



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Pós-Graduação em Física

Daniel Souza Lima

**Análise de diagramas em espalhamento
duplo de pártons à ordem seguinte à
dominante**

Florianópolis - SC
2019

Daniel Souza Lima

**Análise de diagramas em espalhamento
duplo de pártons à ordem seguinte à
dominante**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

Florianópolis - SC
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Lima, Daniel Souza

Análise de diagramas em espalhamento duplo de pártons à
ordem seguinte à dominante / Daniel Souza Lima ;
orientador, Emmanuel Grève de Oliveira, 2019.
73 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Física. 2. Teoria quântica de campos. 3. Cromodinâmica
quântica. 4. Espalhamento duplo de pártons. I. de Oliveira,
Emmanuel Grève . II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Daniel Souza Lima

Análise de diagramas em espalhamento duplo de pártons à ordem seguinte à dominante

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Jeferson Lima Tomazelli
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Alexandre Magno Silva Santos
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotto
Universidade Federal do Rio Grande

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador do Programa

Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira
Orientador

Florianópolis, 29 de agosto de 2019.

“A força do Direito deve superar o direito da força.” Rui Barbosa.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Roman Paselchnik e ao meu orientador pela colaboração e paciência desmedidas. Além da CAPES, FAPESC e CNPq.

Muito obrigado!

Resumo

Além do Espalhamento Simples de Pártons (ESP), um processo de física de altas energias o qual envolve a interação dois pártons independentes, cada par proveniente de um hádron distinto, o Espalhamento Duplo de Pártons (EDP) consiste na interação entre um par de pártons proveniente de um mesmo hádron e um outro par de pártons proveniente de um outro hádron; por conseguinte, os pártons podem ser correlacionados quanticamente. Atualmente, busca-se teorizar o EDP a partir de princípios familiares da Cromodinâmica Quântica estendidos para o caso de dois corpos, conforme se almeja uma continuidade lógica entre a descrição de espalhamento simples e o duplo. Tal como o caso de espalhamento simples, o espalhamento duplo também possui as suas equações de evolução de densidade de distribuições de pártons dupla e, ineditamente, possui o problema da contagem. Assim, são discutidos aspectos importantes da Cromodinâmica Quântica de forma introdutória e suficiente para introduzir o EDP e suas principais características.

Palavras-chaves: Teoria Quântica de Campos 1. Cromodinâmica Quântica 2. Espalhamento Duplo de Pártons 3.

Abstract

Besides the Simple parton Scattering (ESP), a High Energy Physics process in which an interaction happens between two totally uncorrelated partons from different hadrons, the Double parton Scattering (EDP) consists of an interaction between one pair of partons from the same hadron with another pair of partons from another hadron, and, consequently, it is seen that correlation between two partons from the same parental hadron could vary. Nowadays, a better theoretical formulation of EDP phenomena inside the theoretical framework of the Quantum Chromodynamics (QCD) is sought, in order to create a more consistent continuity between EDP and ESP descriptions. Similarly to SPS, DPS also contains its evolution equation for double parton density distribution, and, unmistakably, shows the novelty called Double Count. Therefore, this thesis aims to discuss the necessary topics on QCD in order to introduce double parton scattering and its main features.

Key-words: Quantum Field Theory 1. Quantum Chromodynamics 2. Double Parton Scattering 3.

Sumário

Introdução	9
1 Espalhamento Simples de Pártons	16
1.1 O Espalhamento Profundamente Inelástico	16
1.2 Fatorização	30
1.3 As equações de evolução para as densidades de pártons	35
1.4 Considerações finais	37
2 O Espalhamento Duplo de Pártons	39
2.1 Definições básicas	41
2.2 O problema da dupla contagem	45
2.3 DGLAP para o Espalhamento Duplo de Pártons	49
3 Resultados	53
3.1 As amplitudes a serem consideradas	53
3.2 Cinemática	55
3.2.1 Invariantes	56
3.3 Expressão matemática da amplitude	57
4 Conclusão	63
Referências bibliográficas	65

A	Divergências infravermelhas	71
B	Região cinemática e as raízes	73
C	Definições preliminares	78

Introdução

A elaboração teórica da Cromodinâmica Quântica (CDQ) como a teoria da interação forte, em paralelo com a unificação da força eletrofraca e eletromagnética, protagonizaram uma das grandes vitórias científicas da física no século XX, ao passo que a crescente sofisticação dos experimentos revelava novas partículas. Do tubo catódico de Thompson, até os modernos aceleradores hadrônicos, a teoria da matéria trafega, ora atrás, ora à frente dos experimentos, a começar pela teoria dos fótons de Einstein [1], em 1905; o modelo de Rutherford, a descoberta do núcleo atômico, em 1911; a equação relativística para férmions consistente com a mecânica quântica [2], que previa a existência de antipartículas. No final da década de 1940, já eram conhecidos os léptons elétron e antieletron, neutrino e múon, e os hádrons pión, nêutron e próton e, a partir da década de 50, houve uma profusão de descobertas de partículas e de desenvolvimento teórico.

Listaremos, não necessariamente em ordem cronológica, alguns fatos:

- o desenvolvimento de uma equação para campos espinoriais que fosse invariante por transformações de calibre imbuída de um campo não-abeliano geral - teoria de Yang-Mills[3];
- a pioneira aplicação da teoria de grupo na descrição matemática dos bárions e mésons, na dissertação de mestrado de Gell-Mann [4], em 1961 (tenhamos em mente que a interação forte era pensada como $\mathcal{L}_{int} = g\bar{\Psi}\Psi\phi$). Uma dificuldade manifesta foi encaixar essa teoria de mésons e bárions maciços dentro de uma teoria de Yang-Mills;
- entendimento correto de como gerar o termo de massa para os férmions em uma teoria de Yang-Mills [5–8], o mecanismo de Higgs;
- examinando colisões de alta energia de hádrons, Feynman propôs o modelo partô-

nico [9] e Bjorken previu o seu homônimo escalonamento [10] no mesmo ano de 1969;

- independentemente, Steven Weinberg [11], Abdus Salam [12] e Sheldon Glashow [13] unificaram a interação fraca e a eletromagnética, cuja interação seria intermediada pelos bósons de calibre W^\pm e Z ;
- em 1971, t'Hooft provou a renormalizibilidade de campos de Yang-Mills sem massa [14] e, depois, com massa [15] (a teoria eletrofraca);
- em 1973, descobrimento da liberdade assintótica por Politzer, Gross e Wilczek [16, 17], que basicamente significa que a "constante" (não é constante) de acoplamento da teoria de Yang-Mills, para até 16 sabores de quarks, vai a zero conforme a escala de energia vai a infinito e que é possível usar a teoria de perturbação para energias suficientemente grandes;
- a carga de cor (sem correlação alguma com a óptica) foi revelada pela necessidade de um número quântico adicional para descrever o férmion Δ^{++} composto por três quarks [18] e a aferição do glúon via a observação de eventos de 3 jatos ocasionados pelo bremsstrahlung gluônico [19]; sobretudo, poderíamos mencionar a evidência da existência da carga de cor proveniente da razão entre a seção de choque de aniquilação $e^-e^+ \rightarrow$ hádrons e de $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^-$ e, também, pela taxa de decaimento de $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Certamente, muitas outras etapas, ora mais matemáticas, como a quantização de campos de bósons de calibre, o método de Faddeev-Popov [20], em Teoria de Campos; ora mais experimentais, como a quebra da simetria de paridade [21], lapidaram o que entendemos hoje como Modelo Padrão (MP) de física de partículas. Atualmente, o MP reúne a teoria quântica de campos do que se entende da interação forte, eletrofraca e eletromagnética. Em suma, a Figura 1 mostra um quadro geral das partículas fundamentais constitutivas do MP. Observamos os férmions, descrito por espinores: quarks divididos em três gerações: *up* e *down*, *charm* e *strange*, *top* e *bottom*; três pares de léptons também são mostrados.

Todos esses férmions adquirem massa via acoplamento com o campo do bóson de spin 0 (por isso o adjetivo escalar) de Higgs, gerando, no final, após a quebra de simetria

do vácuo (expansão da lagrangiana em torno de um ponto de mínimo do campo de Higgs), um termo de Yukawa entre o campo escalar de Higgs e o campo do férmion. O glúon é o mediador da força forte e possui massa igual a zero e spin 1. Os bósons γ , Z , W^+ e W^- são os mediadores da força eletrofraca e possuem spin 1 e massa diferente de zero. A interação

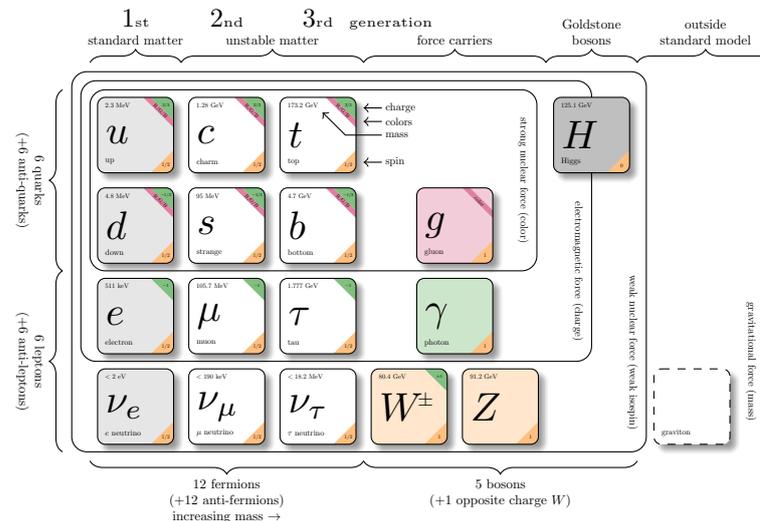


Figura 1: O Modelo Padrão. Fonte: David Galbraith e Carsten Burgard [22].

forte é descrita pela teoria quântica de campos dos quarks e glúons, na qual há as cargas de cores, baseada em uma teoria de Yang-Mills na qual o grupo de simetria subjacente é o $SU(3)$, tal que os quarks são descritos pela representação fundamental da álgebra $\mathfrak{su}(3)$. Os mediadores da força forte, os glúons, são descritos em termos dos geradores da representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ 8 dimensional[23]: λ^a , $a \in \{1, \dots, 8\}$, chamadas de matrizes de Gell-Mann, 3×3 cujos ij -ésimos índices vão de 1 a 3 e agem sobre as matrizes 3×1 , a representação fundamental (quarks). Então, os 8 glúons e as três gerações de quarks justificam o nome Cromodinâmica Quântica (CDQ).

A última peça do Modelo Padrão a ser experimentalmente verificada foi o bóson de Higgs no LHC (*Large Hadron Collider*), a única partícula escalar a ser detetada [24], Figura 2. O LHC também detetou o Odderon, evento este que, em um espalhamento elástico de hádrons, há uma troca de três glúons entre os hádrons [25] e, recentemente, verificou a quebra da simetria CP no decaimento do quark *charm* no detector LHCb [26].

Em física de partículas, uma das principais maneiras de se extrair previsões do MP é através do cálculo de seções de choque de espalhamento de partículas, na medida em que a CDQ é utilizada em seu regime perturbativo (CDQp). Conforme anteriormente

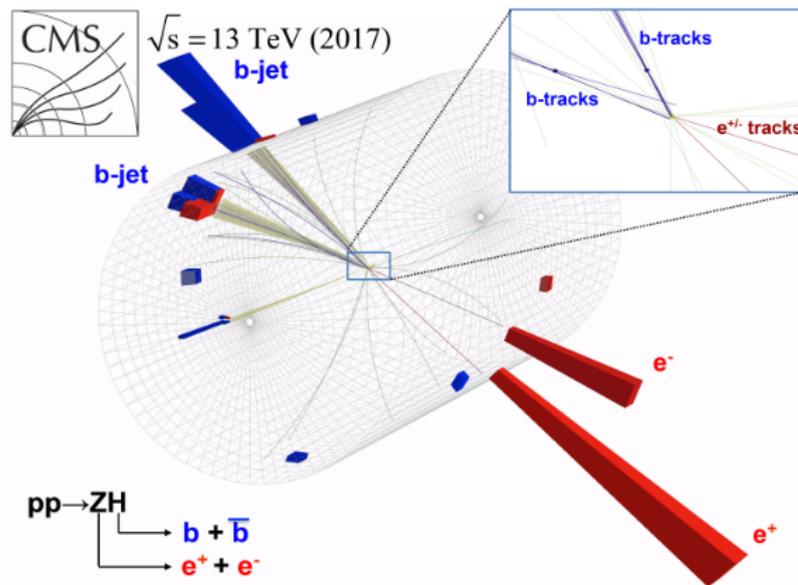


Figura 2: Esquema do evento candidato a produção do bóson de Higgs e um bóson Z, com subsequentes decaimentos do bóson de Higgs em quark *bottom* e anti-*bottom*. Fonte: [27].

mencionado, a liberdade assintótica [16, 17] demonstra a aplicabilidade da teoria de perturbação à CDQ, na medida em que a escala de energia seja suficientemente alta. $Q_0 \sim 1$ GeV [28] é o valor energético limítrofe da CDQp, isto é, valor a partir do qual a força forte (a constante de acoplamento) ainda não impossibilitaria a aplicação de Teoria de perturbação à CDQ. Podemos interpretar Q_0 como sendo a escala efetiva inicial a partir da qual a constante de acoplamento evolui [29].

Nesse contexto de cálculo no regime perturbativo, as seções de choque de processos duros (uma interação entre partículas fundamentais) em colisões hádron-hádron são, costumeiramente, calculadas com o pressuposto de que somente um párton (quark, anti-quark ou glúon) de um próton interaja com o párton de outro próton: o espalhamento simples de pártons (ESP). Esse pressuposto baseia-se na razão de que a probabilidade de uma interação múltipla de pártons - pártons correlacionados de um próton interagindo com os pártons correlacionados de outro próton - envolver, geralmente, um maior número de vértices do que a interação simples de pártons, ou seja, a interação múltipla de pártons é suprimida com relação à simples. Contudo, como veremos, para regiões do espaço em que as frações de momento dos pártons são pequenas, o espalhamento duplo de pártons (EDP) - o foco desta dissertação - pode ser mais relevante do que o espalhamento simples de pártons; além disso, há poucas exceções na qual o espalhamento simples seria

suprimido com relação ao espalhamento duplo.

Um exemplo dessas exceções seria a produção leptônica dupla ($W \rightarrow l\nu$), que, só no caso W^+W^+ , contém menos vértices do que o caso de espalhamento simples de pártons, conforme a Figura 3, cuja medida, feita no detector Atlas [30], mostra-nos que é promissor o estudo de EDP no caso em que ambos processos duros A e B produzam o bóson W . Logo, vemos a importância do estudo do processo de espalhamento duplo de pártons [31].

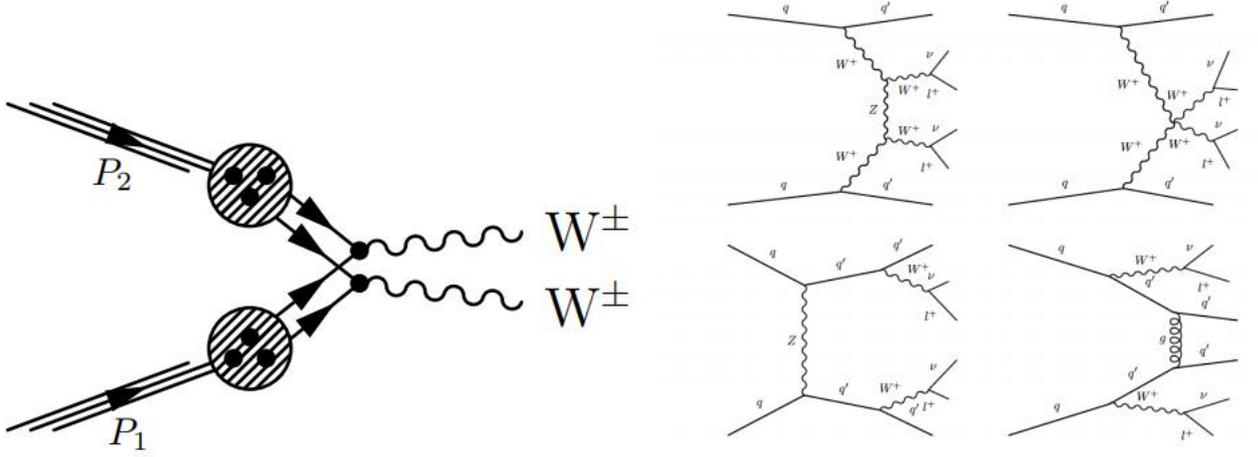


Figura 3: (Esquerda) diagrama esquemático de W^+W^+ por processo EDP e os diagramas de Feynman (direita) mais relevantes do correspondente processo ESP W^+W^+jj . Neste experimento, foi medida $\sigma_{EDP}^{WW} = 1,09_{-0,49}^{+0,50}$ pb. Observe que o processo de espalhamento duplo (esquema à esquerda) possui dois vértices, enquanto que o de espalhamento simples (diagramas à direita) contém mais do que dois vértices. Fonte: colaboração CMS [32]

Na descrição do EDP, se os espalhamentos são aproximados como independentes entre si, pode-se escrever a seção de choque como um produto de seções de ESP[33],[34]:

$$\sigma_{AB}^{EDP} = \frac{m}{2} \frac{\sigma_{(A)}^{ESP} \sigma_{(B)}^{ESP}}{\sigma_{eff}}, \quad (0.1)$$

onde a quantidade $\sigma_{(X)}^{ESP}$ é a seção de choque do processo duro X de espalhamento simples de pártons, m é o fator de simetria tal que $m = 2$ caso $A = B$ e $m = 1$ caso contrário e σ_{eff} é definido como

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\int [F(y)]^2 d^2y}, \quad (0.2)$$

onde y é a distância transversal entre 2 pártons, $F(y)$ é a distribuição transversal de pártons – voltaremos a esta função na Seção 2.3. Na literatura, é consenso que $\sigma_{eff} \cong 15$ mb [35,36] (Figura 4). As medidas do espalhamento duplo são mais difíceis de serem feitas,

porque são de ordens de grandeza menores do que as medidas de espalhamento simples. Futuramente, o espalhamento duplo terá melhores medidas por causa das atualizações do LHC, o HL-LHC e, depois, o HE-LHC, porque os aceleradores serão dotados de feixes mais densos [37], com luminosidade integrada projetada de 5 ab^{-1} (o LHC possui luminosidade integrada de um pouco mais de 50 fb^{-1}).

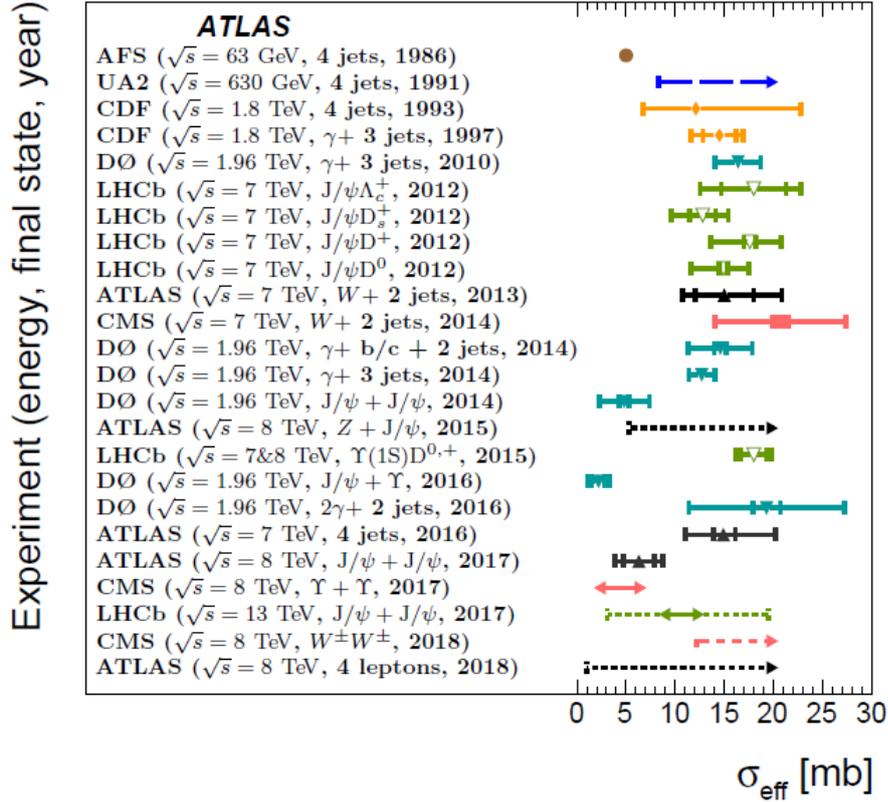


Figura 4: Medidas de σ_{eff} de diferentes experimentos listadas cronologicamente. Barras internas representam incertezas estatísticas e externas, a incerteza total. Linhas com setas em ambos lados representam intervalos de valores de σ_{eff} . Setas achuradas indicam limites inferiores. Fonte: gráfico proveniente de [38].

A Equação 0.1 não leva em conta a possibilidade do desdobramento perturbativo $1 \rightarrow 2$ de um parton em dois e nem contabiliza a multitude de correlações possíveis entre dois partons dentro do próton: em termos de spin, carga de cor e fração de momento e separação transversal; assim posto, aspectos mais primordiais da teoria relativos às funções de distribuição de partons serão discutidos. As funções de distribuição partônica e a evolução destas com relação a escala de energia e funções de desdobramento, conceitos formulados no caso usual de espalhamento simples de partons, também possuem um significado estendido para o caso de espalhamento duplo de partons. Por isso, nesta dissertação, começaremos com uma revisão pedagógica a respeito de espalhamento inelástico

e as equações de evolução da QCD, ao passo que introduziremos o análogo estendido para o espalhamento duplo de pártons.

O Capítulo 1 trata do espalhamento simples de pártons, no contexto da discussão de espalhamento profundamente inelástico, a fim de introduzirmos a descrição do párton, sua função de distribuição e como ela evolui para que o paralelo com o espalhamento duplo seja feito. No Capítulo 2, em paralelo com as definições do espalhamento simples, como extensão lógico-teórica do caso mais rudimentar, discutiremos o espalhamento duplo de pártons, bem como as equações de evolução dos pártons e será mostrado o problema da dupla contagem. No Capítulo 3, executaremos o cálculo perturbativo de uma seção de choque partônica com intuito de convoluí-la com quantidades não-perturbativas no contexto do espalhamento duplo de pártons.

Todas as figuras de diagramas de Feynman ou esquemas foram produzidas pelo software *JaxoDraw* [39].

