

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE PRODUÇÃO - PPGEP/UFSC**

Alexandre Manoel dos Santos

**PROPOSIÇÃO DE UM ALGORITMO ALTERNATIVO  
PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE  
EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS:  
ASPECTOS COMPUTACIONAIS ASSOCIADOS À  
REPRESENTAÇÃO MATRICIAL E TEORIA DOS  
GRAFOS**

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Alexandre Manoel dos

Proposição de um Algoritmo Alternativo para a  
resolução do problema de Equilíbrio Espacial de  
Preços: Aspectos computacionais associados à  
Representação Matricial e Teoria dos Grafos /  
Alexandre Manoel dos Santos ; orientador, Sérgio  
Fernando Mayerle, 2019.

156 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia de Produção, Florianópolis,  
2019.

Inclui referências.

1. Engenharia de Produção. 2. Equilíbrio Espacial  
de Preços. 3. Problemas de Otimização Não-Linear. 4.  
Programação Matemática com subgrafos conexos  
maximais. 5. Logística e Transporte. I. Mayerle,  
Sérgio Fernando . II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Produção. III. Título.

Alexandre Manoel dos Santos

**PROPOSIÇÃO DE UM ALGORITMO ALTERNATIVO  
PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE  
EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS: ASPECTOS  
COMPUTACIONAIS ASSOCIADOS À  
REPRESENTAÇÃO MATRICIAL E TEORIA DOS  
GRAFOS**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção (PPGEP).

Florianópolis, 01 de março de 2019.

---

Professora Dra. Lucila Maria de Souza Campos  
Coordenadora do Programa PPGEP/UFSC

**Banca Examinadora:**

---

Professor Dr. Sérgio Fernando Mayerle  
Orientador

---

Professor Dr. Antônio Sérgio Coelho  
Docente no PPGEP/UFSC



---

Professora Dra. Catia Maria dos Santos Machado  
Docente na FURG

---

Professor Dr. Ricardo Villarroel Davalos  
Docente no PPGTG/UFSC



Em sua histórica caminhada de vida neste Mundo, o *ser humano* -que é o mesmo que *ser errante*: caminhante pelo mundo-tem tido a oportunidade de vivenciar experiências . . .

Por meio dessas experiências, ele evolui, percebe nexos científicos, elabora conceitos, constitui uma coleção de conhecimentos, que chamamos de ciência, transforma os elementos da natureza, eleva o nível de qualidade de vida em sociedade, elabora sistemas complexos, como as organizações e as escolas, cria um potente binário capaz de melhorar continuamente o Mundo: Ciência e Educação . . .

O *Ser Humano* efetivamente agrega valor à sociedade em que vive, nas dimensões do tempo e do espaço. Tem-se que sua potência torna-se aumentada. Idiosincraticamente, sistemicamente, ele eleva seu nível de consciência . . .

Penso que agregar valor é o mesmo que reconfirmar voto de fé de que é necessário embutir conhecimento em tudo o que se faz, continuamente melhor, no processo de reificação do Pensamento, com o objetivo de construir nossa sociedade. . .

Passagem de vida em fluxo contínuo:  
assinatura efêmera, única oportunidade.





## AGRADECIMENTOS

Os acontecimentos mais importantes de minha vida estão repletos de exemplos que reafirmam a minha atual convicção de que tudo de verdadeiramente bom neste Mundo se faz à várias mãos e com muito esforço. Obviamente, os *trade-offs* associados devem ser assumidos. As lembranças carinhosas me induzem ao sentimento de que muitas pessoas e várias instituições fizeram parte de minha jornada de vida. Agradeço desde já a todas elas, sem exceção. Eu penso que durante minha *Caminhada de Vida* desenvolvi uma forte noção sobre a importância da Vida Moderna em Sociedade. Para mim, ser moderno é agir conscientemente na direção dos interesses da Sociedade e ser contemporâneo é perceber os efeitos dessas ações ainda em vida: talvez seja por isso que eu me empolgo tanto com a profissão de Professor. Estou realmente convicto de que a Sociedade Moderna potencializa ainda mais o *Ser Humano* e instrumentaliza-o no processo de elevação da qualidade de vida no Mundo. Com este espírito, desejo fazer um especial agradecimento a algumas Instituições e algumas pessoas. Um forte sentimento de gratidão científica me vem. À Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, onde fiz minha graduação em Engenharia de Produção Civil e onde estou terminando meu doutoramento no PPGEF. Gosto de lembrar que durante este doutoramento, minha filha Manoela obteve o título de Engenheira Civil, também no Curso de Engenharia de Produção Civil pela UFSC. Lá tivemos a oportunidade de conhecer muitos professores. Todos com reconhecida *expertise*. Entre eles, Antônio Galvão Novaes, Antônio Sergio Coelho, cuja dedicação e comprometimento com Educação eu conheço há mais de trinta anos, desde minha graduação, Carlos Manuel Taboada Rodrigues e Sérgio Fernando Mayerle. A professora Mirna de Borba foi quem me apresentou ao meu orientador, alguém que considero uma pessoa muito educada, singular, cheio de idéias geniais. Com ele, aprendi muito, e me tornei uma pessoa melhor. A professora Lucila Maria de Souza Campos, coordenadora em exercício do programa PPGEF, fortemente comprometida com o processo de formação e capacitação dos alunos pós-graduandos. Preciso agradecer também aos professores Cátia Maria dos Santos Machado e Ricardo Villarroel Davalos pela disposição e boa vontade em participar de minha banca tendo tão pouco tempo para ler a Tese e mesmo assim, tendo demonstrado tão grande entusiasmo pelo cumprimento de mais esta responsabilidade: à todos estes professores, pessoas especiais

por demais da conta, meus sinceros agradecimentos. Fico à vontade para tomá-los como minhas referências, meus marcos referenciais que levo comigo, durante minha jornada de vida e de encaminhamento profissional: eles já são estrelas do meu céu que estou a construir. À Universidade Federal do Paraná - UFPR, onde fiz meu mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia, no programa PPGMNE/CESEC. Meus professores Mildred Ballin Hecke, Roberto Dalledone Machado e Sergio Scheer: inesquecíveis. Como professor sinto a obrigação de professar o quanto sou grato às universidades onde trabalhei: Universidade do Contestado - UnC, em Canoinhas/SC, e Centro Universitário União da Vitória - UNIUV, em União da Vitória/PR. Lá aprendi a ser Professor e a ser efetivamente comprometido com *Ciência & Educação*, um verdadeiro binário transformador do Mundo. Não poderia deixar de manifestar minha gratidão à Universidade Federal da Fronteira Sul-UFFS, onde sou Professor Assistente, desde 2010. Juntamente com meus colegas, em Laranjeiras do Sul, assumi o compromisso com a Sociedade brasileira no processo de elevação da qualidade de vida por meio da difusão de conhecimento em nível superior: um verdadeiro desafio de Modernidade profissional. Como professor, penso que é muito importante desenvolver capacidade e percepção dos sinais que nossa sociedade oferece para encaminhar os jovens alunos no sentido dado pelo entendimento da coleção de interesses da própria Sociedade. Nossa sociedade exige de nós que sejamos modernos. Tenho certeza que preparar os jovens para serem Modernos em Sociedade constitui a melhor estratégia para a *Humanidade*. Afirmando com toda minha convicção de que o *Ser Humano* assume sua máxima potência nos processos de elevação de qualidade de vida no Mundo quando atua conscientemente na direção dada pelos interesses Sociais. Assim, você que está lendo este texto agora, lembre-se de que nossa sociedade valoriza aqueles jovens verdadeiramente comprometidos com *Ciência & Educação*: para estes, um futuro virtuoso os aguarda. Eu não me lembro de ninguém que, tendo-se dedicado aos interesses de nossa Sociedade, não tenha encontrado condições dignas para viver virtuosamente, em família, imerso em todas as suas dimensões. Por fim, uma sincera saudação aos amigos e à Família: sem eles, esta Tese não seria possível e eu não estaria tão inclinado à continuar tentando colocar em prática meu lema predileto em Engenharia: “*Fazer sempre certo, continuamente melhor, para a Sociedade*”. Por tudo isso, à todos que tenho encontrado em minha jornada, meus sinceros agradecimentos. No futuro, desde já, lembrarei com carinho desta jornada formativa e de elevação do nível de consciência no Mundo.

*Sou um Engenheiro a construir meu céu  
com estrelas mais brilhantes:*

*Helena, a minha primeira neta ...  
Catarina e Manoela, luz e direção ...  
Martin e Júlia, presentes de vida...*

*Leda e Manoel, meus pais, amor sem condição*

*Marcelina e Cristiane, minhas irmãs, laços  
permanentes de corpo, mente e alma ...*

*Marina e Augusto, iluminação ...*

*Ana Luisa, Maria Fernanda e Eduardo,  
jovens-adultos em caminhos virtuosos ...*

*Silvia Romão, companheira side-by-side,  
tempo e sonhos compartilhados ...*

*Estrelas que iluminam continuamente o  
meu caminhar de vida, fontes de inspiração,  
de elevação do nível de consciência, de  
comprometimento com a construção de um  
Mundo melhor ...*

*Ciência e Educação para Melhorar o Mundo*

**Alexandre Manoel**



## RESUMO

Este trabalho propõe um *Algoritmo Alternativo* para resolver problemas de Equilíbrio Espacial de Preços (*SPE*). O contexto do problema é representado por um sistema econômico em que uma dada *commodity* tem potencial para fluir entre todos os agentes do sistema, os quais atuam em modo de concorrência perfeita. O modelo do problema a ser utilizado aceita as restrições clássicas do modelo *SPE* em conjunto com a formulação geral das funções de preço não-linear dos seus agentes, nas quais devem ser positivas, duas vezes continuamente diferenciáveis e, em especial, possuir a propriedade de monotonicidade. O *Algoritmo Alternativo* é baseado na teoria de Grafos e na representação Matricial para manipular estruturas de dados visando representar subgrafos conexos maximais, que são nesta abordagem sempre bipartidos. Esses subgrafos assumem o papel de operandos em processos sucessivos de inserção de arcos livres, especialmente escolhidos. Cada subgrafo aumentado pela inserção é considerado como um novo subproblema *SPE* que é submetido a uma série de processos de linearizações. Uma representação matricial dual para esse subproblema é construída com o objetivo de extrair um operador auto-adjunto (*self-dual*) que mapeia uma solução aproximada única em um espaço linear de dimensão finita, dotado de produto interno como norma, no qual é possível ser gerado por um conjunto maximal de bases ortonormais. As aproximações primais e duais estão sempre em correspondência um-para-um. Uma tarefa adicional é realizada com o objetivo de identificar quais arcos devem ser retirados do subgrafo aumentado quando a restrição de positividade para seus fluxos estiver em fase de violação. A convergência linear é acompanhada em cada aproximação. A solução final é alcançada quando não houver arcos livres com potencial para entrar em algum subgrafo parcial do problema original. A convergência não-linear é medida comparando-se a diferença entre soluções lineares e não-lineares com uma medida de erro previamente definida. Um estudo de caso é realizado sobre diversos problemas aplicando o *Algoritmo Alternativo*. **Palavras-chave:** Modelo de Equilíbrio Espacial de Preços, Problemas de Otimização Não-Lineares, Programação Matemática, Subgrafos conexos maximais.



## ABSTRACT

This work describes an *Alternative Algorithm* for solve *SPE* problems. The problem's context is represented by an economic system where a given commodity has potential to flow between all system's agents, in which act in perfect competition mode. The problem's model accepts the classical *SPE*'s constraints in conjunction with the general formulation of agent's non-linear price functions, in which must have positivity, twice-differentiable continuity and monotonicity properties. The *Alternative Algorithm* is based on Graph's theory and Matricial representation to handle data structures to represent bipartite maximal connected subgraphs as operands of successive insertion processes of chosen arcs called "free arcs". Each augmented subgraph is considered as a new *SPE* subproblem that is submitted to a series of linearization processes. A dual matricial representation for that subproblem is builded aiming to extract a self-dual operator that mapps a unique approximated solution into a dual finite-dimensional inner product linear space, in which is spanneable by a set of maximal orthonormal basis. The primal and dual approximations are in one-to-one correspondence. An additional task is performed aiming to identify which arcs must be retired from the augmented subgraph when the positivity's restriction for their flows are in violating phase. The linear convergence is accomplished. The final solution is obtained when no more arcs are to be inserted to any subproblems. The non-linear convergence is measured by comparing the difference between linear and non-linear solutions with a presetted error. A case study is provided after *Alternative Algorithm* presentation.

**Keywords:** Spatial price equilibrium model, Non-linear Optimization Problems, Mathematical Programming , Maximal connected subgraphs.





## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 A complexidade associada ao conceito de Equilíbrio Econômico, descrita nas relações entre as dimensões que constituem a Sociedade Contemporânea. Fonte: o autor, adaptado de (RODRIGUES; NEVES, 2013) e (BERTALANFFY, 2008). . . . .</p> <p>Figura 2 Representação MicroEconômica de um Sistema Econômico. O Equilíbrio Econômico é afetado pelos mesmos elementos do sistema. Fonte: adaptado de (MANKIW, 2006). . . . .</p> <p>Figura 3 As funções de preços não-lineares dos agentes em um dado sistema econômico. O processo de identificação dos preços <math>S_i(q_i)</math>, <math>C_{ij}(x_{ij})</math> e <math>D_j(d_j)</math> e dos fluxos <math>x_{ij}</math> de bens dos agentes no momento do equilíbrio caracteriza o problema <i>SPE</i>. Fonte: o autor, adaptado de (MAYERLE; BASTOS, 1999). . . . .</p> <p>Figura 4 Uma linha de tempo conveniente para os marcos históricos associados às pesquisas sobre problemas <i>SPE</i>. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 5 Grafismo associado ao padrão de convergência do método <i>Steepest Descent</i>. Fonte: o autor, adaptado de (SHEFFI, 1985). . . . .</p> <p>Figura 6 Sistema econômico formado por componentes equilibrados. . . . .</p> <p>Figura 7 Processo de convergência da solução final para o equilíbrio de um componente equilibrado, pelo algoritmo proposto. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 8 As funções de preços são utilizadas nos testes são estritamente monotônicas. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 9 A representação das funções lineares de preços <math>f^L(x)</math> dos agentes de cada problema resolvido experimentalmente. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 10 Representação gráfica de um sistema econômico em estado de <i>SPE</i>, constituído por um conjunto de 101.100 agentes. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 11 Os mapeamentos nos espaços Dual <math>\mathbf{H}'</math> e Primal <math>\mathbf{H}</math>, por meio do operador <i>auto-adjunto</i> <math>[\mathbf{A}]</math>. Fonte: o autor, baseado em (REDDY, 2013). . . . .</p> <p>Figura 12 Teorema de <i>Representação de Riesz</i>: os operadores auto-adjuntos <math>\{[\mathbf{A}], [\mathbf{A}]^{-1}\}</math> são limitados inferiormente e superiormente, isométricos e isomórficos. As medidas nos espaços dual e primal convergem num sentido de uma série de <i>Cauchy</i>. Fonte: o autor, baseado em (REDDY, 2013). . . . .</p> <p>Figura 13 Um pequeno exemplo de um problema <i>SPE</i>. Fonte: o autor. . . . .</p> <p>Figura 14 Perturbação pela inserção do arco <math>(1, 1)</math>, o agente transportador <math>C_{11}</math>, no componente equilibrado. Fonte: o autor. . . . .</p>	<p>36</p> <p>38</p> <p>41</p> <p>51</p> <p>63</p> <p>77</p> <p>85</p> <p>91</p> <p>93</p> <p>98</p> <p>131</p> <p>135</p> <p>139</p> <p>141</p>
---	---

Figura 15 A rede equilibrada nas iterações $t = 0; t = 1$ . Os preços nas etiquetas estão arredondados. Os fluxos nos arcos não estão mostrados.	147
Figura 16 Solução final na iteração $t = 17$ . Note que $D_3 = S_1 + C_{13} = S_2 + C_{23} = S_3 + C_{33} = S_4 + C_{43} = S_5 + C_{53}$ . Fonte: o autor.	148
Figura 17 A seqüência de 18 iterações: a rede do exemplo. Fonte: o autor.	149

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Os dez Princípios Econômicos, segundo (MANKIW, 2006)	39
Tabela 2	Faixa de valores dos parâmetros das funções de preços dos agentes presentes nos trinta problemas gerados no experimento	92
Tabela 3	O desempenho do <i>Algoritmo Alternativo</i> na resolução de trinta problemas especialmente construídos em um teste experimental	97
Tabela 4	Configurações iniciais dos agentes econômicos	140
Tabela 5	Preços e Fluxos de equilíbrio final do exemplo algébrico	148
Tabela 6	Preços e Fluxos de equilíbrio em cinco iterações iniciais	151
Tabela 7	Preços e Fluxos de equilíbrio nas iterações $i_5$ à $i_9$	152
Tabela 8	Preços e Fluxos de equilíbrio nas iterações $i_{10}$ à $i_{14}$	153
Tabela 9	Preços e Fluxos de equilíbrio nas últimas iterações	154



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA	Acrônimo para o termo “ <i>Algoritmo Alternativo</i> ”: substantivo próprio para designar o objeto proposto na presente tese: um modelo resolutivo especialmente elaborado, fundamentado matematicamente, visto também como uma técnica, para resolver o problema <i>SPE</i> , no qual os agentes econômicos participantes possuem funções de preços não-lineares . . . . .	
CESEC	Centro de Estudos em Engenharia Civil da UFPR . . . . .	
FURG	Universidade Federal do Rio Grande . . . . .	
UFFS	Univerisdade Federal da Fronteira Sul . . . . .	
UFPR	Universidade Federal do Paraná . . . . .	
UFSC	Univerisdade Federal de Santa Catarina . . . . .	
UnC	Universidade do Contestado . . . . .	
UNIUV	Centro Universitário da Cidade de União da Vitória . . . . .	
PPGEP	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFSC . . . . .	
Ppgmne	Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR . . . . .	
PPGTG	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de transporte e Gestão Territorial da UFSC . . . . .	
SPE	<i>Spatial Price Equilibrium</i> , o mesmo que Equilíbrio Espacial de Preços . . . . .	27
GAMS	<i>Frame</i> computacional, para modelar e resolver problemas de programação não matemática . . . . .	31
IPOPT	Conjunto de ferramentas específicas para resolução de problemas de programação lineares e não-lineares . . . . .	31
VIP	<i>Variational Inequality Problems</i> , o mesmo que Problemas de Inequações Variacionais . . . . .	34
NLP	<i>Non-Linear Programming Problem</i> , o mesmo que problema de programação não-linear . . . . .	48
RHS	<i>Right Hand-Side</i> , uma referência a um conjunto de termos matemáticos localizados do “lado direito de uma equação”, em relação ao símbolo de igualdade . . . . .	48
KKT	Condicionantes de convexidade de <i>Karush, Kuhn e Tucker</i> para a determinação e para o processo de verificação dos	

	subespaços de soluções factíveis em problemas não-lineares multivariados.....	54
LP	Acrônimo para Problema de Programação Linear, o mesmo que <i>Linear Programming Problem</i> .....	68
EC	<i>Equilibrated Component</i> , o mesmo que Componente Equilibrado. Trata-se de uma representação abstrata que descreve um subgrafo $G_p$ conexo maximal que possui uma representação associada de um problema quadrático $\Pi_q$ .....	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

