

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

João Marcel Serafin

**MODELAGEM, ANÁLISE E CONTROLE DE UM PROTÓTIPO  
DE CADEIRA DE RODAS AUTO-EQUILIBRISTA**

Florianópolis  
2019



João Marcel Serafin

**MODELAGEM, ANÁLISE E CONTROLE DE UM PROTÓTIPO  
DE CADEIRA DE RODAS AUTO-EQUILIBRISTA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de “Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas”.

**Orientador:** Prof. Dr. Nestor Roqueiro,  
DAS – UFSC.

**Coorientador:** Prof. Dr. Rodrigo  
Antônio Marques Braga, EGR - UFSC.

Florianópolis  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária  
da UFSC.

Serafin, João Marcel  
Modelagem, Análise e Controle de um Protótipo de  
Cadeira de Rodas Auto-Equilibrada / João Marcel  
Serafin ; orientador, Nestor Roqueiro,  
coorientador, Rodrigo Antônio Marques Braga, 2019.  
209 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas,  
Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2.  
Acessibilidade. 3. Auto-equilíbrio. 4. Cadeira de  
rodas. 5. Tecnologia assistiva. I. Roqueiro,  
Nestor. II. Braga, Rodrigo Antônio Marques. III.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.  
IV. Título.

João Marcel Serafin

**MODELAGEM, ANÁLISE E CONTROLE DE UM PROTÓTIPO  
DE CADEIRA DE RODAS AUTO-EQUILIBRISTA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas” e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 13 de Fevereiro de 2019.

---

Prof. Werner Kraus Junior, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas

---

Prof. Nestor Roqueiro, Dr.  
Orientador  
DAS/UFSC

---

Prof. Rodrigo Antônio Marques Braga, Dr.  
Coorientador  
EGR/UFSC

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Nestor Roqueiro, Dr.  
Presidente

---

Prof. Jonny Carlos da Silva, Dr.  
EMC/UFSC

---

Prof. Rodrigo de Souza Vieira, Dr.  
EMC/UFSC

---

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.  
DAS/UFSC

Aos meus pais.





## AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser realizado sem a ajuda de pessoas as quais presto minha homenagem. Não queria ser injusto e deixar de mencionar alguém. Infelizmente, esta seção não tem espaço suficiente para expressar toda minha gratidão.

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Gilson Roberto Serafin e Odila Nadir Soares do Nascimento Serafin, pelo amor, incentivo e apoio em todas as etapas da minha vida. Sem vocês nada disso seria possível.

Ao meu irmão, Rômulo Renan Serafin, por estar sempre presente nos momentos em que precisei de ajuda.

Aos professores Nestor Roqueiro e Rodrigo Antônio Marques Braga, que me orientaram neste trabalho, pela oportunidade, disponibilidade e ajuda, sempre de forma solícita e atenciosa.

Aos membros da Banca, professores Jonny Carlos da Silva, Rodrigo de Souza Vieira e Ubirajara Franco Moreno, por terem aceitado fazerem parte deste trabalho.

Aos meus colegas de mestrado, que em pouco tempo se tornaram grandes amigos que irei levar para a vida inteira. Em especial, gostaria de agradecer ao colega Feres Azevedo Salem, por nunca medir esforços em ajudar nas horas de aperto, tanto na realização das disciplinas quanto em dúvidas na dissertação.

Aos meus amigos, pela força e paciência ao longo desta minha jornada.



“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

Leonardo da Vinci



## RESUMO

A inclusão de pessoas com deficiência é um assunto sempre pertinente frente ao número de pessoas dentro deste grupo e as dificuldades que estas enfrentam diariamente. A deficiência motora é a segunda mais relatada no Brasil. Cerca de 3,7 milhões de pessoas relatam ter grandes dificuldades de locomoção. Considerando a evolução dentro das Tecnologias Assistivas nos últimos anos, busca-se cada vez mais alternativas para implementar e facilitar a inclusão social de pessoas com mobilidade reduzida. Este documento descreve o processo de desenvolvimento de uma cadeira de rodas com o princípio de funcionamento por auto-equilíbrio, visando possibilitar maior liberdade de movimentos ao usuário, e conseqüentemente, uma locomoção mais intuitiva. O documento apresenta o projeto mecânico e elétrico de um protótipo em escala real, o modelo dinâmico do sistema e o projeto de 3 controladores: compensador estático com inclusão de integrador na malha direta (PI), regulador linear quadrático (LQR) e modos deslizantes (MD). Cada controlador é aplicado a 3 estratégias de controle diferentes, cada uma com objetivos específicos. Ao final, são apresentados os resultados de simulações computacionais e testes práticos realizados com o protótipo, juntamente com a análise e comparação dos resultados.

**Palavras-chave:** Acessibilidade. Auto-equilíbrio. Cadeira de rodas. Tecnologia assistiva.



## ABSTRACT

The inclusion of people with disabilities is a relevant issue in relation to the number of people within this group, and how they face it daily. Motor deficiency is the second most reported in Brazil. About 3,7 million people report great difficulties in locomotion. Considering the evolution in Assistive Technologies in recent years, we are increasingly seeking alternatives to implement and facilitate the social inclusion of people with reduced mobility. This document describes the developing process of a wheelchair with a self-balancing working principle, allowing greater freedom of movements for the user and, consequently, a more intuitive locomotion. The document shows the mechanical and electrical design of a prototype in real scale, the dynamic model of the system and the design of 3 controllers: static compensator with the inclusion of integrator in the direct mesh (PI), linear-quadratic regulator (LQR) and sliding modes (MD). Each controller is applied to 3 different control strategies, each one with specific objectives. At the end, the results of computational simulations and practical tests performed with the prototype are presented, with the analysis and comparison of the results.

**Keywords:** Accessibility. Assistive Technology. Self-Balancing. Wheelchair.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - População com deficiência no Brasil.....	28
Figura 1.2 - Comparação entre a cadeira de rodas comum e a auto-equilibrada em terrenos inclinados.....	31
Figura 1.3 - Robôs com o sistema de pêndulo invertido sobre duas rodas.....	32
Figura 1.4 - Handle, robô desenvolvido pela empresa Boston Dynamics.....	32
Figura 1.5 - Ballbot (NAGARAJAN et al., 2013).....	33
Figura 1.6 – (a) Segway Personal Transporter (SEGWAY, 2018); e (b) Ninebot One S1 (SEGWAY, 2018).....	33
Figura 2.1 - Vaso grego feito em 530 a.C. retratando uma criança em uma cama com rodas (KAMENETZ, 1969). ....	43
Figura 2.2 - Detalhe em uma sarcófago chinês, entalhado em pedra, mostrando idoso usando uma cadeira de rodas (KAMENETZ, 1969). ....	43
Figura 2.3 - Homem sendo transportado em um carrinho de mão (SILVA et al., s.d.). ....	44
Figura 2.4 - Rei da Espanha, Felipe II, utilizando uma cadeira de rodas (GUGEL, 2008). ....	44
Figura 2.5 - Cadeira de rodas criada por Stephen Farfler, em 1655 (GUGEL, 2008).....	45
Figura 2.6 - Cadeira de rodas construída por volta do século XIX (SILVA et al, s.d.). ....	45
Figura 2.7 - Modelo de cadeira de rodas da marca Everest/Jennings, criada por H. C. Jennings (GUGEL, 2008). ....	46
Figura 2.8 - Inventor canadense, George Klein, em uma das primeiras cadeiras de rodas elétricas (DOYLE, 2017). ....	47
Figura 2.9 - (a) cadeira de rodas controlada por sinais de EEG (TANAKA, 2005); (b) cadeira de rodas controlada pela direção do olhar e piscar dos olhos (PURWANTO, 2009).....	47
Figura 2.10 - protótipo de cadeira de rodas autônoma apresentado por Braga (2010). ....	48
Figura 2.11 - Exemplo de tecnologia implantada para a movimentação de deficientes físicos (MATIA ROBOTICS, 2018). ....	48
Figura 2.12 - Diagrama de controle do sistema.....	61
Figura 2.13 – Sistema ótimo (OGATA, 2010).....	64
Figura 2.14 – Modos deslizantes bidimensional .....	67

Figura 2.15 - Domínio do modo deslizante em um plano bidimensional.....	69
Figura 2.16 - função sigmoideal (SHTESSEL et al., 2014).....	74
Figura 3.1 – O protótipo.....	75
Figura 3.2 - Dimensões gerais do protótipo (escala em milímetros).....	76
Figura 3.3 – Posicionamento do usuário no protótipo.....	76
Figura 3.4 - Distribuição dos componentes.....	77
Figura 3.5 – (a) Posição do centro de massa do protótipo (medida em milímetros); (b) Posição do centro de massa do corpo humano na posição sentada (SANSTSHI et. al, 1963).....	77
Figura 3.6 – Posição do centro de massa total. ....	78
Figura 3.7 – Esquema de montagem das baterias e do assento móvel.....	78
Figura 3.8 – Sistema de apoio. ....	79
Figura 3.9 – Diagrama esquemático do sistema elétrico. ....	80
Figura 3.10 – (a) Sensor acelerômetro e giroscópio MPU-6050 e (b) sensor óptico. ....	81
Figura 3.11 – Módulo HX711 e a célula de carga.....	81
Figura 3.12 – Arduino Due e driver ponte-H Bts7960.....	82
Figura 3.13– Motor utilizado no protótipo.....	82
Figura 4.1 - Modelo simplificado do sistema.....	83
Figura 4.2 – Variáveis do sistema. ....	84
Figura 4.3 - Parâmetros e definição das velocidades para o corpo 1. ....	85
Figura 4.4 - Parâmetros e variáveis relacionadas ao corpo 3. ....	87
Figura 4.5 - Parâmetros e variáveis relacionadas ao corpo 4. ....	87
Figura 4.6 - Modelo de um motor CC em função de suas constantes elétricas e mecânicas. ....	90
Figura 4.7 - Resistência de aclave.....	93
Figura 4.8 - Força gerada por irregularidades no terreno.....	93
Figura 4.9 – Força aplicada diretamente ao chassi.....	95
Figura 4.10 – Variáveis de deslocamento do protótipo.....	96
Figura 5.1 – Estrutura dos projetos de controle (OGATA, 2010). ....	104
Figura 5.2 – Dinâmica do sistema referente ao projeto de controle LQR aplicando a regra de Bryson. ....	112
Figura 5.3 – Dinâmica do sistema referente ao projeto de controle LQR utilizando as matrizes $Q$ e $R$ da Eq. (5.36).....	114
Figura 5.4 – Modelo do sistema em duas dimensões.....	118

Figura 6.1 – Teste de velocidades máximas no modo <i>Joystick</i> com controle LQR.....	130
Figura 6.2 – Trajetória representativa das simulações .....	136
Figura 6.3 – Simulação de trajetória com o controlador PI.....	137
Figura 6.4 – Simulação de trajetória com o controlador LQR. ....	137
Figura 6.5 – Simulação de trajetória com o controle por modos deslizantes. ....	138
Figura 6.6 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação <i>Freerun</i> . ....	139
Figura 6.7 – Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controlador PI.....	140
Figura 6.8 - Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controlador LQR.....	140
Figura 6.9 - Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controle por modos deslizantes.....	141
Figura 6.10 – Simulação de locomoção em um terreno irregular.....	142
Figura 6.11 – Simulação de trajetória com o controlador PI.....	143
Figura 6.12 - Simulação de trajetória com o controlador LQR. ....	143
Figura 6.13 - Simulação de trajetória com o controle por modos deslizantes. ....	144
Figura 6.14 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação <i>Indoor</i> .....	145
Figura 6.15 – Simulação de força externa aplicada diretamente ao chassi. ....	146
Figura 6.16 – Simulação de locomoção em um terreno irregular. ....	146
Figura 6.17 – Simulação de inclinação no terreno. ....	147
Figura 6.18 – Superfície de deslizamento. ....	148
Figura 6.19 – Dinâmica dos estados sobre a superfície de deslizamento.....	148
Figura 6.20 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controlador PI.....	149
Figura 6.21 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controlador LQR. ....	150
Figura 6.22 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controle por modos deslizantes. ....	150
Figura 6.23 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação <i>Joystick</i> .....	151

Figura 6.24 – Resultados referentes à simulação de inclinação do usuário.....	152
Figura 6.25 - Simulação de força externa aplicada diretamente ao chassi.....	153
Figura 6.26 - Simulação de locomoção em um terreno irregular...	154
Figura 6.27 - Simulação de inclinação no terreno.....	155
Figura 6.28 – Superfície de deslizamento.....	155
Figura 6.29 - Dinâmica dos estados sobre a superfície de deslizamento.....	156
Figura 7.1 – Estrutura do algoritmo de controle .....	158
.Figura 7.2 – Contagem de pulsos de um encoder de quadratura...	158
Figura 7.3 – Artigo referente à biblioteca utilizada para o filtro de Kalman (LAUZSZUS, 2012). .....	159
Figura 7.4 – terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.5.....	161
Figura 7.5 – Resultado do teste de locomoção em um terreno liso.....	161
Figura 7.6 – Terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.7.....	162
Figura 7.7 – Resultado do teste de locomoção em um terreno com irregularidades.....	162
Figura 7.8 - terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.9.....	163
Figura 7.9 – Resultados do teste de locomoção na grama.....	163
Figura 7.10 – Simulação em tempo discreto, com presença de ruídos e perturbações.....	164
Figura 7.11 – Ensaio de seguimento de trajetória com o protótipo.....	164
Figura 7.12 – Teste de rejeição de perturbações aplicadas ao chassi.....	166
Figura 7.13 – Ensaio de locomoção em subida.....	167
Figura 7.14 – Ensaio de locomoção em descida. ....	168
Figura 7.15 – Primeiros testes com usuário. ....	169
Figura 7.16 – Vídeo demonstrativo do teste representado pela Fig. 7.15. ....	169

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Classificação da Tecnologia Assistiva (BERSCH, 2017). .....	40
Tabela 3.1 – Lista de componentes utilizados.....	80
Tabela 4.1 – Parâmetros do sistema .....	100
Tabela 5.1 – Valores máximos aceitáveis. ....	111
Tabela 6.1 – Avaliação dos limites de operação no modo <i>Freerun</i> .....	131
Tabela 6.2 – Avaliação dos limites de operação no modo <i>Indoor</i> .....	132
Tabela 6.3 – Avaliação dos limites de operação no modo <i>Joystick</i> .....	132
Tabela 6.4 – Análise de robustez do sistema.....	134



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	3 Dimensões
a.C.	Antes de Cristo
ADA	<i>American with Disabilities Act</i>
ATACP	Programa de Certificação em Aplicações da Tecnologia Assistiva
CAT	Comitê de Ajudas Técnicas
CM	Centro de massa
CRI	Cadeira de Rodas Inteligente
d.C	Depois de Cristo
DMP	<i>Digital Motion Processor</i>
EEG	Eletroencefalograma
EUA	Estados Unidos da América
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MD	Modos deslizantes
MEMS	<i>Micro-Electro-Mechanical Systems</i>
PI	Proporcional-Integral
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i>
SEDH/PR	Secretaria Especial dos Direitos Humanos da Presidência da República
TA	Tecnologia Assistiva





## LISTA DE SÍMBOLOS

$h_C$	Altura da força aplicada ao chassi.	m
$B_C$	Coefficiente de atrito entre os componentes.	
$B_m$	Coefficiente de atrito viscoso do motor.	Ns/m
$F_I$	Forças de irregularidades no terreno.	Nm
$F_a$	Forças de atrito do sistema.	Nm
$R_A$	Resistência de aclave.	Nm
$R_R$	Resistência de rolagem dos pneus.	Nm
$R_t$	Relação de transmissão.	
$T_r$	Matriz de transformação de coordenadas.	
$V_a$	Tensão de entrada do motor.	V
$V_{en}$	Força contraeletromotriz.	V
$f_R$	Coefficiente de resistência de rolamento.	
$k_e$	Constante de tensão contraeletromotriz.	Vs/rad
$k_m$	Constante de torque mecânico.	Nm/A
$t_s$	Tempo de acomodação.	s
$\alpha_4$	Deslocamento angular do usuário no sentido lateral.	rad
$\theta_3$	Deslocamento angular da cadeira de rodas.	rad
$\theta_4$	Deslocamento angular do usuário no sentido longitudinal.	rad
$\tau_m$	Torque mecânico do motor.	Nm
$\varphi_1$	Deslocamento angular da roda direita.	rad
$\varphi_2$	Deslocamento angular da roda esquerda.	rad
$\omega_m$	Velocidade angular do motor.	rad/s
$\omega_x$	Velocidade angular do corpo em relação ao eixo x.	rad/s
$\omega_y$	Velocidade angular do corpo em relação ao eixo y.	rad/s
$\omega_z$	Velocidade angular do corpo em relação ao eixo z.	rad/s
$h$	Altura do degrau de irregularidade no terreno.	m
$\mathcal{L}$	Lagrange.	
$F$	Forças externas atuantes.	Nm
$I$	Momento de inércia.	kg · m <sup>2</sup>
$J$	Momento de inércia total do motor.	kg · m <sup>2</sup>

$K$	Ganhos dos controladores.	
$L$	Indutância do motor.	H
$M$	Momento de inércia relacionado a coordenada generalizada.	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$N$	Força normal.	N
$R$	Resistência do motor.	$\Omega$
$d$	Distância entre o centro de coordenadas e as rodas.	m
$e$	Erro do sinal.	
$g$	Gravidade.	$\text{m}/\text{s}^2$
$i$	Corrente.	A
$l$	Distância entre os CMs.	m
$m$	Massa.	kg
$p$	Entradas externas do sistema.	
$q$	Coordenadas generalizadas.	
$r$	Raio das rodas.	m
$u$	Sinal de controle.	
$u$	Velocidade do corpo em relação ao eixo x.	$\text{m}/\text{s}$
$v$	Velocidade do corpo em relação ao eixo y.	$\text{m}/\text{s}$
$w$	Velocidade do corpo em relação ao eixo z.	$\text{m}/\text{s}$
$x$	Estados do sistema.	
$z$	Vetor de estados em uma nova coordenada.	
$\mathcal{T}$	Energia cinética.	J
$\mathcal{V}$	Energia potencial.	J
$\xi$	Estados dos integradores.	
$\sigma$	Superfície de deslizamento.	
$v$	Velocidade longitudinal da cadeira de rodas.	$\text{m}/\text{s}$
$\omega$	Velocidade angular da cadeira de rodas.	$\text{rad}/\text{s}$

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>27</b>
1.1 JUSTIFICATIVA.....	28
1.1.1 A Deficiência Física no Brasil.....	28
1.1.2 Estudo do Controle Motor da Marcha Humana.....	29
1.1.3 Robôs Auto-equilibristas.....	31
1.2 PROPOSTA.....	34
1.2.1 Objetivos Específicos.....	34
1.3 ESCOPO DA DISSERTAÇÃO.....	34
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>37</b>
2.1 TECNOLOGIA ASSISTIVA.....	37
2.1.1 Categorias da Tecnologia Assistiva.....	40
2.2 BREVE HISTÓRICO DA CADEIRA DE RODAS.....	43
2.3 CLASSIFICAÇÃO DAS CADEIRAS DE RODAS.....	49
2.4 MODELAGEM LAGRANGEANA.....	51
2.4.1 Equação de Lagrange via Princípio de Hamilton ..	54
2.5 PROJETO DE CONTROLE DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS.....	55
2.5.1 Análise Freqüencial de Sistemas a partir da Representação em Espaço de Estados.....	57
2.5.2 Controlabilidade.....	59
2.5.3 Observabilidade.....	60
2.5.4 Compensador estático com inclusão de integrador na malha direta (controle PI).....	61
2.5.5 Controle Ótimo - Regulador Linear Quadrático (LQR)	63
2.6 CONTROLE ROBUSTO – MODOS DESLIZANTES (MD) 67	
2.6.1 Superfície de Deslizamento.....	68
2.6.2 Condições de Existência de um Modo Deslizante.	69
2.6.3 Método do Controle Equivalente.....	72
2.6.4 Trepidação.....	73

<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO DESENVOLVIDO .....</b>	<b>75</b>
3.1	PROJETO MECÂNICO .....	75
3.2	SISTEMA ELÉTRICO, ELETRÔNICO E SENSORIAMENTO.....	79
<b>4</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA .....</b>	<b>83</b>
4.1	FORMULAÇÃO DAS VELOCIDADES .....	84
4.2	ENERGIA CINÉTICA.....	88
4.3	ENERGIA POTENCIAL .....	89
4.4	FORÇAS EXTERNAS ATUANTES .....	89
4.4.1	Forças generalizadas relacionadas a $\varphi 1$ .....	90
4.4.2	Forças externas relacionadas a $\varphi 2$ .....	94
4.4.3	Forças externas relacionadas a $\theta 3$ .....	94
4.5	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.....	95
4.6	TRANSFORMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DO SISTEMA	96
4.7	SIMPLIFICAÇÃO DO MODELO DO MOTOR ELÉTRICO CC.....	98
4.8	MODELO LINEAR.....	99
4.9	ANÁLISE DO SISTEMA.....	100
<b>5</b>	<b>PROJETO DE CONTROLE .....</b>	<b>103</b>
5.1	ESTRATÉGIAS DE CONTROLE .....	103
5.1.1	Freerun .....	103
5.1.2	Indoor .....	103
5.1.3	Joystick.....	104
5.2	CONTROLADOR PI.....	104
5.2.1	Projeto de Controle PI Discreto .....	108
5.3	PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO (LQR) .....	110
5.3.1	Projeto de Controle LQR Discreto .....	115
5.4	PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO (MODOS DESLIZANTES).....	117
5.4.1	Indoor .....	119
5.4.2	Freerun .....	124

5.4.3 Joystick.....	126
<b>6 RESULTADOS VIA SIMULAÇÃO .....</b>	<b>129</b>
6.1 MAPEAMENTO DOS LIMITES DE OPERAÇÃO DO SISTEMA	129
6.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - FREERUN	136
6.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - INDOOR	142
6.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - JOYSTICK	148
<b>7 RESULTADOS VIA ENSAIOS COM O PROTÓTIPO .....</b>	<b>157</b>
7.1 ALGORITMO DE CONTROLE .....	157
7.2 ENSAIOS PRÁTICOS.....	160
<b>8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....</b>	<b>171</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>175</b>
<b>APÊNDICE A – Projeto Mecânico do Protótipo.....</b>	<b>181</b>
<b>APÊNDICE B – Modelo Completo do Sistema.....</b>	<b>185</b>
<b>APÊNDICE C – Algoritmo de Controle.....</b>	<b>191</b>



# 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é o resultado das atividades desenvolvidas entre Março de 2016 e Janeiro de 2019 pelo engenheiro João Marcel Serafin na área de controle no departamento de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina. Este apresenta o desenvolvimento de um protótipo de cadeira de rodas elétrica com o princípio de funcionamento por auto-equilíbrio, visando torná-la segura e estável no transporte de pessoas com mobilidade reduzida.

O desenvolvimento de novas tecnologias na locomoção de pessoas com necessidades especiais é um desafio sempre atual. Números do IBGE (2010) mostram que cerca de 23,9% da população brasileira sofre com algum tipo de deficiência, sendo a deficiência motora a segunda colocada, com cerca de 7% da população (mais de 13,2 milhões de brasileiros). Em virtude de todos obstáculos e dificuldades que usuários de cadeira de rodas enfrentam diariamente, criar alternativas que auxiliam a sua locomoção é de suma importância para sua inclusão social.

Neste aspecto, entende-se a inclusão social como sendo o processo mais aperfeiçoado da convivência de alguém, tido como diferente, com os demais membros da sociedade, tidos como supostamente iguais. A sociedade se prepara e se modifica para receber a diferença, em todas as áreas do processo social (educação, saúde, trabalho, assistência social, acessibilidade, lazer, esporte e cultura) (Brasil, 2008).

Araújo (1997) afirma que as dificuldades sociais enfrentadas pelas pessoas com deficiência física e pelas pessoas idosas, principalmente doentes ou fisicamente incapacitadas, são causadas pelas deficiências da sociedade em atender e aceitar suas necessidades específicas. Uma das grandes lutas das pessoas com deficiência física é poderem ser diferentes sem estarem em desvantagem.

Diante das dificuldades que usuários de cadeiras de rodas encontram diariamente, este trabalho busca explorar o conceito de veículos auto-equilibrados como uma alternativa na locomoção de pessoas com deficiência física, proporcionando maior liberdade de movimentos e uma locomoção mais “natural”, e conseqüentemente, melhor qualidade de vida e inclusão social. O meio de transporte proposto consiste em uma cadeira de rodas com apenas duas rodas, que de forma autônoma, busca se manter equilibrada, movimentando-se com

a projeção do corpo do usuário na direção em que o mesmo deseja se locomover, dispensando o uso das mãos.

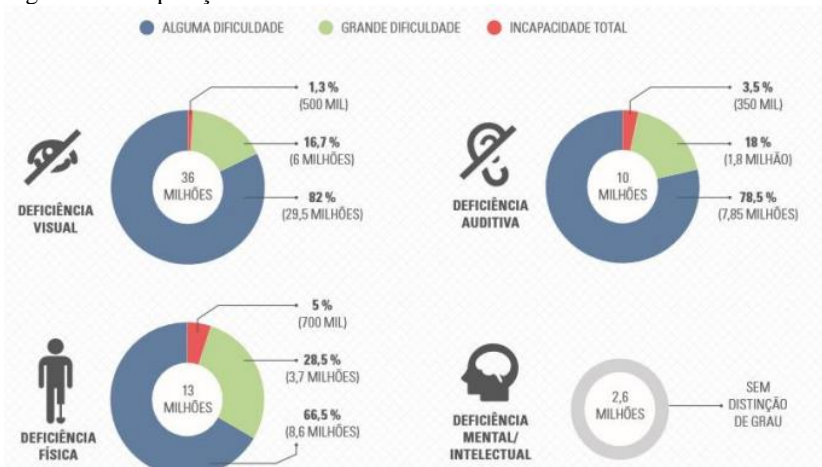
A utilização de veículos auto-equilibristas como meio de transporte individual de pessoas é uma tendência crescente no mercado, visto a sua praticidade e eficiência na locomoção. A sua utilização como um meio de transporte para pessoas com deficiência física ainda é uma ideia pouco explorada. Este trabalho busca analisar o potencial deste conceito como possibilidade em trazer melhor mobilidade ao usuário de cadeira de rodas.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

### 1.1.1 A Deficiência Física no Brasil

Segundo o último censo demográfico realizado pelo IBGE (2010), mais de 45,6 milhões de brasileiros declaram ter alguma deficiência, esta podendo ser visual, auditiva, motora ou mental. A deficiência motora é a segunda mais relatada pela população. Mais de 734,4 mil disseram não conseguir caminhar ou subir escadas de modo algum e mais de 3,7 milhões informaram ter grande dificuldade de locomoção. Para o Instituto, portador de deficiência física é aquele que “tem alguma das seguintes deficiências: paralisia permanente total; paralisia permanente das pernas; paralisia permanente de um dos lados do corpo; falta de perna, braço, mão, pé ou dedo polegar” (MACIEL & CIENA, 2015).

Figura 1.1 - População com deficiência no Brasil.





Grande parte dessas pessoas adquiriram a deficiência ao longo da vida, sendo ocasionada por diversos fatores, entre eles acidentes automobilísticos e ferimentos por arma de fogo. As pessoas que adquirem a deficiência ocasionada por lesão medular, poliomielite, esclerose lateral amiotrófica ou amputação de membros inferiores perdem a estrutura ou a função fisiológica, psicológica ou anatômica, as quais podem restringir a realização de atividades dentro da normalidade (ALVES, 2017).

A deficiência física motora pode ser socialmente definida como o produto do descompasso entre as condições do indivíduo afetado por uma limitação funcional, as suas expectativas quanto à execução das atividades básicas e instrumentais de vida diária, as demandas ambientais nessa direção e a escassez ou a inadequação de condições instrumentais e sociais que lhe permitam funcionar adequadamente, mantendo a autonomia e a autoestima (MONTANARI, 1999).

A cadeira de rodas se apresenta como facilitadora da mobilidade corporal, que permite a liberdade de movimentos de parte ou do corpo inteiro e, principalmente, a capacidade de poder ir e vir, para ou de qualquer lugar, pelas pessoas com deficiência, como a real expressão de autonomia. Compõe instrumental importante para proporcionar a independência funcional, fortalecendo a busca da autonomia pessoal (ALVES, 2017).

Mesmo com toda a evolução quanto à acessibilidade, principalmente em cidades metropolitanas, é visto que usuários de cadeira de rodas encontram inúmeras dificuldades de locomoção, tanto em ambientes urbanos quanto dentro de casa.

Atualmente, sistemas de locomoção elétricos para deficientes físicos são inviáveis para usuários de baixa renda, e não tem a mesma praticidade das cadeiras de rodas convencionais dobráveis, o que dificulta a sua utilização por aqueles que necessitam de uma maior flexibilidade no transporte. Em virtude disso, busca-se cada vez mais soluções em tecnologia para facilitar a vida de quem necessita desse meio para se locomover.

### **1.1.2 Estudo do Controle Motor da Marcha Humana**

Este trabalho visa descrever o processo de desenvolvimento de uma cadeira de rodas com o princípio de funcionamento por auto-equilíbrio, buscando um novo conceito na locomoção de pessoas com mobilidade reduzida. O mesmo se justifica como uma possível

alternativa para proporcionar maior liberdade de movimentos ao usuário de cadeira de rodas, visto que é dispensável o uso das mãos na realização da sua locomoção. Desta forma, é possível proporcionar uma locomoção mais natural e intuitiva, baseada no princípio de movimentação de uma pessoa sem deficiência ao caminhar.

Referente ao estudo do controle motor da marcha humana, Winter (1987) caracteriza o ciclo de passada de uma pessoa andando em cinco funções principais que devem ser realizadas durante cada período de passo, para alcançar a propulsão segura e eficiente do corpo. São elas:

- i. Geração de energia mecânica para manter a velocidade atual ou para aumentar a velocidade direta do corpo.
- ii. Absorção de energia mecânica para absorção ou estabilidade de choque ou para diminuir a velocidade direta do corpo.
- iii. Manutenção do suporte da parte superior do corpo (isto é, evitar o colapso do membro inferior) durante a posição.
- iv. Manutenção da postura vertical e do equilíbrio total do corpo.
- v. Controle da trajetória do pé para obter uma distância ao solo segura e uma aterragem suave do calcanhar ou do dedo do pé.

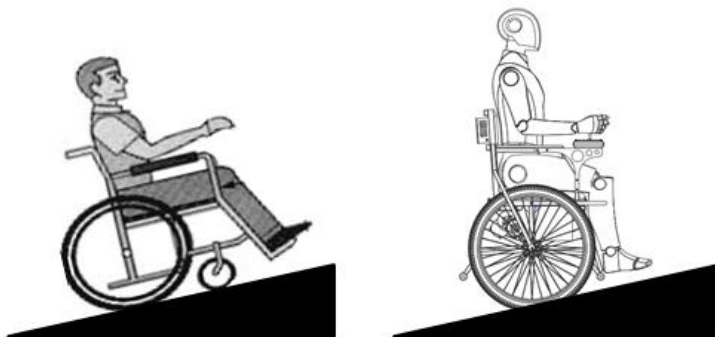
O meio de transporte proposto neste trabalho busca atender todos esses requisitos. Seu princípio de funcionamento é baseado na captação de dados gerados por sensores de inclinação e odometria da cadeira de rodas, os quais são processados por um microcontrolador, que controla dois motores elétricos ligados a duas rodas de sustentação. Implementando ao sistema um controle por realimentação, o movimento das rodas é diretamente dependente dos dados obtidos pelos sensores, proporcionando ao sistema auto-suficiência quanto ao seu próprio equilíbrio. Desta forma, a movimentação da cadeira de rodas é realizada por meio da projeção do corpo do usuário na direção em que o mesmo deseja se locomover, de certo modo, agindo como uma extensão do seu corpo.

Em virtude disso, as principais funções que devem ser realizadas a cada ciclo de passada descritas anteriormente podem ser atendidas na locomoção de uma pessoa portadora de deficiência física. A função (i) é realizada pela inclinação do tronco do usuário; a função (ii) é atribuída à

absorção de energia mecânica exercida pelos pneus; funções (iii), (iv) e (v) são realizadas pela inclinação do tronco do usuário em conjunto com o projeto de controle aplicado ao sistema. O mesmo busca manter o suporte da parte superior do corpo com o torque dos motores aplicado às rodas, de forma com que o sistema se mantenha em equilíbrio, ao mesmo tempo em que se movimenta na direção em que o usuário esteja projetando o seu corpo.

Outra vantagem na utilização deste conceito em comparação à dinâmica do movimento humano é a sua utilização em terrenos inclinados. Como pode ser visto na Fig. 1.2, por apresentar duas rodas, a cadeira de rodas auto-equilibrista possibilita a permanência do seu ângulo de inclinação tanto em ambientes planos como em terrenos inclinados, o que não é possível com uma cadeira de rodas comum. Este é um fato importante, visto que a variação na inclinação da cadeira de rodas altera a posição do centro de massa total, o que pode ocasionar a queda do usuário.

Figura 1.2 - Comparação entre a cadeira de rodas comum e a auto-equilibrista em terrenos inclinados.

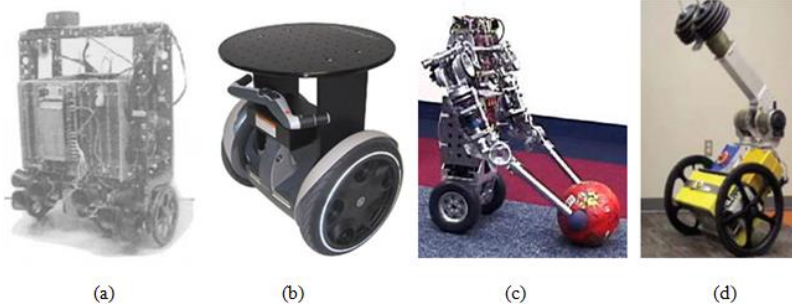


### 1.1.3 Robôs Auto-equilibristas

A ideia de criar um veículo com o princípio de funcionamento por auto-equilíbrio não é uma novidade. Um dos primeiros robôs móveis do tipo pêndulo invertido com duas rodas foi desenvolvido por Ha e Yuta (1997), representado pela Fig. 1.3(a). Este conceito de robô começou a se tornar popular especialmente depois da introdução do Segway RMP (Nguyen et al., 2004), presente na Fig. 1.3(b). Em 2006, Rod Grupen e sua equipe introduziram o uBot (Deegan et al., 2006), e em 2010, Mike Stilman apresentou o Golem Krang (Stilman et al.,

2010), ambos plataformas de manipulação móvel dinâmica de duas rodas, representados pelas Figs. 1.3(c) e 1.3(d), respectivamente, mostrando que robôs com este modelo de locomoção podem ser manipuladores móveis eficazes.

Figura 1.3 - Robôs com o sistema de pêndulo invertido sobre duas rodas.



Handle, apresentado pela Fig. 1.4, é um exemplo do que está sendo desenvolvido atualmente. Criado pela empresa Boston Dynamics, este combina a capacidade de atravessar terrenos acidentados por meio de duas pernas, com a eficiência na locomoção de duas rodas. Segundo o fabricante “as rodas são rápidas e eficientes em superfícies planas, enquanto as pernas podem ir para praticamente qualquer lugar: combinando rodas e pernas, o Handle tem o melhor dos dois mundos.” (BOSTON DYNAMICS, 2018).

Figura 1.4 - Handle, robô desenvolvido pela empresa Boston Dynamics.



Nagarajan et al.(2013) apresenta em seu trabalho como este conceito de *balancing mobile robots* vem sendo implementado a fim de

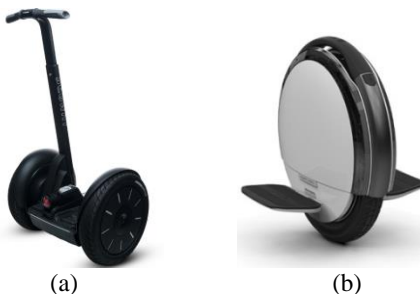
explorar diferentes possibilidades na locomoção. “O Ballbot (Fig. 1.5) é um robô móvel dinamicamente estável de tamanho humano que se equilibra em uma única esfera. Ao contrário dos robôs móveis estaticamente estáveis, o Ballbot é alto e estreito, com um centro de gravidade elevado e pequeno contato com o chão. Além disso, sua estabilidade dinâmica permite que seja fisicamente interativo. Essas características o torna mais adequado para navegar e interagir em ambientes humanos desordenados.” (NAGARAJAN et al., 2013).

Figura 1.5 - Ballbot (NAGARAJAN et al., 2013).



No quesito transporte individual de pessoas, um exemplo usualmente encontrado são os veículos Segway Personal Transporter (Fig. 1.6(a)), desenvolvido pela empresa Segway. A partir deste conceito, diversos outros modelos vêm sendo criados, como pode ser visto na Fig. 1.6(b), modelo Ninebot One S1, desenvolvido pela mesma empresa, explorando diferentes possibilidades no transporte visando uma mobilidade urbana sustentável.

Figura 1.6 – (a) Segway Personal Transporter (SEGWAY, 2018); e (b) Ninebot One S1 (SEGWAY, 2018).



Esta tecnologia está sendo cada vez mais explorada, possibilitando expandir as perspectivas dentro do transporte de pessoas. Com base nisso, este trabalho visa estudar este conceito voltado à locomoção de pessoas portadoras de deficiência física, com foco na segurança e eficiência no transporte, tentando uma melhor qualidade de vida de usuários de cadeira de rodas.

## 1.2 PROPOSTA

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um meio de transporte seguro e eficiente na locomoção de pessoas com mobilidade reduzida, que permita uma maior liberdade de movimentos. Para tanto, é proposto a utilização de um veículo auto-equilibrista como uma alternativa em proporcionar uma locomoção mais intuitiva ao usuário de cadeira de rodas, onde o deslocamento ocorre em resposta ao movimento natural da parte superior do corpo do usuário, agindo como uma extensão do corpo humano e dispensando qualquer manuseio com as mãos para o controle da locomoção.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

- Desenvolvimento de um modelo dinâmico completo do sistema proposto utilizando a formulação Lagrangeana;
- Aplicação de 3 estratégias de controle diferentes, cada uma atendendo a uma condição específica de funcionamento;
- Desenvolvimento dos projetos de controle PI, LQR e modos deslizantes, aplicados às estratégias de controle definidas;
- Desenvolvimento de um protótipo em escala real;
- Aplicação de testes práticos, visando validar o modelo dinâmico e os projetos de controle desenvolvidos.

## 1.3 ESCOPO DA DISSERTAÇÃO

Como sequência desse capítulo introdutório, no segundo capítulo são apresentados os fundamentos teóricos utilizados. São apresentados

conceitos de tecnologia assistiva, juntamente com um breve histórico sobre a evolução da cadeira de rodas desde a sua criação e os modelos presentes no mercado. Também são apresentados os fundamentos de modelagem Lagrangeana e a teoria de controle utilizados no trabalho.

O terceiro capítulo é reservado para a apresentação do protótipo construído. Nele é apresentado o projeto mecânico e elétrico, abordando as características principais do protótipo, como as suas dimensões, métodos de controle, sistema elétrico e sensoriamento.

O desenvolvimento do modelo matemático é descrito no capítulo 4. A modelagem é realizada pelo método Lagrangeano, sendo obtida a partir das equações de energias cinéticas e potenciais do sistema. Para isto, as equações de movimento de cada corpo presente no sistema são detalhadas, assim como as forças externas atuantes. A partir das equações obtidas, o modelo é manipulado para se obter informação dos estados que se deseja controlar. Ao final, é feita a análise do modelo resultante, a partir das funções de transferências obtidas pela linearização do sistema.

O capítulo 5 é reservado para os projetos de controle. Nele é descrito o desenvolvimento dos controladores PI, LQR e modos deslizantes, baseados nas teorias de controle apresentadas no capítulo de fundamentação teórica. Os três controladores são desenvolvidos a partir do modelo linearizado obtido no capítulo 4.

O capítulo 6 apresenta os resultados obtidos via simulação, realizadas pelos *softwares* Matlab® e Simulink®. Os controladores são aplicados ao modelo não-linear completo obtido no capítulo 4. As simulações são divididas em duas etapas, a primeira com o objetivo de mapear os limites de operação do sistema para cada controlador desenvolvido, e a segunda mostrando os seus desempenhos em diferentes situações de operação.

Os resultados obtidos por meio de testes com o protótipo são apresentados no capítulo 7. Inicialmente, é descrito de forma geral o algoritmo de controle aplicado ao microcontrolador. Em seguida são apresentados os resultados obtidos via ensaios simulando diferentes situações de operação da cadeira de rodas. Por questões de segurança, os ensaios são realizados sem a presença de um condutor, sendo a movimentação da cadeira de rodas realizada de forma autônoma por meio do seguimento de uma certa trajetória imposta.

Por fim, o capítulo 8 resume os resultados obtidos neste trabalho, apresentando as conclusões da pesquisa e propondo extensões e modificações futuras para a continuidade do estudo.





## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo é reservado para a fundamentação teórica utilizada. Este introduz o conceito de Tecnologia Assistiva (TA) e a sua classificação como forma de categorizar a pesquisa realizada neste trabalho. Também é apresentado um breve histórico da evolução da cadeira de rodas, juntamente com a sua classificação recente. Ao final são apresentados os fundamentos de modelagem Lagrangeana e teoria de controle utilizados no trabalho.

### 2.1 TECNOLOGIA ASSISTIVA

O termo *Assistive Technology*, traduzido no Brasil como Tecnologia Assistiva (TA), foi criado oficialmente em 1988 como importante elemento jurídico dentro da legislação norte-americana, conhecida como *Public Law 100-407*, que compõe, com outras leis, o ADA - *American with Disabilities Act*. Este conjunto de leis regula os direitos dos cidadãos com deficiência nos EUA, além de prover a base legal dos fundos públicos para compra dos recursos que estes necessitam. Houve a necessidade de regulamentação legal deste tipo de tecnologia, e a partir desta definição e do suporte legal, a população norte-americana, de pessoas com deficiência, passa a ter garantido pelo seu governo o benefício de serviços especializados e o acesso a todo o arsenal de recursos que necessitam e que venham favorecer uma vida mais independente, produtiva e incluída no contexto social geral (BERSCH, 2005).

A legislação norte-americana que estabelece os critérios e bases legais que regulamentam a concessão de verbas públicas e subsídios para a aquisição desse material, entende a Tecnologia Assistiva como Recursos e Serviços. Recursos, no texto da ADA, é “todo e qualquer item, equipamento ou parte dele, produto ou sistema fabricado em série ou sob medida, utilizado para aumentar, manter ou melhorar as capacidades funcionais das pessoas com deficiência”. Serviços são “aqueles que auxiliam diretamente uma pessoa com deficiência a selecionar, comprar ou usar os recursos acima definidos” (BERSCH, 2005).

