Luis Rodrigo Ortiz Henríquez

Existência de uma solução fraca para o modelo de ferrofluido estacionário de Rosensweig.

Brasil

Março, 2019.

Luis Rodrigo Ortiz Henríquez

Existência de uma solução fraca para o modelo de ferrofluido estacionário de Rosensweig.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Jáuber Cavalcante de Oliveira

Brasil

Março, 2019.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ortiz Henríquez, Luis Rodrigo
Existência de uma solução fraca para o modelo de ferrofluido estacionário de Rosensweig / Luis Rodrigo Ortiz Henríquez ; orientador, Jáuber Cavalcante de Oliveira, 2019.
80 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Modelo estacionário. 3. Rosensweig. 4. Solução fraca. 5. Ferrofluido. I. Cavalcante de Oliveira, Jáuber. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Luis Rodrigo Ortiz Henríquez

Existência de uma solução fraca para o modelo de ferrofluido estacionário de Rosensweig.

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", na Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática.

Jáuber Cavalcante de Oliveira
Orientador - UFSC

Maicon José Benvenutti
UFSC - Blumenau (videoconferência)

Luciano Bedin
UFSC

Matheus Cheque Bortolan
UFSC

Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa de pós-graduação - UFSC

Brasil

Março, 2019.

Dedicado a mi yo del pasado, que no se creía capaz y siempre dudó de lo que podía hacer, hasta donde podía llegar y de lo que podía conseguir. A mi madre que me lo dió todo y a esas personas que sonríen a los demás de forma gratuita y desinteresada.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a todos que acreditaram em mim neste processo, inclusive mais do que eu. Em especial à Luzmira Henriquez, minha mãe, que desde o dia 1 me empurrou para a frente, me apoiando e se preocupando, e por me fazer nunca esquecer a tabuada. Ao Luis Ortiz, meu pai, que sempre deu seu melhor para que nunca me faltasse nada, trabalhando arduamente e dedicando seu tempo extra para poder nos levar (como família e indivíduos) o mais alto possível. Sem ele, eu não estaria aqui hoje. Às minhas irmãs, Daniela, Karina e Pamela, que mesmo estando longe, sempre estiveram comigo, me acompanhando, apoiando, escutando e, quando precisava, estando aqui ao meu lado.

Agradeço aos meus colegas e amigos do Departamento de Matemática da Universidade do Chile, Nicolás, Fabián, Francisca, Ignacio e em especial a Valentina, Iván, Fernanda, Miguel e Mario, que me acompanharam desde o primeiro dia da graduação, me viram crescer e me ajudaram a acreditar em mim mesmo.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em especial a Rafaela, Guilherme, Julio, Elemar, Bruna e Ever, que me acompanharam e apoiaram neste processo e nos apoiamos nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu professor e orientador Jáuber Cavalcante de Oliveira pela confiança, o tempo e o trabalho que dedicou nesta pesquisa, pelo constante interesse de passar suas experiencias para mim, procurando expandir meus horizontes e confiar em mim.

Agradeço a quem me acompanhou, apoiou e me manteve calmo nos momentos de fraqueza, Ilân Gavin. Que me ajudou a manter os pés na terra e a me levantar quando precisei. Acreditando em mim, fazendo com que eu também acreditasse.

Por fim, agradeço ao CAPES por estes dois anos de apoio financeiro.

Naranjita, Naranjita, ¿por qué llora?
porque tengo que llorar.
Anoche pasó mi novia
y no me quiso saludar.
Los Pañuelos de mi novia
no se lavan con jabón
se lavan con agüita de sangre
de mi corazón.
Luchín - Víctor Jara, 1972, Chile.

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de Rosensweig para um ferrofluido estacionário e a existência de uma solução fraca. Formado pelas *equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, equação de momentum angular, equação de magnetização* e *a equações magnetostáticas*, esse modelo descreve o escoamento de um ferrofluido em uma região limitada tridimensional sob ação de um campo magnético externo.

Para contornar as dificuldades causadas pelas várias equações com muitos termos não-lineares, os problemas foram divididos em sub-problemas em combinação com técnicas de regularização e um argumento global de ponto fixo. Mediante o Teorema de imersão de Sobolev e outras estimativas encontraremos a solução fraca do modelo de Rosensweig a partir da solução encontrada para o modelo regularizado.

Palavras-chave: Rosensweig. Solução fraca. Ferrofluido. Modelo estacionário. Equações de Navier-Stokes. fluido incompressível. Fluidos magnéticos.

Abstract

This work studied the Rosensweig's model for a stationary ferrofluid and the existence of a weak solution. Formed by the *Navier-Stokes equations for incompressible fluids, angular momentum equation, magnetization* and *magnetostatic equations*, this model describes the flow of a ferrofluid in a limited three-dimensional region under the action of an external magnetic field.

To oversome the difficulties caused by the several of equations with many nonlinear terms, the problems were divided into subproblems in a combination with regularization techniques and a global fixed-point argument. By Sobolev Immersion Theorem and other estimates we will find the weak solution to the regularized model.

Keywords: Rosensweig. Weak solution. Ferrofluid. Stationary model. Navier-Stokes equations. Incompressible flow. Magnetic fluids.

Sumário

Introdução

A interação entre fluidos e campos eletromagnéticos tem sido atraente pela diversidade de áreas em que pode ser aplicada, como na medicina, na indústria, na área automotriz, na acústica, entre outras.

Dentre as iterações que pode ter o fluido com o campo de força se encontra a *ferro-hidrodinâmica* onde a força de corpo se produz pela força de polarização [1] e não existe fluxo de corrente elétrica necessariamente; diferente da hidrodinâmica, magneto-hidrodinâmica ou eletro-hidrodinâmica onde as únicas forças de corpo agindo no volume são a força de gravidade, cargas ou correntes elétricas.

Entende-se por *ferrofluido* como um líquido (ou coloide [2]) altamente polarizável na presença de um campo magnético. Temos nele misturas de nanopartículas ferromagnéticas dentro de um fluido, que usualmente é água ou algum solvente orgânico. Os ferrofluidos, apesar do nome, não mostram ferromagnetismo, pois não conservam a magnetização em ausência de um campo externo.

Sendo um pouco mais específico, para um fluido magnético incompressível (secção 2.3) sob um campo magnético externo, existem dois modelos que descrevem o movimento de suas partículas dentro de uma sub-região Ω do volume do fluido. Um deles, e que vai ser estudado é o modelo de *Rosensweig*[3] (1985), onde o escoamento é descrito pelo seguinte sistema:

---

[1] Momento de dipolo magnético. A qual requer magnetização (ou imantação) do material. A magnetização é a densidade de momentos dipolares magnéticos.

[2] Os coloides são sistemas onde no menos um componente tem uma das suas dimensões entre $1nm$ e $1\mu m$.

[3] O outro modelo existente é o modelo de *Shliomis*

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \operatorname{div}(u)=0, \\ \rho(u\cdot\nabla)u-(\eta+\zeta)\triangle u+\nabla p \\ =\mu_0(M\cdot\nabla)H+2\zeta\operatorname{rot}(\omega)+L, \\ \rho kI(u\cdot\nabla)\omega-\eta'\triangle\omega-(\eta'+\lambda')\nabla\operatorname{div}(\omega) \\ =\mu_0 M\times H+2\zeta(\operatorname{rot}(u)-2\omega)+G, \\ (u\cdot\nabla)M-\sigma\triangle M+\frac{1}{\tau}(M-\mathcal{X}_0H)=\omega\times M, \\ \operatorname{rot}(H)=0, \qquad \operatorname{div}(H+M)=F, \\ u=0, \qquad \omega=0, \qquad M\cdot\mathbf{n}=0, \\ \operatorname{rot}(M)\times\mathbf{n}=0, \qquad H\cdot\mathbf{n}=0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

u representa a velocidade e ω representa o momentum angular das partículas do fluido, p é a pressão, I representa o tensor de inercia e $\rho, \eta, \zeta, \mu_0, \eta', \lambda', \sigma, \mathcal{X}_0$ e τ são constantes físicas positivas, M e H são a magnetização e o campo magnético, respectivamente.

Cada equação diferencial do modelo $(\mathcal{P})$ está definida em Ω, um subconjunto limitado em $\mathbb{R}^3$, as que correspondem à equação de continuidade, equação de momentum linear, equação de momentum angular, equação de magnetização de Bloch-Torrey [4], equações magnetostáticas e as condições de contorno, respectivamente.

O termo $\mu_0(M\cdot\nabla)H$ representa a força do corpo de Kelvin devido à magnetização, enquanto $\mu_0 M\times H$ representa a densidade de torque que faz que o fluido circundante e as nanopartículas magnéticas girem.

Os parâmetros L, F e G recebem o nome de forçantes. Vamos

[4] σ representa o coeficiente de difusão magnética que carregam os giros.

assumir que F satisfaz a seguinte condição:

$$\int_\Omega F dx = 0,$$

e está ligado ao campo magnético aplicado H_{ext} pela fórmula:

$$F = -\mathrm{div}(H_{ext}).$$

Queremos mostrar que o sistema $(\mathcal{P})$ tem uma solução fraca mas para não utilizar o método de *Faedo-Garlekin* (que nos levaria em um sistema algébrico não linear) precisamos adicionar termos extras que vão regularizar nosso sistema. Logo o novo sistema fica na forma:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} \mathrm{div}(u) = 0, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 u + \rho(u \cdot \nabla)u - (\eta + \zeta) \triangle u + \nabla p \\ = \mu_0(M \cdot \nabla)H + 2\zeta \mathrm{rot}(\omega) + L, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 \omega + \rho k I(u \cdot \nabla)\omega - \eta' \triangle \omega - (\eta' + \lambda')\nabla \mathrm{div}(\omega) \\ = \mu_0 M \times H + 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega) + G, \\ (u \cdot \nabla)M - \sigma \triangle M + \frac{1}{\tau}(M - \mathcal{X}_0 H) = \omega \times M, \\ \mathrm{rot}(H) = 0, \quad \mathrm{div}(H + M) = F, \\ u = 0, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \omega = 0, \quad \nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega, \\ M \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathrm{rot}(M) \times \mathbf{n} = 0, \quad H \cdot \mathbf{n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

A ideia é encontrar uma solução fraca da forma $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$ para o problema $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ e a partir dela construir uma solução (u, ω, M, H) para o problema $(\mathcal{P})$ fazendo tender $\varepsilon \to 0$ em $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$.

Como encontramos aquela solução para o problema $(\mathcal{P}^\varepsilon)$? Para achar aquela solução vamos descompor o problema em duas partes:

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} (V\cdot\nabla)M-\sigma\triangle M+\frac{1}{\tau}(M-\mathcal{X}_0H)=w^*\times M, \\ H=\nabla\varphi,\ \mathrm{div}(H+M)=F, \\ M\cdot\mathbf{n}=0,\ \mathrm{rot}(M)\times\mathbf{n}=0,\ H\cdot\mathbf{n}=0\ \ em\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde para $(V,w^*)\in\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ dado, o par (M,H) vai ser solução do problema linear $(\mathcal{P}^1)$. E define-se uma função T_1 da forma $T_1(V,w^*)=(M,H)$.
Por outro lado:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon_2)\begin{cases} \mathrm{div}(u)=0, \\ \varepsilon^2\triangle^2 u+\rho(V\cdot\nabla)u-(\eta+\zeta)\triangle u-2\zeta\mathrm{rot}(\omega)+\nabla p \\ =\mu_0(M\cdot\nabla)H+L, \\ \varepsilon^2\triangle^2\omega+\rho kI(V\cdot\nabla)\omega-\eta'\triangle\omega-(\eta'+\lambda')\nabla\mathrm{div}(\omega) \\ -2\zeta(\mathrm{rot}(u)-2\omega)=\mu_0M\times H+G, \\ u=0,\quad \nabla u\cdot\mathbf{n}=0,\quad \omega=0,\quad \nabla\omega\cdot\mathbf{n}=0\quad \text{em}\quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde para $(M,H)\in\mathbb{H}^1_t(\Omega)\times\mathbb{H}^1_t(\Omega)$ dado, o par (u,ω) é a solução ao problema $(\mathcal{P}^\varepsilon_2)$. Então, define-se uma função da forma $T_2(M,H)=(u,\omega)$. Mediante o teorema de Lax-Milgram vamos demonstrar que aquelas funções estão bem definidas. Considerarmos T como a composição $T=T_2\circ T_1$, vamos demonstrar que é continua e compacta. Logo utilizando o argumento de ponto fixo, pelo teorema de Schaulder encontraremos a solução para $(\mathcal{P}^\varepsilon)$.

No que segue vamos estudar o modelo descrito anteriormente seguindo [12], *Youcef Amirat* e *Kamel Hamdache*. O trabalho está organizado de tal forma que o capítulo 1 dedicada aos resultados e ferramentas auxiliares que vão ser utilizadas e são primordiais. Nos capítulos 2 e 3 construímos algumas das equações que vão formar o sistema $(\mathcal{P})$. No capítulo 4 se presenta o modelo de *Rosensweig* de forma mais detalhada. No capítulo 5 se presenta o problema $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$ de forma mais detalhada e se foca em descompor e achar uma solução fraca para ele. Finalmente no capítulo 6 vamos mostrar e concluir que o problema $(\mathcal{P})$ possui uma solução fraca.

1 Resultados Preliminares.

No seguinte capítulo vamos enunciar alguns resultados que serão utilizados posteriormente e que são necessários e fundamentais para conseguir nosso objetivo.

1.1 Cálculo e Topologia.

Proposição 1.1.1 (**Desigualdade de Young**, [6], pp 622)**.** *Sejam* $1 < p, q < \infty$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *e* $\varepsilon > 0$. *Então, existe uma constante real e positiva* $C(\varepsilon)$ *tal que*

$$a\, b \leq \varepsilon\, a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad \forall\, a,\, b \geq 0.$$

1.1.1 Cálculo tensorial.

Algumas identidades vetoriais clássicas e importantes para facilitar as nossas contas são:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{v})I] &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) &= \triangle \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^{\perp} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0 \tag{1.1.2}$$

Para $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ funções vetoriais em $\mathbb{R}^3$
Outra ferramenta fundamental é a seguinte identidade:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \triangle \mathbf{v},$$

ou escrito de outra forma:

$$-\triangle = \mathrm{rot}^2 - \nabla \mathrm{div}, \tag{1.1.3}$$

que vai nos permitir resolver a equação magnetostática.