$X$	Referência para um vetor solução de um problema de programação não-linear genérico, também nominado por $X(X, q, d)$ . Quando este termo conter o índice $t$ , a referência $X^t = (X^t, q, d)$ diz respeito ao momento $t$ iterativo que está associado ao processo de linearização sucessiva, já no contexto do <i>Algoritmo Alternativo</i> proposto. A representação de um vetor solução final para um problema <i>SPE</i> pode ser dada pelo termo $X^* = (X^*, q, d)$ . . . . .	27
$Q_e$	Referência para uma quantidade de mercadorias associada ao de equilíbrio econômico de um problema <i>SPE</i> . . . . .	46
$P_e$	Referência para um preço de equilíbrio associado à quantidade de mercadorias $Q_e$ associada à condição de equilíbrio econômico de um problema <i>SPE</i> . . . . .	46
$Z(X)$	Referência para uma função objetivo que representa o Ganho da Sociedade no modelo genérico de um problema <i>SPE</i> . . . . .	48
$(i, j)$	Arco dirigido com um vértice na origem associado a um produtor $S_i$ e um outro vertice no destino associado a um consumidor $D_j$ . . . . .	48
$(\alpha, \beta)$	Referência específica a um arco denominado <i>Arco Entrante</i> . Este será sempre um designador para o arco $a(i = \alpha, j = \beta)$ que está para ser inserido em um <i>EC</i> , ou para aquele que acabou de ser nele inserido. Trata-se do arco que é objeto principal do processo de sucessivas inserções. Este arco, já num <i>EC</i> , conecta um produtor $S_{i=\alpha}$ na origem a um outro vertice no destino associado a um consumidor $D_{j=\beta}$ . . . . .	48
$D_j(d_j)$	Funcional de preços genérica não-linear para um agente Consumidor $j$ em um dado problema <i>SPE</i> , cujo valor é determinado pela quantidade consumida total de equilíbrio $d_j$ . Em processos de linearizações, os funcionais lineares deles decorrentes são referenciados por $\bar{D}_j(x = d_j)$ . . . . .	48
$S_i(q_i)$	Funcional de preços genérica não-linear para um agente Produtor $j$ em um dado problema <i>SPE</i> , cujo valor é determinado pela quantidade produzida total de equilíbrio $q_i$ . Em processos de linearizações, os funcionais lineares deles decorrentes são referenciados por $\bar{S}_i(x = q_i)$ . . . . .	48
$C_{ij}(x)$	Funcional de preços genérica não-linear para um agente Transportador, representado por um arco $(i, j)$ , em um dado problema <i>SPE</i> , cujo valor é determinado pela quantidade transportada $x = x_{ij}$ para o equilíbrio. Em processos de linearizações, os funcionais lineares	

	deles decorrentes são referenciados por $\bar{C}_{ij}(x = x_{ij})$ . . . . .	48
$x_{ij}$	Variável do problema <i>SPE</i> que representa a quantidade de mercadoria transportada no arco $(i, j)$ que deve fluir do produtor $S_i$ para o consumidor $D_j$ para que o equilíbrio ocorra em conformidade com o modelo do problema. . . . .	48
$d_j$	Variável do problema <i>SPE</i> que representa a quantidade total de mercadoria que deve ser consumida no agente consumidor $D_j$ para que o equilíbrio ocorra em conformidade com o modelo do problema. . . . .	48
$q_i$	Variável do problema <i>SPE</i> que representa a quantidade total de mercadoria que deve ser produzida no agente produtor $S_i$ para que o equilíbrio ocorra em conformidade com o modelo do problema. . . . .	48
$\Pi_q$	A representação de um Problema de Equilíbrio Espacial de Preços Quadrático. Nessa representação, as funções de preços dos agentes $\bar{D}_j(d_j)$ , $\bar{S}_i(q_i)$ e $\bar{C}_{ij}(x_{ij})$ são todas lineares. . . . .	75
$\Pi_o$	Modelo de Problema de Equilíbrio Espacial de Preços Original. Os agentes são descritos neste modelo pelas suas funções de preços não-lineares $D_j(d_j)$ , $S_i(q_i)$ e $C_{ij}(x_{ij})$ são especificadas no início: trata-se da modelagem do problema <i>SPE</i> original. . . . .	75



## LIST OF ALGORITHMS

1	EQUILIBRATE( $G(M \cup N, L)$ ) .....	87
2	EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ ) .....	88



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	27
1.1 OBJETIVOS .....	28
1.1.1 Objetivo Geral .....	28
1.1.2 Objetivos Específicos .....	28
1.2 RELEVÂNCIA DO TEMA E CONTRIBUIÇÕES .....	29
1.3 DELIMITAÇÕES .....	30
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	30
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	33
2.1 EQUILÍBRIO ECONÔMICO .....	34
2.1.1 Visão Sistêmica de Equilíbrio .....	35
2.1.2 Visão Econômica de Equilíbrio .....	37
2.1.3 Sobre a natureza das Curvas de <i>Oferta e Demanda</i> .....	40
2.1.3.1 A visão da Engenharia do Equilíbrio .....	42
2.2 O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS - <i>SPE</i> .....	44
2.2.1 Formulação do problema de Equilíbrio Espacial de Preços .....	46
2.3 TRABALHOS QUE ABORDAM O PROBLEMA <i>SPE</i> .....	50
2.4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EXISTENTES .....	53
2.4.1 Métodos de resolução baseados em Programação Matemática .....	54
2.4.2 Otimalidade de Primeira Ordem por <i>Karush-Khun-</i> <i>Tucker</i> .....	55
2.4.3 Aspectos Gerais dos Algoritmos de Otimização Não- Linear .....	57
2.4.4 Aspectos Gerais dos Métodos das Direções de Des- cida .....	61
2.4.5 Métodos de Newton para Problemas Não-Restritos .....	64
2.4.6 Métodos de Minimização para Problemas Restritos .....	64
2.4.7 Método do Gradiente Projetado .....	66
2.4.8 Método de Frank-Wolfe: Combinações Convexas ...	67
2.4.9 Métodos de resolução de problemas baseados na Teoria de Inequações Variacionais - <i>VIP</i> .....	69
2.4.10 Aspectos associados a outras Classes de Problemas .....	72
2.4.11 Considerações finais do capítulo .....	72
<b>3 PROPOSIÇÃO DO ALGORITMO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO DO <i>SPE</i></b> .....	73

3.1	MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA <i>SPE</i> .....	73
3.2	VISÃO GERAL DO MÉTODO PROPOSTO .....	74
3.3	MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA $\Pi_q(\mathbf{X})$ .....	75
3.3.1	Notação e Definições .....	75
3.3.2	Condição de melhoria no equilíbrio de $\Pi_q(\mathbf{X})$ .....	77
3.3.3	O critério de escolha do <i>Arco entrante</i> .....	82
3.3.4	Determinação da direção de busca e do tamanho do passo .....	83
3.4	BASES TEÓRICAS PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO	85
3.5	<i>ALGORITMO ALTERNATIVO</i> PARA RESOLUÇÃO DO <i>SPE</i> .....	86
4	<b>TESTES NUMÉRICOS E RESULTADOS</b> .....	91
4.1	TESTES NUMÉRICOS REALIZADOS .....	91
4.2	RESULTADOS OBTIDOS NOS TESTES NUMÉRICOS ...	94
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	99
5.1	CONCLUSÕES ASSOCIADAS AO PROCESSO DE PROPOSIÇÃO DO <i>ALGORITMO ALTERNATIVO</i> .....	99
5.2	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	100
5.3	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS ...	101
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	103
	<b>APÊNDICE A – Considerações sobre a convergência do método proposto</b> .....	113
	<b>APÊNDICE B – Um pequeno exemplo algébrico</b> .....	139

# 1 INTRODUÇÃO

*... o processo de equilíbrio é intrigante,  
 curioso e homeostático,  
 tanto em fenômenos da natureza,  
 como em sistemas construídos pelo homem.  
 É sensível às variações dos potenciais,  
 o gradiente sistêmico,  
 e ao comportamento individual  
 dos agentes envolvidos.  
 Na busca pela maximização de seus funcionais de interesse,  
 agentes afetam-se mutuamente, afetam os sistemas  
 e são por eles afetados. . .*

O problema de *Equilíbrio Espacial de Preços - SPE* é um problema Econômico descritível nas dimensões do espaço, e às vezes também nas dimensões do tempo, num contexto de mercados espacialmente distribuídos e perfeitamente competitivos.

O problema *SPE* trata da identificação completa dos valores das variáveis de estado que caracterizam o sistema econômico em estudo no seu estado de equilíbrio, independentemente do tamanho dos seus mercados e da quantidade de agentes envolvidos, que se encontram distribuídos no espaço. Assim, do ponto de vista matemático, identificar esses valores significa conhecer os preços e os fluxos de mercadorias que estão associados à condição de equilíbrio. Tem-se que *SPE* é tipicamente um *Problema de Programação Não-Linear - NLPP*. Assim, o vetor solução  $\mathbf{X}$  associado ao funcional a ser otimizado é factível somente em um sub-espaço vetorial convexo, bem definido e restrito por meio de um conjunto de combinações lineares específicas do problema, vinculadas aos conceitos de conservação de fluxos, com exigências de não-negatividade, além de estarem vinculadas ao princípio equilíbrio espacial de preços.

Do ponto de vista do fenômeno econômico, resolver o *SPE* significa conhecer quais pares de agentes produtores e consumidores irão tornar válido o comércio entre si, dado que os preços de demanda devem ser iguais aos preços de ofertas adicionados os custos de transportes das mercadorias entre cada par *produtor-consumidor* do sistema. Esta é a própria condição de equilíbrio espacial de preços.

No contexto deste trabalho busca-se resolver o *SPE*, descrito somente na dimensão espacial, num senso de mercados distribuídos,

considerando-se que os agentes econômicos envolvidos possuem funções de preços não-lineares, monotônicas, contínuas e diferenciáveis.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Propor uma metodologia baseada em Teoria dos Grafos e representação Matricial para resolver o problema de *Equilíbrio Espacial de Preços - SPE* com o uso de um algoritmo computacional especialmente elaborado.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Para garantir o cumprimento do objetivo geral descrito acima, tem-se uma coleção de objetivos específicos a serem alcançados.

1. Caracterizar formalmente o problema *SPE* que se pretende resolver, por meio de um modelo descritor das propriedades dos agentes envolvidos presentes no sistema econômico;
2. Propor a metodologia de resolução e caracterizar formalmente a técnica resolutiva elaborada, por meio de definições, proposições e teoremas;
3. Elaborar conceitualmente o *Algoritmo Alternativo* desenvolvido com base na Teoria dos Grafos. Neste aspecto, mostrar e especificar os detalhes que garantem que a originalidade e o ineditismo associados à sua concepção conceitual;
4. Descrever as bases teóricas que demonstram a capacidade do *Algoritmo Alternativo* de produzir soluções válidas, sob a perspectiva da *Existência* e a *Unicidade*;
5. Implementar o *Algoritmo Alternativo* concebido em um contexto computacional, usando uma plataforma de desenvolvimento de software baseada na tecnologia *Object Pascal*. Os testes de funcionamento, os testes numéricos e de mensuração de eficiência fazem parte deste objetivo;

6. Comparar o desempenho do *Algoritmo Alternativo* com com a ferramenta já consagrada, denominada *GAMS/IPOPT*, apresentando os resultados obtidos.

## 1.2 RELEVÂNCIA DO TEMA E CONTRIBUIÇÕES

O problema *SPE* tem sido estudado desde há muitas décadas. Diz respeito à processos de competição e movimentações de mercadorias em mercados espacialmente distribuídos, envolvendo produtores e consumidores, entre outros agentes econômicos agregadores de valor. Trata-se de computar os preços e fluxos que estão associados à condição de equilíbrio da rede. Em termos de marcos científicos, pode-se citar os trabalhos de (SAMUELSON, 1952), e de (TAKAYAMA; JUDGE, 1971), como referências iniciais nas décadas de cinquenta e setenta, e aquelas que descrevem a continuidade e aprofundamento dos estudos até os dias de hoje, como em (HARKER, 1986), (DAFERMOS; NAGURNEY, 1984) e (NAGURNEY, 1999), que, a partir da década de oitenta, entre outros, juntamente com (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016), vem desenvolvendo métodos e algoritmos específicos para resolver tipos diversos de problemas de *SPE*.

A relevância de *SPE* pode ser descrita em termos de como novas formas resolutivas, que vem sendo desenvolvidas, podem impactar positivamente nos processos de tomadas de decisões estratégicas que as organizações vivenciam, num sentido de efetividade associada às suas necessidades de posicionamento estratégico e obtenção de vantagem competitiva, no âmbito de mercados distribuídos, em redes e escalas globais. Em outras palavras, os métodos de resolução de *SPE* tem oferecido oportunidades para a produção de informações mais precisas e tempestivas sobre o comportamento de sistemas econômicos, de interesse das organizações, em termos das características de seu equilíbrio. Com certeza, há uma importante contribuição deles para a efetividade logística das organizações, no sentido da reificação de seus “pensamentos” estratégicos.

No contexto dado pelo *SPE*, busca-se contribuir com uma metodologia adequada e uma técnica resolutiva inédita por meio do *Algoritmo Alternativo* proposto.

### 1.3 DELIMITAÇÕES

Considerando a vasta gama de problemas *SPE*, não é esperado que o *Algoritmo Alternativo* resolva todos. Neste sentido, considera-se como importante delimitação a identificação do seu escopo de aplicação: trata-se de problemas *SPE* onde os seus agentes econômicos possuem curvas de preços não-lineares, positivas-definidas, contínuas, duas-vezes diferenciáveis e monotônicas.

Outro aspecto limitante é dado pela configuração do sistema econômico especificamente utilizado para comprovar a funcionalidade do *Algoritmo Alternativo*. Assim, o grau de generalidade do modelo proposto está associado estritamente à caracterização do modelo utilizado que ele pretende resolver. Esta caracterização é parte integrante do primeiro objetivo específico do presente trabalho. Desta forma, apesar da comprovada eficiência do método proposto para sistemas econômicos constituídos por até dois milhões de agentes, não foram realizados testes para cardinalidades maiores deste conjunto.

Destaca-se aqui o fato de que os testes de eficiência comparada foram realizados sobre famílias limitadas de funções não-lineares de preços para os agentes considerados.

### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica do tema *SPE*. Por meio de seu conteúdo, são apresentadas diversas abordagens a respeito de como a problemática tem sido resolvida na linha do tempo. Neste capítulo, apresentam-se vários métodos resolutivos e algoritmos de programação matemática propostos ou referenciados pelos autores citados. O problema de Equilíbrio Espacial de Preços é definido formalmente, em termos matemáticos. Nele são apresentados as condições de equilíbrio em que se busca alcançar na solução dos problemas *SPE*.

O capítulo 3 é constituído por teoremas, lemas e definições dos elementos que fazem parte da técnica resolutiva descrita pelo método proposto denominado *Algoritmo Alternativo*, especialmente concebido para resolver problemas *SPE*.

A abordagem caracteriza-se pela aplicação de sucessivas linearizações sobre as representações quadráticas dos subproblemas *SPE*. Em cada uma destas linearizações as soluções são obtidas partindo-se de um grafo completamente desconexo, que representa uma condição inicial para a estrutura de mercado. Neste grafo são identificados os



transportes (arcos) com maior potencial de ganho econômico para serem efetivados, até o ponto em que o equilíbrio entre os subgrafos conectados seja alcançado. O processo se repete até que nenhum transporte adicional entre subgrafos seja economicamente vantajoso.

No capítulo 4 é apresentado uma série de testes numéricos, cujos resultados são comparados com os resultados obtidos por meio do *frame IPOPT/GAMS*.

O capítulo 5 é dedicado á apresentação da conclusão a respeito de toda a metodologia resolutiva que foi proposta por meio do *Algoritmo Alternativo* e onde as considerações finais são realizadas.

O Apêndice A é dedicado aos leitores que buscam o entendimento mais detalhado sobre como as propriedades de *Existência* e *Unicidade* podem ser verificadas quando uma solução aproximada é obtida pelo método proposto.

No Apêndice B é apresentado ao leitor um exemplo algébrico de um problema *SPE* a ser resolvido pelo método proposto. Nele são elucidados a forma com que o *Algoritmo Alternativo* trabalha para produzir a coleção de aproximações para cada sub-problema, até que o critério de parada seja atendido.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

... a Ciência é a coleção completa de conhecimentos  
 que a humanidade já produziu,  
 e vem mantendo em contínua elaboração,  
 desde os tempos mais remotos, como sendo a  
 melhor resposta para si mesma,  
 na busca por uma continuada melhoria  
 na qualidade de vida do ser humano:  
 a humanidade possui seu próprio gradiente ...  
 ... o dual da ciência de um dado tempo  
 é a sociedade deste mesmo tempo:  
 olhe para uma e veja a outra ...

Este capítulo é dedicado à apresentação da revisão bibliográfica relativa ao Problema de Equilíbrio Espacial de Preços - *SPE*. Na primeira seção descreve-se a problemática que contém o referido objeto e caracteriza-se o problema que ele se propõe a resolver. Será visto que o problema está inserido num contexto dado pelo entendimento da realidade Econômica de nossa Sociedade Contemporânea, que se apresenta como uma problemática de dimensão menor, mas tão importante quanto, dada pela necessidade de entender e representar um fenômeno real definido pelo conceito de *Equilíbrio Econômico*. Independentemente de tamanho, este fenômeno é físico, ocorre realmente, desde em pequenas redes de negócios, vistos como mini-sistemas econômicos, até mesmo em blocos econômicos internacionais, vistos como super-sistemas econômicos. Obviamente, eles precisam ser compreendidos. Neste sentido, tem-se uma problemática característica de *Engenharia*. Deseja-se profundamente oferecer uma pequena contribuição por meio de uma entendimento adicional. Numa temática ainda mais delimitada, acredita-se que o termo adequado para descrever o campo de conhecimento que melhor problematiza o objeto de estudo neste trabalho seja denominado *Equilíbrio Espacial de Preços*. Na segunda seção descreve-se uma coleção de Métodos Matemáticos que são mais comumente utilizados, descritos na literatura atual, nos processos de resolução de problemáticas semelhantes. Por questões de simplicidade, decidiu-se por realizar esta descrição em dois tópicos distintos. No primeiro tópico são apresentados os métodos baseados em *Programação Matemática*. Eles tem sua eficácia garantida em processos de resolução de problemas específicos de equilíbrio econômico, cada qual com suas características

fortemente marcadas pelas peculiaridades e especificidades dos algoritmos neles implementados. No segundo tópico é apresentado uma formulação mais abrangente, na forma de um método genérico, para o problema de equilíbrio espacial de preços, entre outros. Esta formulação se baseia na Teoria de Inequações Variacionais, notadamente conhecidos pelo acrônimo “VIP”<sup>1</sup>, e representa uma abordagem teórica que tem fundamentado diversos trabalhos e métodos de resolução descritos na literatura atual. Sua importância em *Engenharia* é destacável.

## 2.1 EQUILÍBRIO ECONÔMICO

Considerando que o objeto deste estudo trata da apresentação dos aspectos particulares e da aplicação de um método específico de programação matemática, associados tanto à tarefa de comprovação de sua eficácia, como de sua eficiência, para resolver um tipo específico de problema de equilíbrio econômico espacial de preços, faz-se necessária, antecipadamente, a apresentação do contexto e da caracterização do problema que o referido modelo busca resolver.

