algo que se julga injusto.

Está explícito no art. 9º, caput, da Constituição Federal, o direito de greve, ficando a cargo dos trabalhadores decidirem sobre a oportunidade de exercê-lo e sobre os interesses que devam ser defendidos. Nos§ 1º e 2º do art. 9º da Constituição Federal, define-se que serviços ou atividades essenciais serão determinados em lei e quais as penas aplicáveis aos responsáveis por abusos cometidos.

O exercício do direito de greve está regulamentado na Lei nº 7.783 de 28/06/1989. A Emenda Constitucional 45/2004, por sua vez, colocou como competência da Justiça do Trabalho processar e julgar as ações que envolvam o exercício do direito de greve.

Desse modo, é considerado legítimo o exercício do direito de greve, sendo exercido através da suspensão coletiva, total ou parcial, temporária e pacífica de prestação pessoal de serviços do empregado ao empregador.

4.2 A força dos caminhoneiros como jogadores

Dentre as várias classes de trabalhadores, que atuam nas áreas consideradas essenciais para a população em geral, voltamos nosso olhar para a dos caminhoneiros. Tendo em vista ser o Brasil um país de proporções muito vastas e de ser, basicamente, provido pela rede rodoviária (ao contrário do que aconteceu no século XIX e início do XX, quando as ferrovias eram o principal meio de comunicação entre as regiões), julgamos desempenhar esse trabalhador - o caminhoneiro – papel fundamental e essencial para a economia do país. Portanto, um "jogador" com ferramentas importantes para competir nessa espécie de jogo, que acontece por ocasião de uma greve. Um jogador com cacife para enfrentar seus adversários, sejam seus empregadores, seja o Estado, no papel de articulador dos preços dos produtos. Ao fazermos a imbricação entre greve e Teoria dos Jogos, é importante levar em conta se os jogadores têm igualdade de condições na competição, ou se um deles está em posição mais favorável. A partir daí, ou seja, do início da greve, seu suceder e seu final, as posições podem se equilibrar, ou desequilibrar, mas é preciso observarmos o jogo num todo, a fim de observarmos as várias etapas do mesmo. E, se as "projeções matemáticas", se concretizam. Não vamos partir da ideia de que a greve é a única arma do trabalhador para que suas reivindicações sejam atendidas, mas do fato de que se tratam de duas forças em disputa: Trabalhador e Estado. Dois lados com vários "jogadores" envolvidos e muitos interesses a serem negociados.

4.2.1 Estados Unidos

Em 1943, parece ter sido ocorrido em Minneapolis, EUA, a primeira grande greve de caminhoneiros, conhecida como "Teamsters' Strike. À época, os sindicatos estavam em evidência, lutando por aumentos de salários e melhores condições para os trabalhadores. Os empregadores, no entanto, recusavam-se a reconhecê-los como representantes de três mil motoristas de caminhão. Isto gerou uma greve e o conflito se acirrou, sendo necessária a atuação da polícia e da Guarda Nacional. Ainda que a oposição não fosse direta entre o Governo e os trabalhadores, as forças do estado foram utilizadas para conter a afronta, atuando, portanto, como co-partícipes de um dos lados do jogo de conflitos. Muitos grevistas foram presos e a contenda foi encerrada quando o sindicato, que defendia os direitos dos motoristas, foi reconhecido pelos patrões e as reivindicações foram atendidas.

Outro confronto teve voz, em janeiro de 1974, quando a elevação dos preços do diesel, fez com que os caminhoneiros autônomos nos EUA bloqueassem estradas e impedissem caminhões de transportarem combustível. A greve contra o aumento dos preços terminou em fevereiro, tendo como consequência dois motoristas mortos e dezenas de feridos.

Na mesma década, em junho de 1979, uma outra greve de caminhoneiros autônomos paralisou boa parte do transporte de cargas nos EUA. Sua reivindicação era contra o aumento de preços de combustível e a favor de regulamentações federais e estaduais a respeito do assunto. O movimento foi marcado pela violência em relação aos empregados de companhias que não aderiram à greve. Houve três mortes por tiro e dezenas de feridos por tijolos arremessados das estradas.

Em 1983, os motoristas norte-americanos autônomos empreenderam uma greve contra uma lei federal americana, que aumentava impostos sobre gasolina e diesel, impondo também taxas sobre veículos pesados e maiores. Na época, os autônomos representavam cerca de um quarto dos caminhoneiros do país. Porém, a paralisação não foi apoiada pelas motoristas de empresas e por seu respectivo sindicato. Depois de onze dias, terminou a contenda, que se tornara violenta, com a promessa de uma audiência no Congresso sobre os problemas dos caminhoneiros.

4.2.2 Grécia

Em 2010 uma greve de proprietários de caminhões paralisou a Grécia. Os manifestantes protestavam contra o projeto de lei, que desregulamentava o número de licenças para caminhoneiros. O governo colocou militares para assegurar o fornecimento de combustível e o transporte de cargas e a lei foi implementada.

4.2.3 Colômbia

A maior greve de caminhoneiros da história da Colômbia, que paralisou o país por quarenta e cinco dias, ocorreu entre junho e julho de 2016. Os grevistas pediam redução dos preços de combustível e de pedágios, fretes melhores, segurança nas estradas e acesso à seguridade social. A paralisação teve sérias consequências: desde o aumento do preço dos alimentos ao desabastecimento de produtos básicos e insumos para a indústria. Um acordo entre o Governo e os sindicatos de caminhoneiros pôs fim à contenda.

4.2.4 Chile

A criação de uma autoridade nacional de caminhões foi o mote para a paralisação dos caminhoneiros chilenos, ocorrida em outubro de 1972. O governo impôs lei marcial e assumiu o controle de estações de rádio e TV. A greve, que durou vinte e seis dias, abalou o país. Mais tarde, foi levantada a hipótese de que órgãos externos teriam fomentado a greve, a fim desestabilizar o governo, que foi deposto pelo golpe militar de 1973.

4.2.5 Irã

Os caminhoneiros iranianos também se lançaram em greve. Seus protestos eram contra os baixos salários e os altos custos para o transporte de cargas. Exigiam também direitos sociais básicos. Depois de vários dias de greve, o governo ofereceu um aumento das tarifas de frete e os protestos continuaram. Os grevistas foram ameaçados, através de mensagens de texto e de convocação para interrogatórios.

4.3 Greve dos caminhoneiros no Brasil

Nesta seção, iniciamos com uma breve análise de outros conflitos entre governo e caminhoneiros ocorridos anteriormente no Brasil. Mais detalhes sobre todo o processo podem ser encontrados em Moura [9], e no site de notícias [18].

Em julho de 1999, os caminhoneiros cruzaram os braços por quatro dias, prejudicando o abastecimento de alimentos e combustíveis no país, paralisando a indústria. Os motoristas pediam redução da tarifa de pedágios, isenção de impostos e regulamentação da aposentadoria. À época, foi considerado o movimento grevista mais grave já enfrentado pela União. A greve mostrou a vulnerabilidade do Brasil ao transporte rodoviário e terminou em acordo com o governo federal.