Proposição 1.1.2. *Seja T_a definida por $T_a = \frac{1}{2}(\xi \cdot A)$, onde ξ é um vetor tridimensional definido por $\xi = \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \epsilon_{ijk}$. Então:*

$$\nabla \cdot T_a = -\frac{1}{2} \nabla \times A$$

Demonstração. Considerando como está definido cada termo, por um lado:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot T_a &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \xi \cdot A \right), \\
&= \hat{\mathrm{e}}_l \partial_l \cdot \left(\frac{1}{2} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \cdot A_p \hat{e}_p \right), \\
&= \frac{1}{2} \delta_{li} \partial_l \hat{e}_j \delta_{kp} \epsilon_{ijk} A_p, \\
\nabla \cdot T_a &= \frac{1}{2} \delta_l \hat{e}_j \epsilon_{ljp} A_p.
\end{aligned}$$

Por o outro lado tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla \times A &= \hat{\mathrm{e}}_i \partial_i \times A_p \hat{e}_p, \\
&= \partial_i A_p \epsilon_{ipl} \hat{e}_l, \\
\nabla \times A &= -\partial_i \hat{e}_l \epsilon_{ilp} A_p.
\end{aligned}$$

Portanto a relação enunciada está provada. □

1.2 Análise Funcional.

Os seguintes teoremas vão nos permitir resolver o problema nas Proposições 5.3.2, 5.3.3 e o Teorema 5.3.1.

Teorema 1.2.1 (**Lax-Milgram**, [6], pp. 297)**.** *Sejam E um espaço de Hilbert,*

$$\begin{array}{rccc}
B: & E \times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\
 & (u, v) & \longmapsto & B[u, v]
\end{array}$$

uma forma bilinear, contínua e coerciva e $f \in E'$. Então, existe um único $u \in E$ tal que

$$B[u, v] = f(v), \ \forall\, v \in E.$$

Proposição 1.2.2. *Sejam E, F e G espaços de Banach e B uma função bilinear e contínua com $B : E \times F \to G$. Se $(u_n) \longrightarrow u$ fortemente em E, e $(v_n) \rightharpoonup v$ fracamente em F, então $(B(u_n, v_n)) \rightharpoonup B(u, v)$ fracamente em G.*

Definição 1.2.3. *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento $x \in E$ no sentido fraco, se $f(x_n)$ converge à $f(x)$ em $\mathbb{R}$, para todo $f \in E'$.*

Teorema 1.2.4 (**Ponto fixo de Schauder**, [2], pp.57)**.** *Seja D um subconjunto convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach X. Se $f : D \to X$ é uma aplicação compacta tal que $f(D) \subset D$ então existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.*

1.3 Espaços de Sobolev

Lema 1.3.1 (**Desigualdade de Hölder**, [5], pp 18)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Considere um conjunto de números reais e positivos $(p_i)_{i=1}^n$ tal que $1 < p_i < \infty$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$. Se escolhermos $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, então $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|\prod_{i=1}^{n} u_i\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Teorema 1.3.2 (**de Rham**, [3], pp.243)**.** *Seja Ω um domínio conexo, limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^d$. Seja $f \in \left(\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\right)^d$ tal que para cada $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ que cumpre div$(\varphi) = 0$ tem-se:*

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1}, \mathbb{H}_0^1} = 0.$$

Então, $\exists!\ z \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla z$

Uma consequência do Teorema de Hanh-Banach é o seguinte resultado.

Proposição 1.3.3. *Sejam E um espaço lineal normado e F um subespaço de E. Supomos que qualquer funcional contínuo sobre E que anula-se sobre F é identicamente zero. Então, F é um subespaço denso de E.*

Teorema 1.3.4 ([3], pp.167)**.** *Para $d > 2$, com Ω limitado tem-se a inclusão $(\mathbb{H}^1(\Omega))^d \hookrightarrow (\mathbb{L}^q(\Omega))^d,\ \forall\, 2 \le q \le p$ onde p cumpre $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$.*

Observação 1.3.5. *O expoente p dado é o melhor possível no sentido de que não existe $q > p$ tal que $\|u\|_p \le C\|u\|_{\mathbb{H}^1}$, para todo $u \in \mathcal{D}(\Omega^n)$.*

Observação 1.3.6. *Esse resultado pode ser generalizado para os espaços de funções de $(\mathbb{H}^m(\Omega))^d$ para $m < \frac{1}{2}d$, logo $(\mathbb{H}^m(\Omega))^d \hookrightarrow (\mathbb{L}^p(\Omega))^d$ com $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{q} \ge \frac{1}{2} - \frac{m}{d}$.*

1.4 Espaços de Hilbert.

Para estudar o modelo de Rosensweig precisamos introduzir os espaços funcionais na teoria de *equações de Navier-Stokes*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{v \in (\mathcal{D}(\Omega))^3 \ /\ \mathrm{div}(v) = 0\},\\
\mathbb{V} &= \bar{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)},\\
\mathbb{H} &= \bar{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Podemos ter uma definição ainda mais específica do espaço $\mathbb{V}$ dada no seguinte lema:

Lema 1.4.1. *Seja Ω um domínio limitado Lipschitz de $\mathbb{R}^d$. Então:*

$$\mathbb{V} = \{v \in (\mathbb{H}_0^1(\Omega))^d \ /\ div(v) = 0\}.$$

Demonstração. Vamos definir $\mathbb{V}^* := \{v \in (\mathbb{H}_0^1(\Omega))^d \ /\ \mathrm{div}(v) = 0\}$.
É claro que $\mathcal{V} \subset \mathbb{V}^*$. Como $\mathbb{V}^*$ é subespaço fechado de $(\mathbb{H}_0^1(\Omega))^d$, então:

$$\mathbb{V} = \bar{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1} \subset \bar{\mathbb{V}^*}^{\mathbb{H}_0^1} = \mathbb{V}^*.$$

Para provar a outra inclusão, precisamos mostrar que qualquer funcional linear contínuo sobre $\mathbb{V}^*$ que anula-se em $\mathcal{V}$ também anula-se em $\mathbb{V}^*$. Então, se $f \in \left[\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\right] \cap \mathbb{V}^{\perp}$, pelo Teorema de Rham (1.3.2), f é o gradiente de uma função z de $L^2(\Omega)$. Portanto, $\forall\, v \in \mathbb{V}^*$:

$$\langle f, v\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} = \langle \nabla z, v\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} = -\left(z \,|\, \mathrm{div}(v)\right)_{L^2} = 0.$$

Logo, f anula-se sobre $\mathbb{V}^*$ e assim pela Proposição 1.3.3 tem-se $\mathbb{V}^*$ um subespaço denso de $\mathcal{V}$. Portanto $\mathbb{V} = \bar{\mathcal{V}} = \mathbb{V}^*$. $\square$

Teorema 1.4.2 (**Traço para** $H^1(\Omega)$, [7], pp 100)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} |_{\partial\Omega} : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \longmapsto & \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ v & \longmapsto & v|_{\partial\Omega} \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\mathbb{H}^1(\Omega)$, a uma única aplicação linear, contínua e sobrejetora, ainda denotada por $|_{\partial\Omega}$, de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ em $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

Lema 1.4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Então, o conjunto*

$$H(div, \Omega) = \{V \in \mathbb{L}^2(\Omega) \ / \ div(V) \in L^2(\Omega)\}.$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$\langle u, v\rangle_{H(div,\Omega)} := \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle div(u), div(v)\rangle_{L^2}.$$

Teorema 1.4.4 (**Traço para** $H(\mathbf{div}, \Omega)$, [9], pg 204)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então a aplicação:*

$$\begin{array}{rcl} |_{\partial\Omega} .\eta : \mathcal{D}(\overline{\Omega})^3 & \longmapsto & \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ v & \longmapsto & v|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^3$ em $H(div, \Omega)$, a uma única aplicação linear e contínua denotada por $|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{n}$, de $H(div, \Omega)$ em $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Corolário 1.4.5. *Para $V \in H(div; \Omega)$ temos a fórmula de Stokes dada por:*

$$\forall\, \varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega), \qquad \int_\Omega V \cdot \nabla\varphi dx = -\int_\Omega \varphi div(V) dx + \langle V \cdot \boldsymbol{n}, \varphi\rangle_{\partial\Omega} \quad (1.4.1)$$

onde $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\partial\Omega}$ é o pareamento de dualidade entre $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Lema 1.4.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Então, o conjunto*

$$H(rot;\Omega) = \{V \in \mathbb{L}^2 \ / \ rot(V) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$\langle u, v\rangle_{H(rot,\Omega)} := \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle rot(u), rot(v)\rangle_{L^2}.$$

Teorema 1.4.7 (**Traço para** $H(\mathbf{rot},\Omega)$, [9], pp 204)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então a aplicação:*

$$\begin{array}{rcl} |_{\partial\Omega} \times \boldsymbol{n} : \mathcal{D}(\overline{\Omega})^3 & \longmapsto & \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3 \\ v & \longmapsto & v|_{\partial\Omega} \times \boldsymbol{n} \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^3$ em $H(rot,\Omega)$, a uma única aplicação linear, contínua, ainda denotada por $|_{\partial\Omega} \times \boldsymbol{n}$, de $H(rot,\Omega)$ em $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$.

Corolário 1.4.8. *Para $V \in H(rot;\Omega)$ é satisfeita a fórmula de Green dada por:*

$$\forall\, W \in \mathbb{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega rot(V)\cdot W dx = \int_\Omega V \cdot rot(W) dx + \langle V \times \boldsymbol{n}, W\rangle_{\partial\Omega}.$$

Para resolver a equação de Bloch-Torrey vamos introduzir o espaço de Hilbert:

$$\mathbb{H}^1_t(\Omega) = \{M \in \mathbb{H}^1(\Omega) \ / \ M \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

munida com a norma de $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Notemos também que existe $C > 0$ constante tal que:

$$\|\nabla V\| \le C(\|V\|^2 + \|\mathrm{rot}(V)\|^2 + \|\mathrm{div}(V)\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, V \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$$

onde $\|\cdot\|$ vai representar a norma em $L^2(\Omega)$.
Portanto, vamos ter que a equivalência entre as normas $\|V\|_{\mathbb{H}^1_t(\Omega)}$ e $\left(\|V\|^2 + \|\mathrm{rot}(V)\|^2 + \|\mathrm{div}(V)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Para resolver a equação magnetostática, vamos introduzir os seguintes espaços de Hilbert:

$$L^2_\sharp(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \ / \ (\varphi;1) = 0\},$$
$$H^1_\sharp(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \ / \ (\varphi;1) = 0\}.$$

Proposição 1.4.9 ([3], pp.285)**.** *Seja Ω um domínio de Lipschitz limitado em $\mathbb{R}^d$. Então temos as seguintes desigualdades de Poincaré:*

$$\|u\|^2_{\mathbb{H}} \leq \frac{1}{\lambda_1}\| \triangle u\|^2_{L^2}, \quad \forall\, u \in \mathbb{V},$$
$$\| \triangle u\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|Au\|^2_{L^2}, \quad \forall\, u \in D(A),$$

onde λ_1 é o menor autovalor para o operador de Stokes.

Outra ferramenta a utilizar é a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, onde existe $C > 0$ constante tal que:

$$\|\varphi\| \leq C\|\nabla\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in H^1_\sharp(\Omega). \tag{1.4.2}$$

Lema 1.4.10 ([11], pp.465)**.** *Existe $C = C(\Omega)$ constante tal que:*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1} \leq C|\mathrm{rot}(u)|,$$
$$|u| \leq C|\mathrm{rot}(u)|,$$

para cada $u \in \mathbb{H}^1(D) \cap \mathbb{H}_0$

Os seguintes teoremas vão nos ajudar fazer algumas estimativas no modelo regularizado.

Teorema 1.4.11 ([3], pp. 223)**.** *Seja Ω um domínio de Lipschitz limitado e conexo em $\mathbb{R}^d$. Assumindo que para algum $k \geq 0$, Ω é de classe $C^{k+1,1}$, $f \in \mathbb{H}^k(\Omega)$ e $u_b \in \mathbb{H}^{k+\frac{3}{2}(\partial\Omega)}$, então existe uma única solução $u \in \mathbb{H}^{k+2}(\Omega)$*

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{em } \Omega \\ u = u_b & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

que satisfaz:

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{k+2}} \leq C(\|f\|_{\mathbb{H}^k + \|u_b\|_{\mathbb{H}^{k+\frac{3}{2}}}}),$$

com C dependendo unicamente de Ω.

Teorema 1.4.12 ([3], pp. 226)**.** *Seja Ω um domínio de Lipschitz limitado e conexo em $\mathbb{R}^d$. Seja $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $f_b \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\int_\Omega f(x)dx + \langle f_b, 1\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Então existe uma única solução $u \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ de:

$$\begin{cases} -\triangle u = f & em\, \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = f_b & em\, \partial\Omega \end{cases}$$

e satisfaz, para algum C dependendo unicamente de Ω:

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1} \leq C(\|f\|_{L_2} + \|f_b\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}).$$

1.5 Electromagnetismo.

Para a dedução das *Equações de Navier-Stokes* é preciso conhecer as **Equações de Maxwell**, as quais consistem da *Lei de Gauss, Lei de Gauss para o campo magnético, Lei de Faraday* e a *Lei de Ampere generalizada* dadas por:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{E}$ representa o potencial elétrico, ρ é a densidade de carga, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo e $\mathbf{B}$ representa a densidade de fluxo magnético.

Seja Ω uma região de um espaço ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = \{2, 3\}$) preenchida com um fluido. Seja $x \in \Omega$ algum ponto em Ω, com $\mathbf{x} = (x, y)$ (ou $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dependendo da dimensão do espaço). Se considerarmos que uma partícula do fluido se move através de $\mathbf{x}$ no tempo t, vamos denotar $u = u(\mathbf{x}, t)$ a velocidade da partícula movendo-se no fluido. Considere $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ o caminho seguido por uma partícula em um fluido, então a velocidade de corpo está dada por:

$$u(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)), \tag{1.5.1}$$

ie :

$$u(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}. \tag{1.5.2}$$

Agora, considerando (1.5.2), a aceleração de uma partícula de fluido está dada por:

$$a(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t).$$

Utilizando a regra da cadeia e (1.5.1),

$$a(t) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\dot{y} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\dot{z} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

que podemos escrever da forma:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\partial u}{\partial t} + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right), \\ a(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right)(u). \end{aligned}$$

Assim, vamos definir a derivada material como:

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u \cdot \nabla, \tag{1.5.3}$$

onde se considera que o fluido está em movimento e que as partículas de fluido podem mudar de posição com o tempo.

Para estudar o movimento das partículas no fluido escrevemos:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = (u(x_1, x_2, x_3, t), v(x_1, x_2, x_3, t), w(x_1, x_2, x_3, t)). \tag{1.5.4}$$

Como antes vamos considerar uma região Ω do fluido que esteja se movimentando. Seja $x \in \Omega$, vamos definir a função $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \to \Omega$, suave o suficiente [1] onde $\varphi(\mathbf{x}, t)$ corresponde à trajetória da partícula de fluido desde sua posição $\mathbf{x}$ no tempo $t = 0$ até sua posição no tempo t.