É necessário oferecer aqui o entendimento do contexto dado pelo fenômeno denominado *Equilíbrio Econômico*, pois ele determina a finalidade desta abordagem. De forma bastante geral, *Equilíbrio Econômico* é o termo que se dá para referenciar um fenômeno físico, real, que afeta, e também determina, tanto o seu próprio funcionamento como o modo como as pessoas vivem em Sociedade. Atualmente, este modo é fortemente marcado pela atuação consciente dos indivíduos que percebem a sua importância num âmbito global de comportamento social. Isto significa que a Sociedade Contemporânea, em seu tempo e espaço, com seu próprio comportamento local e global, entre outras influências que exerce sobre outros sistemas humanos, afeta o referido fenômeno, e também é afetado por ele, em termos de como as relações de oferta e demanda por produtos e serviços são estabelecidas num sistema modal de consumo característico, juntamente com os fluxos financeiros associados. As noções de escassez de bens, produtos e serviços ocorrem em tal escala, no tempo e espaço, que determinam a própria magnitude dos investimentos e alocação de recursos escassos em infraestrutura e capacidades de atendimento. No equilíbrio, a demanda global determina a oferta local. Assim, o equilíbrio descreve uma medida de estado de um

---

<sup>1</sup>O termo “VIP” faz referência a uma importante e ampla classe de problemas que são resolvíveis por meio da formulação de Inequações Variacionais. Ela é o fundamento científico para a metodologia geral denominada *Variational Inequality Approach*, elaborada e apresentada por Anna Nagurney, na década de 1990.

sistema econômico complexo, onde necessidades globais determinam um padrão de atendimento global, dado por uma coleção organizada de infraestruturas com capacidades locais de atendimento. Em outras palavras, ele é totalmente influenciado pela Sociedade Contemporânea, em seu próprio modo de ser. Por isso, precisa ser entendido e tem sido objeto de estudo em diversas áreas do conhecimento. Por ser considerado um fenômeno, sendo físico e real, ele afeta a vida das pessoas em sociedade e não está sob controle delas, nem tampouco de suas instituições, em nenhum aspecto possível. Isto é muito importante: ele existe e não é, de modo algum, controlável. De acordo com (PORTER, 1999) e (WONNACOTT; WONNACOTT, 1994), há uma intrínseca complexidade associada ao seu funcionamento, que lhe confere um caráter especial no processo de tomada de decisões estratégicas, no âmbito Econômico, das organizações, no sentido da busca por uma efetiva vantagem competitiva.

### 2.1.1 Visão Sistêmica de Equilíbrio

Um dos aspectos que estabelece a complexidade do fenômeno denominado *Equilíbrio Econômico* é a sua natureza de ordem sistêmica, fortemente vinculada ao comportamento humano, com suas ontologias próprias, vivenciado em Sociedade. Por “*fenômeno*” entende-se como entidade que é física, é real, e não está sob controle de nenhuma ação, individual ou social, até mesmo de natureza humanística com abrangência global, do Homem Contemporâneo. Isto quer dizer que ele não pode ser determinado funcionalmente por um conjunto de ações individuais, específicas, mesmo que motivadas por interesses genuinamente sociais, pois não é efeito diretamente decorrente de ações nexoráveis. É por essa razão que lhe é imputado o termo “*fenômeno*” e lhe é atribuída a propriedade intrínseca de ser não compreensível sob uma única perspectiva científica. Ele ocorre rotineiramente, em escala local e global, afetando a todos, e também sendo afetado por todos que vivem na referida Sociedade, em seu tempo e espaço, respectivamente, nas dimensões local e global.

Por ser afetado localmente, e por afetar globalmente, tem-se o caráter sistêmico do fenômeno *Equilíbrio Econômico*. E é a partir da interpretação deste comportamento, por meio das várias linhas de pensamento fundamentadas cientificamente, que se estabelecem as dimensões de sua complexidade. Com certeza, essa é a razão pela qual muito se tem tomado-o como objeto de estudo. Duas metodologias adequadas,

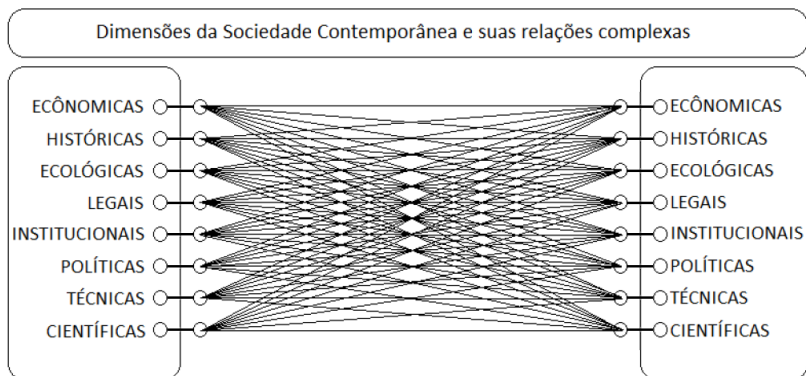


Figura 1. A complexidade associada ao conceito de Equilíbrio Econômico, descrita nas relações entre as dimensões que constituem a Sociedade Contemporânea. Fonte: o autor, adaptado de (RODRIGUES; NEVES, 2013) e (BERTALANFFY, 2008).

utilizadas cientificamente, para dar tratamento da sua complexidade intrínseca são descritas em (BERTALANFFY, 2008), por meio da *Teoria Geral de Sistemas*, e em (RODRIGUES; NEVES, 2013), que trata, baseado em estudos sobre originais de *Niklas Luhmann*, renomado cientista social contemporâneo, alemão, da *Caracterização Sistemática das Sociedades Humanas*. Em ambos, são oferecidos suportes científicos para o entendimento e consideração de que o fenômeno *Equilíbrio Econômico* seja tratado cientificamente como um Sistema. O primeiro trata da caracterização sistêmica de um fenômeno geral por meio do entendimento das relações complexas existentes entre o fenômeno em si, como um sistema relativamente isolado, e os demais subsistemas envolvidos, num processo de análise global. As interfaces entre estes subsistemas fazem parte do contexto de análise. Neste sentido, os elementos abstraídos da realidade são aqueles que possuem relevância e que fornecem informações necessárias e suficientes, sobre as suas mútuas relações existentes, para o processo de entendimento do sistema isolado. Este processo é denominado tratamento da complexidade do fenômeno estudado. O segundo trata da caracterização sistêmica da Sociedade Contemporânea, em suas escalas locais e globais, e de como ela é constituída por bases com dimensões de distintas complexidades, especialmente incluindo a dimensão Econômica, dadas pelas dimensões Históricas, Ecológicas, Legais, Institucionais, Políticas, Técnicas e Ci-

entíficas. Todas elas exercem mútuas influências sobre si, afetando-as e sendo por elas afetadas. A Figura 1 descreve graficamente estas relações de afetação mútua e simboliza a complexidade intrínseca existente entre os sistemas considerados. Obviamente, deseja-se aqui dar destaque ao *fashion* sistêmico e complexo do fenômeno denominado *Equilíbrio Econômico*.

### 2.1.2 Visão Econômica de Equilíbrio

Do ponto de vista da Economia como Ciência, pode-se afirmar que os aspectos que determinam o fenômeno denominado *Equilíbrio Econômico* são os mesmos aspectos que definem o próprio funcionamento do Sistema Econômico, vivenciado, cotidianamente, pela Sociedade Contemporânea. O primeiro representa um estado de um de seus subsistemas sob análise, em um momento específico, envolvendo uma coleção menor de bens, produtos ou serviços, e fluxos financeiros associados, e envolvendo as noções de escassez dos consumidores, que desejam consumi-los, e as capacidades de produção vinculadas dos fornecedores, que desejam fornecê-los. O segundo representa o modo de ser completo da Sociedade, com sua dinâmica própria. Nele, toda a sociedade humana “administra” os recursos, que sempre são escassos, utilizados para o atendimento de suas necessidades. Esta dinâmica se dá nas relações dicotômicas entre necessidades, que são infinitas, e recursos disponíveis, que são limitados, sempre levando em consideração a magnitude da Sociedade Humana, que vive a sua Contemporaneidade.

De acordo com (MANKIW, 2006) e (WONNACOTT; WONNACOTT, 1994), o comportamento econômico de nossa sociedade pode ser visto segundo duas ópticas muito adequadas, dadas pelos conceitos de MicroEconomia e de MacroEconomia. A primeira óptica descreve a maneira pela qual as famílias, as empresas, governos e demais instituições sociais, nas suas relações entre si, tomam decisões que afetam os seus modos de consumir e fornecer, e também regular, bens, produtos e serviços que estão disponíveis no mercado. O referido modo de consumo é fortemente afetado pelas suas noções de escassezes e de necessidades, a tal ponto de determinar os fluxos financeiros associados que ocorrem na Economia em dimensão global. Esta descrição microeconômica do Sistema Econômico está diagramaticamente representada na Figura ???. Deseja-se aqui chamar a atenção para o fato de que esta perspectiva também descreve adequadamente o fenômeno denominado Equilíbrio Econômico. A segunda óptica descreve a maneira pela qual o Sistema

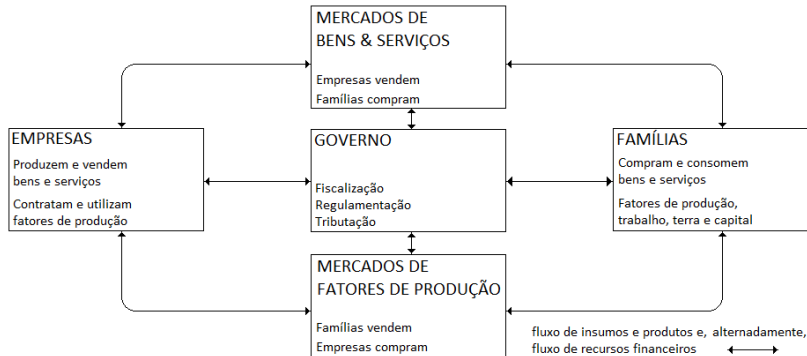


Figura 2. Representação MicroEconômica de um Sistema Econômico. O Equilíbrio Econômico é afetado pelos mesmos elementos do sistema. Fonte: adaptado de (MANKIWI, 2006).

Econômico como um todo é afetado por forças econômicas de caráter globais. Estas forças determinam a própria dinâmica global da Economia e as tendências de seus subsistemas a um novo estado de equilíbrio, afetando diferenciadamente cada agente econômico presente. Um sistema econômico pode ser descrito por meio de uma coleção de princípios descritores, denominados *Princípios de Economia*, que regem o comportamento dos agentes econômicos envolvidos nas suas inter-relações. Estes princípios, resumidos na Tabela 1, explicam os fluxos de bens, produtos e serviços, além dos fluxos financeiros associados, que ocorrem na dinâmica econômica representada na Figura 2 .

Ainda de acordo com os autores supracitados, de forma análoga, estes mesmos princípios também explicam o fenômeno do equilíbrio econômico, com suas variáveis de estado valoradas para um dado cenário específico, considerado para um dado momento do sistema econômico sob análise. Neste sentido, o equilíbrio representa um *snapshot* da dinâmica econômica, no momento em que os agentes econômicos envolvidos não conseguem melhorar sua condição econômica, se movimentando estrategicamente com um passo adicional na direção de seu interesse individual.

Para o bom entendimento de como os dez princípios resumem adequadamente a maneira pela qual o fenômeno do equilíbrio econômico ocorre em um dado sistema econômico sob análise, é importante explicá-los. Os quatro primeiros princípios estão associados ao comportamento individual dos agentes econômicos. O primeiro estabelece



Tabela 1. Os dez Princípios Econômicos, segundo (MANKIWI, 2006)

01	Os agentes econômicos enfrentam <i>tradeoffs</i>
02	Os agentes decidem sobre custos de oportunidade
03	Os agentes são racionais e percebem margem
04	Os agentes econômicos percebem incentivos e reagem
05	O comércio é bom para todos os agentes econômicos
06	Os mercados são geralmente uma boa maneira de organizar a atividade econômica
07	Eventualmente, os governos podem melhorar os resultados dos mercados
08	O padrão de vida de um país depende de sua capacidade de produzir bens e serviços
09	Os preços sobem quando o governo emite moeda
10	Há um <i>tradeoff</i> entre inflação e desemprego

que os agentes envolvidos tem “consciência” de que as suas atuações econômicas estão permeadas de *tradeoffs*. Existem decisões que são conflitantes e que realizam mútua interferência. Há sempre um relativo ônus associado a um passo na direção de um bônus. Essa condição, em qualquer sistema econômico, é inescapável. O segundo princípio, muito associado ao primeiro, descreve o fato de que toda decisão econômica envolve um custo de oportunidade. Tem-se sempre que abrir mão de algo para obter algum item específico. O terceiro princípio descreve o fato de que os agentes buscam a sua melhor condição por meio de uma racionalidade intrínseca ao seu comportamento. Os seus movimentos individuais são sempre de busca contínua, dirigidos por um interesse de melhoria econômica, relativa e marginal, totalmente efetiva. Não se admite movimentar-se para “perder”, por motivo nem interesse algum. Isto não seria racional. O quarto princípio, fortemente associado ao anterior, trata da reação consciente do agente diante da presença de incentivos. Na atuação econômica dos agentes, há um explícito interesse no ganho marginal. Os três seguintes princípios dizem respeito à maneira como eles interagem entre si. O quinto está associado ao fato de que um sistema de trocas confiáveis oferece condições para a atuação econômica que são as melhores para todos os agentes partícipes. O sexto, também fortemente acoplado ao anterior, estabelece os mercados como garantidores dos meios pelos quais os preços fluem na economia e representam a mais fiel sinalização proveniente das relações entre oferta e demanda. O sétimo princípio, por sua vez, descreve o fato de que a importância da participação de governos em sistemas econômicos deve

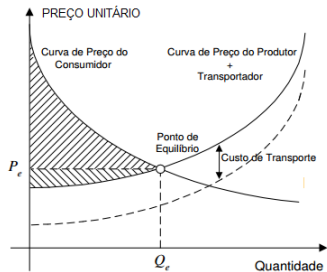
ser carregado de cuidados e atenção. Não se pode ser indiferente à sua presença, e à sua capacidade de intervenção. Entretanto, a história tem mostrado que políticas intervencionistas são fortemente carregadas de *tradeoffs*.

Os três últimos princípios estão associados ao comportamento geral do sistema econômico, e de como ele interfere sobre os agentes. O oitavo deles descreve o quanto é importante para um país a sua capacidade de produzir bens e serviços, em termos de economia global, para a elevação da sua qualidade de vida. Exportar e importar faz bem. O nono e o décimo descrevem, respectivamente, como regra geral, que os preços se elevam quando o governo emite moeda demais e que a sociedade enfrenta um *tradeoff* de curto prazo entre inflação e desemprego.

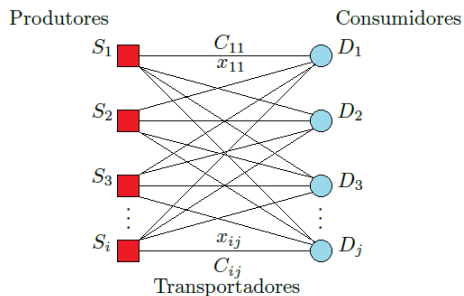
### 2.1.3 Sobre a natureza das Curvas de *Oferta e Demanda*

O conceito de *SPE* pressupõe a existência de mercados espacialmente distribuídos onde fornecedores e transportadores, além dos consumidores, competem entre si por meio de ações estratégicas individuais, com mútua influência em rede, para alcançar os seus objetivos. Os consumidores sinalizam aos mercados o quanto eles estão dispostos à pagar por cada unidade desejada, em termos de preços, como uma resposta sistêmica a sua noção de escassez e de necessidade. Estes sinais, por sua vez, representam estímulos, incentivos, à participações dos fornecedores e transportadores, que os percebem, no sentido de provocar-lhes uma nova reação que produz efeitos sobre os mercados, na forma de um nova oferta adicional, ou de retirada adicional, uma quantidade de produtos e de serviços de transporte. Tanto os sinais, como os efeitos que eles provocam, ocorrem simultaneamente, de forma não controlada. Por isso, diz-se que existem duas perspectivas distintas e simultâneas sobre os mercados em funcionamento: a dos *Consumidores*, que definem as curvas de Demanda dos mercados e aquela dos *Produtores e Transportadores*, que definem as curvas de Oferta. No equilíbrio, as quantidades demandadas e ofertadas são as mesmas. Estes aspectos estão descritos na Figura 3. Assume-se que neste trabalho produtores são ilustrados nas figuras com forma quadrada e os consumidores com forma circular. Os transportadores são arcos dirigidos.

O fenômeno do equilíbrio econômico ocorre por meio de uma série de fatores não controláveis. De uma forma geral, conforme (WONNACOTT; WONNACOTT, 1994) e (MANKIW, 2006), assume-se que eles



(a) tem-se um único fornecedor, transportador e um consumidor



(b) o sistema é caracterizado por sua distribuição espacial representada por um grafo bipartido, considerando múltiplos agentes econômicos

Figura 3. As funções de preços não-lineares dos agentes em um dado sistema econômico. O processo de identificação dos preços  $S_i(q_i)$ ,  $C_{ij}(x_{ij})$  e  $D_j(d_j)$  e dos fluxos  $x_{ij}$  de bens dos agentes no momento do equilíbrio caracteriza o problema *SPE*. Fonte: o autor, adaptado de (MAYERLE; BASTOS, 1999).

estejam encapsulados em um conceito denominado “*Lei da Oferta e Procura*” que determina o comportamento de consumidores e produtores, juntamente com os transportadores, com suas perspectivas distintas sobre escassezes, necessidades e oportunidades. Por sua vez, estes determinam o caráter realístico do fenômeno, percebido empiricamente no cotidiano de qualquer mercado perfeitamente competitivo. Assim, é bem aceito o entendimento sobre a perspectiva dos produtores, de que as sinalizações de mercado que descrevem um aumento efetivo de preços estão diretamente associadas a um aumento efetivo no seu interesse em oferecer uma quantidade adicional de produtos. De forma similar, a recíproca é verdadeira: o interesse deles em ofertar diminui quando os preços caem. Sobre a perspectiva dos consumidores, é também bem aceito o entendimento de que a sua disposição por consumir produtos diminui na medida em que os preços aumentam. Da mesma forma, reciprocamente, observa-se um aumento na demanda quando os preços diminuem. Este comportamento está descrito na Figura 3(a). Nota-se que a condição de equilíbrio é aquela que estabelece um único nível de preços  $P_e$  para uma mesma quantidade de produtos  $Q_e$ , demandadas pelos consumidores e ofertada pelos fornecedores, com os custos de transportes associados. Em (a) tem-se um único fornecedor, transportador e um único consumidor, considerando uma quantidade  $Q_e$  para um preço de equilíbrio  $P_e$ . Em (b), o sistema é caracterizado por

sua distribuição espacial representada por um grafo bipartido, dirigido do produtor  $S_i$  ao consumidor  $D_j$ , conectados por meio de um arco transportador  $C_{ij}$ . São múltiplos agentes econômicos atuando.

### 2.1.3.1 A visão da Engenharia do Equilíbrio

O propósito desta seção é apresentar o *SPE* como uma problemática específica em *Engenharia*, cuja caracterização pode ser obtida com acurácia mensurável por meio de Modelos Matemáticos adequadamente modelados, utilizando-se Algoritmos e Métodos de Programação Matemática implementados em um contexto computacional. Estes elementos de resolução encontram-se suportados cientificamente por Teorias, Teoremas, Conceitos e Princípios específicos. Para cumprir com este propósito, uma pequena coleção destes elementos teóricos, e empíricos, são apresentados.

Em *Engenharia*, o fenômeno *Equilíbrio Econômico* também pode ser visto de uma maneira ampla, num entendimento similar ao que foi apresentado na seção anterior. Entretanto, as soluções técnicas e científicas de problemas em *Engenharia* enfrentam um forte *tradeoff* entre os conceitos de “abrangência” e de “profundidade”, levando-se em consideração a precisão exigida sobre o método resolutivo utilizado. Há sempre um custo associado entre ser tão abrangente quanto possível e tão profundo quanto necessário. Por vezes, esta dicotomia se apresenta reciprocamente. Desta forma, o compromisso entre precisão e acurácia exige que as problemáticas reais sejam tratadas por meio de modelos de representações de forma reduzida<sup>2</sup>.