Capítulo 1

Espalhamento Simples de Pártons

A fundamentação das equações de evolução para a densidade de pártons é consequência da observação e formulação do Espalhamento Profundamente Inelástico (EPI) entre léptons e hádrons, o qual analisaremos a seguir. Veremos como a emissão de glúons relaciona-se com a evolução das densidades de pártons e como exerce um papel no espalhamento partônico .

1.1 O Espalhamento Profundamente Inelástico

O espalhamento de um lépton, e.g., um elétron, um múon ou um neutrino, por um hádron, e.g., um núcleo, um próton ou um nêutron, é representado pelo diagrama da Figura 1.1.

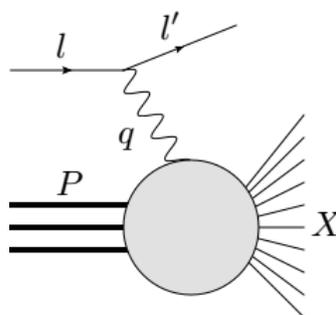


Figura 1.1: Espalhamento $l + P \rightarrow l' + X$. X representa os estados hadrônicos finais. Fonte: próprio autor.

Ao longo de toda esta seção, usaremos o referencial de laboratório no qual o hádron

de massa M está em repouso, em que um fóton virtual de quadrimomento $q = l - l'$ o sonda. Eis as variáveis cinemáticas:

- $l^\mu = (E; 0, 0, E)$, é o quadrimomento do lépton incidente;
- $l'^\mu = (E'; E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta)$, o quadrimomento do lépton emergente e espalhado a um ângulo θ com relação ao feixe de partículas, e
- $p^\mu = (M; 0, 0, 0)$, o quadrimomento do próton. Pela construção dos quadrimomentos l^μ e l'^μ , a massa dos léptons está desprezada.

Adicionalmente, os seguintes invariantes serão úteis:

$$q^2 \equiv (l - l')^2 = -2l \cdot l' = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \equiv -Q^2, \quad \nu \equiv \frac{p \cdot q}{M}. \quad (1.1)$$

Podemos reconhecer $\nu = p \cdot q/M = E - E'$ como a variável de transferência de energia. Definimos a variável de Bjorken, x , como

$$x = \frac{-Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu}. \quad (1.2)$$

A amplitude \mathcal{M} é composta por uma corrente eletromagnética fermiônica $j^\mu(z)$ (posição z) e uma corrente eletromagnética, mediadas conforme o termo de interação da lagrangiana da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) ($-ej^\mu A_\mu$, A_μ é o campo eletromagnético):

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 j^\mu \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} = (-ie)^2 \bar{u}_s(l) \gamma^\mu u_{s'}(l') \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \langle X | j^\nu(0) | p, s'' \rangle, \quad (1.3)$$

onde s é a spin do próton, $u_s(l)$ é o espinor de um elétron de spin s e momento l . Então, a fim de calcular o módulo quadrado da amplitude, $|\mathcal{M}|^2$, devemos fazer a operação $\mathcal{M}^* \mathcal{M}$:

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{e^4}{Q^4} \right) \bar{u}_{s'}(l') \gamma_{\nu'} u_s(l) \bar{u}_s(l) \gamma_\nu u_{s'}(l') \langle p, s'' | j^{\nu'}(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | p, s'' \rangle. \quad (1.4)$$

Agora, somaremos todos os produtos hadrônicos X , faremos a média da polarização do hádron dos spins do lépton inicial e final. Abreviaremos $\frac{1}{2} \sum_{s''} \sum_X \langle p, s'' | j^{\nu'}(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | p, s'' \rangle$

por (...). Continuando

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \sum_{ijklm} (\bar{u}_{s'})^{ij} (\gamma_{\nu'})^{jk} (u_s \bar{u}_s)^{kl} (\gamma_\nu)^{lm} (u_{s'})^{mi} (\dots) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \sum_{jklm} (u_{s'} \bar{u}_{s'})^{mj} (\gamma_{\nu'})^{jk} (u_s \bar{u}_s)^{kl} (\gamma_\nu)^{lm} (\dots) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{jklm} (\not{l}' + m_f)^{mj} (\gamma_{\nu'})^{jk} (\not{l} + m_f)^{kl} (\gamma_\nu)^{lm} (\dots) \\
&= \frac{1}{2} \sum_m ((\not{l}' + m_f) \gamma_{\nu'} (\not{l} + m_f) \gamma_\nu)^{mm} (\dots) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{l}' + m_f) \gamma_{\nu'} (\not{l} + m_f) \gamma_\nu] (\dots), \quad (1.5)
\end{aligned}$$

e definimos o tensor leptônico após usarmos a seguinte propriedade: $\text{Tr}[\gamma^\kappa \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa] = \text{Tr}[\frac{1}{2} \{\gamma^\kappa, \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu\}]$, mas, porque $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, então $\frac{1}{2} \{\gamma^\kappa, \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu\} = g^{\kappa\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu - g^{\kappa\mu} \gamma^\lambda \gamma^\nu + g^{\kappa\nu} \gamma^\lambda \gamma^\mu$; portanto, $\text{Tr}[\gamma^\kappa \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu] = g^{\kappa\lambda} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - g^{\kappa\mu} \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\nu] + g^{\kappa\nu} \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu] = 4[g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} - g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} + g^{\kappa\nu} g^{\lambda\mu}]$. Então,

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{l}' + m_f) \gamma_\mu (\not{l} + m_f) \gamma_\nu] = 2[l_\mu l'_\nu + l_\nu l'_\mu - g_{\mu\nu} (l \cdot l' - m_f^2)] \quad (\text{lembrar que } m_f \rightarrow 0). \quad (1.6)$$

(Usaremos o tensor com as componente contravariantes, $L^{\mu\nu}$, semelhantemente, com relação à operação $\frac{1}{2} \sum_{s''} \sum_X \langle p, s'' | j^\mu(\dagger(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | p, s'' \rangle$ construiremos um tensor hadrônico logo em breve).

Então, podemos obter a seção de choque, σ , dos elétrons observados integrando no espaço de fase de todos os produtos finais (lépton de quadrimomento l' mais os X hádrons com quadrimomentos k_i cada):

$$d\text{PS} = \frac{d^3 \vec{l}'}{(2\pi)^3 2E'} \left(\prod_i^X \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right) (2\pi)^4 \delta(p + l - l' - \sum_i k_i), \quad (1.7)$$

e

$$d\sigma = \frac{1}{F} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\text{PS} \quad (1.8)$$

onde F é o fator de fluxo de uma colisão colinear entre duas partículas dado por $F = 4[(l \cdot p)^2 - m_f^2 M^2]^{1/2} = 4[(EM)^2 - m_f^2 M^2]^{1/2} \approx 4EM$. Assim, usando o fato que $l' = (E'; \vec{l}')$

com $\vec{l}' = (E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta)$ - portanto, $d|\vec{l}'| = dE'$ -, temos que

$$\frac{d^3\vec{l}'}{(2\pi)^3 2E'} = \frac{|\vec{l}'|^2 d|\vec{l}'| d\Omega}{(2\pi)^3 2E'} = \frac{E'^2 dE' d\Omega}{(2\pi)^3 2E'}, \quad (1.9)$$

e, assim, temos o seguinte diferencial:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4\pi M} \int \prod_i^X \frac{d^3\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{i'}^X \langle p, s | j_\mu(0) | X_{i'} \rangle \right. \quad (1.10)$$

$$\left. \times \langle X_{i'} | j_\nu(0) | p, s \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + l - l' - \sum_i k_i) \right\}, \quad (1.11)$$

e definimos a expressão dentro das chaves da equação acima como o tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$ que, usando o fato da invariância translacional da corrente $j_\mu(x) = \exp(ik_i \cdot x) j_\mu(0) \exp(-ik_i \cdot x)$, e escrevendo δ^4 em representação integral de x e a relação de completude dos estados hadrônicos $\sum |X_i\rangle \langle X_i| = 1$, podemos expressar o tensor como

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \int d^4x \exp(iq \cdot x) \frac{1}{2} \sum_s \langle p, s | j_\mu(x) j_\nu(0) | p, s \rangle. \quad (1.12)$$

Basicamente, o tensor hadrônico é uma transformada de Fourier do valor esperado do produto de correntes $j_\mu(x) j_\nu(0)$ nos estados do próton e carrega informação sobre a estrutura do próton. Retomando a expressão de σ , temos que, finalmente

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{(4\pi\alpha)^2}{Q^4} \right) \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

onde usamos que $\alpha = e^2/4\pi$.

A esta altura, a fim de prosseguirmos na obtenção da expressão analítica de $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$, é necessária uma expressão de $W_{\mu\nu}$, que construiremos a partir de considerações de simetria tal como a invariância de Lorentz e a conservação da corrente. Assim, a forma mais geral de funções de estrutura ($W_i = W_i(\nu, Q^2)$) para o tensor é

$$W_{\mu\nu} = W_1 g_{\mu\nu} + W_2 p_\mu p_\nu + W_3 (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \\ + W_4 (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) + W_5 q_\mu q_\nu + W_6 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta. \quad (1.14)$$

Como $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$ ($W_{\mu\nu}$ é simétrico, porque não estamos considerando a interação

eletofraca), então W_4 e W_6 não contribuem para o espalhamento. A conservação da corrente impõe que

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0, \quad (1.15)$$

isto é, que $W_1 q_\nu + W_2 (q \cdot p) p_\nu + W_3 ((q \cdot p) q_\nu + (q \cdot q) p_\nu) + W_5 (q \cdot q) q_\nu = 0$. Igualando a zero, separadamente, o coeficiente de q_ν e de p_ν , temos o sistema de equações

$$W_1 + W_3 (q \cdot p) + W_5 (q \cdot q) = 0, \quad (1.16)$$

$$W_2 (q \cdot p) + W_3 (q \cdot q) = 0, \quad (1.17)$$

e, então

$$W_3 = -\frac{(q \cdot p) W_2}{q^2} \text{ e} \quad (1.18)$$

$$W_5 = \frac{(q \cdot p)^2 W_2}{q^4} - \frac{W_1}{q^2}. \quad (1.19)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= W_1 g_{\mu\nu} + W_2 p_\mu p_\nu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} W_2 (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + \left(\frac{(q \cdot p)^2}{q^4} W_2 - \frac{W_1}{q^2} \right) \\ &= W_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + W_2 \left(p_\mu p_\nu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + \left(\frac{(q \cdot p)^2}{q^2} \right)^2 \right) \\ &= W_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + W_2 \left[p_\mu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\mu \right] \left[p_\nu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\nu \right]. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Certamente, para consertar as dimensões entre W_1 e o restante da expressão, é conveniente fazer $W_2 \rightarrow W_2/M^2$, também, por conveniência como veremos adiante durante a contração com $L^{\mu\nu}$, faremos $W_1 \rightarrow -W_1$. Concluimos que:

$$W_{\mu\nu} = -W_1 \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \frac{W_2}{M^2} \left[p_\mu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\mu \right] \left[p_\nu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\nu \right]. \quad (1.21)$$

Portanto, podemos prosseguir no cálculo do diferencial $d^2\sigma/dE'd\Omega$ para a parte que nos

falta - a contração $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$. Para tanto, lembremos que

$$l \cdot p = ME, \quad (1.22)$$

$$l' \cdot p = ME', \quad (1.23)$$

$$l \cdot l' = q \cdot l' = -q \cdot l = \frac{Q^2}{2}. \quad (1.24)$$

Assim, contraindo $L^{\mu\nu}$ com o primeiro colchetes da Equação 1.21 (começaremos a desprezar a massa do elétron m_f a partir da segunda linha da conta abaixo):

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) &= 2[l^\mu l'^\nu + l'^\nu l^\mu - g^{\mu\nu}(l \cdot l' - m_f^2)] \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \\ &= 2 \left[2(l \cdot l') - 2 \frac{(l \cdot q)(l' \cdot q)}{q^2} - 4(l \cdot l') + (l \cdot l') \right] \\ &= 2 \left[Q^2 - \frac{Q^2}{2} - 2Q^2 + \frac{Q^2}{2} \right] = \boxed{-2} \text{ (é por isso que mudamos} \\ &\quad \text{o sinal de } W_1 \text{ na definição de } W_{\mu\nu}), \end{aligned}$$

Em seguida, vamos contrair $L^{\mu\nu}$ com o segundo colchetes de 1.21:

$$L^{\mu\nu} \left[p_\mu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\mu \right] \left[p_\nu - \frac{(q \cdot p)}{q^2} q_\nu \right] = M^2 \left[\frac{4(l \cdot p)(l' \cdot p)}{M^2} - Q^2 \right],$$

então,

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} &= 2W_1(\nu, Q^2)Q^2 + W_2(\nu, Q^2) \left[\frac{(l \cdot p)(l' \cdot p)}{M^2} - Q^2 \right] \\ &= 4EE' \left[2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (1.25) \end{aligned}$$

Portanto, a seção de choque diferencial pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega'} &= \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \left[2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} + W_2(\nu, Q^2) \right], \quad (1.26) \end{aligned}$$

onde

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = \frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^4(\theta/2)}, \quad (1.27)$$

é a fórmula de espalhamento de Mott.

Nesse ponto, a fim de comparação, podemos depreender da fórmula de Rosenbluth para o espalhamento elástico de um elétron por um próton que é dada por

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \left[\left(\frac{Q^2}{2M^2}\right) \tan^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right), \quad (1.28)$$

e, comparando a Equação 1.26 com e 1.28, temos as correspondentes funções de estrutura:

$$W_1(\nu, Q^2) = (Q^2/4M^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) = \frac{x}{2M} \delta(1-x), \quad (1.29)$$

$$W_2(\nu, Q^2) = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) = \frac{1}{\nu} \delta(1-x). \quad (1.30)$$

A contribuição do i -ésimo parton com massa $m_i = x_i M$, momento $\mathbf{p}_i = x_i \mathbf{p}$ (então $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_i = x_i \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = x_i M \nu$) e fração de carga $e_i (= q_i/e$, a carga e na constante de acoplamento é deixada intacta) é¹

$$W_1^i(\nu, Q^2) = (Q^2/4m_i^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) = \frac{x}{2x_i^2 M} \delta\left(1 - \frac{x}{x_i}\right), \quad W_2^i(\nu, Q^2) = \frac{1}{\nu} \delta\left(1 - \frac{x}{x_i}\right). \quad (1.31)$$

Usaremos as seguintes definições:

$$F_1^i(x_i) = M W_1^i(\nu, Q^2) \text{ e } F_2^i(x_i) = \nu W_2^i(\nu, Q^2). \quad (1.32)$$

Então, escrevemos funções F_1^i e F_2^i para o i -ésimo parton, dotado de uma fração de momento e massa do próton, o qual pode ser um quark, um antiquark ou um glúon. Assim, definamos a distribuição de momento partônica $f_i(x)$, a probabilidade de um parton conter uma fração x do momento do próton:

$$\sum_i \int_0^1 dx x f_i(x) = 1, \quad (1.33)$$

sendo que a soma \sum_i é feita sobre todos os tipos de partons, inclusive sobre aqueles que não interagem com o fóton. Integrando e somando as funções para um parton (Eq. 1.32),

¹Observe que $Q^2/2m_i = Q^2/2x_i M = x/x_i$.

ponderando-as pelo quadrado da fração de cargas, temos as funções de estrutura de um próton:

$$F_1(x) = \sum_i \int_0^1 dx_i e_i^2 x_i f_i(x_i) F_1^i = \sum_i \int_0^1 dx_i e_i^2 x_i f_i(x_i) \frac{x}{2x_i^2} \delta\left(1 - \frac{x}{x_i}\right) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (1.34)$$

$$F_2(x) = \sum_i \int_0^1 dx_i e_i^2 x_i f_i(x_i) F_2^i = \sum_i \int_0^1 dx_i e_i^2 x_i f_i(x_i) \delta\left(1 - \frac{x}{x_i}\right) = x \sum_i e_i^2 f_i(x) \quad (1.35)$$

Podemos notar que os glúons não contribuem e que

$$\boxed{2xF_1(x) = F_2(x) = x \sum_i e_i^2 f_i(x)} \quad (1.36)$$

que é a chamada relação de Callan-Gross [40], que é uma consequência dos quarks terem $\text{spin}=\frac{1}{2}$. Veremos o porquê disso mais detalhadamente adiante.

Assim, o sinal de que há partículas pontuais, isto é, sem estrutura, dentro do hádron é que, para pequenos comprimentos de onda do fóton (altas energias), comecemos a observar espalhamento por partículas livres (Figura 1.2), porque o espalhamento é elástico.

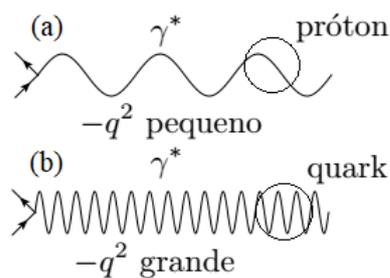


Figura 1.2: (a) Espalhamento elástico $ep \rightarrow ep$, no qual o fóton sonda somente o próton. (b) Espalhamento profundamente inelástico no qual o fóton virtual, agora com comprimento de onda muito menor do que o tamanho do próton, sonda o interior do próton. Fonte: próprio autor.

Então, em resumo, para $Q^2 \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow \infty$, a expressão formal do escalonamento

de Bjorken[41] é

$$MW_1(\nu, Q^2) \longrightarrow F_1(x), \quad (1.37)$$

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \longrightarrow F_2(x), \quad (1.38)$$

A independência de $\nu W_2(\nu, Q^2)$ com relação a $Q^2 \rightarrow \infty$ para valores fixos de x fora prevista por Bjorken [41] e, pioneiramente, demonstrada pelos experimentos da colaboração SLAC-MIT [42] (Figura 1.3).

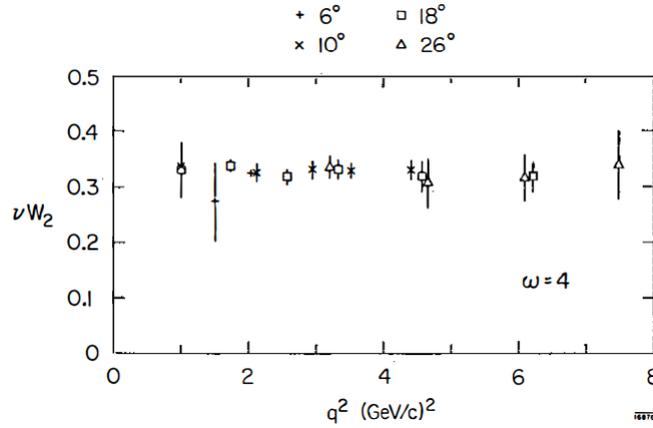


Figura 1.3: Gráfico de $\nu \times$ (função de estrutura) por Q^2 . Observe a independência de νW_2 com relação a Q^2 . Fonte: Kendall [43].

Ao considerarmos a seção diferencial do espalhamento de fóton por uma partícula escalar, isto é, spin 0, veríamos que (Capítulo 3 de [44])

$$\nu W_2^{(0)}(\nu, Q^2) = \delta(1 - Q^2/2M\nu) \quad (1.39)$$

$$W_1^{(0)}(\nu, Q^2) = 0. \quad (1.40)$$

Vamos relacionar agora as funções de estrutura com a seção de choque entre um próton e um fóton virtual de energia $q^0 = \nu$ e polarização ϵ_λ (helicidade λ), $\gamma^* p \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^* p \rightarrow X}^{total} = & \frac{1}{(2K)(2M)} \sum_X \left(\frac{1}{2} \sum_s \right) \int \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^3 p'_n}{(2\pi)^3 2E'_n} \right) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p + q - \sum_i k_i) e^2 \langle p, s | j_\mu^\dagger | X \rangle \langle X | j_\nu | p, s \rangle \epsilon_\lambda^{\mu*} \epsilon_\lambda^\nu. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Como antes, na Equação 1.10, separamos o tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$ e, então, escrevemos

$$\sigma_{\gamma^*p \rightarrow X}^{total} = \frac{4\pi^2\alpha}{\nu} W_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^{\mu*} \epsilon_\lambda^\nu. \quad (1.42)$$

Pela razão do fóton ser virtual, ele não é limitado a possuir somente dois estados transversais de polarização e devemos contabilizar a polarização longitudinal. Então, tomando a direção de \mathbf{q} na direção z , podemos especificar os vetores de polarização ϵ_λ^μ do fóton virtual como:

$$\epsilon_{\lambda=\pm 1}^\mu = (0; -1, \mp i, 0)/\sqrt{2}, \quad (1.43)$$

$$\epsilon_{\lambda=0}^\mu = (\sqrt{Q^2 + \nu^2}; 0, 0, \nu)/\sqrt{Q^2}, \quad (1.44)$$

portanto,

$$\sigma_T = \frac{1}{2}(\sigma_{+1} + \sigma_{-1}) = \frac{4\pi^2\alpha}{\nu} W_1(\nu, Q^2), \quad (1.45)$$

$$\sigma_L = \sigma_0 = \frac{4\pi^2\alpha}{\nu} \left[-W_1(\nu, Q^2) + \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2}\right) W_2 \right]. \quad (1.46)$$

Assim, observamos que $\frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{W_2(1+\nu^2/Q^2)}{W_1} - 1$ é, intrinsecamente, relacionada a natureza dos quarks, porque a razão W_2/W_1 varia conforme o caso: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} W_2/W_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2M/\nu \rightarrow 0$, para spin- $\frac{1}{2}$ (Equações 1.29 e 1.30); $W_2/W_1 \rightarrow \infty$, para o caso de vértice entre fóton e partícula de spin-0 (Equações 1.39 e 1.40), que não pode absorver um fóton de helicidade $\lambda = \pm 1$, então $\sigma_T = 0$. Em resumo, escrevendo W_1 e W_2 conforme as Equações 1.37 e 1.38, $F_1(x) = MW_1(\nu, Q^2)$ e $F_2(x) = \nu W_2(\nu, Q^2)$, temos que

$$F_1(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ para pártons de spin } 0, \\ \left(\frac{1}{2x}\right) F_2(x), \text{ para pártons de spin-}\frac{1}{2}. \end{array} \right\} \quad (1.47)$$

No caso de pártons com spin- $\frac{1}{2}$, valeria a prevista relação de Callan-Gross em que $\nu W_2(\nu, Q^2)$ se tornaria independente de Q^2 para valores fixos de x quando $\nu, Q^2 \rightarrow \infty$ (antecipado por Bjorken [41]), haveria a implicação experimental que $\sigma_L/\sigma_T \rightarrow 0$, prontamente observada nos experimentos do Acelerador de partículas e Stanford [45], [43]. Depreende-se, portanto, que os pártons são férmions de spin $\frac{1}{2}$.