Em 16 de novembro de 2006, a Secretaria Especial dos Direitos Humanos da Presidência da República - SEDH/PR, através da portaria nº 142, instituiu o Comitê de Ajudas Técnicas - CAT, que reuniu um grupo de especialistas brasileiros e representantes de órgãos governamentais, em uma agenda de trabalho. O CAT foi instituído com

os objetivos principais de: apresentar propostas de políticas governamentais e parcerias entre a sociedade civil e órgãos públicos referentes à área de tecnologia assistiva; estruturar as diretrizes da área de conhecimento; realizar levantamento dos recursos humanos que atualmente trabalham com o tema; detectar os centros regionais de referência, objetivando a formação de uma rede nacional integrada; estimular nas esferas federal, estadual, municipal, a criação de centros de referência; propor a criação de cursos na área de tecnologia assistiva, bem como o desenvolvimento de outras ações com o objetivo de formar recursos humanos qualificados e propor a elaboração de estudos e pesquisas, relacionados com o tema da tecnologia assistiva. (BRASIL - SDHPR, 2012)

Segundo Rita Bersch e José Carlos Tonolli (2017), Tecnologia Assistiva é o termo utilizado pra identificar todo o arsenal de recursos e serviços que contribuem para proporcionar ou ampliar habilidades funcionais de pessoas com deficiência e consequentemente promover vida independente e inclusão. Esses recursos são todo ou qualquer equipamento desenvolvido sob medida para aumentar as capacidades funcionais das pessoas com deficiência. Os serviços são aqueles métodos que auxiliam o deficiente a selecionar, comprar ou usar os recursos citados.

Cook e Hussey (2000) definem TA como "uma ampla gama de equipamentos, serviços, estratégias e práticas concebidas e aplicadas para minorar os problemas encontrados pelos indivíduos com deficiências".

Para as pessoas sem deficiência, a tecnologia torna as coisas mais fáceis. Para as pessoas com deficiência, a tecnologia torna as coisas possíveis (RADABAUGH, 1993).

No Brasil, o Decreto Federal 5.296/04, em seu art. 61 (2004), define Tecnologia Assistiva ou Ajudas Técnicas como sendo “produtos, instrumentos e equipamentos ou tecnologias adaptadas ou especialmente projetadas para melhorar a funcionalidade da pessoa portadora de deficiência ou com mobilidade reduzida, favorecendo autonomia pessoal total ou assistida”. Este decreto estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção de acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida, tais como, atendimento prioritário, acessibilidade em ambientes públicos como prédios e

transporte público, além dos meios de comunicação como telefonia pública e internet.

Como é citado em Filho (2009), a percepção de que o conceito de TA não se restrita somente a equipamentos e ferramentas, e sim a serviços que englobam estratégias, processos e metodologias, como fica claro na legislação norte-americana. A *Public Law* 108-364 descreve os serviços da TA como sendo:

- A avaliação das necessidades de uma TA do indivíduo com uma deficiência, incluindo uma avaliação funcional do impacto da provisão de uma TA apropriada e de serviços apropriados para o indivíduo no seu contexto comum;
- Um serviço que consiste na compra, locação ou de outra forma provê a aquisição de recursos de TA para pessoas com deficiência;
- Um serviço que consiste na seleção, desenvolvimento, experimentação, customização, adaptação, aplicação, manutenção, reparo, substituição ou doação de recursos de TA;
- Coordenação e uso das terapias necessárias, intervenções e serviços associados com educação e planos de programas de reabilitação;
- Treinamento ou assistência técnica para o indivíduo com deficiência ou, quando apropriado, aos membros da família, cuidadores, responsáveis ou representantes autorizados por tal indivíduo;
- Treinamento ou assistência técnica para profissionais (incluindo indivíduos que proveem serviços de educação e reabilitação, e entidades que fabricam ou vendem recursos de TA), empregadores, serviços provedores de emprego e treinamento, ou outros indivíduos que proveem serviços para empregar, ou estão de outra forma, substancialmente envolvidos nas principais funções de vida de indivíduos com deficiência;

- Um serviço que consiste na expansão da disponibilidade de acesso à tecnologia, incluindo tecnologia eletrônica e de informação para indivíduos com deficiência.

Relacionado a equipamentos e ferramentas, a TA deve ser entendida como um auxílio que promoverá a ampliação de uma habilidade funcional que possibilitará a realização da função desejada e que se encontra impedida por circunstância de deficiência ou pelo envelhecimento. De certa forma, pode-se dizer que o maior objetivo da TA é proporcionar à pessoa com deficiência maior independência, qualidade de vida e inclusão social, através da ampliação de sua comunicação, mobilidade, controle de seu ambiente, habilidade de seu aprendizado e trabalho (BERSCH, 2017).

### 2.1.1 Categorias da Tecnologia Assistiva

Os recursos da Tecnologia Assistiva são classificados de acordo com seus objetivos funcionais. Várias classificações da TA foram desenvolvidas para finalidades distintas, tendo atualmente a ISO 9999/2002 como uma importante classificação internacional dos recursos, aplicada em vários países.

Conforme é citado por Bersch (2017) “A classificação da TA destaca-se pela sua importância em organizar a utilização, prescrição, estudo e pesquisa de recursos e serviços. Além, esta oferece ao mercado focos específicos de trabalho e especializações”.

A classificação é apresentada pela Tab. 2.1, escrita em 1998 por José Tonolli e Rita Bersch (1998), e atualizada conforme os avanços na área a que se destina. Esta usa como base outras classificações da TA, e especialmente a partir de trabalhos de autores no Programa de Certificação em Aplicações da Tecnologia Assistiva – ATACP da *California State University, College of Extended Learning and Center on Disabilities* (BERSCH, 2017).

Tabela 2.1 - Classificação da Tecnologia Assistiva (BERSCH, 2017).

Categoria	Descrição	Exemplos
<b>Auxílios para a vida diária e vida prática</b>	Materiais e produtos que favorecem desempenho autônomo e independente em tarefas rotineiras ou facilitam o cuidado de pessoas em situação de dependência de auxílio, nas atividades como se alimentar, cozinhar, vestir-se, tomar banho e executar necessidades pessoais.	Talheres modificados, suportes para utensílios domésticos, roupas desenhadas para facilitar o vestir e despir, abotoadores, velcro, recursos para transferência, barras de apoio, etc.

<p><b>Comunicação Aumentativa e Alternativa</b></p>	<p>Destinada a atender pessoas sem fala ou escrita funcional ou em defasagem entre sua necessidade comunicativa e sua habilidade em falar, escrever e/ou compreender.</p>	<p>Pranchas de comunicação, construídas com simbologia gráfica (BLISS, PCS e outros), letras ou palavras escritas, são utilizados pelo usuário da CAA para expressar suas questões, desejos, sentimentos, entendimentos.</p>
<p><b>Recursos de acessibilidade ao computador</b></p>	<p>Conjunto de hardware e software especialmente idealizado para tornar o computador acessível a pessoas com privações sensoriais (visuais e auditivas), intelectuais e motoras. Inclui dispositivos de entrada (mouses, teclados e acionadores diferenciados) e dispositivos de saída (sons, imagens, informações táteis).</p>	<p>São exemplos de dispositivos de entrada os teclados modificados, os teclados virtuais com varredura, mouses especiais e acionadores diversos, software de reconhecimento de voz, movimento de olhos, ondas cerebrais (pensamento), etc.</p>
<p><b>Sistemas de controle de ambiente</b></p>	<p>No campo da Tecnologia Assistiva a automação residencial visa a promoção de maior independência no lar e também a proteção, a educação e o cuidado de pessoas idosas, dos que sofrem de demência ou que possuem deficiência intelectual.</p>	<p>Através de um controle remoto as pessoas com limitações motoras, podem ligar, desligar e ajustar aparelhos eletro-eletrônicos como a luz, o som, televisores, executar a abertura e fechamento de portas e janelas, receber e fazer chamadas telefônicas, entre outros.</p>
<p><b>Projetos arquitetônicos para acessibilidade</b></p>	<p>Projetos de edificação e urbanismo que garantem acesso, funcionalidade e mobilidade a todas as pessoas, independente de sua condição física e sensorial.</p>	<p>Adaptações estruturais e reformas na casa e/ou ambiente de trabalho, através de rampas, elevadores, adequações em banheiros, mobiliário entre outras, que retiram ou reduzem as barreiras físicas.</p>
<p><b>Órteses e próteses</b></p>	<p>Próteses são peças artificiais que substituem partes ausentes do corpo. Órteses são colocadas junto a um segmento corpo, garantindo-lhe um melhor posicionamento, estabilização e/ou função.</p>	<p>São normalmente confeccionadas sob medida e servem no auxílio de mobilidade, de funções manuais (escrita, digitação, utilização de talheres, manejo de objetos para higiene pessoal), correção postural, entre outros.</p>

<b>Adequação Postural</b>	Um projeto de adequação postural diz respeito à seleção de recursos que garantam posturas alinhadas, estáveis, confortáveis e com boa distribuição do peso corporal.	Sistemas especiais em cadeiras de rodas, como assentos e encostos que levam em consideração as medidas, o peso e a flexibilidade do usuário, ou alterações músculo-esqueléticas existentes.
<b>Auxílios de mobilidade</b>	Veículo, equipamento ou estratégia utilizada na melhoria da mobilidade pessoal.	bengalas, muletas, andadores, carrinhos, cadeiras de rodas manuais ou elétricas, scooters.
<b>Auxílios para ampliação da função visual</b>	Também inclui recursos que reduzem conteúdos visuais em áudio ou informação tátil.	Auxílios ópticos, lentes, lupas manuais e lupas eletrônicas; os softwares ampliadores de tela. Material gráfico com texturas e relevos, mapas e gráficos táteis, software OCR em celulares para identificação de texto informativo, etc.
<b>Auxílios para melhorar a função auditiva</b>	Também inclui recursos utilizados para traduzir os conteúdos de áudio em imagens, texto e língua de sinais.	Aparelhos para surdez, software que transforma em voz o texto digitado no celular e em texto a mensagem falada. Livros, textos e dicionários digitais em língua de sinais. Sistema de legendas (close-caption/subtitles).
<b>Mobilidade em veículos</b>	Acessórios que possibilitam uma pessoa com deficiência física dirigir um automóvel.	Facilitadores de embarque e desembarque como elevadores para cadeiras de rodas (utilizados nos carros particulares ou de transporte coletivo).
<b>Esporte e Lazer</b>	Recursos que favorecem a prática de esporte e participação em atividades de lazer.	Cadeira de rodas para basquete, bola sonora, auxílio para segurar cartas e próteses para escalada no gelo.

Em 24 de Outubro de 2012, esta classificação foi utilizada pelo Ministério da Fazenda, Ciência, Tecnologia e Inovação e pela Secretaria Nacional de Direitos Humanos da Presidência da República na publicação da Portaria Interministerial N° 362, que trata sobre a linha de crédito subsidiado para aquisição de bens e serviços de Tecnologia

Assistiva destinados às pessoas com deficiência e sobre o rol dos bens e serviços (BERSCH, 2017).

## 2.2 BREVE HISTÓRICO DA CADEIRA DE RODAS

Uma das mais antigas representações conhecidas de um veículo sobre rodas transportando uma pessoa pode ser encontrada em um vaso grego do século VI a.C. (Fig. 2.1), enquanto uma escultura de pedra incisa mil anos depois pode ser a representação mais antiga de uma cadeira de rodas. Esta, apresentada na Fig. 2.2, vem da China, único país da metade oriental da Ásia em que as cadeiras de rodas eram usadas antes dos tempos modernos, e está datada por volta de 525 d.C. (KAMENETZ, 1969).

Figura 2.1 - Vaso grego feito em 530 a.C. retratando uma criança em uma cama com rodas (KAMENETZ, 1969).



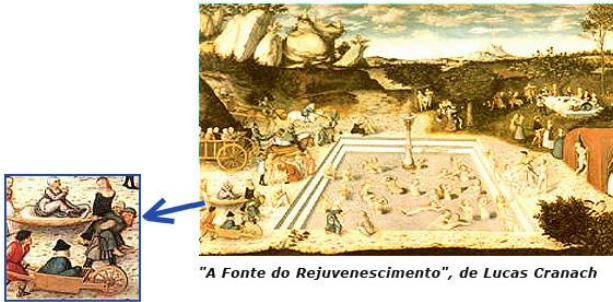
Figura 2.2 - Detalhe em uma sarcófago chinês, entalhado em pedra, mostrando idoso usando uma cadeira de rodas (KAMENETZ, 1969).



Também vindo da China, o carrinho de mão surge como uma grande alternativa no transporte. Presumindo-se que tenha sido

inventado no século III d.C., este veículo chegou à Europa no século XII, na rota das Cruzadas. Além de ter sido muito útil para o transporte de cargas de qualquer tipo, também era usado como transporte de pessoas doentes. Em sua pintura de 1546 (Fig. 2.3), Lucas Cranach retrata deficientes físicos e pessoas idosas sendo levadas até a fonte da juventude, por meio de carruagens puxadas por cavalos, carregadas nos ombros de homens, e também em carrinhos de mão (KAMENTEZ, 1969).

Figura 2.3 - Homem sendo transportado em um carrinho de mão (SILVA et al., s.d.).



A Fig. 2.4 mostra como a cadeira de rodas foi evoluindo a partir do século XII, apresentando diferentes configurações e maior possibilidade de regulagens. A obra da Dra. Sawatzky, ortopedista de Vancouver - Canadá, mostra o rei da Espanha Felipe II, em 1595, em uma cadeira de rodas que possuía mecanismos para inclinação e repouso dos pés, podendo transformar-se em um leito provisório (SILVA et al., s.d.).

Figura 2.4 - Rei da Espanha, Felipe II, utilizando uma cadeira de rodas (GUGEL, 2008).





No ano de 1655, o relojoeiro Stephen Farfler criou um modelo de cadeira de rodas em que a sua movimentação era realizada pelo próprio usuário, como mostra a Fig. 2.5, dispensando o auxílio de outra pessoa como era normalmente feito (GUGEL, 2008).

Figura 2.5 - Cadeira de rodas criada por Stephen Farfler, em 1655 (GUGEL, 2008).



Com o passar dos anos, diversos modelos de cadeiras de rodas foram criados, nos quais não havia a sua produção sistemática, estas eram feitas por encomenda, ajustadas conforme a necessidade do usuário e também pelo seu poder aquisitivo. Um exemplo pode ser visto na Fig. 2.6, cadeira de rodas com duas rodas maiores abaixo do assento para garantir facilidade na movimentação. Esta era acabada em vime da Índia, pesando cerca de 25 kg (SIIVA et al., s.d.).

Figura 2.6 - Cadeira de rodas construída por volta do século XIX (SILVA et al, s.d.).



Desde então, cadeiras de rodas cada vez mais versáteis, compactas e que o próprio usuário poderia realizar a sua movimentação foram criadas, tornando-se industrializáveis e mais acessíveis às pessoas com deficiência, como mostra a Fig. 2.7, cadeira de rodas criada pelo

engenheiro H. C. Jennings, modelo que foi utilizado por muitas décadas com a marca Everest/Jennings, antes que outros modelos surgissem no mercado (SILVA et al., s.d.).

Figura 2.7 - Modelo de cadeira de rodas da marca Everest/Jennings, criada por H. C. Jennings (GUGEL, 2008).



Com o avanço industrial e com o surgimento de matéria-prima muito mais moldável e mais leve, além de uma maior demanda, as cadeiras de rodas evoluíram de uma forma surpreendente desde as primeiras décadas do Século XX. Alguns marcos referenciais sobre os aspectos da cadeira de rodas merecem destaque (FREITAS, 1997):

- 1959 – Na Inglaterra, Ray Biddle desenha uma cadeira mais leve, pesando cerca de 19 kg, e começa a produzi-la em 1961;
- 1966 – Ray Biddle produziu a primeira cadeira elétrica do mundo, que iria auxiliar os portadores de deficiência física severa, como tetraplegia;
- 1980 – Marilyn Hamilton, portadora de paraplegia, reinventa a cadeira de rodas, especialmente para esporte e atividade de vida diária, mais leve e mais compacta, pesando 12 kg;

A partir dos anos 90, foi experimentado uma constante evolução no campo das cadeiras de rodas elétricas, o que permitiu maior flexibilidade de uso por pessoas com deficiência. Cadeiras de rodas passaram de transmissão por correia para motorreductores e de controle

elétrico para eletrônico, com todas as vantagens que ele pode oferecer na programação (ATALLI et al., 2001).

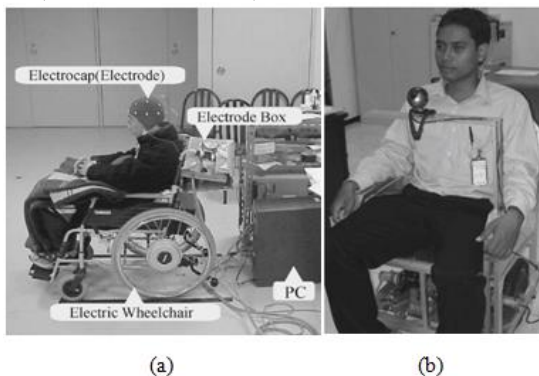
Figura 2.8 - Inventor canadense, George Klein, em uma das primeiras cadeiras de rodas elétricas (DOYLE, 2017).



Com os avanços na tecnologia, maior potencial computacional, e a evolução no desenvolvimento de sensores, a partir dos anos 2000 houve um grande crescimento nos estudos voltados para a melhoria na mobilidade de portadores de deficiência física, buscando tornar a cadeira de rodas mais acessível para uma maior gama de incapacidades da pessoa com deficiência.

Alguns exemplos encontrados em artigos científicos mostram diferentes alternativas no controle de cadeiras de rodas elétricas. Em seu trabalho, Tanaka et al. (2005) apresenta uma cadeira de rodas movimentada por meio de sinais de eletroencefalograma (Fig. 2.9(a)), enquanto no trabalho de Purwanto et al. (2009), o controle é baseado na direção do olhar e em propriedades do piscar dos olhos (Fig. 2.9(b)).

Figura 2.9 - (a) cadeira de rodas controlada por sinais de EEG (TANAKA, 2005); (b) cadeira de rodas controlada pela direção do olhar e piscar dos olhos (PURWANTO, 2009).



(a)

(b)

Referente ao estudo de cadeiras de rodas inteligentes (CRI), o trabalho de Braga (2010) propõe o projeto e implementação de uma plataforma de desenvolvimento de CRIs, visando ampliar as capacidades de planejamento inteligente e de ações de navegação autônoma.

Figura 2.10 - protótipo de cadeira de rodas autônoma apresentado por Braga (2010).



Alguns modelos de cadeiras de rodas comerciais mostram a atual busca por diferentes conceitos na locomoção de deficientes físicos. Um exemplo é a Tek RMD, apresentada na Fig. 2.11, desenvolvida pela empresa Matia Robotics. Nela o usuário pode alterar a posição do seu corpo, permitindo manter-se em pé enquanto é realizada a locomoção.

Figura 2.11 - Exemplo de tecnologia implantada para a movimentação de deficientes físicos (MATIA ROBOTICS, 2018).



## 2.3 CLASSIFICAÇÃO DAS CADEIRAS DE RODAS

Existem diversas classificações do produto cadeira de rodas. O que as difere são os pontos analisados, variando desde a finalidade à qual a cadeira de rodas é utilizada ao grau de complexidade tecnológica presente no produto.

O trabalho de Alvarenga (2002) classifica os tipos de cadeiras de rodas em dois grupos: cadeiras de rodas manuais e cadeiras de rodas motorizadas, estes subdivididos em categorias.

O grupo das cadeiras de rodas manuais apresenta a seguinte subdivisão:

- Cadeiras de peso leve / Cadeiras esportivas: modelo mais popular para uso cotidiano de uma pessoa com mobilidade superior, pesando aproximadamente 15 kg;
- Cadeira de rodas para crianças / jovens: cadeiras ajustáveis para o crescimento do usuário, e adaptáveis a ambientes de sala de aula;
- Cadeiras especiais: projetadas para acomodar variados estilos de vida e necessidades especiais do usuário. Exemplos: cadeiras de diferentes tamanhos, com diferentes alturas em relação ao chão, impulsionadas por meio de uma mão para pessoas com paralisia em um lado do corpo, mais robustas para pessoas obesas, cadeiras com três rodas utilizada por atletas, etc.

Em relação ao grupo de cadeiras de rodas motorizadas, Alvarenga (2002) apresenta que, até 1993, existiam dois estilos básicos de cadeiras de rodas motorizadas no mercado: o estilo tradicional e o modelo plataforma de cadeiras de rodas motorizadas.

O modelo tradicional, mais comum em uso atualmente, consiste em uma cadeira de rodas semelhante ao modelo padrão, com uma estrutura robusta para resistir ao peso dos motores, baterias e sistema de controle.

O modelo plataforma de cadeira de rodas motorizada consiste em uma plataforma de assento móvel localizada sobre a base do motor. Este inclui elevadores embutidos para permitir ao usuário elevar e abaixar a plataforma.

A massa de uma cadeira de rodas motorizada, juntamente com o usuário, pode passar 120 kg, e atingir velocidades máximas na ordem de 2 a 15 km/h.

Apresentando uma classificação por modelos, Lianza (1994) estabelece uma divisão em quatro grupos:

- Cadeira de rodas de armação rígida: usada somente em ambientes internos e em casos excepcionais;
- Cadeira de rodas dobráveis: para uso interno e externo, e com propulsão manual;
- Cadeira de rodas motorizada: para uso de tetraplégicos com ampla paralisia dos membros superiores;
- Cadeira de rodas para esporte: feitas com materiais leves e submetidas a desenho aerodinâmico.

Voltado para a área de desenvolvimento de produto, Bartoncello et al. (2002) baseia-se no grau de tecnologia presente, classificando as cadeiras de rodas em produtos de baixa, de média e de alta complexidade tecnológica.

Um produto de baixa complexidade tecnológica apresenta problemas, os quais permitem que o projetista os resolva levando ao desenvolvimento de um novo produto. Novo produto é entendido como algo inexistente no mercado, e também diferente de projetos já divulgados.

Para o desenvolvimento de produtos de média complexidade tecnológica, é necessária a contribuição de profissionais de diferentes áreas, para a resolução de problemas específicos. No grupo dos produtos de alta complexidade tecnológica, o projetista trabalha de forma mais ampla na abordagem conceitual e metodológica.

As cadeiras de rodas de alto grau de complexidade tecnológica foram denominadas de Eletroeletrônicas; as de média complexidade de Eletromecânicas, e as de baixa complexidade de Mecanomanuais, como mostrado a seguir:

- Eletroeletrônica: cadeiras com dispositivos elétricos e/ou eletrônicos, que podem utilizar princípios computacionais. Estas são mais úteis em casos cujas as perdas funcionais e

motoras sejam amplas ou graves. Um exemplo são cadeiras conduzidas pela voz do usuário.

- **Eletromecânicas:** normalmente conhecidas como motorizadas. Utilizadas em casos em que há a necessidade de percorrer grandes distâncias, ou se houver impossibilidade de condução manual independente. Se apresentando em diferentes modelos e com características próprias do fabricante, estão incluídas nesse grupo os veículos pessoais elétricos e os triciclos elétricos. Estes produtos buscam proporcionar autonomia na locomoção e podem ser dirigidos com apenas uma mão.
- **Mecanomanuais:** são conduzidas pelo trabalho muscular do próprio usuário, ou por auxílio de uma outra pessoa. Não possuem mecanismos complexos, porém se diferenciam pelas suas funcionalidades.

## 2.4 MODELAGEM LAGRANGEANA

O princípio fundamental dentro da formulação lagrangeana é o princípio da menor ação. A ação é definida como a integral no tempo de uma função chamada lagrangeano, que consiste na energia cinética menos a energia potencial do sistema (ROSA, 2008). Segue o sistema não-restrito de  $N$  partículas:

$$L(t, x, \dot{x}) = K(t, \dot{x}) - V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{x}_i|^2 - V(t, x, \dot{x}) \quad (2.1)$$

onde  $|\cdot|$  denota a norma Euclidiana,  $K$  a energia cinética e  $V(t, x, \dot{x})$  a energia potencial.

Caso alguma restrição da forma  $x = X(t, q)$  seja imposta, ou mais explicitamente:

$$x_i = X_i(t, q_1, \dots, q_d), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

com  $X = (X_i)_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d, 1 \leq d \leq N$ , e  $q$  como as coordenadas generalizadas, o lagrangeano toma a seguinte forma:

$$L_r(t, q, \dot{q}) = K_r(t, q, \dot{q}) - V_r(t, q, \dot{q}) \quad (2.3)$$

onde  $r$  significa os termos nas novas variáveis restritas.

Considerando no momento somente uma coordenada  $x(t)$ , a ação pode ser representada pela Eq. (2.4).

$$S \equiv \int_{t_2}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (2.4)$$

Esta é uma grandeza com a dimensão (Energia)  $\times$  (Tempo), e depende de toda a função  $x(t)$ , via a Eq. (2.1). A ação  $S$  pode ser pensada como uma função de um número infinito de valores, ou seja, todo  $x(t)$  variando de  $t_1$  a  $t_2$ . Considerando a função  $x(t)$ , para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , que possui seus pontos finais fixos, ou seja,  $x(t_1) = x_1$  e  $x(t_2) = x_2$  onde  $x_1$  e  $x_2$  são dados, mas arbitrariamente, a pergunta que surge é qual função  $x(t)$  produz um valor estacionário (ponto de máximo, mínimo ou de sela) de  $S$  (MORIN, 2007).

Assumindo que a função  $x_0(t)$  fornece um valor estacionário de  $S$ , e considerando a função:

$$x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t) \quad (2.5)$$

onde  $a$  é uma constante, e  $\beta(t)$  satisfaz  $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ , mantendo os pontos finais da função fixos, mas arbitrários. Quando produzida a ação representada pela Eq. (2.4), a variável  $t$  é integrada, tornando  $S$  dependente de  $a$ , em adição de  $t_1$  e  $t_2$ . Usando a regra da cadeia obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] &= \frac{\partial}{\partial a} \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial a} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} \right) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em outras palavras,  $a$  influencia  $S$  por meio do seu efeito em  $x$  e em  $\dot{x}$ . A partir da Eq. (2.5), considerando:

$$\frac{\partial x_a}{\partial a} = \beta, \quad e \quad \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} = \dot{\beta}, \quad (2.7)$$

a Eq. (2.6) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} \beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} \right) dt \quad (2.8)$$



Integrando por partes o segundo termo da equação:

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta - \int \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt \quad (2.9)$$

a Eq. (2.8) passa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.10)$$

Como  $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ , o último termo desaparece. Usando o fato de que a derivada parcial de  $S[x_a(t)]$  em relação a  $a$  deve ser zero para qualquer função de  $\beta(t)$ , devido a assunção de que  $x_0(t)$  produz um valor estacionário, isto só é verdade se a grandeza em parenteses da Eq. (2.10) (avaliada em  $a = 0$ ) for igual a zero, ou seja:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_0} \quad (2.11)$$

Com essa conclusão, chega-se ao seguinte teorema:

• **Teorema 3.1:** *se a função  $x_0(t)$  produz um valor estacionário de  $S$ , considerando-se a classe de funções cujos pontos finais são fixos (ou seja,  $x(t_1) = x_1$  e  $x(t_2) = x_2$ ), então:*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}$$

Escrevendo a posição e velocidade de cada partícula do sistema como uma função de coordenadas generalizadas  $q_i$ , e suas derivadas em relação ao tempo  $\dot{q}_i$ , o Lagrangeano torna-se  $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ . Reescrevendo, a Eq. (2.11) torna-se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.12)$$

A Eq. (2.12) é a equação de Lagrange para sistemas onde o trabalho virtual pode ser expressado como uma variação da função

potencial  $V$ . Em casos frequentes onde esse não é o caso, deve-se usar o Princípio de Hamilton (STUTTS, 2017).

### 2.4.1 Equação de Lagrange via Princípio de Hamilton

Considerando as coordenadas de cada partícula como um vetor  $r$ , a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{r}_k \cdot \dot{r}_k, \quad (2.13)$$

A variação da  $j$ -ésima posição em  $N$  coordenadas generalizadas é dada por:

$$\partial r_j = \sum_{k=1}^N \frac{\partial r_j}{\partial q_k} \partial q_k \quad (2.14)$$

O trabalho virtual dado por  $p$  forças de ação sobre  $N$  coordenadas generalizadas equivale à Eq. (2.15).

$$\partial W = \sum_{j=1}^p F_j \cdot \partial r_j = \sum_{j=1}^p F_j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\partial r_j}{\partial q_k} \partial q_k \quad (2.15)$$

Alterando a ordem do somatório, a Eq. (2.15) resulta em:

$$\partial W = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^p F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_k} \right) \partial q_k = \sum_{k=1}^N Q_k \partial q_k, \quad (2.16)$$

onde:

$$Q_k = \sum_{j=1}^p F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.17)$$

Se algumas das forças são derivadas da função potencial  $V$ , deve-se dividir o trabalho virtual em trabalho virtual conservativo, que é feito

pelas forças derivadas de  $V$ , e trabalho virtual não-conservativo, com forças não derivadas de  $V$ .

$$\partial W = \partial W^c + \partial W^{nc} = -\partial V + \sum_{k=1}^N Q_k^{nc} \partial q_k \quad (2.18)$$

Substituindo a Eq. (2.18), dentro da definição de Lagrange:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \partial L + \sum_{k=1}^N Q_k^{nc} \partial q_k \right) dt \quad (2.19)$$

e aplicando na Eq. (2.12), é obtido a equação de Langrange na sua forma mais familiar:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{nc} \quad (2.20)$$

## 2.5 PROJETO DE CONTROLE DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS

Um sistema complexo pode ter muitas entradas e saídas, e estas podem ser inter-relacionadas de uma maneira complicada. Para analisar tal sistema, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas. A abordagem de espaço de estado para a análise de sistemas é mais adequada neste ponto de vista (OGATA, 2010).

Na análise de espaço de estados, deve-se considerar três tipos de variáveis envolvidas na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. O sistema dinâmico deve envolver elementos que memorizam os valores de entrada para  $t \geq t_1$ . Como os integradores em um sistema de controle de tempo contínuo servem como dispositivos de memória, as saídas desses integradores podem ser consideradas como as variáveis que definem o estado interno do sistema dinâmico. Assim, as saídas dos integradores servem como variáveis de estado. O número de variáveis de estado para definir completamente a dinâmica do sistema é igual ao número de integradores envolvidos no sistema (OGATA, 2010).

Assumindo que um sistema com múltiplas entradas e saídas envolva  $n$  integradores. Considerando também que existem  $r$  entradas

$(u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ , e  $m$  saídas  $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ . Definido  $n$  saídas dos integradores como variáveis de estado  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , então o sistema pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

e as saídas do sistema podem ser descritas como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Reescrevendo as Eqs. (2.21) e (2.22) por meio de vetores:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & f(x, u, t) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, & g(x, u, t) &= \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

estas podem ser representadas por:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.23)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (2.24)$$

onde a Eq. (2.23) é a equação de estado e a Eq. (2.24) é a equação de saída do sistema.

Linearizando as duas equações anteriores sobre o estado operacional resulta nas seguintes equações de estados e de saídas:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.25)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.26)$$

sendo  $A(t)$  a matriz de estado,  $B(t)$  a matriz de entrada,  $C(t)$  a matriz de saída e  $D(t)$  a matriz de transmissão direta.

Considerando um sistema invariante no tempo, as Eqs. (2.25) e (2.26) podem ser representadas por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.27)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.28)$$

### 2.5.1 Análise Freqüencial de Sistemas a partir da Representação em Espaço de Estados

A equação característica é definida como sendo o polinômio do denominador da função de transferência do sistema (ou matriz de transferência) igual a zero. A matriz de transferência é obtida tomando a transformada de Laplace das equações diferenciais governantes, para condições iniciais nulas (TEWARI, 2002).

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação do estado da matriz (Eq. (2.27)) e assumindo condições iniciais nulas, produz o seguinte resultado:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.29)$$

onde  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ , e  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ . Reorganizando a Eq. (2.29), deixando-a em função dos estados, resulta em:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (2.30)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (2.31)$$

Da mesma forma, tomando a transformada de Laplace da equação de saída, a Eq. (2.28), com  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ , torna-se:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.32)$$

Substituindo a Eq. (2.31) na equação anterior resulta em:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{aligned} \quad (2.33)$$

A partir da Eq. (2.33), pode ser visto que a matriz de transferência,  $G(s)$ , definida por  $Y(s) = G(s)U(s)$ , resulta na seguinte equação:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.34)$$

A Eq. (2.34) mostra que a matriz de transferência é uma soma da matriz racional (isto é, uma matriz cujos elementos são proporções de polinômios em  $s$ ),  $C(sI - A)^{-1}B$ , e a matriz  $D$ . Desta forma,  $D$  representa uma conexão direta entre a entrada,  $U(s)$  e a saída  $Y(s)$ , e é chamada de matriz de transmissão direta. Sistemas tendo  $D = 0$  são chamados de estritamente próprios, pois os polinômios numerados dos elementos de  $G(s)$  são menores em grau do que os polinômios do denominador correspondente (TEWARI, 2002).

Usando algebra linear, a equação característica de um sistema linear invariante no tempo é obtida a partir do seguinte problema de autovalores para o sistema:

$$Av_k = \lambda_k v_k \quad (2.35)$$

onde  $\lambda_k$  é o  $k$ -ésimo autovalor da matriz  $A$ , e  $v_k$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_k$ . Desta forma a Eq. (2.35) pode ser escrita na seguinte forma:

$$(\lambda I - A)v = 0 \quad (2.36)$$

Para a solução não trivial da Eq. (2.36), ou seja,  $v \neq 0$ , a seguinte equação deve ser verdadeira:

$$|(\lambda I - A)| = 0 \quad (2.37)$$

A Eq. (2.37) é outra maneira de escrever a equação característica, cujas raízes são os autovalores  $\lambda$ . Assim, os polos da matriz de transferência são os mesmos que os autovalores da matriz  $A$ . Como  $A$  contém informações sobre a equação característica de um sistema, esta influencia todas as propriedades como estabilidade, desempenho e robustez do sistema. Por esse motivo,  $A$  é chamado de matriz de dinâmica de estado do sistema.

## 2.5.2 Controlabilidade

A questão chave que surge no projeto de controle é se todos os polos do sistema de malha fechada podem ou não ser colocados arbitrariamente no plano complexo. Os polos do sistema em malha fechada são equivalentes aos autovalores da matriz do sistema no formato de variável de estado. Se o sistema é controlável então é possível realizar o objetivo do projeto de controle, de alocar os polos precisamente nos locais desejados para atender as especificações de desempenho (DORF, 2011).

Um sistema é completamente controlável se existe um controle irrestrito  $u(t)$  que pode transferir qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outra localização desejada  $x(t)$  em um tempo finito,  $t_0 \leq t \leq T$ ." (DORF, 2011).

Para o sistema descrito na Eq. (2.27), é possível determinar se o sistema é controlável examinando a condição algébrica:

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (2.38)$$

A matriz  $A$  tem dimensão  $n \times n$  e a matriz  $B$  tem dimensão  $n \times m$ .

Técnicas avançadas de projeto de variáveis de estado podem lidar com situações em que o sistema não é completamente controlável, mas seus estados (ou suas combinações lineares) que não podem ser controlados são inerentemente estáveis. Estes sistemas são classificados como estabilizáveis.

Se um sistema é completamente controlável, também é estabilizável. A decomposição do espaço de estados de Kalman fornece um mecanismo para particionar o espaço de estados para que fique aparente quais estados, ou combinação de estados, são controláveis e quais não são. O subespaço controlável é assim exposto, e se o sistema é estabilizável, e o projeto do sistema de controle, em teoria, é possível (DORF, 2011).

### 2.5.3 Observabilidade

A observabilidade refere-se à capacidade de estimar uma variável de estado.

Um sistema é completamente observável se e somente se existe um tempo finito  $T$  tal que o estado inicial  $x(0)$  possa ser determinado a partir do histórico de observações  $y(t)$  dado o controle  $u(t)$ , em  $0 \leq t \leq T$ .” (DORF, 2011).

Considerando o sistema representado pelas Eqs. (2.27) e (2.28), este é completamente observável quando o posto da matriz de observabilidade  $P_o$  é igual a  $n$ , onde:

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

na qual é uma matriz de dimensão  $n \times n$ .

Da mesma forma como foi descrito no caso de controlabilidade, existem situações em que o sistema não é completamente observável, mas onde os estados (ou suas combinações lineares) que não podem ser observadas são inerentemente estáveis. Esses sistemas são classificados como detectáveis. Se um sistema é completamente observável, ele



também é detectável. A decomposição do espaço de estados de Kalman fornece um mecanismo para particionar o espaço de estados para que fique aparente quais estados são observáveis. Desta forma, o subespaço é exposto, e se o sistema é detectável, o projeto do sistema de controle, em teoria, pode prosseguir (DORF, 2011).

### 2.5.4 Compensador estático com inclusão de integrador na malha direta (controle PI)

A partir do diagrama apresentado na Fig. 2.12, considera-se:

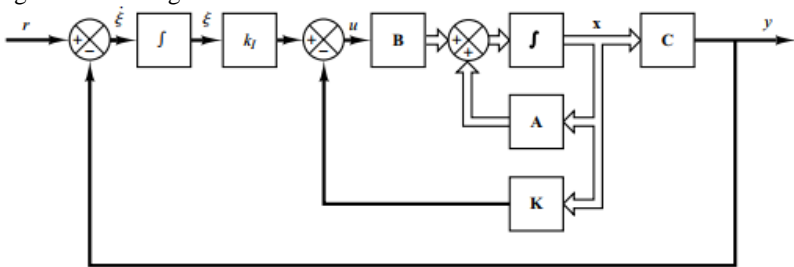
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.40)$$

$$y = Cx \quad (2.41)$$

$$u = -Kx + k_I \xi \quad (2.42)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (2.43)$$

Figura 2.12 - Diagrama de controle do sistema.



Assumindo que o sinal de referência  $r$  é aplicado em  $t = 0$ , para todo  $t > 0$  a dinâmica do sistema pode ser descrita por uma equação que combina as Eqs. (2.40) e (2.43):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.44)$$

O projeto do controlador busca alcançar um sistema assintoticamente estável tal que  $x(\infty)$ ,  $\xi(\infty)$  e  $u(\infty)$  se aproximem de

valores constantes. Desta forma, no estado estacionário,  $\dot{\xi} = 0$ , e a saída  $y(\infty) = r$ .

A Eq. (2.45) é equivalente ao estado estacionário.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (2.45)$$

Assumindo que o sinal de referência  $r$  é uma função degrau, isto é  $r(\infty) = r(t) = r(\text{constante})$  para  $t > 0$ , e subtraindo a Eq. (2.45) com a Eq. (2.44), resulta em:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Definindo:

$$x(t) - x(\infty) = x_e(t) \quad (2.47)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t) \quad (2.48)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t) \quad (2.49)$$

a Eq. (2.46) pode ser reescrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2.50)$$

onde:

$$u_e(t) = -Kx_e(t) + k_I \xi_e(t) \quad (2.51)$$

Definindo um novo vetor do erro  $e(t)$ , de ordem  $(n + 1)$ :

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

a Eq. (2.50) torna-se:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (2.53)$$

onde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Desta forma, a Eq. (2.51) equivale a:

$$u_e = -\hat{K}e \quad (2.55)$$

sendo:

$$\hat{K} = [K \quad : \quad -k_I] \quad (2.56)$$

Se os autovalores desejados da matriz (isto é, os polos do sistema em malha fechada desejados) forem especificados como  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ , então a matriz de ganho de realimentação de estados  $K$  e a constante de ganho integral  $k_I$  podem ser encontradas por meio de técnicas de posicionamento de polos, desde que o sistema definido pela Eq. (2.40) seja completamente controlável (OGATA, 2010).

### 2.5.5 Controle Ótimo - Regulador Linear Quadrático (LQR)

Como alternativa em selecionar a localização dos autovalores do sistema em malha fechada para atingir certos objetivos de operação, os ganhos do controlador por realimentação de estados podem ser encontrados pela otimização de uma função custo. Este método pode ser particularmente útil em equilibrar o desempenho do sistema com a magnitude do sinal de controle necessária para atingir esse nível de desempenho (ASTROM, 2009).

Dado o sistema linear invariante no tempo representado pelas Eqs. (2.40) e (2.41), com uma lei de controle:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.57)$$

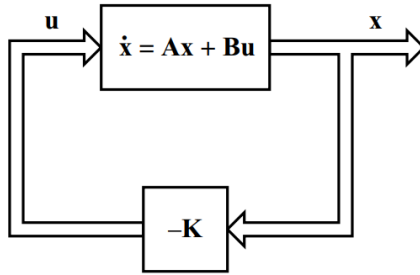
baseada no diagrama de blocos com uma configuração ótima representado pela Fig. 2.13, a técnica de projeto de controle ótimo LQR

(*Linear Quadratic Regulator*) consiste em encontrar o sinal de controle  $u(t)$  que minimize a função custo:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt \quad (2.58)$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes definidas positivas que ponderam a energia dos estados e do sinal de controle.

Figura 2.13 – Sistema ótimo (OGATA, 2010)



O termo  $\int_0^{\infty} y(t)' Q y(t)$  fornece uma medida da energia de saída, e o termo  $\int_0^{\infty} u(t)' R u(t)$  fornece uma medida da energia do sinal de controle. As matrizes  $Q$  e  $R$  são escolhidas conforme os critérios de operação do controlador. Quando  $R$  é muito maior que  $Q$ , a maneira mais efetiva de minimizar  $J_{LQR}$  é aplicar uma pequena entrada de controle, as custas de uma saída grande. Quando  $R$  é muito menor que  $Q$ , a melhor forma de minimizar  $J_{LQR}$  é obter uma saída muito pequena, mesmo que isso seja alcançado as custas de empregar uma entrada de controle grande (HESPANHA, 2009).

Considerando o sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (2.59)$$

e assumindo que a matriz  $A - BK$  é estável, ou que os autovalores de  $A - BK$  possuem parte real negativa, a Eq. (2.58) pode ser reescrita substituindo o sinal de controle  $u(t)$  pela lei de controle definida pela Eq. (2.57).

$$\begin{aligned}
 J_{LQR} &= \int_0^{\infty} (x'Qx + x'K'RKx) dt \\
 &= \int_0^{\infty} x'(Q + K'RK)x dt
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Definindo:

$$x'(Q + K'RK)x = -\frac{d}{dt}(x'Px) \tag{2.61}$$

onde  $P$  é uma matriz hermitiana definida positiva, é possível obter:

$$\begin{aligned}
 x'(Q + K'RK)x &= -\dot{x}'Px - x'P\dot{x} \\
 &= -x'[(A - BK)'P + P(A - BK)]x
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Comparando ambos os lados da Eq. (2.62) e observando que esta equação deve ser verdadeira para qualquer valor de  $x$ , é exigido que:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) = -(Q + K'RK) \tag{2.63}$$

Como foi assumido que o sistema em malha fechada, representado pela Eq. (2.59), é estável, sempre existirá uma matriz  $P$  definida positiva que satisfaça a Eq. (2.63). Da mesma forma, se a solução da Eq. (2.63) encontrar uma matriz  $P$  definida positiva, o sistema é estável (OGATA, 2010).