Considerando $\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, t)$, para $W \subset \Omega$ uma sub-região do fluido, vamos ter que $\varphi_t(W) = W_t$ corresponde à trajetória do volume W no tempo t dentro do fluido.[2]

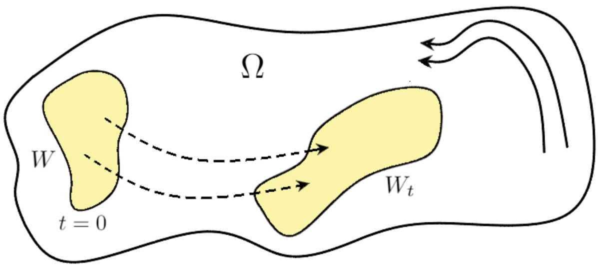

Figura 1 – W_t é a imagem de W como partículas do fluido no tempo t.

Consideramos:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = (\xi(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{x}, t), \vartheta(\mathbf{x}, t)), \tag{1.5.5}$$

Seja $J(\mathbf{x}, t)$ a matriz Jacobiana da função φ_t.

Lema 1.5.1. *A derivada com respeito ao tempo de J está dada por:*

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\boldsymbol{x}, t) = J(u, t)[div(\varphi(\boldsymbol{x}, t))]$$

[1] tal que para cada t fixo φ é invertível.

[2] W_t corresponde à imagem de W como partículas do fluido para o tempo t.

Demonstração. De acordo com (1.5.5):

$$J(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_2} & \frac{\partial\eta}{\partial x_2} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_3} & \frac{\partial\eta}{\partial x_3} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1.5.6}$$

Para $\mathbf{x}$ fixo é fácil ver que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}J(\mathbf{x},t) = & \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial x_2} & \frac{\partial\eta}{\partial x_2} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial x_3} & \frac{\partial\eta}{\partial x_3} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x_2} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x_3} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_2} & \frac{\partial\eta}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_3} & \frac{\partial\eta}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

pois o determinante de uma matriz é multilinear nas colunas e filas. Escrevendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}u(\varphi(\mathbf{x},t),t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}v(\varphi(\mathbf{x},t),t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}w(\varphi(\mathbf{x},t),t), \end{aligned}$$

com $i = 1, 2, 3$.
Pela definição de velocidade de corpo de fluido tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x},t) = u(\varphi(\mathbf{x},t),t). \tag{1.5.8}$$

Considerando (1.5.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}u(\varphi(\mathbf{x},t),t) &= \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}v(\varphi(\mathbf{x},t),t) &= \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}w(\varphi(\mathbf{x},t),t) &= \frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$.

Então, segundo isto e substituindo segundo (1.5.6) e (1.5.7) tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right) J = (\mathrm{div}(u))J.$$

$\square$

Teorema 1.5.2. ***(Teorema do Transporte de Reynolds)***
Para qualquer função f de classe C^1 com respeito às variáveis $(X,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(fu)\right) dX. \tag{1.5.9}$$

Demonstração. Para t fixo, fazendo a mudança de variáveis dada por:

$$X = \varphi(x,t), \quad x \in W_0$$

obtem-se:

$$\int_{W_t} f(X,t)dX = \int_{W_0} f(\varphi(x,t),t)|J(x,t)|dx,$$

Logo, derivando em ambos lados:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX &= \frac{d}{dt}\int_{W_0} f(\varphi(x,t),t)|J(x,t)|dx,\\ \frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX &= \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t}\left(f(\varphi(x,t),t)|J(x,t)|\right) dx,\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Para o integrando do lado direito pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\varphi(x,t),t)|J(x,t)|\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi,t) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\cdot \nabla f\right)|J| + f(\varphi,t)\frac{\partial}{\partial t}|J|.$$

Pelo Lema 1.5.1, substituindo em (1.5.10):

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX = \int_{W_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi,t) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\cdot \nabla f + f(\varphi,t)\mathrm{div}(u(\varphi,t))\right)|J|dx$$

Considerando a equação (1.5.8) e voltando as coordenadas originais tem-se:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX = \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + u\cdot\nabla f + f\mathrm{div}(u)\right)dX,$$
$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(X,t)dX = \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(fu)\right)dX.$$

□

Observação 1.5.3. *Do anterior, considerando o fator densidade de massa, tem-se que a taxa de variação de momentum de uma parte do fluido em movimento é equivalente ao total das forças agindo nele, ie:*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho u dV = \int_{W_t} \rho\frac{Du}{Dt}dV.$$

Observação 1.5.4. *O resultado do teorema, aplicado em funções escalares, pode ser aplicado também em funções vetoriais. Para $F(X,t)$ uma quantidade vetorial e considerando u como o mesmo campo vetorial anterior pode-se escrever:*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} F(X,t)dX = \int_{W_t}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + div(F\otimes u)\right)dX$$

2 Equações de Navier-Stokes

2.1 Conservação de Massa.

Para cada tempo t, assumindo que a densidade de massa do fluido $\rho(\mathbf{x}, t)$ está bem definida. Se W é uma sub-região qualquer em Ω, a massa do fluido em W no tempo t está dada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV \tag{2.1.1}$$

Considerando o principio de conservação da massa dentro do fluido tem-se que não há perda nem ganho de massa no volume. Portanto, a taxa de variação de massa no volume W é zero, *ie* :

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = 0.$$

Segundo (2.1.1) e aplicando o Teorema de transporte 1.5.2:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_W \rho(u, t) dV, \\ 0 &= \int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] dV. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema do valor médio para integrais (assumindo que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u)$ é continua) tem-se que $\exists\, u^* \in W$ tal que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u^*) = 0.$$

Como isso ocorre para qualquer $W \subset \Omega$, então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0.$$

Esta é a forma diferencial da Lei de conservação de massa.

2.2 Equação de Momento Linear.

O total de momentum linear contido em uma região W em um tempo t está dado por:

$$\int_{W_t} \rho u dV,$$

Dentro das forças externas agindo sobre a região W no tempo t, ou W_t, tem-se a força de corpo dada por:

$$\int_{W_t} \rho f dV,$$

com f a densidade de massa das forças; e a força de superfície:

$$\int_{\partial W_t} \tau(\mathbf{n}) dA,$$

com $\mathbf{n}$ a normal para fora em ∂W_t.

De acordo com a *segunda Lei de Movimento de Newton* a taxa de variação do momentum linear total é igual ao total de forças externas agindo no fluido, portanto:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho u dV = \frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f dV + \int_{\partial W_t} \tau(\mathbf{n}) dA.$$

Pela observação 1.5.4 tem-se:

$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)\right) dV = \int_{W_t} \rho f dV + \int_{\partial W_t} \tau(\mathbf{n}) dA$$

Precisamos conhecer a forma geral da tensão $\tau(\mathbf{n})$. A tensão τ é linear com respeito ao vetor normal e depende de (t, y) de forma contínua.

Teorema 2.2.1 (Tensor Tensão de Cauchy). *Assuma que ρ, a densidade do corpo, v, o campo de velocidades e f, a força de corpo, são regulares. Assumindo também que o vetor normal $\boldsymbol{n}$ está fixo e a função $(t, y) \mapsto \tau(t, y, \boldsymbol{n})$ é continua.*

Então existe uma função tensorial $(t, y) \mapsto \sigma(t, y)$ *tal que* $\forall\ (t, y)$ *e para cada vetor unitário* $\boldsymbol{n}$ *tem-se:*

$$\tau(t, y, \boldsymbol{n}) = \sigma(t, y) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{2.2.1}$$

Demonstração em [[3], pp 18].

Definição 2.2.2. *Para todo* (t, y)*, o tensor* $\sigma(t, y)$ *definido pela relação (2.2.1) é conhecido como o **tensor tensão do fluido**.*

Teorema 2.2.3. *Assuma* ρ, v *e* f *suaves, então o tensor tensão atuando sobre o fluido é simétrico.*

Demonstração em [[3], pp 11].

Em um fluido em repouso, a tensão exercida na superfície de um fluido atua em direção oposta à normal (para fora) da superfície deste. Então, segundo isto a tensão em qualquer ponto está dado por:

$$\tau(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n}, \quad p \geq 0$$

Portanto, segundo o (2.2.1) o tensor tensão pode ser escrito da forma:

$$\sigma = -pId,$$

Agora temos que estudar o que acontece quando o fluido está em movimento.

Definição 2.2.4. *Para um fluido em movimento o tensor tensão é separado devido aos efeitos da pressão e movimento da forma:*

$$\sigma = T_v - pId, \quad p \geq 0$$

onde T_v *é um tensor simétrico e é chamado **tensor de tensão viscosa**.*

Definição 2.2.5. *Seja* D *uma matriz simétrica da forma:*

$$D(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right],$$

então vamos chamar $D(u)$ de Tensor (de velocidade de) deformação para o fluxo.

Considerando os tensores T_v e $D(u)$ os tensores de tensão viscosa e deformação, respectivamente, tem-se que valem as seguintes propriedades:

1. O tensor T_v em um fluxo depende unicamente do tensor $D(u)$.
2. A dependência de T_v em $D(u)$ é linear.
3. A relação entre T_v e $D(u)$ é isotrópica [1].

Definição 2.2.6. *Um fluido que satisfaz as propriedades anteriores (experimentalmente) é conhecido como fluido Newtoniano.*[2]

Proposição 2.2.7. *Em um fluido Newtoniano existe uma relação entre os tensores de deformação e tensão viscosa dada da forma:*

$$T_v = \lambda\,(\nabla \cdot u)\,I + 2\mu D(u),$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Agora, segundo o Teorema de Cauchy 2.2.1 e aplicando o teorema da divergência:

$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) \right) dV = \int_{W_t} \rho f dV + \int_{\partial W_t} \sigma(t, y) \cdot \mathbf{n} dA,$$
$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) \right) dV = \int_{W_t} \rho f dV + \int_{W_t} \nabla \cdot \sigma(t, y) dA.$$

De acordo com a definição 2.2.4:

$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) \right) dV = \int_{W_t} \rho f dV + \int_{W_t} \nabla \cdot (T_v - pI) dV,$$
$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \rho f - \nabla \cdot (T_v - pI) \right) dV = 0.$$

[1] Cujas propriedades físicas no dependem da direção em que são examinadas

[2] Condições extremas de velocidade, pressão o temperatura podem mudar o comportamento a um comportamento Não Newtoniano.

Pelo Teorema do valor médio para integrais e considerando que isto acontece $\forall\, t$ e qualquer sub-região W do fluido, tem-se:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \rho f - \nabla \cdot (T_v - pI) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \rho f + \nabla \cdot T_v - \nabla p,$$

Pela proposição 2.2.7:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= \rho f + \nabla \cdot (\lambda(\nabla \cdot u) + 2\mu D(u)) - \nabla p,\\
&= \rho f + \lambda \nabla \cdot (\nabla \cdot u) + 2\mu \nabla \cdot D(u) - \nabla p,\\
&= \rho f + \lambda \nabla (\nabla \cdot u) + 2\mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right)\right]\\
&- \nabla p,\\
&= \rho f + \lambda \nabla (\nabla \cdot u) + \mu(\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)) - \nabla p,\\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= \rho f + \mu \Delta u + (\lambda + \mu)(\nabla(\nabla \cdot u)) - \nabla p.
\end{aligned}$$

a que é conhecida como a equação de evoluçao de momentum linear.
Ou escrita de outra forma:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u\right) - \nabla \cdot (\sigma(t, y)) = \rho f.$$

2.3 Fluidos Incompressíveis.

Vamos chamar um fluido de incompressível se para cada sub-região W_t (no tempo t) do fluido cumpre-se:

$$vol(W_t) = \int_{W_t} dV = K,$$

onde K é constante para qualquer tempo t, i.e., o volume do fluido não varia. Então:

$$0 = \int_{W_t} \nabla \cdot u dV,$$

devido ao teorema de transporte de Reynolds (1.5.2) logo $\nabla \cdot u = 0$.

Assim, da equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0,$$

considerando (1.5.3):

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Então, um fluido é incompressível vale alguma das seguintes equivalências:

1. O volume do fluido é constante no tempo.
2. $\nabla \cdot u = 0$, ou seja, a velocidade do fluido está livre de divergência.
3. A densidade do fluido é constante com respeito às trajetórias associadas à velocidade u.

Para fluidos incompressíveis a equação de momentum linear torna-se:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \rho f + \mu \Delta u - \nabla p,$$

Então, considerando $\rho = \rho_0$ constante tem-se:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho_0 f,$$
$$\nabla \cdot u = 0.$$

A que é conhecida como *Equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.*

3 Ferrofluidos.

Para entender, conhecer e estudar o movimento das partículas em um fluido magnético deve-se considerar os campos e forças que estão agindo.

3.1 Equação de movimento para um fluido magnético.

Considere o equilíbrio dinâmico por unidade de volume de um elemento infinitesimal de um fluido magnético, o suficientemente grande para conter um grande número de partículas magnéticas coloidais, muito pequenas comparadas com o campo de fluxo. A taxa de variação de momentum para um elemento deformável com massa constante e volume $dV = dxdydz$ está dado por:

$$\frac{D}{Dt}(\rho u dV) = \rho dV \frac{Du}{Dt} + u \frac{D\rho dV}{Dt},$$

onde o último termo é zero pois a massa é constante. Logo, pela *Lei de Newton* (normalizada a unidade de volume):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = f_p + f_v + f_g + f_m \tag{3.1.1}$$

onde o termo $\frac{D}{Dt}$ corresponde à derivada material definida na unidade I em (1.5.3).