De acordo com 1.36, as funções de estrutura estão relacionadas com as funções de distribuições de párton, $q_i(x)$, pela seguinte maneira: $F_2(x) = \sum_i x e_i^2 (q_i(x) + \bar{q}_i(x))$, onde a soma \sum_i refere-se ao número de sabores (*up, down, charm, strang, top e bottom*) ativos no próton e $q_i(x)$ é a função de distribuição do quark de sabor i . Por exemplo, para o espalhamento *ep*, teríamos que

$$\frac{F_2^{ep}(x)}{x} = \frac{4}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9}(s(x) + \bar{s}(x)) + \dots, \quad (1.48)$$

tal que $u(x) = q_u(x)$ (u de quark *up*), $d(x) = f_d(x)$ etc. Similarmente, a função de estrutura do nêutron, $F_2^{en}(x)$, seria montada bastando fazer a troca $u \leftrightarrow d$. Nesse contexto, o modelo partônico implica, conseqüentemente, nas chamadas *regras de soma* às quais as distribuições de quarks devem satisfazer. Logo, a regra de soma das cargas no nêutron nos dá que

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) \right] = 0, \quad (1.49)$$

enquanto que a soma das cargas no próton nos dá que

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) \right] = 1, \quad (1.50)$$

e, enquanto para os quarks de outros sabores (i (= *strange, charme e heavy*)), porque não há presença efetiva deles no núcleon, teríamos

$$\int_0^1 dx (q_i(x) - \bar{q}_i(x)) = 0. \quad (1.51)$$

É conveniente definirmos distribuições de quarks de valência e de mar do próton como

$$u_V = u - \bar{u}, \quad d_V = d - \bar{d}, \quad c_V = c - \bar{c} = 0, \quad s_V = s - \bar{s} = 0, \dots \quad (1.52)$$

$$u_S = 2\bar{u}, \quad d_S = 2\bar{d}, \quad c_S = 2\bar{c}, \quad s_S = 2\bar{s} \quad (1.53)$$

Podemos combinar as equações e escrever as regras de soma como:

$$\int_0^1 dx(u_v(x)) = 2, \quad \int_0^1 dx(d_v(x)) = 1 \quad (1.54)$$

e também:

$$\int_0^1 dx x \left(\sum_i (q_i(x) + \bar{q}_i(x)) + g(x) \right) = 1. \quad (1.55)$$

Obviamente, há a condição de que a soma total do momento dos pártons deve consistir no momento total do próton:

$$\sum_i \int_0^1 dx x f_i(x) = 1. \quad (1.56)$$

Voltemos a nos focar no escalonamento de Bjorken. A Figura 1.4 nos dá uma moderna visualização da função de estrutura F_2 , na qual é evidenciada a dependência de F_2 com x . Observe que o escalonamento de Bjorken funciona muito bem para x próximo de 1 e vai se deteriorando conforme x vai a 0:

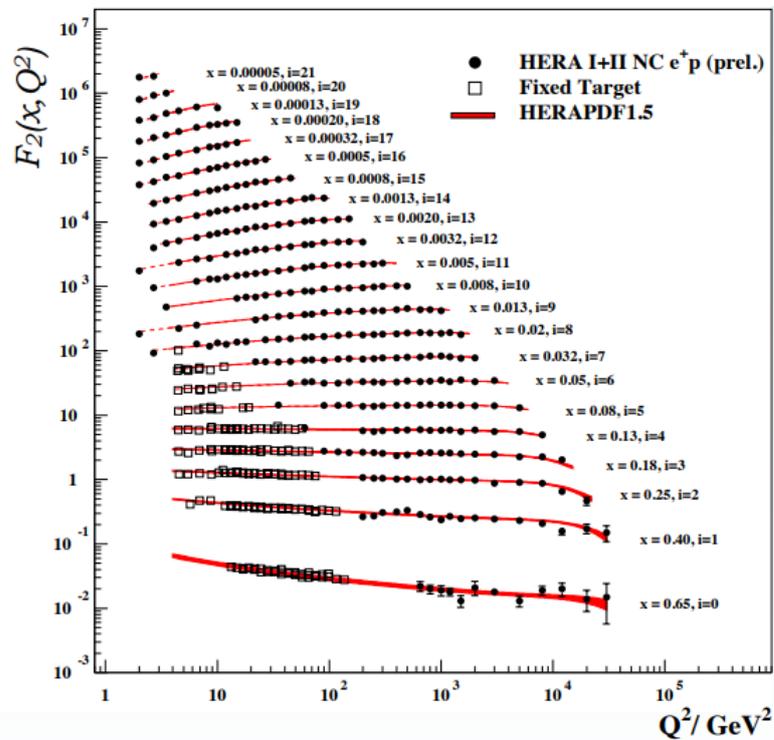


Figura 1.4: Desvios do escalonamento de Bjorken. Conforme Q^2 aumenta, a função de estrutura $F_2(x, Q^2)$ aumenta para x pequeno e diminui para x grande. Fonte: Colaboração H1 em [46]

O que significaria a quebra do elucidativo escalonamento de Bjorken? A predição

de que $F_i(x, Q^2) \rightarrow F_i(x)$, no limite em que Q^2 e $\nu \rightarrow \infty$ com x fixo, relaciona-se com a condição de que o momento transversal do párton com relação ao do próton é pequeno, isto é, não consideramos a existência do momento euclidiano \mathbf{p}_T que, procedendo desta maneira, a seção de choque passaria a depender de uma escala energética.

Deixemos claro que vamos calcular o diagrama de emissão de um bóson de calibre (um glúon) ao dizermos "considerar o momento transversal". Façamos uma breve desvio com o objetivo mor de elucidar a quebra do escalonamento de Bjorken, ou seja, o que está além das simples partículas pontuais.

A essa altura lógica da "teoria de pártons", poderíamos aventar a possibilidade de que os quarks fossem campos espinoriais de uma teoria de Yang-Mills sob um grupo $SU(N)$ [3]. Nesse contexto, em síntese e simplificação histórico-teórica, após o entendimento da maneira correta de se gerar as massas dos férmions, que é pelo conceito de quebra espontânea de simetria do vácuo [6]), temos a seguinte lagrangiana para os quarks e, agora, para os mediadores da interação entre eles - os bósons de spin 1 chamados de glúons - em uma teoria não abeliana de calibre:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.57)$$

onde o espinor composto dos tripleto de cores ($r=red$, $g=green$ e $b=blue$) de quarks é

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_g \\ \Psi_b \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

o tensor de campo é

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.59)$$

e a derivada covariante de calibre é

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (1.60)$$

onde A_μ ($A_\mu = \frac{1}{2}\lambda^a A_\mu^a$) é uma matriz 3×3 no espaço de cores formada pelos oito campos de calibre A_μ^a e os geradores hermitianos $(t^a)_{ij} = (\lambda^a)_{ij}/2$ ($a = 1\dots 8$) do grupo $SU(3)$ - tal que $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ - [47][48] agindo nos índices ij de Ψ_i e Ψ_j . Omitimos o restante

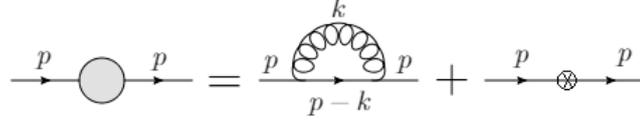


Figura 1.5: Diagrama de autoenergia do quark a ordem α_S (ou g^2). O segundo diagrama representa o contratermo. Fonte: próprio autor

da parte da lagrangiana a respeito das interações eletrofracas, pois esta dissertação foca em Cromodinâmica Quântica. A lagrangiana 1.57 está escrita em função de campos e parâmetros nus, isto é, não em função de campos e quantidades (a massa, por exemplo), indicadas pelo sufixo r de renormalizados, que absorvam, por multiplicação por apropriadas constantes renormalização de campo (Z 's), as divergências de autoenergia, tal como a divergência da autoenergia a ordem α_S (1-loop) do propagador do quark (Figura 1.5):

$$A_\mu^a = Z_3^{1/2} A_{r\mu}^a, \quad \Psi = Z_2^{1/2} \Psi_r, \quad g = Z_g g_r, \quad m = Z_m m_r. \quad (1.61)$$

Portanto, utilizamos quantidades renormalizadas por constantes de renormalização de campo na lagrangiana, o que inclui calcular $g_r = Z_r^{-1}(\mu)g$, procedimento este que não é o simples calcular considerar amplitudes de autoenergias, mas, sim, de se levar em conta que μ é meramente um artefato matemático presente na amplitude de Feynman renormalizada, Γ , do qual uma previsão física não deve depender - $d\Gamma/d\mu = 0$: a Equação de Grupo de Renormalização (proveniente do desenvolvimento de $d/d\mu$) aplicada nas amplitudes de autoenergias do quark, glúon e da energia de três pontos do férmion (ou vértice) nos fornece que [49][50][51]

$$\beta = \mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_F \right), \quad (1.62)$$

onde N é a dimensão do grupo $SU(N)$ da teoria não-Abeliana e n_F o número de férmions contidos nela. Para CDQ, $n_F = 6$ e $N = 3$ e β é negativo, isto é, g é decrescente:

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} b \ln(Q^2/\mu^2)}, \quad \text{ou } \alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} b \ln(Q^2/\mu^2)}, \quad (g^2 = 4\pi\alpha_S) \quad (1.63)$$

sendo que $b = \left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_F \right)$. Assim, caso $b > 0$, como e o caso da CDQ, g vai a zero con-

forme a escala de renormalização μ vai a infinito, a chamada *liberdade assintótica*, Figura 1.6. O loop de quarks fornece uma contribuição positiva ($\frac{2}{3}n_F$) à função β ("blindagem"), enquanto os loops de glúons ($\frac{11}{3}N$) fornece uma contribuição negativa ("antiblindagem"). O resultado 1.63 é a aproximação obtida considerando correções de 1 loop e, portanto, não é completo.

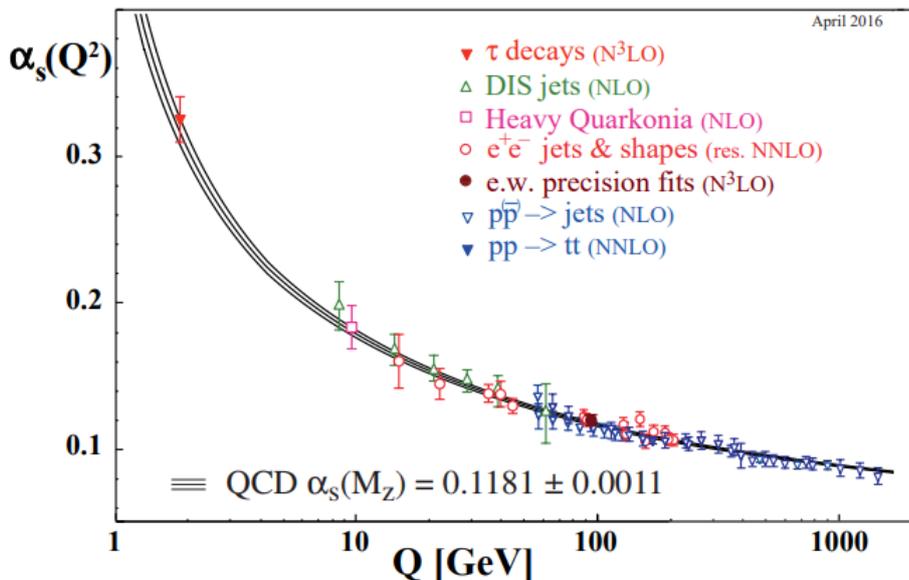


Figura 1.6: Para $Q^2 \sim e$ e $\alpha_S \sim 1$, a teoria perturbativa de CDQ é mais válida. Geralmente, $Q^2 \sim 5 - 10 \text{ GeV}^2$ é o limite inferior para a aplicação da teoria perturbativa à CDQ. Fonte: *Particle Data Group* [52]

1.2 Fatorização

Voltando para a questão do escalonamento de Bjorken, considerando a emissão de um pártion glúon (regra de Feynman da Figura 1.7), no capítulo 11 de Halzen e Martin [53], no contexto do estudo do espalhamento $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ (um EDP com a emissão de um glúon), é discutido que a CDQ possui singularidades quando dois pártions se tornam colineares, ou porque um deles se torna suave (um glúon cujo momento vai a zero), ao passo que há observáveis em que as divergências infravermelhas (colineares e suaves, de emissão ou "reais") precisamente se cancelam com as correções virtuais de vértices - teorema de Kinoshita-Lee-Nauenberg e o de Bloch-Nordsieck (na Eletrodinâmica Quântica)[54, 55] -, resultando em um observável seguro contra divergências no infravermelho. No Apêndice A e porque aparecem como termos logarítmicos. Nesse contexto, as predições

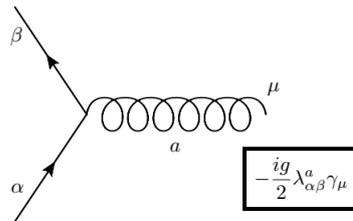


Figura 1.7: Regra de Feynman para o vértice quark-antiquark na CDQ. Fonte: próprio autor

da CDQ seriam restritas somente a observáveis sem divergências no infravermelho. Felizmente, há uma grande classe de seções de espalhamento que se **fatoriza** em uma parte perturbativamente calculável segura no infravermelho de pequenas distâncias, e a parte de longas distâncias (quanto às divergências suaves, relativa a emissão de glúons) que é não perturbativa.

Os chamados observáveis seguros no infravermelho ainda são calculados na CDQ perturbativa; todavia, precisamos estender o poder preditivo da teoria para os processos que possuem emissão de bremsstrahlung gluônico. Sob esse contexto, o teorema da fatorização da CDQ [56] preceitua que partes singulares de longa-distância podem ser removidas da seção de choque partônica e fatorizadas dentro das distribuições de pártons dos hádrons, consistentemente, em todas as ordens da expansão perturbativa (em todas as ordens de α_S), através de uma escala de fatorização μ (diferente da escala de renormalização, relativa à segurança ultravioleta).

Assim, a física de curta e a de longa distância separam-se pela escala de fatorização μ , simplificadamente: um párton com momento transversal menor do que μ pertenceria a estrutura hadrônica, a distribuição partônica o absorveria; por outro lado, pártons com momento transversal maior do que μ seriam contabilizados no processo de espalhamento duro, pela seção de choque partônica (curta-distância) $\hat{\sigma}$.

A seção de choque de pártons, $\hat{\sigma}$, é calculada por teoria de perturbação, que não depende do tipo de hádron. Em seguida, as distribuições de pártons, por outro lado, são propriedades particulares do hádron - contudo, universais no sentido de independência do tipo de processo de espalhamento, cuja origem é não perturbativa e obtidas experimentalmente. Pictoricamente, a Figura 1.8(a) ilustra a seção de choque hádron-hádron:

$$\sigma = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 q_i(x_1, \mu^2) q_j(x_2, \mu^2) \hat{\sigma}_{ij}. \quad (1.64)$$

No caso do EPI, Figura 1.8(b), teríamos que

$$\sigma_{\text{EPI}} = \sum_j \int dx q_j(x, \mu^2) \hat{\sigma}_{\gamma^* j}. \quad (1.65)$$

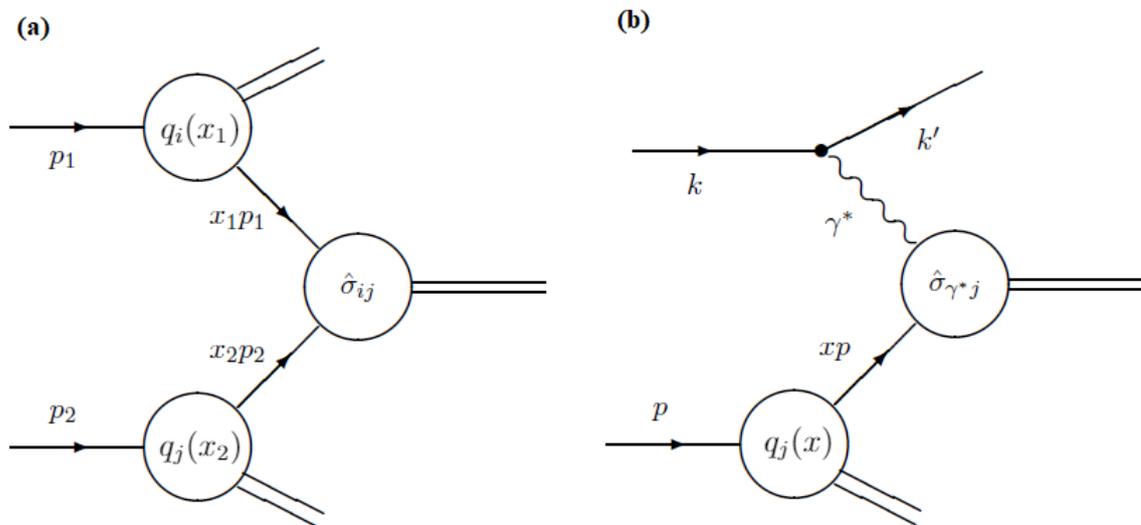


Figura 1.8: (a) Esquema de fatorização da seção de choque hádron-hádron. (b) Fatorização do EDP. Fonte: próprio autor

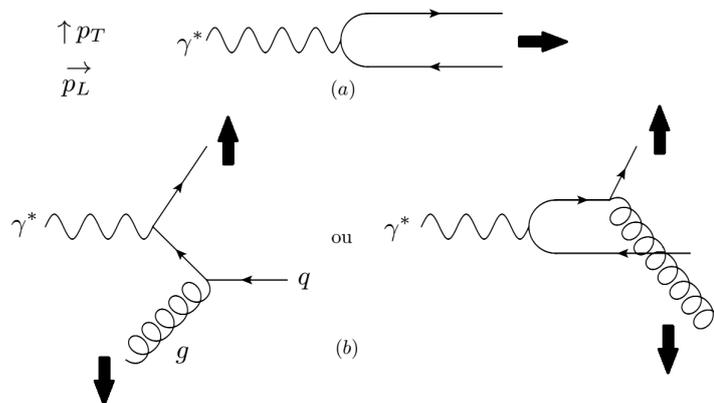


Figura 1.9: (a) Situação em que p_T no espalhamento $\gamma^* q \rightarrow q$. (b) $p_T \neq 0$ porque há p_T relativo entre quark e glúon emitido. Fonte: próprio autor

A variação da distribuição de pártons Δq presente em F_2 , causada por levar em conta a radiação de glúon, conforme preceitua a regra de Feynman do diagrama da Figura 1.9, apresenta-se como (seção 10.1-5 do livro Halzen e Martin [53])

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_i^2 (q_i(x) + \Delta q_i(x, Q^2)) \quad (1.66)$$

e é dada por:

$$\Delta q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_S}{2\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) \int_x^1 \frac{dy}{y} q_i(y) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right), \quad (1.67)$$

em que m^2 é introduzido como um corte para regularizar a divergência quando $p_T \rightarrow 0$, e $P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)$ (função de desdobramento)², que representa a probabilidade de um quark emitir um glúon e quark com uma fração z do momento do quark "pai". Notemos que há uma divergência para $1-z \rightarrow 0$, na qual o glúon se torna suave e sua emissão não pode ser distinguida do caso em que não há emissão.

Reescrevendo 1.67 em forma integro-diferencial, sem especificar cada i -ésimo parton, substituindo $t = \log \left(\frac{Q^2}{m^2} \right)$, teríamos a seguinte equação

$$\frac{q(x, Q^2)}{dt} = \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\alpha_S}{2\pi} q \otimes P_{qq} = I_{qq}(x), \quad (1.68)$$

que, basicamente, relaciona um quark com fração de momento x (distribuição $q(x, Q^2)$) com o ser proveniente de um quark ancestral com momento $y + dy$ ($q(y, Q^2)$ no integrando) que radiou um glúon. Portanto, em CDQ, a radiação de glúons viola o escalonamento de Bjorken logaritmicamente. Consequentemente, por causa da radiação de glúons, as funções de estrutura evoluem com relação à escala de energia Q . Conforme Q^2 aumenta, mais e mais glúons são irradiados, o que, em contrapartida, desdobra em pares $\bar{q}q$; assim, à medida que x diminui, as distribuições de quarks de valência são suavizadas em contrapartida do crescimento das distribuições de glúons e do mar de $\bar{q}q$.

A expressão para F_2 (omitindo-se a soma \sum_i),

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = e^2 \left[q(x) + I_{qq}(x) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right], \quad (1.69)$$

depende do parâmetro de corte m e diverge quando $m \rightarrow 0$. Reescrevendo-a, temos que

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = e^2 \underbrace{\left[\underbrace{q(x) + I_{qq}(x) \ln \frac{\mu^2}{m^2}}_{=q(x, \mu^2)} + I_{qq}(x) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right]}_{=q(x, Q^2)}, \quad (1.70)$$

²A convenção é: P_{ab} , a=filho e b=pai.

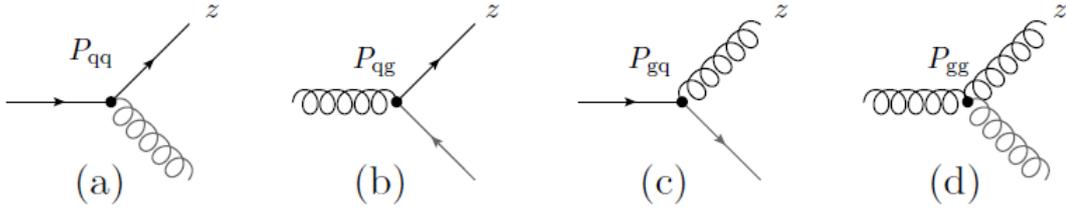


Figura 1.10: (a) Quark "filho" proveniente do desdobramento de um quark parental em um glúon. Quando o glúon torna-se suave ($1 - z \rightarrow 0$), não há distinção entre os quarks e uma singularidade em $\hat{\sigma}$ aparece. (b) Glúon que se desdobra em um par quark-antiquark. Não há singularidade aqui porque sempre podem ser distinguidos glúon e quarks. (c) Desdobramento de quark em glúon. (d) Desdobramento de um glúon em dois glúons. Como no caso $q \rightarrow qg$, singularidade aparece quando $1 - z \rightarrow 0$. Fonte: próprio autor.

onde $q(x, \mu^2)$ é a distribuição de pártons renormalizada a escala de fatorização μ - separando a parte singular dependente de m , mas não de Q^2 , da parte que depende de Q^2 , mas não de m . F_2 é, então, à ordem α_S

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = e^2 \left[q(x, \mu^2) + \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, \mu^2) \otimes P_{qq} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right]. \quad (1.71)$$

Obviamente, F_2 não deve depender da escolha da escala de fatorização. Consequentemente, temos que

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{x e^2 \partial \ln \mu^2} = \frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} + \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\frac{\partial q(y, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} - q(y, \mu^2) \right] P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) = 0. \quad (1.72)$$

Mantendo a consistência da ordem de teoria de perturbação - $\partial f / \partial \ln \mu^2$ é da ordem de α_S - negligenciamos o termo de ordem α_S^2 e temos que

$$\frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, \mu^2) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) + \mathcal{O}(\alpha_S^2), \quad (1.73)$$

que descreve a evolução da distribuição de quarks: integrando, numericamente, a partir de uma $q(x, \mu_0^2)$ inicial. A Equação 1.73 é chamada de Equação DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi) com a função de desdobramento P_{qq} , obtida pela equação de grupo de renormalização aplicada a distribuição de quark. Em se tratando as funções de distribuição de glúons, mais funções de desdobramento seriam incluídas (Figura 1.10):

Então, até agora, vimos três tipos diferentes de escala que não devem ser con-

fundidas: quanto a renormalização no UV, fatorização e a própria escala do processo de espalhamento Q^2 sob interesse. No espalhamento e^+e^- , a energia do centro de massa seria a escala de espalhamento; no EPI, $Q^2 = (l - l')^2$; na produção de jatos, o momento transversal seria a escala do processo.