Assim, mesmo tendo-se em mente que o fenômeno *Equilíbrio Econômico* seja um estado decorrente de um processo de homeostase associado às constantes mudanças e perturbações provenientes da dinamicidade do sistema econômico sob estudo, que é complexo, deseja-se a partir de agora encarar esta constante tendência, e aquele referido estado, como uma resposta específica para uma coleção de estímulos, produzidos por determinadas “forças” de mercado, que ocorrem sobre determinados agentes econômicos, que se comportam em um deter-

---

<sup>2</sup>Os processos de modelagem em *Engenharia* são redutores porque tornam possível o tratamento da complexidade associada ao problema real. Com certeza, os aspectos relevantes da realidade estão presentes no modelo, por meio da descrição de um cenário característico e de uma coleção de variáveis de estado associadas. Assim, modelar é representar adequadamente, simplificando a realidade para descrever as relações entre os elementos envolvidos de forma mais fácil de serem compreendidas. Entretanto, os modelos não são representações simplórias da realidade.

minado cenário econômico, competindo entre si por recursos escassos. Desta forma, os estímulos, os potenciais de mercado e os agentes participantes deverão fazer parte do modelo de representação, juntamente com o cenário que caracteriza o problema a ser resolvido. Esta abordagem, denominada *Equilíbrio de Mercado*, ou também denominado *Equilíbrio Espacial de Preços*, é a base para o processo de Modelagem em *Engenharia* que se quer apresentar nesta seção.

Para descrever adequadamente o problema de Equilíbrio Espacial de Preços, alguns elementos teóricos e conceituais precisam ser apresentados. De acordo com (MACHADO; MAYERLE; TREVISAN, 2010) , (SAMUELSON, 1952) e (NAGURNEY, 1999), estes elementos descrevem as características e as nomenclaturas necessárias para o processo de acompanhamento, mensuração e análise de um mercado em equilíbrio espacial de preços, por meio da aplicação de técnicas de Programação Matemática. As caracterizações a seguir estão também fortemente apoiadas sobre os trabalhos de (HARKER, 1986) , (SHEFFI, 1985) e (HARKER, 1984). Os cinco primeiros princípios descritos na Tabela 1 estão implicitamente contemplados nos modelos a serem apresentados.

**Mercado:** é o cenário onde ocorrem disputas dos agentes econômicos envolvidos pelos recursos disponíveis, que são escassos. Estes agentes são autônomos, e buscam maximizar o seu próprio interesse, a partir da observação sobre o comportamento dos demais agentes partícipes do cenário, das características ambientais descritoras do próprio cenário e do conhecimento a respeito das medidas que representam os ganhos marginais associados ao passo de avanço, ações, na direção de seu interesse. Neste sentido, o referido cenário é carregado de significação associada aos trabalhos de (NASH, 1951), (COURNOT, 1838) e (NASH, 1950), num contexto adequadamente denominado “*jogo não cooperativo*”. Além disso, assume-se, desde já, por meio desta definição, que todo mercado é representado por um cenário constituído por elementos relevantes que são descritíveis e matematizáveis, do ponto de vista do modelo utilizado para sua representação, em um dado contexto de resolução.

**Agentes Econômicos:** são entidades que atuam independentemente uma das outras, e se comportam com estratégias próprias, racionais, buscando continuamente uma melhora relativa na sua noção de ganho em relação às oportunidades que surgem no mercado, quando disputam os recursos escassos. No contexto deste trabalho, eles são identificados por suas distintas atuações, dadas por

*produtores, consumidores e transportadores.*

**Disputa por Recursos Escassos:** neste contexto, disputar recursos significa colocar em prática o postulado da racionalidade, onde cada agente econômico seleciona uma estratégia que maximiza o seu excedente, independente dos demais. Cada agente observa o cenário, e age racionalmente. Esta disputa, que ocorre entre agentes, de mesmo tipo ou não, somente “cessa” sua dinâmica quando o mercado entra em equilíbrio.

**Equilíbrio de Mercado:** um mercado encontra-se em um estado de equilíbrio quando as variáveis de estado, que representam o cenário de disputas por recursos, não se modificam ao longo do tempo. Neste contexto, as variáveis de estado consideradas são *preços* e *fluxos*, associados aos agentes *produtores, consumidores e transportadores*.

**Problema de Equilíbrio Espacial de Preços:** trata da utilização de Métodos de Programação Matemática e de Algoritmos específicos, aplicados sobre Modelos adequadamente escolhidos, para identificar os valores das variáveis de estado associadas a um determinado mercado que, se espera, alcance a sua condição de equilíbrio em função das configurações dos agentes econômicos envolvidos, fornecidas antecipadamente, num senso de *jogo não-cooperativo*.

Assim, o Problema do Equilíbrio Espacial de Preços de um dado mercado é o problema da determinação dos valores das suas variáveis de estado associadas ao equilíbrio econômico deste mercado.

## 2.2 O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS - *SPE*

Neste capítulo é apresentado o conjunto de características do problema de Equilíbrio Espacial de Preços numa perspectiva clássica. Com o objetivo de entender a natureza deste tipo de problema, convém primeiramente estabelecer uma visão econômica sobre o que de fato vem a ser o fenômeno denominado por *equilíbrio de preços*. Esta visão, compartilhada por vários cientistas e engenheiros no mundo, é baseada em conceitos e princípios consagrados que estão muito bem descritos nos trabalhos produzidos pelos autores (PORTER, 1999), (MANKIW, 2006) and (WONNACOTT; WONNACOTT, 1994). Por conta desta visão, conceitos e princípios, é possível explicar porque o fenômeno de equilíbrio

de preços não está sob o controle de nenhum agente econômico tomado de forma isolada do sistema econômico do qual está vinculado.

De fato, o problema de Equilíbrio Espacial de Preços (*SPE*) é carregado de complexidade intrínseca, na qual é derivada das relações entre os agentes econômicos que atuam em modo de mútua afetação, reciprocamente, em um determinado sistema econômico. Algumas dessas características econômicas são totalmente determinadas pelos aspectos globais de um sistema ainda maior que representa a nossa Sociedade planetária, na qual é formada pelos elementos da Natureza e pelas coisas produzidas deste Mundo, nas quais estão sujeitas às fortes intervenções Antrópicas que, por sua vez, são históricas e sistêmicas. Os referidos aspectos globais compreendem um fenômeno real que determina efetivamente o modo como os *Seres Humanos* vivem em nossa Sociedade Moderna e Contemporânea. Conseqüentemente, essas complexidades afetam o comportamento dos indivíduos para consumir e produzir no contexto dado pela dimensão econômica. Para serem eficazes no atendimento à demandas, em termos Logísticos e Institucionais, os agentes transportadores devem assumir sua importância máxima. Considerando que um sistema econômico seja formado por agentes econômicos que atuam efetivamente como multi-decisores nas suas formas de competição por recursos escassos, o referido *equilíbrio de preços* não pode ser determinado por um processo de observação simples e direta sobre os seus elementos, tomando agente por agente de maneira isolada. Está-se considerando aqui os agentes econômicos como aqueles agentes cujo papel é o de descrever completa e adequadamente o contexto do problema *SPE*.

Em um modelo de representação reduzido, usando um conjunto de variáveis de estado adequado e usando mapeamentos específicos para descrever as propriedades do sistema, pode-se explicar as capacidades locais dos agentes produtores, descrever a noção de escassez por mercadorias dos agentes consumidores e ainda explicar a capacidade dos agentes transportadores em atender as demandas globais. Por sua vez, com plena independência e motivados pelo próprio interesse e sensibilidade ambiental, os agentes percebem os sinais econômicos no sistema, agindo racionalmente sobre ele, promovendo mudanças dinâmicas que os afetam mutuamente. Essas mudanças são entendidas como perturbações na rede econômica e podem ser mapeadas por funcionais baseados em variáveis de estado do sistema. Homeostaticamente, após algumas perturbações ocorrerem no sistema, o equilíbrio espacial de preços será atingido novamente, com novos preços e novos fluxos de bens assumidos por cada agente no sistema econômico. Esta condição

estacionária está relacionada à ausência de incentivo sistêmico para melhorar a condição econômica de cada agente. Nesse cenário, pode-se afirmar que no equilíbrio espacial de preços nenhum agente econômico poderá melhorar os seus preços ou os seus fluxos associados aos bens que produz, consome ou transporta. Todos eles podem relatar suas condições e medidas associadas que anunciam e representam efetivamente o estado de equilíbrio do sistema econômico considerado.

O problema *SPE* de um dado sistema econômico é o desafio da determinação do valor para as variáveis de estado que estão associadas ao equilíbrio de preços do sistema econômico em um dado momento. Os preços e fluxos de bens para cada agente devem ser conhecidos na condição estacionária. Para resolvê-lo, engenheiros e cientistas propõem abordagens específicas baseadas em um conjunto de métodos de programação matemática, de modelos matemáticos, de estruturas de dados e algoritmos adequados. Devido à sua natureza, o problema *SPE* ainda impõe sobre as técnicas de resolução utilizadas o mesmo triplo *tradeoff*: {acurácia; tamanho; tempo de execução} descrito em (FRIESZ; HARKER; TOBIN, 1984).

### 2.2.1 Formulação do problema de Equilíbrio Espacial de Preços

Nesta seção, o problema *SPE* é formulado com o objetivo de lidar com suas características em termos matemáticos. Uma formulação adequada é dotada de elementos matemáticos suficientes para descrever consistentemente a totalidade dos aspectos que estão relacionados com as tarefas de determinação do equilíbrio espacial de preços para um dado sistema econômico, incluindo grafos, estruturas de dados e representações pictóricas. Portanto, espera-se que um problema *SPE* tenha uma formulação específica para descrever agentes econômicos, preços, fluxos, restrições e medidas associadas. Outros elementos como conjuntos e espaços, variáveis e vetores, iteradores e matrizes, podem ser mapeados também por estruturas de dados adequadas para serem referenciados consistentemente em sua formulação.

O sistema econômico ilustrado na Figura 3.a tem seu equilíbrio representado no ponto  $Q_e \in R^n$ . As funções de preço não-linear dos agentes seriam descritas na formulação do problema *SPE* de maneira consistente com  $Q_e$  e todos os outros elementos. Os aspectos que estão associados à distribuição espacial entre os agentes do sistema são ados na Figura 3.b, onde as variáveis configuradas que representam a medida dos fluxos de mercadorias fluindo entre os agentes e seus preços



seriam consistentes também com a topologia real do fluxo no sistema econômico. O grafo bipartido descreve muito bem a topologia referida. Observe que para ser mais específico sobre os recursos do problema, mais detalhes devem ser adicionados á sua formulação. O grafo especifica as cardinalidades  $\{N, M\}$  para fornecedores e consumidores, mas falha na especificação para a quantidade de transportadores envolvidos, porque não é explicitado que a cardinalidade dos transportadores seja dada pelo produto cartesiano  $N \times M$ , como é implicitamente sugerido. Assim, para cada aspecto relevante do contexto do problema *SPE*, espera-se que um conjunto de termos matemáticos consistentes seja adicionado à sua formulação.

Da mesma forma, uma formulação adequada do problema *SPE* deve captar totalmente o conceito encapsulado em *Lei da Oferta e Demanda*, que é um dos princípios mais básicos em Economia, no qual afirma que se um item é escasso, mas é tão demandado em determinado sistema econômico, o preço desse item aumentará. Por outro lado, se houver uma oferta maior de um item do que demandado pelos consumidores, o preço deste item cairá. Assim, espera-se que a oferta e a demanda subam e desçam até atingirem um equilíbrio mensurável. Este equilíbrio é um ponto de equilíbrio que pode ser percebido factualmente e confirmado empiricamente. Desta forma, assume-se que os fornecedores, transportadores e consumidores possuam funções de preços que são matematicamente monótonas, como é mostrado na Figura 3a. A formulação do problema deve ser dotada de termos matemáticos consistentes com o objetivo de modelar as funções de preços não-lineares dos agentes, sem ambigüidades no entendimento sobre a representação do comportamento dos agentes atuando no sistema.

Antes de entrar em aspectos de formulação do problema *SPE*, convém parafrasear (NAGURNEY, 1987) na questão da definição formal do problema *SPE*: “busca-se calcular os preços de oferta de mercadorias, os preços de demanda e os fluxos de comércio que satisfazem a condição de equilíbrio espacial de preços para tornar válido o comércio entre cada par de mercados de oferta e demanda, em que o preço de demanda deve ser igual ao preço de oferta mais o custo de transporte associado. Assim, se o preço de demanda for menor que o preço de oferta mais o custo de transporte, então, não haverá comércio entre eles”. Esta noção de condição de equilíbrio deve ser formulada matematicamente.

A formulação básica do problema *SPE* tem sido muito bem discutida em vários trabalhos científicos, alguns deles estão referenciados na seção 2.4. Neste trabalho, faz-se necessário empregar algumas no-

menclaturas e notações adicionais ou específicas para o processo de caracterização do problema. Decidiu-se por um sistema de nomes semelhantes e análogo ao sistema apresentado em (HARKER, 1986), (??), (CHAO; FRIESZ, 1984) e (HARKER, 1984). O modelo e o algoritmo proposto estão fortemente baseados nas seguintes notações e proposições.

O modelo matemático clássico usado para resolver o problema *SPE*, considerado como um problema de *Programação Não-Linear - NLPP*, está representado pelas expressões (2.1) até (2.4). Estas expressões estão em conformidade com a notação utilizada também em (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016).

Maximize  $Z(\mathbf{X}) =$

$$\sum_{j=1}^M \int_0^{d_j} D_j(d_j) dq - \sum_{i=1}^N \int_0^{q_i} S_i(q_i) dq - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_0^{x_{ij}} C_{ij}(x_{ij}) dq \quad (2.1)$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^N x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, M \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^M x_{ij} = q_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (2.4)$$

O funcional  $Z(\mathbf{X})$  é utilizado para descrever o ganho geral da Sociedade, associado ao sistema econômico considerado, que deve ser maximizado. Seu *RHS*, dado pela expressão 2.1, é constituído por três partes distintas da função objetivo: (i) a receita total originada dos bens consumidos em todos os mercados consumidores  $M$  distribuídos espacialmente, cada um deles caracterizado por  $D_j(d_j)$  funções de preço; (ii) os custos totais de produção associados à produção de bens por  $N$  fornecedores, também espacialmente distribuídos, cada um com sua própria margem de contribuição acoplada às suas curvas de oferta  $S_i(q_i)$ ; (iii) os custos totais dos serviços de transporte associados aos deslocamentos do par *origem* e *destino* ( $i; j$ ), feitos pelos transportadores com suas próprias margens de contribuição  $C_{ij}(x_{ij})$ .

Esta é a base matemática para a formulação do problema *SPE*, a ser utilizada para descrever agentes econômicos atuando em regime de competição perfeita. Para tornar a formulação básica completa,

é necessário ainda a especificação a especificação de duas restrições adicionais para capturar o conceito de equilíbrio espacial de preços e para tornar possível a exigência do princípio de conservação de fluxo. Espera-se que a solução do problema seja um programa associado ao vetor  $\{\mathbf{X}\}$ , para qualquer arco  $(i; j)$ , também denominado *link*, válido dentro da rede, seja o mais preciso possível para descrever a situação ideal para  $Z(\mathbf{X})$ , sob as condições de atendimento de todas as restrições descritas na formulação do problema *SPE* e apresentadas no modelo utilizado.

$$S_i(q_i) + C_{ij}(x_{ij}) = D_j(d_j) \quad \rightarrow \quad x_{ij} > 0 \quad (2.5)$$

$$S_i(q_i) + C_{ij}(x_{ij}) > D_j(d_j) \quad \rightarrow \quad x_{ij} = 0 \quad (2.6)$$

No contexto de qualquer problema *SPE*, os conjuntos  $\{S_i(q_i)\}$ ,  $\{D_j(d_j)\}$  e  $\{C_{ij}(x_{ij})\}$  são compostos por funções de preços que podem ser lineares ou ser não lineares, tanto para fornecedores e consumidores como para os agentes de transporte, respectivamente. Os fluxos permanecem sob as restrições que obedecem ao princípio de conservação de fluxo, dadas por todas as equações que estão descritas em (2.2) e (2.3). As variáveis de decisão envolvidas devem satisfazer as exigências de não-negatividade impostas por (2.4). Por essas cláusulas obrigatórias, se o referido conjunto for formado exclusivamente por funções de preços lineares, então o modelo é classificado como sendo um problema de Programação Quadrática (*Quadratic Programming Problem*). Caso contrário, trata-se de um modelo típico de Programação Não-Linear (*Non-Linear Programming Problem*). Presume-se aqui que as seguintes limitações são aplicáveis sobre o contexto do problema: (i) os problemas *SPE* são apenas sobre casos *monocommodities*; (ii) as capacidades dos agentes, agindo em regime de competição perfeita, são não limitadas, isto é, elas são sempre suficientes.

As expressões descritas em (2.5) e (2.6) afetam fortemente a maneira pela qual o equilíbrio é alcançado e como a solução do problema *SPE* é numericamente obtida, possuindo as seguintes interpretações:

1. O estado do equilíbrio espacial de preços é considerado apenas sobre fluxos válidos em *links* válidos na rede. Haverá um fluxo válido se  $x_{ij} > 0$  em um arco válido  $(i, j)$  somente e somente se, a igualdade expressa por (2.5) for satisfeita. Assim, os preços nos fornecedores adicionados pelo preço nos transportadores devem ser iguais ao preço definido pela função inversa da demanda configurado para os agentes consumidores. Em problemas *SPE*,

qualquer fornecedor pode atender a muitos consumidores e qualquer consumidor pode consumir bens produzidos por muitos fornecedores. Eles, juntamente com os transportadores, são multi-decisores atuando em regime de competição perfeita.

2. Na formação dinâmica da rede, durante o cálculo do equilíbrio global do problema *SPE*, os *links* são adicionados ao sistema econômico. Como consequência, o estado anterior da validade do *link* pode ser modificado. Assim, alguns fluxos assumiriam valor zero, como expresso em (2.6), e o *link* deve ser removido. A possibilidade do processo de reinserção de um link que foi anteriormente removido é aceitável, desde que sua propriedade de validade seja reconfirmada novamente em outra oportunidade.

$$\text{Se } ( S_i(q_i) + C_{ij}(x_{ij}) < \tilde{D}_j(d_j) ) \text{ então} \quad (2.7)$$

$$\{ \dots \text{ o equilíbrio ainda não foi alcançado } \dots \}$$

3. No mesmo sentido, a expressão em (2.7) sugere que existe uma condição especial quando o processo de cálculo do equilíbrio está em sua fase intermediária, entre dois estados de equilíbrio consecutivos. Naturalmente, o novo estado de equilíbrio ainda não foi alcançado. Isso afeta a validade dos *links* também, de maneira recursiva.

O fato de que após algumas perturbações específicas, um dado equilíbrio de preço seja obtido a partir de uma variação de fluxo computado que pode ser negativa em tal magnitude que o fluxo final em um dado link seja também negativo é digno de consideração adicional. Esta situação, não aceita pelas restrições (2.4) e (2.5), justifica as ações de controle para as tarefas de remoção do referido *link* do sistema econômico. Essas tarefas elevam a complexidade do método de solução proposto porque são necessários mais controles algorítmicos para serem implementados. Esta é uma marca intrínseca para a terceira fase do *Algoritmo Alternativo* proposto neste trabalho.