No lado direito de (3.1.1) tem-se a soma de forças de corpo agindo no elemento normalizadas a unidade de volume, onde aparecem termos clássicos em fluidos mecânicos como o gradiente de pressão:

$$f_p = -\nabla p(\rho, T), \tag{3.1.2}$$

a força de gravidade (p.u.v.)

$$f_g = \rho \mathbf{g}, \tag{3.1.3}$$

em que g é a aceleração local produzida pela gravidade. A forca de viscosidade (p.u.v.):

$$f_v = \nabla \cdot T_v$$

onde T_v, o tensor de tensão viscosa, se relaciona com a velocidade do fluido mediante a relação constitutiva newtoniana:

$$T_v = \eta \left[\nabla u + (\nabla u)^T\right] + \lambda(\nabla \cdot u) \cdot \mathbf{I},$$

De acordo com (1.1.1) tem-se que a força de viscosidade pode se escrever como:

$$f_v = \eta \bigtriangleup u + (\eta + \lambda)\nabla(\nabla \cdot u),$$

onde η e λ correspondem ao primeiro e segundo coeficiente de viscosidade, respetivamente. Agora, para fluidos incompressíveis a densidade de força viscosa está dada por:

$$f_v = \eta \bigtriangleup u. \tag{3.1.4}$$

Para o termo f_m correspondente à força magnética p.u.v. tem-se a relação:

$$f_m = \nabla \cdot T_m,$$

onde T_m é o tensor tensão de um fluido magnetizável, e pode-se escrever:

$$T_m = -a\mathbf{I} + BH,$$

onde B e H correspondem aos termos das *Equações de Maxwell* da *indução magnética* e o *campo magnético* respectivamente. Assim, segundo as *Equações de Maxwell* o divergente de T_m é da forma:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot T_m &= -\nabla \cdot (a\mathbf{I}) + \nabla \cdot (BH), \\
&= -\nabla a + H(\nabla \cdot B) + B \cdot (\nabla H), \\
\nabla \cdot T_m &= -\nabla a + B \cdot (\nabla H).
\end{aligned}$$

Como $B = \mu_0(H + M)$, com M representando a magnetização:

$$\begin{aligned} B \cdot \nabla H &= \mu_0(H + B) \cdot \nabla H, \\ &= \mu_0 H \cdot \nabla H + \mu_0 M \nabla H, \\ &= \mu_0 \left[\frac{1}{2} \nabla (H \cdot H) - H \times (\nabla \times H) \right] + \mu_0 M \nabla H, \\ B \cdot \nabla H &= \frac{\mu_0}{2} \nabla (H \cdot H) + \mu_0 M \nabla H, \end{aligned}$$

portanto tem-se que a forca magnética está dada por:

$$f_m = -\nabla\Big(a + \frac{\mu_0}{2}\|H\|^2\Big) + \mu_0 M \nabla H. \tag{3.1.5}$$

Então, segundo (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) e (3.1.5) para (3.1.1) tem-se:

$$\rho\frac{du}{dt} = -\nabla\Big(a + \frac{\mu_0}{2}\|H\|^2\Big) + \mu_0 M \nabla H + \eta \triangle u + \rho g - \nabla p.$$

Agora, se considerarmos dentro do fluido a força exercida pelo momentum angular interno, definimos:

$$f_a = \nabla \cdot T_a,$$

com T_a o tensor tensão angular dado na forma:

$$T_a = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot A,$$

onde ε é um tensor (de segunda ordem) e A descreve a taxa de conversão do momentum angular externo em momentum angular interno; sua expressão está dada por una relação constitutiva linear envolvendo as velocidades linear e angular do fluido:

$$A = 2\xi(\nabla \times u - 2\omega)$$

De acordo à Proposição 1.1.2 pode-se observar que f_a está dado por:

$$\begin{aligned} f_a &= -\frac{1}{2}\nabla \times A, \\ &= -\frac{1}{2}\nabla \times (2\xi(\nabla \times u - 2\omega)), \\ &= -\xi\nabla \times (\nabla \times u) + 2\xi(\nabla \times \omega), \\ f_a &= -\xi\nabla(\nabla \cdot u) + \xi \triangle u + 2\xi(\mathrm{rot}(\omega)). \end{aligned}$$

Assim, fazendo a nova soma de forças, e considerando:

$$p^* = p + a + \frac{\mu_0}{2}\|H\|^2,$$

a equação de movimento para fluidos com movimento angular interno está dada por:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= f_p + f_g + f_v + f_m + f_a,\\
\rho\frac{Du}{Dt} &= -\nabla p^* + \rho g + \eta \triangle u + (\eta + \lambda)\nabla(\nabla \cdot u)\\
&\quad + \mu_0 M \cdot \nabla H - \xi\nabla(\nabla \cdot u) + \xi \triangle u + 2\xi(\mathrm{rot}(\omega)),
\end{aligned}$$

então, no caso de fluidos incompressíveis a equação torna-se:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\nabla p^* + \rho g + (\eta + \xi) \triangle u + \mu_0 M \cdot \nabla H + 2\xi(\mathrm{rot}(\omega)).$$

De acordo com (1.5.3), finalmente tem-se que a *equação de movimento para fluidos incompressíveis (com momentum angular interno)* está dada por:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p^* - (\eta + \xi) \triangle u &= \rho g + \mu_0 M \cdot \nabla H\\
&\quad + 2\xi(\mathrm{rot}(\omega)).
\end{aligned}$$

4 Modelo de Rosensweig.

4.1 Principais resultados.

Considerando o modelo para escoamento de um ferrofluido estacionario de *Rosensweig* para um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado e Lipschitz apresentado anteriormente:

$$
(\mathcal{P}) \begin{cases}
\operatorname{div}(u) = 0, \\
\rho(u \cdot \nabla)u - (\eta + \zeta) \triangle u + \nabla p \\
= \mu_0 (M \cdot \nabla)H + 2\zeta \operatorname{rot}(\omega) + L, \\
\rho k I (u \cdot \nabla)\omega - \eta' \triangle \omega - (\eta' + \lambda')\nabla \operatorname{div}(\omega) \\
= \mu_0 M \times H + 2\zeta(\operatorname{rot}(u) - 2\omega) + G, \\
(u \cdot \nabla)M - \sigma \triangle M + \frac{1}{\tau}(M - \mathcal{X}_0 H) = \omega \times M, \\
\operatorname{rot}(H) = 0, \qquad \operatorname{div}(H + M) = F, \\
u = 0, \qquad \omega = 0, \qquad M \cdot \mathbf{n} = 0, \\
\operatorname{rot}(M) \times \mathbf{n} = 0, \qquad H \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega.
\end{cases}
$$

Vamos dizer que (u, ω, M, H) é uma solução fraca do problema $(\mathcal{P})$ se $(u, \omega, M, H) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega)$ e são satisfeitas as seguintes condições:

i) A equação de momentum linear é satisfeita fracamente, ie, $\forall\, \Phi \in \mathbb{V}$:

$$
\begin{aligned}
&\rho\langle (u \cdot \nabla)u; \Phi\rangle + \eta(\nabla u; \nabla\Phi) + \zeta(\operatorname{rot}(u); \operatorname{rot}(\Phi)) \\
&\quad = \mu_0 \langle (M \cdot \nabla)H; \Phi\rangle + 2\zeta(\operatorname{rot}(\omega); \Phi) + (L; \Phi).
\end{aligned}
$$

ii) A equação de momentum angular é satisfeita fracamente; ie, $\forall\ \Psi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$:

$$\rho k\langle (u\cdot\nabla)\omega;\Psi\rangle + \eta'(\nabla\omega;\nabla\Psi) + (\eta'+\lambda')(\mathrm{div}(\omega);\mathrm{div}(\Psi))$$
$$= \mu_0(M\times H;\Psi) + 2\zeta(\mathrm{rot}(u)-2\omega;\Psi) + (G;\Psi).$$

iii) A equação de magnetização é satisfeita fracamente, ie, $\forall\ \Lambda \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$:

$$\langle (u\cdot\nabla)M;\Lambda\rangle + \sigma(\mathrm{rot}(M);\mathrm{rot}(\Lambda)) + \sigma(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(\Lambda)$$
$$+\frac{1}{\tau}(M-\mathcal{X}_0 H;\Lambda) = \omega\times M;\Lambda).$$

iv) A equação magnetostática é satisfeita fracamente, ie, $\forall\ v \in H^1_\sharp(\Omega)$:

$$(\nabla\varphi;\nabla v) + (M;\nabla v) = -(F;v).$$

Com $\langle\cdot\,;\cdot\rangle$ representando o produto dual de $\mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ e $\mathbb{L}^3(\Omega)$.
Para $M,H \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$, tem-se que $(M\cdot\nabla)H \in \mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. Pela imersão de Sobolev de $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^6(\Omega)$ e a desigualdade de Hölder tem-se que para $\Phi \in \mathcal{V}$:

$$\langle (M\cdot\nabla)H;\Phi\rangle = \int_\Omega (M\cdot\nabla)H\cdot\Phi dx.$$

Com argumentos similares podemos dar sentido aos termos $\langle (u\cdot\nabla)u;\Phi\rangle$, $\langle (u\cdot\nabla)\omega;\Psi\rangle$ e $\langle (u\cdot\nabla)M;\Lambda\rangle$.

No seguinte vamos considerar $C>0$ como uma constante genérica que depende unicamente de algumas constantes físicas e do domínio Ω. Na hora de escrever as normas ou produtos internos, vamos omitir o conjunto onde está definido pois vamos trabalhar sempre em um domínio fixo Ω.

Nosso objetivo está direcionado na existência de uma solução fraca para o problema $(\mathcal{P})$, para isso precisamos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Supomos que* $L, G \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *e* $F \in L^2_\sharp(\Omega)$*. Então o problema* $(\mathcal{P})$ *tem uma solução fraca* (u, ω, M, H) *satisfazendo as estimativas de energia:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta}{2}\|\nabla u\|^2 + \zeta\|rot(u) - 2\omega\|^2 + \frac{\eta'}{2}\|\nabla\omega\|^2 + (\lambda' + \eta')\|div(\omega)\|^2 \\
&+ \frac{\mu_0}{\tau}\left(\frac{1}{2} + \mathcal{X}_0\right)\|H\|^2 \leq C(\|F\|^2 + \|L\|^2 + \|G\|^2), \\
&\sigma\|rot(M)\|^2 + \sigma\|div(M)\|^2 + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 + \frac{\mathcal{X}_0}{2\tau}\|H\|^2 \leq C\|F\|^2, \\
&\|H\| \leq \|M\| + C\|F\|, \\
&\|H\|_{\mathbb{H}^1_t(\Omega)} \leq C(\|M\| + \|div(M)\| + \|F\|),
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

onde $C > 0$ *é uma constante dependendo unicamente do domínio* Ω *e algumas constantes físicas.*

5 Resultados Auxiliares

5.1 Estimativas de energia para o problema $(\mathcal{P})$.

Seja (u, ω, M, H) solução do problema $(\mathcal{P})$, pode-se verificar a seguinte identidade:

$$
\begin{aligned}
\zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2 &= \zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \mathrm{rot}(u) - 2\omega), \\
&= \zeta\|\mathrm{rot}(u)\|^2 - 2\zeta(\mathrm{rot}(u); \omega) \\
&\quad -2\zeta(\omega; \mathrm{rot}(u)) + 4\zeta(\omega; \omega), \\
\zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2 &= \zeta\|\mathrm{rot}(u)\|^2 - 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \omega) \\
&\quad -2\zeta(\mathrm{rot}(\omega); u). \qquad (5.1.1)
\end{aligned}
$$

Assumindo (u, ω, M, H) regular o suficiente, fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ na equação de momentum linear por u:

$$
\eta\|\nabla u\|^2 + \zeta\|\nabla u\|^2 = \mu_0((M \cdot \nabla)H; u) + 2\zeta(\mathrm{rot}(\omega); u) + (L; u), \quad (5.1.2)
$$

por outro lado,fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ na equação de momentum angular por ω:

$$
\begin{aligned}
\eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta' + \lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 = \mu_0(M \times H; \omega) + 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \omega) \\
+ (G; \omega).
\end{aligned}
\quad (5.1.3)
$$

Então, somando as equações (5.1.2), (5.1.3) e utilizando a identidade (5.1.1) chega-se à igualdade:

$$
\begin{aligned}
\eta\|\nabla u\|^2 + \eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta' + \lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2, \\
= \mu_0((M \cdot \nabla)H; u) + \mu_0(M \times H; \omega) + (L; u) + (G; \omega),
\end{aligned}
\quad (5.1.4)
$$

onde $\|\mathrm{rot}(u)\|^2 = \|\nabla u\|^2$. Agora, para M e H pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
\partial_k(M_i H_i) &= H_i \partial_k M_i + M_i \partial_k H_i, \\
&= H_i \partial_k M_i + M_i \partial_i H_k, \\
\partial_k(M_i H_i) - H_i \partial_k M_i &= M_i \partial_i H_k,
\end{aligned}
$$

com $\partial_k H_i = \partial_i H_k$ desde que $\mathrm{rot}(H) = 0$.
Logo, se considerar-se $(F_k) = (M \cdot \nabla)H$, com:

$$F_k = \partial_k(M_i H_i) - H_i \partial_k M_i,$$

tem-se:

$$(M \cdot \nabla)H = \nabla(M \cdot H) - (H \cdot \nabla u)$$

fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ na equação anterior por u, é fácil ver que $(\nabla M \cdot H) \cdot u = (u \cdot \nabla)M \cdot H$, logo integrando sobre Ω:

$$\int_\Omega (M \cdot \nabla)H \cdot u dx = \int_\Omega \nabla(M \cdot H)dx - \int_\Omega (u \cdot \nabla)M \cdot h dx,$$

para o primeiro termo da direita, de acordo à formula de Stokes (1.4.1) tem-se:

$$\int_\Omega \nabla(M \cdot H)dx = -\int_\Omega (M \cdot H)\mathrm{div}(u)dx + \langle u \cdot \mathbf{n}, (M \cdot H)\rangle_{\partial\Omega} = 0,$$

pelas condições de contorno $\mathrm{div}(u) = 0$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto:

$$\langle (M \cdot \nabla)H; u\rangle = -\langle (u \cdot \nabla)M; H\rangle. \tag{5.1.5}$$

Agora, fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ na equação de magnetização por H e utilizando a identidade (1.1.3) obtém-se:

$$\langle (u\cdot\nabla)M; H\rangle + \sigma(\mathrm{rot}^2(M) - \nabla\mathrm{div}(M); H) + \frac{1}{\tau}(M; H) - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(H; H) = (\omega \times M; H).$$

Logo, segundo a equação (5.1.5) vai-se escrever:

$$\begin{aligned}
\langle (M \cdot \nabla)H; u\rangle &= \sigma(\mathrm{rot}^2(M) - \nabla\mathrm{div}(M); H) + \frac{1}{\tau}(M; H) \\
&\quad - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 - (\omega \times M; H), \\
&= \sigma(\mathrm{rot}(M); \mathrm{rot}(H)) + \sigma(\mathrm{div}(M); \mathrm{div}(H)) \\
&\quad + \frac{1}{\tau}(M; H) - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 - (\omega \times M; H), \\
\langle (M \cdot \nabla)H; u\rangle &= \sigma(\mathrm{div}(M); \mathrm{div}(H)) + \frac{1}{\tau}(M; H) \\
&\quad - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 - (\omega \times M; H).
\end{aligned}$$

Da equação magnetostática segue:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(H)) &= (\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(H+M)-\mathrm{div}(M)),\\
&= (\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(H+M)) - \|\mathrm{div}(M)\|^2,\\
(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(H)) &= (\mathrm{div}(M);F) - \|\mathrm{div}(M)\|^2. \qquad (5.1.6)
\end{aligned}$$

Considerando que $H = \nabla\varphi$ e fazendo o produto interno L^2 de cada termo por φ:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}(H+M);\varphi) &= (F;\varphi),\\
-((M+H)\cdot\nabla\varphi) &= (F;\varphi),\\
-(M;H) - \|H\|^2 &= (F;\varphi),\\
(M;H) &= -\|H\|^2 - (F;\varphi). \qquad (5.1.7)
\end{aligned}$$