1.3 As equações de evolução para as densidades de pártons

Como dito antes, as funções de distribuição de pártons, PDF (sigla inglesa de *parton distribution function*), $q_i(x, \mu^2)$, onde $i = q$ (quark) ou g (glúon) e, tipicamente, μ é a escala de energia de sondagem (a energia Q em que o processo de espalhamento ocorre). A PDF q_i corresponde, para um dado x , à densidade de párton i no próton integrada sobre o momento transversal p_T até μ , cuja evolução em μ é descrita na CDQ pelas equações de DGLAP. Estas podem ser deduzidas em teoria de perturbação [57–59], totalizando $2n_f + 1$ (n_f é o número de sabores ativos) equações de PDFs acopladas entre si:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \log \mu^2} = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{2\pi} \sum_{j=-n_f}^{n_f} \left(P_{ij} \otimes q_j \right), \quad (1.74)$$

onde

$$i, j = \begin{cases} 1, \dots, n_f, & \text{quarks,} \\ 0, & \text{glúon,} \\ -1, \dots, -n_f, & \text{antiquarks.} \end{cases}$$

P_{ij} descreve o desdobramento partônico de $j \rightarrow i$ que, por sua vez, pode ser escrito em função de uma série de potência da constante de acoplamento forte α_S . A aproximação $N^{(n)}LO^3$, em função da variável de Bjorken x :

$$P_{ij}(\alpha_S, x) = \sum_{n=0} \left(\frac{\alpha_S}{4\pi} \right)^n P_{ij}^n(x), \quad (1.75)$$

e, atualmente, P_{ij} foi obtida até a terceira ordem ($n=3$) [60].

³NLO: do inglês *next-to-leading order*.

As funções de desdobramento possuem as seguintes simetrias em ordem dominante:

$$P_{g\bar{q}_i} = P_{gq_i} \equiv P_{gq}, \quad P_{\bar{q}_i g} = P_{q_i g} \equiv P_{qg}, \quad P_{\bar{q}_i \bar{q}_j} \equiv P_{qj} \delta_{ij}. \quad (1.76)$$

Explorando essas propriedades, podemos desacoplar as equações ao definirmos as equações de evolução em termos das PDFs singleto e não-singleto:

$$q^S = \sum_{i=1}^{n_{cf}} (q_i - \bar{q}_i), \quad q^{NS} = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i + \bar{q}_i), \quad (1.77)$$

veríamos que as equações de evolução DGLAP assumem a seguinte forma simplificada:

$$\frac{\partial q^{NS}}{\partial \log \mu^2} = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{2\pi} P_{qq} \otimes q^{NS}, \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} \begin{pmatrix} q^S \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & 2n_f P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q^S \\ g \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Em ordem dominante ($n=0$), as funções de desdobramento são [58]:

$$P_{qq}(z) = C_2(R) \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(z-1) \right] + \mathcal{O}(\alpha_S), \quad (1.80)$$

$$P_{gg}(z) = 2C_2(G) \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{3} \frac{T(R)}{C_2(G)} \right) \delta(z-1) \right] + \mathcal{O}(\alpha_S), \quad (1.81)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2) + \mathcal{O}(\alpha_S), \quad (1.82)$$

$$P_{gq}(z) = C_2(R) \frac{1+(1-z)^2}{z} + \mathcal{O}(\alpha_S), \quad (1.83)$$

onde $C_2(G)$ é o operador de Casimir para a representação adjunta G do grupo de cor; $C_2(R)$ e $T(R)$, para a representação R dos férmions. No caso de $SU(N)_{cor}$ com n_f sabores, eles são dados por [58]:

$$C_2(G) = \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{a,b,c} c_{abc} c_{abc} = N, \quad (1.84)$$

$$C_2(R) = \frac{1}{N} \sum_a t^a t^a = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad (1.85)$$

$$T(R) \delta_{ab} = \text{Tr}(t^a t^b) = \frac{n_f}{2} \delta_{ab}, \quad (1.86)$$

e, finalmente, a notação $[F(x)]_+$ define uma distribuição, tal que para qualquer função teste $f(x)$,

$$\int_0^1 dx f(x)[F(x)]_+ = \int_0^1 dx (f(x) - f(1))F(x), \text{ ou, equivalentemente} \quad (1.87)$$

$$[f(x)]_+ = f(x) - \delta(1-x) \int_0^1 f(z) dz. \quad (1.88)$$

Tal como as regras de soma 1.51, 1.54 e 1.55, as funções de desdobramento $P_{B \rightarrow A}$ também possuem suas regras de soma. Ao calcular a derivada com relação a $\log \mu^2$ da Equação 1.51, temos a primeira:

$$\int_0^1 P_{qq}(x) dx = 0. \quad (1.89)$$

Contabilizando todas as integrações das distribuições de densidade de momento de todos os pártons (i refere-se ao sabor), devemos obter a conservação do momento total

$$\sum_i \int_0^1 dx x \left(\frac{dq^i}{d\tau} + \frac{d\bar{q}^i}{d\tau} + \frac{dG}{d\tau} \right) = 0, \quad (\tau = \log \mu^2) \quad (1.90)$$

obtemos que

$$\int_0^1 [P_{qq}(x) + P_{gq}(x)] x dx = 0, \quad \int_0^1 [2n_f P_{qg}(x) + P_{gg}(x)] x dx = 0. \quad (1.91)$$

1.4 Considerações finais

Conforme já dito anteriormente, as distribuições de densidades de pártons medidas em EPI são objetos universais, isto é, uma vez extraídas por dados de algum tipo de processo, podem ser utilizadas no cálculo de outros processos. As PDFs evoluídas pelas equações DGLAP são essenciais para o cálculo da seção de choque. Pelo Teorema de Fatorização [61], a seção de choque de $pp \rightarrow X$ é dada pela equação 1.64, de tal maneira que absorva as divergências infraavermelhas, que são logarítmicas. Então, poderíamos calcular a seção de choque hadrônica como uma convolução entre funções de origem perturbativa e não-perturbativa. A primeira, que carrega informação sobre o espalhamento em curtas distâncias obtida de maneira perturbativa pelas regras de Feynman; a segunda,

a função não-perturbativa, seria alguma das PDFs e as funções de fragmentação, que, basicamente, dizem a probabilidade de um párton sofrer um tipo específico de hadronização.

Como seria um “duplo espalhamento inelástico”? As divergências infravermelhas ainda surgiriam como logarítmicas na seção de choque? No cálculo de um duplo EDP, como se houvesse dois fótons virtuais na Figura 1.8(b) produzindo dois jatos a partir do espalhamento com dois quarks, surge a questão sobre o quanto esses dois quarks seriam correlacionados: se provenientes de um mesmo glúon (totalmente correlacionados) ou totalmente independentes (como duas seções de espalhamento duro incoerentes). No próximo capítulo, discutiremos esse último problema no contexto da dupla contagem no Espalhamento Duplo de Pártons.

Capítulo 2

O Espalhamento Duplo de Pártons

Neste capítulo focaremos em construir um paralelo, análogo das definições do capítulo anterior, no caso em que contamos com dois pártons ao mesmo tempo, isto é, no cenário de espalhamento duplo de pártons.

Tenhamos em mente que, de maneira prática, estaremos saindo da situação da Figura 2.1, o espalhamento simples - no qual visualizamos somente um processo duro perturbativo partônico convoluído com uma parte (PDFs) de origem não-perturbativa e de longas distâncias [62, 63] -, em direção à situação esquemática da Figura 2.2, o espalhamento duplo - no qual devemos contabilizar dois subprocessos duros perturbativos.

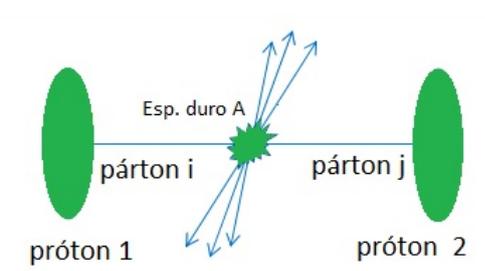


Figura 2.1: Situação que contém um espalhamento duro A . Fonte: próprio autor.

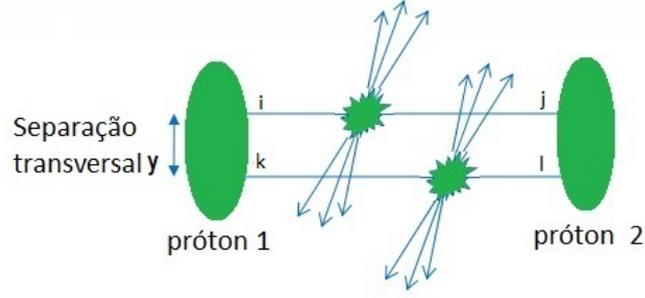


Figura 2.2: Situação que contém dois subprocessos de espalhamento duro A e B, no qual um parton i proveniente do próton 1 interage com o parton j do próton 2. Fonte: próprio autor.

Nesta dissertação, vamos ater-nos às mais essenciais definições do Espalhamento Duplo de Pártons (EDP) e suas analogias com o ESP tais como: o comportamento de potência de σ_{EDP} , a definição da distribuição dupla de pártons e a apresentação de sua equação de evolução, o problema da contagem dupla e o desdobramento de curta distância.

O momento transversal euclidiano de um quadri vetor q será denotado por \mathbf{q} ou, mais posteriormente no capítulo de Resultados, como q_T . Escreveremos quadri vetores nas coordenadas de cone de luz, nas quais $u^\pm = (u^0 \pm u^3)/\sqrt{2}$ para qualquer quadri vetor u^μ e escreveremos a sua parte transversal em negrito, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Assumiremos que a componente transversal do momento do próton \mathbf{p} seja igual a zero e que seja feita a média sobre a sua polarização.

Vamos considerar a reação $p\bar{p} \rightarrow V_1 + V_2 + X$, tal que V_i pode ser algum bóson eletrofraco W^\pm , Z ou γ^* . A energia do centro de massa é $s = (p + \bar{p})^2$. Denotamos os quadrimomentos dos bósons por q_i , cujo respectivo invariante é $q_{i\mu}q_i^\mu = Q_i^2$ e rapidez $Y_i = \frac{1}{2} \ln(q_i^+/q_i^-)$.

Definem-se x_i e \bar{x}_i em função da rapidez Y_i de um quadrimomento $q_i = (q_i^+, q_i^-, \mathbf{q}_T)$ como

$$x_i = \sqrt{\frac{Q_i^2}{s}} e^{Y_i}, \quad \bar{x}_i = \sqrt{\frac{Q_i^2}{s}} e^{-Y_i}, \quad (2.1)$$

e sobre o espaço de fase de cada bóson, $\int \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$, teríamos a seguinte substituição

$$d^4 q_i = \det(\text{matriz de Jacobi de } q_i \rightarrow x_i \bar{x}_i) dx_i d\bar{x}_i d^2 \mathbf{q}_i = \frac{s}{2} dx_i d\bar{x}_i d^2 \mathbf{q}_i. \quad (2.2)$$

Um conceito que aparecerá será o de *twist* de um operador: no contexto da expansão de produto de operadores, no caso em especial ao produto temporalmente ordenado de duas correntes hadrônicas $TJ^\mu(z)^\dagger J^\nu(0)$, semelhante a que aparece na constante de estrutura $W_{\mu\nu}$ no EPI (Equação 1.29), podemos fazer a seguinte expansão para operadores compostos

$$A(z)B(0) = \sum_{\tau=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{\tau,n}(z^2) z^{\mu_1} \dots \mu^{\mu_n} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^\tau, \quad (2.3)$$

onde a soma é sobre os spins n do operador \mathcal{O}^τ , $C_{\tau,n}$ são os chamados coeficientes de Wilson e são números- c , $\tau = d_{\mathcal{O}} - n$ é o *twist* (d é a dimensão do operador). Todas as quantidades são funções de um ponto de renormalização μ^2 , elipsado na notação. Os operadores \mathcal{O}^τ são sem traço, compostos, normalmente ordenados e finitos para $z^2 \rightarrow 0$. Os coeficientes de Wilson possuem singularidades da forma

$$C_{\tau,n}(z^2) \sim \left(\frac{1}{z^2} \right)^{[d_A + d_B - \tau]/2}. \quad (2.4)$$

As singularidades mais fortes aparecem justamente no contexto em que $\tau = d_{\mathcal{O}} - n$ é mínimo. *Twists* mais altos correspondem a mais fatores de Λ^2/Q^2 . Portanto, se expandirmos as correntes hadrônicas em termos de correntes de quarks livres ($d_\psi = 3/2$ para campos de Dirac), da forma $\mathcal{O} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, teríamos que $\tau = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 2$.

2.1 Definições básicas

As equações DGLAP para distribuições de múltiplos pártons já eram estudadas [64] muito antes do atual interesse em espalhamento duplo de pártons. A DPD, sigla em inglês de *Double Parton Distribution*, depende das frações de momento x_1 e x_2 dos pártons a_1 e a_2 , respectivamente, e da distância transversal \mathbf{y} . Para um próton não polarizado com momento p [65], representado pela bolha verde da Figura 2.3, a DPD seria

$$F_{a_1 a_2}(x_1, x_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}) = 2p^+(x_1 p^+)^{-n_1} (x_2 p^+)^{-n_2} \int \frac{dz_1^-}{2\pi} \frac{dz_2^-}{2\pi} dy^- e^{i(x_1 z_1^- + x_2 z_2^-)p^+} \times \langle p | \mathcal{O}_{a_2}(0, z_2) \mathcal{O}_{a_1}(y, z_1) | p \rangle, \quad (2.5)$$

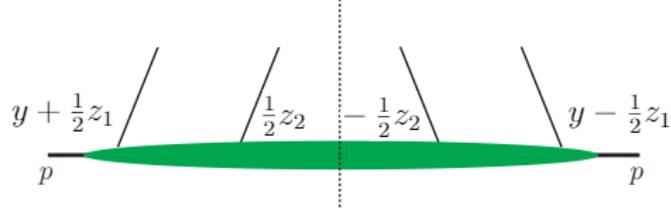


Figura 2.3: Pártons com as suas variáveis de posição. A linha pontilhada representa a linha de corte do estado final. Fonte: o próprio autor.

onde $n_i = 1$ se o parton i for um glúon e $n_i = 0$ para um quark/antiquark, z_i é a posição do i -ésimo parton, y corresponde a a separação entre os partons. Para mais detalhes a respeito de como surgem as variáveis z_i e y , consultar o Apêndice C. No caso de fatorização colinear, usaremos $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = 0$.

Temos os operadores *twist-2*

$$\mathcal{O}_{a_i}(y_i, z_i) = \bar{q}_i(y_i - \frac{1}{2}z_i)\Gamma_{a_i}q_i(y_i + \frac{1}{2}z_i)|_{z_i^+ = y_i^+ = 0}, \quad (2.6)$$

tal que Γ_{a_i} são os projetores de polarização: $\Gamma_q = \frac{1}{2}\gamma^+$ para um quark não-polarizado; $\Gamma_{\Delta q} = \frac{1}{2}\gamma^+\gamma^5$, quark longitudinalmente polarizado; $\Gamma_{\delta q}^j = \frac{1}{2}i\sigma^{j+}\gamma^2$, quark transversalmente polarizado. Para o caso de campos gluônicos, consultar a Ref. [66].

Alguns detalhes a respeito de \mathcal{O}_{a_i} : o primeiro, ele é definido em função de campos nus não-renormalizados; o segundo, a expressão 2.6 foi escrita no calibre de cone de luz $A^+ = 0$ e, no caso de outros calibres, para que a definição do operador permanecesse invariante de calibre, o uso das chamadas *linhas de Wilson* seria necessário [66]; por último, cada parton a_i possui um índice de cor em seu campo q_i .

A definição de DPD na Equação 2.6 nasce como uma extensão natural da definição de distribuição de partons simples dentro do contexto do cálculo da função de correlação Φ com quatro partons adentrando um espalhamento [66]. A função de correlação Φ entre n partons leva em conta $2n$ campos:

$$\Phi \sim \langle p|\bar{T}\left[\phi(-\frac{1}{2}\xi_n)\prod_{i=1}^{n-1}\phi(y_i - \frac{1}{2}z_i)\right]T\left[\phi(\frac{1}{2}\xi_n)\prod_{i=1}^{n-1}\phi(y_i + \frac{1}{2}z_i)\right]|p\rangle. \quad (2.7)$$

A função de distribuição dupla¹, DPD, é proveniente de uma definição que envolve

¹Tradução de *Double Parton Scattering*, à qual referenciaremos pela sigla DPD.

uma particular função de correlação $\Phi(l_i, l'_i)$ entre 2 pártons, explicada no Apêndice C. Essa função de correlação reduz-se a descrição do Espalhamento Simples, caso descreva a correlação de somente um párton: $\Phi(l_1)$ recai no elemento de matriz $\langle p | \bar{\psi}(0) \psi(x) | p \rangle$, que define a ordinária PDF após uma apropriada transformada de Fourier [67]. Para mais detalhes a respeito da função de correlação, consultar o Apêndice C. Dessa forma, a DPD envolve o elemento de matriz de oito campos espinoriais φ , tal como foi feita a análise do tensor hadrônico no caso de espalhamento simples partônico, em uma distribuição *twist-4*, isto é, fazendo a expansão de produto de operadores, o operador associado ao coeficiente de Wilson mais singular [68–70].

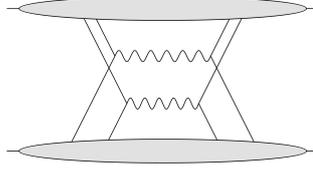


Figura 2.4: Diagrama tipo 2v2. As elipses preenchidas simbolizam os prótons em colisão.

Observe que a linha de corte do diagrama (imagine uma linha exatamente no meio do diagrama), isto é, o que separa a amplitude de sua amplitude complexa conjugada ($A_1 A_2^*$), está oculta. Cada próton contribui com um par de pártons ao mesmo tempo. Fonte: o próprio autor

Usaremos as DPDs no diagrama da Figura 2.4, em que um par de pártons de um próton interage com um par do outro próton seria chamado de "*twist-4*" ou "*2v2*". Analogamente ao caso de ESP, poderíamos escrever uma fórmula de fatorização para um processo EDP [65]. No referencial de centro de massa próton-próton com momento $p(\bar{p})$, em um processo com produtos de partículas V_1, V_2 e resíduo X , $pp \rightarrow V_1 + V_2 + X$, tal como o da Figura 2.4, teríamos a seção de choque segundo uma fórmula de fatorização colinear:

$$\frac{d\sigma_{EDP}}{dx_1 dx_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2} = \frac{1}{C} \sum_{a_1 a_2 b_1 b_2} \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dx'_1}{x'_1} \int_{x_2}^{1-x'_1} \frac{dx'_2}{x'_2} \int_{\bar{x}_1}^{1-\bar{x}_2} \frac{d\bar{x}'_1}{\bar{x}'_1} \int_{\bar{x}_2}^{1-\bar{x}'_1} \frac{d\bar{x}'_2}{\bar{x}'_2} \times \hat{\sigma}_{a_1 b_1}(x'_1 \bar{x}'_1 s, \mu_1^2) \hat{\sigma}_{a_2 b_2}(x'_2 \bar{x}'_2 s, \mu_2^2) \int d^2 \mathbf{y} F_{b_1 b_2}(\bar{x}'_i, \mathbf{y}; \mu_i) \Phi^2(y\nu) F_{a_1 a_2}(x'_i, \mathbf{y}; \mu_i), \quad (2.8)$$

onde μ_1 e μ_2 são as escalas de fatorização, \mathbf{y} é a distância transversal entre pártons, C é um fator de simetria ($C = 1$ se os produtos espalhados finais são diferentes ou $C = 2$, caso sejam iguais), a soma é feita sobre todos os pártons com polarizações possíveis (a_i e b_i dos dois prótons), $F_{a_1 a_2}$ e $F_{b_1 b_2}$ são funções de distribuições partônicas duplas generalizadas

com dois pártons vindos de cada próton (caso não fossem em função de \mathbf{y} , não seriam chamadas "generalizadas", mas somente de distribuições partônicas duplas); $\hat{\sigma}_{a_i b_j}$, a seção de choque partônico; x_i e \bar{x}_i , a frações de momento linear partônico. A Figura 2.5 é um esquema da fatorização 2.8.

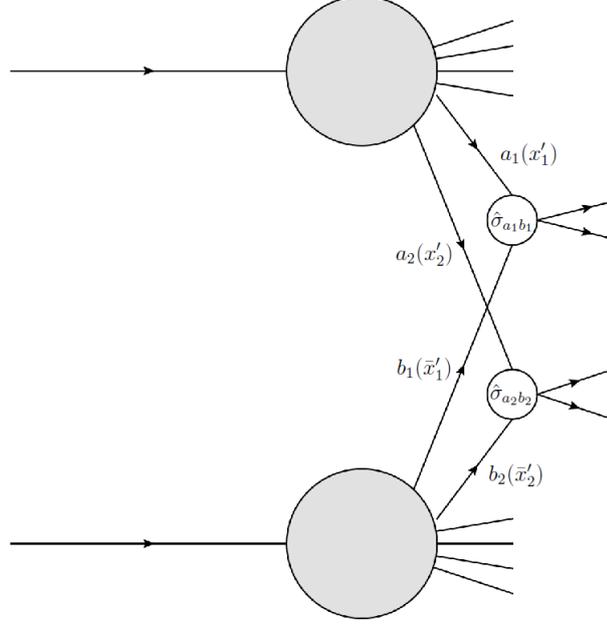


Figura 2.5: Esquematização de um processo de espalhamento duplo.. Fonte: o próprio autor.