Na segunda paralisação nacional em 10 meses- maio de 2000 - o motivo foi o baixo valor pago pelos fretes. Na BR-101, em Três Cachoeiras, houve confronto entre manifestantes e a polícia. O movimento foi marcado pelo endurecimento das ações, com pregos espalhados em rodovias, queima de pneus e apedrejamento de motoristas que tentavam furar os bloqueios.

Em julho de 2012, pedindo regulamentação para os caminhoneiros autônomos, a categoria deflagrou greve e paralisou a Rodovia Presidente Dutra, em São Paulo. Ocorreram pelo menos 15 protestos em estradas gaúchas. O movimento foi marcado pela radicalização das ações, com apedrejamento de caminhões, queima de pneus e agressões à motoristas. No Estado não houve falta de alimentos ou combustíveis, mas atrasos nas entregas.

Em fevereiro de 2015, a paralisação dos caminhoneiros e os bloqueios se espalharam para, pelo menos, em quatorze estados brasileiros. A categoria protestava contra a alta do preço do diesel, o baixo preço do frete e o alto custo dos pedágios. O governo federal chamou os representantes da categoria para negociações e sancionou sem vetos a Lei dos Caminhoneiros, com regras para o exercício da profissão de motorista.

A Petrobras se comprometeu a não reajustar preço do diesel por seis meses. Apesar do acordo, houve diversos pontos de resistência, inclusive no Rio Grande do Sul, onde caminhoneiros seguiram com os bloqueios na BR-116, como forma de pressionar pela redução do preço do diesel.

Em Novembro de 2015, entendendo que o governo federal havia descumprido acordos, caminhoneiros tentaram retomar com força o movimento grevista, mas ele não durou mais do que três dias.

Influenciada pela, até então, nova política da Petrobras de preços para os combustíveis, deu-se início a greve de 2018. Enquanto o aumento de valores do óleo diesel acompanhava a cotação do petróleo no mercado internacional e satisfazia a intenção da empresa, para os caminhoneiros a quantia era inadmissível. Por conta disso, durante o mês de maio do mesmo ano, os protestos e paralisações tiveram sua primícia. A principal exigência dos caminhoneiros englobava tanto a redução da carga tributária sobre o diesel quanto isenção da Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (CIDE) e zeragem do percentual de PIS/Pasep, utilizando o argumento de que o combustível representava metade do custo do frete. Nas greves anteriores dos caminhoneiros, apesar de prejuízos graves a setores da indústria, do desperdício de alimentos perecíveis como leite e da falta de produtos como hortifrutigranjeiros, não houve a corrida aos postos e a escassez de combustível como em maio de 2018. O fenômeno pode ser explicado por mudança na estratégia de atuação dos grevistas. Os movimentos anteriores foram concentrados nas rodovias e, neste movimento, os grevistas foram para as portas de saída do combustível, estrangulando o fornecimento, que não acontecera anteriormente.

Na tabela a seguir, elaborada com base em Portinari [11], bem como nos sites de notícias [19] [20] e , estão agrupadas as ações referentes a cada um dos jogadores - o governo, os caminhoneiros e a população. As mesmas encontram-se alinhadas cronologicamente para facilitar o entendimento do ocorrido. Como, por exemplo, o bloqueio de estradas em 17 estados realizado pelos caminhoneiros no vigésimo primeiro dia:

Dia	Governo	Caminhoneiros	População
18	Aumento do preço do diesel	Anunciam a greve	
20	Liminares que impedem manifestações	Mantém a greve	
21	Não negociam	Bloqueiam estradas em 17 estados	
22	Mantém as mesmas condições	Bloqueiam 188 pontos em 19 estados	
23	Pede trégua de 3 dias	Não aceitam a trégua	
24	Negociam reajustes do diesel por 15 dias	Não aceitam acordo, bloqueiam 500 pontos	Iniciam m nas ruas em aos caminho
25	Baixam decreto GLO – garantia da lei e da ordem, permitindo intervenção militar	Mantém a greve	Aumenta o a pulação
26	Intervenção militar realiza 6 operações de entrega de combustível	Bloqueiam 596 pontos	87% da pop vorável a gr lha)
27	Anuncia medidas para compensar redução do preço do diesel	Mantém a greve porém acordo é assinado	Em quase to do país há m de apoio a gr
28	Executa as medidas do acordo	Aguardam medidas práticas ainda em greve	
29	Aguardam fim da greve	Poucos caminhoneiros continuam em greve	
30	Operação do exercito e policia rodoviária retiram últimos manifestantes	Operação do exercito e policia rodoviária retiram últimos manifestantes	

Tabela 12 – Cronograma da greve

4.4 Análise da greve dos caminhoneiros no Brasil via Teoria dos Jogos

A partir da tabela anterior, pode-se constatar as inúmeras ações semelhantes e/ou repetitivas realizadas pelo jogadores. Tais ações dificultam a posterior análise matemática, onde a árvore tenderia a proporções muito extensas. A fim de tornar a análise viável e os resultados mais palpáveis, usaremos o cronograma simplificado descrito a seguir:

Dia	Governo	Caminhoneiros	População
18		Anunciam a greve	
20	Liminares que impedem manifestações		
21		Bloqueiam estradas em 17 estados	
24			Iniciam manifes nas ruas em ato sol aos caminhoneiros
26	Intervenção militar realiza 6 operações de entrega de combustível	Bloqueiam 596 pontos	
27	Anuncia medidas para compensar redução do preço do diesel		

Tabela 13 – Cronograma simplificado da greve

Na seção seguinte, vamos modelar a greve dos caminhoneiros, usando um jogo na forma extensiva, onde os jogadores são o governo, os caminhoneiros e a população.

4.5 Modelagem da greve dos caminhoneiros

No cronograma simplificado que descrevemos anteriormente, verificamos que durante a greve, as ações do governo, dos caminhoneiros e também da população foram tomadas sequencialmente. Dessa forma, a forma extensiva de um jogo é ideal para modelar a situação real. Nesta seção, vamos elaborar um modelo correspondente e descrever cada um dos elementos do jogo, ou seja, jogadores, estratégias, conjuntos de informação, payoffs, e assim por diante.

Em nosso modelo, o conflito ocorrido durante a greve dos caminhoneiros pode ser representado pela árvore a seguir, assumindo o governo como jogador 1, os caminhoneiros como jogador 2, e a população como jogador 3:

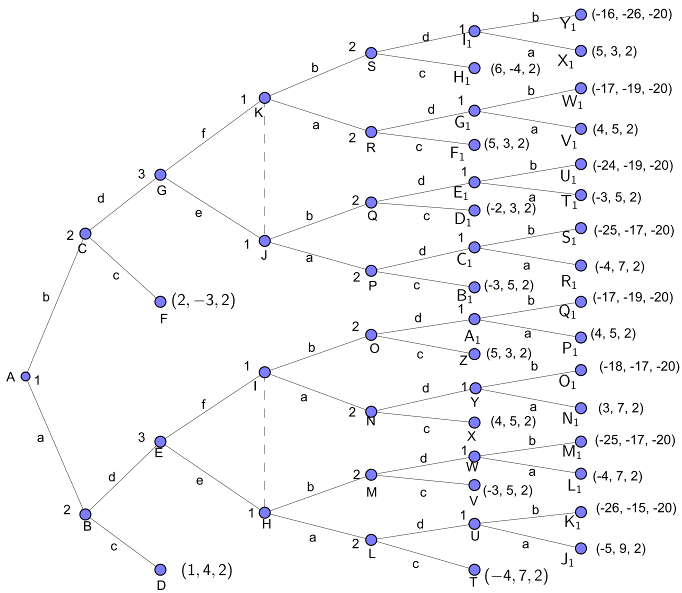

Figura 4.5.1 – Árvore da greve dos caminhoneiros

No nosso modelo assumimos como ações do governo: entrar em conflito (ação a) ou não entrar em conflito (ação b). Consideramos 'entrar em conflito' todas as ações que não forem negociar, como criar liminares, ações judiciais, uso da força policial, entre outras. Por outro lado, 'não entrar em conflito' significa tentar resolver a situação de uma forma pacífica, negociando com os caminhoneiros.