A função custo  $J_{LQR}$  pode ser avaliada na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 J_{LQR} &= \int_0^{\infty} x(Q + K'RK)x dt = -x'Px \Big|_0^{\infty} \\
 &= -x'(\infty)Px(\infty) + x'(0)Px(0)
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Com  $x(\infty) \rightarrow 0$  (todos os autovalores de  $A - BK$  possuem parte real negativa), então é obtido:

$$J_{LQR} = x'(0)Px(0) \tag{2.65}$$

Desta forma, a função custo  $J_{LQR}$  pode ser obtida em termos da condição inicial  $x(0)$  e da matriz  $P$ .

A solução do problema do controlador ótimo LQR pode ser encontrada por meio da solução da equação de Riccati. Inicialmente, considera-se que  $R$  é uma matriz definida positiva, então esta pode ser escrita como sendo:

$$R = T'T \quad (2.66)$$

Onde  $T$  é uma matriz não-singular. A Eq. (2.63) então torna-se:

$$\begin{aligned} (A' - K'B')P + P(A - BK) + Q + K'T'TK &= 0 \\ A'P + PA + [TK - (T')^{-1}B'P]'[TK - (T')^{-1}B'P] & \\ - PBR^{-1}B'P + Q &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

A minimização de  $J_{LQR}$  em função dos ganhos do controlador  $K$  requer a minimização do termo:

$$x'[TK - (T')^{-1}B'P]'[TK - (T')^{-1}B'P]x \quad (2.68)$$

Como a expressão anterior é não-negativa, a minimização ocorre quando:

$$TK = (T')^{-1}B'P \quad (2.69)$$

então:

$$K = T^{-1}(T')B'P = R^{-1}B'P \quad (2.70)$$

Desta forma, a lei de controle ótimo que minimiza a função custo de performance do sistema (Eq. (2.58)) é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B'Px(t) \quad (2.71)$$

Para determinar a matriz  $P$ , esta deve satisfazer a Eq. (2.63) ou a equação de matriz-reduzida de Riccati, apresentada abaixo:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (2.72)$$

O projeto de controle ótimo resume-se em encontrar uma matriz  $P$  que solucione a equação de matriz-reduzida de Riccati encontrada na

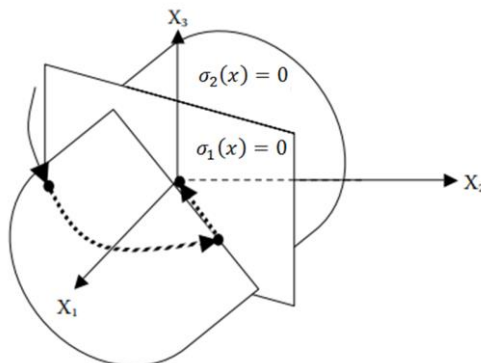
Eq. (2.72), e substituí-la na lei de controle  $u(t)$  representada pela Eq. (2.71). Se existir uma matriz  $P$  definida positiva, então o sistema em malha fechada é estável. As matrizes  $Q$  e  $R$  devem ser escolhidas pelo projetista conforme os critérios de desempenho estabelecidos e as limitações na ação de controle (OGATA, 2010).

## 2.6 CONTROLE ROBUSTO – MODOS DESLIZANTES (MD)

Sistemas de controle por Modos deslizantes têm provado ser uma eficiente ferramenta para o controle de plantas complexas, de dinâmica não linear e de alta ordem, operando sob condições incertas, um problema comum para muitos processos de tecnologia. O mesmo se caracteriza por uma lei de controle chaveada em alta frequência, que ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies (chamadas de superfícies de deslizamento) no espaço de estados. (UTKIN, 2009).

As superfícies de deslizamento são projetadas de modo com que a dinâmica do sistema obedeça a um comportamento desejado quando em deslizamento. Uma lei de controle chaveada é utilizada para conduzir e manter a trajetória dos estados da planta na superfície especificada ou sobre a interseção de todas as superfícies escolhidas, conforme mostra a Fig. 2.14. Modo deslizante é o nome dado quando o estado atinge esta superfície e nela permanece, e sob esta condição, o comportamento do sistema sofre menor influência por parte de alterações paramétricas ou distúrbios externos, caracterizando um sistema robusto. A lei de controle projetada deve assegurar que a trajetória de estados seja conduzida à superfície de deslizamento (alcançabilidade) e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (atratividade) (UTKIN, 1992).

Figura 2.14 – Modos deslizantes bidimensional



Desta forma, a primeira etapa de projeto é selecionar uma superfície de deslizamento em que a dinâmica do sistema, quando em deslizamento, tenha um comportamento desejado. Métodos de teoria de controle convencional, como alocação de polos e otimização dinâmica, podem ser utilizados nesta etapa. A segunda etapa de projeto consiste em encontrar uma lei de controle descontínua que satisfaça as condições de alcançabilidade e atratividade.

### 2.6.1 Superfície de Deslizamento

Considera-se uma classe de sistemas não-lineares no vetor de estado  $x(t)$  e lineares no vetor de controle  $u(t)$ , conforme a equação abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + B(t, x)u(t) \quad (2.73)$$

onde o vetor de estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , o vetor de controle  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ , e  $B(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Cada entrada  $u_i(t)$  pertencente ao controle chaveado  $u(t)$  tem a seguinte forma:

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{com } \sigma_i > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{com } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.74)$$

onde  $\sigma_i(x) = 0$  é a  $i$ -ésima superfície de deslizamento associada à superfície de deslizamento de dimensão  $(n - m)$ :

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0 \quad (2.75)$$

A Eq. (2.75) representa um espaço fechado de dimensão  $(n - m)$  em  $\mathbb{R}^n$ , determinado pela intersecção de superfícies de deslizamento  $\sigma_i(x) = 0$  de dimensão  $m(n - 1)$ . O projeto da superfície de deslizamento é desenvolvido de modo que a resposta do sistema em  $\sigma(x) = 0$  tenha o comportamento desejado, como estabilidade e seguimento de referência (DE CARLO et al., 1988).

Por simplicidade, a Eq. (2.75) pode ser definida como sendo uma superfície de deslizamento linear na forma:



$$\sigma(x) = S x(t) = 0 \quad (2.76)$$

onde  $S$  é uma matriz de dimensão  $(n \times m)$ .

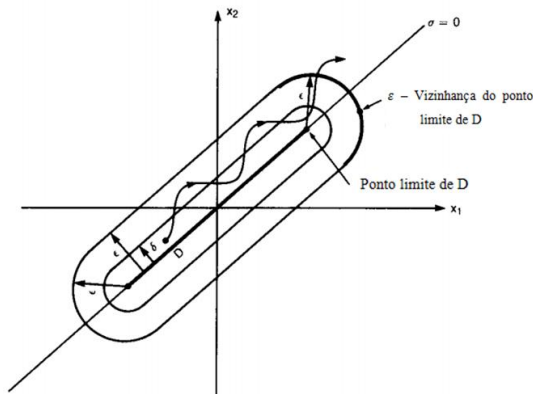
### 2.6.2 Condições de Existência de um Modo Deslizante

A existência do modo deslizante requer que a tangente ou o vetor de velocidade da trajetória do estado sempre aponte para a superfície de deslizamento. Consequentemente, no momento em que a trajetória do estado intercepta a superfície, esta permanece em uma vizinhança de atração  $\varepsilon$  de  $\{x|\sigma(x) = 0\}$ , ou seja, os estados devem aproximar-se da superfície assintoticamente.

Como o problema de existência de um modo deslizante assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada, o segundo método de Lyapunov fornece um conjunto natural para a análise. A estabilidade do sistema para a superfície de deslizamento  $\sigma(x) = 0$  requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada  $V(t, x(t))$ , que é definida positiva e tem uma derivada negativa em relação ao tempo, na região de atração (DECARLO et al., 1988).

Um domínio  $D$  no espaço fechado  $\sigma = 0$  é um domínio de modo deslizante se para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança  $\delta$  de dimensão  $n$  de  $D$  pode deixar a vizinhança  $\varepsilon$  de dimensão  $n$  de  $D$  somente através da vizinhança  $\varepsilon$  de dimensão  $n$  da fronteira de  $D$  (Fig. 2.15) (DE CARLO et al., 1988).

Figura 2.15 - Domínio do modo deslizante em um plano bidimensional



Para fins ilustrativos, considera-se a dinâmica do movimento unidimensional de uma massa unitária, com as variáveis de posição e velocidade representadas por  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente (SHTESSEL et al., 2014).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (2.77)$$

A variável de controle é representada por  $u$ , e o termo de perturbações por  $f(x_1, x_2, t)$ , este assumido como sendo limitado, isto é,  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$ .

Considerando uma superfície de deslizamento na seguinte forma:

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, \quad c > 0 \quad (2.78)$$

o sistema quando em deslizamento, isto é,  $x_2 + cx_1 = 0$ , terá uma taxa de convergência conforme a Eq. (2.79).

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) \exp(-ct) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -cx_1(0) \exp(-ct) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Desta forma, o objetivo do projeto de controle é levar a variável  $\sigma$  a zero em um tempo finito, com a presença da perturbação limitada  $f(x_1, x_2, t)$ . Este problema pode ser resolvido aplicando técnicas de função de Lyapunov à dinâmica de  $\sigma$ :

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad (2.80)$$

A função de Lyapunov é introduzida na seguinte forma:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (2.81)$$

Em ordem de prover a estabilidade assintótica da dinâmica de  $\sigma$  sobre o ponto de equilíbrio  $\sigma = 0$ , as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- a)  $\dot{V} < 0$  para  $\sigma \neq 0$
- b)  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$

A condição (b) é satisfeita pela função de Lyapunov apresentada na Eq. (2.81). Para alcançar a convergência em tempo finito (estabilidade global em tempo finito), a condição (a) pode ser modificada para:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha > 0 \quad (2.82)$$

Separando as variáveis e integrando a inequação acima ao longo do intervalo de tempo  $0 \leq \tau \leq t$ , é obtido:

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0) \quad (2.83)$$

Consequentemente,  $V(t)$  chega a zero em um tempo finito  $t_r$  limitado por:

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}}{\alpha} \quad (2.84)$$

Portanto, um controle  $u$  que é calculado para satisfazer a Eq. (2.82) conduzirá a variável  $\sigma$  a zero em tempo finito e a manterá em zero a partir de então.

A derivada de  $V$  é computada na seguinte forma:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u) \quad (2.85)$$

Assumindo  $u = -cx_2 + v$  e substituindo na equação anterior, é obtido:

$$\dot{V} = \sigma(f(x_1, x_2, t) + v) = \sigma f(x_1, x_2, t) + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v \quad (2.86)$$

Selecionando  $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$ , onde:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

com  $\rho > 0$ , e substituindo a lei de controle descontínua na Eq. (2.86) é obtido:

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L) \quad (2.88)$$

Levando em consideração a Eq. (2.81), a condição representada pela Eq. (2.82) pode ser reescrita como:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|, \quad \alpha > 0 \quad (2.89)$$

Combinando as Eqs. (2.88) e (2.89), é obtido:

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (2.90)$$

Finalmente, o ganho  $\rho$  é computado como sendo:

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (2.91)$$

Conseqüentemente, uma lei de controle  $u$  que leva  $\sigma$  a zero em um tempo finito, conforme a Eq. (2.84), é:

$$u = -cx_2 - \rho \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.92)$$

A condição representada pela Eq. (2.82), é equivalente a:

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (2.93)$$

e é frequentemente denominada condição de existência. Atender à condição anterior significa que a trajetória do sistema na Eq. (2.77) é dirigida para a superfície de deslizamento  $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$  e nela permanece.

### 2.6.3 Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente é um meio de determinar a dinâmica do sistema restrito à superfície de deslizamento  $\sigma(x) = 0$ . Conforme descrito anteriormente, a trajetória da planta intercepta a superfície de deslizamento e o modo deslizante existe para  $t \geq t_r$ . A existência de um modo deslizante implica que  $\dot{\sigma}(x) = 0$  e  $\sigma(x) = 0$  para todo  $t \geq t_r$  (DE CARLO et al., 1988).

Pela regra da cadeia:

$$\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = 0 \quad (2.94)$$

e substituindo  $\dot{x}$  pelo sistema apresentado na Eq. (2.73), obtém-se:

$$\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(x, t) + B(x, t) u_{eq}] = 0 \quad (2.95)$$

onde  $u_{eq}$  é chamado de controle equivalente e soluciona a equação anterior.

Para calcular  $u_{eq}$  deve-se assumir que o produto matricial  $\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(x, t)$  é não singular para todo  $t$  e  $x$ . Desta forma:

$$u_{eq} = - \left[ \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t) \quad (2.96)$$

A dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento  $\sigma(x(t_s)) = 0$ , para  $t \geq t_r$ , é dado por:

$$\dot{x} = \left[ I - B(x, t) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(x, t) \quad (2.97)$$

No caso de uma superfície de controle linear na forma da Eq. (2.76), a Eq. (2.97) é reduzida para:

$$\dot{x} = [I - B(x, t)[S B(x, t)]^{-1} S] f(x, t) \quad (2.98)$$

A Eq. (2.98) em conjunto com a restrição  $\sigma(x) = 0$  determina a dinâmica do sistema na superfície de deslizamento, esta governada por um conjunto de equações de ordem reduzida.

#### 2.6.4 Trepidação

Um modo deslizante ideal existe somente quando a trajetória do estado  $x(t)$  da planta satisfaz  $\sigma(x(t)) = 0$  para todo  $t \geq t_r$ . Isto requer chaveamentos infinitamente rápidos. Em sistemas reais, todas as

funções com controle chaveados tem imperfeições tais como retardamento, histereses, etc., que forçam os deslizamentos ocorrerem em uma frequência finita. A trajetória do estado então oscila em uma certa vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é chamada de trepidação. Portanto, o modo deslizante real não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite (UTKIN, 1992).

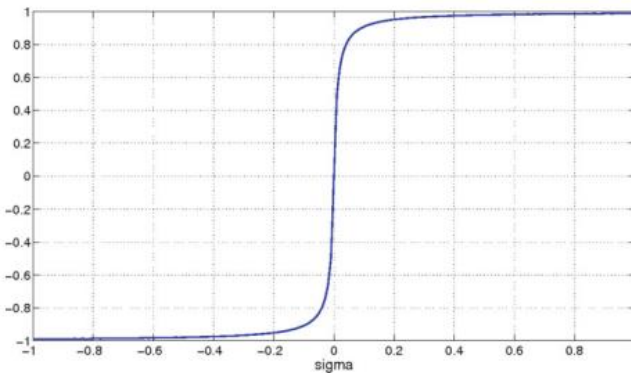
Em muitos sistemas de controle práticos, como motores CC e controle de aeronaves, é importante evitar a trepidação gerando um sinal de controle contínuo/suave. Uma das metodologias utilizadas neste caso é a chamada quase modos deslizantes (SHTESSEL et al., 2014).

Esta metodologia aproxima a função descontínua  $v(\sigma) = -\rho \text{sign}(\sigma)$  por uma função sigmoidal:

$$\text{sign}(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon} \quad (2.99)$$

onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo pequeno. O valor de  $\varepsilon$  deve ser selecionado para compensar os requerimentos de manter um desempenho ideal com o de garantir uma ação de controle suave. A função sigmoidal (Eq. (2.99)) é representada pela Fig. 2.16.

Figura 2.16 - função sigmoidal (SHTESSEL et al., 2014).



### 3 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO DESENVOLVIDO

Este capítulo apresenta uma visão geral do desenvolvimento do protótipo utilizado no trabalho. O objetivo deste capítulo é fornecer ao leitor alguma orientação para melhor entendimento do veículo, antes de entrar nos detalhes matemáticos. Vale reforçar que o objetivo principal do desenvolvimento do protótipo é a validação do projeto de controle aplicado, portanto, critérios como ergonomia não serão apresentados no trabalho.

#### 3.1 PROJETO MECÂNICO

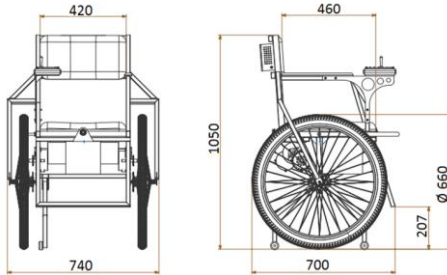
O sistema mecânico foi desenvolvido visando a praticidade na construção, o baixo custo, e a sua funcionalidade. Foi tomado maior preocupação quanto à distribuição de massa do protótipo em conjunto com a massa do usuário, visando proporcionar conforto na locomoção e um melhor funcionamento. A modelagem 3D foi desenvolvida utilizando o *software* siemens NX 11.0.

A Fig. 3.1 apresenta o protótipo, e a Fig. 3.2 mostra algumas dimensões gerais.

Figura 3.1 – O protótipo.



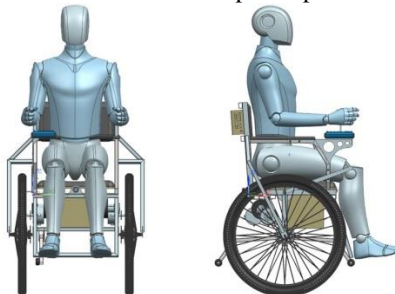
Figura 3.2 - Dimensões gerais do protótipo (escala em milímetros).



Como pode ser visto na figura anterior, o protótipo possui dimensões de 740 mm de largura, 700 mm de comprimento e 1050 mm de altura. A altura entre o solo e o apoio para os pés é de 207 mm, medida definida considerando os possíveis obstáculos no terreno, como degraus ou subidas íngremes. A roda utilizada no projeto é uma roda de bicicleta, aro de 26”.

O assento possui dimensões de 420 mm de largura e 460 mm de comprimento. Dimensões não ideais visto a possibilidade de utilização do veículo por uma pessoa obesa. Este espaço tornou-se limitado devido à preocupação na largura total do veículo, visando uma locomoção mais segura em espaços restritos, como por exemplo a passagem por portas. A Fig. 3.3 mostra o posicionamento do usuário no protótipo.

Figura 3.3 – Posicionamento do usuário no protótipo.



O chassi é composto basicamente por tubos de aço carbono, pesando no total cerca de 9 kg. São utilizados dois motores elétricos, cada um pesando 5,32 kg, e duas baterias seladas, as duas pesando ao total 14 kg. Com cada roda pesando cerca de 2 kg, e considerando os componentes elétricos e acabamentos, o peso total do protótipo é de aproximadamente 45 kg. Comparando este resultado com os modelos de



cadeiras de rodas elétricas comerciais, o peso atingido se encontra na média encontrada dentre as cadeiras de rodas elétricas mais leves. O peso de cadeiras de rodas modernas se encontra na faixa de 40 kg a 70 kg, desconsiderando cadeiras de rodas elétricas especiais, que pesam cerca de 20 kg.

A Fig. 3.4 apresenta a distribuição dos componentes.

Figura 3.4 - Distribuição dos componentes.



A distribuição foi feita tencionando manter a localização do centro de massa do protótipo em uma posição favorável, considerando também o centro de massa do usuário. A posição do centro de massa do protótipo pode ser observada na Fig. 3.5(a). Conforme SANSTSHI et. al (1963), o centro de massa do corpo humano na posição sentada pode ser observada na Fig. 3.5(b), desta forma, a localização do centro de massa total entre o protótipo e o usuário é representada pela Fig. 3.6.

Figura 3.5 – (a) Posição do centro de massa do protótipo (medida em milímetros); (b) Posição do centro de massa do corpo humano na posição sentada (SANSTSHI et. al, 1963).

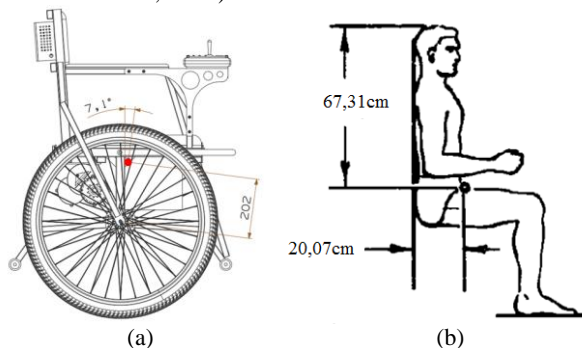
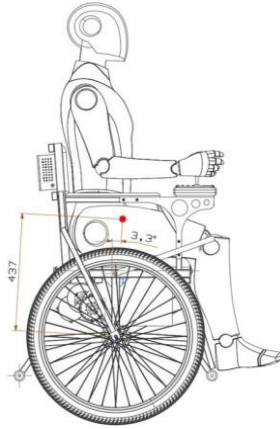
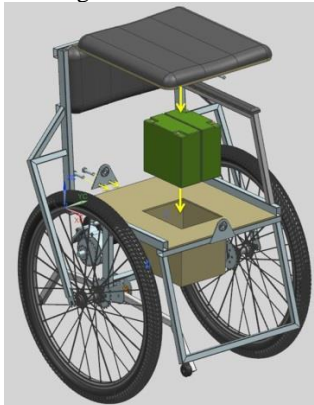


Figura 3.6 – Posição do centro de massa total.



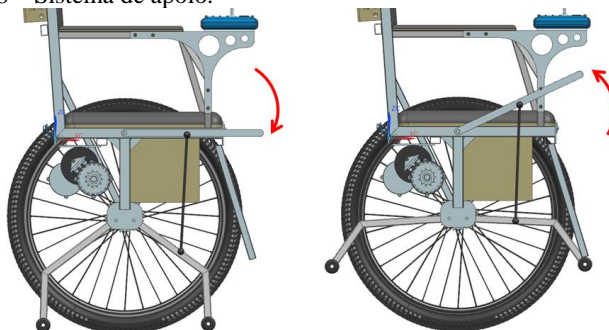
O protótipo possui assento móvel, responsável pelo comando de curva. Conforme é mostrado na Fig. 3.7, o assento é fixado por dois suportes nas extremidades da base da estrutura por meio de um eixo, possibilitando a sua movimentação. Abaixo do assento existem duas células de carga fixadas em cada extremidade lateral da base, responsáveis pela identificação da inclinação do tronco do usuário no sentido lateral, desta forma alterando o *setpoint* de velocidade de curva desejada. O comando de curva também pode ser acionado por um *joystick*, podendo ser alternado conforme a necessidade do usuário. A alocação das baterias depende da remoção do assento.

Figura 3.7 – Esquema de montagem das baterias e do assento móvel.



Outro sistema mecânico móvel presente no protótipo é o sistema de apoio, apresentado na Fig. 3.8. Este é acionado por uma alavanca na lateral direita, movimentando dois suportes que entram em contato com o chão. O objetivo do sistema de apoio é a sua utilização em situações em que o usuário deseja permanecer na mesma posição, permitindo que o sistema seja desligado.

Figura 3.8 – Sistema de apoio.



O sistema de transmissão foi desenvolvido por um sistema de correias. O pinhão, fixado no motor, possui 11 dentes, enquanto a coroa fixada na roda possui 24 dentes. Somando com a redução da caixa de transmissão do motor, de relação 1:6,67, a relação de transmissão total entre o motor e as rodas é de 1:14,55.

O projeto com maiores detalhes de dimensões e disposição dos componentes pode ser observado no Apêndice A.

### 3.2 SISTEMA ELÉTRICO, ELETRÔNICO E SENSORIAMENTO.

O sistema elétrico é centrado nas baterias e na distribuição da tensão e corrente para os subsistemas. São utilizadas duas baterias seladas de 12 V e 24 Ah, ligadas em série totalizando 24 V. A Fig. 3.9 apresenta o diagrama conceitual do sistema elétrico.

Os componentes utilizados podem ser observados na Tab. 3.1.

O sensoriamento de inclinação do protótipo é realizado pelo sensor MPU-6050, apresentado na Fig. 3.10(a). Este é um MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*) de rastreamento de movimento de 6 eixos, combinando um acelerômetro e um giroscópio, ambos de 3 eixos. Além dos sensores, possui o recurso *Digital Motion Processor* (DMP), utilizado em aplicações como reconhecimento de gestos, navegação, robótica, entre outras. A comunicação com todos os

registros do dispositivo é realizada por meio de um protocolo I2C a 400 kHz.

Figura 3.9 – Diagrama esquemático do sistema elétrico.

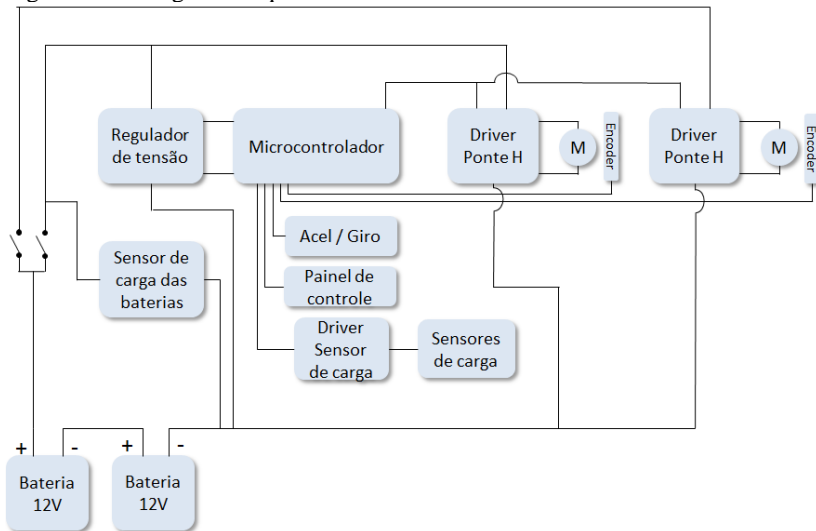


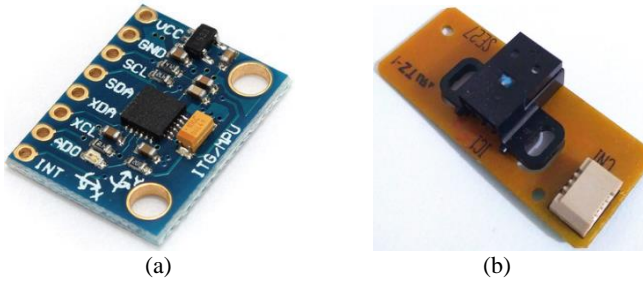
Tabela 3.1 – Lista de componentes utilizados.

<b>Descrição</b>	<b>qtd</b>
Arduino DUE	1
Driver Ponte H 43a Bts7960	2
Acelerômetro e giroscópio 6DOF MPU-6050	1
Sensor de carga	2
Driver sensor de carga HX711	1
Sensor óptico encoder	2
Motor DC 24V 500W	2
Bateria 12V 24ah	2
Display Lcd 16x2	1
Módulo joystick	1

O sistema de odometria é realizado por meio de sensores ópticos, representados pela Fig. 3.10(b), ligados a encoders fixados nos eixos de ambos os motores. Cada sensor possui duas chaves ópticas, possibilitando determinar a contagem de interrupções ocasionadas pelo

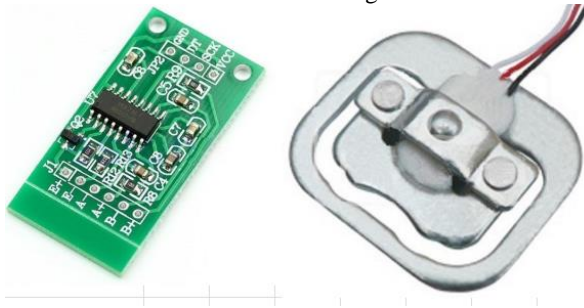
encoder e o sentido em que este está girando. São utilizados dois encoders, cada um contendo 100 pulsos

Figura 3.10 – (a) Sensor acelerômetro e giroscópio MPU-6050 e (b) sensor óptico.



As células de carga, também chamadas de *strain gauge*, funcionam como Pontes de Wheatstone, variando sua resistência conforme a deformação no material. Junto com o módulo amplificador e conversor analógico-digital HX711, é possível determinar a distribuição de massa sobre o assento. O sensor de carga e o módulo HX711 podem ser vistos na Fig. 3.11.

Figura 3.11 – Módulo HX711 e a célula de carga.



O microcontrolador utilizado foi o Arduino Due, com memória flash de 512 kB e processamento de 84 MHz. Este possui velocidade de processamento maior que outros microcontroladores comumente utilizados, como o Arduino Uno, o que é necessário para uma boa leitura dos sensores ópticos. Em conjunto ao microcontrolador, são utilizados dois drivers ponte-h Bts7960 para o controle de direção e velocidade de rotação dos motores, por meio de sinais PWM (*Pulse-Width Modulation*). O driver suporta uma tensão de 5 – 45 Vdc e

corrente contínua máxima e de pico de 43 A e 60 A, respectivamente. O Arduino Due e o driver Bts7960 podem ser vistos na Fig. 3.12.

Figura 3.12 – Arduino Due e driver ponte-h Bts7960.



São utilizados dois motores CC 24V 450 W, com torque nominal de 1,45 Nm e corrente de pico de 24 A. Com o sistema de transmissão de relação total de 1:14,55, o torque nominal total é de 21,1 Nm. O motor utilizado pode ser visto pela Fig. 3.13.

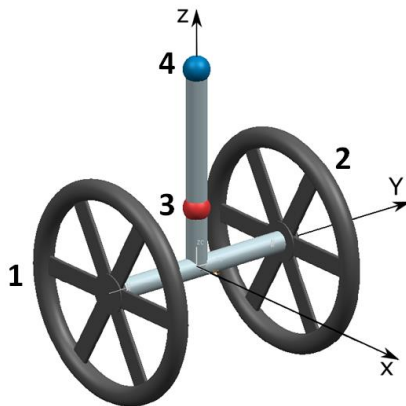
Figura 3.13– Motor utilizado no protótipo.



## 4 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA

O presente capítulo tem como objetivo descrever o desenvolvimento do modelo matemático do sistema, representado de forma simplificada pela Fig. 4.1. O sistema é apresentado como um conjunto de 4 corpos: roda direita (corpo 1), roda esquerda (corpo 2), cadeira de rodas (corpo 3) e usuário (corpo 4). O eixo de coordenadas é fixado entre as duas rodas, em seus centros, e o sentido das rotações segue a regra da mão direita. Utilizando a modelagem das energias cinéticas e potenciais do sistema, o modelo dinâmico é construído por meio de uma formulação Lagrangeana.

Figura 4.1 - Modelo simplificado do sistema.

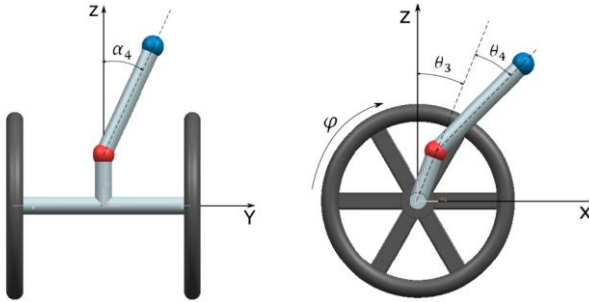


No presente trabalho são considerados dois centros de massa (CM) sobre as rodas, um representando a cadeira de rodas e outro o usuário, somando ao total 5 graus de liberdade:

- Deslocamento angular da roda direita ( $\varphi_1$ );
- Deslocamento angular da roda esquerda ( $\varphi_2$ );
- Deslocamento angular da cadeira de rodas ( $\theta_3$ );
- Deslocamento angular do usuário no sentido longitudinal ( $\theta_4$ );
- Deslocamento angular do usuário no sentido lateral ( $\alpha_4$ );

As variáveis relacionadas ao movimento do usuário ( $\theta_4$  e  $\alpha_4$ ) serão consideradas como entradas externas do sistema, desta forma, não são incluídas dentro das coordenadas generalizadas, utilizadas posteriormente na modelagem dentro da formulação Lagrangeana. Uma melhor visualização das variáveis atribuídas ao sistema pode ser vista na Fig. 4.2.

Figura 4.2 – Variáveis do sistema.



#### 4.1 FORMULAÇÃO DAS VELOCIDADES

Com base nas variáveis, no sistema de coordenadas e na convenção dos sinais descritos anteriormente, é possível determinar as velocidades de cada corpo presente no sistema. As equações das velocidades lineares e angulares da roda direita (corpo 1, Fig. 4.3) podem ser descritas como:

$$u_1 = r \dot{\varphi}_1 \quad (4.1)$$

$$v_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$w_1 = \dot{z}_1 \quad (4.3)$$

$$\omega_{x1} = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2d} \quad (4.4)$$

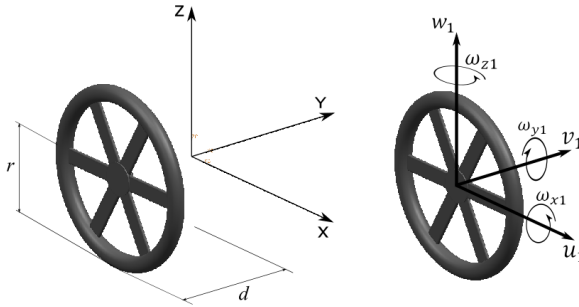


$$\omega_{y1} = \dot{\phi}_1 \quad (4.5)$$

$$\omega_{z1} = \frac{r \dot{\phi}_1 - r \dot{\phi}_2}{2d} \quad (4.6)$$

com  $u_1$  sendo a velocidade longitudinal,  $v_1$  a velocidade lateral,  $w_1$  a velocidade vertical e  $\omega_{i1}$  sua velocidade de rotação em torno do  $i$ -ésimo eixo.  $r$  representa o raio das rodas e  $d$  a distância entre o centro de coordenadas e as rodas.

Figura 4.3 - Parâmetros e definição das velocidades para o corpo 1.



Também são consideradas as alturas das rodas direita e esquerda, representadas por  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente. Desta forma é possível observar o comportamento da cadeira de rodas em um terreno com uma inclinação lateral ou com algum degrau no percurso.

Da mesma forma como foram definidas as velocidades da roda direita, as velocidades lineares e angulares da roda esquerda são dadas por:

$$u_2 = r \dot{\phi}_2 \quad (4.7)$$

$$v_2 = 0 \quad (4.8)$$

$$w_2 = \dot{z}_2 \quad (4.9)$$

$$\omega_{x2} = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2d} \quad (4.10)$$

$$\omega_{y2} = \dot{\phi}_2 \quad (4.11)$$

$$\omega_{z2} = \frac{r \dot{\phi}_1 - r \dot{\phi}_2}{2d} \quad (4.12)$$

Com base na Fig. 4.4, as velocidades angulares e lineares do corpo 3, correspondentes ao CM da cadeira de rodas, são:

$$u_3 = \frac{r \dot{\phi}_1 + r \dot{\phi}_2}{2} + l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.13)$$

$$v_3 = 0 \quad (4.14)$$

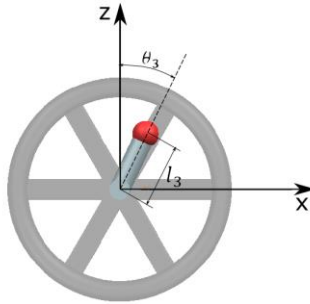
$$w_3 = \frac{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}{2} - l_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.15)$$

$$\omega_{x3} = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2d} \quad (4.16)$$

$$\omega_{y3} = \dot{\theta}_3 \quad (4.17)$$

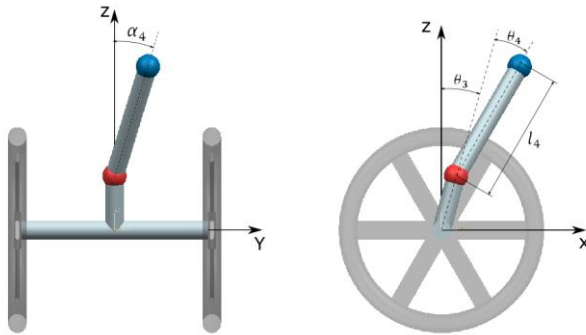
$$\omega_{z3} = \frac{r \dot{\phi}_1 - r \dot{\phi}_2}{2d} \quad (4.18)$$

Figura 4.4 - Parâmetros e variáveis relacionadas ao corpo 3.



As velocidades angulares e lineares relacionadas ao movimento do usuário (corpo 4, Fig. 4.5) podem ser descritas como:

Figura 4.5 - Parâmetros e variáveis relacionadas ao corpo 4.



$$\begin{aligned}
 u_4 = & \frac{r \dot{\phi}_1 + r \dot{\phi}_2}{2} + l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
 & - l_4 \sin(\alpha_4) \sin(\theta_3 + \theta_4) \dot{\alpha}_4 \\
 & + l_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 v_4 = & l_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\alpha}_4 \\
 & - l_4 \sin(\alpha_4) \sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= \frac{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}{2} - l_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
&\quad - l_4 \sin(\alpha_4) \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\alpha}_4 \\
&\quad - l_4 \cos(\alpha_4) \sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\omega_{x4} = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2d} + \dot{\alpha}_4 \tag{4.22}$$

$$\omega_{y4} = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 \tag{4.23}$$

$$\omega_{z4} = \frac{r \dot{\phi}_1 - r \dot{\phi}_2}{2d} \tag{4.24}$$

## 4.2 ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética do sistema composto por múltiplos corpos é definida por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 m_k (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [(I_x \omega_x^2)_k + (I_y \omega_y^2)_k + (I_z \omega_z^2)_k] \\
&\quad - \sum_{k=1}^4 [(I_{xy} \omega_x \omega_y)_k + (I_{xz} \omega_x \omega_z)_k \\
&\quad + (I_{yz} \omega_y \omega_z)_k]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

sendo  $I$  o momento de inércia e  $k$  o  $k$ -ésimo corpo.

Substituindo as equações de velocidades obtidas na sessão anterior, é possível obter a energia cinética do sistema.

### 4.3 ENERGIA POTENCIAL

Neste modelo será considerado que a energia potencial é armazenada somente no movimento vertical do conjunto completo do sistema, desconsiderando a energia de amortecimento dos pneus. Desta forma, a energia potencial resultante é representada por:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 \quad (4.26)$$

$$\mathcal{V}_1 = m_1 g z_1 \quad (4.27)$$

$$\mathcal{V}_2 = m_2 g z_2 \quad (4.28)$$

$$\mathcal{V}_3 = m_3 g \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + l_3 \cos(\theta_3) \right) \quad (4.29)$$

$$\mathcal{V}_4 = m_4 g \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_3 + \theta_4) \right) \quad (4.30)$$

### 4.4 FORÇAS EXTERNAS ATUANTES

A definição das forças externas atuantes é dada pelo vetor  $F$ :

$$F(t) = [M_{\varphi_1}, M_{\varphi_2}, M_{\theta_3}]' \quad (4.31)$$

onde  $M$  representa os momentos relacionados às coordenadas generalizadas  $q$ :

$$q = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

#### 4.4.1 Forças generalizadas relacionadas a $\varphi_1$

O momento de inércia relacionado ao eixo de rotação de  $\varphi_1$  é definido pela soma das forças de torque mecânico gerado pelos motores, força de atrito do sistema, resistência de rolagem dos pneus, resistência de alicve e também pela força gerada por irregularidades no terreno, conforme a equação abaixo:

$$M_{\varphi_1} = \tau_{m_1} - F_a - R_{R_1} - R_A - F_I \quad (4.33)$$

onde  $\tau_{m_1}$  são forças de entrada do sistema, e as demais são forças de perturbação.

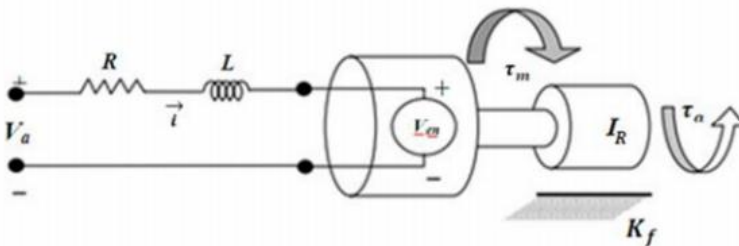
- **Torque mecânico ( $\tau_{m_1}$ )**

O torque mecânico é obtido por meio da modelagem do circuito RLC de um motor elétrico de corrente contínua. A Fig. 4.6 representa a dinâmica do motor. O torque mecânico é definido pela equação abaixo:

$$\tau_{m_1} = \frac{k_m i_1}{R_t} \quad (4.34)$$

onde  $R_t$  é a relação de transmissão do sistema,  $k_m$  é a constante de torque mecânico e  $i$  é a corrente.

Figura 4.6 - Modelo de um motor CC em função de suas constantes elétricas e mecânicas.



Pela lei das tensões de Kirchoff pode-se estabelecer uma relação entre as tensões internas ao circuito do motor CC considerando separadamente cada componente de tensão. Para o sistema apresentado

na Fig. 4.6 pode-se estabelecer a dinâmica elétrica do sistema como sendo:

$$V_{a_1} - R i_1 - L \frac{di_1}{dt} - V_{en_1} = 0 \quad (4.35)$$

onde  $V_{a_1}$  é a tensão de entrada do motor,  $R$  é a resistência e  $L$  é a indutância.

A força contraeletromotriz  $V_{en_1}$  pode ser definida por:

$$V_{en_1} = k_e \omega_{m_1} \quad (4.36)$$

sendo  $\omega_{m_1}$  a velocidade angular do motor e  $k_e$  a constante de tensão contraeletromotriz.

A velocidade angular  $\omega_{m_1}$  é encontrada por meio do modelo da dinâmica mecânica do motor, definida pela equação abaixo:

$$\tau_m = J \frac{d\omega_{m_1}}{dt} + B_m \omega_{m_1} \quad (4.37)$$

onde  $J$  é o momento de inércia total do rotor e da carga em relação ao eixo do motor, e  $B_m$  é o coeficiente de atrito viscoso que representa todo o atrito viscoso do motor e da carga.

Como a velocidade  $\omega_{m_1}$  pode ser definida pela seguinte equação:

$$\omega_{m_1} = \frac{\dot{\varphi}_1}{R_t} \quad (4.38)$$

e substituindo-a na Eq. (4.37), percebe-se que a dinâmica mecânica do motor passa a ser uma dinâmica mecânica da roda. Desta forma, o momento de inércia  $J$  pode ser somado ao momento de inércia da roda, e o coeficiente de atrito viscoso  $B_m$  é atribuído à força de atrito do sistema.

Substituindo a Eq. (4.36) na Eq. (4.35), e considerando a velocidade de rotação do motor conforme a relação encontrada na Eq. (4.38), o modelo matemático do motor pode ser determinado unicamente pela equação resultante:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L}i_1 - \frac{k_e\dot{\phi}_1}{L R_t} + \frac{1}{L}V_{a1} \quad (4.39)$$

sendo a tensão  $V_{a1}$  a entrada do sistema.