Adicionalmente, há o esquema de fatorização dependente do momento transversal, TMD (*Transverse-Momentum dependent*):

$$\frac{d\sigma_{EDP}}{dx_1 dx_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d^2\mathbf{q}_1 d^2\mathbf{q}_2} = \frac{1}{C} \sum_{a_1 a_2 b_1 b_2} \hat{\sigma}_{a_1 b_1}(Q_1^2, \mu_1^2) \hat{\sigma}_{a_2 b_2}(Q_2^2, \mu_2^2) \times \int \frac{d^2\mathbf{z}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{z}_2}{(2\pi)^2} d^2\mathbf{y} e^{-i(\mathbf{q}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{q}_2 \mathbf{z}_2)} \Phi(y_+ \nu) \Phi(y_- \nu) F_{b_1 b_2}(\bar{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{y}; \mu_i) F_{a_1 a_2}(x_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{y}; \mu_i), \quad (2.9)$$

onde $\Phi(u)$ é uma função de corte, e y^\pm são uma espécie de separação transversal y (também aparece na expressão 2.8) escrita em coordenadas de cone de luz que aparece na fatorização TMD, cuja necessidade será discutida posteriormente.

É importante notarmos que para grandes valores de s atingidos no LHC, ambos x_i e \bar{x}_i são pequenos, caso Y_i ou q_i^2 não sejam grandes.

Observamos que $F(x_i, \mathbf{y}) \sim y^{-2}$ [33, 64, 65] e está associada ao fato de que a distância transversal \mathbf{y} entre os operadores \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 ir a zero. Este novo mecanismo adicional de

desdobramento gera um termo não-homogêneo para as equações de evolução das DPDs. A origem física desta divergência é em razão de que a validade do formalismo EDP baseia-se na região $y \gg 1/Q_i$ e, fora dessa região, o cálculo de seções de espalhamento por EDP resulta em integrais divergentes[66].

Em ordem dominante em α_S , para y pequeno, para DPDs colineares ($\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = 0$), a contribuição para uma DPD provém do desdobramento perturbativo "1 \rightarrow 2"(um párton dando origem a dois pártons) e pode ser computada como[65, 66]:

$$F_{a_1 a_2, spl, pt}(x_1, x_2, \mathbf{Y})|_{spl, pt} = \frac{1}{y^2} \frac{\alpha_S}{2\pi^2} P_{a_0 \rightarrow a_1 a_2} \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2} \right) \frac{f_{a_0}(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}, \quad (2.10)$$

onde f_{a_0} é uma PDF não polarizada e $P_{a_0 \rightarrow a_1 a_2}$, uma função de desdobramento ($P_{g \rightarrow q\bar{q}} = P_{qg}$, por exemplo). Por essa razão, a divergência em y possui a interpretação de um desdobramento perturbativo (por isso as siglas *spl* e *pt* subscritas (*pertubative splitting*)) e, portanto, a justificativa física do nome "desdobramento de curta distância". Observamos que a divergência em y a ser regulada por uma função de corte *ad hoc* $\Phi(y\nu) = \Phi(u)$ (ν é um parâmetro não físico cuja função é acerto dimensional com y) que satisfaz $\Phi(u) \rightarrow 0$ para $u \rightarrow 0$ e $\Phi(u) \rightarrow 1$ para $u \gg 1$. $\Phi(u)$ poderia ser $\Theta(u - b_0)$ com $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ ou $1 - e^{-u^2/4}$. Dessa forma, a função Φ regula a divergência ao remover a região $y \ll 1/\nu$ do regime no qual EDP é definido. A literatura não registra a determinação matemática unívoca de Φ .

2.2 O problema da dupla contagem

O problema da dupla contagem consiste basicamente no cálculo em torno do diagrama da Figuras 2.7 (b):

- poderia ser a situação em que os pares de pártons de cada próton fossem originários de duas DPDs (as caixas vermelhas sinalizam essa interpretação, Figura 2.7 (b));
- ou poderia tratar-se da situação de espalhamento simples de pártons no qual contabilizaríamos a seção de choque partônica com vértice glúon-quark-antiquark por meio de um desdobramento perturbativo.

Logo, em ambos formalismos, estaríamos contabilizando o mesmo diagrama. A estratégia já proposta na literatura envolve criar uma esquema de subtrações das seções de choque, como veremos a seguir, no qual é proposta a função de corte Φ , função que regula divergência em $y \rightarrow 0$, situação contextualizada no problema da dupla.

A fatorização da seção de choque em subprocesso de espalhamento duro e em quantidade não-perturbativa (distribuições de pártons) é baseada na expansão do parâmetro Λ/Q , no qual Λ denota a escala hadrônica. Na fatorização colinear, podemos dizer que as seções de choque do EDP possuem ordem de potência de Λ^2/Q^4 enquanto que as seções de choque do ESP, na ordem de $1/Q^2$ [65]. Os seguintes diagramas serão os mais relevantes no problema de dupla contagem [65]:

- O diagrama dos ESP, Figura 2.6(a);
- O diagrama da Figura 2.6(b) que é o caso DPD mais simples, com $y \gg 1/Q$ (pártons não-correlacionados), também conhecido como $2v2$ e é calculado por duas DPDs;
- O diagrama da Figura 2.6(c) chamado de $tw4$, que inclui a interação de dois pártons de um lado com apenas um párton do outro;
- O diagrama $1v1$, Figura 2.7(b), construído com duas DPDs. A particularidade de diagrama $1v1$ é que as distribuições duplas foram geradas a partir do desdobramento de uma distribuição simples neste caso. Chamaremos de “ $1v1,pt$ ” a aproximação de desdobramento perturbativo (via DGLAP) deste diagrama, (Equação 2.10);
- O caso $2v1$ Figura 2.7(c), análogo ao diagrama $1v1$, que também possui parte perturbativa “ $2v1,pt$ ”.

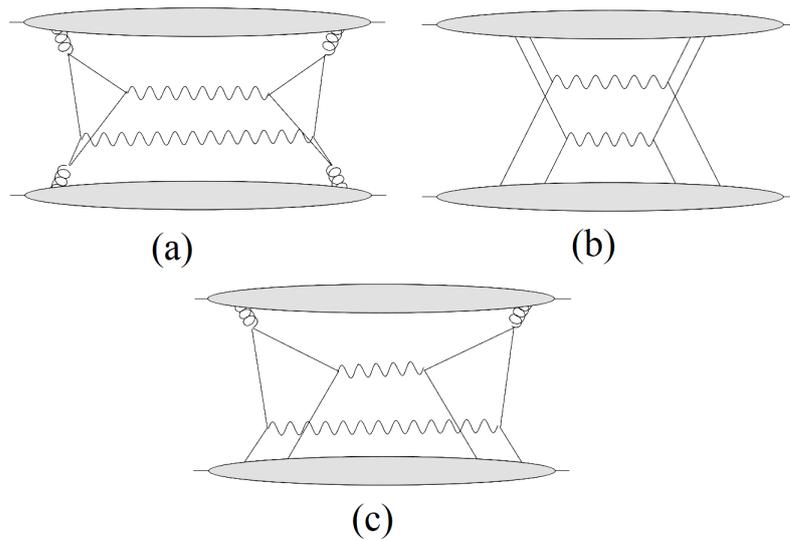


Figura 2.6: (a) ESP, diagrama 1v1, caso houvesse caixas vermelhas, indicaria um processo de EDP. (b) Caso 2v2 de EDP. (c) Uma PDF (uma distribuição *twist 2* colinear) de um próton com uma DPD (*twist 4*) do outro próton. $\sigma_{1v1,pt}$ possui ordem de potência de Λ^2/Q^4 . Fonte: próprio autor.

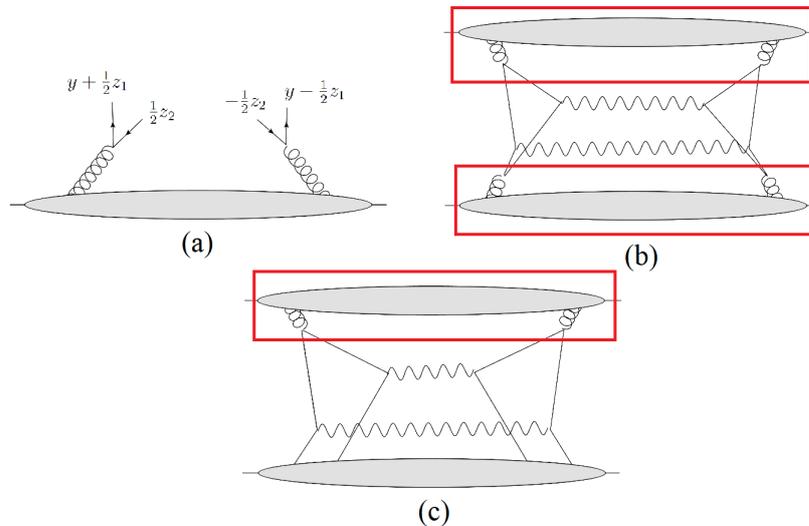


Figura 2.7: (a) Desdobramento $g \rightarrow q\bar{q}$. (b) Contribuição 1v1. (c) Contribuição 2v1. As caixas em vermelho representam DPD com párton emergindo delas dotados de virtualidades muito menores do que Q . A função reguladora Φ corta a região de $y \ll 1/Q$. Fonte: o próprio autor

Como mencionado antes, em ordem dominante de α_S , a Equação 2.10 descreve a contribuição do mecanismo de desdobramento $1 \rightarrow 2$, conforme a Figura 2.7(a), e substituindo-a na equação da seção de choque diferencial 2.8, a necessidade de Φ remedia a integral divergente sobre \mathbf{y} (observe que há o termo $\int \frac{d^2\mathbf{y}}{y^2}$). A Figura 2.7(b) nos mostra a situação em que, em cálculo de DPD, ocorre um desdobramento $1 \rightarrow 2$ em diagramas do tipo 1v1, no qual as virtualidades das linhas internas são muito menores do que Q

(mas ainda muito maiores do que Λ) e, por isso, também que sinalizamos as DPDs dos prótons com caixas vermelhas no qual ocorre o desdobramento perturbativo $1 \rightarrow 2$.

Nesse contexto de desdobramento, há as seguintes dependências: y^{-2} , y^{-1} e y^0 (sem divergência) para os diagramas do tipo 1v1, 2v1 e 2v2, respectivamente [66].

Assim, o problema se mostra manifesto: diagramas EDP do tipo 1v1 (Figura 2.7 (b)) somam-se com correções de mesma ordem $\alpha^2\alpha_S$ do ESP, 2v1 também poderiam se somar com a sua contraparte descrita pelo mecanismo ESP (o tw4) etc. Esse é o problema da contagem dupla, cuja solução, proposta em [65], descreveremos a seguir.

O primeiro passo seria definir a região do espaço de fase onde o mecanismo EDP contribuiria efetivamente. Isso já foi resolvido com a introdução da função de corte para $y \gg 1/\nu$. O próximo passo será o de fazer o seguinte esquema de subtração

$$\sigma_{tot} = \sigma_{EDP} - \sigma_{1v1,pt} + \sigma_{ESP} - \sigma_{2v1,pt} + \sigma_{tw4}, \quad (2.11)$$

onde $\sigma_{EDP} = \sigma_{1v1} + \sigma_{2v2} + \sigma_{2v1}$ engloba todas as contribuições para a seção de choque do EDP cujos cálculos são feitos pelas DPDs.

Esse esquema de subtração é feito de tal maneira que os termos dependentes do parâmetro não-físico ν se cancelam. σ_{ESP} e σ_{tw4} são os únicos que não dependem de ν . Novamente, retomemos que $\sigma_{1v1,pt}$ é construído ao se substituir as DPDs na fórmula de seção de choque 2.8 pela aproximação perturbativa de desdobramento 2.10. De igual maneira, então, $\sigma_{2v1,pt}$ é obtida ao se substituir somente uma das duas DPDs pela sua aproximação perturbativa de desdobramento e a outra por sua aproximação de curto alcance dada em [66] e que se cancela com σ_{2v1} para $y \sim 1/Q$. Assim, efetivamente: na região $y \sim 1/Q$, a aproximação de EDP tende a divergir e $\sigma_{EDP} \approx \sigma_{1v1,pt} + \sigma_{2v1,pt}$ e, portanto, resultaria que $\sigma_{tot} \approx \sigma_{ESP} + \sigma_{tw4}$, como seria o apropriado a curtas distâncias: cálculo de contribuições ESP mais correções de DPD a curta distância. Por outro lado, na região $y \gg 1/Q$, a contribuição dominante para σ_{ESP} vem de loops do tipo 1v1 na região em que a aproximação EDP é válida, tal que $\sigma_{ESP} \approx \sigma_{1v1,pt}$ e $\sigma_{tw4} \approx \sigma_{2v1,pt}$ (são diagramas calculados na mesma região de espaço de fase) e, portanto, $\sigma_{tot} \approx \sigma_{EDP}$.

Observe que, para $y \gg 1/Q$, σ_{tot} foi escrito sem a contribuição de σ_{ESP} porque ele σ_{tot} é relativo aos diagramas (ESP e EDP) da mesma ordem de potência (Λ^2/Q^2) em

torno da região com virtualidades internas da ordem de Λ . Diagramas de espalhamento simples de pártons a menores ordens de perturbação ou a mesma ordem de perturbação mas ordem de potências maiores devem ser contabilizados também.

2.3 DGLAP para o Espalhamento Duplo de Pártons

Seja $F_{a_1 a_2}$ uma DPD de pártons a_1 e a_2 , com frações de momento x_1 e x_2 , escalas de fatorização μ_1 e μ_2 , respectivamente, e P_{ab} uma função de desdobramento de DGLAP. Teríamos para dois quarks não polarizados que as equações de evolução *homogêneas* são dadas por [64, 71]:

$$\frac{dF_{qq}(x_1, x_2, y; Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_S(Q)}{2\pi} \left[P_{qq} \otimes_1 F_{qq} + P_{qg} \otimes_1 F_{gq} + P_{qq} \otimes_2 F_{qq} + P_{qg} \otimes_2 F_{gq} \right], \quad (2.12)$$

onde

$$P_{ab}(x_2) \otimes_1 F_p^{bc}(x_1, x_2, y; Q) = \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dz}{z} P_{ab}\left(\frac{x_1}{z}\right) F_p^{bc}(z, x_2, y; Q), \quad (2.13)$$

$$P_{ab}(x_1) \otimes_2 F_p^{bc}(x_1, x_2, y; Q) = \int_{x_2}^{1-x_1} \frac{dz}{z} P_{ab}\left(\frac{x_2}{z}\right) F_p^{bc}(x_1, z, y; Q), \quad (2.14)$$

Na Ref. [66] é mostrado que a DPD $F(x_i, \Delta)$ no espaço dos momentos é obtida da transformada de Fourier em dimensão $D = 4 - 2\epsilon$ de DPD $F(x_i, \mathbf{y})$, no esquema de renormalização \overline{MS} para a divergência de desdobramento do EDP. Em resumo, surge o inédito fato de que as DPDs no espaço de momentos, por causa do desdobramento perturbativo, possuem um termo *não-homogêneo* na evolução de suas DPDs dado pela Equação 2.10. Vejamos com mais cuidado.

Tal como foi escrita a seção de choque do caso de espalhamento simples partônico (Equação 2.8) pela fatorização colinear, podemos, após integrar o diferencial da Equação 2.8, obter o paralelo para o caso do espalhamento duplo partônico que envolve dois subprocessos duros A e B sondados a respectivas escalas Q_A e Q_B , cujas seções partônicas são $\hat{\sigma}_{ij}$, entre os pártons de sabores i e j , calculadas por teoria de perturbação:

$$\begin{aligned} \sigma_{A,B}^{EDP} = \frac{1}{C} \sum_{ijkl} \int F_{ij}(x_1, x_2, \mathbf{y}; Q_A, Q_B) \hat{\sigma}_{ik}^A(x_1, \bar{x}_1) \hat{\sigma}_{jl}^B(x_2, \bar{x}_2) \\ \times F_{kl}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \mathbf{y}; Q_A, Q_B) dx_1 dx_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d^2 \mathbf{y}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

onde dizemos que $F_{ij}(x_1, x_2, \mathbf{y}; Q_A, Q_B)$ é a densidade de probabilidade generalizada de se achar um par de pártons de sabores i e j , separados pelo parâmetro de impacto \mathbf{y} e com frações de momento longitudinal x_1 e x_2 , respectivamente.

Pressupondo que $F_{ij}(x_1, x_2, \mathbf{y}; Q_A, Q_B) \simeq F(\mathbf{y})F_p^{ij}(x_1, x_2; Q_A, Q_B)$, isto é, que F_{ij} possa ser decomposto em uma distribuição transversal e uma longitudinal independentes entre si e, após integrar $\int [F(\mathbf{y})]^2 d^2\mathbf{y} = \sigma_{\text{eff}}^{-1}$ (Equação 0.2), concluímos que

$$\sigma_{A,B}^{EDP} = \frac{1}{C\sigma_{eff}} \sum_{ijkl} \int F_p^{ij}(x_1, x_2; Q_A, Q_B) \hat{\sigma}_{ik}^A(x_1, \bar{x}_1) \hat{\sigma}_{jl}^B(x_2, \bar{x}_2) \times F_p^{kl}(\bar{x}_1, \bar{x}_2; Q_A, Q_B) dx_1 dx_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \quad (2.16)$$

Para x_i 's moderadamente baixos de pártons pertencentes ao mar de quarks, em [72], é mostrado que $F_p^{ij}(x_1, x_2; Q_A, Q_B) \simeq F_p^i(x_1, Q_A) F_p^j(x_2, Q_B)$ (pártons independentes) que chegaríamos na aproximação da Equação 0.1 após separar todas as integrais. No entanto, para $x_1 + x_2 = 1$ (os dois pártons constituiriam sozinhos a totalidade do momento do próton), obviamente, deveríamos ter que $F_p^{ij}(x_1, x_2; Q_A, Q_B) = 0$, mas as PDFs independem dessa condição e permanecem finitas. Snigirev [73], diferenciando a DPD com relação a Q , obteve,

$$\frac{dF_p^{j_1 j_2}(x_1, x_2; Q)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \left[(\text{DGLAP dupla homogênea})^{j_1 j_2} \right] + \sum_{j'} F_p^{j'}(x_1 + x_2; Q) \frac{1}{x_1 + x_2} P_{j' \rightarrow j_1 j_2} \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2} \right). \quad (2.17)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 2.17 está associado com as mudanças na PDF devido a processos de desdobramentos naturais à estrutura da CDQ, dado pela primeira parte homogênea. O segundo termo, o termo heterogêneo, que representa o crescimento na DPD devido ao párton solitário (descrito pela PDF) com momento fracional $x_1 + x_2$ se desdobrar em um par com momento fracional x de um particular sabor. A função $P_{j \rightarrow j_1 j_2}(x)$, novamente, é dada por alguma DGLAP em desejada aproximação ordem dominante em α_S .

A solução da Equação 2.17 [73, 74] contém a função $F^{j_1 j_2'}(x_1, x_2, 0)$, que seria conhecida caso somente se fosse resolvido o problema de confinamento da CDQ. Aproximando-a

pelo ansatz de fatoração

$$F_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, 0) = F_h^{j_1}(x_1, 0) F_h^{j_2}(x_2, 0) \theta(1 - x_1 - x_2), \quad (2.18)$$

na Ref. [73], é mostrado que a solução não manteria essa forma fatorada. Isto é, caso, inicialmente, as duas distribuições de pártons sejam fatoradas (como no ansatz acima) a alguma escala em particular Q , inevitavelmente, após a evolução, $F_h^{j_1 j_2}$ não possuiria a mesma forma fatorada em $Q' \neq Q$.

Na Ref. [65], é mostrado que, quando as frações x_1 e x_2 são pequenas, a evolução da DGLAP tem uma grande influência sobre o mecanismo de desdobramento do EDP, tal que a dependência em $1/y$ pode ser suavizada, o que aumenta a contribuição da região $y \gg 1/\nu$ para $\sigma_{1\nu 1}$ e $\sigma_{2\nu 1}$.

Semelhantemente ao caso de ESP, existem regras de soma no EDP [75]. Em [76] são provadas as seguintes regras para distribuições normalizadas no esquema \overline{MS} :

$$\sum_{a_2=q,\bar{q},g} \int_0^{1-x_1} dx_2 x_2 F^{a_1 a_2}(x_1, x_2; Q) = (1 - x_1) F^{a_1}(x_1; Q), \quad (2.19)$$

que é a afirmação de que ao observarmos um párton com momento fracional igual a x_1 , então, devemos, obrigatoriamente, obter o complementar de momento fracional de x_1 do párton a_1 (igual a $1 - x_1$, o momento total do párton a_2) vezes a função de distribuição de párton do tipo a_1 , o que concorda com a regra básica de probabilidade sobre dois eventos independentes;

$$\int_0^{1-x_1} dx_2 F^{a_1 a_2}(x_1, x_2; Q) = \begin{cases} N_{a_1 v} F^{a_2} p(x_2; Q), & \text{quando } a_2 \neq a_1 \text{ ou } \bar{a}_1 \\ (N_{j_1 v} - 1) F_p^{a_2}(x_2; Q), & \text{quando } a_2 = a_1 \\ (N_{j_1 v} + 1) F_p^{a_2}(x_2; Q), & \text{quando } a_2 = \bar{a}_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

onde $N_{a_1 q}$ é um fator combinatorial e $F_{a_1 a_2}(x_1, x_2, \mathbf{0}) = F_{a_1 a_2}(x_1, x_2, \Delta = \mathbf{0})$, isto é, a DPD $F_{a_1 a_2}$ no espaço de momento Δ e com o momento $\Delta = \mathbf{0}$. $N_{a_1 v}$ é o número de quarks de "valência" a_1 dentro do próton e $\bar{a}_1 = a_1 - \bar{a}_1$. A primeira expressão, 2.19, A Equação 2.20 é uma afirmação a respeito da contagem de sabores, isto é, caso observemos um quark(antiquark) de sabor a_2 , o número de valência dos quarks restantes (aumenta).

Uma consequência prática do fato de existir equações DGLAP para o EDP é

a de que cálculos de diagramas de ordem seguinte a dominante tornam-se acessíveis, algoritmicamente, bastando substituir as equações DGLAP da ordem $N^n LO$ a fim de ser possível calcular as equações DGLAP dessa ordem e, então, poder computar diagramas em mais alta ordem de potência α_S . Isso ocorre porque, desde o princípio, montamos a definição de DPDs através de uma extensão lógica do caso ESP, isto é, começando pela definição de função de correlação entre pártons que, logicamente, reproduz o caso ESP, como podemos observar em [66]. Atualmente, o caso de cálculo das equações DGLAP da EDP à ordem seguinte a dominante (NLO) foi feito em [77].