### 2.3 TRABALHOS QUE ABORDAM O PROBLEMA *SPE*

O problema *SPE* tem sido o foco de atenção de pesquisadores no mundo há várias décadas. Por muitos anos, a indústria e outras organizações, com suas dimensões institucionais, atuam no mercado

global em busca de vantagem competitiva, de forma contínua. Hoje, eles formam uma rede de cadeia de suprimentos realmente enorme e sistêmica. Ainda mais do que antes, essa arquitetura exige a incorporação de conhecimentos para melhorar a taxa de sucesso em seu processo de tomada de decisões. Isto implica em elaborar estratégias empresariais e elevar a efetividade logística para reverberar, em escala local e por ações controladas, as vibrações do mercado global que ocorrem continuamente, no dia-a-dia, em termos de mudança de desejos e de padrões de consumo dos consumidores na forma moderna e contemporânea de viver a vida em Sociedade. Assim, os entendimentos das situações e condições que definem o estado de equilíbrio de preços de um determinado sistema econômico são cruciais, uma parte significativa do conhecimento institucional que flui dentro de um processo de conhecimento global que é usado para manter e ampliar a competência logística das organizações. Assim, atualmente, o problema do *SPE* mantém sua relevância e ainda representa uma área aberta de contínua pesquisa. A Figura 4 descreve a linha do tempo do objeto *SPE*. Os autores citados, entre outros, já haviam mostrado os três diferentes tipos de abordagens, baseadas nos aspectos conceituais, nas metodologias de resolução numérica e na modelagem generalista *VIP*. Atualmente, esses estilos ainda têm sido utilizados de diferentes maneiras, para ampliar sua abrangência ou sua profundidade.

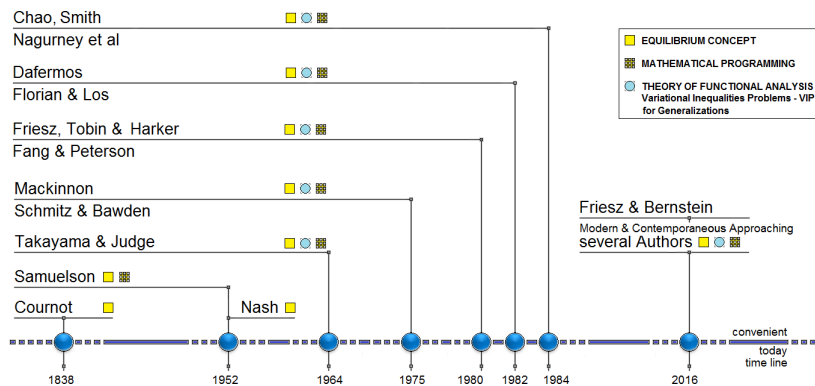


Figura 4. Uma linha de tempo conveniente para os marcos históricos associados às pesquisas sobre problemas *SPE*. Fonte: o autor.

Retoma-se aqui o termo adequado *seminal paper*, postado por (HARKER, 1986), para apontar para a marca inicial histórica para os es-

tudos problemas *SPE*, representada pelo trabalho conceitual de (SAMUELSON, 1952), seguido por (TAKAYAMA; JUDGE, 1971), que oferece uma abordagem matemática e formal para os casos de modelos de equilíbrio com monopólio e concorrência perfeita. Os conceitos de equilíbrio no contexto econômico foram bem tratados em (BAWDEN, 1966), (BAWDEN; SCHMITZ, 1973) e (FANG; PETERSON, 1983). Essas obras inspiraram a ampliação do campo de discussão nas direções dadas pelos modelos de *Cournot-Nash* e *Bertrand-Nash*. Atualmente, a complexidade dessa temática ganhou crescente abrangência e profundidade, e está totalmente baseada nas considerações propostas por (COURNOT, 1838) e (NASH, 1951). Vários modelos conceituais e estudos algorítmicos tratam essas características em casos lineares e não-lineares que são aplicados e executados sobre problemas reais. Em geral, suas evoluções na linha do tempo assumem uma combinação específica de três técnicas básicas de abordagem, dadas por: (i) uma discussão sobre o conceito de equilíbrio e as relações entre as características preassumidas do sistema econômico; (ii) um modelo matemático específico e seu método de resolução de programação matemática acoplada; e por último, (iii) as interpretações e aplicações das novas abordagens sobre problemas *SPE* que são baseadas pelas metodologias de Análise Funcional e Inequações Varacionais. Estas novas abordagens visam elaborar formulações generalistas para o problema. Estes aspectos estão descritas na Figura 4.

Os autores (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016) e (FRIESZ; HARKER; TOBIN, 1984) apresentam uma coleção de algoritmos adequados com interpretações inovadores e os compararam com algoritmos implementados com base em estratégias distintas<sup>3</sup>. Esses autores afirmam que esse tipo de problema assegura que todas as abordagens existentes, mesmo as mais recentes, possuam como característica comum dada pelo mesmo tridimensional *tradeoff* conhecido como  $\{acurácia; tamanho; tempo de processamento\}$ . Desta forma, assume-se aqui que essa característica está muito presente nos problemas de *SPE*, que induz o desenvolvimento de novas abordagens sobre o uso de métodos numéricos tradicionais combinados com novas heurísticas ou ainda usando táticas baseadas em *VIP*. Em geral, as abordagens e modelos recentes estão fortemente comprometidas em melhorar as capacidades dos modelos, métodos e técnicas já consagrados, ou ainda em elaborar generalizações com o objetivo de ampliar ainda mais sua profundidade ou abrangência,

---

<sup>3</sup>Várias abordagens usam algoritmos baseados em *Frank & Wolfe* e *Gradiente Projetado*, como descrito em (WOLFE, 1959) e (BERTSEKAS, 1999). Outras abordagens também são baseadas na formulação variacional -*VIP*, uma forma de resolução muito bem reconhecida, em que estão detalhadas em (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016), (NAGURNEY, 1999) e (HARKER; PANG, 1990).

visando resolver novos problemas reais de *SPE*.

Os autores (MACKINNON, 1975) e (PANG; LEE, 1981) expõem algumas perspectivas sobre métodos numéricos baseados em abordagens de ponto fixo e de complementariedade sobre problemas *SPE*. Em (CHAO; FRIESZ, 1984) e (IRWIN; YANG, 1982) descrevem-se abordagens detalhadas para sua análise de sensibilidade. Este último tratou o caso caracterizado por grafos bipartidos com funções de suprimento e demanda lineares <sup>4</sup> associadas exclusivamente à custos de transporte constantes.

Os autores (FLORIAN; LOS, 1982) and (DAFERMOS STELLA; NAGURNEY, 1984) propuseram significativas contribuições, juntamente com outros colegas contemporâneos, incluindo (HARKER, 1984), onde os casos envolvendo problemas *SPE* lineares e não-lineares são tratados e oferecendo uma análise cronológica das abordagens consideradas. Várias metodologias baseadas na abordagem de Inequações Variacionais foram muito bem discutidas em (DAFERMOS; NAGURNEY, 1984), (SMITH; FRIESZ, 1985) and (DAFERMOS; NAGURNEY, 1987), nas quais foram estendidas em várias direções de interesse para aplicações reais em (NAGURNEY, 1999), (NAGURNEY; LIU, 2012), assim como em (BOYCE; MAHMASSANI; NAGURNEY, 2005) and (NAGURNEY; ARONSON, 1988).

## 2.4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EXISTENTES

Esta seção descreve alguns métodos de otimização existentes na literatura, no âmbito da Programação Matemática, mais comumente utilizados na resolução de Problemas de Programação Não-Lineares, *NLPP*. Eles são abordados aqui exclusivamente para dar suporte ao processo de descrição do problema de equilíbrio econômico e para facilitar o entendimento dos procedimentos algorítmicos associados ao processo de obtenção da solução numérica do problema e também do processo de acompanhamento da sua convergência. Além disso, estes algoritmos assumem destacável relevância no contexto do Algoritmo a ser proposto pelo presente trabalho. Duas subseções serão utilizadas para descrever os referidos métodos. Na primeira delas apresenta-se um conjunto de métodos de Programação Matemática e na segunda descrevem-se-os pela sua pertinência às classes de problemas, denomi-

---

<sup>4</sup>A abordagem do *Algoritmo Alternativo* lida também com partições quadráticas de problemas originais exclusivamente representados por funções de preço não-lineares para fornecimento, demanda e transporte, em modelos baseados em grafos bipartidos, que são sempre grafos conexos maximais.

nados *Problemas de Inequações Variacionais, VIP*, que são resolvíveis por meio da teoria denominada *Teoria das Inequações Variacionais*. Entre os métodos a serem estudados na primeira etapa, tem-se o Algoritmo de *Frank-Wolfe* e o Algoritmo do *Gradiente Projetado*. O funcionamento destes dois métodos revela os seus pontos fortes, dados pela capacidade de fornecer a solução numérica, e também destaca o importante aspecto que é o tratamento da *Convergência Numérica*. De certa forma, este aspecto, tomado como efeito colateral a eles associados, justifica o desenvolvimento de um algoritmo alternativo, que é o caso do Método Proposto nesta Tese.

A atividade de descrição dos métodos representa uma oportunidade para tratar de importantes aspectos conceituais, como *Convexidade*, *Unicidade*, *Existência*, *Diferenciabilidade* e *Regularidade*, associados à capacidade deles em resolver o problema de otimização para um dado funcional  $Z(X)$ . É importante destacar que um bom modelo deve garantir que as características do problema, baseadas nestes conceitos, sejam adequadamente descritas e garantidas pelas suas propriedades modeladas. Estas garantias aumentam a complexidade do tratamento do funcional, do processo de verificação das condicionantes *KKT*, descritas em (KUHNS; TUCKER, 1951), e da elaboração de algoritmos específicos para a resolução controlada do problema. Estes elementos conceituais serão considerados no Modelo a ser proposto no presente trabalho.

#### 2.4.1 Métodos de resolução baseados em Programação Matemática

No âmbito da *Pesquisa Operacional*, caracterizada pela abordagem científica para o gerenciamento do processo de tomada de decisões estratégicas pelas organizações, de acordo com (WOLSEY, 1998), (HILLIER; LIEBERMAN, 2013) e (GOLDBARG; LUNA, 2000), a *Programação Matemática* é uma linguagem descritiva utilizada para formalizar problemas de otimização por meio de modelos constituídos por parâmetros, variáveis de decisão, restrições associadas, juntamente com uma explícita caracterização da função objetivo do problema. É também definida como uma coleção de técnicas e métodos matemáticos utilizados para resolver tais problemas previamente formulados. Algumas delas serão mencionadas nesta sub-seção.

De acordo com (SHEFFI, 1985), a *Programação Matemática* é a disciplina que estuda a minimização de funcionais multidimensionais em problemas com ou sem restrições. Em termos gerais, estes problemas



são formulados conforme as expressões (2.8)<sup>5</sup> e (2.9).

$$\text{Minimizar: } Z(X) \quad (2.8)$$

sujeito à:

$$g_j(X) \geq b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (2.9)$$

A solução ótima do problema é um vetor  $X^*$ , ou programa, pertinente ao espaço das soluções exequíveis  $X$ , que efetivamente minimiza o funcional  $Z(X)$ . Trata-se de um ínfimo comprovável da medida de *performance*, dado pelas expressões (2.10) e (2.11).

$$Z(X^*) \leq Z(X) \quad (2.10)$$

$\forall$  vetor factível  $X$

$$g_j(X^*) \geq b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (2.11)$$

Em *Programação Matemática* algumas características do problema devem ser observadas antecipadamente para que seja possível estabelecer o método mais adequado para a busca da sua solução ótima. Elas dizem respeito às condições necessárias para garantir a propriedade de *Existência* da solução ótima e às condições suficientes para estabelecimento da propriedade de *Unicidade*.

## 2.4.2 Otimalidade de Primeira Ordem por *Karush-Khun-Tucker*

Os métodos de *Programação Matemática* estão sempre associados às condições necessárias e suficientes para caracterizar a solução ótima do problema a ser resolvido. Estes condicionantes oferecem a coleção de informações adicionais que tornam o sistema de equações associado ao problema solúvel ou que torna o processo de busca de solução efetivo (a convergência é sempre foco de atenção especial). Assim, de acordo com (SHEFFI, 1985), o programa ótimo, solução do problema genérico descrito em (2.8), um minimal restrito pelas restrições em (2.9), tem que necessariamente atender às condições de primeira ordem de *Karush-Khun-Tucker*, resumidamente descritas em (2.12) à

---

<sup>5</sup>Decidiu-se por apresentar os principais métodos de programação matemática associados a esta formulação geral. É importante perceber que este modelo é uma representação geral adequada também para o modelo específico de problema a ser tratado e resolvido neste trabalho, descrito pela expressão (2.1).

(2.15), anunciadas formalmente em (KUHN; TUCKER, 1951).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Z(X^*) - \left( \sum_{j=1}^J u_j [g_j(X^*) - b_j] \right) \right] = 0 \quad (2.12)$$

$$g_j(X^*) \geq b_j \quad (2.13)$$

$$u_j [g_j(X^*) - b_j] = 0 \quad (2.14)$$

$$u_j \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, J$$

As expressões acima exigem que as derivativas da função de minimização e das restrições vinculadas, ambas no programa ótimo  $X^*$ , um ponto de mínimo exequível, tenham o mesmo sinal. Em (2.12), tem-se a função Lagrangiana  $L$  associada ao problema, com seu minimal descrito pelas condições de primeira ordem, dada por  $\nabla_X(L(X^*, u)) = 0$ . Isto quer dizer que o gradiente da função objetivo pode ser descrito como uma combinação linear, formada por coeficientes não-negativos, dos gradientes das restrições ativas associadas.

Em algumas classes de problemas de *Programação Matemática*, as condições necessárias de *Karush-Khun-Tucker* são também condições suficientes para a determinação da solução ótima global. É o caso da classe de problemas denominada *Programação Convexa*, onde tanto a função objetivo como as suas restrições ativas são funcionais convexas. São exemplos a *Programação Quadrática* e *Programação Linear*. Noutras classes de problemas que não são de *Programação Convexa*, também muito comuns no contexto da *Programação Matemática*, as condições necessárias de primeira-ordem de *Karush-Khun-Tucker* não são mais condições suficientes para a determinação da solução ótima global. Neste caso, deve ser verificado a condição de segunda ordem, adicional ao processo de busca, descrita na expressão (2.16). Estas condições de segunda ordem exigem a propriedade de *Concavidade Estrita* na vizinhança do ponto mínimo, no sentido de garantir a existência de um mínimo local, assim como exigem também a propriedade de *Concavidade* tanto da função objetivo  $Z(X^*)$  e da região exequível, definida pelas restrições associadas ao problema, no sentido de garantir a unicidade da solução. Em outras palavras, deseja-se garantir que não exista nenhum outro mínimo local na vizinhança considerada.

$$h \cdot H \cdot h^T \geq 0 \quad (2.16)$$

$\forall h \neq 0$  onde :

$$\nabla \left( \sum_{j=1}^J u_j [g_j(X^*) - b_j] \right) \cdot (h^T) = 0 \quad (2.17)$$

$$H = \nabla_x^2(L(X^*, u)) \quad (2.18)$$

A propriedade de unicidade, verificável pelas condições de segunda ordem, é determinada matematicamente pela formação da matriz *Hessiana*,  $H$ , aplicada sobre a *Lagrangiana*,  $L$ , associada ao problema. Usualmente, está arranjada de forma simétrica. Os elementos são segundas derivativas parciais  $H = \nabla_x^2(L(X^*, u))$ . A condição matemática para que assegura que os funcionais presentes em  $L$  sejam estritamente convexos é que sua *Hessiana* seja positiva-definida, no ponto ótimo, com  $h \cdot H \cdot h^T > 0$ , para qualquer direção estacionária  $h$ .

As expressões (2.19) e (2.20) descrevem a forma da matriz *Hessiana* para os casos em que os funcionais associados ao problema são não-restritos ou com restrições lineares, típicos de *Programação Quadrática*.

$$H = \nabla_x^2(L(X^*, u)) = \nabla^2(Z(X^*)) \quad (2.19)$$

$$\nabla^2(Z(X^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2 \cdot \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_N \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_N \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_N^2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.4.3 Aspectos Gerais dos Algoritmos de Otimização Não-Linear

Em termos gerais, os algoritmos de programação não-linear, com ou sem restrições associadas ao problema, envolvem a execução de procedimentos iterativos em que novos programas exequíveis  $X$ , pertencentes à um espaço multidimensional, são gerados a partir de um programa viável inicial  $X_0$ . Conforme (MURTY, 1988), à cada iteração controlada,

uma aproximação adequada da solução do problema é obtida. Critérios específicos de parada, geralmente descritos em termos de um nível de tolerância  $\kappa$  previamente especificado, vinculado a um acompanhamento de convergência<sup>6</sup>, conforme a expressão (2.22), determinam o fim da aproximação.

$$X^{n+1} = X^n + \alpha_n \cdot d^n \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) descreve a referida aproximação, obtida a partir da  $n$ -ésima iteração. Em cada uma delas, um processo constituído por duas etapas é realizado. Na primeira etapa determina-se a direção de busca, representado pelo vetor  $d$ . A segunda etapa é marcada pela realiza-se da avaliação do parâmetro escalar  $\alpha_n$ , que representa o tamanho do passo a ser realizado ao longo da direção de busca determinada previamente.

$$Z(X^{n+1}) - Z(X^n) \leq \kappa \quad (2.22)$$

Costuma-se classificar algoritmos de *Programação Matemática* de acordo com a ordem das derivativas utilizadas sobre os funcionais associados ao problema que se vai resolver. Os autores (HILLIER; LIEBERMAN, 2013) afirmam que os algoritmos de *primeira-ordem* são aqueles que utilizam funcionais gradientes sobre a função objetivo,  $\nabla Z(X)$ , e também sobre as restrições, para calcular a direção de busca. Os algoritmos de *segunda-ordem*, por sua vez, utilizam informações provenientes das *Hessianas* aplicadas sobre o problema.

É praxe também fazer uso de analogias unidimensionais para descrever características de alguns algoritmos utilizados em contextos multidimensionais. Nestes casos, é importante destacar que as facilidades decorrentes de seu uso não são livres de ônus. Por exemplo, é sempre dificultoso tratar graficamente de questões de regularidade de um funcional pertencente ao  $R^n$  por meio de analogias em  $R^1$ .

Em termos unidimensionais, tem-se que os algoritmos de otimização podem ser classificados em duas abordagens básicas. A escolha de uma, ou outra, depende de uma análise sobre a disponibilidade de informações a respeito das derivativas envolvidas e da facilidade de seu processamento numérico. Em ambos, as problemáticas abordadas

---

<sup>6</sup>De acordo com (SHEFFI, 1985), a escolha do critério de convergência está baseada sobre as características do funcional a ser minimizado,  $Z(X)$ , sobre as especificidades do algoritmo utilizado e sobre o contexto no qual o problema é resolvido.

por elas são sempre do tipo não-restritas. A primeira abordagem trata dos Métodos de Redução de Intervalos e a segunda trata dos Métodos de Ajuste de Curvas.