Desta forma, a dinâmica elétrica encontrada pela Eq. (4.39) deve ser adicionada ao sistema, visto que o torque mecânico presente na Eq. (4.34) depende da dinâmica da corrente do motor.

- **Força de atrito do sistema ( $F_a$ )**

A força de atrito do sistema pode ser definida pela seguinte equação:

$$F_a = \left( \frac{B_m}{R_t} + B_c \right) \dot{\phi}_1 \quad (4.40)$$

onde  $B_c$  representa o coeficiente de atrito entre os componentes.

Conforme foi descrito anteriormente na formulação do torque mecânico, o coeficiente de atrito viscoso do motor  $B_m$  também é considerado.

- **Força de resistência de rolagem dos pneus ( $R_R$ )**

A resistência de rolagem dos pneus é a resultante da força produzida pela deformação na interface pneu/solo. Esta força atua de forma semelhante a uma mola com uma região sendo comprimida ao entrar em contato com o solo e outra região expandindo-se ao deixar a interface. Este comportamento pode ser descrito como:

$$R_R = f_R \frac{N}{2} \quad (4.41)$$

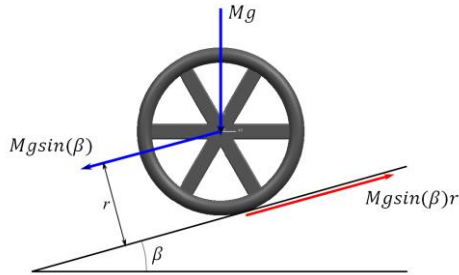
para  $N$  sendo a força normal ao solo atuando em uma roda e  $f_R$  o coeficiente de resistência de rolamento, calculado experimentalmente. Recomenda-se o valor de 0,01 como uma aproximação para este coeficiente, considerando a pista como asfalto liso de boa qualidade. A força normal  $N$  é dividida pois o peso total do sistema é distribuído em duas rodas.



- **Força de resistência de aclave ( $R_a$ )**

A resistência de aclave pode ser definida pelo momento gerado entre o pneu e o solo, por meio da distribuição de forças geradas na origem do sistema quando o veículo está em um terreno inclinado, como pode ser visto na Fig. 4.7.

Figura 4.7 - Resistência de aclave.



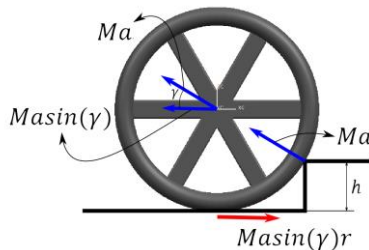
A força de resistência de aclave é determinada pela equação abaixo:

$$R_A = -\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} g r \sin(\beta) \quad (4.42)$$

- **Forças de irregularidades na superfície ( $F_I$ )**

A força gerada por irregularidades no terreno é definida por meio de uma relação entre a altura do obstáculo e a desaceleração de amortecimento do pneu em contato com o mesmo, como pode ser observado na Fig. 4.8.

Figura 4.8 - Força gerada por irregularidades no terreno.



sendo  $a$  a desaceleração da roda. Fazendo uma interpolação entre o tamanho do degrau  $h$  e o raio da roda  $r$ , é possível estimar o ângulo  $\gamma$  representado na Fig. 4.8. Desta forma, a força gerada resultante é dada por:

$$F_I = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{2} \ddot{\varphi}_1 \cos\left(\frac{\pi(r-h)}{2r}\right) r^2 \quad (4.43)$$

Simulando nos *softwares* Matlab e Simulink somente a dinâmica de mola do pneu, e atribuindo valores de peso total do sistema de 115 kg e altura do degrau de 10 cm, com uma velocidade de 2,5m/s do veículo (velocidade aproximada de uma pessoa correndo) a desaceleração  $\ddot{\varphi}_1$  encontrada foi de aproximadamente 70 rad/s<sup>2</sup>. Desta forma, sob essas condições, a  $F_{I_{max}}$  encontrada foi de 607,2 Nm. Como a irregularidade do terreno é um parâmetro incerto, via simulação, a força  $F_I$  terá um valor entre 0 Nm e 607,2 Nm, proporcional à velocidade da cadeira de rodas.

#### 4.4.2 Forças externas relacionadas a $\varphi_2$

As forças externas atuantes  $M_{\varphi_2}$  são definidas da mesma forma como foram definidas para  $\varphi_1$ , substituindo somente a relação das variáveis utilizadas, relacionando-as para o corpo 2.

#### 4.4.3 Forças externas relacionadas a $\theta_3$

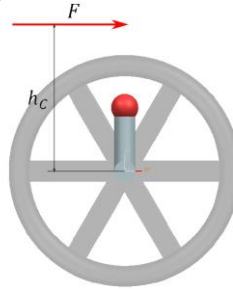
Em relação ao ângulo de inclinação da cadeira de rodas, serão consideradas como forças externas atuantes somente os torques gerados pelos dois motores (Eq. (4.34)), e também um momento  $F_A$  provocado por forças externas aplicadas diretamente ao chassi, conforme a Eq. (4.44).

$$M_{\theta_3} = -(\tau_{m1} + \tau_{m2}) + F_A \quad (4.44)$$

Conforme a Fig. 4.9, o momento  $F_A$  pode ser definido por:

$$F_A = F h_C \quad (4.45)$$

Figura 4.9 – Força aplicada diretamente ao chassi.



#### 4.5 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

A equação de Euler-Lagrange é definida na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F \quad (4.46)$$

onde o lagrange  $\mathcal{L}$  é determinado pelas somas das energias presentes:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (4.47)$$

sendo  $\mathcal{T}$  a energia cinética e  $\mathcal{V}$  a energia potencial, encontradas na seção anterior.  $F$  são as forças externas atuantes, e as coordenadas generalizadas  $q$  são:

$$q = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Este cálculo resulta em um modelo dinâmico na forma matricial:

$$M(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) \ddot{q}(t) + C(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) = F(q, \dot{q}, t) \quad (4.49)$$

onde  $p$  representa o vetor das entradas externas do sistema:

$$p = \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

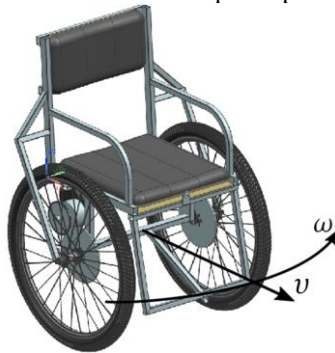
Adicionando os modelos dos motores elétricos de corrente contínua encontrados na Eq. (4.39), o modelo completo do sistema pode ser representado pela Eq. (4.51). O Apêndice B apresenta o modelo de forma detalhada, sendo este o modelo não linear final utilizado nas simulações.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = f_1(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, i_1, i_2, t) \\ \ddot{\varphi}_2 = f_2(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, i_1, i_2, t) \\ \ddot{\theta}_3 = f_3(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, i_1, i_2, t) \\ \frac{di_1}{dt} = f_4(i_1, \varphi_1, t) + h_4(V_{a1}, t) \\ \frac{di_2}{dt} = f_5(i_2, \varphi_2, t) + h_5(V_{a2}, t) \end{cases} \quad (4.51)$$

#### 4.6 TRANSFORMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DO SISTEMA

Analisando o modelo apresentado pela Eq. (4.51), deve-se perceber que este não apresenta de forma explícita as variáveis de estados que realmente deseja-se controlar. O controle de locomoção da cadeira de rodas depende basicamente do controle de velocidade longitudinal ( $v$ ) e velocidade angular ( $\omega$ ) do sistema, conforme pode ser observado na Fig. 4.10.

Figura 4.10 – Variáveis de deslocamento do protótipo.



O controle das variáveis de velocidade angulares das rodas esquerda e direita ( $\dot{\varphi}_1$  e  $\dot{\varphi}_2$ ) não proporciona uma forma direta de controle da velocidade linear e angular da cadeira de rodas. Desta forma,

o mais adequado é realizar uma mudança de variáveis do sistema facilitando o desenvolvimento do projeto de controle.

Utilizando as equações cinemáticas do sistema:

$$\dot{v} = \frac{r\ddot{\phi}_1 + r\ddot{\phi}_2}{2} \quad (4.52)$$

$$\dot{\omega} = \frac{r\ddot{\phi}_1 - r\ddot{\phi}_2}{2d} \quad (4.53)$$

e substituindo  $\dot{\phi}_1$  e  $\dot{\phi}_2$  pelas suas correspondentes em função de  $v$  e  $\omega$ :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{r}v + \frac{d}{r}\omega \quad (4.54)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{r}v - \frac{d}{r}\omega \quad (4.55)$$

pode-se substituir o modelo final representado pela Eq. (4.51) por um modelo em função das variáveis de controle desejadas, representado pela Eq (4.56).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = f_1(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) \\ \dot{\omega} = f_2(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) \\ \ddot{\theta}_3 = f_3(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) \\ \frac{di_1}{dt} = f_4(x, t) + h_4(V_{a1}, t) \\ \frac{di_2}{dt} = f_5(x, t) + h_5(V_{a2}, t) \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Conforme a Eq.(4.56), as variáveis de estado do sistema são:

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

É importante observar que essa etapa de transformação de variáveis poderia ser evitada se no processo de cálculo das velocidades de cada corpo, apresentado no Subcapítulo 4.1, fossem consideradas as velocidades angulares das rodas direita e esquerda ( $\dot{\phi}_1$  e  $\dot{\phi}_2$ , respectivamente) em função da velocidade no sentido longitudinal do sistema ( $v$ ) e da velocidade angular em torno do eixo  $z$  ( $\omega$ ), como foi calculado nas Eqs. (4.54) e (4.55). Porém, o modelo obtido na Eq. (4.51) foi essencial para o entedimento do comportamento do sistema e sua implementação via simulação.

#### 4.7 SIMPLIFICAÇÃO DO MODELO DO MOTOR ELÉTRICO CC

Com a implementação do modelo do motor elétrico, foram adicionadas como variáveis de estado as suas correntes. Estas agem de forma direta no comportamento do sistema, pois como mostra a Eq. (4.34), o torque mecânico gerado pelos motores é proporcional às suas correntes.

Como as dinâmicas elétricas dos motores são muito mais rápidas do que as dinâmicas mecânicas do sistema, a implementação do projeto de controle pode ser prejudicada visto a necessidade de sensores de corrente, e conseqüentemente, a soma dos ruídos gerados em suas medições.

Uma maneira de contornar essa situação é simplificar o modelo de motor elétrico dispensando a dinâmica da corrente, visto que a indutância geralmente assume um valor relativamente baixo. A partir da Eq. (4.39), desconsiderando a indutância do motor, a corrente pode ser definida pela Eq. (4.58).

$$i = -\frac{k_e \dot{\phi}}{R R_t} + \frac{1}{R} V_a \quad (4.58)$$

Desta forma, a equação do torque mecânico pode ser definida diretamente pelas variáveis de tensão de entrada dos motores e de velocidade das rodas em função da velocidade longitudinal  $v$  e angular  $\omega$ , conforme pode ser observado nas Eqs. (4.59) e (4.60).

$$\tau_{m1} = -\frac{k_m k_e}{R R_t^2 r} (v + d \omega) + \frac{1}{R} V_a \quad (4.59)$$

$$\tau_{m2} = -\frac{k_m k_e}{R R_t^2 r} (v - d \omega) + \frac{1}{R} V_a \quad (4.60)$$

O modelo resultante e as variáveis de estado que serão utilizadas no projeto de controle são representadas pelas Eqs. (4.61) e (4.62), respectivamente.

$$\begin{cases} \dot{v} = f_1(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) + h_1(u) \\ \dot{\omega} = f_2(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) + h_2(u) \\ \ddot{\theta}_3 = f_3(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, t) + h_3(u) \end{cases} \quad (4.61)$$

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

#### 4.8 MODELO LINEAR

O sistema possui ao total 14 constantes, 24 momentos de inércia, 2 entradas externas de movimento do usuário e suas derivadas, 9 entradas externas atuantes, 2 variáveis de controle e 4 variáveis de estado. Pelo grau de complexidade atingido, a partir desta etapa de modelagem, a equação da dinâmica do sistema será apresentada considerando os valores das constantes conforme a Tab. 4.1, e também atribuindo valores aos momentos de inércia.

Linearizando por series de Taylor o sistema obtido pela Eq. (4.61), e considerando as condições iniciais nulas, tanto para as variáveis de estado quanto para as entradas externas, o modelo linear do sistema pode ser visto na Eq. (4.63).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.63)$$

$$A = \begin{bmatrix} -9,32 & -0,04 & 0 & -48,38 \\ -0,79 & -23,18 & 0,02 & -3,84 \\ 20,5 & 0,08 & 0 & 118,54 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,29 \\ 2,45 & -2,4 \\ -0,65 & -0,63 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabela 4.1 – Parâmetros do sistema

<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Un.</b>
Massa roda direita	$m_1$	2	(kg)
Massa roda esquerda	$m_2$	2	(kg)
Massa do protótipo	$m_3$	45	(kg)
Massa do usuário	$m_4$	80	(kg)
Distância entre o CM do protótipo e a origem	$l_3$	0.2	(m)
Distância entre o CM do usuário e o CM do protótipo	$l_4$	0.35	(m)
Gravidade	$g$	9.8	(m/s <sup>2</sup> )
Raio das rodas	$r$	0.32	(m)
Distância das rodas até o centro do eixo	$d$	0.3	(m)
Relação de transmissão	$R_t$	1:14.54	-
Constante de força-contraeletromotriz	$k_e$	0.35	-
Constante de torque	$k_m$	0.35	-
Resistência da armadura do motor	$R$	4.1	( $\Omega$ )
Indutância do motor	$l$	0.0019	(H)

#### 4.9 ANÁLISE DO SISTEMA

Conforme a Eq. (2.38), a matriz de controlabilidade do sistema pode ser representada pela equação a seguir:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & 5,2 & 4,5 & -76,3 & -56,8 \\ 0,2 & -0,2 & -5,7 & 5,6 & 132,7 & -128,4 & -3081,7 & 2972,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,6 & 0,5 & -12,4 & -10,8 & 175,1 & 135,1 \\ 0 & 0 & -0,1 & -0,1 & 0,6 & 0,5 & -12,4 & -10,8 \end{bmatrix} * 10^{-3} \quad (4.64)$$

sendo  $rank(\mathbb{C}) = n = 4$ , demonstrando-se controlável.

As equações a seguir representam a matriz de transferência  $G(s)$  conforme a Eq. (2.34), desconsiderando no momento a matriz de saída  $C$ .



$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \\ G_{31} & G_{32} \\ G_{41} & G_{42} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$G_{11} = \frac{(s + 22,837)(s + 3,48)(s - 3,493)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.66)$$

$$G_{12} = \frac{(s + 23,53)(s + 3,496)(s - 3,483)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.67)$$

$$G_{21} = \frac{(s + 15,517)(s + 0,863)(s - 7,8)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.68)$$

$$G_{22} = \frac{(s + 15,716)(s + 0,865)(s - 7,828)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.69)$$

$$G_{31} = \frac{s^2(s + 22,864)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.70)$$

$$G_{32} = \frac{s^2(s + 22,5)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.71)$$

$$G_{41} = \frac{s(s + 22,864)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.72)$$

$$G_{42} = \frac{s(s + 22,5)}{(s + 23,186)(s + 15,613)(s + 0,864)(s - 7,814)} \quad (4.73)$$

As funções de transferência representadas pelas Eqs. (4.66) à (4.73) possuem grau do polinômio do denominador ( $n$ ) de 4ª ordem e o grau do polinômio do numerador ( $m$ ) de 3ª ordem, com exceção de  $G_{41}$

e  $G_{42}$  com grau 2 no numerador, caracterizando um sistema estritamente próprio ( $m < n$ ). É possível comprovar a instabilidade do sistema pela presença de um polo positivo (7,814).

Também é possível observar que as funções de transferências relacionadas às saídas comuns (como por exemplo  $G_{11}$  e  $G_{12}$ ) possuem zeros relativamente próximos. Analisando desta forma, percebe-se o acúmulo de erro numérico ocasionado pelas operações realizadas na etapa de modelagem, visto que, em um caso ideal, dentro da dinâmica do sistema estudado não existem diferenças entre as entradas  $V_{a1}$  e  $V_{a2}$  em relação às possíveis saídas, devido aos motores serem exatamente iguais e a distribuição dos componentes considerados na modelagem ser simétrica.

Em virtude disso, nas funções de transferência  $G_{21}$  e  $G_{22}$ , os pólos -0.864 e 7.814 poderiam ser cancelados, tornando as dinâmicas entre as entradas  $V_{a1}$  e  $V_{a2}$  e a saída  $\omega$  estável e de fase mínima (devido ao cancelamento do zero positivo). Essa observação será confirmada com a implementação do projeto de controle sobre o modelo não-linear, onde a dinâmica de  $\omega$  não se caracteriza como um sistema de fase não-mínima.

## 5 PROJETO DE CONTROLE

Neste capítulo serão apresentados os processos de desenvolvimento dos projetos de controle propostos tanto como as estratégias de controle utilizadas. O protótipo possui três modos de operação: *Freerun*, *Indoor* e *Joystick*. Cada modo de operação possui objetivos específicos, necessitando estratégias de controle diferentes, podendo ser alternada conforme a necessidade do usuário.

### 5.1 ESTRATÉGIAS DE CONTROLE

O veículo possui três modos de operação, cada um atribuído a condições de funcionamento específicas:

#### 5.1.1 Freerun

Com este modo de operação o usuário pode realizar a sua locomoção por meio da inclinação do seu tronco. Ao inclinar o seu corpo no sentido longitudinal, para frente ou para trás, a cadeira de rodas irá buscar manter a sua angulação  $\theta_3$  em  $0^\circ$ , consequentemente, produzindo torque nos motores e movimentando a cadeira de rodas no sentido longitudinal. A velocidade é determinada pelo *feeling* do usuário, dependendo da sua inclinação. Ao alcançar a velocidade desejada, o usuário pode voltar a posição inicial e a cadeira de rodas irá se manter em velocidade constante. Para diminuir a velocidade, o usuário deve inclinar seu corpo no sentido oposto ao qual a cadeira de rodas está se movimentando, até atingir a velocidade desejada. O comando de curva do veículo é realizado por meio da inclinação lateral do usuário, mediante a mudança de referência de velocidade angular ( $\omega_{ref}$ ) pelo assento móvel.

#### 5.1.2 Indoor

O modo *Indoor* tem como objetivo facilitar a movimentação do usuário em ambientes que exigem maior controle sobre a cadeira de rodas. Em ambientes estreitos ou com irregularidades no terreno, é desejável que o veículo se mantenha em velocidade baixa, e que responda diretamente ao movimento do usuário. Da mesma maneira como o modo *Freerun*, a locomoção da cadeira de rodas é controlada pela inclinação do tronco do usuário, porém, há um certa resistência no

movimento para que a cadeira de rodas se mantenha em velocidade baixa. A velocidade é proporcional à inclinação do usuário, desta forma, para se manter em velocidade constante basta que o usuário se mantenha em uma inclinação constante. Caso este deseja parar, basta voltar à posição inicial. A velocidade angular é controlada da mesma maneira como no modo *Freerun*.

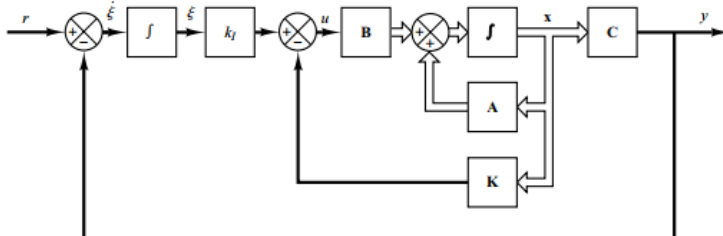
### 5.1.3 Joystick

Caso o usuário possua maiores limitações nos movimentos, dificultando o controle da locomoção por meio da inclinação do corpo, é introduzido o controle por um *joystick*. Grande parte dos portadores de deficiência física, além da não movimentação da parte inferior do corpo, possuem dificuldades ou grandes limitações no controle da parte superior. Neste modo de operação, a locomoção é determinada pela mudança nas referências de velocidade longitudinal ( $v_{ref}$ ) e angular ( $\omega_{ref}$ ) por meio do manuseio de um *joystick*. A cadeira de rodas irá se manter na velocidade desejada independente da inclinação do usuário. Para isso, o sistema irá “corrigir” a inclinação do usuário com a inclinação da cadeira de rodas no sentido oposto, de modo que o centro de massa total se mantenha em equilíbrio.

## 5.2 CONTROLADOR PI

Os três modos de operação apresentam a mesma estrutura de controle, conforme mostra a Fig. 5.1, o que os difere são as considerações feitas como saídas do sistema, buscando atingir o seguimento de referência e a rejeição de perturbação em pontos específicos. Também é considerado que todas as variáveis de estados são acessíveis para realimentação, não sendo necessária a implementação de um observador de estados.

Figura 5.1 – Estrutura dos projetos de controle (OGATA, 2010).



Conforme descrito anteriormente, as matrizes de saída  $C$  para cada modo de operação são apresentadas a seguir:

$$C_{Freerun} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$C_{Indoor} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (5.2)$$

$$C_{Joystick} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A matriz  $C_{Freerun}$  possui 3 colunas pois neste sistema de controle é desconsiderada a dinâmica da velocidade longitudinal. Neste caso, não é desejável controlar a velocidade longitudinal  $v$  por meio de um controlador, no entanto, o controle da velocidade é realizado pela própria dinâmica do sistema realimentado em resposta à inclinação do usuário, buscando manter a estabilidade. Desta forma, na matriz de estados  $A$  são eliminadas a primeira linha e a primeira coluna, resultando em uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ .

No modo de operação *Indoor*, a velocidade do protótipo também é determinada pela inclinação do usuário, porém, considerando a velocidade  $v$  como variável de estado, fica explícito o efeito do controle proporcional agindo sobre este estado, forçando-o para a origem do sistema. Como consequência disso, o protótipo atinge velocidades menores, e seguindo a dinâmica do sistema, a velocidade é proporcional à inclinação do usuário, mantendo-se estável. Não é considerado  $\theta_3$  como saída do sistema pois para atingir velocidades menores, é necessário a “correção” da inclinação do usuário com a inclinação da cadeira de rodas no sentido oposto, desta forma, é necessária a presença de um erro em regime permanente de  $\theta_3$  proporcional à inclinação do usuário.

No modo *Joystick* é desejável controlar a velocidade longitudinal pela mudança de referência, desta forma, é necessário considerar a velocidade  $v$  como saída, tendo como ação integral o seguimento de referência e rejeição de perturbação. Em virtude disso, o sistema irá permanecer estável independente da inclinação do usuário, também mantendo a velocidade desejada.

Em todos os casos a velocidade angular  $\omega$  é considerada como saída, pois em todos os casos a velocidade de curva é determinada pela

mudança de referência, sendo esta ocasionada pela diferença de peso entre os sensores de carga presentes embaixo do assento ou pela movimentação do *joystick*.

Conforme a estrutura apresentada na Fig. 5.1, os projetos de controle lineares são realizados por meio de um sistema aumentado, representado pela Eq. (5.4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (5.4)$$

onde:

$$u(t) = -[K \ : \ -k_I] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

O vetor  $\xi$  é diferente para cada modo de operação, conforme segue abaixo:

$$\xi_{Freerun} = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \xi_{Indoor} = \omega, \quad \xi_{Joystick} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Nos três casos a matriz de controlabilidade do sistema aumentado possui posto de ordem completa, viabilizando o projeto de controle.

Considerando o vetor de erro  $e(t)$  como sendo:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi_{ref} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

o sistema apresentado pela Eq. (5.4) torna-se:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (5.8)$$

$$u_e = -\hat{K}e \quad (5.9)$$

onde  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{K}$  são as matrizes dinâmica, de entrada e de ganhos, respectivamente, do sistema aumentado.

A dinâmica dos estados do erro é representada pela Eq. (5.10).

$$\dot{e} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})e \quad (5.10)$$

O controlador linear deve estabilizar o sistema, obedecendo as seguintes especificações de trabalho para resposta em malha fechada:

- Tempo de acomodação  $t_s(5\%) \leq 1$  segundo;
- Sobressinal nulo para sinais de angulação da cadeira de rodas  $\theta_3$  e velocidade longitudinal  $v$ ;
- Erro nulo em regime permanente para referências do tipo degrau.

Visando o conforto na locomoção, o controlador não deve proporcionar variações rápidas das variáveis de saída. Isso permite uma locomoção mais suave e com maior tempo de reação do usuário em resposta ao movimento. Com esse objetivo, será adicionado posteriormente um filtro de referência do tipo rampa nos sinais de velocidade longitudinal e angular,  $v_{Ref}$  e  $\omega_{Ref}$ , respectivamente. A presença de sobressinais ou oscilações no movimento também deve ser evitada.

Tomando as características de um sistema de segunda ordem, onde a sua dinâmica pode ser definida no domínio da frequência pela Eq. (5.11):

$$H(s) = \frac{\omega_d}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (5.11)$$

para atingir as condições especificadas, o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  deve ser igual a 1, caracterizando um sistema criticamente amortecido, sem presença de sobressinal. Consequentemente, o sistema irá possuir dois polos reais iguais, equivalentes a  $-\omega_n$ .

Utilizando a aproximação do cálculo do tempo de acomodação  $t_s$ :

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (5.12)$$

os dois polos dominantes do sistema em malha fechada devem se localizar em -3.

Os demais polos foram atribuídos arbitrariamente, com os polos adicionais dos integradores posicionados em -50, acelerando as

dinâmicas rápidas do sistema. Os polos desejáveis são representados pelas Eqs. (5.13), (5.14) e (5.15).

$$P_{Freerun} = [-50 \quad -50 \quad -5 \quad -3 \quad -3] \quad (5.13)$$

$$P_{Indoor} = [-50 \quad -7 \quad -5 \quad -3 \quad -3] \quad (5.14)$$

$$P_{Joystick} = [-50 \quad -50 \quad -7 \quad -5 \quad -3 \quad -3] \quad (5.15)$$

Utilizando a técnica de alocação de polos por meio da matriz da dinâmica do erro, os ganhos encontrados foram:

$$K_{Freerun} = \begin{bmatrix} 6 & -44,5 & -410,5 \\ -6,3 & -45,5 & -417,4 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$k_{I_{Freerun}} = \begin{bmatrix} -30,5 & 575,9 \\ 31,3 & 587,8 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$K_{Indoor} = \begin{bmatrix} -123,1 & -1,6 & -93,9 & -416,9 \\ -120,6 & 3,8 & -92,1 & -410,3 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$k_{I_{Indoor}} = \begin{bmatrix} -7,7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$K_{Joystick} = \begin{bmatrix} -527,1 & 6,2 & -282,2 & -1056,1 \\ -537,2 & -6,1 & -287,8 & -1075,6 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$k_{I_{Joystick}} = \begin{bmatrix} 734,4 & -30,7 \\ 748,7 & 31,1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

### 5.2.1 Projeto de Controle PI Discreto

Para fins de implementação do projeto de controle em um microcontrolador, o controlador discreto foi desenvolvido por meio da



discretização do sistema por segurador de ordem zero, com um período de amostragem escolhido de 0,02 segundos, resultando no seguinte sistema:

$$x[k + 1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (5.22)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,8288 & -0,0006 & -0,0091 & -0,8897 \\ -0,0114 & 0,6290 & -0,0003 & -0,0553 \\ 0,3771 & 0,0011 & 1,0225 & 2,2015 \\ 0,0039 & 0 & 0,0202 & 1,0225 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0,0055 & 0,0053 \\ 0,0392 & -0,0385 \\ -0,0120 & -0,0117 \\ -0,0001 & -0,0001 \end{bmatrix}$$

Da mesma maneira como foram obtidos os ganhos dos controladores no tempo contínuo, os ganhos do controlador discreto são representados pelas matrizes abaixo:

$$K^{(d)}_{Freerun} = \begin{bmatrix} 4 & -28,9 & -284,5 \\ -4,2 & -29,5 & -288,7 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$k_I^{(d)}_{Freerun} = \begin{bmatrix} -23,4 & 334,9 \\ 23,9 & 341,8 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$K^{(d)}_{Indoor} = \begin{bmatrix} -77,9 & -4,3 & -57,6 & -284,5 \\ -89,6 & -0,02 & -66,9 & -318,2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$k_I^{(d)}_{Indoor} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 11,8 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$K^{(d)}_{Joystick} = \begin{bmatrix} -329,9 & 4,1 & -175,7 & -687,4 \\ -335,5 & -4,1 & -178,8 & -698,2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$k_I^{(d)}_{Joystick} = \begin{bmatrix} 437,3 & -23,5 \\ 444,8 & 23,8 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

### 5.3 PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO (LQR)

Conforme descrito no Subcapítulo 2.5.5, o projeto de controle ótimo consiste em encontrar uma lei de controle na forma  $u(t) = -Kx(t)$  que minimize uma função custo, representada pela Eq. (2.58). Isto depende da escolha apropriada da matriz de ponderação da energia dos estados  $Q$  e da matriz de ponderação da energia do sinal de controle  $R$ .

Considerando o sistema estudado, é desejável que o mesmo atinja um nível alto de desempenho sem precaução em poupar energia da ação de controle. Isso impõe em uma escolha da matriz  $Q$  com valores muito maiores do que a matriz  $R$ . Porém, é importante considerar que a saturação da ação de controle pode tornar sistema instável.

Uma forma simples de escolha das matrizes  $Q$  e  $R$  é dada pela regra de Bryson (FRANKLIN, 2010). Em prática, uma escolha inicial apropriada para se obter valores aceitáveis para os estados e os sinais de controle é configurando as matrizes diagonais  $Q$  e  $R$  na seguinte forma:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{valor máx. aceitável para } x_i^2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.29)$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{valor máx. aceitável para } u_j^2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (5.30)$$

É interessante analisar na regra de Bryson que as unidades utilizadas para as diferentes variáveis de  $x$  e  $u$  fazem com que seus valores máximos aceitáveis sejam numericamente bastante distintos uns dos outros. Desta forma, essa é uma maneira bastante eficaz de se ter um ponto inicial no procedimento de tentativa e erro nas escolhas das matrizes  $Q$  e  $R$ .

São considerados os valores máximos aceitáveis para os estados e os sinais de controle conforme a Tab. 5.1.

Tabela 5.1 – Valores máximos aceitáveis.

<b>Estados</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor máximo aceitável</b>	<b>Un.</b>
Vel. Longitudinal	$v_c$	1	$m/s$
Vel. Angular	$\omega_c$	0,3	$rad/s$
Vel. Inclinação	$\dot{\theta}_3$	0,1	$rad/s$
Ang. Inclinação	$\theta_3$	0,1	$rad$
<b>Entradas</b>			
Tensão motor direito	$V_{a1}$	24	$V$
Tensão motor esquerdo	$V_{a2}$	24	$V$

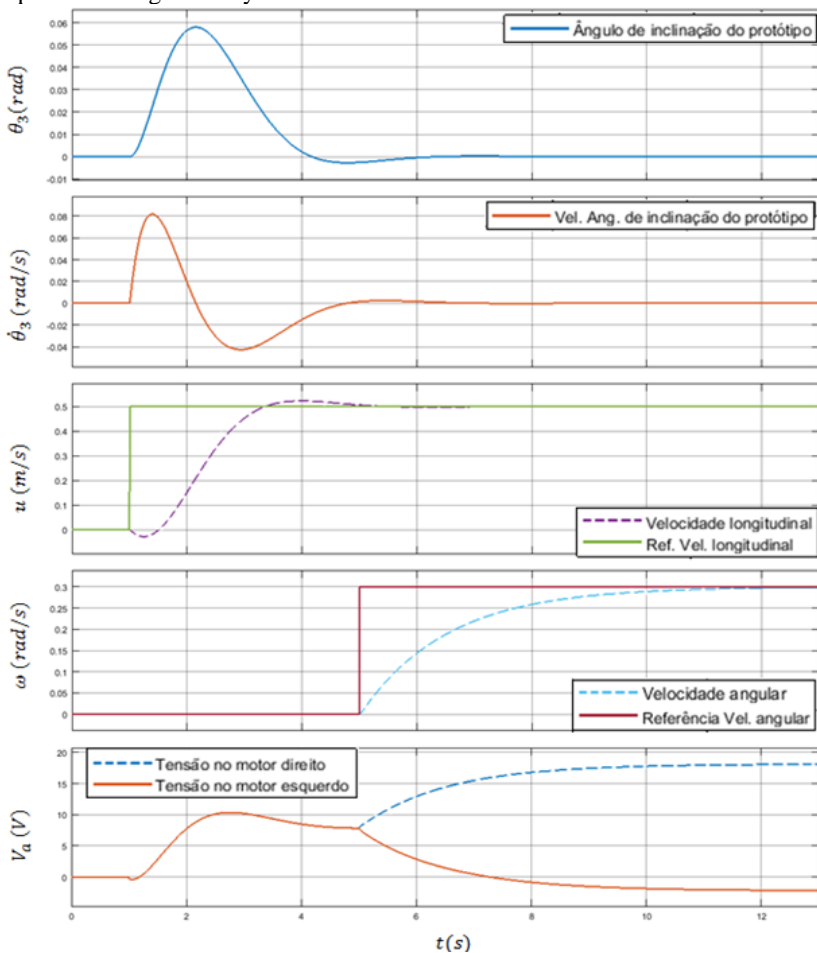
Para verificação da dinâmica do sistema perante as considerações feitas na Tab. 5.1, o projeto de controle ótimo é aplicado ao modo de operação *Joystick*. Utilizando a regra de Bryson, as matrizes  $Q$  e  $R$  resultantes são:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.00174 & 0 \\ 0 & 0.00174 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Na Eq. (5.31) é utilizado o mesmo critério de peso estabelecido pela Eq. (5.29) aos valores de  $Q_{ii}$  relacionados às dinâmicas adicionais dos integradores. A dinâmica do sistema realimentado frente a uma mudança de referência do tipo degrau aplicada à velocidade longitudinal e angular, pode ser observada na Fig. 5.2.

Figura 5.2 – Dinâmica do sistema referente ao projeto de controle LQR aplicando a regra de Bryson.



Analisando o quarto gráfico da Fig. 5.2 é possível perceber que a dinâmica da velocidade angular  $\omega$  não influencia diretamente a dinâmica dos outros estados. Como pode-se observar no quinto gráfico, quando há uma mudança de referência de velocidade angular, os sinais de controle dos motores assumem valores proporcionais em sentidos opostos. Conforme mostra a Eq. (4.44), também representada abaixo:

$$M_{\theta_3} = -(\tau_{m1} + \tau_{m2}) + F_A \quad (5.33)$$

referente às forças generalizadas atuantes relacionadas à coordenada generalizada  $\theta_3$ , esse efeito nos sinais de controle em movimentos de curva parece não alterar a soma dos torques, não influenciando a dinâmica de  $\theta_3$ .

Desta forma, é possível atribuir um valor maior à ponderação da energia do estado de velocidade angular  $\omega$ , obtendo-se respostas mais rápidas sem alterar a dinâmica dos outros estados.

Experimentando diferentes matrizes  $Q$  e  $R$  além das obtidas pelas Eqs. (5.31) e (5.32), uma das características do sistema também observada é que conforme maior o peso atribuído à ponderação da energia do estado de velocidade angular de inclinação da cadeira de rodas  $\dot{\theta}_3$ , mais lenta é a resposta do sistema ao seguimento de referência de velocidade longitudinal.

Com base nessas análises, as matrizes  $Q$  e  $R$  escolhidas para aplicação no projeto de controle nos modos de operação *Freerun*, *Indoor* e *Joystick* são representadas abaixo.

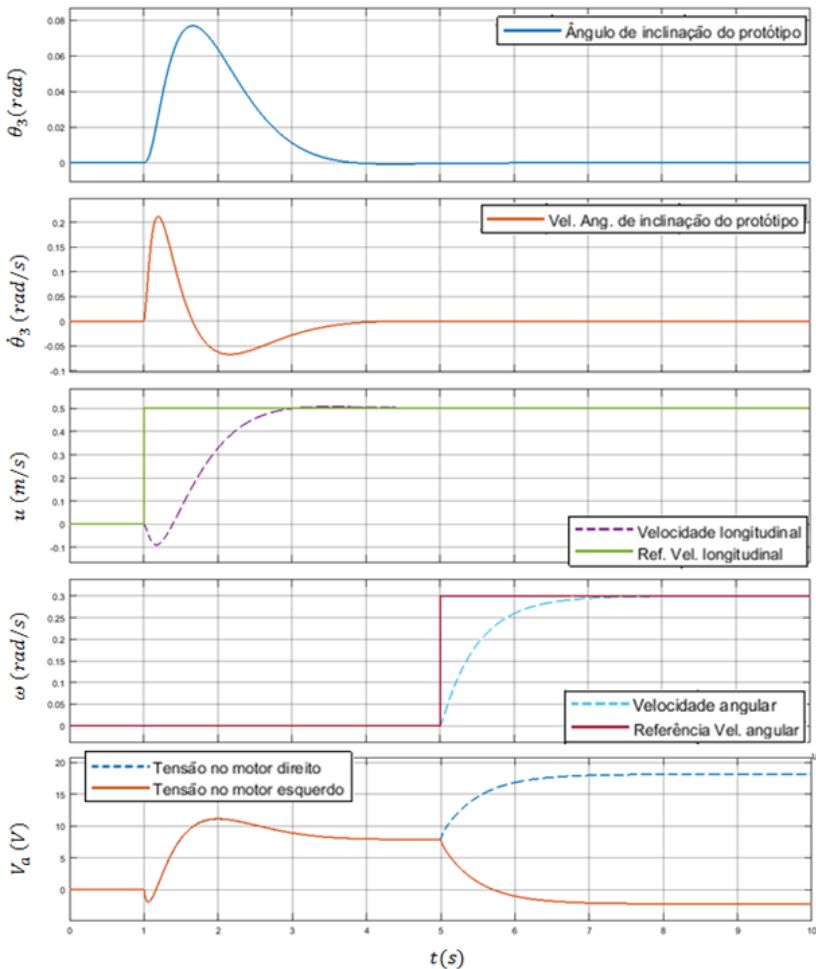
$$Q_{Freerun} = \begin{bmatrix} 11.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad R_{Freerun} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$Q_{Indoor} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad R_{Indoor} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$Q_{Joystick} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad R_{Joystick} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

A fim de comparação com a Fig. 5.2, a Fig. 5.3 mostra a dinâmica do sistema no modo *Joystick*, utilizando as matrizes de ponderação das energias conforme a Eq. (5.36).

Figura 5.3 – Dinâmica do sistema referente ao projeto de controle LQR utilizando as matrizes  $Q$  e  $R$  da Eq. (5.36).



Por meio da solução da equação de Riccati (Eq. (2.72)) aplicada sobre o sistema aumentado (Eq. (5.4)) e utilizando a lei de controle:

$$u(t) = -\hat{K}\hat{x}(t) = -R^{-1}B'P\hat{x}(t) \quad (5.37)$$

as matrizes de ganhos do controlador LQR encontradas foram:

$$K_{LQR_{Freerun}} = \begin{bmatrix} 71 & -32,3 & -360,1 \\ -69,9 & -32,8 & -364,3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$k_{LQR_{I_{Freerun}}} = \begin{bmatrix} -225,2 & 221,9 \\ 221,9 & 225,2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$K_{LQR_{Indoor}} = \begin{bmatrix} -43,1 & 71 & -46,9 & -359,5 \\ -43,5 & -69,9 & -47,7 & -363,8 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$k_{LQR_{I_{Indoor}}} = \begin{bmatrix} -225,2 \\ 221,9 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$K_{LQR_{Joystick}} = \begin{bmatrix} -216,8 & 71,1 & -128,5 & -582,2 \\ -219,8 & -70 & -130,5 & -589,9 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$k_{LQR_{I_{Joystick}}} = \begin{bmatrix} 221,9 & -225,3 \\ 225,3 & 221,9 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Os polos do sistema em malha fechada resultantes para cada modo de operação podem ser observados abaixo:

$$p_{LQR_{Freerun}} = [-362,7 \quad -31,1 \quad -9,9 \quad -3 \quad -0,9] \quad (5.44)$$

$$p_{LQR_{Indoor}} = [-362,7 \quad -35,2 \quad -9,1 \quad -3 \quad -0,6] \quad (5.45)$$

$$p_{LQR_{Joystick}} = [-362,7 \quad -35 \quad -9,7 \quad -3 \quad -1,8 + 1,2i \quad -1,8 - 1,2i] \quad (5.46)$$

### 5.3.1 Projeto de Controle LQR Discreto

No caso discreto, onde o sistema é representado abaixo:

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (5.47)$$

a função custo é apresentada na seguinte forma:

$$J_{LQR}^d = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]'Qx[k] + u[k]'Ru[k]) = x[0]'Px[0] \quad (5.48)$$

A equação de Riccati discreta torna-se:

$$A'PA - PA'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + Q = 0 \quad (5.49)$$

e a lei de controle LQR discreta é obtida pela Eq. (5.50).

$$u[k] = -\hat{K}\hat{x}[k], \quad K = (R + B'PB)^{-1}B'PA \quad (5.50)$$

Utilizando como matrizes de ponderação das energias do sistema as Eqs. (5.34), (5.35) e (5.36), os ganhos dos controladores LQR discretos são apresentados abaixo:

$$K_{LQR_{Freerun}}^{(d)} = \begin{bmatrix} 11,1 & -24,5 & -273,6 \\ -11,1 & -25 & -277,4 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$k_{LQR_{I_{Freerun}}}^{(d)} = \begin{bmatrix} -45,4 & 149 \\ 45,5 & 151,9 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$K_{LQR_{Indoor}}^{(d)} = \begin{bmatrix} -35,5 & 11,1 & -36,7 & -286,3 \\ -35,8 & -11,1 & -37,4 & -290,1 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$k_{LQR_{I_{Indoor}}}^{(d)} = \begin{bmatrix} -45,5 \\ 45,4 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$K_{LQR_{Joystick}}^{(d)} = \begin{bmatrix} -157,3 & 11,2 & -93,9 & -442 \\ -159,8 & -11,1 & -95,6 & -448,6 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$k_{LQR_{I_{Joystick}}}^{(d)} = \begin{bmatrix} 154,3 & -45,5 \\ 157,1 & 45,4 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$



## 5.4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO (MODOS DESLIZANTES)

O projeto de controle por modos deslizante é introduzido neste trabalho como uma alternativa na estabilização do sistema com um certo desempenho desejado, perante variações paramétricas e a presença de perturbações.

Dentre os parâmetros do sistema, dois apresentam maiores incertezas quanto ao seu valor: a massa do usuário ( $m_4$ ) e a distância entre o CM do protótipo e o CM do usuário ( $l_4$ ). As características do usuário não podem ser previstas. No caso de uma pessoa com paralisia nos membros inferiores, devido à atrofia muscular nas pernas, tanto a posição do CM do usuário quanto a sua massa podem apresentar grandes variações em comparação com o que foi considerado na Tab. 4.1.