Então, utilizando as equações (5.1.4)-(5.1.7):

$$\begin{aligned}
&\eta\|\nabla u\|^2 + \eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|^2,\\
=&\mu_0\left(\sigma(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(H)) + \frac{1}{\tau}(M;H) - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 - (\omega\times M;H)\right)\\
&+\mu_0(M\times H;\omega) + (L;u) + (G;\omega),\\
=&\mu_0\left(\sigma(-\|\mathrm{div}(M)\|^2 + (\mathrm{div}(M);F)) + \frac{1}{\tau}(-\|H\|^2 - (F;\varphi))\right.\\
&\left.-\frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 - (\omega\times M;H)\right) + \mu_0(M\times H;\omega) + (L;u) + (G;\omega),
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
&\eta\|\nabla u\|^2 + \eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|^2\\
&+\frac{\mu_0}{\tau}(1+\mathcal{X}_0)\|H\|^2 + \mu_0\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2 = \mu_0\sigma(\mathrm{div}(M);F)\\
&-\frac{\mu_0}{\tau}(F;\varphi) + (L;u) + (G;\omega).
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e (1.4.2) pode-se estimar:

$$
\begin{aligned}
&\eta\|\nabla u\|^2+\eta'\|\nabla\omega\|^2+(\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2+\zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|^2\\
&+\frac{\mu_0}{\tau}(1+\mathcal{X}_0)\|H\|^2+\mu_0\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2\\
&\leq \mu_0\sigma\|\mathrm{div}(M)\|\|F\|+\frac{\mu_0}{\tau}\|F\|\|\varphi\|+\|L\|\|u\|+\|G\|\|\omega\|,\\
&\leq \mu_0\sigma\left(\frac{\|\mathrm{div}(M)\|^2}{2}+\frac{\|F\|^2}{2}\right)+\frac{\mu_0}{\tau}C\left(\frac{\|F\|^2}{2}+\frac{\|H\|^2}{2}\right)\\
&+\left(C\frac{\|L\|^2}{2\eta}+C\frac{\|\nabla u\|^2\eta}{2C}\right)+\left(\frac{\|G\|^2}{2\eta'}C+C\frac{\|\nabla\omega\|^2\eta'}{2C}\right),
\end{aligned}
$$

portanto:

$$
\begin{aligned}
&\eta\|\nabla u\|^2+\eta'\|\nabla\omega\|^2+(\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2+\zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|^2\\
&+\frac{\mu_0}{\tau}(1+\mathcal{X}_0)\|H\|^2+\mu_0\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2\leq C(\|F\|^2+\|L\|^2+\|G\|^2).
\end{aligned}
$$

Fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ de cada termo da equação de magnetização por M e utilizando (1.1.3) obtém-se:

$$\sigma\|\mathrm{rot}(M)\|^2+\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2+\frac{1}{\tau}\|M\|^2-\frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(H;M)=0.$$

Utilizando (5.1.7) e (1.4.2):

$$\sigma\|\mathrm{rot}(M)\|^2+\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2+\frac{1}{\tau}\|M\|^2+\frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2\leq\frac{\mathcal{X}_0}{\tau}C\left(\frac{\|F\|^2}{2}+\frac{\|H\|^2}{2}\right),$$

portanto:

$$\sigma\|\mathrm{rot}(M)\|^2+\sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2+\frac{1}{\tau}\|M\|^2+\frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2\leq C\|F\|^2.$$

Novamente de (5.1.7), utilizando (1.4.2) pode-se deduzir:

$$
\begin{aligned}
&\|H\|^2\leq\|M\|\|H\|+C\|\nabla\varphi\|\|F\|,\\
&\|H\|^2\leq(\|M\|+C\|F\|)\,\|H\|,\\
\therefore\quad &\|H\|\leq\|M\|+C\|F\|.
\end{aligned}
$$

Da equação magnetostática, utilizando (1.1.1) pode-se obter:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(M+H)&=F,\\
\mathrm{div}(\nabla\varphi)&=F-\mathrm{div}(M),\\
\triangle\varphi&=F-\mathrm{div}(M),\qquad \nabla\varphi\cdot\mathbf{n}=0\quad\text{em }\partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Com $\text{div}(M) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ (pois $M \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$) e, aplicando os resultados de regularidade para a equação elíptica de segunda ordem com condições de contorno de Neumann homogêneas (1.4.12), tem-se a estimativa:

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^2} \leq C\left(\|\varphi\|_{H^1_\sharp} + \|\text{div}(M)\| + \|F\|\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|H\|_{\mathbb{H}^1_t} &\approx \left(\|H\|^2 + \|\text{rot}(H)\|^2 + \|\text{div}(H)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1_\sharp} + \|F\| + \|\text{div}(M)\|\right), \\
&\leq \left(C(\|M\| + C\|F\|) + \|F\| + \|\text{div}(M)\|\right), \\
\|H\|_{\mathbb{H}^1_t} &\leq C\left(\|M\| + \|F\| + \|\text{div}(M)\|\right).
\end{aligned}$$

5.2 Problema ($\mathcal{P}^\varepsilon$)

Seja $\varepsilon > 0$ um parâmetro fixo pequeno. Introduzimos o seguinte problema com termo extra regularizante:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon)\begin{cases}
\text{div}(u) = 0, \\
\varepsilon^2 \triangle^2 u + \rho(u\cdot\nabla)u - (\eta+\zeta)\triangle u + \nabla p \\
= \mu_0(M\cdot\nabla)H + 2\zeta\text{rot}(\omega) + L, \\
\varepsilon^2 \triangle^2 \omega + \rho k I(u\cdot\nabla)\omega - \eta' \triangle \omega - (\eta'+\lambda')\nabla\text{div}(\omega) \\
= \mu_0 M \times H + 2\zeta(\text{rot}(u) - 2\omega) + G, \\
(u\cdot\nabla)M - \sigma\triangle M + \frac{1}{\tau}(M - \mathcal{X}_0 H) = \omega \times M, \\
\text{rot}(H) = 0, \quad \text{div}(H+M) = F, \\
u = 0, \quad \nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \omega = 0, \quad \nabla\omega\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \textit{em} \quad \partial\Omega, \\
M\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{rot}(M)\times\mathbf{n} = 0, \quad H\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \textit{em} \quad \partial\Omega.
\end{cases}$$

Assim como foram obtidas as estimativas de energia do problema $(\mathcal{P})$ podemos obter para o problema $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\| \triangle u\|^2 + \frac{\eta}{2}\|\nabla u\|^2 + \varepsilon^2\| \triangle \omega\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2 \\
&+ \frac{\eta'}{2}\|\nabla\omega\|^2 + (\lambda' + \eta')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 \\
&+ \frac{\mu_0}{\tau}\left(\frac{1}{2} + \mathcal{X}_0\right)\|H\|^2 + \frac{\mu_0\sigma}{2}\|\mathrm{div}(M)\|^2 \\
&\leq C(\|F\|^2 + \|L\|^2 + \|G\|^2),
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$$\sigma\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2 + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 + \frac{\mathcal{X}_0}{2\tau}\|H\|^2 \leq C\|F\|^2, \tag{5.2.2}$$

$$\|H\| \leq \|M\| + C\|F\|. \quad \|H\|_{\mathbb{H}^1_t(D)} \leq C(\|M\| + \|\mathrm{div}(M)\| + \|F\|). \tag{5.2.3}$$

Graças à regularização do sistema $(\mathcal{P})$ e as novas estimativas pode-se deduzir facilmente de (5.2.1) que $u \in \mathbb{V}$, $\varepsilon \triangle u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ e $\varepsilon \triangle \omega \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Utilizando a regularidade da equação de Laplace com condições de contorno de Dirichlet (Teorema 1.4.11) obtém-se que $u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ e $\omega \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ com a estimativa:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} + \|u\|^2_{\mathbb{V}} + \varepsilon^2\|\omega\|^2_{\mathbb{H}^2} + \|\omega\|^2_{\mathbb{H}^1_0} + \|H\|^2 \\
&\leq C(\|F\|^2 + \|L\|^2 + \|G\|^2).
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Onde a constante C não depende de ε.

5.3 Resolvendo o problema $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$

Teorema 5.3.1. *Assuma que $L, G \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $F \in L^2_{\sharp}(\Omega)$. Então o problema $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$ tem uma solução fraca $(u^{\varepsilon}, \omega^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}, H^{\varepsilon})$ com $u^{\varepsilon} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$, $\omega^{\varepsilon} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $M^{\varepsilon} \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$, $H^{\varepsilon} = \nabla\varphi^{\varepsilon} \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$ satisfazendo as desigualdades (5.2.1) - (5.2.4).*

5.3.1 Resolução da equação de magnetização.

Seja $(V, w^*) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ dado. Denote por (M, H) como o par solução do sistema linear:

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} (V \cdot \nabla)M - \sigma \triangle M + \frac{1}{\tau}(M - \mathcal{X}_0 H) = w^* \times M, \\ H = \nabla\varphi, \ \operatorname{div}(H + M) = F, \\ M \cdot \mathbf{n} = 0, \ \operatorname{rot}(M) \times \mathbf{n} = 0, \ H \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Claramente $(\mathcal{P}_1)$ é uma equação linearizada com respeito ao par (M, H) pois cada termo depende unicamente de M ou H e é linear. Agora, definindo o operador $T_1 : \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega)$ da forma:

$$T_1(V, w^*) = (M, H),$$

onde, como já tinha-se estabelecido, (M, H) é a solução do problema $(\mathcal{P}_1)$.
Definindo a forma bilinear A em $\Big(\mathbb{H}_t^1(\Omega) \times H_\sharp^1(\Omega)\Big) \times \Big(\mathbb{H}_t^1(\Omega) \times H_\sharp^1(\Omega)\Big)$ como:

$$\mathsf{A}((M, \varphi), (\Phi, \Psi)) = \mathsf{a}(M, \varphi, \Phi) + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\mathsf{b}(M, \varphi, \Psi),$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(M, \varphi, \Phi) &= \sigma(\operatorname{rot}(M); \operatorname{rot}(\Phi)) + \sigma(\operatorname{div}(M); \operatorname{div}(\Phi)) \\ &\quad \langle (V \cdot \nabla)M; \Phi\rangle + \frac{1}{\tau}(M; \Phi) - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(\nabla\varphi; \Phi) - (w^* \times M; \Phi), \\ \mathsf{b}(M, \varphi, \Psi) &= (\nabla\varphi; \nabla\Psi) + (M; \nabla\Psi). \end{aligned}$$

Agora, vamos denotar por $\mathcal{I}$ a forma bilinear definida em $\mathbb{H}_t^1(\Omega) \times H_\sharp^1(\Omega)$ por:

$$\mathcal{I}(\Phi, \Psi) = ((0, -F); (\Phi, \Psi)) = -(F; \Psi)$$

A ideia é achar um par (M, φ) tal que $\forall \ (\Phi, \Psi) \in \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times H_\sharp^1(\Omega)$ esse seja solução da equação variacional:

$$\mathsf{A}((M, \varphi), (\Phi, \Psi)) = \mathcal{I}(\Phi, \Psi) \tag{5.3.1}$$

Proposição 5.3.2. *O problema ($\mathcal{P}_1$) tem uma única solução fraca $(M, H) \in \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega)$. Ainda mais, existe uma constante $C > 0$*

(dependendo unicamente do domínio D e algumas constantes físicas), tal que:

1. $\sigma\|rot(M)\|^2 + \sigma\|div(M)\|^2 + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 + \frac{\mathcal{X}_0}{2\tau}\|H\|^2 \leq C\|F\|^2$.

2. $\|H\| \leq \|M\| + C\|F\|$.

3. $\|H\|_{\mathbb{H}^1_t} \leq C(\|M\| + \|div(M)\| + \|F\|)$.

4. $T_1(\mathbb{V} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega)) \subset B(0,R)$, *onde* $R = C\|F\|$ *e* $B(0,R)$ *é uma bola em* $\mathbb{H}^1_t(\Omega) \times \mathbb{H}^1_t(\Omega)$

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar que $(\mathcal{P}_1)$ possui uma solução fraca, logo, a partir dos resultados encontrados podemos obter as estimativas.

- Seja $(M,\Phi) \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times \mathbb{H}^1_t(\Omega)$, utilizando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^4(\Omega)$ pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
|\langle (V\cdot\nabla)M;\Phi\rangle| &\leq \|V\|_4\|\nabla M\|\|\Phi\|_4 \\
&\leq C\|V\|_{\mathbb{V}}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t}, \\
\|w^* \times M\| &\leq \|w^*\|_4\|M\|_4, \\
&\leq C\|w^*\|_{\mathbb{H}^1_0}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}.
\end{aligned} \tag{5.3.2}
$$

Então, para $(\varphi,\psi) \in H^1_\sharp(\Omega) \times H^1_\sharp(\Omega)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{a}(M,\varphi,\Phi)| \leq{}& \sigma|(\mathrm{rot}(M);\mathrm{rot}(\Phi))| + \sigma|(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(\Phi))| \\
& |\langle (V\cdot\nabla)M;\Phi\rangle| + \frac{1}{\tau}|(M;\Phi)| + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}|(\nabla\varphi;\Phi)| \\
& + |(w^* \times M;\Phi)|.
\end{aligned}
$$

Segundo as equações em (5.3.2) tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{a}(M,\varphi,\Phi)| \leq{}& \sigma\|\mathrm{rot}(M)\|\|\mathrm{rot}(\Phi)\| + \sigma\|\mathrm{div}(M)\|\|\mathrm{div}(\Phi)\| \\
& + C\|V\|_{\mathbb{V}}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + \frac{1}{\tau}\|M\|\|\Phi\| \\
& + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|\nabla\varphi\|\|\Phi\| + C\|w^*\|_{\mathbb{H}^1_0}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|.
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{a}(M,\varphi,\Phi)| \leq{}& \sigma\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + \sigma\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} \\
&+ C\|V\|_{\mathbb{V}}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + \frac{1}{\tau}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} \\
&+ \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + C\|w^*\|_{\mathbb{H}^1_0}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|, \\
|\mathsf{a}(M,\varphi,\Phi)| \leq{}& C(V,w^*)\left(\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para qualquer $(\varphi,\Psi) \in H^1_\sharp(\Omega) \times H^1_\sharp(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{b}(M,\varphi,\Psi)| \leq{}& |(\nabla\varphi;\nabla\Psi)| + |(M;\nabla\Psi)|, \\
\leq{}& \|\nabla\varphi\|\|\nabla\Psi\| + \|M\|\|\nabla\Psi\|, \\
\leq{}& C\left(\|\varphi\|_{H^1_\sharp} + \|M\|\right)\|\nabla\Psi\|, \\
|\mathsf{b}(M,\varphi,\Psi)| \leq{}& C\left(\|\varphi\|_{H^1_\sharp} + \|M\|\right)\|\Psi\|_{H^1_\sharp}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, com esses resultados para a forma bilinear A tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{A}((M,\varphi),(\Phi,\Psi))| \leq{}& C(V,w^*)\left(\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^1_t} + \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\Phi\|\right) \\
&+ \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}C\left(\|\varphi\|_{H^1_\sharp} + \|M\|\right)\|\Psi\|_{H^1_\sharp}, \\
|\mathsf{A}((M,\varphi),(\Phi,\Psi))| \leq{}& C(V,w^*)\|(M,\varphi)\|_{\mathbb{H}^1_t\times H^1_\sharp}\|(\Phi,\Psi)\|_{\mathbb{H}^1_t\times H^1_\sharp}.
\end{aligned}
$$

Assim tem-se que A é contínua.