Em relação aos caminhoneiros, as ações possíveis são: encerrar a greve (ação c) ou manter a greve (ação d). Note que se em qualquer conjunto de informação, se os caminhoneiros optam pela ação c, o jogo termina. Finalmente, a população pode apoiar a greve dos caminhoneiros (ação e) ou não apoiar a greve (ação f).

Para estimar os payoffs representados nos nós terminais desta árvore, vamos adotar as convenções a seguir:

Governo e caminhoneiros podem chegar a um acordo, ao final do conflito, pondo fim à greve. Nesse caso, computamos +2 pontos aos seus payoffs. Caso contrário, computamos -20 pontos aos payoffs correspondentes. Tal pontuação leva em conta que, se não houver um acordo, surgirão graves problemas, tanto para o Governo quanto para os caminhoneiros. A falta de combustível ocasionará escassez de alimentos, de medicamentos e de outros elementos básicos para a subsistência da população.

A mesma pontuação de +2 pontos (se o acordo for firmado) e de -20 pontos (se não houver acordo) foi considerada para os payoffs da população, porque esta será afetada de forma significativa pelo conflito, tendo em vista as consequências acima descritas. Se a população apoiar a greve, o payoff do governo diminui 4 pontos e o dos caminhoneiros aumenta 1 ponto. Em caso contrário, ou seja, se a população não apoiar a greve, o payoff do governo aumenta 4 pontos e o dos caminhoneiros diminui 1 ponto. Esses valores levam em conta que o apoio da população é muito mais importante para o Governo do que para os caminhoneiros, pois o Governo precisa atender à população.

Quanto mais negociações o governo tiver de fazer, mais tempo demorou para a greve acabar, além de que, em cada negociação, deverá ter aceitado mais exigências. Por isso, os payoffs aumentam de acordo com o número de negociações: com nenhuma negociação o payoff não se altera, com uma negociação, o payoff diminui 1 ponto, com duas negociações, diminui 2 pontos e, com três negociações, diminui 3 pontos.

Para os caminhoneiros é bom que haja negociações, quanto mais, melhor será, pois significa que a cada negociação o Governo aceita mais um pouco de suas exigências. As negociações são a parte mais importante para os caminhoneiros, portanto, os payoffs serão assim alterados: nenhuma negociação é muito ruim para os caminhoneiros, então perdem 5 pontos; com uma negociação, aumenta seu payoff em 2 pontos, com duas negociações, aumenta em 4 e com três negociações, aumenta em 6 pontos.

Exemplos 4.5.1. *Vamos calcular o payoff em um nó que chega no acordo, tem duas negociações e a população apoia a greve..*

Payoff do governo: chegou a um acordo +2, duas negociações -2,população apoiou a greve -4. Payoff do governo = -4.

Payoff dos caminhoneiros: chegou a um acordo +2, duas negociações +4, população apoiou a greve +1. Payoff do governo = 7.

Payoff da população: chegou a um acordo 2. Payoff da população = 2.

Então o payoff de S = (-4, 7, 2)

Vamos descrever os elementos do nosso modelo, de acordo com a definição matemática de jogo na forma extensiva com informação imperfeita descrita no capítulo 3.

- Jogadores: $G = \{1, 2, 3\}$;
- Conjunto de ações: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$;
- Conjunto de nós não terminais: $H = \{A, B, C, E, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, U, W, Y, A_1, C_1, E_1, G$

- Conjunto de nós terminais:

  $Z = \{C, F, T, V, X, Z, B_1, D_1, F_1, H_1 J_1, K_1, L_1, M_1, N_1, O_1, P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1, V_1, W_1, X_1, Y_1$

- Função x, com:

  $A \mapsto \{a, b\}, B \mapsto \{c, d\}, C \mapsto \{c, d\}, E \mapsto \{e, f\}, G \mapsto \{e, f\}, H \mapsto \{a, b\}, I \mapsto \{a, b\}, J \mapsto \{a, b\}, K \mapsto \{a, b\}, L \mapsto \{c, d\}, M \mapsto \{c, d\}, N \mapsto \{c, d\}, O \mapsto \{c, d\}, P \mapsto \{c, d\}, Q \mapsto \{c, d\}, R \mapsto \{c, d\}, S \mapsto \{c, d\}, U \mapsto \{a, b\}, W \mapsto \{a, b\}, Y \mapsto \{a, b\}, A_1 \mapsto \{a, b\}, C_1 \mapsto \{a, b\}, E_1 \mapsto \{a, b\}, G_1 \mapsto \{a, b\}, I_1 \mapsto \{a, b\};$

- Função ρ, com:

  $A \mapsto 1, B \mapsto 2, C \mapsto 2, E \mapsto 3, G \mapsto 3, H \mapsto 1, I \mapsto 1, J \mapsto 1, K \mapsto 1, L \mapsto 2, M \mapsto 2, N \mapsto 2, O \mapsto 2, P \mapsto 2, Q \mapsto 2, R \mapsto 2, S \mapsto 2, U \mapsto 1, W \mapsto 1, Y \mapsto 1, A_1 \mapsto 1, C_1 \mapsto 1, E_1 \mapsto 1, G_1 \mapsto 1, I_1 \mapsto 1;$

- Função σ, com:

  $(A, a) \mapsto B, (A, b) \mapsto C, (B, c) \mapsto D, (B, d) \mapsto E, (C, c) \mapsto F, (C, d) \mapsto G, (E, e) \mapsto H, (E, f) \mapsto I, (G, e) \mapsto J, (G, f) \mapsto K, (H, a) \mapsto L, (H, b) \mapsto M, (I, a) \mapsto N, (I, b) \mapsto O, (J, a) \mapsto P, (J, b) \mapsto Q, (K, a) \mapsto R, (K, b) \mapsto S, (L, c) \mapsto T, (L, d) \mapsto U, (M, c) \mapsto V, (M, d) \mapsto W, (N, c) \mapsto X, (N, d) \mapsto Y, (O, c) \mapsto Z, (O, d) \mapsto A_1, (P, c)P \mapsto B_1, (P, d) \mapsto C_1, (Q, c) \mapsto D_1, (Q, d) \mapsto E_1, (R, c) \mapsto F_1, (R, d) \mapsto G_1, (S, c) \mapsto H_1, (S, d) \mapsto I_1, (U, a) \mapsto J_1, (U, b) \mapsto K_1, (W, a) \mapsto L_1, (W, b) \mapsto M_1, (Y, a) \mapsto N_1, (Y, b) \mapsto O_1, (A_1, a) \mapsto P_1, (A_1, b) \mapsto Q_1, (C_1, a) \mapsto R_1, (C_1, b) \mapsto S_1, (E_1, a) \mapsto T_1, (E_1, b) \mapsto U_1, (G_1, a) \mapsto V_1, (G_1, b) \mapsto W_1, (I_1, a) \mapsto X_1, (I_1, b) \mapsto Y_1;$