Dentre os usuários de cadeiras de rodas também se incluem pessoas com dificuldades na movimentação por conta da obesidade. Em virtude das diferentes possibilidades na configuração paramétrica do sistema, é visível a necessidade de um controle robusto para atender certas especificações de funcionamento.

O projeto de controle por modos deslizantes é aplicado neste trabalho somente no tempo contínuo, para fins de análise do comportamento do sistema e comparação de robustez com os projetos de controle lineares aplicados anteriormente.

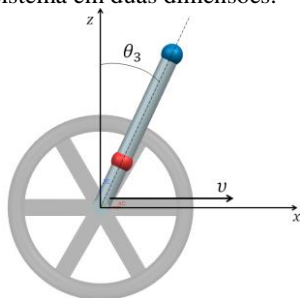
Antes de se iniciar o desenvolvimento do projeto de controle é feita a seguinte consideração: ambas as entradas de controle devem apresentar o mesmo comportamento em movimentos de locomoção em linha reta.

Essa observação é levada em conta devido ao sistema apresentar duas entradas de controle, o que torna necessário o desenvolvimento de duas superfícies de deslizamento. Como o sistema é simétrico, e a locomoção em linha reta depende do comportamento idêntico dos motores, é possível perceber a necessidade de duas superfícies de deslizamento iguais, o que não é possível dentro do projeto de controle por modos deslizantes.

Em virtude disso, e também observando os gráficos das Figs. 5.2 e 5.3, onde a dinâmica de  $\omega$  não influencia a dinâmica dos outros estados, o controle do movimento de curva é realizado por meio de um controlador PI com os ganhos obtidos pelo regulador linear quadrático aplicado no Subcapítulo 5.3.

Isto implica em uma alteração no modelo do sistema, onde a dinâmica de  $\omega$  é desconsiderada dentro do projeto de controle por modos deslizantes. Desta forma, é considerada uma dinâmica em duas dimensões, conforme mostra a Fig. 5.4, onde as tensões de entrada dos motores assumem valores em comum ( $V_{a1} = V_{a2} = V_a$ ).

Figura 5.4 – Modelo do sistema em duas dimensões.



O modelo linear em espaço de estados resultante pode ser observado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,32 & 0 & -48,38 \\ 20,5 & -0,0001 & 118,54 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,59 \\ -1,29 \\ 0 \end{bmatrix} V_a \quad (5.57)$$

Levando em consideração somente uma entrada de controle comum entre os motores ( $V_a$ ) é possível projetar somente uma superfície de deslizamento. A lei de controle resultante pode ser observada na Eq. (5.58).

$$u(t) = u_\omega + u_{eq} + u_{un} \quad (5.58)$$

O controle PI do movimento de curva é representado por  $u_\omega$ ,  $u_{eq}$  é o controle equivalente responsável por determinar a dinâmica do sistema quando em deslizamento, e  $u_{un}$  representa o controle descontínuo.

Neste trabalho será utilizada a metodologia de modos deslizantes com ação integral para o seguimento de referência, com exceção do modo de operação *Indoor*, devido ao critério de seguimento de referência estar presente somente relacionado ao erro de  $\omega$ , que como descrito anteriormente, é controlado por um controlador PI. Por

simplicidade, serão analisados os projetos de controle separadamente para cada modo de operação, iniciando pelo modo *Indoor*.

### 5.4.1 Indoor

A primeira etapa do projeto de controle por MD (projeto da superfície de deslizamento) se torna mais simples quando aplicado em sistemas na chamada “forma regular”. A forma regular para sistemas afins consiste em dois blocos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u\end{aligned}\tag{5.59}$$

onde  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^m$ , e  $B_2$  é uma matriz não singular de dimensão  $m \times m$ . O primeiro bloco não depende do controle, enquanto a dimensão do segundo bloco coincide com a dimensão do controle.

Para se obter um sistema dinâmico na forma regular é necessário realizar uma transformação de coordenadas invariante no tempo, linear e não singular  $z = T_r x$ . Particionando as novas coordenadas em duas partes:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\tag{5.60}$$

onde  $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^m$ , as matrizes  $A$  e  $B$  do sistema original (Eq. (5.57)) tornam-se  $A \leftrightarrow T_r A T_r'$  e  $B \leftrightarrow T_r B$  na coordenada “ $z$ ”. O sistema resultante pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + B_2u(t)\end{aligned}\tag{5.61}$$

na qual:

$$T_r A T_r' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\tag{5.62}$$

Desta forma, utilizando a matriz de transformação de coordenadas obtida pelo método de fatoração QR:

$$T_r = \begin{bmatrix} 0,9104 & 0,4137 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,4137 & 0,9104 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

o sistema na nova coordenada “z” pode ser observado abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 5,0009 \\ 0,4137 & 0 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9104 \end{bmatrix} z_2 \\ \dot{z}_2 &= [20,5018 \quad 127,9349] z_1 - 9,3166 z_2 - 1,4160 u \end{aligned} \quad (5.64)$$

Da mesma forma como o sistema foi particionado, considera-se uma superfície de deslizamento linear de forma:

$$S T_r = [S_1 \quad S_2] \quad (5.65)$$

onde  $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  e  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Durante um movimento de deslizamento ideal:

$$S_1 z_1 + S_2 z_2 = 0 \quad \text{para todo } t > t_r \quad (5.66)$$

e assumindo a não singularidade de  $S_2$ , a Eq. (5.66) pode ser reescrita como sendo:

$$z_2 = -M z_1 \quad (5.67)$$

onde:

$$M = S_2^{-1} S_1 \quad (5.68)$$

Substituindo a Eq. (5.67) no primeiro bloco da Eq. (5.61) resulta em:

$$\dot{z}_1 = (A_{11} - A_{12} M) z_1 \quad (5.69)$$

A Eq. (5.69) é uma expressão direta descrevendo a dinâmica de ordem reduzida associada à superfície de deslizamento. Considerando o sistema da Eq. (5.61) com  $z_1$  considerado como vetor de estado e  $z_2$  como uma entrada de controle virtual, a Eq. (5.67) pode ser pensada como uma lei de controle de realimentação de estados para o primeiro bloco da Eq. (5.61).

Pelas Eqs. (5.68) e (5.69) percebe-se que  $S_2$  não tem efeito direto na dinâmica de deslizamento, e age como um fator de escala para a superfície de deslizamento. Por simplicidade, é escolhido  $S_2 = 1$ , desta forma, a superfície de deslizamento  $\sigma(x) = Sx(t)$  tem a seguinte forma:

$$S = [M \quad 1] T_r \quad (5.70)$$

Para determinar a matriz  $M$  foi utilizado a minimização quadrática linear, onde o problema de minimização do índice de performance é representado abaixo:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} x(t) Q x(t) dt \quad (5.71)$$

Neste caso, nenhum custo de penalidade no controle é imposto, diferente da formulação LQR clássica aplicada no Subcapítulo 5.3. Para resolver o problema de minimização, a matriz  $Q$  é transformada e particionada de maneira compatível com as coordenadas  $z$ . Desta forma:

$$T_r Q T_r' = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Nas coordenadas  $z$ , a função custo  $J$  na Eq. (5.71) pode ser reescrita como sendo:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} z_1(t)' Q_{11} z_1(t) + 2z_1(t)' Q_{12} z_2(t) + z_2(t)' Q_{22} z_2(t) dt \quad (5.73)$$

Como foi considerado  $z_1$  como um vetor de estados e  $z_2$  como uma entrada de controle virtual, então a Eq. (5.73) representa um problema “tradicional” de custo LQR associado ao primeiro bloco do sistema da Eq. (5.61), onde o termo  $z_1' Q_{12} z_2$  envolve o conjunto do vetor de estado e do controle virtual. Para eliminar o termo cruzado, deve-se definir uma nova entrada de controle virtual na forma:

$$v = z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{12}' z_1 \quad (5.74)$$

e com algumas manipulações algébricas, a Eq. (5.73) pode ser escrita na seguinte forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} z_1' \hat{Q} z_1 + v' Q_{22} v dt \quad (5.75)$$

onde:

$$\hat{Q} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}' Q_{12}' \quad (5.76)$$

Considerando a matriz  $Q_{Indoor}$  presente na Eq. (5.35), eliminando o termo relacionado à  $\omega$ , conforme abaixo:

$$Q_{Indoor} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

realizando o procedimento de transformação de coordenadas descrito pelas Eqs. (5.72) à (5.76), equivalente a:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad e \quad Q_{22} = 1 \quad (5.78)$$

e considerando o primeiro bloco do sistema obtido pela Eq. (5.64), a matriz  $M$  do sistema de ordem reduzida na coordenada  $z$  resulta em:

$$M = [1,5528 \quad 10,8194] \quad (5.79)$$

A superfície de deslizamento linear é obtida realizando a transformação de coordenadas inversa para as coordenadas originais do sistema, conforme a Eq. (5.70), resultando em:

$$\sigma(t) = S x(t) = [1 \quad 1,5528 \quad 10,8194] \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Com uma superfície de deslizamento definida, é possível determinar uma lei de controle equivalente  $u_{eq}$  e o controle descontínuo  $u_{um}$ , presentes na lei de controle geral representada pela Eq. (5.58).

O projeto de controle equivalente é realizado conforme descrito no Subcapítulo 2.6.3, porém é considerado o sistema linear obtido pela Eq. (5.57). Conforme a Eq. (2.96), aplicada sobre o sistema linear, o controle equivalente torna-se:

$$u_{eq} = -[SB]^{-1}SAx(t) \quad (5.81)$$

A equação anterior resulta em:

$$u_{eq} = [15,9038 \quad 7,6409 \quad 95,8353] \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Para evitar o fenômeno da trepidação no momento em que o estado entra em deslizamento, o controle descontínuo é obtido utilizando a metodologia de quase modos deslizantes. Desta forma,  $u_{un}$  equivale a:

$$u_{un} = -\rho \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon} \quad (5.83)$$

Conforme descrito no Subcapítulo 2.6.2, o valor de  $\rho$  deve assumir valores de modo com que a condição de existência de um modo deslizante exista com a presença de um termo de perturbações, este assumido como sendo limitado. Para suprir maiores necessidades de ação de controle perante todas as perturbações possíveis, o valor de  $\rho$  é escolhido como sendo o valor máximo de ação de controle. Como os motores operam com tensão máxima de 24 V,  $\rho$  torna-se igual a 24.

O valor de  $\varepsilon$  foi escolhido experimentalmente, onde  $\varepsilon = 0,01$  apresentou resultados satisfatórios referente à prevenção da trepidação.

A lei de controle por modos deslizantes resultante, conforme a Eq. (5.58), pode ser vista abaixo.

$$u(t) = u_{\omega} + u_{eq} + u_{un} \quad (5.84)$$

$$u_{\omega} = \begin{bmatrix} 71 & -225,2 \\ -69,9 & 221,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega_e \end{bmatrix}, \quad u_{eq} = \begin{bmatrix} 15,9 & 7,64 & 95,83 \\ 15,9 & 7,64 & 95,83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix},$$

$$u_{un} = \begin{bmatrix} -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \\ -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \end{bmatrix}$$

### 5.4.2 Freerun

Da mesma forma como foi definido no projeto de controle PI e LQR, dentro do projeto de controle por modos deslizantes no modo de operação *Freerun* será desconsiderada a dinâmica da velocidade longitudinal  $v$ , resultando em um sistema de segunda ordem:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0001 & 118,54 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,29 \\ 0 \end{bmatrix} V_a \quad (5.85)$$

De forma a rejeitar a ação de forças externas agindo sobre a inclinação do protótipo, é introduzido na superfície de deslizamento uma ação integral, conforme a equação abaixo:

$$\sigma(t) = S x(t) + S_I \int_0^t \xi_e(t) dt = \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ \xi_e \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

onde  $\hat{S} = [S \quad S_I]$ , e  $\xi_e = \theta_{3ref} - \theta_3$  com  $\xi_e \in \mathbb{R}^l$ .

Com a adição de um termo integral, para a realização do projeto de controle foi considerado o sistema aumentado conforme a Eq. (5.4), onde a matriz  $C_{Freerun} = [0 \quad 1]$ .

Para o projeto da superfície de deslizamento, a mesma metodologia utilizada no modo de operação *Indoor* foi aplicada. Seguindo a mesma sequência de projeto, a matriz de transformação de coordenadas  $T_r$  utilizada foi:

$$T_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

resultando no seguinte sistema aumentado, vinculado à coordenada  $z$  e na forma regular:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z_2 \\ \dot{z}_2 &= [118,5418 \quad 0] z_1 - 0,0001 z_2 - 1,2891u \end{aligned} \quad (5.88)$$

É considerada a mesma estrutura da superfície de deslizamento apresentada pela Eq. (5.65), porém com dimensões de  $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+l)-m}$  e  $S_2 \in \mathbb{R}^l$ . A matriz  $Q$  referente à minimização quadrática linear aplicada



sobre o sistema de ordem reduzida (primeiro bloco da Eq. (5.88)) foi definida com os mesmos critérios utilizados no Subcapítulo 5.3, porém, desconsiderando as dinâmicas de  $\omega$ .

$$Q_{Freerun} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

A superfície de deslizamento resultante, utilizando o mesmo procedimento do modo *Indoor*, pode ser observada abaixo:

$$\sigma(t) = \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ \xi_e \end{bmatrix} = [1 \quad 10,9545 \quad -10] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ \xi_e \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

O controle equivalente  $u_{eq}$ , utilizando a formulação obtida pela Eq. (5.81), resulta em:

$$u_{eq} = [8,4976 \quad 99,7132 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ \xi_e \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Considerando os mesmos critérios utilizados para o projeto de controle descontínuo no modo *Indoor*, a lei de controle resultante pode ser observada abaixo:

$$u(t) = u_\omega + u_{eq} + u_{un} \quad (5.92)$$

$$u_\omega = \begin{bmatrix} 71 & -225,2 \\ -69,9 & 221,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega_e \end{bmatrix}, \quad u_{eq} = \begin{bmatrix} 8,49 & 99,71 & 0 \\ 8,49 & 99,71 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ \xi_e \end{bmatrix},$$

$$u_{un} = \begin{bmatrix} -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \\ -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \end{bmatrix}$$

### 5.4.3 Joystick

A metodologia da ação integral dentro da superfície de deslizamento é utilizada neste modo de operação com o objetivo de seguimento de referência de velocidade longitudinal  $v$ . O sistema utilizado para o projeto de controle é o mesmo obtido pela Eq. (5.57).

Com a obtenção de um sistema aumentado conforme a Eq. (5.4), onde  $C_{Joystick} = [1 \ 0 \ 0]$  e  $\xi_e = v_{ref} - v$ , e aplicando uma transformação de coordenadas com uma matriz  $T_r$ :

$$T_r = \begin{bmatrix} 0,9104 & 0,4137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4137 & 0,9104 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

o sistema resultante pode ser observado abaixo.

$$\dot{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5,0009 & 0 \\ 0,4137 & 0 & 0 \\ -0,9104 & 0 & 0 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9104 \\ 0,4137 \end{bmatrix} z_2 \quad (5.94)$$

$$\dot{z}_2 = [20,5018 \quad 127,9349 \quad 0] z_1 - 9,3166 z_2 - 1,4160 u$$

As mesmas considerações feitas referentes à superfície de deslizamento utilizada no modo *Freerun* são aplicadas neste modo de operação. A matriz  $Q$ , desconsiderando a dinâmica de  $\omega$ , é equivalente a:

$$Q_{Joystick} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Com o mesmo procedimento utilizado nos outros modos de operação, a lei de controle resultante é apresentada a seguir:

$$u(t) = u_\omega + u_{eq} + u_{un} \quad (5.96)$$

$$u_{\omega} = \begin{bmatrix} 71,1 & -225,3 \\ -70 & 221,9 \end{bmatrix} [\omega_e],$$

$$u_{eq} = \begin{bmatrix} 22,97 & 13,88 & 125 & 0 \\ 22,97 & 13,88 & 125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ \xi_e \end{bmatrix},$$

$$u_{un} = \begin{bmatrix} -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \\ -24 \frac{\sigma}{|\sigma| + 0,01} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\sigma(t) = \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ \xi_e \end{bmatrix} = [8,52 \quad 4,97 \quad 19,66 \quad -10] \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \\ \xi_e \end{bmatrix} \quad (5.97)$$



## 6 RESULTADOS VIA SIMULAÇÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos via simulação dos controladores em malha fechada, aplicados aos três modos de operação. Os controladores são aplicados sobre o sistema não-linear completo apresentado no Apêndice B, e nele serão analisados os seus desempenhos em diferentes configurações paramétricas, de modo a mapear os limites de operação e comparar a estabilidade e robustez entre os controladores. Com base nos resultados, serão definidas as especificações de funcionamento do sistema, e então simuladas diferentes situações de operação, assim como os efeitos das forças externas atuantes e perturbações. As simulações foram realizadas utilizando os *softwares* Matlab® e Simulink®. Este capítulo serve como base para a aplicação do controlador no protótipo.

### 6.1 MAPEAMENTO DOS LIMITES DE OPERAÇÃO DO SISTEMA

O mapeamento dos limites de operação é apresentado neste trabalho como uma forma de analisar a estabilidade do sistema perante certas condições de funcionamento.

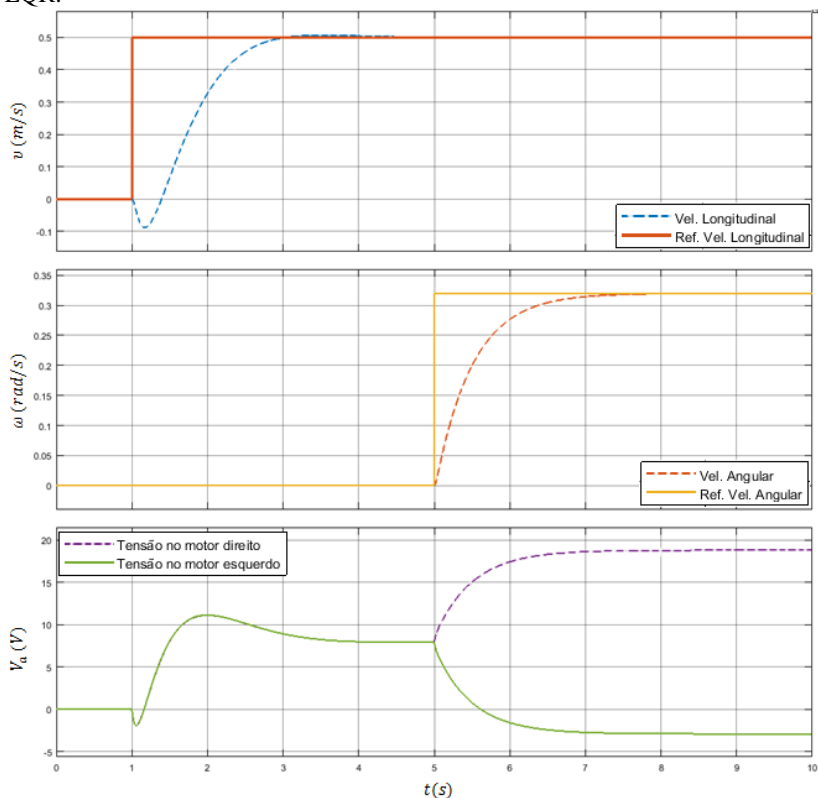
Dentre as condições de funcionamento, será analisado o desempenho da cadeira de rodas em velocidades longitudinais e angulares máximas. Os valores escolhidos para as velocidades máximas foram:

- $v_{máx} = 0,5 \text{ m/s}$
- $\omega_{máx} = 0,3 \text{ rad/s}$

Estes valores foram escolhidos de forma com que a ação de controle não ultrapasse 80% do seu potencial, neste caso, 19,2 V de tensão de entrada nos motores. A saturação dos atuadores deve ser evitada pois é a principal causa de instabilidade do sistema em funcionamento. Desta forma, é desejável que, em situações em que a cadeira de rodas esteja operando em velocidades máximas, ainda haja potencial de ação de controle para manter o sistema estabilizado diante perturbações ou movimentos do usuário. A Fig. 6.1 mostra o resultado da simulação no modo de operação *Joystick* utilizando o controlador LQR sob a condição de velocidades máximas impostas por um sinal de

referência do tipo degrau, obtendo um valor máximo de tensão nos motores de 18,8 V.

Figura 6.1 – Teste de velocidades máximas no modo *Joystick* com controle LQR.



Com as velocidades máximas de operação definidas, nesta primeira etapa de simulações serão analisados os seguintes parâmetros:

- Ângulo de inclinação longitudinal do usuário (somente nos modos *Indoor* e *Joystick*);
- Ângulo de inclinação lateral do usuário;
- Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas.

A avaliação dos parâmetros será feita com a alteração das suas condições iniciais nas simulações, onde serão tabelados os valores obtidos no limite de estabilidade do sistema. Os demais parâmetros serão mantidos nos valores nominais definidos pela Tab. 4.1. Não será avaliado a inclinação longitudinal do usuário no modo *Freerun* pois nesse modo não há o controle da velocidade longitudinal  $v$ , desta forma, com uma inclinação constante do usuário, a velocidade da cadeira de rodas é crescente até atingir a saturação dos motores, e consequentemente a instabilidade do sistema.

Os ensaios serão realizados por meio de 4 condições diferentes:

1ª - Velocidade longitudinal e angular nulas;

2ª - Velocidade longitudinal máxima (0,5 m/s) e velocidade angular nula;

3ª - Velocidade angular máxima (0,3 rad/s) e velocidade longitudinal nula;

4ª - Velocidade longitudinal e angular máximas (0,5 m/s e 0,3 rad/s, respectivamente).

O objetivo deste primeiro ensaio é analisar o desempenho do sistema em condições de operação, comparando os resultados de cada controlador em cada modo de operação. Os resultados podem ser observados nas Tabs. 6.1, 6.2 e 6.3.

Tabela 6.1 – Avaliação dos limites de operação no modo *Freerun*.

		<b>Freerun</b>			
		<b>Condições de ensaio</b>			
<b>Parâmetro avaliado</b>		1ª	2ª	3ª	4ª
<b>PI</b>	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,228	0,155
<b>LQR</b>	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,217	0,105
<b>MD</b>	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,22	0,127

Tabela 6.2 – Avaliação dos limites de operação no modo *Indoor*.

		<b>Indoor</b>			
		<b>Condições de ensaio</b>			
<b>Parâmetro avaliado</b>		1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>
<b>PI</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,362	0,293	0,361	0,292
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,229	0,154
<b>LQR</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,22	0,217	0,205	0,203
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,228	0,153
<b>MD</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,262	0,262	0,247	0,247
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,229	0,154	0,226	0,151

Tabela 6.3 – Avaliação dos limites de operação no modo *Joystick*.

		<b>Joystick</b>			
		<b>Condições de ensaio</b>			
<b>Parâmetro avaliado</b>		1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>
<b>PI</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,396	0,271	0,396	0,27
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,178	0,146	0,178	0,146
<b>LQR</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,364	0,245	0,361	0,238
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,218	0,153	0,217	0,153
<b>MD</b>	Ângulo de inclinação longitudinal do usuário	0,431	0,292	0,411	0,279
	Ângulo de inclinação lateral do usuário	-	-	-	-
	Ângulo de inclinação longitudinal da cadeira de rodas	0,213	0,153	0,211	0,151



Como pode ser visto, o ângulo de inclinação lateral inicial do usuário mostrou não influenciar na dinâmica do sistema. Vale complementar que foram atribuídos valores constantes aos parâmetros, desta forma, a inclinação lateral do usuário somente altera a posição do centro de massa do usuário. Para uma análise mais completa, seria necessário considerar dentro do modelo matemático desenvolvido um fator de deformação individual para cada pneu, considerando a distribuição do peso sobre a cadeira de rodas. Contudo, este é um fator que não tem influência significativa no desempenho do sistema.

Em geral, o controlador PI apresentou maiores limites de operação nos modos de operação *Freerun* e *Indoor*, enquanto no modo *Joystick*, o controle por modos deslizantes apresentou melhores resultados. Pôde-se perceber a relação entre velocidade e estabilidade dentre os controladores. O controle PI atingiu resultados melhores em comparação ao controle LQR por ter dinâmicas mais rápidas, desta forma, suportando maiores inclinações do usuário e da cadeira de rodas sem atingir a saturação dos motores.

Para uma melhor análise de robustez dos controladores, foi realizado um segundo ensaio comparando os seguintes parâmetros:

- Massa do usuário;
- Massa da cadeira de rodas;
- Distância entre o CM da cadeira de rodas e o centro de coordenadas;
- Distância entre o CM do usuário e o CM da cadeira de rodas.

Neste ensaio, as condições foram:

1<sup>a</sup> - Inclinação longitudinal do usuário de 15° (exceto no modo *Freerun*);

2<sup>a</sup> - Inclinação longitudinal inicial da cadeira de rodas de 10°;

3<sup>a</sup> - Seguimento de referência de velocidade longitudinal máxima: 0,5 m/s (Somente para o modo *Joystick*);

As condições iniciais de velocidade longitudinal e angular da cadeira de rodas são nulas, e os demais parâmetros não avaliados são mantidos nas condições nominais. Da mesma forma como foi realizado o primeiro ensaio, cada parâmetro medido foi tabelado conforme o seu limite em que o sistema se mantém estável. Não foi possível realizar a primeira condição de ensaio para o modo *Freerun* pelo mesmo motivo pelo qual não foi realizado a avaliação da inclinação longitudinal do usuário no ensaio anterior.

Os resultados são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 6.4 – Análise de robustez do sistema.

		<b>Freerun</b>		<b>Indoor</b>		<b>Joystick</b>		
		<b>Condições de ensaio</b>		1ª	2ª	1ª	2ª	3ª
<b>Parâmetro avaliado</b>		2ª						
<b>PI</b>	Peso do usuário	121	113	121	125	82	203	
	Peso da cadeira de rodas	110	269	110	945	55	152	
	Distância entre o CM da cadeira de rodas e o centro de coordenadas	0,65	0,68	0,58	0,3	0,2	0,29	
	Distância entre o CM do cadeirante e o CM da cadeira de rodas	0,85	0,5	0,69	0,44	0,35	0,45	
<b>LQR</b>	Peso do usuário	121	100	121	117	109	252	
	Peso da cadeira de rodas	110	215	110	431	97	230	
	Distância entre o CM da cadeira de rodas e o centro de coordenadas	0,65	1,43	0,65	0,39	0,29	0,38	
	Distância entre o CM do cadeirante e o CM da cadeira de rodas	0,85	0,37	0,85	0,49	0,43	0,53	
<b>MD</b>	Peso do usuário	130	109	121	145	108	325	
	Peso da cadeira de rodas	122	+2000	110	+2000	97	261	
	Distância entre o CM da cadeira de rodas e o centro de coordenadas	0,7	2,21	0,65	0,38	0,27	0,37	
	Distância entre o CM do cadeirante e o CM da cadeira de rodas	1,03	0,37	0,85	0,55	0,42	0,51	

Dois pontos que devem ser destacados na Tab. 6.4 são as posições dos CM da cadeira de rodas e do CM do usuário no modo de operação *Joystick*. Na segunda condição de ensaio estes não suportaram valores maiores do que os estipulados inicialmente, demonstrando serem bastante sensíveis à variação neste modo de operação.

Outro parâmetro que merece destaque é a massa da cadeira de rodas, que assumiu valores bastante elevados, principalmente na primeira condição de ensaio. Nas simulações pôde-se perceber que com uma massa da cadeira de rodas maior, menor é a influência da dinâmica do usuário, tornando o sistema mais lento em condições próximas ao ponto de equilíbrio. Em especial, pode-se observar que na primeira condição de ensaio, o controle por modos deslizantes manteve o sistema estável com uma massa da cadeira de rodas maior que 2000 kg.

Para a comparação de desempenho dentre os controladores, a terceira condição de ensaio aplicada no modo *Joystick* demonstrou ser a mais conclusiva, pois esta se inicia em condições de operação partindo do ponto de equilíbrio, o que será realizado na prática. Como era esperado, o controle por modos deslizantes provou ser o mais robusto em relação ao peso da cadeira de rodas e do usuário. Em relação à posição do CM da cadeira de rodas e do usuário, os controladores LQR e modos deslizantes apresentaram valores próximos. A explicação para este resultado se deve à dinâmica do sistema em deslizamento projetada no controle por modos deslizantes ser baseada na matriz de custo de energia dos estados do controle LQR, desta forma, os dois controladores apresentam a mesma dinâmica.

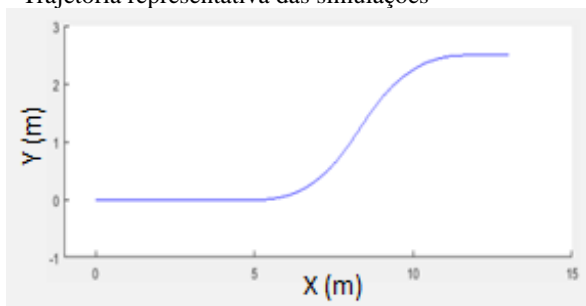
Em geral, as tabelas apresentadas anteriormente são importantes para se obter informação de como a dinâmica do sistema se comporta com a variação dos parâmetros e quais destes são mais sensíveis a mudanças. A partir dos resultados, pode-se pensar em alternativas que aprimorariam o desempenho, como por exemplo, a utilização de sensores de carga no assento tornando os ganhos dos controladores PI e LQR variantes conforme a massa do usuário. No projeto de controle por modos deslizantes, a informação dos limites de operação com a variação paramétrica também é importante para a determinação da matriz de perturbações limitadas no projeto de controle descontínuo.

Os próximos ensaios serão realizados de forma individual para cada modo de operação, onde serão simuladas situações de operação da cadeira de rodas.

## 6.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - FREERUN

Para a análise de desempenho entre os controladores desenvolvidos, serão simuladas situações reais de operação da cadeira de rodas. Primeiramente, será simulado a realização de uma certa trajetória, representada pela Fig. 6.2, onde é desconsiderada a presença de perturbações. As simulações buscam demonstrar, em sequência, as principais condições de operação: aceleração, movimento de curva e desaceleração em movimento de curva.

Figura 6.2 – Trajetória representativa das simulações



Para realizar a trajetória proposta pela Fig. 6.2, foi simulada uma inclinação do usuário de 0 rad / 0,05 rad / 0 rad no intervalo de  $1s < t < 4s$  para o movimento de aceleração da cadeira de rodas, e de 0 rad / -0,05 rad / 0 rad no intervalo de  $15s < t < 18s$  para o movimento de desaceleração. Tendo em vista a aplicação dos controladores no protótipo, o sinal de referência de velocidade angular  $\omega_{ref}$  é do tipo rampa, de modo com que a cadeira de rodas realize movimentos de curva mais suaves, e com aceleração angular de  $0.15 \text{ rad/s}^2$ . Vale lembrar que o comando de movimento de curva é realizado pela inclinação lateral do usuário, desta forma também é realizado o movimento de inclinação lateral do usuário de forma proporcional ao sinal de referência  $\omega_{ref}$ , atingindo valores entre -0,3 rad a 0,3 rad. Os resultados referentes à aplicação dos controladores PI, LQR e modos deslizantes podem ser vistos nas Figs. 6.3, 6.4 e 6.5, respectivamente.

Figura 6.3 – Simulação de trajetória com o controlador PI.

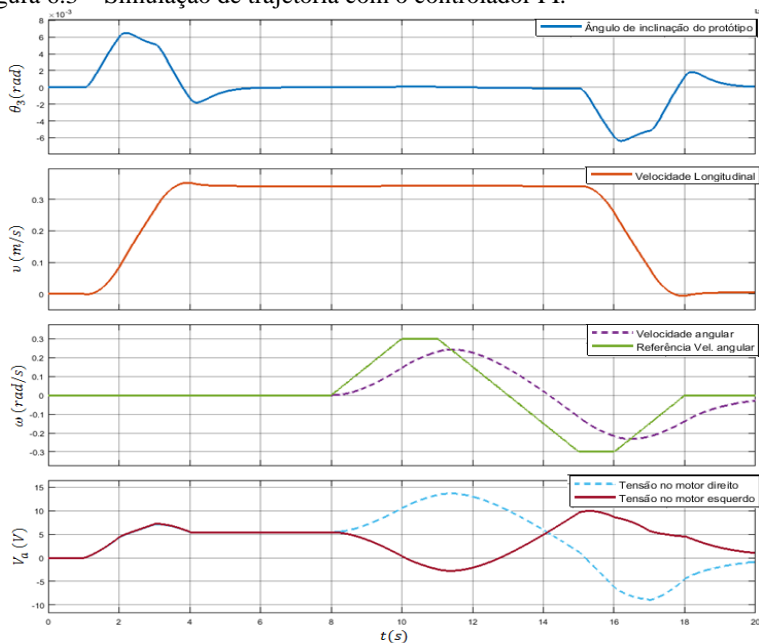


Figura 6.4 – Simulação de trajetória com o controlador LQR.

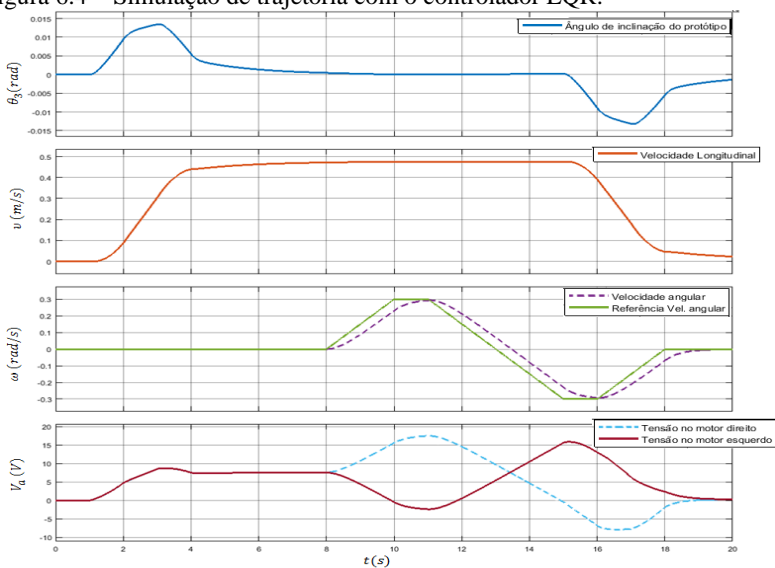
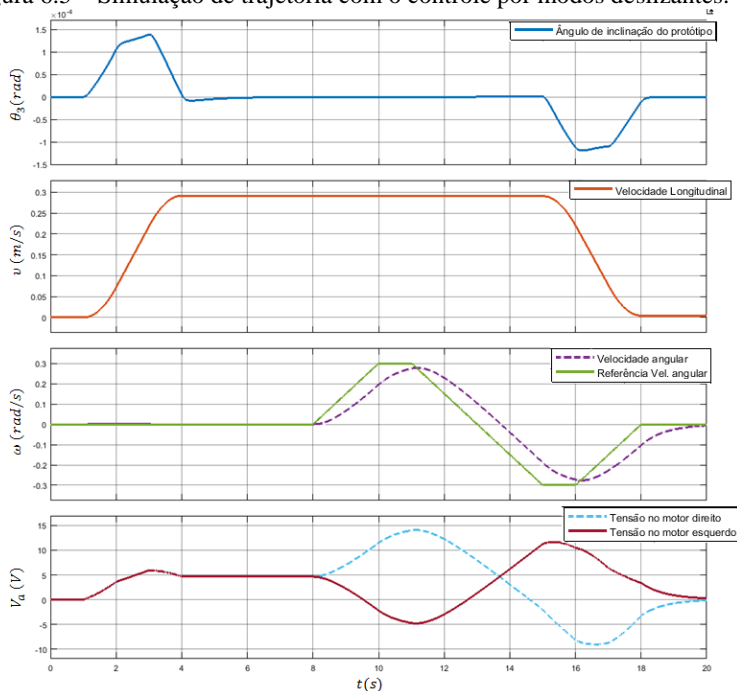


Figura 6.5 – Simulação de trajetória com o controle por modos deslizantes.



As simulações mostraram que entre os controladores lineares (PI e LQR), o controle PI apresentou melhores resultados em relação à inclinação da cadeira de rodas, atingindo valores máximos de  $6,5 \times 10^{-3}$  rad, enquanto o controle LQR obteve melhores resultados de controle da velocidade angular, alcançando uma resposta mais rápida de seguimento de referência.

Por apresentar polos dominantes mais rápidos do sistema em malha fechada, era esperado que o controle PI atingisse resultados melhores em relação à inclinação da cadeira de rodas, porém, tendo em vista o desenvolvimento do projeto de controle em espaço de estados buscando um certo desempenho desejado, o controle LQR demonstrou ser mais dinâmico, podendo-se setar critérios de desempenho separadamente para cada estado controlado, como por exemplo, o controle de velocidade angular, o que se torna dificultoso no desenvolvimento do controle PI.

O controle por modos deslizantes apresentou o melhor resultado em relação à inclinação da cadeira de rodas, atingindo valores máximos

de  $1,4 \times 10^{-4}$  rad. O seguimento de referência de velocidade angular apresentou uma dinâmica semelhante ao controle LQR, visto que a superfície de deslizamento foi projetada baseada na matriz de ponderação de energia dos estados obtida no projeto de controle LQR.

Também foi possível observar neste modo de operação que quanto mais lenta a resposta de controle em relação à inclinação da cadeira de rodas, maior será a velocidade atingida em resposta à inclinação do usuário.

Em relação ao sinal de controle foram atingidos resultados satisfatórios, visto que não ultrapassaram 80% do seu potencial, como foi definido anteriormente.

Para uma melhor compreensão de funcionamento do modo de operação *Freerun*, e uma melhor interpretação dos resultados obtidos pelas Figs. 6.3, 6.4 e 6.5, um vídeo demonstrativo pode ser acessado pelo *QR code* apresentado na Fig. 6.6. Nele podem ser vistos os resultados das simulações em uma interface 3D, onde o modelo demonstrativo é semelhante ao apresentado na Fig. 4.1.

Figura 6.6 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação *Freerun*.



O próximo ensaio foi realizado tendo em vista a presença de perturbações. Dentre as perturbações possíveis, as mais influentes são as forças geradas por irregularidades no terreno e forças aplicadas diretamente ao chassi, descritas no Subcapítulo 4.4.

As forças aplicadas diretamente ao chassi serão aplicadas conforme a Eq. (4.45), onde a distância entre o centro de coordenadas e a força aplicada será de 0,35 m, mesma altura em que se encontra o CM do usuário. Estas serão aplicadas com a cadeira de rodas inicialmente parada, enquanto as irregularidades no terreno serão simuladas com a cadeira de rodas em movimento, com uma velocidade inicial de 0,5 m/s. As perturbações serão aplicadas na forma de pulsos de 0,1 segundo, a cada segundo no intervalo de 1 a 9 segundos. As forças aplicadas ao chassi iniciam em 1 N, e dobram o seu valor a cada segundo, atingindo 256 N aos 9 segundos de simulação. Da mesma forma, as forças de

irregularidades no terreno iniciam em 0,25 N, chegando a 64 N aos 9 segundos. A ideia em aplicar sinais de pulsos como forças de irregularidades no terreno tem como objetivo simular situações em que a cadeira de rodas esteja passando por degraus no terreno. Os resultados podem ser observados nas Figs. 6.7, 6.8 e 6.9.

Figura 6.7 – Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controlador PI.

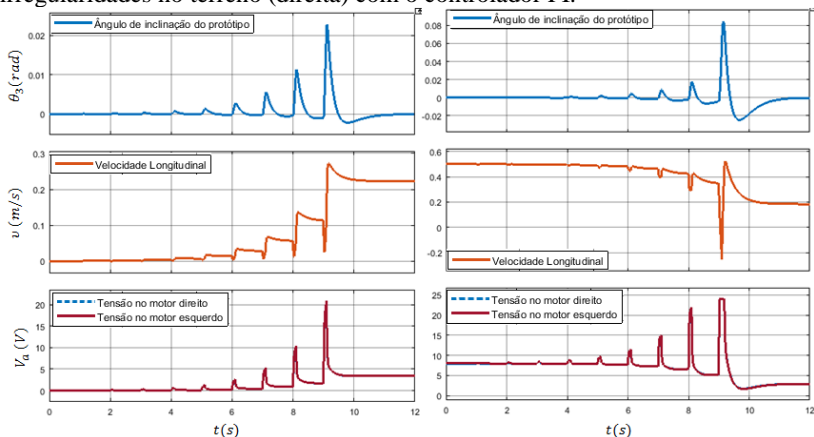


Figura 6.8 - Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controlador LQR.

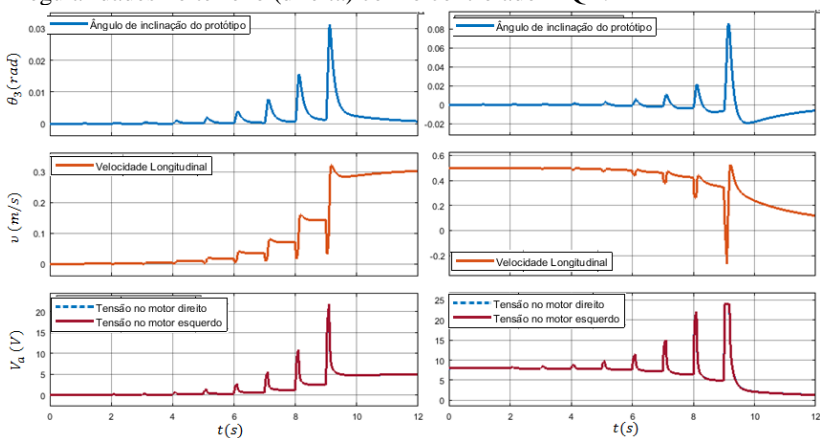
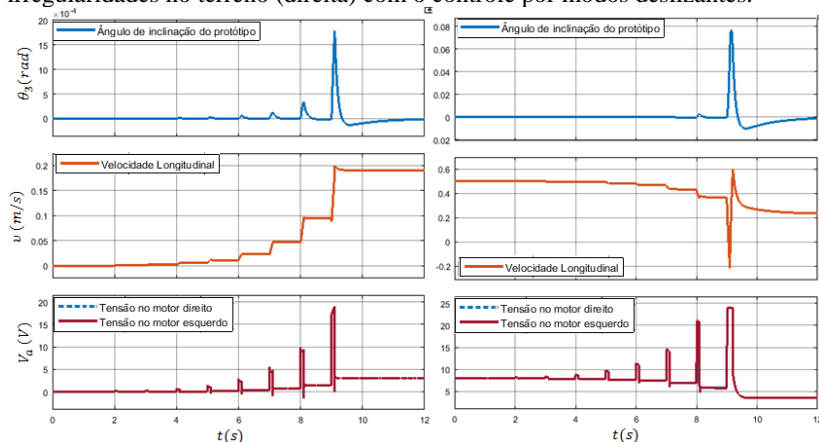




Figura 6.9 - Simulação de forças aplicadas ao chassi (esquerda) e de irregularidades no terreno (direita) com o controle por modos deslizantes.