Por outro lado, $\forall\ (M,\varphi) \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times H^1_\sharp(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}((M,\varphi),(M,\varphi)) &= \mathsf{a}(M,\varphi,M) + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\mathsf{b}(M,\varphi,\varphi),\\
&= \sigma(\mathrm{rot}(M);\mathrm{rot}(M)) + \sigma(\mathrm{div}(M);\mathrm{div}(M))\\
&+ \langle (V\cdot\nabla)M;M\rangle + \frac{1}{\tau}(M;M) - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(\nabla\varphi;M)\\
&- (w^*\times M;M) + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\left((\nabla\varphi;\nabla\varphi) + (M;\nabla\varphi)\right),\\
&= \sigma\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \sigma\|\mathrm{div}(M)\|^2\\
&+ \frac{1}{\tau}\|M\|^2 + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|\nabla\varphi\|^2,\\
&\geq min(\sigma,\frac{1}{\tau})\left(\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \|\mathrm{div}(M)\|^2 + \|M\|^2\right)\\
&+ \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|\nabla\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando a equivalência de normas e a desigualdade (1.4.2) de Poincaré-Wirtinger obtém-se:

$$\mathsf{A}((M,\varphi),(M,\varphi)) \geq C\|(M,\varphi)\|^2_{\mathbb{H}^1_t\times H^1_\sharp}, \tag{5.3.3}$$

com $C>0$ constante. Então A é coerciva e assim, aplicando o Teorema de Lax-Milgram (1.2.1), tem-se que existe uma única solução para (5.3.1), ou seja, o problema $(\mathcal{P}_1)$ possui uma única solução fraca $(M,\varphi) \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times H^1_\sharp(\Omega)$.

- Considerando a equação (5.1.7) das estimativas, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré-Wirtinger, pode-se obter:

$$\begin{aligned}
\|H\|^2 &\leq |(M;H)| + |(F;\varphi)|,\\
&\leq\ \|M\|\|H\| + C\|F\|\|\varphi\|,\\
\|H\|^2 &\leq\ \|M\|\|H\| + \|F\|\|\nabla\varphi\|,
\end{aligned}$$

recordando que $H = \nabla\varphi \in \mathbb{H}^1_t(\Omega)$ e para $\|H\|>0$ tem-se:

$$\|H\| \leq \|M\| + C\|F\|.$$

Para $\varphi \in H^1_\sharp(\Omega)$ tem-se:

$$\|\varphi\|^2_{H^1_\sharp} = \|\varphi\|^2 + \|\nabla\varphi\|^2,$$

então, utilizando a desigualdade (1.4.2):

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{H^1_\sharp} &\leq \ \|\varphi\| + \|\nabla\varphi\| \leq \ (C+1)\|\nabla\varphi\|, \\
\|\varphi\|_{H^1_\sharp} &\leq \ (C+1)(\|M\| + C\|F\|).
\end{aligned}$$

Logo, considerando a estimativa:

$$\|H\|_{\mathbb{H}^1_t} = \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{H}^1_t} \leq C(\|\varphi\|_{H^1_\sharp} + \|\mathrm{div}(M)\| + \|F\|),$$

obtém-se:

$$\|H\|_{\mathbb{H}^1_t} \leq C(\|M\| + \|\mathrm{div}(M)\| + \|F\|).$$

Para $(M,\varphi) \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times H^1_\sharp(\Omega)$, de acordo com (5.3.1) e segundo a definição de $\mathcal{I}$:

$$\mathsf{A}((M,\varphi);(M,\varphi)) = -(F;\varphi).$$

Utilizando (5.3.3) e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e (1.4.2):

$$C\|(M,\varphi)\|^2_{\mathbb{H}^1_t \times H^1_\sharp} \leq \|F\|^2\|\varphi\|^2 \leq \ C\|F\|^2\|\nabla\varphi\|^2,$$

portanto:

$$\|(M,\varphi)\|^2_{\mathbb{H}^1_t \times H^1_\sharp} \leq C\|F\|^2.$$

o que mostra que $T_1(V,w^*) \subset B(0,R), \ \forall\,(V,w^*) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

□

Proposição 5.3.3. *A função T_1 é Lipschitz contínua. Mais especificamente, existe $C > 0$ constante, dependendo unicamente do domínio Ω e algumas constantes físicas, tal que:*

$$\|T_1(V_1,w_1^*) - T_1(V_2,w_2^*)\|_{\mathbb{H}^1_t \times \mathbb{H}^1_t} \leq C\|F\|\|(V_1,w_1^*) - (V_2,w_2^*)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_0},$$
$$\forall\,(V_1,w_1^*),(V_2,w_2^*) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Demonstração. Seja $(V_i, w_i^*) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e (M_i, H_i) a solução associada para o problema $(\mathcal{P}_1)$, tal que:

$$T_1(V_i, w_i) = (M_i, H_i), \quad i = 1, 2.$$

E defina:

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2, \\ w &= w_1^* - w_2^*. \\ M &= M_1 - M_2, \\ H &= H_1 - H_2, \end{aligned}$$

então tem-se que (M,H) satisfaz a equação:

$$\begin{aligned} &(V_1 \cdot \nabla)M + \sigma(\mathrm{rot}^2(M) - \nabla(\mathrm{div}(M)) + \frac{1}{\tau}(M - \mathcal{X}_0 H) \\ &-w_2^* \times M = -V \cdot \nabla M_2 + w^* \times M_1, \\ &\mathrm{div}(H + M) = 0, \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

e as condições de contorno:

$$M \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathrm{rot}(M) \times \mathbf{n} = 0, \quad H \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Agora, fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ em (5.3.4) por M:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (V_1 \cdot \nabla)M \cdot M dx + \sigma \int_\Omega \mathrm{rot}^2(M) \cdot M dx - \sigma \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(M) \cdot M dx \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_\Omega (M - \mathcal{X}_0 H) \cdot M dx - \int_\Omega w_2^* \times M \cdot M dx \\ &= - \int_\Omega V \cdot \nabla M_2 \cdot M dx + \int_\Omega w^* \times M_1 \cdot M dx \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Stokes (1.4.1) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathrm{rot}^2(M) \cdot M dx &= \int_\Omega \mathrm{rot}(M) \cdot \mathrm{rot}(M) dx + \langle \mathrm{rot}(M) \times \mathbf{n}; M \rangle_{\partial\Omega}, \\ &= \|\mathrm{rot}(M)\|^2, \\ \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(M) \cdot M dx &= - \int_\Omega \mathrm{div}(M) \cdot \mathrm{div}(M) dx + \langle M \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial\Omega}, \\ &= -\|\mathrm{div}(M)\|^2. \end{aligned}$$

E por outro lado é claro que tem termos nulos, logo:

$$\begin{aligned} &\sigma(\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \|\mathrm{div}(M)\|^2) + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(H;M) \\ &= -\langle (V\cdot\nabla)M_2; M\rangle + (w^* \times M_1; M) \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Por outro lado, fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ na segunda equação de (5.3.4) por $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $H = \nabla\varphi$:

$$\int_\Omega \mathrm{div}(H+M)\varphi dx = 0 \Longleftrightarrow \int_\Omega \mathrm{div}(H)\varphi dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(M)\varphi dx.$$

Utilizando a fórmula de Stokes (1.4.1) em ambos lados, similar ao caso anterior, obtém-se:

$$\|H\|^2 = -(H;M). \tag{5.3.6}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, como antes, tem-se:

$$\begin{aligned} &|\langle (V\cdot\nabla)M_2; M\rangle| \le \|V\|_4\|\nabla M_2\|\|M\|_4 \le C\|V\|_{\mathbb{V}}\|M_2\|_{\mathbb{H}^1_t}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}, \\ &|(w^*\times M_1; M)| \le \|w^*\|_3\|M_1\|_3\|M\|_3 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young (1.1.1), para qualquer $\alpha > 0$:

$$C\|V\|_{\mathbb{V}}\|M_2\|_{\mathbb{H}^1_t}\|M\|_{\mathbb{H}^1_t} \le \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + C(\alpha)\|V\|^2_{\mathbb{V}}\|M_2\|^2_{\mathbb{H}^1_t}, \tag{5.3.7}$$

$$\|w\|_3\|M_1\|_3\|M\|_3 \le \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + C(\alpha)\|w\|^2_{\mathbb{H}^1_0}\|M_1\|^2_{\mathbb{H}^1_t}. \tag{5.3.8}$$

Então, segundo as equações (5.3.6)-(5.3.7), de (5.3.5) pode-se obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} &|\sigma(\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \|\mathrm{div}(M)\|^2) + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(H;M)| \le \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} \\ &+ C(\alpha)\|V\|^2_{\mathbb{V}}\|M_2\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + C(\alpha)\|w^*\|^2_{\mathbb{H}^1_0}\|M_1\|^2_{\mathbb{H}^1_t} \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição (5.3.2) para M_1 e M_2:

$$\begin{aligned} &|\sigma(\|\mathrm{rot}(M)\|^2 + \|\mathrm{div}(M)\|^2) + \frac{1}{\tau}\|M\|^2 - \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}(H;M)| \le \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} \\ &\qquad + C(\alpha)\|V\|^2_{\mathbb{V}}\|F\|^2 + \alpha\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + C(\alpha)\|w^*\|^2_{\mathbb{H}^1_0}\|F\|^2, \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha > 0$ pequeno a suficiente deduz-se as desigualdades:

$$C\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \frac{\mathcal{X}_0}{\tau}\|H\|^2 \leq C\|F\|^2\left(\|V\|^2_{\mathbb{V}} + \|w^*\|^2_{\mathbb{H}^1_0}\right),$$
$$\|H\|^2_{\mathbb{H}^1_t} \leq C\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t} \leq C\|F\|^2\left(\|V\|^2_{\mathbb{V}} + \|w^*\|^2_{\mathbb{H}^1_0}\right).$$

□

5.3.2 Sistema linearizado para (u, ω)

Seja $(M, H) \in \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times \mathbb{H}^1_t(\Omega)$ a solução ao problema $(\mathcal{P}_1)$ associada a $(V, w^*) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ obtida pela função T_1.
Defina-se (u, ω) como a solução ao problema linear:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon_2)\begin{cases} \operatorname{div}(u) = 0, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 u + \rho(V\cdot\nabla)u - (\eta+\zeta)\triangle u - 2\zeta\operatorname{rot}(\omega) + \nabla p \\ = \mu_0(M\cdot\nabla)H + L, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 \omega + \rho k I(V\cdot\nabla)\omega - \eta' \triangle \omega - (\eta'+\lambda')\nabla\operatorname{div}(\omega) \\ -2\zeta(\operatorname{rot}(u) - 2\omega) = \mu_0 M\times H + G, \\ u = 0, \quad \nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \omega = 0, \quad \nabla\omega\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Similar ao sistema $(\mathcal{P}_1)$, é claro que $(\mathcal{P}^\varepsilon_2)$ corresponde a um sistema linearizado com respeito a (U, ω).

Define-se o operador $T_2 : \mathbb{H}^1_t(\Omega) \times \mathbb{H}^1_t(\Omega) \to \left(\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{V}\right) \times \left(\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{H}^1_0(\Omega)\right)$ da forma:

$$T_2(M, H) = (u, \omega),$$

onde (u, ω) é solução do problema $(\mathcal{P}^\varepsilon_2)$ para (M,H) dados. Denote T como o operador composto dado por $T = T_2 \circ T_1$.
Sejam:

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{V} \ / \ \varepsilon \triangle u \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$
$$\mathcal{W} = \{\omega \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \ / \ \varepsilon \triangle \omega \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

espaços de Hilbert munidos com a norma usual. Define-se $\mathcal{E} = \mathcal{U} \times \mathcal{W}$. Logo a imersão contínua $\mathcal{E} \subset \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathcal{E}'$ é satisfeita.
Define-se a forma bilinear B em $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ da forma:

$$\begin{aligned}\mathsf{B}((u,\omega),(\Phi,\Psi)) = {} & \varepsilon^2(\triangle u; \triangle\Phi) + \eta(\nabla u; \nabla\Phi) + \zeta(\mathrm{rot}(u); \mathrm{rot}(\Phi)) \\ & - 2\zeta(\mathrm{rot}(\omega); \Phi) + \rho\langle (V\cdot\nabla)u; \Phi\rangle \\ & + \varepsilon^2(\triangle\omega; \triangle\Psi) + \eta'(\nabla\omega; \nabla\Psi) + (\eta' + \lambda')(\mathrm{div}(\omega); \mathrm{div}(\Psi)) \\ & - 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \Psi) + \rho k\langle (V\cdot\nabla)\omega; \Psi\rangle,\end{aligned}$$

e seja a forma linear $\mathcal{J}$ definida em $\mathcal{E}$ da forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\Phi,\Psi) = {} & \mu_0\langle (M\cdot\nabla)H; \Phi\rangle + (L;\Phi) \\ & + \mu_0(M\times H; \Psi) + (G;\Psi).\end{aligned}$$

Logo, a forma variacional para o problema ($\mathcal{P}_2^\varepsilon$) está dada por:

$$\mathsf{B}((u,\omega),(\Phi,\Psi)) = \mathcal{J}(\Phi,\Psi), \quad \forall (\Phi,\Psi) \in \mathcal{E}. \tag{5.3.9}$$

Proposição 5.3.4. *Assuma que $L, G \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $F \in L_\sharp^2(\Omega)$. Então o problema ($\mathcal{P}_2^\varepsilon$) admite uma única solução $(u,\omega) \in (\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}) \times (\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ satisfazendo a estimativa:*

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\|\triangle u\|^2 + \eta\|\nabla u\|^2 + \varepsilon^2\|\triangle\omega\|^2 + \eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta' + \lambda')\|div(\omega)\|^2 \\ + \zeta\|rot(u) - 2\omega\|^2 \le C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)^2,\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

onde $C > 0$ é uma constante dependendo unicamente do domínio Ω e alguns parâmetros físicos.