Os Métodos de Redução de Intervalos envolvem procedimentos iterativos que procuram reduzir o tamanho do intervalo, previamente conhecido, que contenha um ponto de mínimo local  $X^*$ . Alguns deles, efetivamente, não utilizam conhecimentos associados às derivativas do problema. Como exemplo, tem-se os métodos denominados *Golden Section*. A cada nova iteração, o intervalo corrente  $[a^n, b^n]$  é examinado e dividido em duas partes distintas. Aquela que não contém o mínimo é descartada. Um novo intervalo é gerado. O procedimento é repetido iterativamente, de modo que o intervalo corrente seja continuamente reduzido, até que um critério de parada, geralmente dado por uma constante predeterminada  $\epsilon$ , seja atendido. O valor assumido como solução ótima do problema é o ponto médio do intervalo na última iteração, conforme descrito pela expressão (2.23). Existem outros algoritmos que utilizam informações a respeito das derivativas sobre a função a ser minimizada. Como exemplo, os métodos denominados *Bisection*, baseados na busca de Bolzano. Este tipo de algoritmo computa a derivativa de  $Z(X)$  no ponto médio do intervalo corrente e leva em consideração o seu sinal, aproveitando-se do fato de que o funcional ditônico é monotônico à direita ou esquerda do minimal. Então, se o sinal da derivativa no referido ponto médio é negativo, o sub-intervalo à esquerda do ponto médio é descartado. Um novo intervalo é produzido e novas iterações de verificação são realizadas, até que as condições de parada sejam atendidas. As expressões (2.24) e (2.25) descrevem como a aproximação linear sempre subestima um funcional convexo.

$$X^* = \left( \frac{a^n + b^n}{2} \right) \quad \text{com} \quad \left( \frac{b^n - a^n}{2} \right) \leq \epsilon \quad (2.23)$$

$$Z(a^n) + \left[ \frac{d}{dx} ( Z(a^n) ) \right] \cdot (X^* - a^n) \geq Z(X^*) \quad (2.24)$$

$$Z(b^n) + \left[ \frac{d}{dx} ( Z(b^n) ) \right] \cdot (X^* - b^n) \geq Z(X^*) \quad (2.25)$$

Os Métodos de Ajuste de Curvas operam iterativamente melhorando o ponto solução corrente. As características da função a ser minimizada neste ponto são utilizadas para gerar uma funcional aproximada para  $Z(X)$ , suave, na forma de parábola. O novo ponto, é obtido como sendo um minimal da aproximação realizada. Geralmente, os al-

goritmos se diferenciam entre si pela forma de geração da função aproximada. Desta forma, este tipo de método se caracteriza pela geração de uma série convergente de pontos  $X^1, \dots, X^n, \dots$  que se aproxima do mínimo real  $X^*$ . Cada ponto é gerado por um procedimento algorítmico específico que utiliza o ponto obtido na iteração anterior. O algoritmo termina quando um critério é alcançado, conforme expressão (2.22). Obviamente, espera-se também que a derivativa da função objetivo no último ponto da série esteja suficientemente próxima de zero.

$$\hat{Z}(X) = Z(X^n) + \left[ \frac{d}{dx} ( Z(X^n) ) \right] \cdot (X - X^n) + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{d^2}{dx^2} ( Z(X^n) ) \right] \cdot (X - X^n)^2 \quad (2.26)$$

$$X^{n+1} = X^n - \left( \frac{\left[ \frac{d}{dx} ( Z(X^n) ) \right]}{\left[ \frac{d^2}{dx^2} ( Z(X^n) ) \right]} \right) \quad (2.27)$$

$$Z(X^1) > Z(X^2) > \dots > Z(X^n) > \dots > Z(X^*) \quad (2.28)$$

O método de Newton aproxima a função objetivo  $Z(X)$  em cada iteração por meio de uma função de ajuste quadrático  $\hat{Z}(X)$ , no ponto corrente  $X^n$ . Esta curva é uma parábola, conforme a expressão (2.26), e representa a série de Taylor expandida até o grau dois, inclusive. O próximo ponto obtido na iteração  $n + 1$ , dado por  $X^{n+1}$ , é calculado em conformidade com a expressão (2.27). Este ponto minimiza a parábola aproximadora. Segundo (SHEFFI, 1985), este método é muito eficiente. Eles também se comportam como se fossem métodos de descidas estritas, após algumas iterações iniciais. Essa característica está descrita na expressão (2.28). Entretanto, seus *tradeoffs* estão associados ao fato de que ele requer conhecimento prévio, em cada iteração, a respeito das primeiras e segundas derivativas da função objetivo real,  $Z(X) \in C^2$ . Em algumas circunstâncias, do ponto de vista do esforço computacional necessário, este aspecto pode ser demasiadamente custoso ou proibitivo.

$$\frac{d^2}{dx^2} ( Z(X^n) ) \simeq \left( \frac{\left[ \frac{d}{dx} ( Z(X^{n-1}) ) \right] - \left[ \frac{d}{dx} ( Z(X^n) ) \right]}{\left[ X^{n-1} - X^n \right]} \right) \quad (2.29)$$

Quando a segunda derivativa da função objetivo na iteração  $n$ , dado por  $Z(X^n)$ , não está disponível, ou é difícil de avaliar, usa-se o método da Falsa Posição. Por meio dele, o valor da segunda derivativa,

obtida pela expressão (2.29) é utilizado como substituto aproximado na expressão (2.27). Uma outra alternativa para ajuste quadrático de curvas denomina-se Ajuste Quadrático Paramétrico Baseado em Três Pontos. Trata-se de uma curva suave interpoladora, polinomial e paramétrica, semelhante aos tipos *B-Spline* e *Bezier*. Nele, as derivativas de primeira e segunda ordem são substituídas por relações existentes entre as posições de três pontos específicos,  $\{X_1, X_2; X_3\}$ . Estes valores são representativos dos três menores valores recentes para a função objetivo na iteração corrente. O valor de  $X^{n+1}$  é obtido por (2.30).

$$X^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot Z(X_1) + \beta \cdot Z(X_2) + \gamma \cdot Z(X_3)}{\delta \cdot Z(X_1) + \epsilon \cdot Z(X_2) + \zeta \cdot Z(X_3)} \right] \quad (2.30)$$

$$\text{onde:} \quad \alpha = (X_2^2 - X_3^2) \quad (2.31)$$

$$\beta = (X_3^2 - X_1^2) \quad (2.32)$$

$$\gamma = (X_1^2 - X_2^2) \quad (2.33)$$

$$\delta = (X_2 - X_3) \quad (2.34)$$

$$\epsilon = (X_3 - X_1) \quad (2.35)$$

$$\zeta = (X_1 - X_2) \quad (2.36)$$

Em geral, os métodos de ajuste de curvas são mais rápidos que os equivalentes de redução de intervalos. Nas sub-seções seguintes serão abordados os dois tipos mais utilizados de métodos de programação matemática para funcionais multidimensionais convexos: Método do *Gradiente Projetado* e Método de *Frank-Wolfe*.

#### 2.4.4 Aspectos Gerais dos Métodos das Direções de Descida

Esta seção trata da apresentação dos aspectos gerais dos métodos das Direções de Descida utilizados para resolver problemas de otimização de funcionais multivariados e convexos. Eles são chamados assim porque seus algoritmos geram uma sucessão de programas exequíveis,  $X^{n+1}$ , a partir de um programa inicialmente viável,  $X^n$ , tal que, sem exceção, a sequência descrita em (2.28), resumida em (2.38), esteja satisfeita em cada iteração. Em outras palavras, a cada novo programa (vetor solução) obtido, uma efetiva aproximação do mínimo local do problema  $Z(X^*)$  é alcançada. A expressão (2.37) descreve o procedimento algorítmico característico do método das Direções de Descida.

$$X^{n+1} = X^n + \alpha_n \cdot d^n \quad (2.37)$$

$$Z(X^{n+1}) < Z(X^n) \quad (2.38)$$

$$\nabla Z(X^n) \cdot d^n < 0 \quad (2.39)$$

O vetor  $d$  sempre apontará para uma direção de descida<sup>7</sup> do funcional  $Z(X)$ . A expressão (2.39) garante que esta direção é efetivamente de descida, de minimização. O escalar  $\alpha_n$ , mandatariamente não-negativo, representa o tamanho do passo que o algoritmo deve dar para alcançar o novo programa exequível. Os vários algoritmos que implementam este tipo de método se diferenciam entre si, pelos critérios técnicos associados ao processo de determinação, em cada iteração, do vetor direcional de descida e do tamanho do passo a ser dado.

A forma de parada de cada algoritmo também faz parte do conjunto de critérios, sendo previamente especificada. Como exemplo tem-se três formas distintas, conforme as expressões (2.40) à (2.42). A primeira forma de parada exige que a uma diferença entre duas aproximações finais da função objetivo não pode ser superior a uma constante  $\kappa$ , vista como uma medida de tolerância. A segunda estabelece que todas as componentes do campo gradiente deste funcional deverão estar limitadas superiormente. Em seu último exemplo, tem-se que este limitante superior é aplicado sobre a taxa de variação de cada uma das componentes do vetor programa aproximado  $X_i^n$ .

$$Z(X^{n-1}) - Z(X^n) \leq \kappa \quad (2.40)$$

$$\max \left\{ \left\| \frac{\partial Z(X^n)}{\partial x_i} \right\| \right\}_i \leq \kappa \quad (2.41)$$

$$\max \left\{ \left| \frac{X_i^n - X_i^{n-1}}{X_i^{n-1}} \right| \right\}_i \leq \kappa \quad (2.42)$$

O método *Steepest Descent* para Problemas Não-Restritos caracteriza-se pela utilização da direção de descida  $d^n$  tomada como oposta à direção do gradiente da função objetivo  $Z(X^n)$ . Para a determinação do tamanho do passo, dado pelo parâmetro  $\alpha_n$ , toma-se o procedimento de resolver um sub-problema<sup>8</sup>, em cada iteração, de minimização da-

<sup>7</sup>Em termos numéricos, não se exige que este vetor esteja normalizado, pois ele estará sempre acoplado ao tamanho do passo para produzir o novo programa. O importante aqui é a noção de direção que ele oferece ao método de busca.

<sup>8</sup>Se  $Z(X^n)$  for quadrático, então este sub-problema é de otimização unidimensi-



quele funcional descrito em (2.37), tomando-se a direção  $d^n$  substituída pela direção que é oposta ao gradiente da função objetivo, dada por  $-\nabla Z(X^n)$ , em (2.43) a (2.45).

$$X^{n+1} = X^n + \alpha_n \cdot [-\nabla Z(X^n)] \quad (2.43)$$

$$Z(X^{n+1}) = Z( X^n + \alpha_n \cdot [-\nabla Z(X^n)] ) \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{d\alpha_n} \left[ Z( X^n + \alpha_n \cdot [-\nabla Z(X^n)] ) \right] = 0 \quad (2.45)$$

$$d^n \cdot d^{n+1} = 0 \quad (2.46)$$

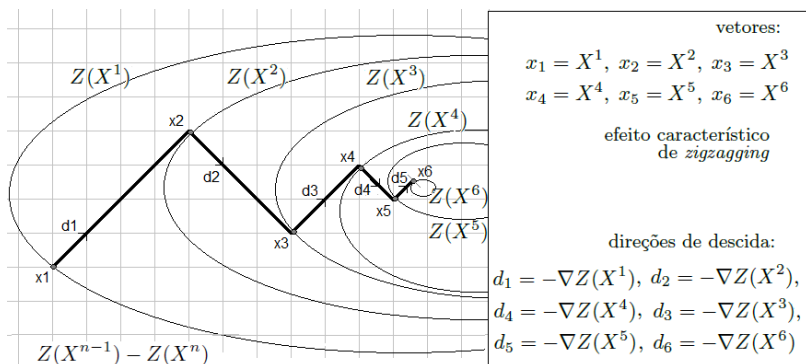


Figura 5. Gráfico associado ao padrão de convergência do método *Steepest Descent*. Fonte: o autor, adaptado de (SHEFFI, 1985).

De acordo com (SHEFFI, 1985) este método possui a interessante propriedade de descrever graficamente os aspectos associados ao seu processo de convergência para a solução na forma de um *zigzagging* característico. As sucessivas direções de busca são perpendiculares entre si, conforme descrito em (2.46).

Isto ocorre porque o novo programa  $X^{n+1}$  está localizado em uma posição alinhada em relação ao ponto anterior  $X^n$  pela direção oposta ao gradiente de  $Z(X^n)$ . Este alinhamento é ortogonal à direção de busca  $d^n$ , conforme a Figura 5.

---

onal, de encontrar um único  $\alpha_n$ , resolvível por um dos métodos de ajuste de curvas, ou ainda analiticamente pela expressão (2.45).

### 2.4.5 Métodos de Newton para Problemas Não-Restritos

Este algoritmo é o mais eficiente para problemas multidimensionais não-restritos. Trata-se de uma generalização do caso unidimensional descrito em (2.29). A função objetivo  $Z(X)$  é aproximada por uma Série de Taylor, truncada em segunda ordem, e minimizada. A nova solução, obtida algoritmicamente em cada iteração, está representada em (2.47). Nela,  $H(X^n)$  é a matriz *Hessiana* de  $Z(X^n)$ , associada ao programa  $X^n$ , que está sujeita ao operador de inversão  $[\cdot]^{-1}$ .

$$X^{n+1} = X^n + [ -\nabla Z(X^n) ] \cdot [ H(X^n) ]^{-1} \quad (2.47)$$

De acordo com (SHEFFI, 1985) o método de *Newton* é mais eficiente que o método *Steepest Descent* devido ao fato de que a sua direção de busca utiliza informação mais detalhada, proveniente da *Hessiana*, a respeito da forma da função objetivo. Obviamente, o custo computacional para a montagem da matriz e para o processamento de sua inversa é maior. Em algumas circunstâncias, este custo é proibitivo. Alguns métodos alternativos para compensá-lo, denominados *Quasi-Newton*, utilizam formas específicas de aproximar a referida matriz e de produzir a sua inversa por meio de regras de montagens próprias.

### 2.4.6 Métodos de Minimização para Problemas Restritos

Esta sub-seção trata de uma coleção de métodos de resolução de problemas de programação matemática, não lineares, com restrições definidas em termos de equações e inequações exclusivamente lineares e convexas. Estes métodos são, de certa forma, semelhantes aqueles aplicados sobre casos irrestritos. Entretanto, diferentemente daqueles, assumem o compromisso adicional de estarem totalmente focados na busca por um programa, ou uma sucessão deles, obtida por iterativa aproximação, completamente pertinente ao subespaço de soluções viáveis<sup>9</sup> definido pelas restrições do problema. São também denominados métodos das direções viáveis.

O referido compromisso em manter as aproximações no âmbito dos programas viáveis  $X^n$  exige que a direção de busca  $d^n$ , previa-

---

<sup>9</sup>A dificuldade adicional imposta aos métodos de otimização não-linear restritos se dá por conta da atividade de controle e de manutenção, em cada iteração, da exequibilidade das soluções aproximadoras.

mente determinada, aponte para uma direção tal que existam programas exequíveis. Além disso, o tamanho do passo a ser dado nesta direção, calculado *a posteriori*, precisa ser verificado. Estas duas exigências, características importantes dos problemas restritos, precisam ser atendidas e verificadas pelos algoritmos implementados nestes métodos.

Para se manter com compromisso com a exequibilidade de uma dada direção de descida, é necessário verificar se a aproximação corrente encontra-se sobre uma das restrições ativas. Neste caso, a nova direção de busca pode estar apontando para o “lado de fora” da região viável. Assim, ela deve mandatariamente ser “desviada” por meio de algum critério<sup>10</sup> específico, de modo que o processo de busca por uma nova aproximação iterativa continue. Como exemplo de métodos que implementam estes critérios tem-se o *Gradiente Projetado*, no qual oferece como novo programa a solução obtida por um certo “escorregamento” sobre a restrição ativa, corrente em consideração. Neste método, as *sliding directions* são determinadas pela projeção da direção do gradiente oposto sobre as restrições ativas. O custo computacional para operacionalizar tal conjunto de critérios é significativo.

$$\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot X_i^n \geq b_j \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot (X_i^n + \alpha_n \cdot d_i^n) \geq b_j \quad (2.49)$$

O compromisso com a exequibilidade de uma dada solução, a partir de uma dada direção de descida previamente escolhida, é mantido pelo dimensionamento do tamanho do passo que pode ser tomado nessa direção sem violar qualquer uma das restrições não ativas (inequações) do problema. Este comprometimento está expresso em (2.48). Esperando-se que  $X^{n+1}$  seja factível, a expressão (2.37) nela substituída pode servir como medida adequada para uma estimativa do máximo tamanho possível para o passo  $\alpha_n$ , dado em (2.51), obtido a partir de (2.49) e (2.50). Desta forma, o tamanho máximo deste passo é determinado pela primeira restrição a ser violada durante o movimento na direção de descida.

---

<sup>10</sup>Estes critérios geralmente encontram as direções de descida, exequíveis, que são mais próximas possíveis da direção oposta ao gradiente da função objetivo.

$$\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot X_i^n + \alpha_n \cdot \left[ \sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot d_i^n \right] \geq b_j \quad (2.50)$$

$$\alpha_n^{\max} = \min \left[ \frac{b_j - (\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot (X_i^n))}{(\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot (d_i^n))} \right] \quad (2.51)$$

$$\text{Minimizar } Z(X^n + \alpha \cdot d^n) \quad (2.52)$$

sujeito à:

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_n^{\max} \quad (2.53)$$

O tamanho do passo ótimo em cada iteração é dado pela resolução de um novo *NLPP*, unidimensional, descrito pelas expressões (2.52) e (2.53), calculado por meio dos métodos citados anteriormente.

#### 2.4.7 Método do Gradiente Projetado

Segundo (BERTSEKAS, 1999), (SHEFFI, 1985), (DENNIS; SCHNABEL, 1996) e (IUSEM, 2002), este método tem sido muito utilizado como base para o desenvolvimento de algoritmos específicos de problemas *NLPP* com o objetivo de acelerar a convergência. Como vantagens, pode-se citar o fato de que ele é fácil de implementar, e utiliza relativamente pouca memória computacional, sendo muito ágil na exploração de estruturas de dados que estabelecem o controle das informações decorrentes dos gradientes da função objetivo. Uma vantagem adicional que se destaca, segundo (CRUZ; PÉREZ, 2010), é a sua capacidade para manter um padrão de descida e, alternativamente, permitir a adição controlada de uma nova restrição ativa durante a realização das iterações. Basicamente, em cada iteração, este método opera duas etapas distintas. Em sua primeira fase, a partir de um programa viável  $X^k$ , obtido em uma  $k$ -ésima iteração, move-se um certo comprimento  $\beta_k$  na direção  $-\nabla f(X^k)$ , oposta ao gradiente da função objetivo. A nova posição, dada pelo programa  $Z^k$ , é então submetida a um operador de projeção  $P_C(\cdot)$  sobre o subespaço convexo  $C$  das soluções viáveis do problema. Tem-se uma direção de descida viável, dada por  $P_C(Z^k)$ . Na sua segunda etapa, em uma nova iteração  $k + 1$ , dá-se um novo e controlado passo, denominado  $\alpha_k$ , obtendo-se o novo programa factível,  $X^{k+1}$ , garantido-se o decréscimo da função objetivo. Essa estratégia está descrita nas expressões (2.54) a (2.54).

$$Z^k = X^k + \beta_k \cdot [ -\nabla f(X^k) ] \quad (2.54)$$

$$\text{Se } X^k = P_C(Z^k) \rightarrow \text{Parada!} \quad (2.55)$$

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k \cdot [ P_C(Z^k) - X^k ] \quad (2.56)$$

Este método especifica  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  como tamanhos de passo positivos. Seus valores tomados nos algoritmos em cada iteração dependem de critérios técnicos. Por exemplo, se forem constantes com  $\alpha_k = 1$  e  $\beta_k > 0$  tem-se a representação factual do método *Steepest Descent*. A expressão (2.57) descreve o critério de *Armijo* para o processo de busca linear no contorno da região factível. Neste caso,  $\alpha_k = 1$  e  $\beta_k = \beta \cdot 2^{-j(k)}$ , com  $\beta > 0$ , como constante para todo  $k$  e  $\delta \in (0, 1)$ . O critério de *Armijo* detalhado pode ser encontrado em (CRUZ; PÉREZ, 2010) e (BERTSEKAS, 1999).

Busca linear de Armijo no contorno:

$$j(k) = \min\{j \in Z_+ : f(Z^{kj}) - f(X^k) \leq -\delta \cdot (A)\} \quad (2.57)$$

onde:

$$(A) = \langle \nabla f(X^k), \{ -P_C(Z^k) + X^k \} \rangle \quad (2.58)$$

$$Z^{kj} = X^k + \beta \cdot 2^{-j} [-\nabla f(X^k)] \quad (2.59)$$

Um exemplo adequado de aplicação deste método para resolver um problema *SPE* com características de equilíbrio espacial e temporal no âmbito da intervenção governamental visando caracterizar estoques reguladores em sistemas *multicommodities* é apresentado detalhadamente em (POSSAMAI, 2015).