- Vetores de payoffs:

  $u_1 = (D \mapsto 1, F \mapsto 2, T \mapsto -4, V \mapsto -3, X \mapsto 4, Z \mapsto 5, B_1 \mapsto -3, D_1 \mapsto -2, F_1 \mapsto 5, H_1 \mapsto 6, J_1 \mapsto -5, K_1 \mapsto -26, L_1 \mapsto -4, M_1 \mapsto -25, N_1 \mapsto 3, O_1 \mapsto -18, P_1 \mapsto 4, Q_1 \mapsto -17, R_1 \mapsto -4, S_1 \mapsto -25, T_1 \mapsto -3, U_1 \mapsto -24, V_1 \mapsto 4, W_1 \mapsto -17, X_1 \mapsto 5, Y_1 \mapsto -16);$

$u_2 = (D \mapsto 4, F \mapsto -3, T \mapsto 7, V \mapsto 5, X \mapsto 5, Z \mapsto 3, B_1 \mapsto 5, D_1 \mapsto 3, F_1 \mapsto 3, H_1 \mapsto -4, J_1 \mapsto 9, K_1 \mapsto -15, L_1 \mapsto 7, M_1 \mapsto -17, N_1 \mapsto 7, O_1 \mapsto -17, P_1 \mapsto 5, Q_1 \mapsto -19, R_1 \mapsto 7, S_1 \mapsto -17, T_1 \mapsto 5, U_1 \mapsto -19, V_1 \mapsto 5, W_1 \mapsto -19, X_1 \mapsto 3, Y_1 \mapsto -26)$;

$u_3 = (D \mapsto 2, F \mapsto 2, T \mapsto 2, V \mapsto 2, X \mapsto 2, Z \mapsto 2, B_1 \mapsto 2, D_1 \mapsto 2, F_1 \mapsto 2, H_1 \mapsto 2, J_1 \mapsto 2, K_1 \mapsto -20, L_1 \mapsto 2, M_1 \mapsto -20, N_1 \mapsto 2, O_1 \mapsto -20, P_1 \mapsto 2, Q_1 \mapsto -20, R_1 \mapsto 2, S_1 \mapsto -20, T_1 \mapsto 2, U_1 \mapsto -20, V_1 \mapsto 2, W_1 \mapsto -20, X_1 \mapsto 2, Y_1 \mapsto -20)$;

- Conjunto de informações:

  $I_1 = \{\{A\}, \{H, I\}, \{J, K\}, \{U\}, \{W\}, \{Y\}, \{A_1\}, \{C_1\}, \{E_1\}, \{G_1\}, \{I_1\}$

  $I_2 = \{\{B\}, \{C\}, \{L\}, \{M\}, \{N\}, \{O\}, \{P\}, \{Q\}, \{R\}, \{S\}\}$;

  $I_3 = \{\{E\}, \{G\}\}$.

- Estratégias dos jogadores:

  Sabemos que em um jogo na forma extensiva, a estratégia de um jogador é um plano de ação. Em outras palavras, a estratégia descreve qual a ação escolhida pelo jogador em cada conjunto de informação correspondente. Assim, por exemplo, uma possível estratégia do jogador 1 (governo) em nosso modelo, vinculada ao conjunto I_1 descrito acima, é dada por:

  $$\big(a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a\big),$$

  em que a ação a seria a escolhida no conjunto de informação $\{A\}$, a ação b seria escolhida no conjunto de informação $\{H, I\}$, a ação a seria escolhida no conjunto de informação $\{J, K\}$, e assim sucessivamente. Aplicando o princípio fundamental da contagem, como o governo possui duas escolhas em cada conjunto de informação, segue que possui 2^{11} estratégias possíveis.

  Analogamente, o jogador 2 (caminhoneiros) possui duas escolhas disponíveis em cada conjunto de informação, tendo portanto 2^{10} estratégias possíveis. Finalmente, o jogador 3 (população), possui duas escolhas disponíveis em seus dois conjuntos de informação, tendo portanto 4 estratégias possíveis.

Como esse jogo poderia se tornar infinito, ou seja, a greve nunca acabar, vamos montar a árvore até a última decisão citada no cronograma simplificado, ou seja, o governo aceita diminuir o preço.

4.6 Método da indução reversa aplicado ao modelo da greve dos caminhoneiros

Vimos no segundo capítulo que uma das formas mais eficientes de encontrar uma solução para um jogo na forma extensiva é o método da indução reversa. Lembramos que esse método consiste em iniciar a análise da árvore nos últimos nós, verificando qual decisão seria melhor para o jogador correspondente. Em seguida, assumindo essa decisão, voltamos ao nó anterior e novamente verificamos a melhor decisão para o outro jogador. Procedendo dessa forma até os nós iniciais, podemos obter uma solução para o jogo correspondente.

Nesta seção, vamos aplicar esse algoritmo da indução reversa para encontrar uma solução para o nosso modelo de jogo da greve dos caminhoneiros no Brasil.

Primeiro o governo (jogador 1) vai escolher entre a estratégia a ou b nos últimos nós terminais de acordo com seus maiores payoffs. Seriam escolhidos os nós:

- Entre I_1, J_1, escolheria I_1.
- Entre K_1, L_1, escolheria K_1.
- Entre M_1, N_1, escolheria M_1.
- Entre O_1, P_1, escolheria O_1.
- Entre Q_1, R_1, escolheria Q_1.

- Entre S_1, T_1, escolheria S_1.
- Entre U_1, V_1, escolheria U_1.
- Entre W_1, X_1, escolheria W_1.

Note que todos os nós escolhidos seriam com a estratégia a, isso se dá ao fato que sempre seria mais vantajoso se acabar a greve.

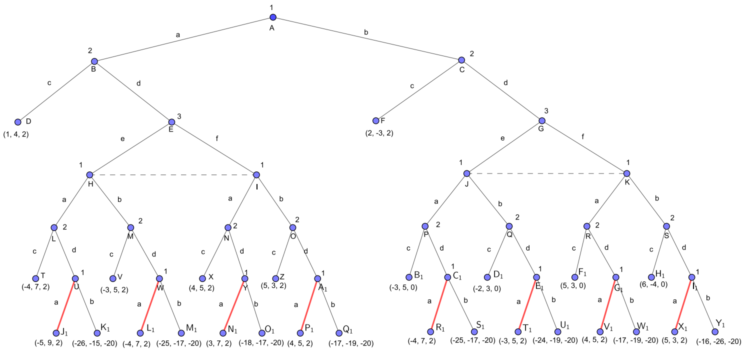

Figura 4.6.1 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 1

No segundo passo, os caminhoneiros (jogador 2) terão que escolher entre a estratégia c ou d, de acordo com os nós terminais de maiores payoffs.