Dentre os controladores, o que obteve melhor desempenho foi o controle por modos deslizantes, seguido pelo controle PI e por último o controle LQR. Neste ensaio é interessante analisar como o sinal de controle se comporta entre os controladores lineares (PI e LQR) e o controle por modos deslizantes. É possível observar como o controle por modos deslizantes tende a neutralizar o efeito da perturbação com uma resposta imediata, buscando manter o sistema dentro da camada limite da superfície de deslizamento.

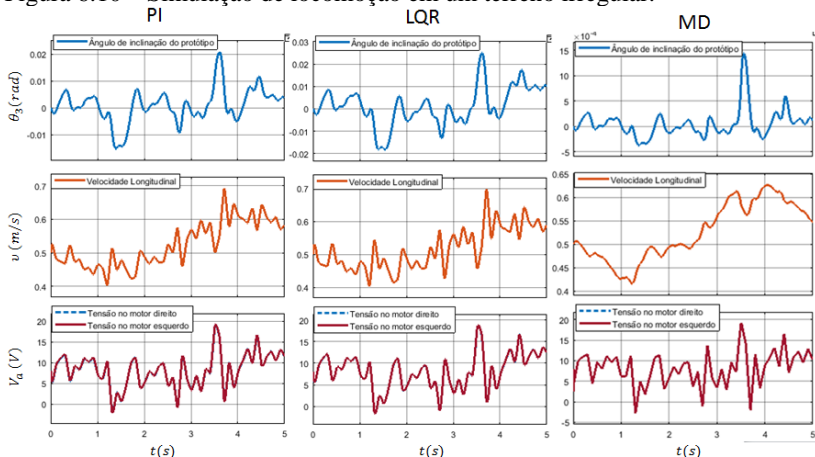
Em complemento às simulações de perturbação, também foi simulado a locomoção da cadeira de rodas em um terreno com irregularidades, sendo introduzido um ruído Gaussiano às forças de irregularidades no terreno, com frequência de 10 Hz e desvio padrão de 10 N. Os resultados das simulações podem ser observados na Fig. 6.10.

Como pode ser visto, fica comprovada a eficiência do controle por modos deslizantes no quesito rejeição de perturbação, onde foi atingido inclinações da cadeira de rodas significativamente menores em relação aos outros controladores, e velocidades longitudinais muito mais suaves.

Não será analisado o comportamento do sistema em relação à locomoção em terrenos inclinados neste modo de operação, pois este depende da movimentação do usuário, o que se torna dificultoso em simular visto que cada controlador apresenta um comportamento

diferente, e um bom desempenho nestas situações depende do *feeling* do usuário. Este critério será analisado nos demais modos de operação.

Figura 6.10 – Simulação de locomoção em um terreno irregular.



### 6.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - INDOOR

O princípio de funcionamento do modo de operação *Indoor* também é baseado no controle da locomoção pela movimentação do tronco do usuário, porém, de forma diferente ao modo *Freerun*, este depende de uma inclinação permanente do usuário para se atingir velocidades constantes. Desta forma, para realizar a trajetória proposta pela Fig. 6.2 foi necessário realizar uma inclinação do usuário de 0,1 rad no sentido longitudinal, nos intervalos de 2 a 18 segundos. Também, da mesma forma como no modo *Freerun*, o sinal de referência de velocidade angular  $\omega_{ref}$  é proporcional à inclinação lateral do usuário, variando de -0,3 rad a 0,3 rad.

Os resultados das simulações dos controladores PI, LQR e modos deslizantes, para o seguimento da trajetória representativa apresentada na Fig. 6.2, podem ser vistos nas Figs. 6.11, 6.12 e 6.13, respectivamente.

Figura 6.11 – Simulação de trajetória com o controlador PI.

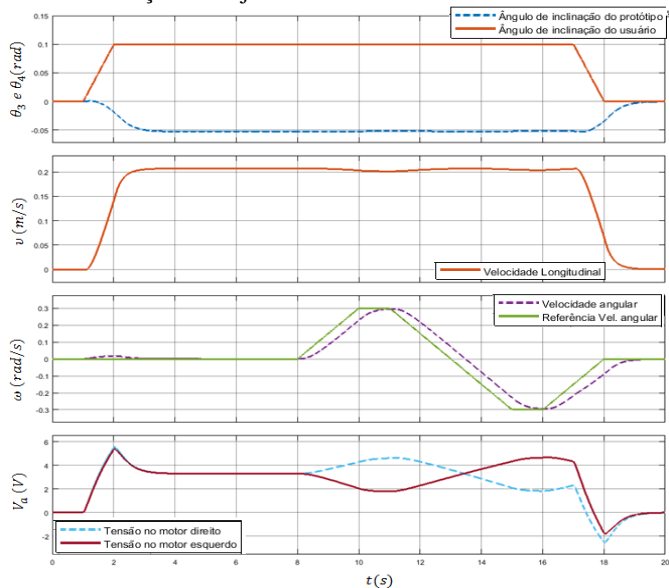


Figura 6.12 - Simulação de trajetória com o controlador LQR.

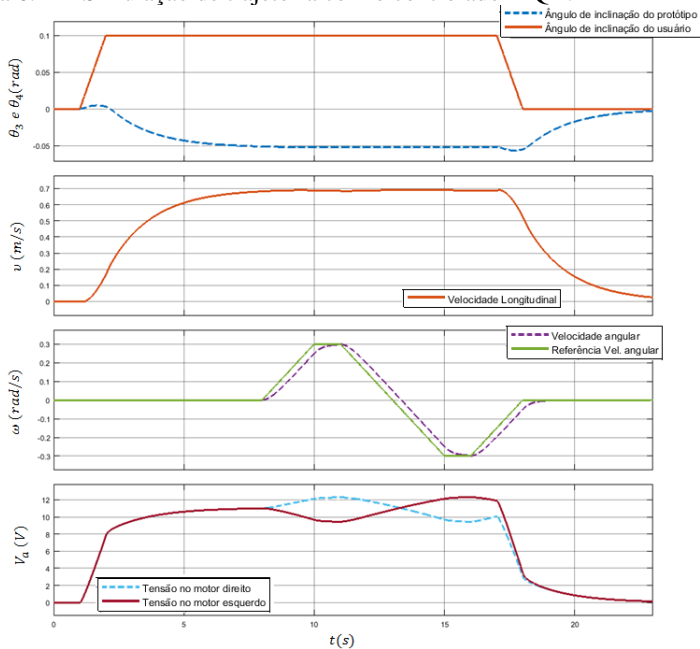
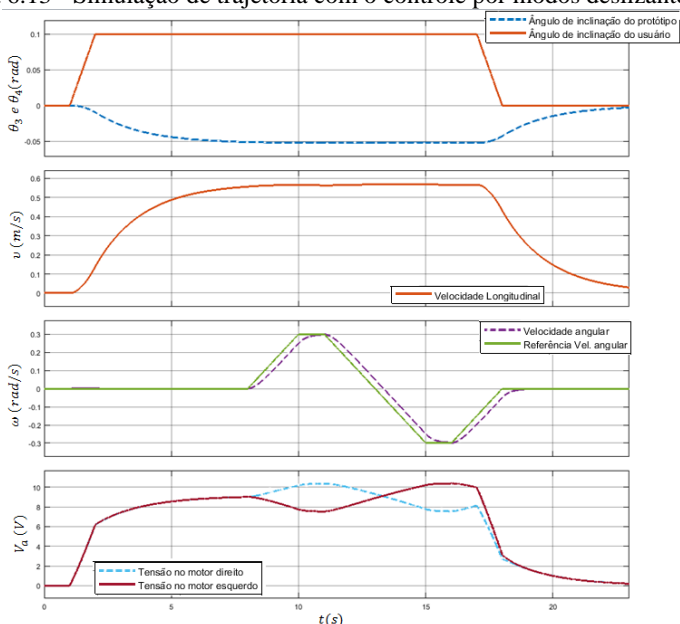


Figura 6.13 - Simulação de trajetória com o controle por modos deslizantes.



Pelos gráficos anteriores é possível perceber como a dinâmica do sistema se comporta neste modo de operação. Ao realizar uma inclinação do usuário no sentido longitudinal, a cadeira de rodas tende a “compensar” com uma inclinação no sentido oposto, e como não há a presença de integradores tanto no controle do ângulo de inclinação  $\theta_3$  como na velocidade longitudinal  $v$ , estes estados permanecem com um erro constante em regime permanente, proporcionando velocidades longitudinais menores em comparação ao modo *Freerun*, visto que a inclinação do usuário é o dobro da inclinação aplicada nas simulações do modo de operação anterior. Em consequência disso, o controle de locomoção se torna mais fácil, onde não se torna necessário realizar uma inclinação do usuário no sentido oposto para parar a cadeira de rodas, basta voltar à posição inicial.

Analisando o desempenho dos controladores, o que apresentou melhores resultados foi o controle PI, que como no modo *Freerun*, apresenta polos dominantes mais rápidos. O controle LQR apresentou o pior desempenho, visto que atingiu velocidades longitudinais em torno de 0,7 m/s, e sinais de controle próximos a 12V.

É interessante analisar que, mesmo atingindo velocidades longitudinais maiores do que a determinada como máxima, o sinal de controle permaneceu relativamente baixo, o que é um ponto positivo no quesito de potencial de controle para rejeição de perturbações e forças externas atuantes.

Como pode ser visto na Fig. 6.13, o controle por modos deslizantes obteve um desempenho bastante semelhante ao controle LQR, porém atingindo velocidades longitudinais menores. Pode-se observar como o projeto da superfície de deslizamento realmente proporciona o desempenho desejado, que neste caso, foi definido pela matriz de ponderação de energia dos estados baseada no controle LQR.

Um vídeo com a demonstração das simulações realizadas nas Figs. 6.11, 6.12 e 6.13, pode ser acessado pelo *QR code* abaixo.

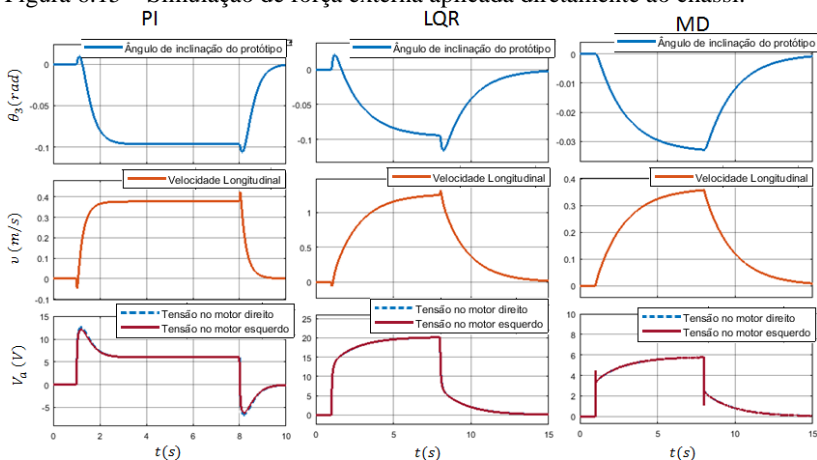
Figura 6.14 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação *Indoor*.



Como não há a presença de integradores nos estados de ângulo da cadeira de rodas  $\theta_3$  e velocidade longitudinal  $v$ , o próximo ensaio será realizado para análise do controle proporcional, tendo em vista que este não possui propriedades de rejeição de perturbações constantes. Neste ensaio, será aplicada uma força de 50 N, diretamente ao chassi, a 0,35 m acima centro de coordenadas do sistema. Esta força será constante, aplicada no intervalo de 1 a 8 segundos. O propósito deste ensaio é simular a situação de uma pessoa empurrando a cadeira de rodas como um auxílio na locomoção. Os resultados são apresentados na Fig. 6.15.

A Fig. 6.15 mostra a necessidade de se ter uma resposta rápida para se obter um bom desempenho neste modo de operação. No segundo gráfico (LQR) pode-se observar que a cadeira de rodas atingiu velocidades maiores que o dobro da velocidade máxima definida, sob a mesma força aplicada aos outros controladores. Este é um ponto bastante negativo, visto que objetivo deste modo de operação é proporcionar velocidades mais lentas para uma melhor locomoção em espaços restritos.

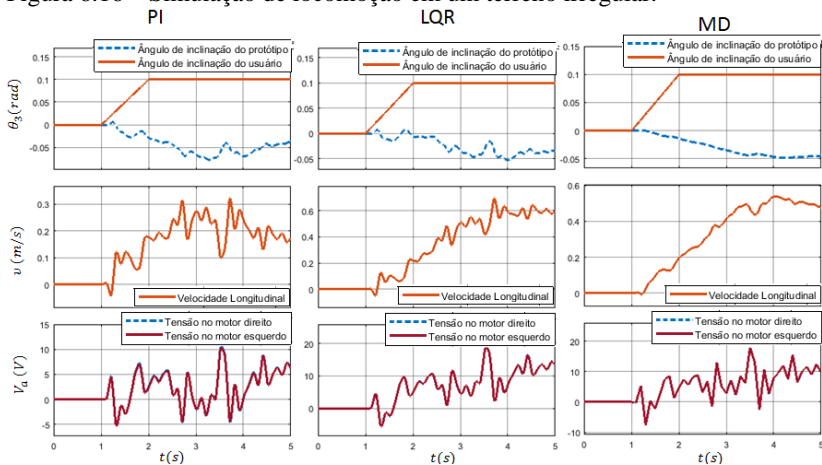
Figura 6.15 – Simulação de força externa aplicada diretamente ao chassi.



Confirmando o que foi dito anteriormente, o controle por modos deslizantes obteve uma resposta semelhante ao controle LQR, porém atingindo valores menores, em especial o ângulo  $\theta_3$ , com o melhor resultado dentre os três controladores.

Como no modo *Freerun*, também foi simulado a locomoção sobre um terreno com irregularidades. Um sinal de ruído Gaussiano de 10 Hz e desvio padrão de 10 N foi introduzido no momento em que a cadeira de rodas inicia seu movimento, juntamente com a inclinação do usuário no sentido longitudinal.

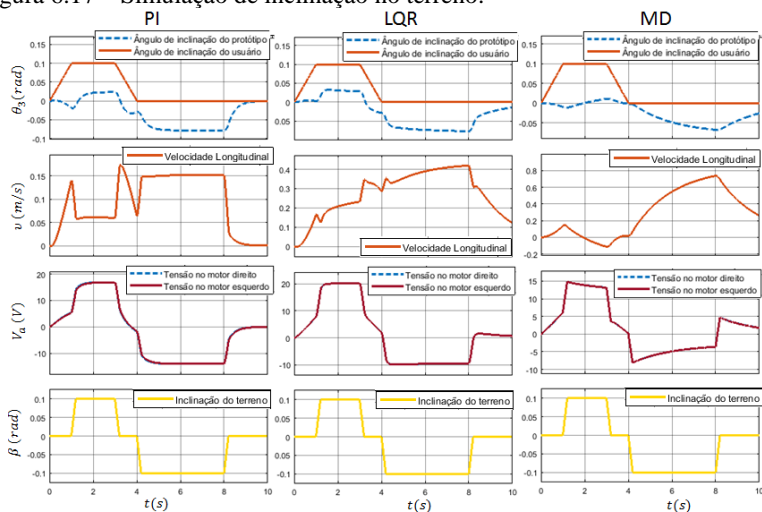
Figura 6.16 – Simulação de locomoção em um terreno irregular.



Assim como no modo *Freerun*, e como era esperado, o controle por modos deslizantes apresentou o melhor desempenho.

Neste modo de operação foi possível analisar o comportamento do sistema na locomoção em terrenos inclinados, visto que é possível obter via simulação um melhor controle de movimentação. Ao realizar o movimento de subida, foi imposto ao usuário uma inclinação de 0,1 rad para se obter um deslocamento para frente. A inclinação do terreno permanece em 0,1 rad no intervalo de 1 a 3 segundos, enquanto no intervalo de 4 a 8 segundos esta permanece em -0,1 rad, simulando o movimento de descida. Neste intervalo, a inclinação do usuário permanece em 0 rad, levando à movimentação livre da cadeira de rodas. Os resultados podem ser observados na figura abaixo.

Figura 6.17 – Simulação de inclinação no terreno.



O controle PI apresentou o melhor desempenho visto que proporcionou velocidades constantes nos períodos de inclinação do terreno, além de atingir velocidades menores. O controle por modos deslizantes não obteve um resultado satisfatório nesta situação de operação, visto que o sistema não obteve força suficiente para o movimento de subida, e apresentou o maior valor de velocidade longitudinal dentre os controladores no intervalo de descida.

Como não há a presença de integrador na superfície de deslizamento neste modo de operação, é possível obter uma melhor observação do comportamento da variável de deslizamento. As

Figs. 6.18 e 6.19 mostram a dinâmica da superfície de deslizamento sob condições iniciais de  $v(0) = 0,5 \text{ m/s}$  e  $\theta_3(0) = -0,1 \text{ rad}$ .

Figura 6.18 – Superfície de deslizamento.

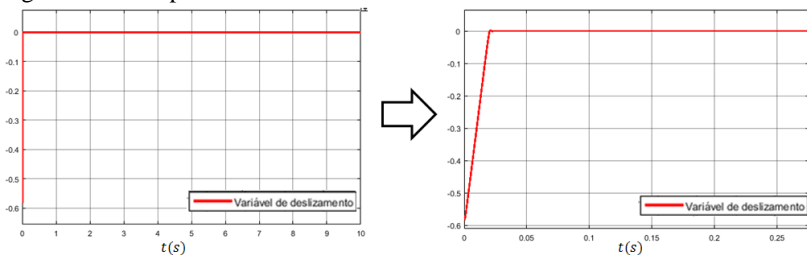
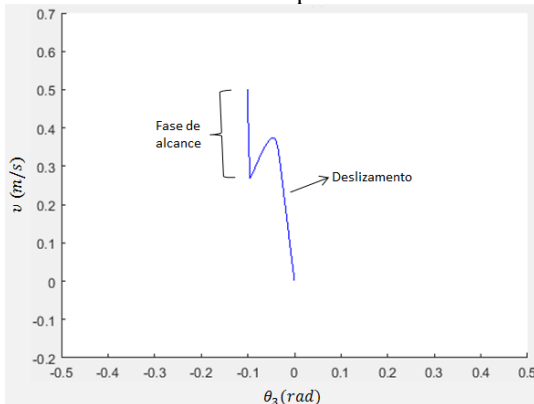


Figura 6.19 – Dinâmica dos estados sobre a superfície de deslizamento.



Como pode ser visto, sob as condições iniciais impostas, o sistema entra em deslizamento em 0,02 segundos. A Fig. 6.19 demonstra os fenômenos de fase de alcance, quando a trajetória de estado é direcionada para a superfície de deslizamento, e a fase de deslizamento, quando a trajetória de estado se move em direção à origem ao longo da superfície de deslizamento.

#### 6.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS CONTROLADORES - JOYSTICK

No modo de operação *Joystick*, o controle de locomoção é realizado por meio da variação de referência de velocidade longitudinal e angular, sendo esta independente da inclinação do usuário. Este modo



de operação tem como função a locomoção de usuários com pouca mobilidade, onde o controle do próprio equilíbrio é dificultoso. Desta forma, a cadeira de rodas busca “corrigir” a mudança do CM total entre a cadeira de rodas e o usuário, mantendo-se na velocidade desejada conforme o controle pelo *joystick*.

Da mesma forma como foi definido o sinal de referência de velocidade angular, neste modo de operação o sinal de referência de velocidade longitudinal será do tipo rampa, obtendo uma aceleração de  $0,25 \text{ m/s}^2$  e um valor máximo de  $0,5 \text{ m/s}$ .

O ensaio de seguimento da trajetória ilustrada pela Fig. 6.2, utilizando os controladores PI, LQR e modos deslizantes, pode ser observado nas Figs. 6.20, 6.21 e 6.22, respectivamente. Neste ensaio não será realizada a inclinação do usuário, tanto no sentido longitudinal quanto lateral.

Figura 6.20 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controlador PI.

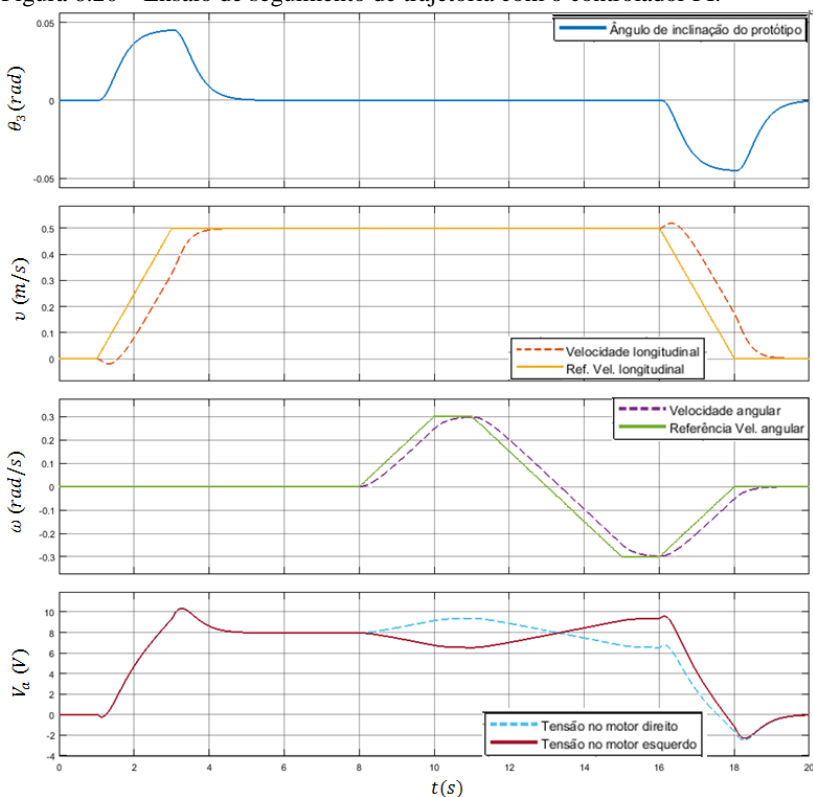


Figura 6.21 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controlador LQR.

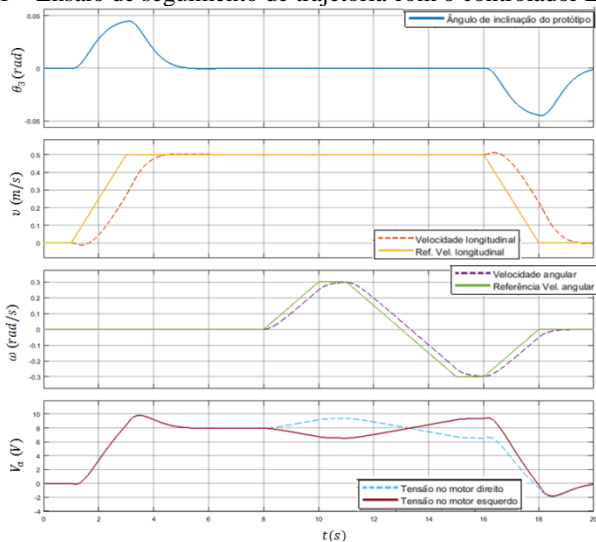
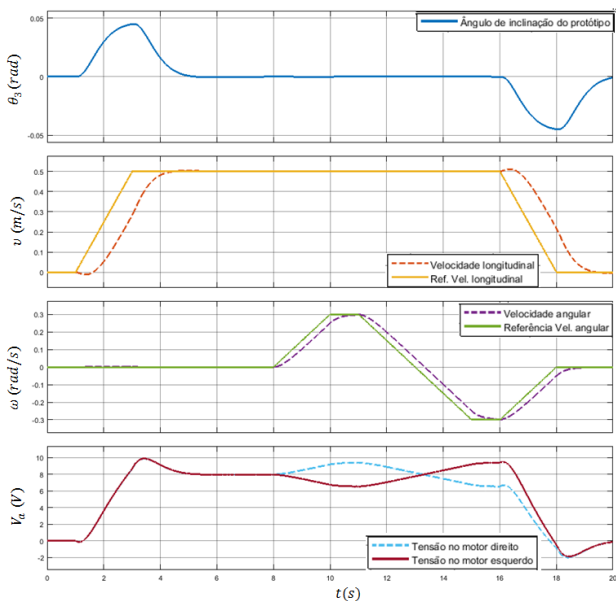


Figura 6.22 – Ensaio de seguimento de trajetória com o controle por modos deslizantes.



Os resultados podem ser observados em uma interface 3D acessando o *QR code* presente na Fig. 6.23.

Figura 6.23 – Simulação de seguimento de trajetória no modo de operação *Joystick*.



Da mesma forma como nos outros modos de operação, por apresentar polos dominantes mais rápidos, o controle PI foi o que obteve respostas mais rápidas, porém com pouca diferença entre os controladores LQR e modos deslizantes, que praticamente obtiveram o mesmo desempenho.

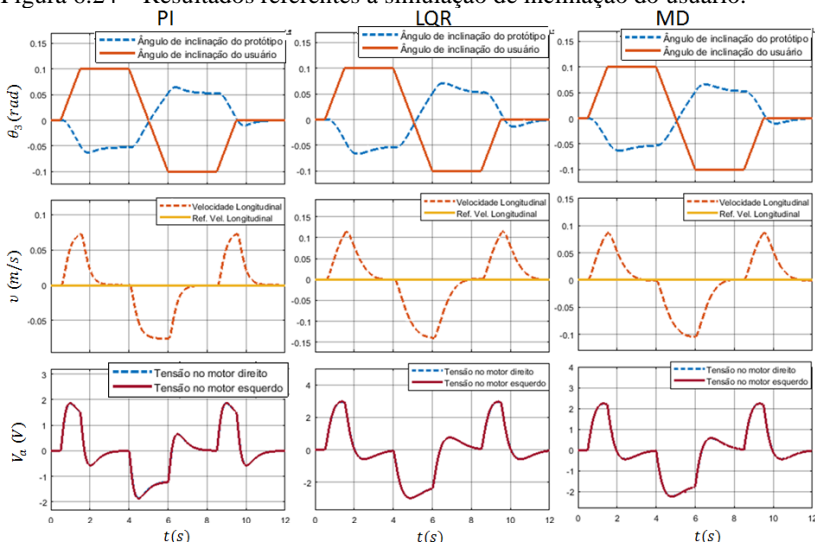
Como pode ser observado no segundo gráfico das Figs. 6.20, 6.21 e 6.22, conforme foi descrito no Subcapítulo 4.9, a dinâmica da velocidade longitudinal trata-se de um sistema de fase não mínima, visto que o início da resposta é negativo, contrário à referência positiva, atingindo um sobressinal máximo de 0,02 m/s pelo controlador PI.

Também referente ao que foi analisado, a dinâmica de velocidade angular, representada pelo terceiro gráfico das Figs. 6.20, 6.21 e 6.22, não apresenta o comportamento de sistemas de fase não-mínima devido ao cancelamento do zero negativo nas funções de transferência representadas pelas Eqs. (4.68) e (4.69).

A presença de somente um integrador nos controladores propostos também resultou em um erro permanente no seguimento de referência de um sinal do tipo rampa, nas dinâmicas de velocidade longitudinal e angular. A presença do erro se demonstra favorável, visto que desta forma não há a presença de sobressinais elevados, não ultrapassando os valores de  $0,25 \text{ m/s}^2$  de aceleração longitudinal e  $0,15 \text{ rad/s}^2$  de aceleração angular, estipulados anteriormente, resultando em uma locomoção mais suave. A introdução de um sinal de referência do tipo rampa também resultou em ações de controle menores, comparando ao resultado obtido pela Fig. 6.1, onde o sinal de referência é do tipo degrau. Este é um ponto bastante positivo, visto que a saturação dos motores é o principal motivo da desestabilização do sistema.

O próximo ensaio refere-se à inclinação do usuário. Neste, as referências de velocidade longitudinal e angular permanecem nulas, enquanto a inclinação do usuário varia entre 0,1 rad e  $-0,1$  rad, com uma aceleração  $0,1 \text{ rad/s}^2$ . Os resultados podem ser observados pela Fig. 6.24.

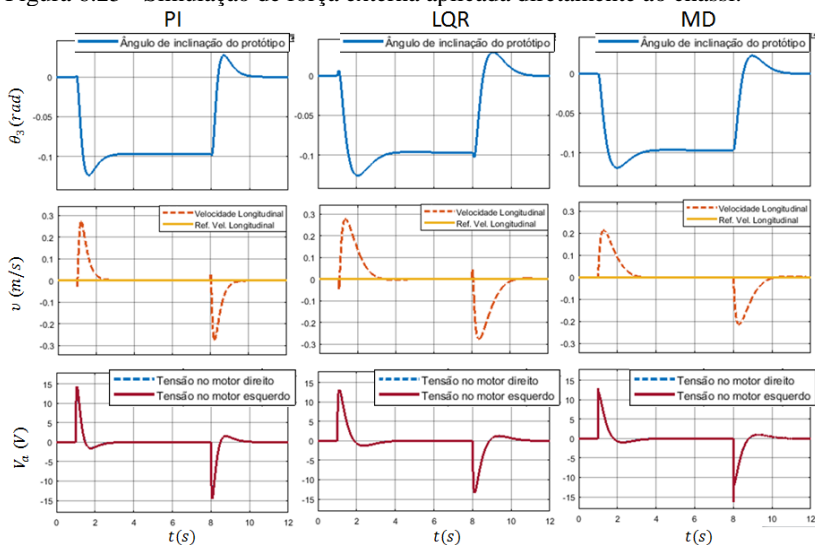
Figura 6.24 – Resultados referentes à simulação de inclinação do usuário.



Como pode ser visto, a dinâmica dos controladores fica explicita com a velocidade longitudinal alcançada. Com controladores mais rápidos, como no caso PI, as velocidades longitudinais são menores, resultando em uma menor distância percorrida com a alteração do CM total, nesse caso representada pela inclinação longitudinal do usuário.

Em complemento aos resultados obtidos pela Fig. 6.24, as simulações demonstradas pela Fig. 6.25 representam a ação de uma força externa imposta ao chassi, também considerada como uma perturbação. Da mesma forma como foi realizado o ensaio no modo *Indoor*, representado pela Fig. 6.15, será imposta uma força de 50 N de forma contínua a 0,35 m de altura em relação à origem de coordenadas do sistema. Ao contrário do resultado obtido no modo *Indoor*, neste modo de operação a velocidade longitudinal deve permanecer nula com a aplicação de uma força externa constante.

Figura 6.25 - Simulação de força externa aplicada diretamente ao chassi.



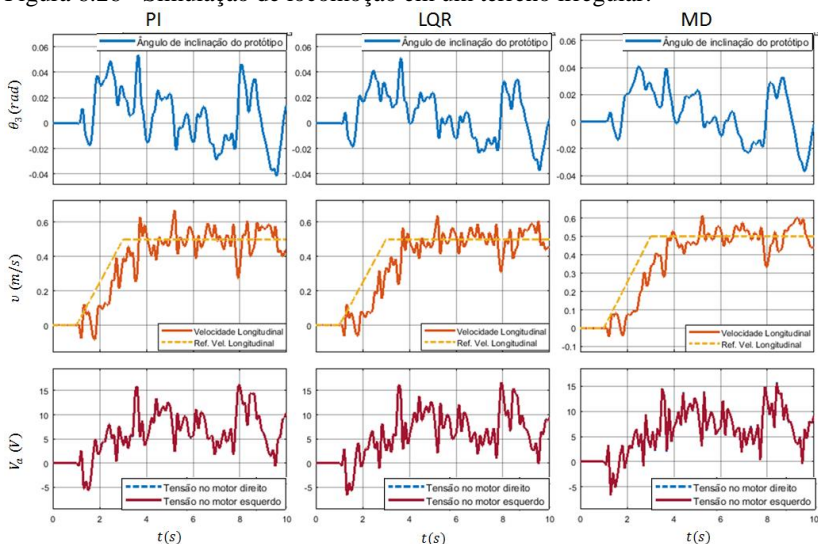
Com a aplicação de uma força externa ao chassi, o melhor resultado foi obtido pelo controle por modos deslizantes, atingindo velocidades longitudinais menores, porém o controle PI foi o que obteve uma resposta mais rápida.

Em relação aos controles LQR e modos deslizantes, é visível a semelhança nas suas dinâmicas, onde foram obtidos os mesmos tempos de estabilização, porém como é característica do controle por modos deslizantes a rejeição de perturbação, este resultou em velocidades longitudinais menores dentre os resultados dos três controladores.

A variação paramétrica, representada pela inclinação do usuário nas simulações realizadas na Fig. 6.24, também comprova o que foi dito anteriormente. O controle PI obteve respostas mais rápidas, e o controle por modos deslizantes obteve a mesma dinâmica do sistema realimentado pelo controle LQR, porém com menores velocidades longitudinais alcançadas. É possível concluir nesse caso que para se obter um melhor desempenho relacionando velocidade de estabilização, rejeição de perturbações e variação paramétrica, uma boa alternativa seria realizar um projeto de controle por modos deslizantes, sendo a superfície de deslizamento determinada pelos polos desejáveis obtidos pelo projeto de controle PI.

Como nos outros modos de operação, foi realizada uma simulação de locomoção em um terreno com irregularidades, representada pela Fig. 6.26.

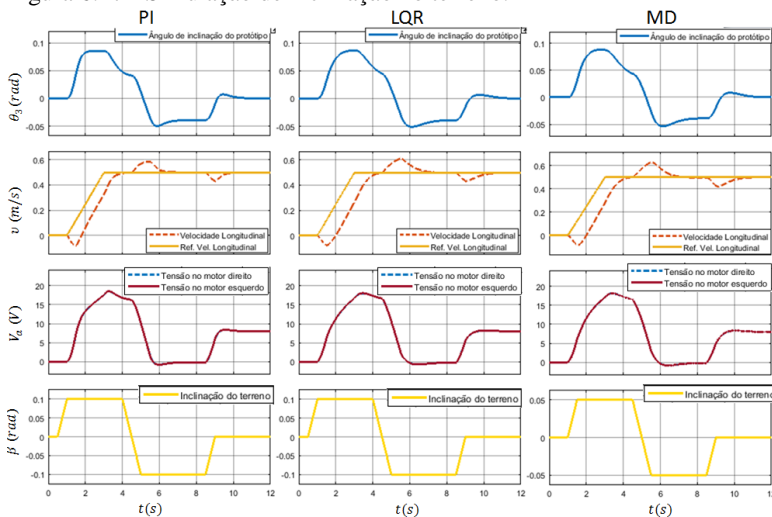
Figura 6.26 - Simulação de locomoção em um terreno irregular.



Como era esperado, o mesmo resultado dos modos de operação *Freerun* e *Indoor* foram obtidos, onde o controle por modos deslizantes apresentou maior rejeição de perturbação. Assim como nos modos *Freerun* e *Indoor*, o desempenho em relação ao ângulo de inclinação da cadeira de rodas e velocidade longitudinal foram bastante prejudicados, porém foram suficientes para manter o sistema estável. Nas simulações, a inclinação do usuário é fixada em  $0^\circ$ . Em uma situação real, a dinâmica de inclinação do usuário responderia de forma contrária ao movimento de inclinação da cadeira de rodas, o que de certa forma “amorteceria” a dinâmica de inclinação e velocidade longitudinal, podendo-se obter resultados melhores dos obtidos por simulação.

Também foi realizada uma simulação de locomoção em um terreno com inclinação. Neste ensaio, a inclinação do usuário permanece em  $0^\circ$ , enquanto a referência de velocidade longitudinal se mantém em  $0,5 \text{ m/s}$ . A velocidade deve se manter constante mesmo com a inclinação do terreno, que varia de  $0,1 \text{ rad}$  a  $-0,1 \text{ rad}$ . Os resultados podem ser vistos na Fig. 6.27.

Figura 6.27 - Simulação de inclinação no terreno.



Todos controladores apresentaram resultados semelhantes, com o controle PI com uma resposta um pouco mais rápida. A ação de controle atingiu valores máximos de 18 V em movimentos de subida, enquanto em movimentos de descida esta permanece próxima de 0 V.

Analisando o controle por modos deslizantes, neste modo de operação é possível observar o comportamento da variável de deslizamento com a presença de um integrador na superfície de deslizamento, este relacionado ao estado de velocidade longitudinal. As Figs. 6.28 e 6.29 mostram as dinâmicas da variável de deslizamento com uma condição inicial de  $v(0) = 0,5 \text{ m/s}$  e  $\theta_3(0) = -0,1 \text{ rad}$ , mesmas condições iniciais aplicadas no modo *Indoor*.

Figura 6.28 – Superfície de deslizamento.

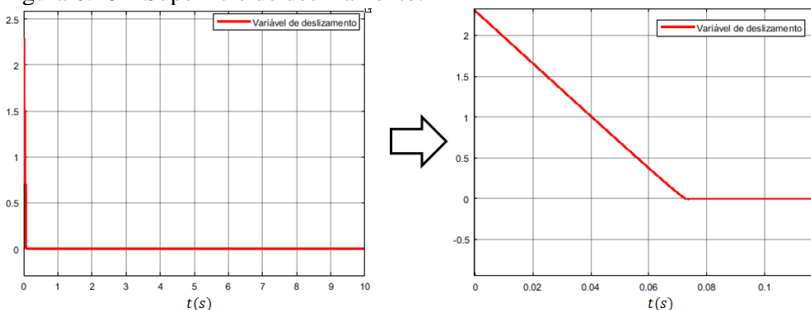
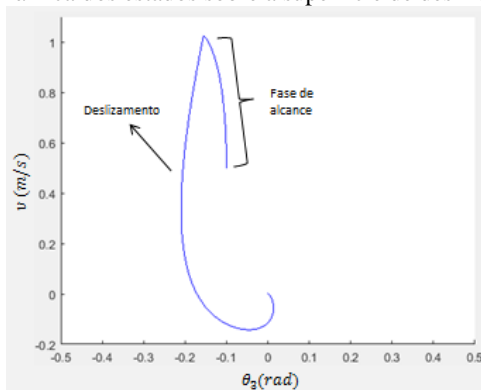


Figura 6.29 - Dinâmica dos estados sobre a superfície de deslizamento.



Como pode ser observado, diferentes dinâmicas da superfície de deslizamento foram obtidas em comparação ao modo *Indoor*. No modo *Joystick*, o sinal da variável de deslizamento se inicia positivo, o que causou um aumento no erro de velocidade longitudinal e inclinação da cadeira de rodas. Este comportamento pode ter ocorrido pela escolha de uma superfície de deslizamento não favorável para estas condições iniciais, visto que neste caso há a inclusão de uma dimensão adicional, representada pela integral da velocidade longitudinal  $v$ . Isso também resultou em um maior tempo de fase de alcance, como pode ser observado na Fig. 6.28.



## 7 RESULTADOS VIA ENSAIOS COM O PROTÓTIPO

Este capítulo tem como objetivo apresentar os resultados obtidos em testes com o protótipo. Devido a problemas na medição de velocidade das rodas, foi possível aplicar somente o controle no modo de operação *Freerun*, visto que este não depende da dinâmica de velocidade longitudinal. Primeiramente será apresentado a estrutura do algoritmo implementado no microcontrolador, e em seguida os resultados obtidos via ensaios de diferentes situações de operação da cadeira de rodas.

Por questões de segurança, os ensaios foram realizados sem a condução de um usuário, sendo a cadeira de rodas controlada de forma autônoma, pela variação de referência de velocidade angular e de uma referência do ângulo de inclinação da cadeira de rodas, simulando uma variação na inclinação do usuário.

O controlador escolhido para testes foi o controle PI. Para sua aplicação foram utilizados os ganhos encontrados pelo projeto de controle discreto, porém, como não há a presença de usuário, os ganhos do controlador obtidos em um sistema desconsiderando a massa do usuário, com um tempo de amostragem de 0,02 segundos, resultam em:

$$K^{(d)}_{Freerun} = \begin{bmatrix} 4,097 & -1,9 & -34,33 \\ -4,117 & -1,961 & -34,878 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$k_I^{(d)}_{Freerun} = \begin{bmatrix} -23,638 & 20,347 \\ 23,704 & 20,969 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

### 7.1 ALGORITMO DE CONTROLE

O algoritmo de controle é estruturado conforme mostra a Fig. 7.1.

A primeira etapa do algoritmo é responsável pela inclusão das bibliotecas utilizadas e configuração geral do microcontrolador e dos sensores.

Partindo para etapa de realimentação do código, a contagem de pulsos é realizada por meio de encoders de quadratura. Estes produzem um par de trens de pulso, comumente chamados de A e B, conforme pode ser observado na Fig. 7.2. Isto possibilita a identificação do sentido de giro do motor, e como há a presença de 4 fases por pulso, a contagem

de pulsos por volta completa do encoder é multiplicada por 4, totalizando 400 pulsos por volta.

Figura 7.1 – Estrutura do algoritmo de controle

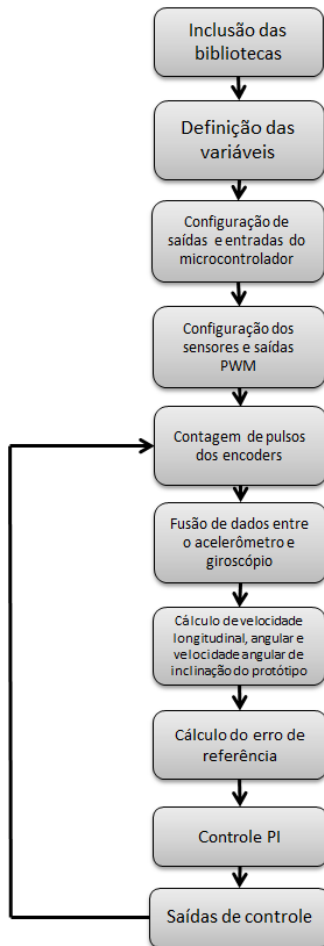
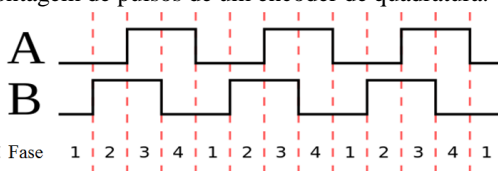


Figura 7.2 – Contagem de pulsos de um encoder de quadratura.



A fusão de dados entre o acelerômetro e o giroscópio é realizada por meio do filtro de Kalman, implementado pela biblioteca *Kalman.h*. Para maiores informações referentes às equações do filtro de Kalman e o algoritmo de predição e atualização dos estados, o *QR code* presente na Fig. 7.3 dá acesso a um artigo descrevendo o funcionamento da biblioteca utilizada.

Figura 7.3 – Artigo referente à biblioteca utilizada para o filtro de Kalman (LAUZSZUS, 2012).