## 2.4.8 Método de Frank-Wolfe: Combinações Convexas

De acordo com (SHEFFI, 1985), o método das combinações convexas foi originalmente proposto por Frank e Wolfe em 1956, para a resolução de problemas de programação quadrática com restrições lineares, adequado aos processos de determinação do estado de equilíbrio de sistemas de fluxos em redes de transportes. Trata-se de um método de direções viáveis. Sua característica principal, descrita também em (WOLFE, 1959) e (JAGGI, 2013), que o diferencia dos demais métodos é que o processo de limitação do tamanho do passo na direção de des-

cida pode ser realizado como parte integrante do processo de escolha da própria direção de descida. Isto é feito de um modo tal que a seleção da direção viável de descida é realizada não somente sobre o quanto cada direção candidata, localizadas nas vizinhanças de  $X^n$ , são íngremes, mas também em concordância sobre o quão longe se pode ir nesta direção, mantendo-se a viabilidade da nova posição.

De acordo com (FUKUSHIMA, 1984), O critério deste método para a escolha das direções de descida está baseado sobre a projeção da taxa de descida da função objetivo,  $-\nabla Z(X^n)$  vinculada ao programa  $X^n$ , sobre as direções candidatas na sua vizinhança, dadas por  $Y - X^n$ . À esta medida de projeção dá-se o nome de *drop*. O algoritmo utiliza a direção que maximiza o *drop*. Trata-se, em cada iteração, de resolver um problema de programação linear típico, um *LP*. A expressão (2.60) representa o *slope* da função objetivo, cuja significação é dada pela sua taxa de variação projetada em uma das direções candidatas. Elas são unitárias. A medida de variação total de  $Z(X^n)$  nesta direção, o *drop* é dado em (2.61).

$$\text{Slope: } -\nabla Z(X^n) \cdot \left[ \frac{(Y - X^n)^T}{\|Y - X^n\|} \right] \quad (2.60)$$

$$\text{Drop: } -\nabla Z(X^n) \cdot (Y - X^n)^T \quad (2.61)$$

O processo de seleção da direção de descida é a resolução do *LPP* que maximiza a medida de *drop* em cada iteração  $n$ , sujeitando-se o programa  $Y$ , localizado na vizinhança de  $X^n$ , às restrições do problema. Em outras palavras, deseja-se o máximo *drop* viável. Isto é obtido multiplicando-se por (-1) e minimizando o funcional de decisão, conforme o problema descrito na expressão (2.62). Em (2.63) tem-se a representação das restrições de viabilidade do problema associada em termos de  $Y^n$ , que é a solução na iteração considerada.

$$\text{Minimizar } +\nabla Z(X^n) \cdot (Y - X^n)^T \quad (2.62)$$

sujeito à:

$$\sum_{i=1}^N h_{ij} \cdot Y_i^n \geq b_j \quad (2.63)$$

## 2.4.9 Métodos de resolução de problemas baseados na Teoria de Inequações Variacionais - VIP

Segundo (NAGURNEY, 1999), a *Teoria de Inequações Variacionais* oferece uma fundamentação científica generalista adequada e uma metodologia completa para tratamento de diversos tipos de problemas de programação não-linear *NLPP*. Entre os diversos tipos, tem-se os problemas de equilíbrio parcial em modo de competição perfeita e em modo de competição imperfeita. No primeiro modo, tem-se os problemas de *SPE*, que é o foco de apresentação nesta seção, além daqueles identificados pelos termos *Traffic Network Equilibrium*, conforme (MACKINNON, 1975), e de *Migration Equilibrium*. No segundo modo, tem-se os problemas de *Equilíbrio de Mercados Oligopolísticos*, de *Redes Ambientais* e de *Knowledge Network Equilibrium*. A característica geral desta metodologia permite ainda abordar os problemas de *Equilíbrio Geral*, conforme (MACHADO; MAYERLE; TREVISAN, 2010) e (POSSAMAI, 2015). A generalidade desta metodologia está fortemente embasada na Teoria das Inequações Variacionais que permite que os tipos distintos de problemas sejam tratados como *Problemas de Otimização*, que são formas gerais mais simples, de modo que tanto métodos de resolução, algoritmos e processos de análise de convergência, como processos de análise de sensibilidade, sejam realizados sobre sobre essa representação simplificada de maneira consistente. Esta abordagem oferece dois importantes teoremas que sustentam a proposição de que a solução modelo de Problema de Otimização Equivalente possui as propriedades de unicidade e de existência confirmadas.

Do ponto de vista da sua fundamentação científica, o *Problema de Inequação Variacional - VIP*, caracterizado por  $VI(F, K)$ , é o problema de encontrar um vetor solução  $x^* \in K \subset R^n$  tal que a expressão (2.64) seja satisfeita, onde  $F$  é uma funcional contínuo em  $K \rightarrow R^n$ , dado que  $K$  seja um conjunto fechado e convexo.

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } x^* \in K \subset R^n \text{ tal que:} \\ &\langle F(x^*)^T, (x - x^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K \end{aligned} \quad (2.64)$$

A maneira pela qual um um dado problema de Otimização, com ou sem restrições, pode ser formulado como um problema *VIP* impressiona pela simplicidade<sup>11</sup>: as epxressões em (2.65) descrevem o relacio-

<sup>11</sup> *VIP* é uma abordagem que tem sido muito explorada por diversos autores na solução de vários problemas, inclusive o problema *SPE*.

namento entre os dois tipos de problemas, baseado no seguinte axioma: se  $f(x)$  é uma função convexa e  $x^*$  é uma solução para o problema  $VI(\nabla f, K)$ , então,  $x^*$  é a solução para o problema de Otimização associado, pois sendo convexa, o funcional  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  $\forall x \in K$ , uma vez que  $f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*)^T, (x - x^*) \rangle$ . Esta relação fica óbvia quando se admite que  $\langle \nabla f(x^*)^T, (x - x^*) \rangle$  é positiva semi-definida, pois  $x^*$  é uma solução para o problema  $VI(\nabla f, K)$ , sendo um minimal do problema de programação matemática descrito em (2.65).

considerando  $x^*$  seja a solução do problema de Otimização:

Minimizar:  $f(x)$  sujeito à:  $x \in K$

onde  $f$  é continuamente diferenciável e  $K$  é convexo e fechado.

então,  $x^*$  é a solução para  $VI(\nabla f, K)$ .

$$\langle \nabla f(x^*)^T, (x - x^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K \quad (2.65)$$

Diversos trabalhos tem sido realizados considerando-se a abordagem *VIP* como uma ferramenta de resolução metodológica acoplada com algoritmos específicos e análise de sensibilidade. Entre eles, citam-se (NAGURNEY; LIU, 2012), (BERTSEKAS, 1999), (SHEFFI, 1985), além de (PANG; LEE, 1981), (LEVITIN; POLYAK, 1966), (MYERSON, 1978) e (MYERSON, 1999). Os quatro seguintes trabalhos focaram fortemente em *VIP*: (DAFERMOS; NAGURNEY, 1984), (DAFERMOS; NAGURNEY, 1987), (DAFERMOS STELLA; NAGURNEY, 1984) e (NAGURNEY; ARONSON, 1988).

Esta abordagem se destaca e contrasta com a abordagem descrita nesta tese pelo *Algoritmo Alternativo* proposto. Este contraste se dá pela estratégia global de resolução do problema *SPE*, a primeira sendo considerada *top-down* e a segunda sendo uma abordagem *bottom-up*:

- Abordagem *Top-Down*: por meio da formulação *VIP* busca-se projetar as variações do gradiente da função objetivo global do problema -na forma de uma “direção de descida” metafórica- sobre o vetor que representa as variações de soluções aproximadas, na qual possui uma forma metafórica de um “tamanho de passo”. Essa projeção deve ocorrer sobre um espaço convexo e fechado de soluções exequíveis que atenda aos condicionantes de *KKT*. Trata-se de uma abordagem *top-down* devido ao fato de que busca-se uma direção que maximiza o funcional global de interesse da Sociedade e, então, dá-se um passo de melhoria nesta direção, aproximando-se uma nova solução que atenda as res-



trições representadas pelo espaço convexo e fechado  $K$ . A cada passo, uma melhoria global relativa é obtida, até que a solução ótima seja alcançada;

- Abordagem *Bottom-Up*: por meio da formulação proposta pelo *Algoritmo Alternativo* busca-se resolver o problema original  $\Pi_o$  por meio da montagem de uma representação de um subproblema  $\Pi_q$  menor, quadrático, vinculado ao conceito de *Componentes Equilibrados - EC*. Cada componente é montado como formas elementares de subgrafos que são sucessivamente aumentados pela introdução de *Arcos Livres - FA*. A cada nova inserção, um problema quadrático equivalente associado ao componente é modelado e tem seu equilíbrio computado. Assim, uma coleção de partições vai sendo montada e equilibrada até nenhum outro *FA* esteja em condições de ser inserido em algum *EC*. Assim, a abordagem *Bottom-Up* atua com soluções locais que geram novas e sucessivas aproximações locais que convergem, de forma controlada, a cada iteração, para a solução global no final do processo.

A vantagem da abordagem *Bottom-Up* sobre a abordagem *Top-Down* está na natureza do problema *SPE* que o *Algoritmo Alternativo* resolve: as suas restrições são todas formadas por um sistema de equações lineares. Com manipulação matricial adequada, pode-se extrair do sistema homogêneo correspondente  $[B] \cdot [\Delta X] = 0$  um operador auto-adjunto  $[A]$ , de ordem reduzida, que mapeia uma solução única para o problema quadrático modelado. Isto significa que o espaço fechado e convexo  $K$  é justamente um único ponto num espaço dual correspondente, para cada componente que recebe o arco *EA*. Desta forma, as soluções aproximadas são computadas como solução única de um processo de inserção sucessiva de arcos especialmente escolhidos no contexto do modelo quadrático. Assim, computam-se as aproximações de forma controlada sem a necessidade de considerar o gradiente global  $\nabla f(x)$  associado à função objetivo do problema *VIP*. Obviamente, existe um custo computacional adicionado que está associado à tarefa adicional de controlar os demais arcos do modelo que violam a condição de não-negatividade para os seus fluxos que podem ocorrer em cada processo de inserção. Este é o mote do *Algoritmo Alternativo* proposto, sua característica marcante, que o diferencia dos demais métodos.

#### 2.4.10 Aspectos associados a outras Classes de Problemas

Os seguintes autores e respectivos trabalhos são referenciados na literatura científica focada na associação de vários métodos de resolução de problemas lineares e não lineares com diferentes configurações de problemas. São considerados como fontes adequadas para a construção de ferramentas de resolução específicas para cada tipo de problemas. Além disso, servem como referencial teóricos e como fundamentação matemática para a construção e elaboração de novos métodos. São eles: (GUBIN; POLYAK; RAIK, ), (KELLY; KUPFERSCHMID, 1998), (KNUTH, 1997), (POLAK, 1971), (POLAK, 1997), (TARJAN, 1972), (GEOFFRION, 1974), (FUKUSHIMA, 1984) e (ORCHARD-HAYS, 1968). Eles efetivamente contribuíram com algoritmos e procedimentos resolutivos que são utilizados nos vários métodos descritos nos trabalhos produzidos pelos autores referenciados neste capítulo.

#### 2.4.11 Considerações finais do capítulo

Atualmente, vários trabalhos científicos tem sido desenvolvido com temática de resolução de problemas *SPE*, com novas contribuições. Percebe-se que a complexidade das relações entre todos os elementos que compõem o contexto *SPE*, nas dimensões de uma verdadeira rede de cadeias de suprimentos global induz a necessidade por resolvedores com maior capacidade, maior abrangência e por maior profundidade para atuar sobre este tipo de problema. Neste sentido, Equilíbrio Espacial de Preços ainda permanece como uma área do conhecimento aberta a ser explorada.

### 3 PROPOSIÇÃO DO ALGORITMO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO DO SPE

*... a computação é a arte  
de transferir, de forma controlada,  
responsabilidade e dedicação humanas  
à processos maquináveis:  
ela aumenta a potência do ser humano,  
densifica o humanismo no mundo,  
afasta-o de sua animalidade ontológica e  
contribui efetivamente para a elevação de  
sua consciência ...*

Neste capítulo se apresenta formalmente o *Algoritmo Alternativo* a partir da caracterização do método proposto para resolver problemas de Equilíbrio Espacial de Preços (*SPE*). Nele são apresentados as definições necessárias, as estruturas de dados que representam o problema, e os teoremas que suportam a convergência e a unicidade das soluções produzidas pelo método.

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA SPE

Considere um sistema econômico formado por um conjunto  $N$  de agentes produtores, um conjunto  $M$  de agentes consumidores e um conjunto  $L$  de transportadores definido sobre produto cartesiano  $N \times M$  que atuam em rede realizando o comércio de uma certa *commodity* em regime de competição perfeita, cada qual buscando o melhor resultado para si.

Considere, também, que associado a cada produtor  $i \in N$  existe uma função de custo marginal de produção dada por  $S_i(q_i)$ , que a cada transportador  $(i, j) \in L$  existe uma função de custo marginal de transporte dada por  $C_{ij}(x_{ij})$ , ambas monótonas crescentes, e que associado a cada consumidor  $j \in M$  existe uma função inversa da demanda, denotada por  $D_j(d_j)$ , monótona decrescente. Nestas funções as variáveis  $q_i$ ,  $d_j$  e  $x_{ij}$  são, respectivamente, as quantidades produzidas pelo  $i$ -ésimo produtor, consumidas pelo  $j$ -ésimo consumidor e transportadas do  $i$ -ésimo produtor para o  $j$ -ésimo consumidor. Por fim, considere que estas funções são contínuas e duas vezes diferenciáveis.

Então, encontrar a condição de equilíbrio deste sistema econômico,

dada pelas expressões:

$$S_i(q_i) + C_{ij}(x_{ij}) = D_j(d_j) \quad \text{se } x_{ij} > 0 \quad (3.1)$$

$$S_i(q_i) + C_{ij}(x_{ij}) \geq D_j(d_j) \quad \text{se } x_{ij} = 0 \quad (3.2)$$

consiste em encontrar um ponto  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ , resolvendo o problema de programação não-linear  $\Pi_o(\mathbf{X})$  apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d}) = & \sum_{j \in M} \int_0^{d_j} D_j(w) dw - \sum_{i \in N} \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \\ & \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} \int_0^{x_{ij}} C_{ij}(w) dw \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\text{sujeito à } \sum_{i \in N} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in M \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in N \quad (3.5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \text{e} \quad \forall j \in M \quad (3.6)$$

Tobin e Fiesz (1883, pg. 7) e Friesz e Bernstein (2016, pg. 398 e 399) demonstram, por meio dos teoremas de *Existência* e *Unicidade* que, para o caso de estrita monotonicidade das funções  $D_j(d_j)$ ,  $S_i(q_i)$  e  $C_{ij}(x_{ij})$  o problema  $\Pi_o(\mathbf{X})$  sempre tem solução, é única e satisfaz as condições (3.1) e (3.2).

### 3.2 VISÃO GERAL DO MÉTODO PROPOSTO

O método proposto tem sua origem no *Método de Newton*, descrito na seção 2.4.5. O modelo de otimização não linear (3.3)-(3.6) pode ser aproximado, para uma dada solução  $\mathbf{X}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{d}^k)$ , por meio da linearização das funções  $D_j(d_j)$ ,  $S_i(q_i)$  e  $C_{ij}(x_{ij})$ . Com esta aproximação, o problema de equilíbrio passa a ter a forma de um problema de programação quadrática, denotado por  $\Pi_q(\mathbf{X})$ , e formulado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d}) = & \sum_{j \in M} \int_0^{d_j} \overline{D}_j(w) dw - \\ & \sum_{i \in N} \int_0^{q_i} \overline{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L} \int_0^{x_{ij}} \overline{C}_{ij}(w) dw \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{sujeito à } \sum_{i \in N} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in M \quad (3.8)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in N \quad (3.9)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in L \quad (3.10)$$

onde  $\overline{D}_j(d_j)$ ,  $\overline{S}_i(q_i)$  e  $\overline{C}_{ij}(x_{ij})$  são funções aproximadas por séries de Taylor de primeira ordem no ponto  $\mathbf{X}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{d}^k)$ , isto é:

$$\overline{D}_j(d_j) = D_j(d_j^k) + \frac{\partial}{\partial d_j} D_j(d_j^k) \cdot (d_j - d_j^k) \quad (3.11)$$

$$\overline{S}_i(q_i) = S_i(q_i^k) + \frac{\partial}{\partial q_i} S_i(q_i^k) \cdot (q_i - q_i^k) \quad (3.12)$$

$$\overline{C}_{ij}(x_{ij}) = C_{ij}(x_{ij}^k) + \frac{\partial}{\partial x_{ij}} C_{ij}(x_{ij}^k) \cdot (x_{ij} - x_{ij}^k) \quad (3.13)$$

Assim, como para o problema  $\Pi_o(\mathbf{X})$ , o problema  $\Pi_q(\mathbf{X})$ , definido pelas expressões (3.7)-(3.10), também apresenta solução única, visto que as funções  $\overline{D}_j(d_j)$ ,  $\overline{S}_i(q_i)$  e  $\overline{C}_{ij}(x_{ij})$  são estritamente monotônicas. Resolvendo o problema  $\Pi_q(\mathbf{X})$ , obtém-se uma nova solução dada por  $\mathbf{X}^{k+1} = (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{q}^{k+1}, \mathbf{d}^{k+1})$  e, caso  $\|\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k\| \leq \varepsilon$ , tem-se que  $\mathbf{X}^{k+1}$  é uma aproximação para a solução ótima do problema original  $\Pi_o(\mathbf{X})$ , considerando uma dada precisão  $\varepsilon$ . Na próxima seção será descrito o método de resolução do problema  $\Pi_q(\mathbf{X})$ .

### 3.3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA $\Pi_q(\mathbf{X})$

#### 3.3.1 Notação e Definições

Na solução de cada um dos problemas quadráticos  $\Pi_q(\mathbf{X})$ , pro-

dutores, consumidores e transportadores formam um grafo bipartido  $G = (M, N, L)$ , onde  $M$ ,  $N$  e  $L$  são os conjuntos definidos na seção 3.1.

**Definição 1 (Arco livre)** Um arco  $(i, j) \in L$  é dito livre se e somente se  $x_{ij} = 0$ .

**Definição 2 (Arco entrante)** Um arco  $(i, j) \in L$  é dito entrante, se e somente se, é livre e satisfaz a condição:

$$\Delta_{ij} = [ \bar{D}_j(d_j) - \bar{S}_i(q_i) - \bar{C}_{ij}(x_{ij}) ] > 0 \quad (3.14)$$

Note-se que num arco entrante o preço que o consumidor  $j$  está disposto a pagar é maior que a soma das funções custo marginal de produção e de transporte. Nestas condições, a realização de comércio entre  $i$  e  $j$  se viabiliza com ganho e, como consequência, o fluxo  $x_{ij}$  tende a aumentar, produzindo uma condição de equilíbrio melhorada, como será visto na sequência.

**Definição 3 (Componente equilibrado)** Considere um grafo bipartido  $G = (M, N, L)$  e um vetor de fluxos factível  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$  para o problema  $\Pi_q(\mathbf{X})$ . Um subgrafo parcial  $G_p = (M_p \subseteq M, N_p \subseteq N, L_p \subseteq L)$  é dito ser um componente equilibrado de  $G$  se e somente se satisfaz as seguintes condições:

- a) para  $\forall (i, j) \in L_p$  tem-se que  $x_{ij} > 0$  e  $\bar{D}_j(d_j) = \bar{S}_i(q_i) + \bar{C}_{ij}(x_{ij})$ ;
- b) para  $\forall (i, j) \in L \setminus L_p$  tal que  $i \in N_p$  e/ou  $j \in M_p$  tem-se  $x_{ij} = 0$ ;
- c) o subgrafo parcial  $G_p = (M_p, N_p, L_p)$  é conexo maximal.