- Entre S, T, escolheria T.
- Entre U, V, escolheria V.
- Entre W, X, escolheria X.
- Entre Y, Z, escolheria Z.
- Entre A_1, B_1, escolheria B_1.
- Entre C_1, D_1, escolheria D_1.

- Entre E_1, F_1, escolheria F_1.

- Entre G_1, H_1, escolheria H_1.

Repare que sempre terá a mesma estratégia escolhida, no caso a de manter a greve (estratégia d), isso ocorre porque seria para eles melhor ter mais negociação antes de acabar com a greve.

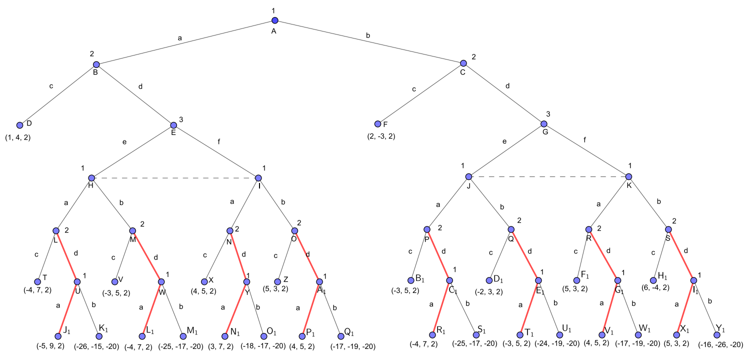

Figura 4.6.2 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 2

Agora o governo terá que escolher estre as estratégias a e b.

- Entre K, L, escolheria L.

- Entre M, N, escolheria N.

- Entre O, P, escolheria P.

- Entre Q, R, escolheria R.

Novamente terá a mesma estratégia escolhida, só que nesse caso seria a estratégia b (entrar em conflito), isso se deu ao fato de que consideramos que cada negociação a mais, seria pior para o governo.

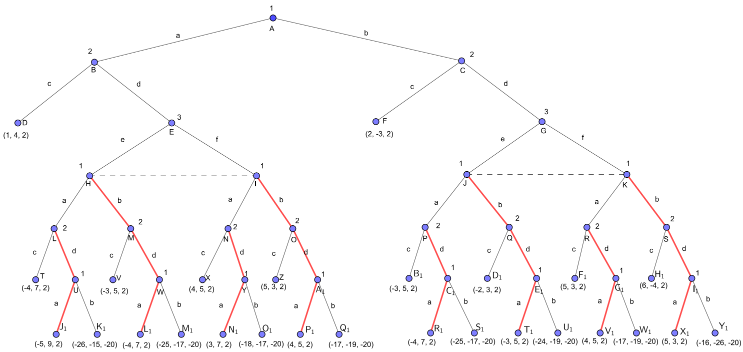

Figura 4.6.3 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 3

Dessa vez, a população (jogador 3) que fará a escolha, tendo que escolher entre as estratégias e ou f. Mas repare que todas as estratégias vão levar para um payoff de +2, então todas as estratégias levaram para um equilíbrio de Nash. Iremos fazer as quatro soluções.

- Solução dos nós escolhidos G e I:

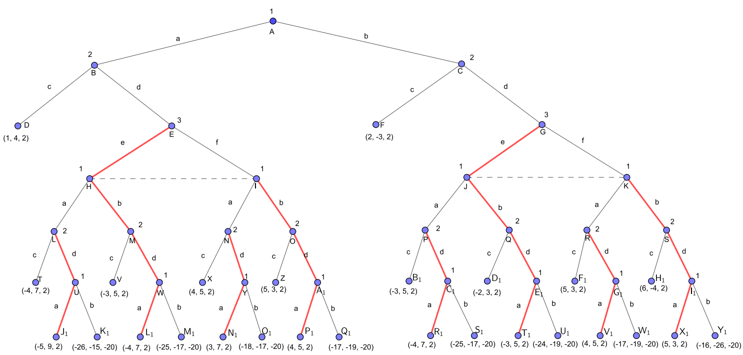

Figura 4.6.4 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 4.1

Depois da escolha da população será a vez dos caminhoneiros em escolher sua estratégia:

- Entre C, D, escolheria D.

- Entre E, F, escolheria F.

Novamente é mais benéfico para eles manterem a greve.

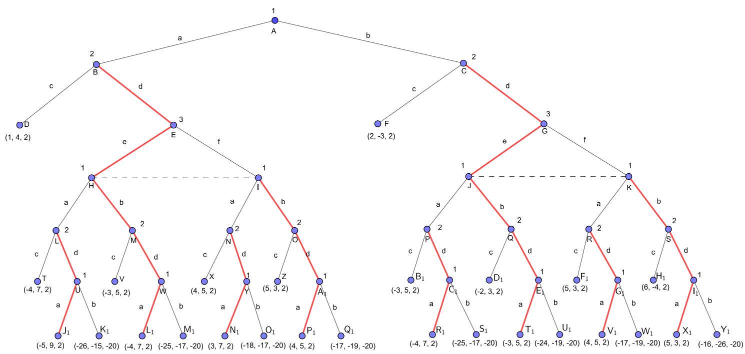

Figura 4.6.5 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 4.2

Por fim, o governo terá que escolher entre ir para o nó B ou para o C. Escolhendo não negociar e ir para o nó C.

Chegando assim no equilíbrio de Nash, com payoff (-3, 5, 2).

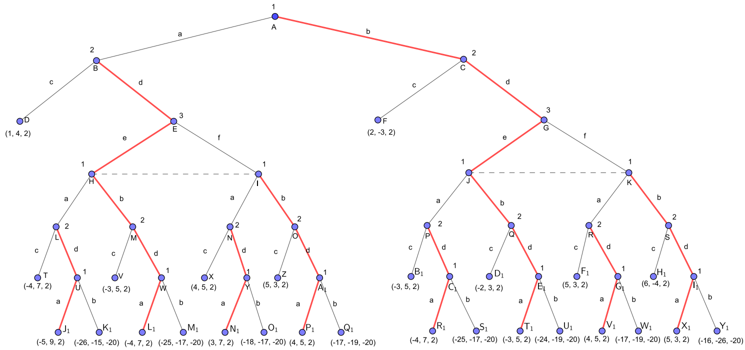

Figura 4.6.6 – Greve dos caminhoneiros - 1º Equilíbrio de Nash

- Solução dos nós escolhidos G e J:

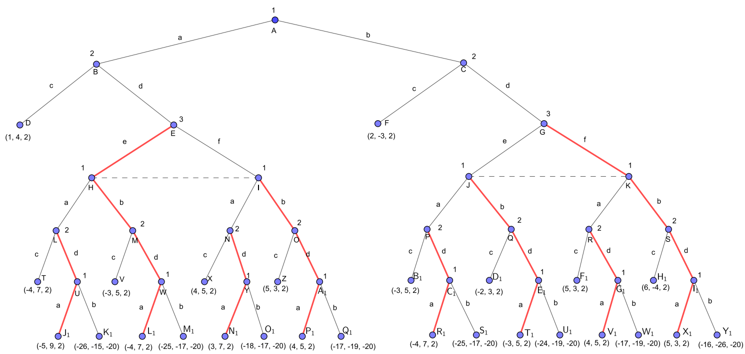

Figura 4.6.7 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 5.1

Repetindo a mesma ordem da solução mostrada anteriormente, o primeiro a escolher são os caminhoneiros:

- Entre C, D, escolheria D.