Entretanto, o problema da dupla contagem e a sua solução revelam que uma maneira não usual de obter um cálculo de seção de choque pelo Teorema de Fatorização – observe que subtraímos seções de choque de outras na expressão 2.11. Assim, a formulação de EDP discutida sugere uma forma diferente de usar o Teorema de Fatorização, teorema este provado para o ESP [56] para os seguintes casos (hádrons= A, B, \dots):

- EPI, lépton + $A \rightarrow$ lépton' + B ,
- $e^+ + e^- \rightarrow A + X$,
- processos de leptogênese e de produção dos bósons eletrofracos (processos Drell-Yan),
- $A + B \rightarrow$ jato + X e
- $A + B \rightarrow$ quark pesado + X .

Portanto, a fim de calcularmos um espalhamento, precisaríamos de uma DPD (ou dPDF), como a fornecida pelo pacote numérico GS09 de DPD[78] que corresponde a uma rede de valores DPD para valores $10^{-6} < x_1, x_2 < 1$ e $1\text{GeV}^2 < Q^2 < 10^9\text{GeV}^2$. Inexoravelmente, ainda precisaríamos estar munidos de uma seção de choque partônica calculada pela aplicação da Teoria de Pertubação à CDQ.

Capítulo 3

Resultados

O nosso objetivo é o cálculo de uma seção de choque partônica, a fim de investigarmos o problema da dupla contagem. Focaremos no processo $\gamma\gamma g \rightarrow q\bar{q}$, com fótons independentes do tipo espaço, isto é, tais que $q_{1\mu}q_1^\mu = -Q_1^2$, $q_{2\mu}q_2^\mu = -Q_2^2$ e energia de centro de massa igual a s . Com o intuito de adentrar no cálculo da seção de choque de $\gamma\gamma g \rightarrow q\bar{q}$, serão considerados: todas as amplitudes de ordem $\alpha^2\alpha_S$; as considerações cinemáticas; a expressão matemática delas após aplicar as regras de Feynman; resultados analíticos.

3.1 As amplitudes a serem consideradas

Analisaremos o processo $g \rightarrow q\bar{q}$, de ordem $\alpha^2\alpha_S$ (NLO), sondado por dois fótons do tipo espaço, Figura 3.1: um glúon proveniente de um próton desdobra-se em um par $q\bar{q}$, o que seria um processo de espalhamento simples; por outro lado, caso o glúon estivesse dentro do próton (fosse contabilizado em uma PDF de glúon), estaríamos no cenário de um processo de espalhamento no qual um par $q\bar{q}$ provém do próton.

O primeiro passo será o de contabilizar todas as amplitudes de mesma ordem ($\alpha^2\alpha_S$) para esse processo (são seis amplitudes diferentes), tal que $|M|^2 = |M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6|^2$, e estão desenhadas nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4.

Dados esses diagramas, vamos agora denotar as variáveis cinemáticas: q_1 , q_2 e k como os momentos entrantes dos dois fótons e do glúon, respectivamente, $p_1(p_2)$ o

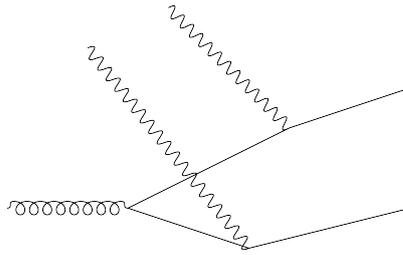


Figura 3.1: Dois fótons interagem com um quark e um antiquark provenientes de um glúon. O quark(antiquark) poderia ser representado pela linha de férmion de cima ou a de baixo, por isso não foram postas flechas. Fonte: o próprio autor.

momento do férmion(antiférmion) o qual será imaginado como sendo quark(antiquark) da primeira geração ou segunda geração.

As amplitudes foram organizadas de maneira tal que sejam iguais caso troquemos um fóton pelo outro se eles possuírem a mesma virtualidade (explicaremos melhor essas simetrias na seção 3.3). Dessa maneira, temos que M_1 com M_2 , M_3 com M_4 e M_5 com M_6 .

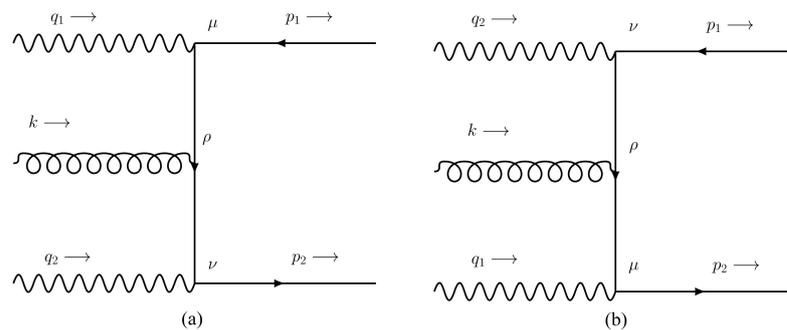


Figura 3.2: (a) Amplitude M_1 . (b) Amplitude M_2 . Fonte: o próprio autor.

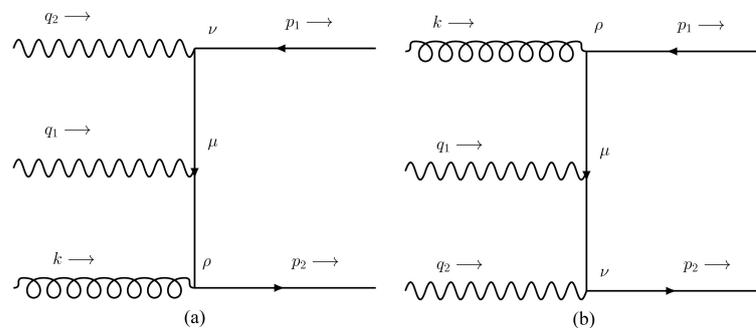


Figura 3.3: (a) Amplitude M_3 . (b) Amplitude M_6 . Fonte: o próprio autor.

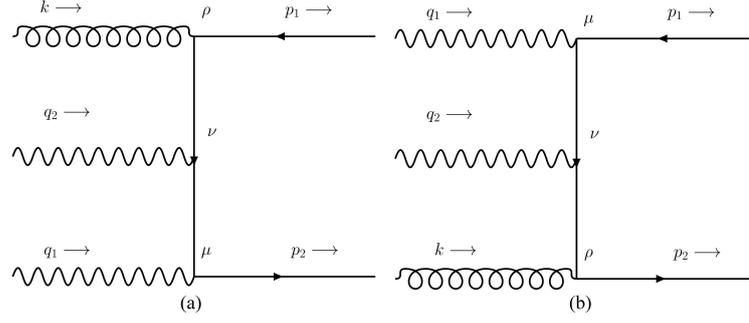


Figura 3.4: (a) Amplitude M_4 . (b) Amplitude M_5 . Fonte: o próprio autor.

3.2 Cinemática

Escrevemos os quadrivetores nas coordenadas de cone de luz: $p = [p^+, p^-, \mathbf{p}_T]$, onde

$$p^+ = \frac{p_0 + p_z}{\sqrt{2}}, \quad (3.1)$$

$$p^- = \frac{p_0 - p_z}{\sqrt{2}}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{p}_T = [0, p_x, p_y, 0]; \quad (3.3)$$

adotaremos θ como sendo o ângulo entre \mathbf{p}_T e o eixo z , eixo no qual estaria o feixe de partículas do acelerador. A escala do processo aqui descrito é ordens de grandeza maior do que a massa dos férmions envolvidos (quarks da primeira e segunda gerações), destarte, faremos o limite $m_{\text{férmions}} \rightarrow 0$. Novamente, os fótons possuirão virtualidades $q_1^2 = -Q_1^2$ e $q_2^2 = -Q_2^2$, i.e., os fótons estão fora da camada de massa e são do tipo espaço. Denotaremos como z a fração de $\sqrt{s}/\sqrt{2}$ carregada pela componente q_1^- do fóton de quadrimomento q_1 , isto é, $q_1^- = z\sqrt{s}/\sqrt{2}$.

Uma das vantagens do uso de coordenadas do cone de luz, além da facilidade de se identificar o elemento invariante p^2 , é a de identificar \mathbf{p}_T e, em nossa análise de EDP, o momento transversal cumpre um papel importante, porque

- \mathbf{p}_T tem que ser muito menor do que Q , a escala do processo duro, tal que $\Lambda \ll \mathbf{p}_T \ll Q$ [65]. Usaremos $\sqrt{s} = 7,0$ TeV (escala típica do LHC[79]);
- é possível que a variável conjugada de Fourier de \mathbf{p}_T seja o parâmetro b [66], que é a separação transversal entre pártons dentro de um próton, e

- b , por sua vez, é relacionado ao desdobramento perturbativo $P_{i \rightarrow jk}$.

Tendo em mente essas considerações, definamos:

– o momento do glúon sendo

$$k = [k^+, 0, 0, 0], \quad (3.4)$$

tal que $k^2 = 2k^+k^- - \mathbf{k}^2 = 0$, isto é, um glúon na camada de massa;

– os estados finais dos momentos dos quarks:

$$p_1 = \left[\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \theta), \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 - \cos \theta), \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta, 0 \right], \quad (3.5)$$

$$p_2 = \left[\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 - \cos \theta), \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \theta), -\frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta, 0 \right] \quad (3.6)$$

tais que $p_1^2 = p_2^2 = 0$, quarks na camada de massa;

– os momentos dos fótons:

$$q_1 = \left[\frac{-Q_1^2 + q_t^2}{\sqrt{2}z\sqrt{s}}, \frac{z\sqrt{s}}{\sqrt{2}}, q_t, 0 \right], \quad (3.7)$$

$$q_2 = \left[\frac{-Q_2^2 + q_t^2}{\sqrt{2}(1-z)\sqrt{s}}, \frac{(1-z)\sqrt{s}}{\sqrt{2}}, -q_t, 0 \right], \quad (3.8)$$

construídos de maneira tal que $q_1^2 = -Q_1^2$, $q_2^2 = -Q_2^2$ e

– o quadrimomento do glúon sendo

$$k = (k^+, 0, 0), \quad k^+ = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} - \frac{-Q_1^2 + q_t^2}{\sqrt{2}z\sqrt{s}} - \frac{-Q_2^2 + q_t^2}{\sqrt{2}(1-z)\sqrt{s}}. \quad (3.9)$$

Observamos que, coerentemente, $s = (q_1 + q_2 + k)^2$.

3.2.1 Invariantes

Após definirmos as variáveis cinemáticas, definiremos invariantes de Lorentz que serão úteis no manejo algébrico, a fim de termos maior poder de síntese na visualização das expressões analíticas. Primeiramente, já temos alguns invariantes mais intuitivos definidos pela cinemática: $p_1^2 = 0$, $p_2^2 = 0$ (então $(p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2$) e $s = (q_1 + q_2 + k)^2 =$

$(p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = s$. Também temos que $k^2 = 0$, $q_1^2 = -Q_1^2$ e $q_2^2 = -Q_2^2$.

Prosseguindo, buscaremos definir invariantes à semelhança das variáveis de Mandelstam, $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$ e $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, a respeito da situação do espalhamento de duas partículas incidentes (com momentos p_1 e p_2) e duas no final (com momentos p_3 e p_4), com a diferença de que teremos criar relações para cinco partículas.

Desse modo, usaremos os seguintes invariantes para escrever os resultados analíticos:

$$t_1 = (p_1 - q_1)^2, \quad t_2 = (p_2 - q_2)^2, \quad (3.10)$$

$$u_1 = (p_1 - q_2)^2, \quad u_2 = (p_2 - q_1)^2, \quad (3.11)$$

$$r_1 = (k + q_1)^2, \quad r_2 = (k + q_2)^2, \quad (3.12)$$

e as seguintes variáveis:

$$t = (k - p_1)^2 = -k^+ \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 - \cos \theta) \text{ e } u = (k - p_2)^2 = -k^+ \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \theta), \quad (3.13)$$

e $t_{\text{máx}}(\theta = 0) = u_{\text{máx}}(\theta = \pi) = 0$ e $t_{\text{mín}}(\theta = \pi) = u_{\text{mín}}(\theta = 0) = -k^+ \sqrt{s}/\sqrt{2}$, tal que $t_{\text{mín}} \leq t \leq t_{\text{máx}}$ e $u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$, delimitam a região fenomenológica de um eventual gráfico de $|M|^2(t, u)$. s , Q_1^2 , Q_2^2 , t_1 , u_1 , u_2 , t e u terão a dimensão de GeV^2 e veremos mais adiante como eles determinam a região cinemática válida.

3.3 Expressão matemática da amplitude

O diagrama de Feynman de M_1 , para um quark de massa $m = 0$, seguindo a convenção do fluxo dos momentos da Figura 3.2 (a), pode ser escrito como

$$M_1^{\mu\nu\rho} = N(ig)(ie)^2 v^s(p_1) \gamma^\mu \left(\frac{i}{\not{p}_1 - \not{q}_1} \right) \gamma^\rho \left(\frac{i}{\not{p}_1 - \not{q}_1 - \not{k}} \right) \gamma^\nu \bar{u}^{s'}(p_2), \quad (3.14)$$

onde N é o número de cores, e $M_1 = \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{\lambda_2} \epsilon_\rho^{\lambda_k} M_1^{\mu\nu\rho}$, com $\epsilon_\mu^{\lambda_1}$, $\epsilon_\nu^{\lambda_2}$ e $\epsilon_\rho^{\lambda_k}$ são os vetores de polarização dos fóton e glúon, cada um com respectivas polarizações λ_1 , λ_2 e λ_k denotadas a fim de clareza na notação; $v^s(p_1)(\bar{u}^{s'}(p_2))$ é espinor do antiquark(quark) com polarização $s(s')$. A interferência entre M_1 e M_j ($j \neq 1$), I_{1j} , é $M_1 M_j^* + M_1^* M_j$. Assim, a operação

$|M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6|^2$ resulta em 6 termos de amplitude módulo quadrado ($|M_1|^2, \dots, |M_6|^2$) e 15 termos de interferência ($I_{12}, I_{13}, \dots, I_{56}$).

Dessa maneira, vamos usar tomar as operações algébricas em torno da amplitude M_1 a título de exemplo válido para os outros termos de amplitude e interferência.

Prosseguindo no cálculo de $|M_1|^2$:

$$M_1 M_1^* = \left(\sum_{\lambda_1} \epsilon_{\mu}^{\lambda_1*} \epsilon_{\mu'}^{\lambda_1} \right) \left(\sum_{\lambda_2} \epsilon_{\nu}^{\lambda_2*} \epsilon_{\nu'}^{\lambda_2} \right) \left(\sum_{\lambda_k} \epsilon_{\rho}^{\lambda_k*} \epsilon_{\rho'}^{\lambda_k} \right) M_1^{\mu\nu\rho} M_1^{\mu'\nu'\rho'}, \quad (3.15)$$

e em [80] é deduzida a relação de completeza $\sum_i \epsilon_{\mu}^{i*} \epsilon_{\nu}^i = -g_{\mu\nu} + q_{\mu} q_{\nu} / q^2$, onde o segundo termo subtrai as contribuições tipo-tempo e longitudinal (não-físicas) incluídas em $g_{\mu\nu}$.

Nesse contexto, executamos o cálculo completo da amplitude no programa comercial *Mathematica*, com o pacote de computação simbólica *FeynCalc*, que pode ser executado através do seguinte código:

```

In[ ]:= M1 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\mu].(\text{GS}[p1 - k1]).\text{GA}[\rho].(\text{GS}[p1 - k1 - k3]).\text{GA}[\nu].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k1] + 0)(\text{SP}[p1 - k1 - k3] + 0)}$ ;
M2 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\nu].(\text{GS}[p1 - k2]).\text{GA}[\rho].(\text{GS}[p1 - k2 - k3]).\text{GA}[\mu].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k2] + 0)(\text{SP}[p1 - k2 - k3] + 0)}$ ;
M3 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\nu].(\text{GS}[p1 - k2]).\text{GA}[\mu].(\text{GS}[p1 - k2 - k1]).\text{GA}[\rho].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k2] + 0)(\text{SP}[p1 - k2 - k1] + 0)}$ ;
M4 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\rho].(\text{GS}[p1 - k3]).\text{GA}[\nu].(\text{GS}[p1 - k3 - k2]).\text{GA}[\mu].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k3] + 0)(\text{SP}[p1 - k3 - k2] + 0)}$ ;
M5 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\mu].(\text{GS}[p1 - k3]).\text{GA}[\nu].(\text{GS}[p1 - k3 - k1]).\text{GA}[\rho].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k3] + 0)(\text{SP}[p1 - k3 - k1] + 0)}$ ;
M6 =  $\frac{\text{SpinorV}[p1, 0].\text{GA}[\rho].(\text{GS}[p1 - k1]).\text{GA}[\mu].(\text{GS}[p1 - k1 - k2]).\text{GA}[\nu].\text{SpinorUBar}[p2, 0]}{(\text{SP}[p1 - k1] + 0)(\text{SP}[p1 - k1 - k2] + 0)}$ ;

M = M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6;

```

Figura 3.5: Escrita das amplitudes no programa *Mathematica*. As amplitudes são somadas no final. "GA[μ]"significa γ_{μ} ; "SP[v]"= v^2 ; "GS[v]", $\gamma_{\mu} v^{\mu}$. Fonte: o próprio autor.

Assim, em função dos invariantes definidos anteriormente, temos os seguintes resultados:

$$|M_1|^2 = \frac{16}{t_1^2 t_2^2} \left[(Q_1^2 + t_1) (Q_2^2 + t_2) (s + t + u + u_1 - u_2) + Q_1^2 Q_2^2 s \right. \\ \left. + Q_2^2 (Q_1^2 + t_1) (Q_1^2 + u_2) + Q_1^2 (Q_2^2 + t_2) (Q_2^2 + u_1) \right], \quad (3.16)$$

$$|M_2|^2 = \frac{16}{u_1^2 u_2^2} \left[(Q_1^2 + u_2)(Q_2^2 + u_1)(s + t + u + u_1 - u_2) + Q_1^2 Q_2^2 s \right. \\ \left. + Q_2^2 (Q_1^2 + t_1)(Q_1^2 + u_2) + Q_1^2 (Q_2^2 + t_2)(Q_2^2 + u_1) \right], \quad (3.17)$$

$$I_{12} = \frac{32s(s + t_1 + u_2)(s + t_2 + u_1)}{t_1 t_2 u_1 u_2}, \quad (3.18)$$

$$|M_4|^2 = \frac{16}{u_2^2 t} [(Q_1^2 + r_1)(Q_1^2 + u_2) + Q_1^2 u], \quad |M_5|^2 = \frac{16}{t_2^2 t} [(Q_2^2 + r_2)(Q_2^2 + t_2) + Q_2^2 u]. \quad (3.19)$$

$$|M_3|^2 = \frac{16}{u_1^2 u} [(Q_2^2 + r_2)(Q_2^2 + u_1) + Q_2^2 t], \quad |M_6|^2 = \frac{16}{t_1^2 u} [(Q_1^2 + r_1)(Q_1^2 + t_1) + Q_1^2 t]. \quad (3.20)$$

Observe que, caso $Q_1 = Q_2$, então $t_1 = u_2$, $u_1 = t_2$ e $|M_1|^2 = |M_2|^2$. Nesse caso, o termo de interferência I_{12} seria $2|M_1|^2$. O mesmo vale para os pares 3 – 6 e 4 – 5 e, por essa razão de simetria, distinguiamos esse pares.

Substituindo as relações cinemáticas, teríamos, por exemplo

$$|M_6|^2 = \frac{128z^2 \left(\sqrt{s}z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - q_t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2}{(\cos \theta + 1) (\cos \theta (Q_1^2 - q_t^2 + sz^2) + 2Q_1^2 z - Q_1^2 + q_t^2 - 2q_t \sqrt{s}z \sin \theta + sz^2)^2}, \quad (3.21)$$

cujo denominador possui a função $t_1 = a + b \cos \theta + c \sin \theta = a + bx + c\sqrt{1 - x^2}$, tal que as raízes compõem as eventuais divergências da amplitude módulo quadrado, conforme discutido no Apêndice A.

Usando as relações da seção de cinemática, podemos obter as amplitudes em função das variáveis s , Q_1 , Q_2 , q_{1t} , q_{2t} , z e θ e, assim, chegarmos a um passo de fazer a integração no espaço de fase a fim de obter alguma seção de choque partônica $\hat{\sigma}$. Entretanto, a visualização da expressão $|M|^2(s, Q_1, Q_2, q_{1t}, q_{2t}, z)$, ou mesmo das equações 3.16 e 3.17 em função dessas variáveis cinemáticas, é pouco elucidativa e, por isso, preferimos torná-las em função somente da variável t .

A título de exemplo prático, faremos um caso para a expressão numérica dentro da região fenomenológica $|M|^2(t)$: $(s, Q_1, Q_2, q_{1t}, q_{2t}, z) = (100, 2, 2, 0, 0, 0.5)$, lembrando que θ pode ser escrito em função da variável cinemática t .