As velocidades das rodas foram determinadas pela equação abaixo:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1000}{2,182} \times \frac{2\pi}{p_v} \times \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (7.3)$$

onde  $p_v$  representa a quantidade de pulsos por volta dos encoders e  $\Delta p$  a quantidade de pulsos captados pelos sensores ópticos em um determinado tempo de amostragem  $\Delta t$ . A equação é multiplicada por 1000 pois a unidade de tempo utilizada no microcontrolador é milissegundos, e é dividida por 2,182 devido esta ser a relação de transmissão entre o motor e a roda, desconsiderando a redução presente no motor. Com as velocidades das rodas definidas, a velocidade longitudinal e angular do protótipo são obtidas pelas Eqs. (7.4) e (7.5).

$$v = \frac{r \Delta\varphi_1 + r \Delta\varphi_2}{2 \Delta t} \quad (7.4)$$

$$\omega = \frac{r \Delta\varphi_1 - r \Delta\varphi_2}{2 d \Delta t} \quad (7.5)$$

A velocidade angular de inclinação do protótipo  $\dot{\theta}_3$  é determinada pela diferença entre a inclinação atual e a inclinação obtida na iteração anterior, dividida pelo tempo de amostragem.

Com os dados de todos os estados do sistema obtidos, a próxima etapa consiste em determinar os erros de seguimento de referência, e então aplicá-los aos ganhos obtidos pela Eqs. (7.1) e (7.2), obtendo-se o sinal de controle desejado.

Como a saturação dos motores é atingida em 24 V, é utilizado um protocolo anti *wind-up*, evitando que o sinal de controle ultrapasse esse valor. Devido ao sinal de saída PWM ter uma resolução de 8 bits, podendo obter valores de 0 a 255, é realizada a conversão do sinal de controle em um sinal PWM proporcional. O sinal PWM é um sinal de onda quadrada fixa, onde a variação do *duty cycle* pode resultar em uma tensão de saída de 0V a 5V. A tensão de saída alimenta os drivers ponte-h, responsáveis pela distribuição de tensão nos motores.

O código foi escrito em uma linguagem própria para Arduino, baseada em C/C++, e pode ser visto no Apêndice C.

## 7.2 ENSAIOS PRÁTICOS

Os ensaios práticos foram realizados com o objetivo de analisar o desempenho do protótipo em diferentes situações de uso. O primeiro teste se refere à análise de eficiência de locomoção em diferentes terrenos. Neste foram obtidos dados dos estados e das entradas de controle, simulando a locomoção em uma trajetória semelhante às realizadas via simulação, representada pela Fig. 6.2.

Para isso, foi necessário introduzir uma variável de referência do ângulo de inclinação da cadeira de rodas, simulando a inclinação do usuário. Inicialmente é aplicado um sinal de referência do tipo degrau, mantendo-se constante, e ao final, diminuindo gradativamente a 0°. A amplitude do degrau de referência foi diferente para cada ensaio realizado, visto que em um terreno com maiores irregularidades é necessário uma maior inclinação do protótipo para se iniciar o movimento. O sinal de referência de velocidade angular também foi implementado conforme as especificações de funcionamento determinadas nas simulações.

As Figs. 7.4, 7.6 e 7.8 mostram os diferentes terrenos em que foram realizados os ensaios, e as Figs. 7.5, 7.7 e 7.9 os seus respectivos resultados. A fim de comparação com as simulações, a 7.10 mostra o resultado de uma simulação em tempo discreto, com as mesmas condições de seguimento de referência realizadas nos ensaios, com a presença de ruído na leitura dos sensores e perturbações atribuídas à irregularidades no terreno.

Figura 7.4 – terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.5.



Figura 7.5 – Resultado do teste de locomoção em um terreno liso.

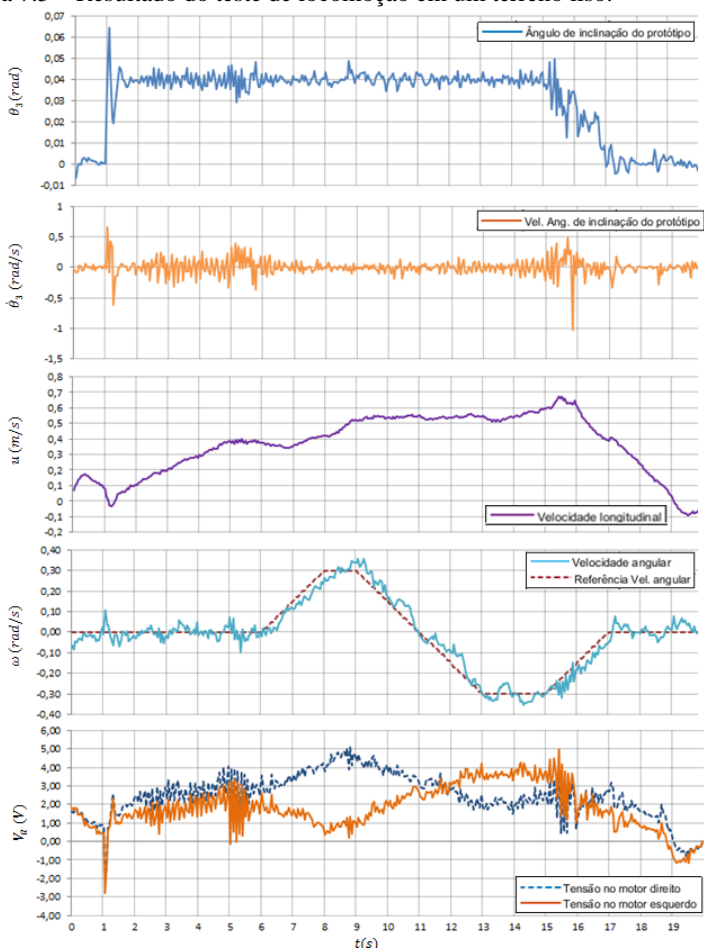


Figura 7.6 – Terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.7.



Figura 7.7 – Resultado do teste de locomoção em um terreno com irregularidades.

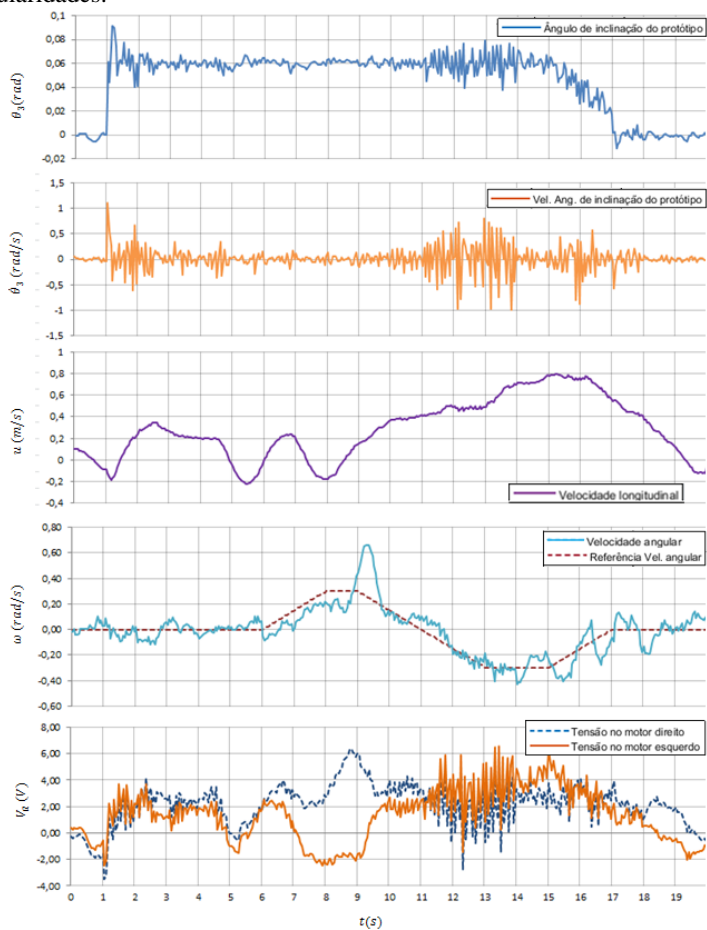


Figura 7.8 - terreno onde foi realizado o ensaio referente à Fig. 7.9.



Figura 7.9 – Resultados do teste de locomoção na grama.

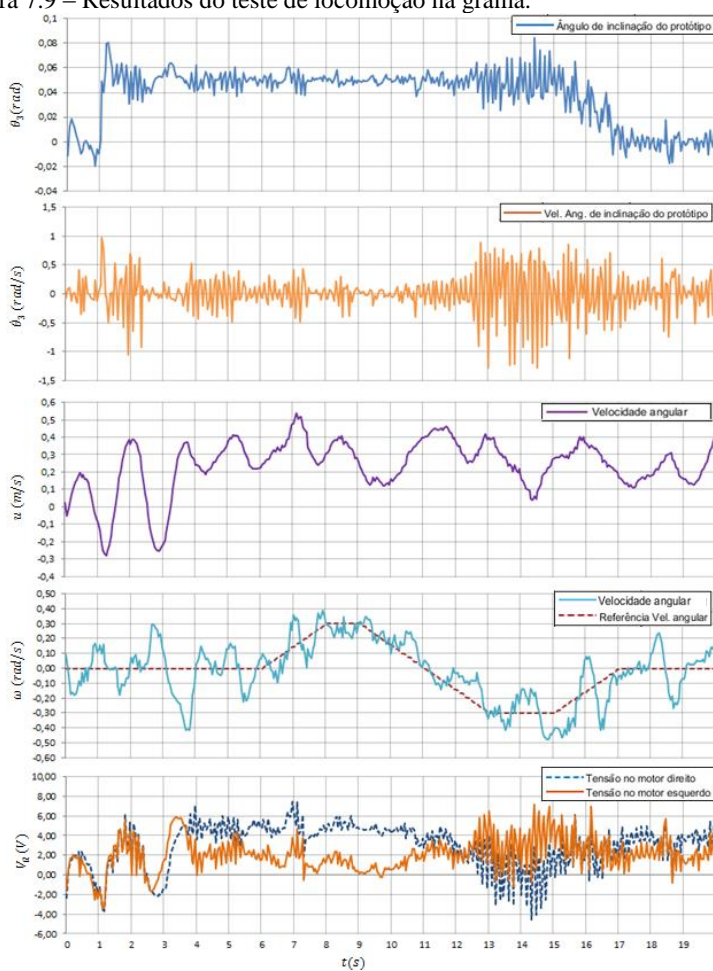
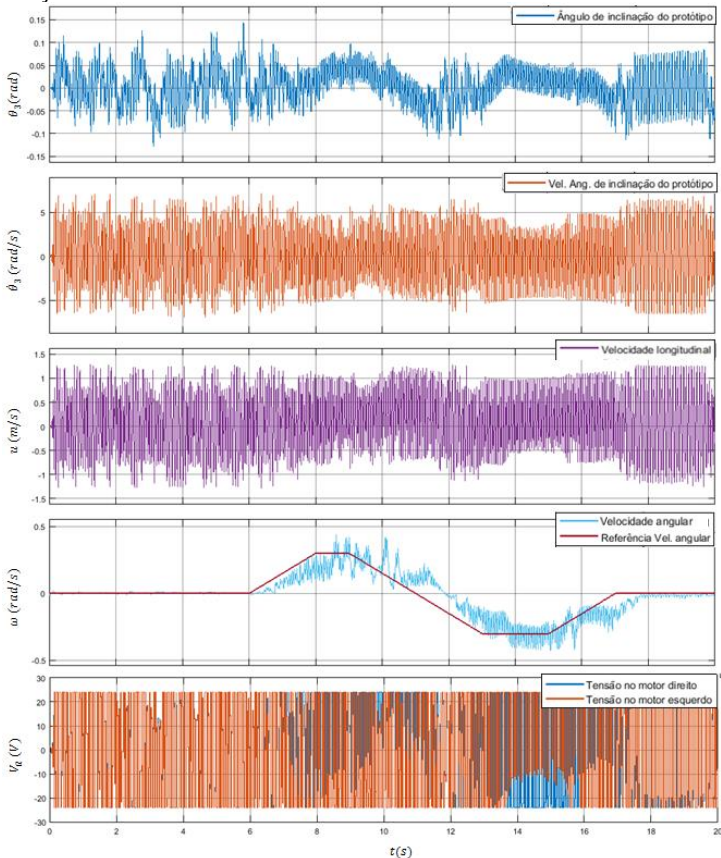


Figura 7.10 – Simulação em tempo discreto, com presença de ruídos e perturbações.



Um vídeo demonstrativo de como foi realizada a trajetória nos ensaios pode ser acessado pelo *QR code* presente na Fig. 7.11.

Figura 7.11 – Ensaio de seguimento de trajetória com o protótipo.





A Fig. 7.5 mostra os resultados de locomoção em um terreno sem irregularidades. Neste teste, a amplitude do degrau de referência de inclinação do protótipo suficiente para realizar a locomoção foi de 0,04 rad. Como pode ser visto, ainda há uma deficiência na atenuação do ruído gerado pelos sensores de inclinação, porém não demonstrou influenciar no desempenho do protótipo.

Também é visível a presença de ruído no sensoriamento de velocidades longitudinais e angulares. Os dados de velocidade longitudinal demonstraram-se bastante influentes na aplicação dos modos de operação *Indoor* e *Joystick*. Como não foi possível se obter uma boa leitura dos sensores de velocidade, principalmente por motivos de adaptação dos mesmos ao protótipo, não foi alcançada a estabilidade do sistema nestes modos de operação. Como no modo *Freerun* não há a realimentação do estado de velocidade longitudinal, foi possível obter bons resultados quanto à estabilidade.

O ruído presente nos dados de velocidade angular não mostraram afetar a estabilidade do sistema. Como pode ser visto nos gráficos de seguimento de referência de velocidade angular e nos gráficos de tensão dos motores, os sinais de controle assumem valores proporcionais em sentidos opostos em movimentos de curva. Conforme definido pela Eq. (4.44), referente aos momentos relacionados ao ângulo inclinação da cadeira de rodas  $\theta_3$ , esse efeito não prejudica a estabilidade do sistema, devido à soma dos torques mecânicos permanecer a mesma, não afetando a dinâmica de  $\theta_3$ .

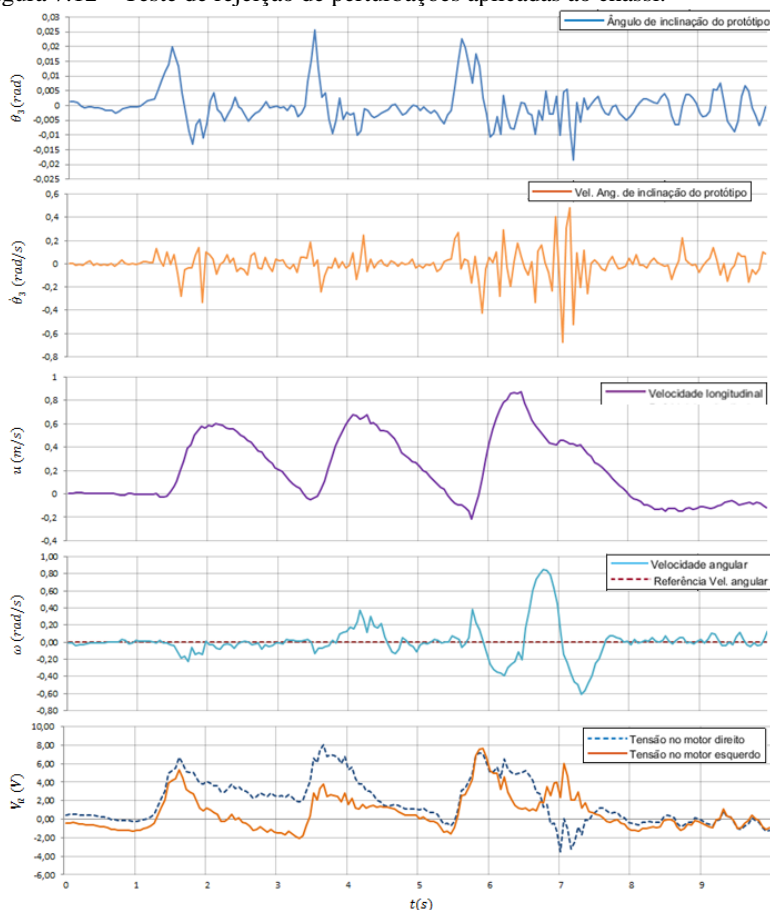
A Fig. 7.7 mostra o desempenho de locomoção do protótipo em um terreno com irregularidades. A amplitude do degrau de referência de inclinação do protótipo necessária para se realizar a locomoção foi de 0,06 rad. Como pode ser visto, a presença de irregularidades resultou em um pior desempenho em obter velocidades longitudinais constantes, em comparação com o teste anterior. O movimento de curva também foi bastante afetado, porém foi suficiente para se realizar a trajetória imposta.

A Fig. 7.9 se refere ao teste de locomoção na grama. Neste ensaio, percebe-se a influência das dinâmicas de deslocamento logitudinal e do torque na estabilidade do sistema. Como a grama é um terreno “macio”, acaba se criando uma certa resistência no deslocamento longitudinal, o que torna o torque nas rodas a principal dinâmica de equilíbrio do protótipo. Como consequência, foi obtido uma maior oscilação tanto no ângulo de inclinação do protótipo quanto na velocidade longitudinal.

Em geral, o protótipo apresentou um bom desempenho, atingindo as especificações de funcionamento propostas. Comparando com o resultado obtido via simulação, presente na Fig. 7.10, os ensaios práticos obtiveram resultados melhores do que o esperado. Na simulação foi possível perceber que a dinâmica do sistema simulado é muito mais rápida do que a dinâmica real, o que resulta em uma grande oscilação no sinal de controle.

O próximo ensaio se refere à rejeição de perturbações aplicadas diretamente ao chassi. Neste teste, representado pela Fig. 7.12, uma situação semelhante à simulada na Fig. 6.7 foi imposta, porém com forças aplicadas de mesma intensidade.

Figura 7.12 – Teste de rejeição de perturbações aplicadas ao chassi.



Como pode ser observado, o protótipo apresentou um bom desempenho, onde foram atingidos ângulos máximos de 0,025 rad de inclinação do protótipo, com velocidades máximas instantâneas de 0,83 m/s. Comparando esses resultados com a tensão gerada pelos motores, estes foram satisfatórios, visto que as tensões máximas alcançadas foram de 8 V.

Os gráficos presentes nas Figs. 7.13 e 7.14 mostram os resultados obtidos na locomoção em subida e descida, respectivamente.

Figura 7.13 – Ensaio de locomoção em subida.

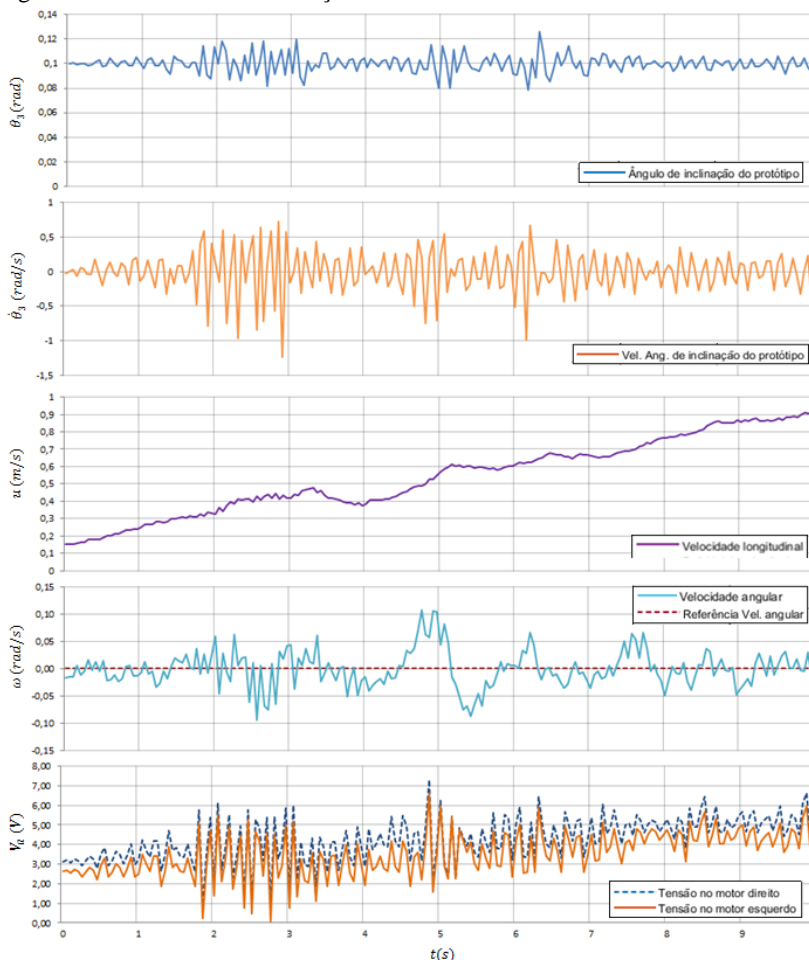
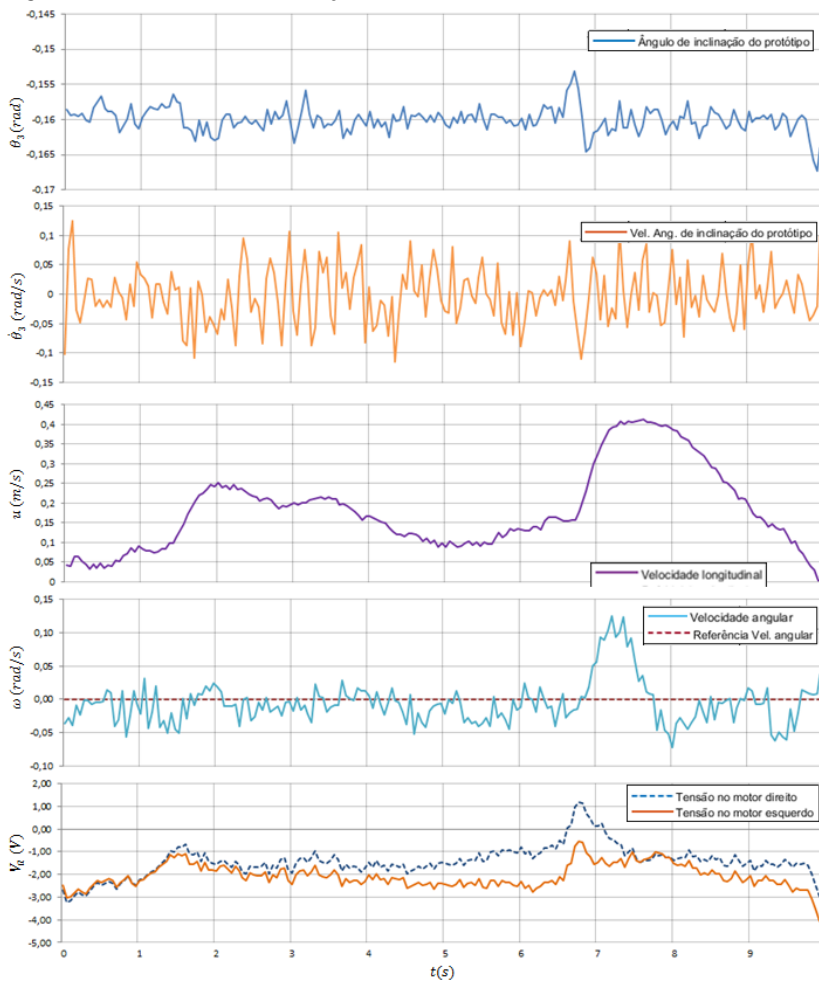


Figura 7.14 – Ensaio de locomoção em descida.



No teste de locomoção em subida, o ângulo de referência de inclinação do protótipo foi de 0,1 rad, permanecendo constante ao longo do ensaio. Em descida, o ângulo de referência suficiente para se obter velocidades relativamente constantes foi de -0,16 rad.

Nestas duas condições de funcionamento, o protótipo apresentou resultados satisfatórios. Foram atingidos torques suficientes para superar as resistências de aclave, onde a tensão máxima atingida pelos motores foi de 7 V, e para superar as forças de declive, onde a velocidade

longitudinal permaneceu visualmente constante. Vale lembrar que os ensaios foram realizados sem a presença de um usuário, o que tornaria as tensões necessárias para superar as forças de aclive e declive muito maiores do que as obtidas nos ensaios.

Um dos testes com usuário pode ser observado na Fig. 7.15. Neste, os ganhos aplicados ao controlador foram os mesmos obtidos pelas Eqs. (7.1) e (7.2), sendo desconsiderada a massa do usuário no projeto de controle. Mesmo com os ganhos inadequados para a utilização de um usuário, o protótipo apresentou bons resultados de locomoção, realizando a trajetória desejada por meio da inclinação do usuário no sentido longitudinal em conjunto com a mudança de referência de velocidade angular com movimentação do *joystick*, demonstrando robustez quanto à variação paramétrica. O *Qr code* presente na Fig. 7.16 dá acesso ao vídeo do teste representado pela Fig. 7.15.

Figura 7.15 – Primeiros testes com usuário.



Figura 7.16 – Vídeo demonstrativo do teste representado pela Fig. 7.15.





## 8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este trabalho apresentou o desenvolvimento completo de um protótipo de cadeira de rodas auto-equilibrada. Nele foram apresentadas etapas de projeto mecânico e elétrico do protótipo, desenvolvimento de um modelo matemático do sistema, projetos de controle e a validação dos seus resultados, via simulações e ensaios com o protótipo.

A obtenção de um modelo dinâmico para o sistema proposto tem grande importância como contribuição para o estudo de plataformas de manipulação móvel dinâmica de duas rodas. Diferentemente da prática comum utilizada em problemas de controle de um pêndulo invertido sobre duas rodas, onde são considerados somente 3 graus de liberdade do sistema (rotação da roda direita, esquerda, e inclinação da haste), o modelo desenvolvido no trabalho possui 2 graus adicionais, referentes à movimentação do usuário, tornando-o facilmente manipulável mediante a metodologia utilizada, podendo ser trabalhado em diversas aplicações, envolvendo tanto o transporte de pessoas quanto a movimentação de robôs. A modelagem das principais perturbações atuantes no sistema também contribuiu na obtenção de resultados mais próximos da prática, possibilitando uma simulação mais confiável de situações reais de operação.

Este trabalho também demonstra as diferentes possibilidades dentro de um projeto de controle, proporcionando diferentes funcionalidades dentro da estabilidade do sistema. Com a introdução dos modos de operação *Freerun*, *Indoor* e *Joystick*, foi possível explorar as dinâmicas presentes em um mesmo sistema, cada uma atendendo de forma eficaz objetivos específicos de funcionamento.

Dos resultados obtidos via simulação, a implementação dos controles PI, LQR e modos deslizantes, e os seus bons desempenhos foram demonstrados. Todos os controladores propostos conseguiram resolver adequadamente o problema de manutenção do equilíbrio da cadeira de rodas. Referente aos resultados obtidos nas medições dos limites de operação, e também aos critérios gerais de desempenho, o controle PI demonstrou os melhores resultados. Nas simulações fica explícito a importância em introduzir dinâmicas de controle mais rápidas ao sistema para assegurar sua estabilidade em diferentes situações de operação. Em consequência disso, o controle LQR foi o que apresentou piores resultados, devido aos polos dominantes do sistema realimentado estarem mais próximos de zero, em comparação ao controle PI.

O controle por modos deslizantes comprovou a sua eficiência quanto à rejeição de perturbação e variação paramétrica. Comparando com o controle LQR, visto que o projeto de controle por modos deslizantes foi baseado nas suas matrizes de ponderação da energia dos estados, foi possível observar que ambos controladores apresentaram a mesma dinâmica do sistema em malha fechada. No entanto, com a presença de perturbações, o controle por modos deslizantes induz respostas muito mais rápidas, neutralizando de forma imediata os seus efeitos. Quanto à análise de robustez, nas simulações realizadas pela Tab. 6.4 foi possível observar que neste método de controle a dinâmica do sistema permanece a mesma mediante variações paramétricas, sendo a instabilidade causada somente em decorrência da saturação dos motores. Para se obter melhores resultados, uma alternativa seria projetar a superfície de deslizamento baseada nos polos desejados definidos no projeto de controle PI. Essa opção unificaria os resultados de desempenho obtidos pelo controle PI, com as características de robustez comprovadas pelo controle por modos deslizantes.

Ao final do trabalho, são apresentadas as características gerais do algoritmo de controle e os resultados obtidos via testes práticos com o protótipo. O controlador escolhido para implementação foi o controle PI, devido ao seu melhor desempenho dentre os controladores lineares. Por questões de deficiência na odometria do protótipo, o único modo de operação viável para implementação foi o modo *Freerun*, por este não apresentar a velocidade longitudinal  $v$  como um estado realimentado.

Nos resultados foi possível observar que mesmo com a limitação no sensoriamento de velocidades longitudinais e angulares, o protótipo atingiu os objetivos de funcionamento propostos no trabalho, mantendo-se estável em diversas condições de operação.

Infelizmente, não foi possível concluir sobre a viabilidade de maior mobilidade ao usuário de cadeira de rodas, visto que não foram realizados testes suficientes com a condução de um usuário. No entanto, bons resultados foram obtidos, tanto nas simulações quanto nos resultados práticos, mostrando a viabilidade deste conceito como uma alternativa na locomoção de pessoas com mobilidade reduzida.

Além dos resultados obtidos, este trabalho apresenta o desenvolvimento completo de um projeto em tecnologia. Este detalha etapas que vão desde a concepção de um conceito à sua validação prática.



Como forma de aprimoramento dos resultados, pode-se destacar as seguintes propostas para continuação do trabalho:

1. Aperfeiçoamento do sistema de odometria do protótipo por meio da utilização de encoders de quadratura industriais e um microcontrolador com maior velocidade de processamento.
2. Implementação dos modos de operação *Indoor* e *Joystick* no protótipo, utilizando o controle PI.
3. Implementação de um sistema de sensoriamento de massa do usuário, buscando trazer maior robustez ao controle linear com a introdução de ganhos dinâmicos dependentes dos dados de massa obtidos.
4. Desenvolvimento do projeto de controle por modos deslizantes discreto, aprimorando o projeto da superfície de deslizamento para se obter respostas mais rápidas.
5. Aplicação do projeto de controle por modos deslizantes no protótipo.
6. Ensaio práticos simulando diferentes situações de operação, com a condução de um usuário, para a validação do protótipo desenvolvido em proporcionar maior liberdade de movimentos a usuários de cadeira de rodas.



## REFERÊNCIAS

ALVARENGA, F. B. Desenvolvimento de Sistemas de Motorização Alternativa para Cadeiras de Rodas Convencionais. Dissertação (Mestrado em Eng. Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas – São Paulo. p. 192. 2002.

ALVES, J. O. Concepção de Veículo Motorizado Elétrico Modular de Acoplamento Universal em Cadeiras de Rodas Mecanomaual. Tese (Doutorado em Eng. Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá – São Paulo, p. 178. 2017.

ARAÚJO, L.A.D. A proteção constitucional das pessoas portadoras de deficiência (2a ed.). Brasília, CORDE. 1997.

ASTROM, K. J.; MURRAY, R. M. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. V2.10b. Princeton University Press, Princeton – New Jersey. 396 p. 2009.

ATTALI, X.; PELISSE, F. Looking Back on the Evolution of Electric Wheelchair. Em: Medical Engineering & Physics. p. 735 – 743. 2001.

BERSCH, R. Introdução à Tecnologia Assistiva. 2017. Disponível em: < [http://www.assistiva.com.br/Introducao\\_Tecnologia\\_Assistiva.pdf](http://www.assistiva.com.br/Introducao_Tecnologia_Assistiva.pdf)>. Acesso em: 26 mar. 2018.

BERSCH, R.; TONOLLI, J. C. Tecnologia Assistiva. 2014. Disponível em: <<http://www.assistiva.com.br/tassistiva.html>>. Acesso em: 25 mar. 2018. (BRASIL – SDHPR, 2012).

BERTONCELLO, I.; GOMES, L. V. N.. Análise diacrônica e sincrônica da cadeira de rodas mecanomanual. Prod., São Paulo , v. 12, n. 1, p. 72-82, 2002.

BOSTON DYNAMICS; About Handle. Disponível em: < <https://www.bostondynamics.com/handle> >. Acesso em: 5 mai. 2018.

BRAGA, R. A. M. Plataforma de Desenvolvimento de Cadeiras de Rodas Inteligentes. Tese (Doutorado em Eng. Informática) –

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto - Portugal. p. 246. 2010.

BRASIL. Câmara dos Deputados. Projeto de lei nº 3942/2008, de 28 de Agosto de 2008. Projetos de leis e outras proposições, Brasília, DF, 2008. Disponível em: <<http://legis.senado.gov.br/mate/pdf/11740>>. Acesso em: 31 mar. 2011.

COOK, A. M., HUSSEY, S. M. Assistive technologies: principles and practice. Mosby – Sacramento. 2000.

DE CARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear and multivariable systems: a tutorial. Em: Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 76, n. 3, p. 212-232, 1988.

DEEGAN, P.; THIBODEAU, B. J.; GRUPEN, R. Designing a Self-Stabilizing Robor For Dynamic Mobile Manipulation, p. 6. Amherst – Massachusetts. 2006.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Modern Control Systems, 12 ed. Pearson Education, Upper Saddle River – New Jersey. 1082 p. 2011.

DOYLE, D. B. The Maker: George Klein and the First Electric Wheelchair. 2017. Disponível em: < <https://news.engineering.utoronto.ca/maker-george-klein-first-electric-wheelchair/> >. Acesso em: 26 jul. 2018.

FILHO, T. A. G. A Tecnologia Assistiva: de que se trata?. Em: MACHADO, G. J. C.; SOBRAL, M. N. (Orgs.). Conexões: educação, comunicação, inclusão e interculturalidade. 1 ed. Porto Alegre: Redes Editora, p. 207-235, 2009.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; NAEINI, A. E. Feedback Control of Dynamic Systems. 6 ed. Pearson Higher Education, Upper Saddle River – New Jersey. 2010.

GUGEL, M. A. A pessoa com deficiência e sua relação com a história da humanidade. Maio de 2008. Disponível em: <[http://www.ampid.org.br/ampid/Artigos/PD\\_Historia.php](http://www.ampid.org.br/ampid/Artigos/PD_Historia.php)>. Acesso em 2 abr. 2015.

HA, Y. S.; YUTA, S. Indoor Navigation of an Inverse Pendulum Type Autonomous Mobile Robot With Adaptive Stabilization Control System. Em: Khatib O., Salisbury J.K. (eds) Experimental Robotics IV. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol 223. Heidelberg - Berlin. 1997.

HESPANHA, J. P. Linear Systems Theory. Princeton University Press, Princeton – New Jersey. 263 p. 2009.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Censo demográfico 2010, Características gerais da população, religião e pessoas com deficiência. Disponível em: <[ftp://ftp.ibge.gov.br/Censos/Censo\\_Demografico\\_2010/Caracteristicas\\_Gerais\\_Religiao\\_Deficiencia/tab1\\_3.pdf](ftp://ftp.ibge.gov.br/Censos/Censo_Demografico_2010/Caracteristicas_Gerais_Religiao_Deficiencia/tab1_3.pdf)>. Acesso em: 10 mar. 2018.

KAMENETZ, H. L. A Brief History of the Wheelchair. Em: Journal of the History of Medicine. Springfield, Illinois. 1969.

LAUSZUS. A Practical Approach to Kalman Filter and How to Implement it. 2012. Disponível em: < <http://blog.tkjelectronics.dk/2012/09/a-practical-approach-to-kalman-filter-and-how-to-implement-it/> >. Acesso em: 6 ago. 2018.

LIANZA, S. Reabilitação: a locomoção em pacientes com lesão medular. São Paulo: SARVIER/Associação Paulista de Medicina. 1994.

MACIEL, A. S.; CIENA, F. P. Acessibilidade: A Inclusão do Portador de Deficiência Física Sob um Ponto de Vista Filosófico. 2015. Disponível em: < <http://atividadeparaeducacaoespecial.com/wp-content/uploads/2015/08/ACESSIBILIDADE1.pdf> >.

MATIA ROBOTICS; Gallery. Disponível em: < <https://www.matiarobotics.com/wp-content/uploads/2018/05/gallery-13.jpg> >. Acesso em: 28 jul. 2018.

MONTANARI, P. M. Jovens e deficiência: comportamento e corpos desviantes. In N. Schor, M.S.F.T. Mota, & V.C. Branco (Orgs.). Cadernos juventude, saúde, desenvolvimento (pp.97-108). Brasília: Ministério da Saúde, Secretaria de Políticas de Saúde; 1999.

MORIN, H. Introduction to Classical Mechanics. 1 ed. New York: Cambridge University Press. 719 p. 2007.

NAGARAJAN, U.; KANTOR, G.; HOLLIS, R. The Ballbot: An Omnidirectional Balancing Mobile Robot. Em: The International Journal of Robotics Research. p. 14. 2013.

NGUYEN, H. G.; MORREL, J.; MULLENS, K.; BURMEISTER, A.; MILES, S.; FARRINGTON, N.; THOMAS, K.; GAGE, D. W. Segway Robotci Mobility Platform. Em: SPIE Proc. 5609: Mobile Robots XVII. Filadélfia – PA. 2004.

OGATA, K. Modern Control Engineering. 5 ed. New Jersey: PearsonEducation, 894 p. 2010.

PUBLIC LAW 108-364. 108th Congress, 2004. Tradução Rita Bersch. Disponível em [http://frwebgate.access.gpo.gov/cgi-bin/getdoc.cgi?dbname=108\\_cong\\_public\\_laws&docid=f:publ364.108](http://frwebgate.access.gpo.gov/cgi-bin/getdoc.cgi?dbname=108_cong_public_laws&docid=f:publ364.108) Acesso em 04 dez. 2007.

PURWANTO, D.; MARDIYANTO, R. & ARAI, K. Electric wheelchair control with gaze direction and eye blinking. Em: 14th International Symposium on Artificial Life and Robotics, AROB. p. 397-400. 2009.

RADABAUGH, M. P. NIDRR's Long Range Plan - Technology for Access and Function Research Section Two: NIDDR Research Agenda Chapter 5: TECHNOLOGY FOR ACCESS AND FUNCTION. Disponível em: [http://www.nccdr.org/rpp/techaf/lrp\\_ov.html](http://www.nccdr.org/rpp/techaf/lrp_ov.html). Acesso em: 13 Jun. 2018.

ROSA, R. M. S. Modelagens Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana de Sistemas Mecânicos Discretos. UFRJ, Rio de Janeiro. 2008.

SANTSCHI, W. R.; DNBOIS, J.; OMOTO, C. Moments of Inertia and Centers of Gravity of the Living Human Body. Defense Documentation Center for Scientific and Technical Information, Alexandria – Virginia. 62 p. 1963.

SEGWAY. Ninebot One S1. Disponível em: <<http://www.segway.com/products/professional/segway-i2-se>>. Acesso em: 6 mai. 2018.

SEGWAY. Segway i2 SE. Disponível em: <<http://www.segway.com/products/professional/segway-i2-se>>. Acesso em: 6 mai. 2018.

SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A. Sliding mode Control and Observation. 1 ed. Springer Science+Business Media, New York. 356 p. 2014.

SILVA, O. M.; DEL'ACQUA, R. J. Cadeira de Rodas e sua Evolução Histórica. Disponível em: <<http://www.crfaster.com.br/Cadeira%20Rodas.htm>>. Acesso em: 22 jul. 2018.

STILMAN, M.; OLSON, J.; GLOSS, W. Golem Krang: Dynamically Stable Humanoid Robot for Mobile Manipulation. Em: 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, p. 3304 – 3309. Anchorage – Alaska. 2010.

STUTTS, D. S. Analytical Dynamics: Lagrange's Equation and its Application – A Brief Introdution. Mssouri University of Science and Technology. Rolla – MO. 23 p. 2017.

TANAKA, K.; MATSUNAGA, K.; WANG, O. Electroencephalogram-Based Control of an Electric Wheelchair. Em: IEEE Transactions on Robotics. 21. 762-766. 2005.

TEWARI, A. Modern Control Design with Matlab and Simulink. 1 ed. John Wiley & Sons, LTD. West Sussex - England. 503 p. 2002.

UTKIN, V. I. Sliding Modes in Control and Optimization. 1 ed. Springer-Verlag, Heidelberg – Berlim. 286 p. 1992.

UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems. 2 ed. CRC Press, Boca Raton – Florida. 485 p. 2009.