- Entre E, F, escolheria F.

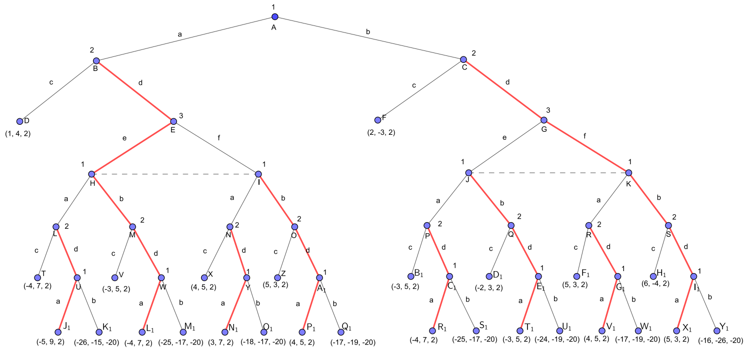

Figura 4.6.8 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 5.2

Posteriormente o governo irá decidir, escolhendo o nó C. Chegando no equilíbrio de Nash com payoff (5, 3, 2).

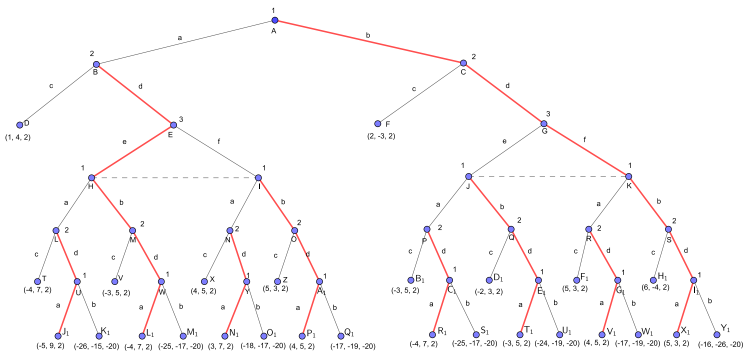

Figura 4.6.9 – Greve dos caminhoneiros - 2º Equilíbrio de Nash

- Solução dos nós escolhidos H e J:

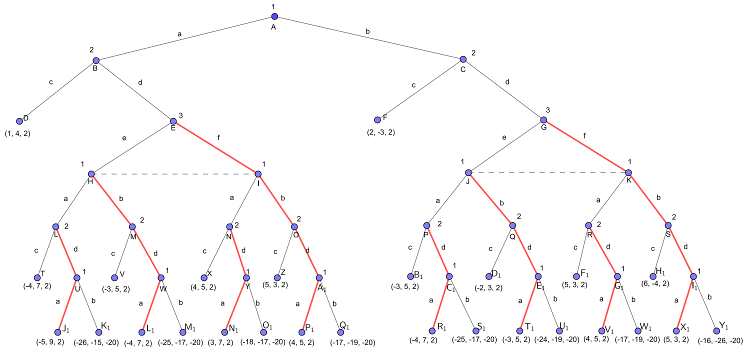

Figura 4.6.10 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 6.1

Mais uma vez, os caminhoneiros escolhem a estratégia d, ficando com os nós D e F.

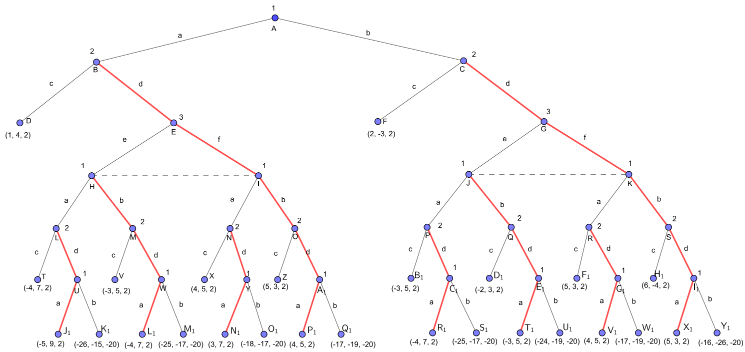

Figura 4.6.11 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 6.2

E o governo também irá usar a mesma estratégia das soluções anteriores, indo para o nó C.

Repare que essa terá o mesmo equilíbrio analisado anteriormente, com payoff (5, 3, 2)

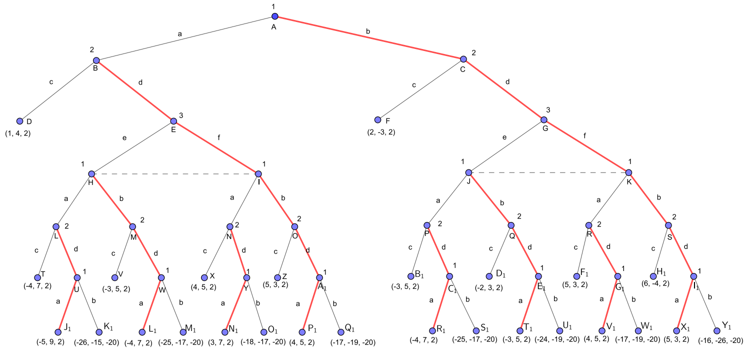

Figura 4.6.12 – Greve dos caminhoneiros - 3º Equilíbrio de Nash

- Solução dos nós escolhidos H e I:

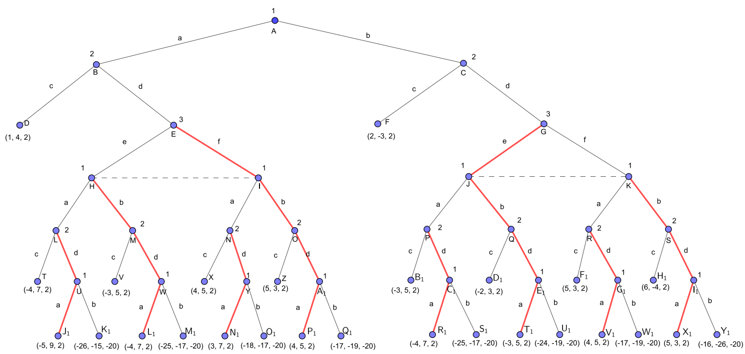

Figura 4.6.13 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 7.1

Os caminhoneiros irão escolher a estratégia d, levando para os nós D e F.

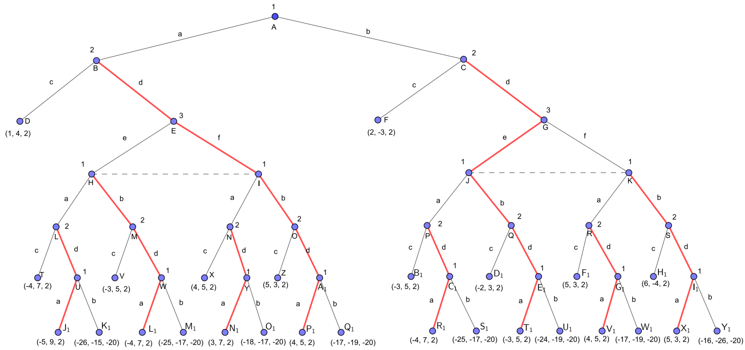

Figura 4.6.14 – Greve dos caminhoneiros - Indução reversa 7.2

E por fim, o governo escolhe a estratégia a, levando para o nó B.