Assim, porque colocamos tudo no final em função de t , vemos que o limite de t :

- $t_{\text{mín}} = -k^+ \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} = 58,$
- $t_{\text{máx}} = 0.$

Executando o programa e, depois, substituindo os valores para os parâmetros, temos que

$$|M|^2 = \frac{744,8}{t} + \frac{3.200,0}{t^2} - \frac{747,5}{t+4,0} + \frac{4751,4}{(t+4,0)^2} + \frac{747,5}{t+54,0} + \frac{4751,4}{(t+54,0)^2} - \frac{744,8}{t+58,0} + \frac{3.200,0}{(t+58,0)^2} \quad (3.22)$$

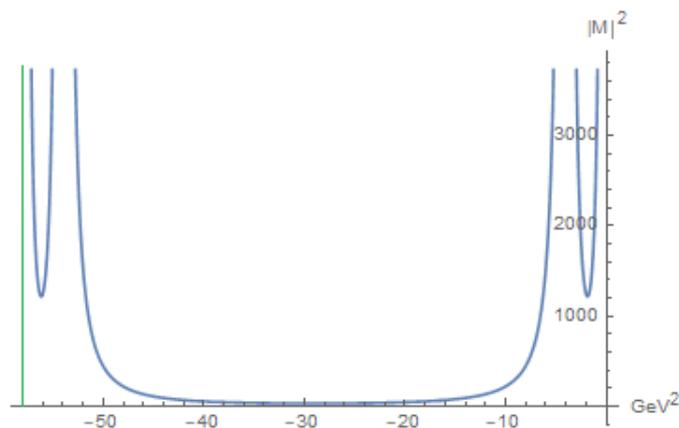


Figura 3.6: Caso 1. Gráfico de $|M|^2$ (equação 3.22) em função de t . Situação em que $q_{1t} = q_{2t} = 0$. Fonte: o próprio autor

$$|M|^2 = \frac{3,81}{(\cos \theta - 1)^2} - \frac{25,78}{\cos \theta - 0,86} + \frac{5,65}{(\cos \theta - 0,86)^2} + \frac{25,78}{\cos \theta + 0,86} + \frac{5,65}{(\cos \theta + 0,86)^2} - \frac{25,68}{\cos \theta + 1} + \frac{3,85}{(\cos \theta + 1)^2} + \frac{25,68}{\cos \theta - 1}. \quad (3.23)$$

Ou em função de θ :

A razão da existência de divergências baseia-se no fato de que toda interferência e termo do tipo $|M_i|^2$ possui no denominador algum dos seguintes termos provenientes

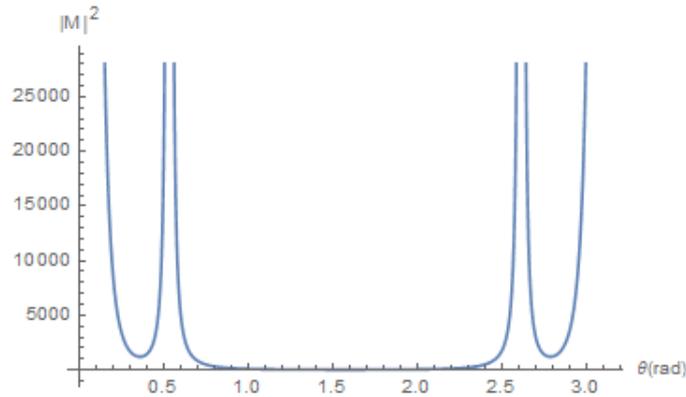


Figura 3.7: Caso 1. Gráfico de $|M|^2$ (equação 3.23) em função de θ . Situação em que $q_{1t} = q_{2t} = 0$. Fonte: o próprio autor

de algum propagador de férmion: $t_1, t_2, u_1, u_2, s + t + u + Q_1^2 + Q_2^2 + t_2 + u_2$ ou $s + t + u + Q_1^2 + Q_2^2 + t_1 + u_1$ que possuem raízes. Por exemplo, a Equação 3.16 possui $t_1^2 t_2^2$ no denominador proveniente do propagador $i/(\not{p}_1 - \not{q}_1) = i(\not{p}_1 - \not{q}_1)/(p_1 - q_1)^2 = i(\not{p}_1 - \not{q}_1)/t_1$ e de $i/(\not{p}_1 - \not{q}_1 - \not{k}) = i/(\not{q}_2 - \not{p}_2) = i(\not{q}_2 - \not{p}_2)/(q_2 - p_2)^2 = i(\not{q}_2 - \not{p}_2)/t_2$. Cada termo t_1, t_2, u_1 e u_2 é proveniente do denominador de um propagador de férmions e, assim, podem ir a camada de massa. Então, observar os zeros de t_1, t_2, u_1 e u_2 é útil para se localizar as divergências:

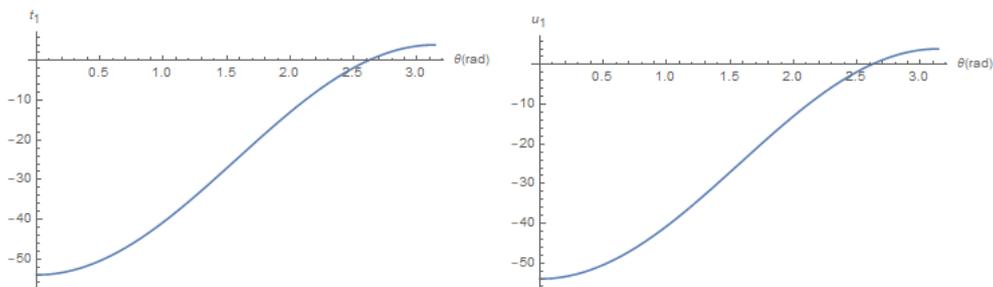


Figura 3.8: $t_1 = -2(12,5(\cos \theta + 1) - 2(1 - \cos \theta)) - 4$ e $u_1 = -2(12,5(\cos \theta + 1) - 2(1 - \cos \theta)) - 4$. Observe que $\cos^{-1}(2,6 \text{ rad}) = 0.86$.

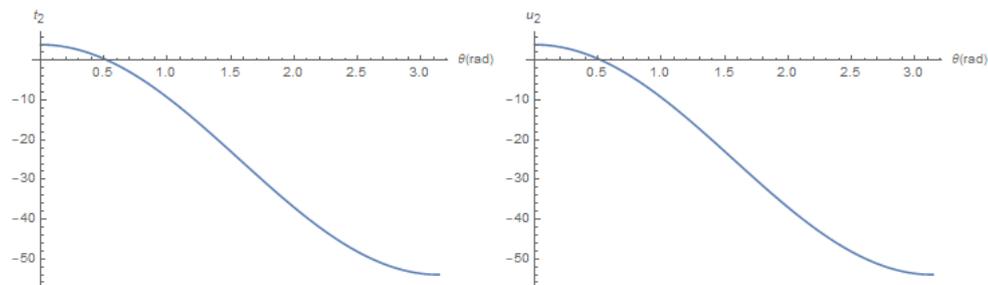


Figura 3.9: $t_2 = -2(12,5(1 - \cos \theta) - 2(\cos \theta + 1)) - 4$ e $u_2 = -2(12,5(1 - \cos \theta) - 2(\cos \theta + 1)) - 4$.

Novamente, $|M|^2$ possui polos simples e duplos dentro da região física $t_{\text{mín}} \leq t \leq$

0. Poderíamos prosseguir adiante e ver como $|M|^2$ se comportaria para s e Q_i 's muito altos e notamos que o perfil do gráfico não muda.

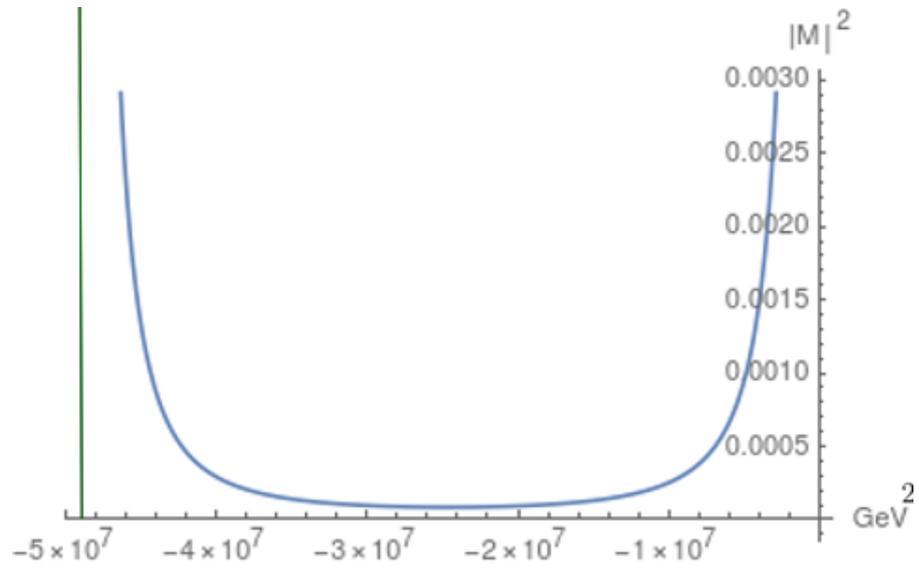


Figura 3.10: Gráfico de $|M|^2$ para $s = 49.000.000$, $Q_1 = 100$, $Q_2 = 100$ e $z = 0,5$ mas com $q_{1t} = 5$ e $q_{2t} = -5$. Fonte: o próprio autor

Capítulo 4

Conclusão

O cálculo das seções de choque σ_{2v1} e σ_{tw4} são elucidativos para o mecanismo de espalhamento duplo de pártons e, especialmente, a respeito da função de corte reguladora $\Phi(y\nu)$. Nesta classe de diagramas, há uma ambiguidade devido ao desdobramento de um párton. O problema central é que nosso formalismo considera que os seguintes são dois casos diferentes: no primeiro, dois pártons de um mesmo próton participam da interação; no segundo, um párton apenas interage, ao dividir-se em dois. Essencialmente, a natureza não faz esta diferença.

Esta ambiguidade mantém-se na definição de distribuições simples e dupla de pártons. Após revisar, no Cap. 1, o espalhamento simples de pártons, no Cap. 2 estudamos o caso duplo, onde discutimos que realmente, durante a evolução DGLAP, a distribuição dupla pode receber contribuições da simples. Isso resulta em dupla contagem (Sec. 2.2), problema a respeito do qual uma função ($\Phi(y\nu)$) é inserida *ad hoc*, reguladora da atuação da aproximação perturbativa, buscando descontar uma parte que foi contada duas vezes.

Sob esse contexto, no Cap. 3, usamos as regras de Feynman no cálculo das seções de choque partônicas $\hat{\sigma}$ do processo $g \rightarrow q\bar{q}$ com os quarks do par sendo sondados por dois fótons. Para tanto, identificamos todas os diagramas da mesma ordem $\alpha^2\alpha_S$ e calculamos o módulo quadrado da soma das amplitudes deles, $|M|^2$, isto é, computamos todas as amplitudes e termos de interferência em termos de invariantes que, em seguida, foram traduzidos por apropriadas variáveis cinemáticas. As singularidades correspondem aos zeros das seis diferentes funções catalogadas que aparecem no denominador. Discutimos os zeros dessas funções e, conseqüentemente, a região cinemática válida do processo.

Em seguida, obtivemos expressões para particulares casos cinemáticos e evidenciamos as divergências colineares.

Uma posterior fase seria a integração em uma fórmula fatorização, similiar ao caso do ESP: a parte $\hat{\sigma}$ convoluída com uma distribuição de pártons. No espalhamento duplo partônico, temos as distribuições duplas de pártons, representantes das contribuições de origem não-perturbativa.

No entanto, observamos que $|M|^2$ possui polos e que, após integrar $|M|^2$ no espaço de fase com relação a variável t , há divergências logarítmicas, t^{-1} e mistas do tipo $t^{-1} \log t$; contudo, as DGLAP na fatorização colinear podem, no máximo, incluir em sua evolução as divergências logarítmicas. Consequentemente, a aplicação do teorema de fatorização colinear, dentro do contexto de espalhamento duplo de pártons, torna-se não óbvia por causa das divergências $1/t$ remanescentes.

Como uma perspectiva válida a ser considerada, há a análise de espalhamento duplo de pártons pelo formalismo das distribuições dependentes de momento transversal. À medida que não integramos imediatamente os momentos transversais, podemos definir um parâmetro de impacto de um párton com relação ao outro através de uma transformada de Fourier apropriada. Então as divergências encontradas do desdobramento perturbativo no espalhamento duplo de pártons podem ser absorvidas na dependência em parâmetro de impacto. Assim, o resultado final seria uma seção de choque livre de divergências e uma interpretação física para a variável ν da função $\Phi(y\nu)$.

Com certeza, o diagrama estudado, que começa apenas com um glúon e dois fótons, é apenas o protótipo para o cálculo de outros diagramas de mesma importância. Por exemplo, podemos considerar os bósons vetoriais maciços W e Z , ainda no espalhamento profundamente inelástico. Se trocamos o estado inicial para analisar colisões próton-próton, o primeiro exemplo que vem à mente é a produção dupla de Drell–Yan, onde o estado final é razoavelmente limpo. Também há a possibilidade de produção dupla de quarks pesados, onde obteríamos muitos mais diagramas, por exemplo dois glúons interagindo com dois glúons do outro próton. Para terminar esta lista não exaustiva, ainda mencionamos o caso de colisões ultraperiféricas, como o estudo já concretizado de DPS em colisões entre próton e núcleon na referência [81].

Referências Bibliográficas

- [1] Einstein, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 322, p. 132–148, 1905.
- [2] Dirac, P. A. M. The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 117, p. 610–624, fev. 1928.
- [3] YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 96, p. 191–195, Oct 1954. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191>>.
- [4] GELL-MANN, M. The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [5] ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 321–323, Aug 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>>.
- [6] HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>>.
- [7] Guralnik, G. S.; Hagen, C. R.; Kibble, T. W. Global conservation laws and massless particles. *Physical Review Letters*, v. 13, p. 585–587, nov. 1964.
- [8] GURALNIK, G. S. The history of the guralnik, hagen and kibble development of the theory of spontaneous symmetry breaking and gauge particles. *International Journal of Modern Physics A*, v. 24, n. 14, p. 2601–2627, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X09045431>>.
- [9] FEYNMAN, R. P. The behavior of hadron collisions at extreme energies. In: _____. *Special Relativity and Quantum Theory: A Collection of Papers on the Poincaré Group*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1988. p. 289–304. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3051-3_25>.
- [10] Bjorken, J. D.; Paschos, E. A. Inelastic Electron-Proton and γ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon. *Physical Review*, v. 185, p. 1975–1982, set. 1969.
- [11] Weinberg, S. A Model of Leptons. *Physical Review Letters*, v. 19, p. 1264–1266, nov. 1967.
- [12] Salam, A.; Ward, J. C. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento*, v. 11, p. 568–577, fev. 1959.

- [13] GLASHOW, S. L. The renormalizability of vector meson interactions. *Nucl. Phys.*, v. 10, p. 107–117, 1959.
- [14] 't Hooft, G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. *Nuclear Physics B*, v. 33, p. 173–199, out. 1971.
- [15] 't Hooft, G. Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields. *Nuclear Physics B*, v. 35, p. 167–188, dez. 1971.
- [16] Politzer, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Physical Review Letters*, v. 30, p. 1346–1349, jun. 1973.
- [17] Gross, D. J.; Wilczek, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Physical Review Letters*, v. 30, p. 1343–1346, jun. 1973.
- [18] GREENBERG, O. W. Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 598–602, Nov 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.598>>.
- [19] ELLIS, J. The discovery of the gluon. *International Journal of Modern Physics A*, v. 29, n. 31, p. 1430072, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X14300725>>.
- [20] Faddeev, L. D.; Popov, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, v. 25, p. 29–30, jul. 1967.
- [21] Wu, C. S. et al. Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay. *Physical Review*, v. 105, p. 1413–1415, fev. 1957.
- [22] BURGARD, D. G. e C. Texample: Standard model of physics. *Acessado em 14/03/2019*. Disponível em: <<http://www.texample.net/tikz/examples/model-physics/>>.
- [23] HAMERMESH, M. *Group theory and its application to physical problems*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/100343>>.
- [24] CMS, C. ao. Observation of higgs decays and vh production with the atlas detector. *Physics Letters B*, v. 786, p. 59 – 86, 2018. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318307056>>.
- [25] TOTEM, C. ao. *Elastic differential cross-section $d\sigma/dt$ at $\sqrt{s} = 2.76$ TeV and implications on the existence of a colourless 3-gluon bound state*. Geneva, 2018. * Temporary entry *. Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/2651236>>.
- [26] LHCB, C. ao. *Observation of CP violation in charm decays*. Geneva, 2019. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/2668357>>.
- [27] Disponível em: <<http://cms.cern/higgs-observed-decaying-b-quarks-submitted>>.
- [28] COURTOY, A.; LIUTI, S. Extraction of α_s from deep inelastic scattering at large x. *Physics Letters B*, v. 726, n. 1, p. 320 – 325, 2013. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313006977>>.

- [29] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, v. 46, p. 641–653, 1977. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.73,1216(1977)].
- [30] ATLAS, C. ao. Measurement of hard double-parton interactions in $w+2$ -jet events at atlas $\sqrt{s} = 7$ tev with the atlas detector. *New Journal of Physics*, v. 15, n. 3, p. 033038, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=3/a=033038>>.
- [31] *Proceedings of the Sixth International Workshop on Multiple Partonic Interactions at the Large Hadron Collider*.
- [32] COLLABORATION, C. Measurement of double parton scattering in same-sign WW production in p-p collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the CMS experiment. 2017.
- [33] GAUNT, J. R.; STIRLING, W. J. *Double Parton Distributions Incorporating Perturbative QCD Evolution and Momentum and Quark Number Sum Rules*. [S.l.], 2010. v. 03, 005 p.
- [34] DIEHL, M.; GAUNT, J. R. Double parton scattering theory overview. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, v. 29, p. 7–28, 2018.
- [35] RINALDI, M. et al. Double parton scattering: A study of the effective cross section within a light-front quark model. *Physics Letters B*, v. 752, p. 40 – 45, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269315008795>>.
- [36] ATLAS, C. ao. Measurement of the prompt j/ψ pair production cross-section in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ tev with the atlas detector. *The European Physical Journal C*, v. 77, n. 2, p. 76, Feb 2017. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4644-9>>.
- [37] AZZI, P. et al. Standard Model Physics at the HL-LHC and HE-LHC. 2019.
- [38] ATLAS, C. ao. Study of the hard double-parton scattering contribution to inclusive four-lepton production in pp collisions at $s=8$ tev with the atlas detector. *Physics Letters B*, v. 790, p. 595 – 614, 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319300875>>.
- [39] BINOSI, D.; THEUSSL, L. Jaxodraw: A graphical user interface for drawing feynman diagrams. *Computer Physics Communications*, v. 161, n. 1, p. 76 – 86, 2004. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465504002115>>.
- [40] CALLAN JR., C. G.; GROSS, D. J. Bjorken scaling in quantum field theory. *Phys. Rev.*, D8, p. 4383–4394, 1973.
- [41] BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 179, p. 1547–1553, Mar 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.179.1547>>.
- [42] BREIDENBACH, M. et al. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, p. 935–939, Oct 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.935>>.

- [43] FRIEDMAN, J. I.; KENDALL, H. W. Deep inelastic electron scattering. *Annual Review of Nuclear Science*, v. 22, n. 1, p. 203–254, 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.ns.22.120172.001223>>.
- [44] QUIGG, C. *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-13548-9.
- [45] MESTAYER, M. D. et al. Ratio $\frac{\sigma_L}{\sigma_T}$ from deep-inelastic electron scattering. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 27, p. 285–288, Jan 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.285>>.
- [46] *Acessado em 14/03/2019*. Disponível em: <https://www.desy.de/hlzeus/combined_results/index.php?do=proton_structure>.
- [47] GELL-MANN, M. The eightfold way. *CIT Synchrotron Laboratory Report No. CTSL-20*, 1961.
- [48] NE'EMAN, Y. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nuclear Physics*, v. 26, n. 2, p. 222 – 229, 1961. ISSN 0029-5582.
- [49] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>.
- [50] POLITZER, H. D.; ROSS, G. Scaling behavior in a class of massive non-abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, v. 75, n. 2, p. 269 – 284, 1974. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374905483>>.
- [51] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.
- [52] REVIEW of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 98, p. 030001, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>>.
- [53] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. [S.l.: s.n.], 1984. ISBN 0471887412, 9780471887416.
- [54] BLOCH, F.; NORDSIECK, A. Note on the radiation field of the electron. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 52, p. 54–59, Jul 1937. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.52.54>>.
- [55] YENNIE, D.; FRAUTSCHI, S.; SUURA, H. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Annals of Physics*, v. 13, n. 3, p. 379 – 452, 1961. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491661901518>>.
- [56] COLLINS, J. C.; SOPER, D. E.; STERMAN, G. F. Factorization of Hard Processes in QCD. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, v. 5, p. 1–91, 1989.
- [57] LIPATOV, L. N. The parton model and perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 20, p. 94–102, 1975. [Yad. Fiz.20,181(1974)].

- [58] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, B126, p. 298–318, 1977.
- [59] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic e p scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 15, p. 438–450, 1972. [*Yad. Fiz.*15,781(1972)].
- [60] MOCH, S.; VERMASEREN, J.; VOGT, A. The qcd splitting functions at three loops: Methods and results. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 135, p. 137 – 146, 2004. ISSN 0920-5632. Loops and Legs in Quantum Field Theory. Proceedings of the 7th DESY Workshop on Elementary Particle Theory. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563204003603>>.
- [61] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J.; WEBBER, B. R. QCD and collider physics. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.*, v. 8, p. 1–435, 1996.
- [62] MUTA, T. *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, (3rd ed.). Hackensack, N.J.: World Scientific, 2010. v. 78. (World scientific Lecture Notes in Physics, v. 78). ISBN 9789812793539. Disponível em: <<http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC793.3.Q35M88::2010>>.
- [63] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. Disponível em: <<http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/QFT.html>>.
- [64] KIRSCHNER, R. Generalized lipatov-altarelli-parisi equations and jet calculus rules. *Physics Letters B*, v. 84, n. 2, p. 266 – 270, 1979. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379903009>>.
- [65] DIEHL, M.; GAUNT, J. R.; SCHÖNWALD, K. Double hard scattering without double counting. *Journal of High Energy Physics*, v. 2017, n. 6, p. 83, Jun 2017. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2017\)083](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)083)>.
- [66] DIEHL, M.; OSTERMEIER, D.; SCHÄFER, A. Elements of a theory for multiparton interactions in qcd. *Journal of High Energy Physics*, v. 2012, n. 3, p. 89, Mar 2012. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2012)089)>.
- [67] TANGERMAN, R. D.; MULDER, P. J. Intrinsic transverse momentum and the polarized drell-yan process. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 51, p. 3357–3372, Apr 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.3357>>.
- [68] BRAUN, V.; MANASHOV, A.; ROHRWILD, J. Renormalization of twist-four operators in qcd. *Nuclear Physics B*, v. 826, n. 1, p. 235 – 293, 2010. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321309005215>>.
- [69] JI, Y.; BELITSKY, A. Renormalization of twist-four operators in light-cone gauge. *Nuclear Physics B*, v. 894, p. 161 – 222, 2015. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032131500084X>>.
- [70] BARYON operators of higher twist in QCD and nucleon distribution amplitudes. *Nuclear Physics B*, v. 807, n. 1, p. 89 – 137, 2009. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321308004549>>.

- [71] DIEHL, M.; KASEMETS, T.; KEANE, S. Correlations in double parton distributions: effects of evolution. *Journal of High Energy Physics*, v. 2014, n. 5, p. 118, May 2014. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2014\)118](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2014)118)>.
- [72] CDF, C. ao. Double parton scattering in $\bar{p}p$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8\text{TeV}$. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 56, p. 3811–3832, Oct 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.3811>>.
- [73] SNIGIREV, A. M. Qcd status of factorization ansatz for double parton distributions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 68, p. 114012, Dec 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.114012>>.
- [74] GAZING into the multiparton distribution equations in QCD. *Physics Letters B*, v. 113, n. 4, p. 325 – 328, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382900491>>.
- [75] GAUNT, J. R.; STIRLING, W. J. Double parton distributions incorporating perturbative qcd evolution and momentum and quark number sum rules. *Journal of High Energy Physics*, v. 2010, n. 3, p. 5, Mar 2010. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2010\)005](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)005)>.
- [76] DIEHL, M.; PLEUL, P.; SCHAFER, A. Proof of sum rules for double parton distributions in QCD. 2018.
- [77] DIEHL, M. et al. Two-loop splitting in double parton distributions. 2019.
- [78] *Acessado em 14/03/2019*. Disponível em: <<http://projects.hepforge.org/gsdpdf>>.
- [79] BARTALINI, P.; GAUNT, J. R. *Multiple Parton Interactions at the LHC*. WORLD SCIENTIFIC, 2018. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/10646>>.
- [80] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. [S.l.]: Springer, 1996. ISBN 3540591796.
- [81] HUAYRA, E.; OLIVEIRA, E. G. D.; PASECHNIK, R. Probing double parton scattering via associated open charm and bottom production in ultraperipheral pA collisions. 2019.