Demonstração. Para $(u,\omega) \in \mathcal{E}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\mathsf{B}((u,\omega),(u,\omega)) = {} & \varepsilon^2\|\triangle u\|^2 + \eta\|\nabla u\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u)\|^2 \\ & - 2\zeta(\mathrm{rot}(\omega); u) + \rho\langle (V\cdot\nabla)u; u\rangle + \varepsilon^2\|\triangle\omega\|^2 \\ & + \eta'\|\nabla\omega\|^2 + (\eta' + \lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 \\ & - 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \omega) + \rho k\langle (V\cdot\nabla)\omega; \omega\rangle.\end{aligned}$$

Considerando (1.1.2) e (5.1.1) tem-se:

$$\begin{aligned}\mathsf{B}((u,\omega),(u,\omega)) &= \varepsilon^2\|\triangle u\|^2+\eta\|\nabla u\|^2+\varepsilon^2\|\triangle\omega\|^2+\eta'\|\nabla\omega\|^2\\ &\quad+(\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2+\zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|^2\\ \mathsf{B}((u,\omega),(u,\omega)) &\geq C(\|u\|^2_{\mathbb{V}}+\|\omega\|^2_{\mathcal{W}})=C\|(u,\omega)\|^2_{\mathcal{E}}. \qquad (5.3.11)\end{aligned}$$

Agora, para $(u,\omega),(\Phi,\Psi)\in\mathcal{E}$, utilizando a desigualdade de Hölder tem-se:

$$\begin{aligned}|\mathsf{B}((u,\omega),(\Phi,\Psi))| \leq{}& \varepsilon^2\|\triangle u\|\|\triangle\Phi\|+\eta\|\nabla u\|\|\nabla\Phi\|\\ &+\zeta\|\mathrm{rot}(u)\|\|\mathrm{rot}(\Phi)\|+2\zeta\|\mathrm{rot}(\omega)\|\|\Phi\|\\ &+\rho\|V\|_4\|\nabla u\|\|\Phi\|_4+\varepsilon^2\|\triangle\omega\|\|\triangle\Psi\|\\ &+\eta'\|\nabla\omega\|\|\nabla\Psi\|+(\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|\|\mathrm{div}(\Psi)\|\\ &+2\zeta\|\mathrm{rot}(u)-2\omega\|\|\Psi\|+\rho k\|V\|_4\|\nabla\omega\|\|\Psi\|_4.\end{aligned}$$

Considerando a imersão de Sobolev $\mathbb{H}^1(\Omega)\hookrightarrow\mathbb{L}^4(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned}|\mathsf{B}((u,\omega),(\Phi,\Psi))| &\leq \varepsilon^2\|\triangle u\|\|\triangle\Phi\|+\eta\|\nabla u\|\|\nabla\Phi\|\\ &\quad+\zeta\|\mathrm{rot}(u)\|\|\mathrm{rot}(\Phi)\|+2\zeta\|\mathrm{rot}(\omega)\|\|\Phi\|\\ &\quad+C\rho\|V\|_{\mathbb{V}}\|\nabla u\|\|\Phi\|_{\mathbb{V}}+\varepsilon^2\|\triangle\omega\|\|\triangle\Psi\|\\ &\quad+\eta'\|\nabla\omega\|\|\nabla\Psi\|+(\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|\|\mathrm{div}(\Psi)\|\\ &\quad+2\zeta\|\mathrm{rot}(u)\|\|\Psi\|+4\zeta\|\omega\|\|\Psi\|\\ &\quad+C\rho k\|V\|_{\mathbb{V}}\|\nabla\omega\|\|\Psi\|_{\mathbb{V}},\\ &\leq C(V)(\|u\|_{\mathcal{U}}+\|\omega\|_{\mathcal{W}})(\|\Phi\|_{\mathcal{U}}+\|\Psi\|_{\mathcal{W}}),\\ \therefore\ |\mathsf{B}((u,\omega),(\Phi,\Psi))| &\leq C(V)\|(u,\omega)\|_{\mathcal{E}}\|(\Phi,\Psi)\|_{\mathcal{E}}. \qquad (5.3.12)\end{aligned}$$

De forma similar, seja $(\Phi,\Psi)\in\mathcal{E}$, para $\mathcal{J}$ tem-se:

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}(\Phi,\Psi)| &\leq \mu_0|\langle(M\cdot\nabla)H;\Phi\rangle|+|(L;\Phi)|+\mu_0|(M\times H;\Psi)|+|(G;\Psi)|,\\ &\leq \mu_0\|M\|_4\|\nabla H\|\|\Phi\|_4+\|L\|\|\Phi\|+\mu_0\|M\|_4\|H\|\|\Psi\|_4\\ &\quad+\|G\|\|\Psi\|,\\ |\mathcal{J}(\Phi,\Psi)| &\leq C(\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|\nabla H\|\|\Phi\|_{\mathcal{U}}+\|M\|_{\mathbb{H}^1_t}\|H\|\|\Psi\|)\\ &\quad+\|L\|\|\Phi\|+\|G\|\|\Psi\|.\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição (5.3.2):

$$|\mathcal{J}(\Phi, \Psi)| \leq C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)\|(\Phi, \Psi)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1}. \tag{5.3.13}$$

Sendo B uma forma bilinear contínua e coerciva (segundo as equações (5.3.12) e (5.3.11)), pode-se aplicar o teorema de Lax-Milgram (1.2.1) e assim tem-se que existe única $(u, \omega) \in \mathcal{E}$ tal que seja solução da equação variacional (5.3.9) e assim satisfaz:

$$\|(u, \omega)\|_{\mathcal{E}} \leq C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|). \tag{5.3.14}$$

Finalmente, considerando o caso $\mathsf{B}((u, \omega), (u, \omega)) = \mathcal{J}(u, \Psi)$, da coercividade (5.3.11), aplicando (5.3.13) e (5.3.14) obtém-se diretamente a desigualdade (5.3.10). □

5.3.3 Continuidade e compacidade do operador T.

Proposição 5.3.5. *O operador T é Lipschitz contínuo. Existe uma constante $C > 0$, dependendo unicamente do domínio Ω e algumas constantes físicas, tal que:*

1. $\|T(V_1, w_1) - T(V_2, w_2)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1} \leq C\|F\|\|(V_1, w_1) - (V_2, w_2)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1}$
2. $T\left(B_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)}(0, R)\right) \subset B(0, R)$.
3. $T(B(0, R))$ *está compactamente imerso em* $\mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *onde* $R = C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)$ *e* $B(0, R)$ *é a bola em* $\mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. 1. Sejam (M_i, H_i) a solução para o problema $(\mathcal{P}_1)$, associada a (V_i, w_i^*) e (u_i, ω_i) a solução para o problema $(\mathcal{P}_2^{\varepsilon})$ associada a (M_i, H_i), com $i = 1, 2$. Define-se:

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2, & w^* &= w_1^* - w_2^*, \\
M &= M_1 - M_2, & H &= H_1 - H_2, \\
u &= u_1 - u_2, & \omega &= \omega_1 - \omega_2, \\
p &= p_1 - p_2.
\end{aligned}$$

De acordo com isso tem-se que (u,ω) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u) = 0, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 u + \rho(V_1 \cdot \nabla)u - (\eta + \zeta) \triangle u - 2\zeta \operatorname{rot}(\omega) + \nabla p \\ = \mu_0 (M_1 \cdot \nabla)H + \mu_0 (M \cdot \nabla) H_2 - \rho(V \cdot \nabla) u_2, \\ \varepsilon^2 \triangle^2 \omega + \rho k (V_1 \cdot \nabla)\omega - \eta' \triangle \omega - (\eta' + \lambda')\nabla \operatorname{div}(\omega) \\ +2\zeta(\operatorname{rot}(u) - 2\omega) = \mu_0 M_1 \times H + \mu_0 M \cdot H_2 - \rho k I (V \cdot \nabla)\omega_2, \\ u = 0, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \omega = 0, \quad \nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3.15}$$

Fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ de cada termo da segunda igualdade por u e considerando (1.1.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 (\triangle^2 u; u) - (\eta + \zeta)(\triangle u; u) - 2\zeta(\operatorname{rot}(\omega); u) + (\nabla p; u) \\ &= \mu_0 \langle (M_1 \cdot \nabla) H; u\rangle + \mu_0 \langle (M \cdot \nabla) H_2; u\rangle - \rho(V \cdot \nabla) u_2; u\rangle, \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Utilizando a fórmula de Green, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (\triangle^2 u; u) &= \int_\Omega \triangle u \cdot \triangle u dx = \| \triangle u\|^2, \\ (\triangle u; u) &= -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx + \langle (\nabla u \cdot \mathbf{n}; u\rangle_{\partial\Omega} = -\|\nabla u\|^2, \\ (\nabla p; u) &= -\int_\Omega p \operatorname{div}(u) dx + \langle u \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdades de Hölder, Young, (1.4.2) e as proposições (5.3.2), (5.3.3) e (5.3.4), $\forall\ \alpha > 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mu_0|\langle (M_1 \cdot \nabla)H; u\rangle| &\leq \mu_0 \|M_1\|_4 \|\nabla H\| \|u\|_4,\\
&\leq C(\alpha)\|M_1\|^2_{\mathbb{H}^1_t}\|H\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}},\\
\mu_0|\langle (M_1 \cdot \nabla)H; u\rangle| &\leq C(\alpha)\|F\|^4\|(V, w^*)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_0} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0|\langle (M \cdot \nabla)H_2; u\rangle| &\leq \mu_0 \|M\|_4 \|\nabla H_2\| \|u\|_4,\\
&\leq C(\alpha)\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t}\|H_2\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}},\\
\mu_0|\langle (M \cdot \nabla)H_2; u\rangle| &\leq C(\alpha)\|F\|^4\|(V, w^*)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_0} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle (V \cdot \nabla)u_2; u\rangle| &\leq \rho\|V\|_{\mathbb{V}}\|\nabla u_2\|\|u\|_{\mathbb{V}},\\
&\leq C\|u_2\|_{\mathbb{V}}\|V\|_{\mathbb{V}}\|u\|_{\mathbb{V}},\\
&\leq C(\alpha)\|u_2\|^2_{\mathbb{V}}\|V\|^2_{\mathbb{V}} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}},\\
|\langle (V \cdot \nabla)u_2; u\rangle| &\leq C(\alpha)(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)^2\|V\|^2_{\mathbb{V}} + \alpha\|u\|^2_{\mathbb{V}}.
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Agora, fazendo o produto interno $L^2(\Omega)$ em cada termo da terceira equação de (5.3.15) por ω e considerando (1.1.2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2(\triangle^2\omega; \omega) - \eta'(\triangle\omega; \omega) - (\eta' + \lambda')(\nabla \mathrm{div}(\omega); \omega)\\
&\quad + 2\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega; \omega) = \mu_0(M_1 \times H; \omega)\\
&\quad + \mu_0\langle (M \cdot \nabla)H_2; \omega\rangle - \rho k I\langle (V \cdot \nabla)\omega_2; \omega\rangle,
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Similarmente como feito anteriormente, utilizando a fórmula de Green, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
(\triangle^2\omega; \omega) &= \| \triangle\omega\|^2,\\
(\triangle\omega; \omega) &= -\ \|\nabla\omega\|^2,\\
(\nabla \mathrm{div}(\omega); \omega) &= -\ \|\mathrm{div}(\omega)\|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, análogo ao caso anterior, $\forall\ \alpha > 0$ pode-se estimar:

$$
\begin{aligned}
\mu_0|(M_1 \times H;\omega)| &\leq \mu_0\|M_1\|_4\|H\|_4\|\omega\|_2,\\
&\leq C(\alpha)\|M_1\|^2_{\mathbb{H}^1_t}\|H\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{H}^1_0},\\
\mu_0|(M_1 \times H;\omega)| &\leq C(\alpha)\|F\|^2\|(V,w^*)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{H}^1_0},\\
\mu_0|\langle(M\cdot\nabla)H_2;\omega\rangle| &\leq \mu_0\|M\|_4\|\nabla H_2\|\|\omega\|_4,\\
&\leq C(\alpha)\|M\|^2_{\mathbb{H}^1_t}\|H\|^2_{\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{H}^1_t}),\\
\mu_0|\langle(M\cdot\nabla)H_2;\omega\rangle| &\leq C(\alpha)\|F\|^2\|(V,w^*)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_t} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{H}^1_0},\\
\rho k|\langle(V\cdot\nabla)\omega_2;\omega\rangle| &\leq \rho k\|V\|_{\mathbb{V}}\|\nabla\omega_2\|\|\omega\|_{\mathbb{V}},\\
&\leq C\|V\|_{\mathbb{V}}\|\omega_2\|_{\mathbb{V}}\|\omega\|_{\mathbb{V}},\\
&\leq C(\alpha)\|V\|^2_{\mathbb{V}}\|\omega_2\|^2_{\mathbb{V}} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{V}},\\
\rho k|\langle(V\cdot\nabla)\omega_2;\omega\rangle| &\leq C(\alpha)(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)^2\|V\|^2_{\mathbb{V}} + \alpha\|\omega\|^2_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}
\tag{5.3.19}
$$

Agora, somando (5.3.16) e (5.3.18), considerando (5.1.1), pode-se estimar:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\|\triangle u\|^2 + (\eta+\zeta)\|\nabla u\|^2 + \varepsilon^2\|\triangle\omega\|^2 + \eta'\|\nabla\omega\|^2\\
&+ (\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 - \zeta\|\mathrm{rot}(u)\|^2 + 4\zeta(\mathrm{rot}(u) - 2\omega;\omega)\\
&+ \zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2\\
&\leq \mu_0|\langle(M_1\cdot\nabla)H;u\rangle| + \mu_0|\langle(M\cdot\nabla)H_2;u\rangle| + \rho|\langle(V\cdot\nabla)u_2;u\rangle|\\
&+ \mu_0|(M_1\times H;\omega)| + \mu_0|\langle(M\cdot\nabla)H_2;\omega\rangle| + \rho k|\langle(V\cdot\nabla)\omega_2;\omega\rangle|,
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdades de Cauchy-Schwarz, (1.4.2), segundo (5.3.17) e (5.3.19) para α pequeno o suficiente tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\|\triangle u\|^2 + \frac{\eta}{2}\|\nabla u\|^2 + \varepsilon^2\|\triangle\omega\|^2 + \frac{\eta'}{2}\|\nabla\omega\|^2\\
&+ (\eta'+\lambda')\|\mathrm{div}(\omega)\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u) - 2\omega\|^2\\
&\leq C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)^2\|(V,w^*)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}^1_0}
\end{aligned}
$$

O que mostra que T é Lipschitz contínua.

2. Como $R = C\left(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|\right)^2$ e em particular $C = C(\alpha)$, escolhendo α pequeno tal que $R < 1$, se $\|(V, w^*)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1} < R$, de acordo à desigualdade acima tem-se:

$$\|(u,\omega)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1} < R^4 < R$$

Logo, $T\left(B_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)}(0,R)\right) \subset B(0,R)$.