Note que essa é a única solução que o governo escolhe ir para o nó B, isso se dá devido ao fato de ser mais importante o não apoio da população à greve do que uma negociação.

Chegando assim em mais um equilíbrio de Nash, com payoff (4, 5, 2).

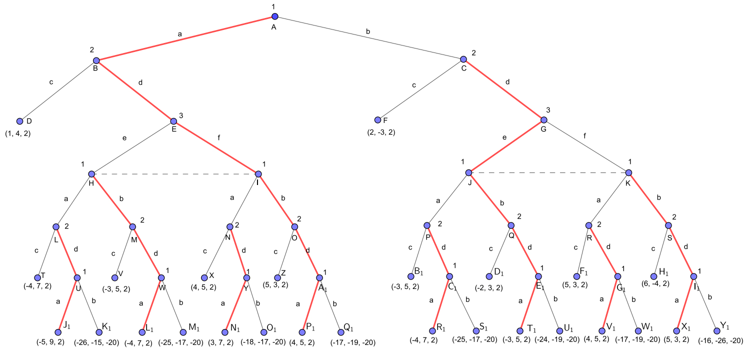

Figura 4.6.15 – Greve dos caminhoneiros - 4º Equilíbrio de Nash

Chegamos à conclusão de que o nosso modelo da greve dos caminhoneiros simplificado teria três equilíbrios de Nash. Na próxima seção iremos ver como aconteceu realmente na greve e se coincide com algum desses equilíbrios de Nash encontrados.

4.7 Comparação entre a greve e o equilíbrio de Nash

Nesta seção, vamos fazer uma comparação entre o que realmente ocorreu na situação prática vivenciada e a solução encontrada na seção anterior via método da indução reversa. Para fazer a comparação, lembramos do nosso cronograma simplificado, que já descrevemos anteriormente:

- Caminhoneiros: Anunciam a greve;

- Governo: Cria liminares que impedem manifestações (estratégia b);

- Caminhoneiros: Bloqueiam estradas em 17 estados (estratégia d);

- População: Iniciam manifestações nas ruas em ato solidário aos caminhoneiros (estratégia e);

• Governo: Intervenção militar realiza 6 operações de entrega de combustível (estratégia b);

• Caminhoneiros: Bloqueiam 596 pontos (estratégia d);

• Governo: Anuncia medidas para compensar redução do preço do diesel (estratégia a).

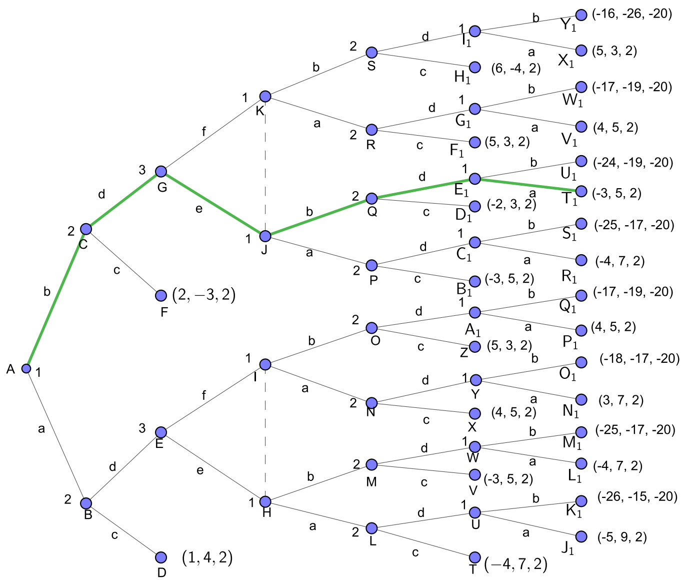

Figura 4.7.1 – Greve dos caminhoneiros - árvore do que ocorreu na realidade

Note que o resultado obtido por governo e caminhoneiros na situação prática (destacado na árvore acima) é também um equilíbrio de Nash (é a nossa primeira solução encontrada), tendo payoff (-3, 5, 2). Vale lembrar que o equilíbrio de Nash não significa o que dará maior payoff (repare que no nó M_1 teria os payoffs (3, 7, 2), onde todos saíriam com payoffs maiores ou iguais), mas sim que os jogadores não tem incentivo para mudar de estratégia, conhecendo as escolhas dos outros jogadores.

Assim, verificamos que os jogadores usaram suas estratégias conforme um dos equilíbrios de Nash descrito anteriormente. Em outras palavras, ao menos em nosso modelo simplificado, se os caminhoneiros soubessem das intenções do governo, não haveria interesse em modificar as estratégias que de fato adotaram, e vice-versa.

5 Breve análise da aplicação do tema "greve dos caminhoneiros" no ensino fundamental e médio

Quando pensamos em educação, um dos primeiros questionamentos que surge é que tipo de aluno queremos formar. Entre diversas respostas, podemos destacar o fato de que queremos o desenvolvimento integral deste aluno. Que este aluno seja capaz de pensar, criar e não apenas reproduzir o conteúdo sem reflexão sobre o mesmo.

Deste modo, a interdisciplinaridade surge como uma excelente ferramenta educacional para obter o resultado pretendido. Nesse contexto, poderíamos trabalhar o tema "Greve dos caminhoneiros" nos últimos anos do Ensino Fundamental, bem como no Ensino Médio, para contextualizar alguns temas e, de certa maneira, tornar o conhecimento mais amplo e significativo.

Não se pode ignorar que a Matemática, em muitos casos, é alvo de receio por parte do estudante, fato esse que pode vir a dificultar o aprendizado da matéria. Esse receio acaba criando, muitas vezes, um bloqueio pessoal com essa disciplina. A dificuldade de determinados alunos com a matéria pode contribuir na composição de uma ideia preconceituosa da dificuldade intransponível que é entender de fato a Matemática.

Nesta direção, a Teoria dos Jogos aplicada a uma situação real, facilita o entendimento da matéria e ajuda a desmitificar o aprendizado. Ou seja, aproximando-se da realidade vivenciada pelos estudantes, a Matemática parece mais palpável, abrindo assim, possibilidade de caminhos para a construção do conhecimento matemático com bases mais sólidas. Podemos encontrar algumas aplicações interessantes da

Teoria dos Jogos no Ensino Médio em Oliveira [10].

Pensando em interdisciplinaridade e História, é importante ressaltar não somente a inspiração do estudo da empresa Petrobrás - com sua criação e participação histórica no país - e questões políticas e sociais, mas também as participações em crises nacionais e mundiais. Ainda na História, a apresentação da teoria parece facilitar o entendimento dos fatos, bem como abre conhecimento para entendimento das construções históricas de nossa sociedade. Ademais, essa abordagem contribui para compreender de forma lógica os fatores históricos que levaram ao acontecimento trabalhado na Teoria dos Jogos.

Quanto a Geografia, poderia ser trabalhado a geopolítica, dinâmica de preços, condições das estradas, a eficiência de escoamento de produtos brasileiros. Podendo-se discutir o modal de transporte, a interiorização produtiva, ou até mesmo o êxodo urbano. Serve ainda para as discussões geográficas dos estados, da divisão "federacional", e até mesmo as condições físicas de relevos, em relação aos acontecimentos efetivos e suas consequências.