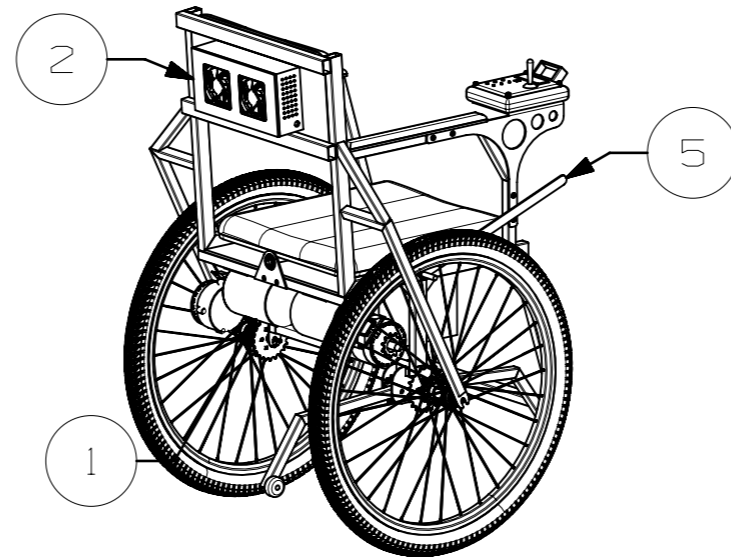
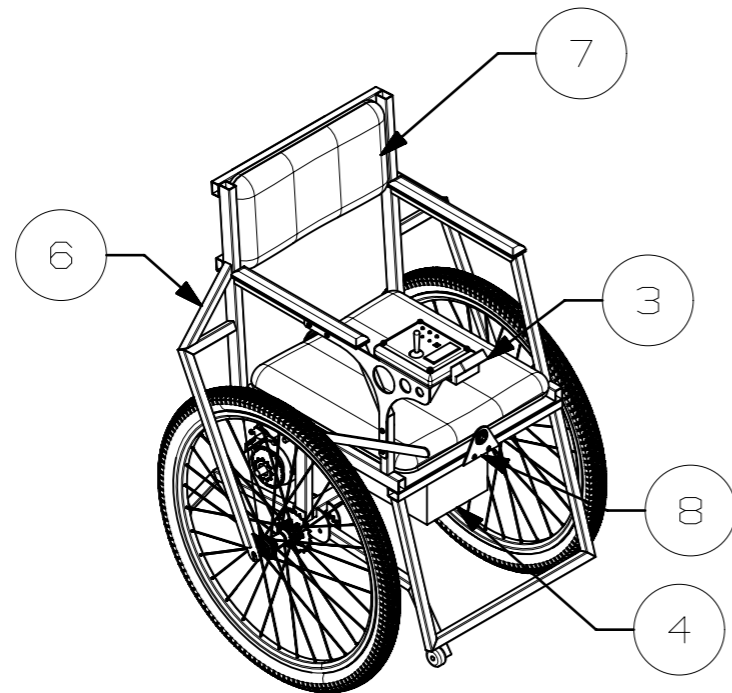
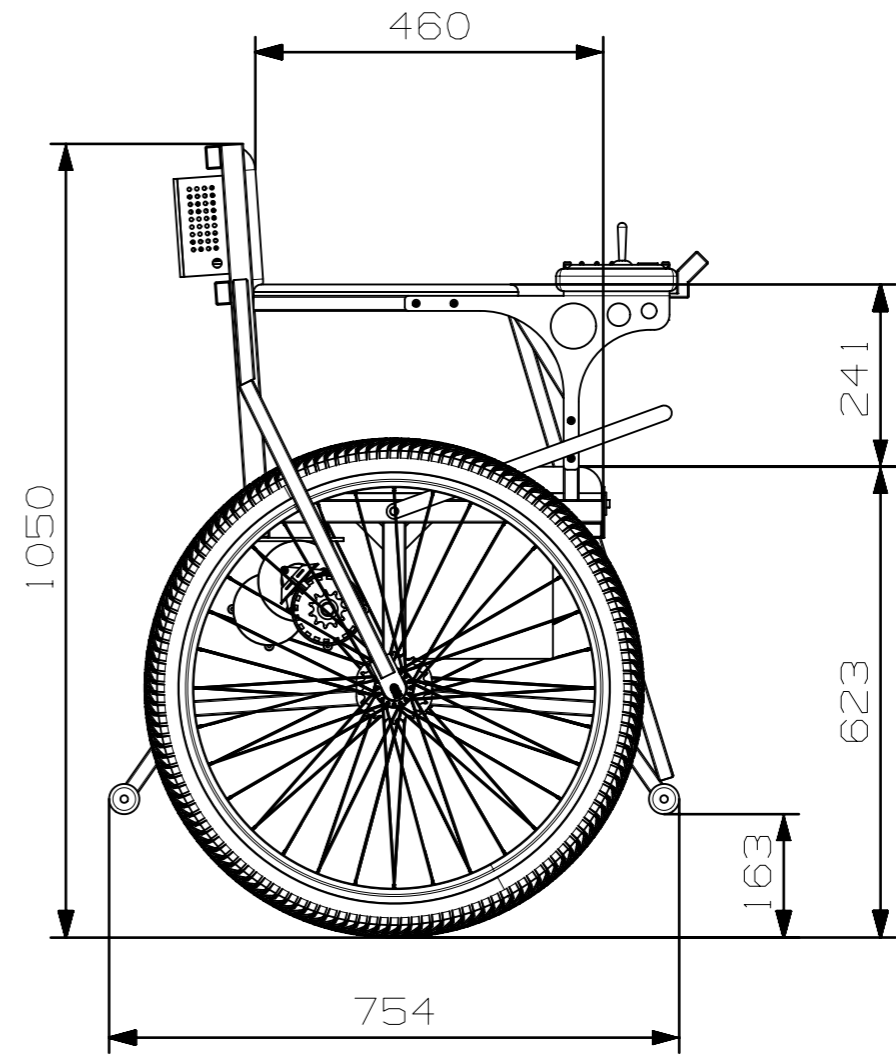
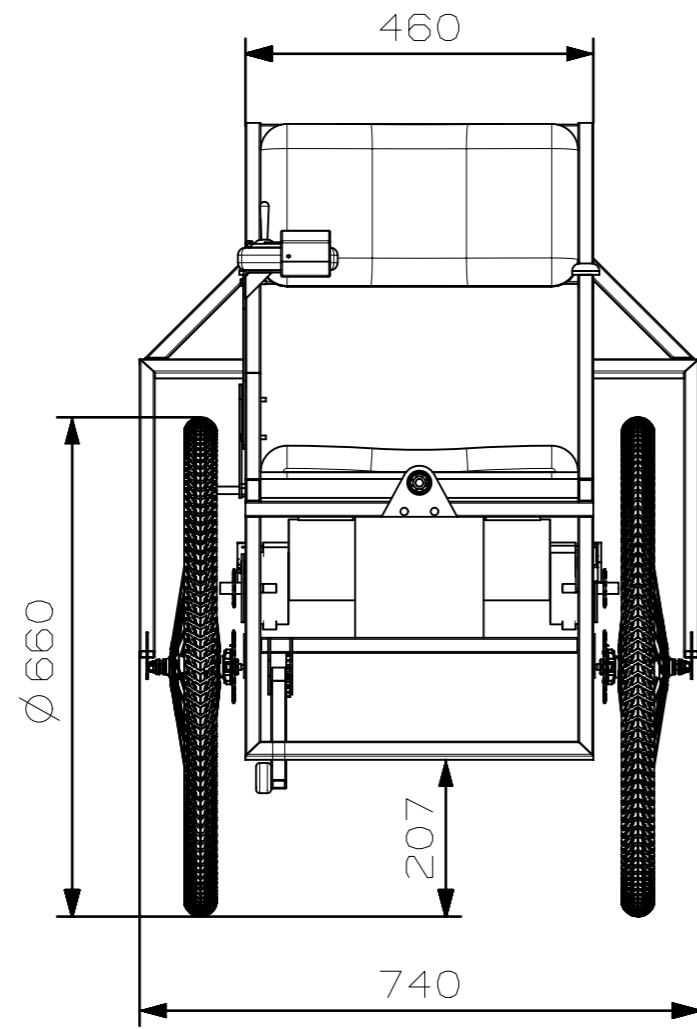
WINTER, D. A. The Biomechanics and Motor Control of Human Gait. 1 ed. Ontario – Canadá: University of Waterloo Press. 1987.





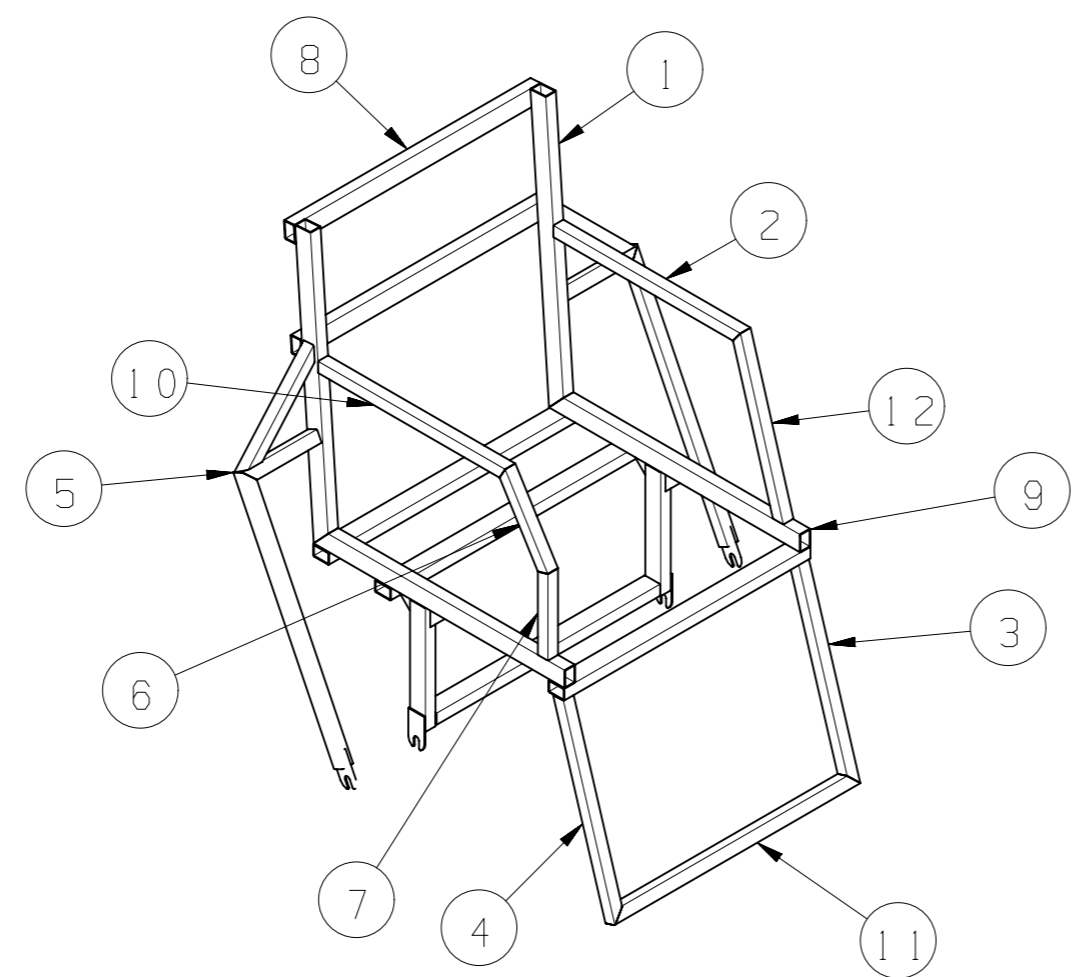
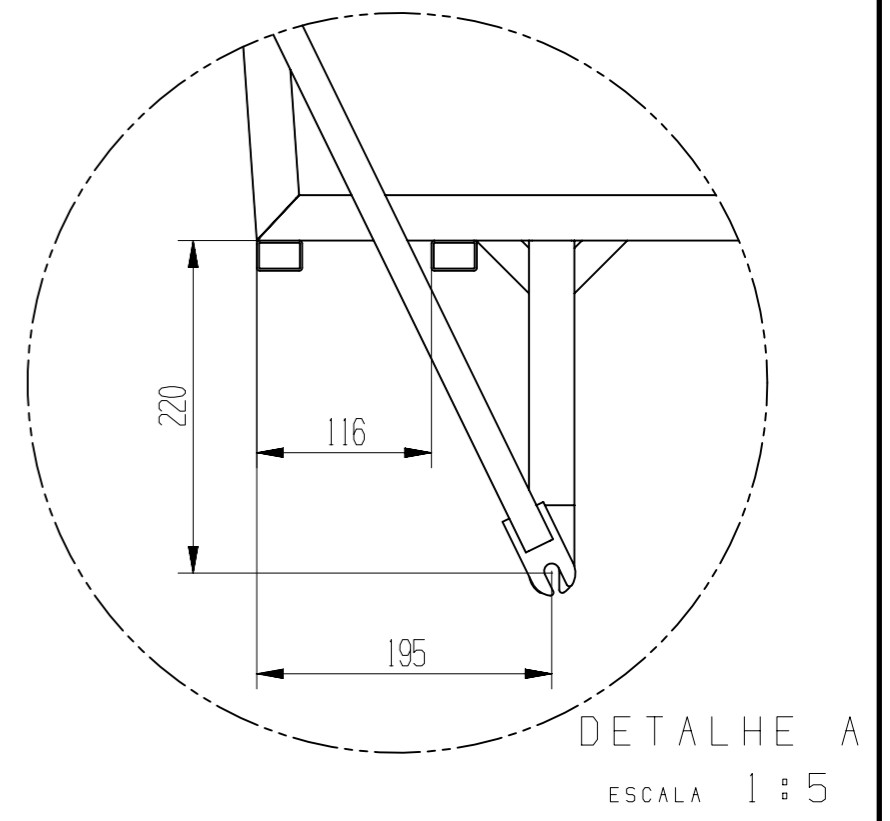
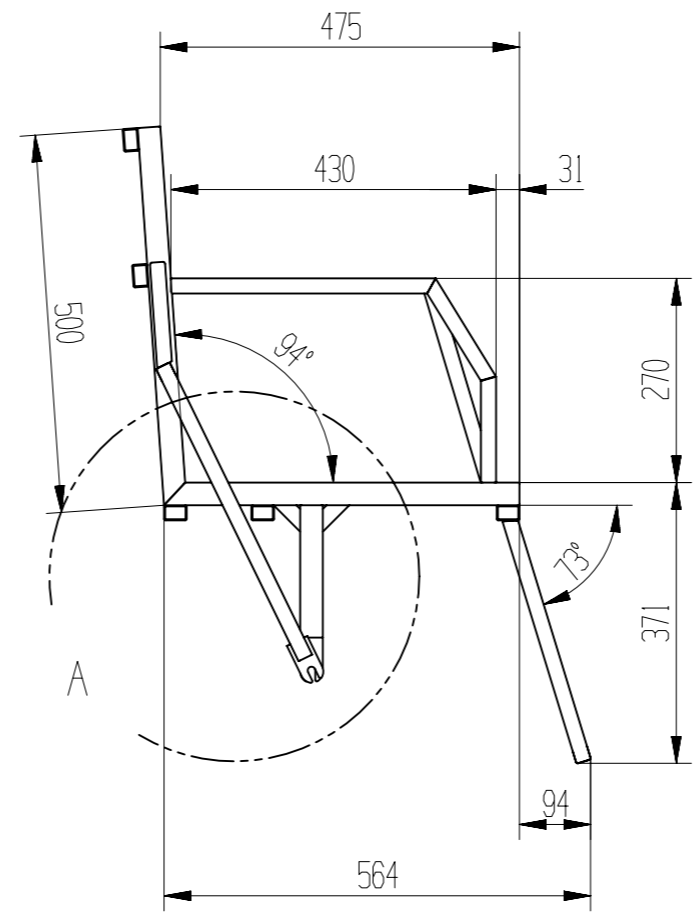
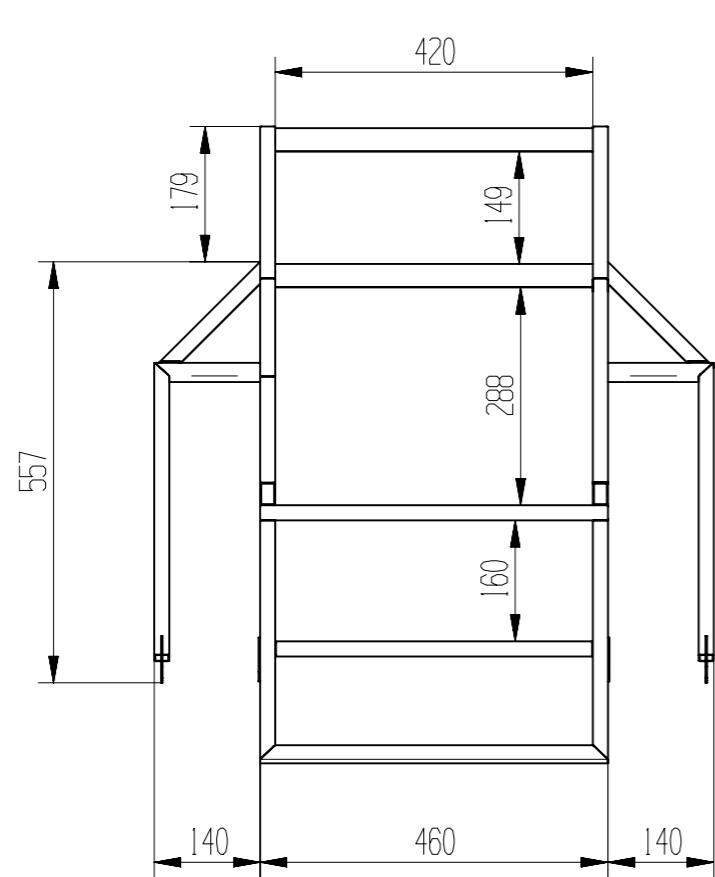
## **APÊNDICE A – Projeto Mecânico do Protótipo.**





8	EM_ASSENTO_MOV	1
7	CJ_ACABAMENTOS	1
6	EM ESTRUTURA	1
5	EM_SUP_APOIO_2	1
4	EM_SUP_BATERIAS_3	1
3	EM_SUP_JOYSTICK	1
2	EM_CX_COMP	1
1	EM_MOTORES	1
PC NO	PART NAME	QTY

ESCALA	EM_CADEIRA_DE_RODAS	
1:10	DATA: 20/01/2019	
	Criado por: Joao Marcel Serafin	



12	TB_APOIO_BRACO_LE_2	1
11	TB_LAT_APOIO_PE_ESQ	1
10	TB_APOIO_BRACO_LD_3	1
9	TB_LAT_ASS	2
8	TB_BASE_ASS	5
7	TB_APOIO_BRACO_LD_1	1
6	TB_APOIO_BRACO_LD_2	1
5	EM_CJ_GARFO	1
4	TB_LAT_APOIO_PE	1
3	TB_BASE_APOIO_PE	1
2	TB_APOIO_BRACO_LE_1	1
1	TB_LAT_ENC_ASS	2
PC N	PART NAME	QTY

ESCALA	EM ESTRUTURA	
1:10	DATA: 20/01/2019	
	Criado por: Joao Marcel Serafin	

## APÊNDICE B – Modelo Completo do Sistema

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = I_{y_1} + m_1 r^2 + \frac{r^2}{4} (m_3 + m_4) + \frac{r^2}{4d^2} (I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} + I_{z_4}) - \frac{I_{yz_1} r}{d}$$

$$m_{12} = \frac{r^2}{4} (m_3 + m_4) - \frac{r^2}{4d^2} (I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} + I_{z_4}) + \frac{r}{2d} (I_{yz_1} - I_{yz_2})$$

$$m_{13} = -\frac{I_{yz_4} r}{2d} + \frac{l_3 r \cos(\theta_3)}{2} (m_3 + m_4) + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4)}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4))$$

$$m_{21} = \frac{r^2}{4} (m_3 + m_4) - \frac{r^2}{4d^2} (I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} + I_{z_4}) + \frac{r}{2d} (I_{yz_1} - I_{yz_2})$$

$$m_{22} = I_{y_2} + m_2 r^2 + \frac{r^2}{4} (m_3 + m_4) + \frac{r^2}{4d^2} (I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} + I_{z_4}) + \frac{I_{yz_2} r}{d}$$

$$m_{23} = \frac{I_{yz_4} r}{2d} + \frac{l_3 r \cos(\theta_3)}{2} (m_3 + m_4) + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4)}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4))$$

$$m_{31} = -\frac{I_{yz_4} r}{2d} + \frac{l_3 r \cos(\theta_3)}{2} (m_3 + m_4) + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4)}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4))$$

$$m_{32} = \frac{I_{yz_4} r}{2d} + \frac{l_3 r \cos(\theta_3)}{2} (m_3 + m_4) + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4)}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4))$$

$$\begin{aligned}
m_{33} = & I_{y_4} + l_3^2 \sin(\theta_3)^2 (m_3 + m_4) + l_3^2 \cos(\theta_3)^2 (m_3 + m_4) \\
& + m_4 l_4^2 \cos(\alpha_4)^2 (\cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_4)^2 \\
& + \cos(\theta_3)^2 \sin(\theta_4)^2 + \cos(\theta_4)^2 \sin(\theta_3)^2 \\
& + \sin(\theta_3)^2 \sin(\theta_4)^2) \\
& + m_4 l_4^2 \sin(\alpha_4)^2 (\cos(\theta_3)^2 \sin(\theta_4)^2 \\
& + \cos(\theta_4)^2 \sin(\theta_3)^2) \\
& + 2m_4 l_3 l_4 \cos(\alpha_4) (\cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_4) \\
& + \cos(\theta_4)^2 \sin(\theta_3)^2) \\
& + 2m_4 l_4^2 \sin(\alpha_4)^2 \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_3) \sin(\theta_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 = & -\frac{I_{xy_1}}{2d} (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) - \frac{I_{xz_4} r \ddot{\alpha}_4}{2} \\
& - \left( \frac{I_{xz_1}}{4d^2} + \frac{I_{xz_2}}{4d^2} + \frac{I_{xz_3}}{4d^2} + \frac{I_{xz_4}}{4d^2} \right) (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) - \frac{I_{yz_3} r \ddot{\theta}_4}{2d} \\
& - \frac{I_{yz_3} r \dot{\theta}_3}{2} - \frac{l_3 r \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3^2}{2} (m_3 + m_4) \\
& + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \ddot{\theta}_4}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \\
& - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \ddot{\alpha}_4}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\alpha}_4^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_3^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_4^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \dot{\alpha}_4 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
& - m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& + m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \sin(\theta_3) \sin(\theta_4) \dot{\alpha}_4 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 = & \frac{I_{xy_2}}{2d} (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) + \frac{I_{xz_4} r \ddot{\alpha}_4}{2} \\
& + \left( \frac{I_{xz_1}}{4d^2} + \frac{I_{xz_2}}{4d^2} + \frac{I_{xz_3}}{4d^2} + \frac{I_{xz_4}}{4d^2} \right) (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + \frac{I_{yz_4} r \ddot{\theta}_4}{2d} \\
& + \frac{I_{yz_3} r \dot{\theta}_3}{2} - \frac{l_3 r \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3^2}{2} (m_3 + m_4) \\
& + \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \ddot{\theta}_4}{2} (\cos(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \sin(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \ddot{\alpha}_4}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\alpha}_4^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_3^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - \frac{m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_4^2}{2} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& - m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \dot{\alpha}_4 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
& - m_4 l_4 r \cos(\alpha_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (\cos(\theta_3) \sin(\theta_4)) \\
& + \sin(\theta_3) \cos(\theta_4)) \\
& + m_4 l_4 r \sin(\alpha_4) \sin(\theta_3) \sin(\theta_4) \dot{\alpha}_4 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 = & (-2I_{xy_4}\ddot{z}_1 + 2I_{xy_4}\ddot{z}_2 + 2I_{xy_3}\dot{z}_1 - 2I_{xy_3}\dot{z}_2 - 4I_{xy_4}d\ddot{\alpha}_4 \\
& + 4I_{y_4}d\ddot{\theta}_4 - 4m_4dgl_3 \sin(\theta_3) \\
& - 4m_4dgl_3 \sin(\theta_3) - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \ddot{\theta}_4 \\
& - 2m_3dl_3 \sin(\theta_3) \ddot{z}_1 + 2dm_3dl_3 \sin(\theta_3) \ddot{z}_2 \\
& - 2m_4dl_3 \sin(\theta_3) \dot{z}_1 - 2m_4dl_3 \sin(\theta_3) \dot{z}_2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\theta_3) \cos(2\theta_4) \ddot{\theta}_4 \\
& + m_4dl_4^2 \sin(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \ddot{\theta}_4 \\
& - 2m_4dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_3 + 2m_4dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_4 \\
& + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_4) \dot{\alpha}_4^2 + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\alpha}_4^2 \\
& + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_4) \dot{\theta}_3^2 + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\
& + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
& + m_4dl_4^2 \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\alpha}_4^2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\alpha}_4^2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\theta}_3^2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\
& - m_3dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\
& - 2m_3dl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_4) \sin(\theta_4) \dot{z}_1 \\
& - 2m_4dl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_4) \sin(\theta_3) \dot{z}_1 \\
& - 2m_4dl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \dot{z}_2 \\
& - 2m_4dl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_4) \sin(\theta_3) \dot{z}_2 \\
& + 4m_4dl_3l_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_4) \ddot{\theta}_4 \\
& - 4m_4l_4l_3 \sin(\alpha_4) \sin(\theta_4) \ddot{\alpha}_4 \\
& + m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \cos(2\theta_4) \ddot{\theta}_4 \\
& - 4m_4dl_3l_4 \cos(\alpha_4) \sin(\theta_4) \dot{\alpha}_4^2 \\
& - 4m_4dl_3l_4 \cos(\alpha_4) \sin(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
& - m_4dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \ddot{\alpha}_4 \\
& - m_3dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \ddot{\alpha}_4 \\
& - m_4dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \sin(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \ddot{\theta}_4 \\
& - 4m_4dgl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_3) \sin(\theta_4) \\
& - 4m_4dgl_4 \cos(\alpha_4) \cos(\theta_4) \sin(\theta_3) \\
& + 2m_4dl_4^2 \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2m_4 dl_4^2 \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& - 8m_4 dl_3 l_4 \sin(\alpha_4) \cos(\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_3 \\
& - 8m_4 dl_3 l_4 \sin(\alpha_4) \cos(\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_4 \\
& - 8m_4 dl_3 l_4 \cos(\alpha_4) \sin(\theta_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& - 2m_4 dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \cos(2\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_3 \\
& - 2m_4 dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \cos(2\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_4 \\
& - 2m_4 dl_4^2 \cos(2\alpha_4) \cos(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& - 2m_4 dl_4^2 \cos(2\theta_4) \cos(2\theta_4) \sin(2\theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& + 2m_4 dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \sin(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_3 \\
& + 2m_4 dl_4^2 \sin(2\alpha_4) \sin(2\theta_3) \sin(2\theta_4) \dot{\alpha}_4 \dot{\theta}_4 / (4d)
\end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{-k_m k_{em} \dot{\phi}_1}{R R_t^2} + \frac{k_m}{R R_t} V_{a1} - \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g r \sin(\beta)}{2} - F_I$$

$$u_2 = \frac{-k_m k_{em} \dot{\phi}_2}{R R_t^2} + \frac{k_m}{R R_t} V_{a2} - \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g r \sin(\beta)}{2} - F_I$$

$$u_3 = - \left( \frac{k_m k_{em} \dot{\phi}_1}{R R_t^2} + \frac{k_m}{R R_t} V_{a1} + \frac{k_m k_{em} \dot{\phi}_2}{R R_t^2} + \frac{k_m}{R R_t} V_{a2} \right) + F_A$$



## APÊNDICE C – Algoritmo de Controle

//CONTROLE DE UM PROTÓTIPO DE CADEIRA DE RODAS  
AUTO-EQUILIBRISTA

//Desenvolvido por: João Marcel Serafin

//Modo: Freerun

//Controle: PI

#include <Wire.h>

#include <Kalman.h>

#include <RotaryEncoder.h>

//Joystick

#define joyPinX 0

#define joyPinY 1

double joy\_velLong = 0;

double joy\_velAng = 0;

float Ref\_velLong\_joy = 0;

float Ref\_velAng\_joy = 0;

double Err\_vel\_Long;

double Err\_vel\_Ang;

double Err\_AngleY;

double Ref\_Ang;

#define RESTRICT\_PITCH // Comment out to restrict roll to  $\pm 90$ deg  
instead - please read:  
[http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app\\_note/AN3461.pdf](http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app_note/AN3461.pdf)

```

Kalman kalmanX; // Create the Kalman instances
Kalman kalmanY;

//Ganho integral crescente
int32_t KI = 0;

// Input pins from motor encoder.
#define ENCA_L 31
#define ENCB_L 30
#define ENCA_R 16
#define ENCB_R 17
int32_t pulses_L, prevPulses_L, dpulse_L;
int32_t pulses_R, prevPulses_R, dpulse_R;
double velocity_R, velocity_R_filt;
double velocity_L, velocity_L_filt;
double vel_Long;
double vel_Ang;

/* IMU Data */
double accX, accY, accZ;
double gyroX, gyroY, gyroZ;
int16_t tempRaw;

double gyroXangle, gyroYangle; // Angle calculate using the gyro only
double compAngleX, compAngleY; // Calculated angle using a
complementary filter
double kalAngleX, kalAngleY; // Calculated angle using a Kalman filter

```

```
uint32_t timer;
uint8_t i2cData[14]; // Buffer for I2C data

unsigned long lastTime;
unsigned long timeChange;

#define cC 0.01745329252
double kalAngleY_rad;
double velAngle_Y;
double last_Angle_Y;

//Função map_double
float map_double(double x, double in_min, double in_max, double
out_min, double out_max)
{
    return (x - in_min) * (out_max - out_min) / (in_max - in_min) +
out_min;
}

//Saida PWM motores
int ENR_1 = 5;
int ENL_1 = 6;
int ENR_2 = 11;
int ENL_2 = 10;

//Variáveis de saída PWM
```

```

double Output_P_R, Output_I_R;
double Output_P_L, Output_I_L;
double Output_R;
double Output_L;

void setup() {

    Serial.begin (250000);
    Wire.begin();

    //Configuração acel/gyro
    #if ARDUINO >= 157
        Wire.setClock(30000UL); // Set I2C frequency to 400kHz
    #else
        TWBR = ((F_CPU / 30000UL) - 16) / 2; // Set I2C frequency to
        400kHz
    #endif

    i2cData[0] = 7; // Set the sample rate to 1000Hz - 8kHz/(7+1) =
    1000Hz
    i2cData[1] = 0x00; // Disable FSYNC and set 260 Hz Acc filtering,
    256 Hz Gyro filtering, 8 KHz sampling
    i2cData[2] = 0x00; // Set Gyro Full Scale Range to ±250deg/s
    i2cData[3] = 0x00; // Set Accelerometer Full Scale Range to ±2g
    while (i2cWrite(0x19, i2cData, 4, false)); // Write to all four registers
    at once

```

```
while (i2cWrite(0x6B, 0x01, true)); // PLL with X axis gyroscope
reference and disable sleep mode
```

```
while (i2cRead(0x75, i2cData, 1));
if (i2cData[0] != 0x68) { // Read "WHO_AM_I" register
    Serial.print(F("Error reading sensor"));
    while (1);
}
```

```
delay(100); // Wait for sensor to stabilize
```

```
/* Set kalman and gyro starting angle */
while (i2cRead(0x3B, i2cData, 6));
accX = (int16_t)((i2cData[0] << 8) | i2cData[1]);
accY = (int16_t)((i2cData[2] << 8) | i2cData[3]);
accZ = (int16_t)((i2cData[4] << 8) | i2cData[5]);
```

```
// Source:
http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app\_note/AN3461.pdf eq.
25 and eq. 26
```

```
// atan2 outputs the value of  $-\pi$  to  $\pi$  (radians) - see
http://en.wikipedia.org/wiki/Atan2
```

```
// It is then converted from radians to degrees
#ifdef RESTRICT_PITCH // Eq. 25 and 26
    double roll = atan2(accY, accZ) * RAD_TO_DEG;
    double pitch = atan(-accX / sqrt(accY * accY + accZ * accZ)) *
RAD_TO_DEG;
```

```

#else // Eq. 28 and 29
    double roll = atan(accY / sqrt(accX * accX + accZ * accZ)) *
RAD_TO_DEG;
    double pitch = atan2(-accX, accZ) * RAD_TO_DEG;
#endif

```

```

    kalmanX.setAngle(roll); // Set starting angle

```

```

    kalmanY.setAngle(pitch);

```

```

    gyroXangle = roll;

```

```

    gyroYangle = pitch;

```

```

    compAngleX = roll;

```

```

    compAngleY = pitch;

```

```

    timer = micros();

```

```

    const uint8_t IMUAddress = 0x68; // AD0 is logic low on the PCB

```

```

    const uint16_t I2C_TIMEOUT = 1000; // Used to check for errors in
I2C communication

```

```

uint8_t i2cWrite(uint8_t registerAddress, uint8_t data, bool sendStop) {
    return i2cWrite(registerAddress, &data, 1, sendStop); // Returns 0 on
success
}

```

```

uint8_t i2cWrite(uint8_t registerAddress, uint8_t *data, uint8_t length,
bool sendStop) {
    Wire.beginTransaction(IMUAddress);

```



```

Wire.write(registerAddress);
Wire.write(data, length);
uint8_t rcode = Wire.endTransmission(sendStop); // Returns 0 on
success
if (rcode) {
    Serial.print(F("i2cWrite failed: "));
    Serial.println(rcode);
}
return          rcode;          //          See:
http://arduino.cc/en/Reference/WireEndTransmission
}

```

```

uint8_t i2cRead(uint8_t registerAddress, uint8_t *data, uint8_t nbytes) {
    uint32_t timeOutTimer;
    Wire.beginTransmission(IMUAddress);
    Wire.write(registerAddress);
    uint8_t rcode = Wire.endTransmission(false); // Don't release the bus
    if (rcode) {
        Serial.print(F("i2cRead failed: "));
        Serial.println(rcode);
    }
    return          rcode;          //          See:
http://arduino.cc/en/Reference/WireEndTransmission
}
Wire.requestFrom(IMUAddress, nbytes, (uint8_t>true); // Send a
repeated start and then release the bus after reading
for (uint8_t i = 0; i < nbytes; i++) {
    if (Wire.available())

```

```

    data[i] = Wire.read();
else {
    timeOutTimer = micros();
    while (((micros() - timeOutTimer) < I2C_TIMEOUT) &&
!Wire.available());
    if (Wire.available())
        data[i] = Wire.read();
    else {
        Serial.println(F("i2cRead timeout"));
        return 5; // This error value is not already taken by
endTransmission
    }
}
}
return 0; // Success
}

```

```
//encoders
```

```

pinMode(ENCA_L, INPUT);
pinMode(ENCA_R, INPUT);
pinMode(ENCB_L, INPUT);
pinMode(ENCB_R, INPUT);
attachInterrupt(ENCA_L, updateWheelCountA_L, CHANGE);
attachInterrupt(ENCB_L, updateWheelCountB_L, CHANGE);
attachInterrupt(ENCA_R, updateWheelCountA_R, CHANGE);
attachInterrupt(ENCB_R, updateWheelCountB_R, CHANGE);

```

```
//Saídas PWM
pinMode (ENR_1, OUTPUT);
pinMode (ENL_1, OUTPUT);
pinMode (ENR_2, OUTPUT);
pinMode (ENL_2, OUTPUT);
digitalWrite (ENR_1, LOW);
digitalWrite (ENL_1, LOW);
digitalWrite (ENR_2, LOW);
digitalWrite (ENL_2, LOW);

}

void loop() {

  Angulo();

  //Tempo de amostragem
  unsigned long now = millis();
  timeChange = (double)(now - lastTime);

  if (timeChange >= 20){
    dpulse_R = (pulses_R - prevPulses_R);
    prevPulses_R = pulses_R;

    dpulse_L = (pulses_L - prevPulses_L);
    prevPulses_L = pulses_L;
```

```
velocity_R = 2.30575*dpulse_R/timeChange;
```

```
velocity_R_filt = 0.8682*velocity_R_filt + 0.1318*velocity_R;
```

```
velocity_L = 2.30575*dpulse_L/timeChange;
```

```
velocity_L_filt = 0.8682*velocity_L_filt + 0.1318*velocity_L;
```

```
vel_Long = (velocity_R_filt + velocity_L_filt)*0.5;
```

```
vel_Ang = (velocity_R_filt - velocity_L_filt)/(2*0.3);
```

```
velAngle_Y = 1000*(kalAngleY_rad - last_Angle_Y)/timeChange;
```

```
last_Angle_Y = kalAngleY_rad;
```

```
if(KI < 150) KI++;//300
```

```
else KI = 150;
```

```
lastTime = now;
```

```
}
```

```
Erro ();
```

```
Freerun();
```

```
Output();
```

```
}
```

```
void updateWheelCountA_L() {
```

```
int32_t enca, encb;
```

```
enca = digitalRead(ENCA_L);
encb = digitalRead(ENCB_L);

if (enca == HIGH) {
  if (encb == LOW) {
    ++pulses_L;
  } else {
    --pulses_L;
  }
} else {
  if (encb == HIGH) {
    ++pulses_L;
  } else {
    --pulses_L;
  }
}
}
```

```
void updateWheelCountB_L() {
  int32_t enca, encb;

  enca = digitalRead(ENCA_L);
  encb = digitalRead(ENCB_L);

  if (encb == HIGH) {
    if (enca == HIGH) {
```

```
    ++pulses_L;
} else {
    --pulses_L;
}
} else {
    if (enca == LOW) {
        ++pulses_L;
    } else {
        --pulses_L;
    }
}
}

void updateWheelCountA_R() {
    int32_t enca, encb;

    enca = digitalRead(ENCA_R);
    encb = digitalRead(ENCB_R);

    if (enca == HIGH) {
        if (encb == HIGH) {
            ++pulses_R;
        } else {
            --pulses_R;
        }
    } else {
        if (encb == LOW) {
```

```
    ++pulses_R;
  } else {
    --pulses_R;
  }
}
}

void updateWheelCountB_R() {
  int32_t enca, encb;

  enca = digitalRead(ENCA_R);
  encb = digitalRead(ENCB_R);

  if (encb == HIGH) {
    if (enca == LOW) {
      ++pulses_R;
    } else {
      --pulses_R;
    }
  } else {
    if (enca == HIGH) {
      ++pulses_R;
    } else {
      --pulses_R;
    }
  }
}
```

```

void Angulo(){
    /* Update all the values */
    while (i2cRead(0x3B, i2cData, 14));
    accX = (int16_t)((i2cData[0] << 8) | i2cData[1]);
    accY = (int16_t)((i2cData[2] << 8) | i2cData[3]);
    accZ = (int16_t)((i2cData[4] << 8) | i2cData[5]);
    tempRaw = (int16_t)((i2cData[6] << 8) | i2cData[7]);
    gyroX = (int16_t)((i2cData[8] << 8) | i2cData[9]);
    gyroY = (int16_t)((i2cData[10] << 8) | i2cData[11]);
    gyroZ = (int16_t)((i2cData[12] << 8) | i2cData[13]);;

    double dt = (double)(micros() - timer) / 1000000; // Calculate delta
time
    timer = micros();

    // It is then converted from radians to degrees
#ifdef RESTRICT_PITCH // Eq. 25 and 26
    double roll = atan2(accY, accZ) * RAD_TO_DEG;
    double pitch = atan(-accX / sqrt(accY * accY + accZ * accZ)) *
RAD_TO_DEG;
#else // Eq. 28 and 29
    double roll = atan(accY / sqrt(accX * accX + accZ * accZ)) *
RAD_TO_DEG;
    double pitch = atan2(-accX, accZ) * RAD_TO_DEG;
#endif

    double gyroXrate = gyroX / 131.0; // Convert to deg/s

```



```

double gyroYrate = gyroY / 131.0; // Convert to deg/s

#ifdef RESTRICT_PITCH
    // This fixes the transition problem when the accelerometer angle
    jumps between -180 and 180 degrees
    if ((roll < -90 && kalAngleX > 90) || (roll > 90 && kalAngleX < -90))
    {
        kalmanX.setAngle(roll);
        compAngleX = roll;
        kalAngleX = roll;
        gyroXangle = roll;
    } else
        kalAngleX = kalmanX.getAngle(roll, gyroXrate, dt); // Calculate the
angle using a Kalman filter

    if (abs(kalAngleX) > 90)
        gyroYrate = -gyroYrate; // Invert rate, so it fits the restricted
accelerometer reading
        kalAngleY = kalmanY.getAngle(pitch, gyroYrate, dt);
#else
    // This fixes the transition problem when the accelerometer angle
    jumps between -180 and 180 degrees
    if ((pitch < -90 && kalAngleY > 90) || (pitch > 90 && kalAngleY < -
90)) {
        kalmanY.setAngle(pitch);
        compAngleY = pitch;
        kalAngleY = pitch;

```

```

    gyroYangle = pitch;
} else
    kalAngleY = kalmanY.getAngle(pitch, gyroYrate, dt); // Calculate the
angle using a Kalman filter

if (abs(kalAngleY) > 90)
    gyroXrate = -gyroXrate; // Invert rate, so it fits the restricted
accelerometer reading
    kalAngleX = kalmanX.getAngle(roll, gyroXrate, dt); // Calculate the
angle using a Kalman filter
#endif

    gyroXangle += gyroXrate * dt; // Calculate gyro angle without any
filter
    gyroYangle += gyroYrate * dt;
//gyroXangle += kalmanX.getRate() * dt; // Calculate gyro angle using
the unbiased rate
//gyroYangle += kalmanY.getRate() * dt;

    compAngleX = 0.93 * (compAngleX + gyroXrate * dt) + 0.07 * roll; //
Calculate the angle using a Complimentary filter
    compAngleY = 0.93 * (compAngleY + gyroYrate * dt) + 0.07 * pitch;

// Reset the gyro angle when it has drifted too much
if (gyroXangle < -180 || gyroXangle > 180)
    gyroXangle = kalAngleX;
if (gyroYangle < -180 || gyroYangle > 180)

```

```
gyroYangle = kalAngleY;

kalAngleY_rad = kalAngleY*cC;

}

void Erro () {
    joy_velLong = analogRead(joyPinX);
    joy_velLong = map_double(joy_velLong,0,1023,-0.5,0.5);
    joy_velAng = analogRead(joyPinY);
    joy_velAng = map_double(joy_velAng,0,1023,-0.3,0.3);

    if(joy_velLong > Ref_velLong_joy){
        Ref_velLong_joy += 0.001;
    }
    if(joy_velLong < Ref_velLong_joy){
        Ref_velLong_joy += -0.001;
    }
    if(joy_velLong == Ref_velLong_joy){
        Ref_velLong_joy = joy_velLong;
    }

    if (joy_velAng< 0.04 && joy_velAng>-0.04){
        Ref_velAng_joy=0;
    }
    else {
        if(joy_velAng > Ref_velAng_joy){
            Ref_velAng_joy += 0.005;
        }
    }
}
```

```

}
if(joy_velAng < Ref_velAng_joy){
    Ref_velAng_joy += -0.005;
}
if(joy_velAng == Ref_velAng_joy){
    Ref_velAng_joy = joy_velAng;
}
}
Ref_Ang = 0.1*Ref_velLong_joy

Err_vel_Long = Ref_velLong_joy - vel_Long;
Err_vel_Ang = Ref_velAng_joy - vel_Ang;
Err_AngleY = Ref_Ang - kalAngleY_rad;
}

void Freerun(){
    Output_P_R    =    (4.097*vel_Ang    -1,9*velAngle_Y    -
34.33*Err_AngleY);
    Output_P_L    =    (-4.117*vel_Ang    -1.961*velAngle_Y    -
34.878*Err_AngleY);

    Output_I_R    =    Output_I_R    +    (KI*-23.638*Err_vel_Ang    +
KI*20,347*Err_AngleY)/timeChange;
    Output_I_L    =    Output_I_L    +    (KI*23.704*Err_vel_Ang    +
KI*20.969*Err_AngleY)/timeChange;

    Output_R = constrain(-Output_P_R + Output_I_R, -25, 25);

```

```
Output_L = constrain(-Output_P_L + Output_I_L, -25, 25);

Output_R = map_double(Output_R, -25, 25, -255, 255);
Output_L = map_double(Output_L, -25, 25, -255, 255);
}

void Output(){

if(Output_R >= 0){
  analogWrite (ENR_1, constrain(abs(Output_R), 0, 255));
  digitalWrite (ENL_1, LOW);
}
if(Output_R < 0){
  digitalWrite (ENR_1, LOW);
  analogWrite (ENL_1, constrain(abs(Output_R), 0, 255));
}
if(Output_L >= 0){
  analogWrite (ENR_2, constrain(abs(Output_L), 0, 255));
  digitalWrite (ENL_2, LOW);
}
if(Output_L < 0){
  digitalWrite (ENR_2, LOW);
  analogWrite (ENL_2, constrain(abs(Output_L), 0, 255));
}
}
```