3. Considere a sequência $(V_n, w_n^*) \subset B(0,R)$, logo para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que (M_n, H_n) é solução fraca do problema $(\mathcal{P}_1)$ associada a (V_n, w_n^*), e (U_n, ω_n) é solução fraca do problema $(\mathcal{P}_2^\varepsilon)$ associada a (M_n, H_n), logo para cada n tem-se:

$$T(V_n, w_n^*) = (U_n, \omega_n).$$

Como (U_n, ω_n) é solução de $(\mathcal{P}_2^\varepsilon)$, para cada n, segundo (5.3.10) tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\|\triangle u_n\|^2 + \eta\|\nabla u_n\|^2 + \varepsilon^2\|\triangle \omega_n\|^2 + \eta'\|\nabla\omega_n\|^2 \\ +(\eta' + \lambda')\|\mathrm{div}(\omega_n)\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u_n) - 2\omega_n\|^2 \\ \le C(\|F\|^2 + \|L\| + \|G\|)^2,\end{aligned}$$

logo é claro que (u_n) é limitado em $\mathbb{V}$ e $(\varepsilon\nabla u_n)$ é limitada em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, assim pela regularidade do problema, $\varepsilon\nabla u_n \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $u_n \in \mathbb{V}$, portanto (u_n) é limitada em $\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{V}$. De forma similar pode-se deduzir que (ω_n) é limitada em $\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.
Logo, existem subsequências tal que:

$$T(V_m, w_m^*) = (U_m, \omega_m),$$

satisfazendo:

- $(V_m, w_m^*) \rightharpoonup (V, w^*)$ em $\mathbb{V}\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, pois ambos são espaços reflexivos.
- $(V_m, w_m^*) \longrightarrow (V, w^*)$ em $\mathbb{L}^q(\Omega)\times\mathbb{L}^q(\Omega)$, $1 \le q < 6$, pois $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$, logo pelo teorema de imersão de Sobolev tem-se que $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$ com $1 \le q < 6$.

- $(U_m, \omega_m) \longrightarrow (U, \omega)$ em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, pois como a imersão dos espaços é compacta tem-se que a convergência fraca torna-se forte.

De acordo à proposição (5.3.3), passando o limite para os termos não-lineares tem-se:

- $(V_m \cdot \nabla)u_m \longrightarrow (V \cdot \nabla)u$ em $\mathbb{L}^s(\Omega)$ com $s = \frac{2q}{2+q}$ já que:

$$\begin{aligned} &\|(V_m \cdot \nabla)u_m - (V \cdot \nabla)u\|_s \\ &= \|(V_m \cdot \nabla)u_m - (V \cdot \nabla)u_m + (V \cdot \nabla)u_m - (V \cdot \nabla)u\|_s, \\ &\leq \|V_m - V\|_q \|\nabla u_m\|_2 + \|V\|_q \|\nabla u_m - \nabla u\|_2 \xrightarrow{m\to\infty} 0, \end{aligned}$$

  pois $\nabla u_m, V$ são limitados em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\mathbb{L}^q(\Omega)$, com $1 \leq q < 6$, respectivamente.

- Para $(V_m \cdot \nabla)\omega_m$ o caso é análogo ao anterior, assim, para $s = \frac{2q}{2+q}$ tem-se a convergência forte $(V_m \cdot \nabla)\omega_m \longrightarrow (V \cdot \nabla)\omega$ em $\mathbb{L}^s(\Omega)$.

- Como (M_m, H_m) é solução de $(\mathcal{P}_1)$ para cada m, pela proposição (5.3.2) e considerando a definição de norma nas estimativas tem-se:

$$\begin{aligned} K\|M_m\|_{\mathbb{H}_t^1} &\leq C\|F\|^2, \quad K > 0 \\ \|H_m\|_{\mathbb{H}_t^1} &\leq C(\|M_m\| + \|\mathrm{div}(M_m)\| + \|F\|). \end{aligned}$$

  Logo, é claro que (M_m, H_m) é limitado em $\mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega)$. Assim, existe uma subsequência (que por conveniência vamos denotar por (m)) (M_m, H_m) tal que:

$$\begin{aligned} &(M_m, H_m) \rightharpoonup (M, H) \ \text{ em } \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega), \\ &(M_m, H_m) \longrightarrow (M, H) \ \text{ em } \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega), \ \text{para } 1 \leq q < 6. \end{aligned}$$

Então, observa-se:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega}(M_m \times H_m - M \times H)\psi dx\right| \\
&\leq \int_{\Omega} |(M_m - M) \times H_m)|\, |\psi| dx \\
&+ \int_{\Omega} |M_m \times (H_m - H)|\, |\psi| dx, \\
&\leq \|M_m - M\| \|H_m\|_4 \|\psi\|_4 \\
&+ \|M\|_4 \|H_m - H\| \|\psi\|_4 \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Portanto $M_m \times H_m \rightharpoonup M \times H$ em $\mathbb{L}^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.
De forma análoga tem-se que $(M_m \cdot \nabla)H_m \rightharpoonup (M \cdot \nabla)H$ em $\mathbb{L}^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.

Logo pode-se concluir que $T(V, w^*) = (u, \omega)$. Consequentemente, existe uma imersão compacta de $T\,(B(0, R))$ em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

□

5.3.4 Fim demonstração Teorema 5.3.1

Considerando o demonstrado anteriormente, tem-se que se satisfazem as hipóteses do *Teorema de ponto fixo de Schauder* (1.2.4) para a função T. Portanto existe $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tal que:

$$T(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = (u_\varepsilon, \omega_\varepsilon).$$

Sendo $(M_\varepsilon, H_\varepsilon) = T_1(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \in \mathbb{H}_t^1(\Omega) \times \mathbb{H}_t^1(\Omega)$ com $H_\varepsilon = \nabla\varphi_\varepsilon$, então conclui-se que $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$ é solução do problema $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$, satisfazendo as equações (5.2.1), (5.2.2) e (5.2.3):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\| \triangle u_\varepsilon\|^2 + \frac{\eta}{2}\|\nabla u_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^2\| \triangle \omega_\varepsilon\|^2 + \frac{\eta'}{2}\|\nabla \omega_\varepsilon\|^2 \\
&+ (\lambda' + \eta')\|\mathrm{div}(\omega_\varepsilon)\|^2 + \frac{\mu_0}{\tau}\left(\frac{1}{2} + \mathcal{X}_0\right)\|H_\varepsilon\|^2 + \zeta\|\mathrm{rot}(u_\varepsilon) - 2\omega_\varepsilon\|^2 \\
&+ \frac{\mu_0\sigma}{2}\|\mathrm{div}(M_\varepsilon)\|^2 \le C(\|F\|^2 + \|L\|^2 + \|G\|^2), \\
&\sigma\|\mathrm{rot}(M_\varepsilon)\|^2 + \sigma\|\mathrm{div}(M_\varepsilon)\|^2 + \frac{1}{\tau}\|M_\varepsilon\|^2 + \frac{\mathcal{X}_0}{2\tau}\|H_\varepsilon\|^2 \le C\|F\|^2, \\
&\|H_\varepsilon\| \le \|M_\varepsilon\| + C\|F\|, \\
&\|H_\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1_t} \le C(\|M_\varepsilon\| + \|\mathrm{div}(M_\varepsilon)\| + \|F\|),
\end{aligned} \tag{5.3.20}
$$

e com $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ satisfazendo:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2_{\mathbb{H}^2} + \|u_\varepsilon\|^2_{\mathbb{V}} + \varepsilon^2\|\omega_\varepsilon\|^2_{\mathbb{H}^2} + \|\omega_\varepsilon\|^2_{\mathbb{H}^1_0} + \|H_\varepsilon\|^2 \\
&\le C(\|F\|^2 + \|L\|^2 + \|G\|^2).
\end{aligned}
$$

6 Existência de uma solução fraca para o problema ($\mathcal{P}$)

6.1 Fim demonstração do Teorema (4.1.1)

Seja $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$ solução do problema $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ gerada pelo teorema (5.3.1). A partir dessa solução, passando ao limite quando $\varepsilon \to 0$ na sequência $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$ é que vamos construir a solução para o problema $(\mathcal{P})$. Para isso precisamos conhecer a formulação fraca do problema $(\mathcal{P}^\varepsilon)$, que consiste das seguintes equações variacionais:

i) Para todo $\Phi \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2(\triangle u_\varepsilon; \triangle \Phi) + \rho\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon; \Phi\rangle + \eta(\nabla u_\varepsilon; \nabla \Phi)\\&+ \zeta(\mathrm{rot}(u_\varepsilon); \mathrm{rot}(\Phi)) = \mu_0\langle (M_\varepsilon \cdot \nabla) H_\varepsilon; \Phi\rangle\\&+ 2\zeta(\mathrm{rot}(\omega_\varepsilon); \Phi) + (L; \Phi).\end{aligned}$$

ii) Para todo $\Psi \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2(\triangle \omega_\varepsilon; \triangle \Psi) + \rho k\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla)\omega_\varepsilon; \Psi\rangle + \eta'(\nabla \omega_\varepsilon; \nabla \Psi)\\&+ (\eta' + \lambda')(\mathrm{div}(\omega_\varepsilon); \mathrm{div}(\Psi)) = \mu_0(M_\varepsilon \times H_\varepsilon; \Psi)\\&+ 2\zeta(\mathrm{rot}(u_\varepsilon) - 2\omega_\varepsilon; \Psi) + (G; \Psi).\end{aligned}$$

iii) A equação de magnetização é satisfeita fracamente, ie, $\forall\ \Lambda \in \mathbb{H}_t^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}&\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) M_\varepsilon; \Lambda\rangle + \sigma(\mathrm{rot}(M_\varepsilon); \mathrm{rot}(\Lambda)) + \sigma(\mathrm{div}(M_\varepsilon); \mathrm{div}(\Lambda))\\&+ \frac{1}{\tau}(M_\varepsilon - \mathcal{X}_0 H_\varepsilon; \Lambda) = (\omega_\varepsilon \times M_\varepsilon; \Lambda)\end{aligned}$$

iv) A equação magnetostática é satisfeita fracamente, ie, $\forall\ \nu \in H_\sharp^1(\Omega)$:

$$(\nabla \varphi_\varepsilon; \nabla \nu) + (M_\varepsilon; \nabla \nu) = -(F; \nu).$$

Lema 6.1.1. *Existe uma subsequência denotada ainda* $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon)$, *com* $H_\varepsilon = \nabla\varphi_\varepsilon$ *tal que quando* $\varepsilon \to 0$*:*

i) $\varepsilon^2 \triangle u_\varepsilon, \varepsilon^2 \triangle \omega_\varepsilon \longrightarrow 0$ *fortemente em* $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

ii) $u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon \rightharpoonup u, \omega, M, H$ *fracamente em* $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

iii) $u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon \longrightarrow u, \omega, M, H$ *fortemente em* $\mathbb{L}^q(\Omega)$, $1 \leq q < 6$.

Ainda mais, $u \in \mathbb{V}$, $\omega \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $M \in \mathbb{H}_t^1(\Omega)$ *e* $H = \nabla\varphi \in \mathbb{H}_t^1(\Omega)$.

Demonstração. i) Diretamente da primeira estimativa de (5.3.20) pode-se observar que $\varepsilon \triangle u_\varepsilon$, $\varepsilon \triangle \omega_\varepsilon$ são limitadas em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, logo $\varepsilon^2 \triangle u_\varepsilon$, $\varepsilon^2 \triangle \omega_\varepsilon \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \to 0$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

ii) Como $u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, M_\varepsilon, H_\varepsilon$ são limitadas em $\mathbb{H}^1(\Omega)$, então existe uma subsequência que converge fracamente em $\mathbb{H}^1(\Omega)$ a u, ω, M, H respetivamente.

iii) Pelo teorema de imersão de Sobolev de $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$, $1 \leq q < 6$, tem-se que a convergência fraca torna-se forte em $\mathbb{L}^q(\Omega)$, $\quad ; 1 \leq q < 6$.

□

Corolário 6.1.2. *Para* $\varepsilon \to 0$, *satisfazem-se as seguintes convergências:*

- $\langle (M_\varepsilon \cdot \nabla) H_\varepsilon; \Phi) \longrightarrow \langle (M \cdot \nabla) H; \Phi)$.
- $(M_\varepsilon \times H_\varepsilon; \Psi) \longrightarrow (M \times H; \Psi)$.
- $(\omega_\varepsilon \times M_\varepsilon; \Lambda) \longrightarrow (\omega \times M; \Lambda)$.
- $\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon; \Phi \rangle \longrightarrow \langle (u \cdot \nabla) u; \Phi \rangle$.
- $\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) M_\varepsilon; \Lambda \rangle \longrightarrow \langle (u \cdot \nabla) M; \Lambda \rangle$.
- $\langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) \omega_\varepsilon; \Psi \rangle \longrightarrow \langle (u \cdot \nabla) \omega; \Psi \rangle$

Para todo $\Phi \in \mathbb{V},\ \Lambda \in \mathbb{H}^1_t(\Omega),\ \Psi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Demonstração.

- Do lema anterior (6.1.1) tem-se que $M_\varepsilon \to M$ em $\mathbb{L}^4(\Omega)$, como $H_\varepsilon \rightharpoonup H$ fracamente em $\mathbb{H}^1(\Omega)$, então $\nabla H_\varepsilon \rightharpoonup \nabla H$ fracamente em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ logo $(M_\varepsilon \cdot \nabla)H_\varepsilon \rightharpoonup (M \cdot \nabla)H$ fracamente em $\mathbb{L}^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.
  Pela imersão de $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^4(\Omega)$ e utilizando a Proposição 1.2.2 para $\varepsilon \to 0$ tem-se $\langle (M_\varepsilon \cdot \nabla)H_\varepsilon; \Phi\rangle \longrightarrow \langle (M \cdot \nabla)H; \Phi\rangle$.
- A convergência dos outros casos é análoga à feita anteriormente.

□

Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$ em $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ obtém-se que (u, ω, M, H) é a solução fraca do problema $(\mathcal{P})$. No caso das equações (5.3.20), ao passar o limite inferior obtém-se que (u, ω, M, H) satisfaz as equações (4.1.1).

Referências

[1] Chorin, A.J. and Marsden, J.E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2000.

[2] E. Zeidler *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems.* Springer-Verlag, 1986. Citado na página 25.

[3] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of thein-compressible navier-stokes equations and related models.* Springer New York, 2012 Citado 5 vezes nas páginas 25, 26, 29, 30 e 39.

[4] H. Attouch, G. Butazzo and G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces.* MPS-SIAM Series on Optimization, 2006.

[5] J. M. Rivera. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.* LNCC, (1999). Citado na página 25.

[6] L. C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, (1997). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

[7] M. M. Miranda e L. A. Medeiros. *Espaços de Sobolev.* UFRJ, (2008). Citado na página 27.

[8] R. Adams and J. Fourier, *Sobolev spaces.* Academic Press, 2003.

[9] R. Dautray e J. L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology vol 3. Spectral theory and applications.* Spriger-Verlag, (1990). Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

[10] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics.* Dove Publications, Inc, 2014.

[11] R. Teman *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis*. Elsevier Science Publishers B.V., 1984. Citado na página 29.

[12] Y. Amirat and K. Hamdache, *Steady State Solutions of Ferrofluid Flow Models*. Communications on Pure Applied Analysis, Volume 15, Number 6, November 2016, pp. 2329–2355. Citado na página 20.