Os dados e amostras podem sugerir estudos também nas áreas de Filosofia e Sociologia. Para que se possa, então, compreender as decisões e resultados da teoria, em paralelo aos modelos implantados na sociedade e política nacional. Ademais, nesta área pode-se considerar os posicionamentos políticos em relação à sociedade, quanto à sua organização em estamentos sociais, bem como quanto ao espectro financeiro destas. Considerando, também, as realidades físicas da população, sua organização geográfica e densidades demográficas regionais.

6 Considerações finais

Com a intenção de tornar o leitor capaz de acompanhar o desenvolvimento do trabalho com total compreensão do tema, durante a estruturação do mesmo, foram tomados os devidos cuidados para que as possíveis dúvidas conceituais iniciais fossem elucidadas. A breve trajetória histórica, que pôde ser encontrada logo no primeiro capítulo, teve o propósito de, além de situar o leitor em uma linha cronológica de raciocínio, aplicar do início ao fim do trabalho as questões de interdisciplinaridade defendidas mais ao final do conteúdo. De forma que, não apenas fizesse sentido teórico ao leitor, mas que ele pudesse observar um exemplo de aplicabilidade.

Na sequência, foi possível contextualizar o cenário político e social do qual decorreram as análises. De início o conceito de greve foi apresentado enquanto uma ferramenta utilizada por um grupo de trabalhadores pertencentes à mesma categoria com a finalidade de obter benefícios e/ou melhores condições laborais. Posteriormente, alguns argumentos foram expostos a fim de demonstrar o potencial dos caminhoneiros enquanto jogadores, tendo em vista a sociedade na qual se inserem. Por fim, alguns exemplos históricos de greves desta categoria em outros países foram abordados, bem como um mapeamento da trajetória dos embates dos caminhoneiros em busca de suas demandas e o posicionamento do governo em cada caso.

A verificação analítica ocorre, de fato, no penúltimo capítulo e é no mesmo que os objetivos específicos do trabalho são contemplados. Nesse capítulo aplicamos a Teoria dos Jogos na greve dos caminhoneiros e chegamos no resultado esperado, que seria verificar se de fato como ocorreu a greve, se ela seria um equilíbrio de Nash, o que mostramos que ocorre em nosso modelo simplificado.

Através do capítulo 5 aborda-se, mais a fundo, a interdisciplinaridade enquanto um fator chave para uma educação que promova o pensamento crítico conjuntamente ao ensino das matérias. Esse processo de ensino-aprendizagem pode se dar através do entrelaçamento dos conteúdos obrigatórios referentes a duas ou mais matérias, ou mesmo desses com acontecimentos presentes na realidade do educando. Nesse sentido o conhecimento advindo das disciplinas curriculares poderia se tornar uma ferramenta para análise de fenômenos sociais e políticos. Tal forma de ensino, aplicada à realidade, facilitaria tanto o entendimento, no nosso caso, da Matemática, quanto o desenvolvimento do aluno enquanto cidadão analítico. Justificando, dessa forma, a Teoria dos Jogos como possível ponte de diálogo entre disciplinas de diferentes áreas do conhecimento.

Referências

[1] ABRANTES, M. Teoria dos Jogos e os oligopólios. Multitema, Angola: 2004. Disponível em https://www.ime.usp.br/ rvicente/TeoriaDosJogos.pdf.

[2] BELLHOUSE, D. The Problem of Waldegrave. Electronic Journal for History of Probability and Statistics, 2007.

[3] BELLHOUSE, D. e FILLION, N. Le Her and Other Problems in Probability Discussed by Bernoulli, Montmort and Walvegrave.

[4] BENJAMIN, A. e GOLDMAN, A. Analysis of n-card Le Her. Disponível em https://www.math.hmc.edu/ benjamin/papers/leher.pdf.

[5] CARONE, E. A República velha; instituições e classes sociais. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1972.

[6] FIANI, R. Teoria dos jogos, Rio de Janeiro, Elsevier-Campus, 2007.

[7] GOMES O. Teoria dos Jogos: Algumas Noções Elementares. Instituto Politécnico de Lisboa, 2013.

[8] KARLIN, A. e PERES, Y. Game theory alive. American Mathematical Society, 2016.

[9] MOURA, R. A cronologia da crise do diesel, do controle de preços de Dilma à greve dos caminhoneiros. BBC Brasil em Londres, 24 de maio de 2018. Disponível em https://www.bbc.com/portuguese/brasil-44239437

[10] OLIVEIRA, D. Teoria econômica dos jogos e o ensino médio. Dissertação de Mestrado. UFG, 2017. Disponível em https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/7146.

[11] PORTINARI, N. Entenda a cronologia da paralisação dos caminhoneiros no Brasil. Folha de São Paulo, atualizado em 30.de maio de 2018. Disponível em https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2018/05/entenda-a-cronologia-da-paralisacao-dos-caminhoneiros-no-brasil.shtml

[12] SANTINI, B., GARBUGIO, G., BORTOLOSSI, H., SANTOS, P. e BARRETO, L. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. II Bienal SBM, 2004.

[13] SANTINI, B., GARBUGIO, G., BORTOLOSSI, H. Uma introdução à teoria econômica dos jogos. Disponível em http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/tdj/bgs-teoria-dos-jogos.pdf.

[14] SHOHAM, Y. e LEYTON-BROWN, K. Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic, and logical foundations. Cambridge University Press, 2008.

[15] TAVARES, T. Greve: um direito no Brasil. Disponível em http://www.arcos.org.br/artigos/greve-um-direito-no-brasil/.

[16] ZOTTO, T. Informação Assimétrica na Negociação Coletiva: Uma Análise da Greve como Estratégia pela Teoria dos Jogos. Revista eletrônica [do] Tribunal Regional do Trabalho da 9ª Região, Curitiba, PR, v. 1, n. 6, p. 50-72, abr. 2012.

[17] WALKER, P. An outline of the history of game theory. Dept. of Economics, University of Canterbury, 1995.

[18] Greve dos caminhoneiros: como se formou o nó que levou à paralisação. El País, 2018. Disponível em https://brasil.elpais.com/brasil/2018/05/24/economia/1527177800693499.html. Acessado em 01/09/2018

[19] Greve dos caminhoneiros: entenda o movimento que parou o Brasil. O Estado de S.Paulo. Atualizado 16 de julho de 2018. Disponível em

https://economia.estadao.com.br/noticias/geral,perguntas-e-respostas-sobre-a-greve-dos-caminhoneiros,70002319904 acessado em 03/09/2018

[20] Cronologia da greve dos caminhoneiros. G1 Globo, 2018 Disponível em https://g1.globo.com/economia/noticia/cronologia-greve-dos-caminhoneiros.ghtml. Acessado em 01/09/2018.

[21] Greves de caminhoneiros pelo mundo e seus efeitos. Terra notícias, 2018 Disponível em https://www.terra.com.br/noticias/greves-de-caminhoneiros-pelo-mundo-e-seus-efeitos,0c70ea817eb74150c48de2a39c3c910dmtoe7wdb.html. Acessado em 01/09/2018.