Apêndice A

Divergências infravermelhas

Na seção 11.5 de Halzen e Martin [53], é calculada a seção de choque do processo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, Figura A.1, cujo resultado é

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \sigma_0 \frac{2\alpha_S}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}, \quad \sigma_0 = (e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \sum_i e_i^2, \quad (\text{A.1})$$

definidas pelo uso das frações de energia dos pártons $x_i = \frac{E_i}{\sqrt{s}/2} = \frac{2q \cdot k_i}{s}$ ($\sum_i x_i = 2$).

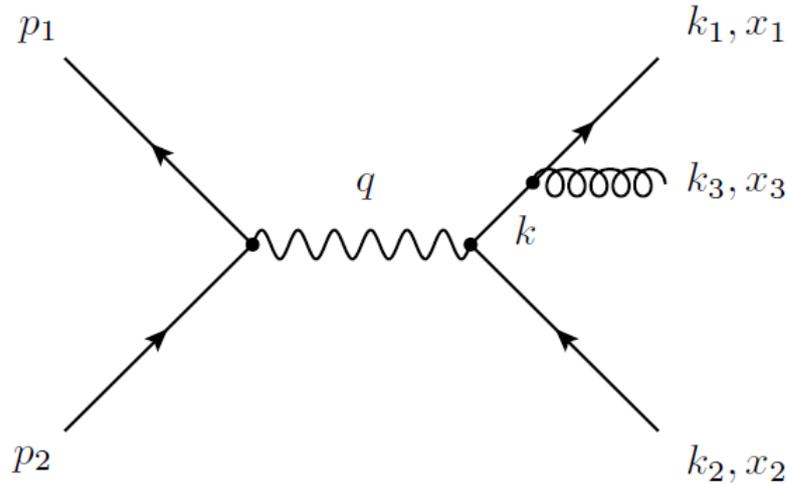


Figura A.1: $s = q^2$, $q = p_1 - p_2$, $k = k_1 + k_3$. Fonte: próprio autor

Termos $(1 - x_i)$ provém de $(k_i + k_j)^2 = k_i^2 + 2k_i \cdot k_j + k_j^2 = 2k_i \cdot k_j$ (pártons na camada de massa) e são as razões das divergências. Por exemplo, $2k_1 \cdot k_2 = (k_1 + k_2)^2 = (q - k_3)^2 = s - 2q \cdot k_3 = s(1 - x_3)$. As singularidades vêm da razão de que o propagador do quark, que carrega um termo $\sim 1/(k_1 + k_3)^2$, na seção de choque, poder vir a camada

de massa ($(k_1 + k_3)^2 \rightarrow 0$), mas

$$(k_1 + k_3)^2 = 2k_i \cdot k_j = 2E_1 E_3 (1 - \cos \theta_{13}), \quad (\text{A.2})$$

assim, o propagador é singular quando $E_3 \rightarrow 0$ (*divergência suave*) ou $\theta_{13} \rightarrow 0$ (*divergência colinear*). As divergências seriam logarítmicas no momento em que se integra sobre θ_{13} ou θ_{23} (mantendo E_3 fixo) ou sobre E_3 (mantendo os ângulos fixos).

Chamando de θ_{ij} o ângulo entre i -párton e o j -párton e, por eles estarem na camada de massa, podemos parametrizar cada quadri vetor de párton por $(E_i; E_i \mathbf{u}_i)$, tal que \mathbf{u}_i é um vetor unitário, e $k_i \cdot k_j = E_i E_j \cos \theta_{ij}$. Dividindo esse resultado por $s/2$, temos que

$$x_1 x_2 (1 - \cos \theta_{12}) = 2(1 - x_3) \implies \theta_{12} \leftrightarrow x_3,$$

$$x_1 x_3 (1 - \cos \theta_{13}) = 2(1 - x_2) \implies \theta_{13} \leftrightarrow x_2,$$

$$x_2 x_3 (1 - \cos \theta_{23}) = 2(1 - x_1) \implies \theta_{23} \leftrightarrow x_1.$$

Escrevendo k em coordenadas de cone de luz, teríamos que $k = 2k^+ k^- - \mathbf{k}_T^2$. Escolhemos o eixo z como o eixo em que, depois de um *boost*¹, o momento pode aumentar ao longo dele. Dessa maneira, para k^+ grande, $k^- = (m^2 + \mathbf{k}_T^2)/2k^+$ seria uma quantidade pequena; portanto, $k^2 = 2k^+ k^- \rightarrow 0$, conforme $k^- \rightarrow 0$ (considerando $\mathbf{k}_T = 0$).

Então, da transformada de Fourier que relaciona propagadores (funções de Green) no espaço de posição de coordenadas com os de momento, podemos ver que

$$S(x) = \int d^4x \exp(-ikx) S(k) = \int d^4x \exp[-i(k^+ x^- + p^- x^+ - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x}_T)] S(k),$$

Porque k^+ é grande e k^- é pequeno, a contribuição de x possui pequeno x^- e grande x^+ . Isto significa que o quark propaga-se uma grande distância na direção do eixo x^+ antes de decair em um par qg .

¹O *boost* de um quadri vetor u em coordenadas de cone de luz é dado por $u^{+'} = u^+ e^\psi$, $u^{-'} = u^- e^{-\psi}$, $\mathbf{u}'_T = \mathbf{u}_T$, com $\psi = \frac{1}{2} \ln[(1 - \beta)/(1 + \beta)]$.

Apêndice B

Região cinemática e as raízes

Desenvolvendo a expressão de t_1 , temos que:

$$\begin{aligned} t_1 &= (p_1 - q_1)^2 = -2p_1 \cdot q_1 + q_1^2 = -2q_1 \cdot q_2 - Q_1^2 = -2(p_1^+ q_1^- + p_1^- q_1^+ - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1) - Q_1^2 \\ &= -2 \left(\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \theta)q_1^- + \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 - \cos \theta)q_1^+ - \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \right) q_t \right) - Q_1^2 \\ &= -Q_1^2 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(q_1^- + q_1^+) - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}(q_1^- - q_1^+) \cos \theta + (q_t \sqrt{s}) \sin \theta, \end{aligned}$$

e vemos que t_1 possui a forma algébrica de $a + b \cos \theta + c \sin \theta$. Substituindo os parâmetros cinemáticos, temos que

$$t_1 = -\frac{q_t^2 - Q_1^2}{2z} - Q_1^2 - \frac{sz}{2} + \left(\frac{q_t^2 - Q_1^2}{2z} - \frac{sz}{2} \right) \cos \theta + (q_t \sqrt{s}) \sin \theta, \quad (\text{B.1})$$

$$u_1 = -\frac{q_t^2 - Q_2^2}{2(1-z)} - Q_2^2 - \frac{s(1-z)}{2} + \left(\frac{q_t^2 - Q_2^2}{2(1-z)} - \frac{s(1-z)}{2} \right) \cos \theta + (-q_t \sqrt{s}) \sin \theta, \quad (\text{B.2})$$

$$t_2 = -\frac{q_t^2 - Q_2^2}{2(1-z)} - Q_2^2 - \frac{s(1-z)}{2} + \left(-\frac{q_t^2 - Q_2^2}{2(1-z)} + \frac{s(1-z)}{2} \right) \cos \theta + (q_t \sqrt{s}) \sin \theta, \quad (\text{B.3})$$

$$u_2 = -\frac{q_t^2 - Q_1^2}{2z} - Q_1^2 - \frac{sz}{2} + \left(-\frac{q_t^2 - Q_1^2}{2z} + \frac{sz}{2} \right) \cos \theta + (-q_t \sqrt{s}) \sin \theta. \quad (\text{B.4})$$

Vemos que as expressões de t_1 , t_2 , u_1 , u_2 , u e t são da forma $a + b \cos \theta + c \sin \theta$

para $0 \leq \theta \leq \pi$, cuja solução é elementar e dada por:

$$\cos \theta = r_{\pm} = \alpha \pm \beta = \frac{-\frac{a}{b} \pm \left(\frac{c}{b}\right)\sqrt{\Delta}}{1 + \frac{c^2}{b^2}}, \text{ com } \Delta = -a^2 + b^2 + c^2, \quad (\text{B.5})$$

que, porque $|\cos \theta| \leq 1$, há a condição de que

$$\left| \frac{-\frac{a}{b} \pm \left(\frac{c}{b}\right)\sqrt{\Delta}}{1 + \frac{c^2}{b^2}} \right| \leq 1. \quad (\text{B.6})$$

Por sua vez, o discriminante $\Delta = -a^2 + b^2 + c^2 = (-a + b)(a + b) + c^2$ deve ser igual ou maior do que zero para que não haja raízes imaginárias:

- para t_1 e u_2 :

$$\Delta_{t_1 u_2} = -\frac{Q_1^2(s z^2 + (Q_1^2 + s)z + q_t^2 - Q_1^2)}{z} \quad (\text{B.7})$$

- para t_2 e u_1 :

$$\Delta_{t_2 u_1} = -\frac{Q_2^2(s z^2 - (Q_2^2 + s)z + q_t^2)}{1 - z}, \quad (\text{B.8})$$

e, para que $\Delta_{t_1 u_2} \geq 0$ e $\Delta_{t_2 u_1} \geq 0$, temos as duas inequações de segundo grau: $s z^2 + (Q_1^2 + s)z + q_t^2 - Q_1^2 \leq 0$ e $s z^2 - (Q_2^2 + s)z + q_t^2 \leq 0$, que possuem as seguintes soluções:

$$\frac{1}{2} + \frac{-Q_1^2 - \sqrt{\Delta_1}}{2s} < z < \frac{1}{2} + \frac{-Q_1^2 + \sqrt{\Delta_1}}{2s}, \quad \Delta_1 = (Q_1^2 + s)^2 - 4s q_t^2, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{2} + \frac{-Q_2^2 - \sqrt{\Delta_2}}{2s} < z < \frac{1}{2} + \frac{-Q_2^2 + \sqrt{\Delta_2}}{2s}, \quad \Delta_2 = (Q_2^2 + s)^2 - 4s q_t^2, \quad (\text{B.10})$$

e a condição $\Delta_{1,2} \geq 0$ nos mostra que

$$q_t \leq \frac{Q_1^2}{2\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad (\text{B.11})$$

$$q_t \leq \frac{Q_2^2}{2\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{2}. \quad (\text{B.12})$$

Mas, pela razão de que a fração z deve ser restrita no intervalo $0 < z < 1$, ao Δ_1

ou Δ_2 anularem-se, obtemos as seguintes restrições cinemáticas:

$$|Q_1^2| < s, \quad (\text{B.13})$$

$$|Q_2^2| < s. \quad (\text{B.14})$$

$$(\text{B.15})$$

Assim, em resumo, para cada invariante cinemático $I_i (i = 1..6)$ (t_1, t_2, u_1 e u_2), há uma declaração a respeito do espaço de parâmetros cinemáticos legal expresso pelo conjunto solução das inequações:

$$I_i = \{|r_{\pm}| \leq 1\} \cap \{\Delta_{t_1 u_2, t_2 u_1} \geq 0\} \cap \{0 < z < 1\} \cap \left\{ q_t \leq \frac{\min(Q_1^2, Q_2^2)}{2s} + \frac{\sqrt{s}}{2} \right\} \\ \cap \{|Q_1^2| < s \cap |Q_2^2| < s\},$$

condiciona a região legal de parâmetros cinemáticos:

$$I = \bigcap_{i=1}^4 I_i \quad (\text{B.16})$$

Exemplo: para $s = 100$ GeV e $Q_1 = Q_2 = 2$ GeV, temos a seguinte região cinemática no espaço (q_t, z) :

$$(q_t = 0 \wedge 0 < z < 1) \vee \left(0 < q_t \leq 3\sqrt{3} \wedge \frac{13}{25} - \frac{1}{50}\sqrt{676 - 25q_t^2} \leq z \leq \frac{1}{50}\sqrt{676 - 25q_t^2} + \frac{12}{25} \right).$$

Então, vemos que, caso $q_t = 3\sqrt{3}$, $z = 0.5$ somente; caso $q_t = 2$, implica que $1/25 \leq z < 1$. Caso saturássemos q_t em seu limite, $\frac{Q_1^2}{2\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{2} = 16/5$, e usássemos a condição de que $z = 13/25$, teríamos que os invariantes t_1 e u_2 teriam uma componente imaginária, resultado algebraicamente inconsistente ($\cos \theta$ possui raízes reais).

As raízes na variável $x = \cos \theta$ dos invariantes são:

- t_1 :

$$\frac{Q_1^4(1 - 2z) + 2Q_1^2(q_t^2(z - 1) - sz^3) + q_t^4 - s^2z^4 \pm 4z^2\sqrt{-\frac{Q_1^2q_t^2s(Q_1^2(z-1)+q_t^2+s(z-1)z)}{z}}}{Q_1^4 - 2Q_1^2(q_t^2 - sz^2) + (q_t^2 + sz^2)^2}, \quad (\text{B.17})$$

- u_1 :

$$\frac{Q_2^4(2z-1) + 2Q_2^2(s(z-1)^3 - q_t^2 z) + q_t^4 - (z-1)^2 \left(\pm 4\sqrt{\frac{Q_2^2 q_t^2 s(q_t^2 - z(Q_2^2 - sz + s))}{z-1}} + s^2(z-1)^2 \right)}{Q_2^4 - 2Q_2^2(q_t^2 - s(z-1)^2) + (q_t^2 + s(z-1)^2)^2}, \quad (\text{B.18})$$

- t_2 :

$$\frac{Q_2^4(1-2z) + 2Q_2^2(q_t^2 z - s(z-1)^3) - q_t^4 + (z-1)^2 \left(s^2(z-1)^2 \pm 4\sqrt{\frac{Q_2^2 q_t^2 s(q_t^2 - z(Q_2^2 - sz + s))}{z-1}} \right)}{Q_2^4 - 2Q_2^2(q_t^2 - s(z-1)^2) + (q_t^2 + s(z-1)^2)^2}, \quad (\text{B.19})$$

- u_2 :

$$\frac{Q_1^4(2z-1) + Q_1^2(2sz^3 - 2q_t^2(z-1)) - q_t^4 + s^2 z^4 \pm 4z^2 \sqrt{-\frac{Q_1^2 q_t^2 s(Q_1^2(z-1) + q_t^2 + s(z-1)z)}{z}}}{Q_1^4 - 2Q_1^2(q_t^2 - sz^2) + (q_t^2 + sz^2)^2}. \quad (\text{B.20})$$

$u = -\frac{k^+ \sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \theta)$ e $t = -\frac{k^+ \sqrt{s}}{2\sqrt{2}}(1 - \cos \theta)$ possuem raízes em π e em 0, respectivamente, independentemente dos parâmetros cinemáticos, isto é, 0 e π sempre serão pontos de divergência de $|M|^2$.

Exemplo: para $s = 100$ GeV e $Q_1 = Q_2 = 2$ GeV,

- t_1 :

$$\frac{-10000z^4 + 16(1-2z) + q_t^4 + 8(q_t^2(z-1) - 100z^3) \pm 80z^2 \sqrt{-\frac{q_t^2(q_t^2 + 4(z-1) + 100(z-1)z)}{z}}}{(q_t^2 + 100z^2)^2 - 8(q_t^2 - 100z^2) + 16}, \quad (\text{B.21})$$

- u_1 :

$$\frac{16(2z-1) + q_t^4 + 8(100(z-1)^3 - q_t^2 z) - (z-1)^2 \left(\pm 80\sqrt{\frac{q_t^2(q_t^2 - (104 - 100z)z)}{z-1}} + 10000(z-1)^2 \right)}{(q_t^2 + 100(z-1)^2)^2 - 8(q_t^2 - 100(z-1)^2) + 16}, \quad (\text{B.22})$$

- t_2 :

$$\frac{16(1-2z) - q_t^4 + 8(q_t^2 z - 100(z-1)^3) + (z-1)^2 \left(10000(z-1)^2 \pm 80 \sqrt{\frac{q_t^2(q_t^2 - (104-100z)z)}{z-1}} \right)}{(q_t^2 + 100(z-1)^2)^2 - 8(q_t^2 - 100(z-1)^2) + 16}, \quad (\text{B.23})$$

- u_2 :

$$\frac{10000z^4 + 16(2z-1) - q_t^4 + 4(200z^3 - 2q_t^2(z-1)) \pm 80z^2 \sqrt{-\frac{q_t^2(q_t^2 + 4(z-1) + 100(z-1)z)}{z}}}{(q_t^2 + 100z^2)^2 - 8(q_t^2 - 100z^2) + 16}. \quad (\text{B.24})$$

Apêndice C

Definições preliminares

A seguinte função de correlação fundamenta as distribuições de multipartônicas:

$$\Phi(l_i, l'_i) = \left[\prod_{i=1}^n \int \frac{d^4 \xi_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \xi'_i}{(2\pi)^4} e^{i\xi_i l_i - i\xi'_i l'_i} \right] \langle p | \bar{T} \left[\prod_{i=1}^n \phi(\xi'_i) \right] T \left[\prod_{i=1}^n \phi(\xi_i) \right] | p \rangle, \quad (\text{C.1})$$

onde T e \bar{T} são os operadores de ordenamento temporal e antitemporal, respectivamente, agindo sobre campos de pártons escalares ϕ , por simplificação (os casos para férmions e glúons serão mostrados adiante); ξ_i é a posição do párton escalar i . Sujeita sob a condição física de que $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n l'_i$, esta função descreve a emissão de n partons numa amplitude de espalhamento e o seu complexo conjugado. Observe que o estado não denotamos a polarização do hádron p , subentendendo-se que uma média da polarização implícita em C.2.

Escolhamos que o primeiro campo dentro do elemento de matriz seja tal que $\Phi(0)$, sobrando o fator $\exp(-i\xi_n l'_n)$ a ser integrado. Assim, temos uma função de Dirac ($\delta(l'_n)$) por causa da integral em $\exp(-i\xi_n l'_n)$. Usando a invariância translacional dos elemento de matriz, mudamos os argumentos de posição por por $\frac{1}{2}\xi_n$:

$$\begin{aligned} \Phi(l_i, l'_i) = & \left[\prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{d^4 \xi_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \xi'_i}{(2\pi)^4} e^{i\xi_i l_i - i\xi'_i l'_i} \right] \int \frac{d^4 \xi_n}{(2\pi)^4} e^{i\xi_i l_n} \\ & \times \langle p | \bar{T} \left[\phi(-\frac{1}{2}\xi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \phi(\xi'_i - \frac{1}{2}\xi_n) \right] T \left[\phi(\frac{1}{2}\xi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \phi(\xi_i - \frac{1}{2}\xi_n) \right] | p \rangle. \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Em seguida, fazamos as seguintes substituições:

$$\begin{cases} l_i = k_i - \frac{1}{2}r_i, \\ l'_i = k_i + \frac{1}{2}r_i, \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 0, \quad (\text{C.3})$$

e

$$y_i + \frac{1}{2}z_i = \xi_i - \frac{1}{2}\xi_n, \quad y_i - \frac{1}{2}z_i = \xi'_i - \frac{1}{2}\xi_n, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (\text{C.4})$$

conforme diagramizado na Figura C.1 Portanto, depois de se efetuar todas essas substi-

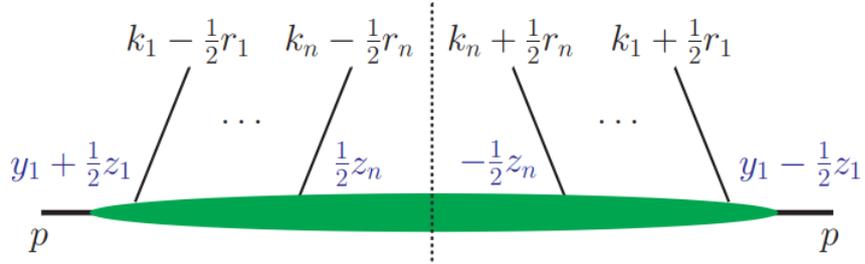


Figura C.1: n pártons com seus momentos e posições na função de correlação multipartônica. A linha pontilhada significa o estado de corte final. Fonte: Diehl et all [65].

tuições, vemos que a função de correlação torna-se:

$$\begin{aligned} \Phi(k_i, r_i) &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{d^4 z_i}{(2\pi)^4} e^{iz_i k_i} \right] \left[\prod_{i=1}^n \int \frac{d^4 y_i}{(2\pi)^4} e^{-iy_i r_i} \right] \\ &\times \langle p | \bar{T} \left[\phi(-\frac{1}{2}\xi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \phi(y_i - \frac{1}{2}z_i) \right] T \left[\phi(\frac{1}{2}\xi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \phi(y_i + \frac{1}{2}z_i) \right] | p \rangle. \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

No referencial em que o momento do próton é tal que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, definimos a distribuição multipartônica como

$$\begin{aligned} F(x_i, \mathbf{k}_i, \mathbf{r}_i) &= \left[\prod_{i=1}^n k_i^+ \int dk_i^- \right] \left[\prod_{i=1}^{n-1} (2\pi)^3 2p^+ \int dr_i^- \right] \Phi(k_i, r_i) \Big|_{k_i^+ = x_i p^+, r_i^+ = 0} \\ &= \left[\prod_{i=1}^n \int \frac{d^4 z_i^-}{2\pi} e^{ix_i z_i^- p^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{z}_i \mathbf{k}_i} \right] \left[\prod_{i=1}^{n-1} 2p^+ \int dy_i^- d^2 \mathbf{y}_i e^{iy_i \mathbf{r}_i} \right] \\ &\times \langle p | \mathcal{O}(0, z_n) \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(y_i, z_i) | p \rangle, \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{O}(y_i, z_i) = \phi(y_i - \frac{1}{2}z_i) i \overleftrightarrow{\partial} \phi(y_i + \frac{1}{2}z_i) \Big|_{z_i^+ = y_i^+ = 0}, \quad \overleftrightarrow{\partial} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}), \quad (\text{C.7})$$

sendo que os produtos de operadores de campos em \mathcal{O} são escritos na ordem normal. Dedução e expressões para o casos de bósons A_μ e o de campos mistos entre quarks e bósons são dadas na referência [66].