Note-se que, de acordo com a condição (a) da Definição 3, um componente equilibrado não troca fluxos com nós externos ao próprio componente. Note-se ainda que, de acordo com a condição (c) desta mesma definição, o componente equilibrado apresenta o maior número de nós e arcos que mantém o o subgrafo parcial  $G_p$  conexo e equilibrado. Por fim, note-se que, para uma solução inicial nula  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d}]$ , cada um dos nós forma um componente equilibrado.

A Figura 6 ilustra um exemplo de um sistema econômico formado por diversos componentes equilibrados, cujo equilíbrio final foi computado por meio do método proposto. À esquerda, tem-se o sistema inicial, descrito por um grafo onde todos os agentes econômicos são componentes equilibrados isolados, constituídos por um único agente. Produtores possuem forma quadrada e consumidores tem forma circular. Inicialmente, transportadores são arcos livres que não foram

inseridos ainda aos componentes. À direita, tem-se uma ilustração de uma possível solução para o equilíbrio final do problema original associado, onde vários componentes equilibrados formam subgrafos parciais, conexos maximais, já equilibrados. Note-se que cada componente equilibrado pode ser visto como um bloco econômico em equilíbrio espacial de preços. Depois do equilíbrio final, componentes que permanecem isolados representam componentes que não foram efetivos, pois não realizam comércio com nenhum outro agente econômico.

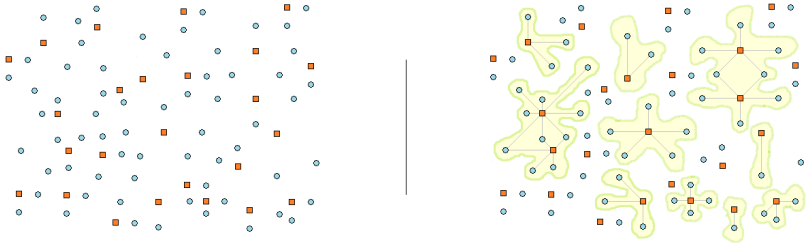


Figura 6. Sistema econômico formado por componentes equilibrados.

### 3.3.2 Condição de melhoria no equilíbrio de $\Pi_q(\mathbf{X})$

Considere um problema *SPE* definido sobre o grafo  $G$ , particionado em um conjunto de componentes equilibrados. Restringindo-se o modelo (3.7)-(3.10) para cada  $G_p = (M_p, N_p, L_p)$  deste conjunto de componentes, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z_p = & \sum_{j \in M_p} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \\ & \sum_{i \in N_p} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in M_p} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{sujeito à } \sum_{i \in N_p} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in M_p \quad (3.16)$$

$$\sum_{j \in M_p} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in N_p \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in L_p \quad (3.18)$$

As condições de *Existência*, de *Unicidade* e equivalência, descritas por (TOBIN; FRIESZ, 1983) e (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016), válidas para o modelo (3.7)-(3.10), também se aplicam ao caso particular do modelo acima. Assim, a solução ótima deste modelo confunde-se com a própria definição de componente equilibrado, na medida em que satisfaz as restrições de conservação de fluxo interna de cada componente, e as condições de equilíbrio de preços propriamente ditas, para cada partição  $(M_p, N_p, L_p)$ . A seguir são apresentados dois teoremas que dão suporte ao método de resolução proposto.

**Teorema 1 ( Expansão do componente equilibrado )** *Dado um componente equilibrado  $G_p = (M_p, N_p, L_p)$ , a inclusão de um arco  $(\alpha, \beta) \in L \setminus L_p$ , tal que  $\alpha \in M_p$  e  $\beta \in N_p$ , induz em  $G_p$  uma melhoria na solução de equilíbrio do problema (3.15)-(3.18), se e somente se:*

$$\bar{S}_\alpha(q_\alpha) + \bar{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) < \bar{D}_\beta(d_\beta) \quad (3.19)$$

**Prova do Teorema 1** *Considerando que um arco  $(\alpha, \beta) \in L \setminus L_p$  é incluído no conjunto  $L_p$ , a formulação (3.15)-(3.18) é reescrita:*

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad z_p^+ = & \sum_{j \in N_p \setminus \{\beta\}} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \\ & \sum_{i \in M_p \setminus \{\alpha\}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L_p} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw + \\ & \int_0^{\bar{d}_\beta} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_0^{\bar{q}_\alpha} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{(i,j) \in L_p} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in M_p \setminus \{\alpha\} \quad (3.21)$$

$$\sum_{(i,j) \in L_p} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in N_p \setminus \{\beta\} \quad (3.22)$$

$$\sum_{(\alpha,j) \in L_p} x_{\alpha j} + x_{\alpha\beta} = q_\alpha + x_{\alpha\beta} = \bar{q}_\alpha \quad (3.23)$$

$$\sum_{(i,\beta) \in L_p} x_{i\beta} + x_{\alpha\beta} = d_\beta + x_{\alpha\beta} = \bar{d}_\beta \quad (3.24)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in L_p \cup \{(\alpha, \beta)\} \quad (3.25)$$



Substituindo  $\bar{q}_\alpha$  e  $\bar{d}_\beta$  em (3.20) pelos valores das equações (3.23) e (3.24), tem-se:

$$z_p^+ = \sum_{j \in N_p \setminus \{\beta\}} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \sum_{i \in M_p \setminus \{\alpha\}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L_p} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw + \int_0^{d_\beta + x_{\alpha\beta}} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_0^{q_\alpha + x_{\alpha\beta}} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw \quad (3.26)$$

Considerando que:

$$\sum_{j \in N_p} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw = \sum_{j \in N_p \setminus \{\beta\}} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw + \int_0^{d_\beta} \bar{D}_\beta(w) dw \quad (3.27)$$

$$\sum_{i \in M_p} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw = \sum_{i \in M_p \setminus \{\alpha\}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw + \int_0^{q_\alpha} \bar{S}_\alpha(w) dw \quad (3.28)$$

E, substituindo-se (3.15), (3.27) e (3.28) em (3.26), obtém-se:

$$z_p^+ - z_p = \int_{d_\beta}^{d_\beta + x_{\alpha\beta}} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_{q_\alpha}^{q_\alpha + x_{\alpha\beta}} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw \quad (3.29)$$

A expressão (3.29) mostra a variação da função objetivo com a inclusão do arco  $(\alpha, \beta)$ . Assim, para que esta variação seja positiva, indicando uma melhoria na condição de equilíbrio do problema (3.15)-(3.18), é necessário escolher um arco livre  $(\alpha, \beta)$  de fluxo nulo, que garanta, para um incremento infinitesimal  $\delta$  em  $x_{\alpha\beta}$ , a seguinte condição:

$$\delta \cdot ( \bar{D}_\beta(d_\beta) - \bar{S}_\alpha(q_\alpha) - \bar{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) ) > 0 \quad (3.30)$$

confirmando, para um  $\delta > 0$ , a expressão (3.19) do enunciado deste teorema. ■

**Teorema 2 (Expansão de componentes equilibrados)** *Dado dois componentes equilibrados  $G_p = (M_p, N_p, L_p)$  e  $G_{p'} = (M_{p'}, N_{p'}, L_{p'})$ , a inclusão de um arco  $(\alpha, \beta) \in L \setminus L_p \cup L_{p'}$ , com  $\alpha \in M_p$  e  $\beta \in N_{p'}$ , induz em  $G_p \cup G_{p'}$  uma melhoria na solução de equilíbrio do problema (3.15)-(3.18), se e somente se:*

$$\begin{aligned} \bar{S}_\alpha(q_\alpha) + \bar{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) &< \bar{D}_\beta(d_\beta) \\ (\alpha, \beta) \in L \setminus L_p \cup L_{p'}, \quad \alpha \in M_p, \quad \beta \in N_{p'} \end{aligned} \quad (3.31)$$

**Prova do Teorema 2** *Considerando a inclusão de um arco  $(\alpha, \beta) \in L \setminus L_p \cup L_{p'}$  no conjunto  $L_p \cup L_{p'}$ , a formulação (3.15)-(3.18) para o componente formado pela união de dois componentes  $G_p \cup G_{p'}$  é reescrita:*

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z_p^+ &= \sum_{j \in N_p} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \sum_{i \in M_p \setminus \{\alpha\}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \\ &\sum_{(i,j) \in L_p} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw + \sum_{j \in N_{p'} \setminus \{\beta\}} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \\ &\sum_{i \in M_{p'}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L_{p'}} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw + \\ &\int_0^{\bar{d}_\beta} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_0^{\bar{q}_\alpha} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw \end{aligned} \quad (3.32)$$

sujeito à:

$$\sum_{(i,j) \in L_p} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in M_p \setminus \{\alpha\} \quad (3.33)$$

$$\sum_{(i,j) \in L_{p'}} x_{ij} = d_i \quad \forall i \in N_{p'} \setminus \{\beta\} \quad (3.34)$$

$$\sum_{(i,j) \in L_p} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in N_p \quad (3.35)$$

$$\sum_{(i,j) \in L_{p'}} x_{ij} = q_i \quad \forall i \in M_{p'} \quad (3.36)$$

$$\sum_{(\alpha,j) \in L_p \cup \{(\alpha,\beta)\}} x_{\alpha j} + x_{\alpha\beta} = q_\alpha + x_{\alpha\beta} = \bar{q}_\alpha \quad \forall j \in N_p \quad (3.37)$$

$$\sum_{(i,\beta) \in L_{p'} \cup \{(\alpha,\beta)\}} x_{i\beta} + x_{\alpha\beta} = d_\beta + x_{\alpha\beta} = \bar{d}_\beta \quad \forall i \in M_{p'} \quad (3.38)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \{L_p \cup L_{p'}\} \quad (3.39)$$

As expressões (3.32)-(3.39) estão em conformidade com a Definição 3. Substituindo os termos  $\{\bar{q}_\alpha, \bar{d}_\beta\}$  em (3.32) pelos valores das equações (3.37) e (3.38), como foi analogamente realizado na prova do Teorema 1, tem-se:

$$z_p = \sum_{j \in N_p} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \sum_{i \in M_p \setminus \{\alpha\}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L_p} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw \quad (3.40)$$

$$z_{p'} = \sum_{j \in N_{p'} \setminus \{\beta\}} \int_0^{d_j} \bar{D}_j(w) dw - \sum_{i \in M_{p'}} \int_0^{q_i} \bar{S}_i(w) dw - \sum_{(i,j) \in L_{p'}} \int_0^{x_{ij}} \bar{C}_{ij}(w) dw \quad (3.41)$$

Desta forma, considerando que as funções envolvidas são separáveis e agrupando os termos associados com a união dos componentes equilibrados  $G_p \cup G_{p'}$ , tem-se que o problema aumentado tem sua função objetivo  $z_p^+$  reescrita da seguinte forma:

$$z_p^+ = (z_p + z_{p'}) + \int_{d_\beta}^{d_\beta + x_{\alpha\beta}} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_{q_\alpha}^{q_\alpha + x_{\alpha\beta}} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw \quad (3.42)$$

Considerando que uma melhoria induzida no equilíbrio de  $G_p \cup G_{p'}$ , pela inserção de um arco  $(\alpha, \beta)$ , pode ser descrita por diferenças positivas entre o problema aumentado  $z_p^+$  e os problemas originais associados  $z_p$ , de  $G_p$ , e  $z_{p'}$ , tomado a partir do componente  $G_{p'}$ , tem-se:

$$z_p^+ - (z_p + z_{p'}) > 0 \quad (3.43)$$

$$\int_{d_\beta}^{d_\beta + x_{\alpha\beta}} \bar{D}_\beta(w) dw - \int_{q_\alpha}^{q_\alpha + x_{\alpha\beta}} \bar{S}_\alpha(w) dw - \int_0^{x_{\alpha\beta}} \bar{C}_{\alpha\beta}(w) dw > 0 \quad (3.44)$$

A expressão (3.42) mostra a variação da função objetivo com a inclusão do arco  $(\alpha, \beta)$  no novo componente  $G_p \cup G_{p'}$ . Assim, para que esta variação seja positiva, indicando uma melhoria na condição de equilíbrio do problema (3.15)-(3.18), é necessário escolher um arco livre  $(\alpha, \beta)$  de fluxo nulo, que garanta, para um incremento infinitesimal  $\delta$  em  $x_{\alpha, \beta}$ , a seguinte condição:

$$\delta \cdot ( \overline{D}_\beta(d_\beta) - \overline{S}_\alpha(q_\alpha) - \overline{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) ) > 0 \quad (3.45)$$

confirmando, para um  $\delta > 0$ , a expressão (3.31) do enunciado deste teorema. ■

Assim, considerando o grafo particionado em componentes equilibrados, tanto o Teorema 1, como o Teorema 2, estabelecem que, para haver melhoria no equilíbrio de (3.15)-(3.18), deve-se aumentar o fluxo em um arco livre que satisfaça a condição de que a soma do custo marginal do produtor com o custo marginal do transportador seja menor que o preço pago pelo consumidor.

### 3.3.3 O critério de escolha do Arco entrante

Considere, inicialmente, que o grafo se apresenta completamente desconexo, ou seja, sem fluxo estabelecido entre os nós produtores e consumidores. A cada iteração, um arco livre  $(\alpha, \beta)$  é escolhido para ter seu fluxo incrementado de modo a melhorar o equilíbrio do grafo, conforme estabelecido pelos teoremas 1 e 2. Estas escolhas se repetem até que não existam mais arcos livres que possam ser escolhidos.

Entre todos os arcos livres que satisfazem as condições destes teoremas, a escolha que apresenta o maior potencial de ganhos econômicos é dada pelo arco  $(\alpha, \beta)$  tal que:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \underset{(i,j) \in L \setminus \bigcup_p L_p}{\text{Max}} \{ \Delta_{ij} \mid \Delta_{ij} \text{ satisfaz (3.14)} \} \quad (3.46)$$

Não existindo  $(i, j) \in L \setminus \bigcup_p L_p$  que satisfaça (3.14), o equilíbrio do modelo  $\Pi_q(\mathbf{X})$  é alcançado. Na próxima seção determina-se o tamanho do passo a ser dado na direção de melhoria do equilíbrio, isto é, o aumento a ser dado no fluxo do arco entrante  $(\alpha, \beta)$ .

### 3.3.4 Determinação da direção de busca e do tamanho do passo

Com a entrada do arco  $(\alpha, \beta)$ , as variáveis atuais de fluxo  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$  deverão sofrer alterações de modo a garantir um novo estado de equilíbrio. Mais especificamente, deve-se assegurar a conservação de fluxo e o equilíbrio de preços, particularmente para os componentes diretamente afetados pela inclusão do arco entrante. Sem perda de generalidade, considere que  $\alpha \in M_p$  e  $\beta \in N_{p'}$ , conforme definido no Teorema 2. Então, sendo:

$$x_{ij} \leftarrow \hat{x}_{ij} + \delta_{ij} \quad (3.47)$$

$$q_i \leftarrow \hat{q}_i + \eta_i \quad (3.48)$$

$$d_j \leftarrow \hat{d}_j + \mu_j \quad (3.49)$$

Tem-se que, a nova condição de conservação de fluxo para o componente formado pela inclusão do arco  $(\alpha, \beta)$ , será dada por:

$$\sum_{(i,j) \in L_p \cup L_{p'} \cup \{(\alpha, \beta)\}} (\hat{x}_{ij} + \delta_{ij}) = (\hat{q}_i + \eta_i) \quad \forall i \in M_p \cup M_{p'} \quad (3.50)$$

$$\sum_{(i,j) \in L_p \cup L_{p'} \cup \{(\alpha, \beta)\}} (\hat{x}_{ij} + \delta_{ij}) = (\hat{d}_j + \mu_j) \quad \forall j \in N_p \cup N_{p'} \quad (3.51)$$

e sua correspondente condição de equilíbrio de preços, por:

$$\begin{aligned} & [ \bar{S}_i(\hat{q}_i) + \eta_i \cdot \frac{d}{dq_i} \bar{S}_i(\hat{q}_i) ] + [ \bar{C}_{ij}(\hat{x}_{ij}) + \delta_{ij} \cdot \frac{d}{dx_{ij}} \bar{C}_{ij}(\hat{x}_{ij}) ] - \\ & [ \bar{D}_j(\hat{d}_j) + \mu_j \cdot \frac{d}{dd_j} \bar{D}_j(\hat{d}_j) ] = 0 \quad (3.52) \end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \in L_p \cup L_{p'} \cup \{(\alpha, \beta)\}$$

Note-se que as equações (3.50)-(3.52) formam um sistema linear, com igual número de variáveis e equações. Este sistema determina a direção de busca  $(\delta, \eta, \mu)$  que satisfaz as restrições de conservação de fluxo e que melhora o equilíbrio do componente. Os novos valores de fluxo do componente devem, também, satisfazer a condição de não-negatividade sobre as variáveis de fluxo, como segue:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ q_i \\ d_j \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_{ij} \\ \hat{q}_i \\ \hat{d}_j \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \eta_i \\ \mu_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) &\in L_p \cup L_{p'} \cup \{(\alpha, \beta)\}, \\ \forall i &\in M_p \cup M_{p'} \quad \text{e} \quad \forall j \in N_p \cup N_{p'} \end{aligned}$$

Contudo, a condição acima precisa ser verificada apenas para os fluxos  $x_{ij}$ , visto que a não-negatividade de  $q_i$  e  $d_j$  é consequência direta da não-negatividade de  $x_{ij}$ . Assim, o limite superior para o tamanho do passo  $\lambda$ , é dado por:

$$\lambda = \min_{(i,j) \in L_p \cup L_{p'} \cup \{(\alpha, \beta)\}} \left\{ 1, \frac{-x_{ij}}{\delta_{ij}} \mid \delta_{ij} < 0 \right\} \quad (3.54)$$

Neste processo de determinação do tamanho do passo  $\lambda$ , dois casos devem ser analisados:

**Caso a)** Se  $\lambda = 1$ , o equilíbrio para o componente formado pela inclusão do arco  $(\alpha, \beta)$  é alcançado;

**Caso b)** Se  $\lambda < 1$ , então, algum arco  $(i, j)$  teve seu fluxo zerado, antes do componente formado pela inclusão do arco  $(\alpha, \beta)$  ser equilibrado, e neste caso,  $(i, j)$  deve ser removido do componente. A remoção deste arco pode implicar no particionamento do componente em questão em dois novos componentes: (i) aquele que não contiver o arco entrante  $(\alpha, \beta)$  já estará em equilíbrio; (ii) o outro componente, que contém o arco  $(\alpha, \beta)$ , deverá continuar o processo de incremento de fluxo do arco entrante, em busca do equilíbrio, e para isso é necessário resolver novamente o sistema formado pelas equações (3.50)-(3.52), restrito a este componente que permanece em desequilíbrio, até que  $\lambda$ , calculado pela expressão (3.54), seja igual a 1.

Os componentes que encontram o equilíbrio são mantidos numa lista, com seus fluxos e preços atualizados, aguardando que algum novo arco entrante, que os conectem, seja identificado. O processo todo se repete até que nenhum arco entrante possa ser identificado. Esse aspecto é válido tanto no caso (a) como no caso (b).

### 3.4 BASES TEÓRICAS PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

O *Algoritmo Alternativo* proposto realiza tarefas de controle sobre todos os componentes equilibrados que possuem o estado de equilíbrio espacial de preços perturbado pelos processos de inserções sucessivas de arcos entrantes. Então, até que uma medida de erro pré-estabelecida  $\xi_{max}$  seja alcançada, os componentes envolvidos estarão sujeitos à sucessivos processos de linearizações. A Figura 7 ilustra um cenário onde um dado componente equilibrado tem seu equilíbrio final obtido por meio do vetor solução  $X^*$ , após três linearizações sucessivas  $\{k = 0, 1, 2\}$ , obtendo-se as aproximações  $X_{k=0}, X_{k=1}, X_{k=2}$ . Em cada linearização, a solução aproximada obtida  $X_k$  para o equilíbrio do componente tem sua convergência verificada.

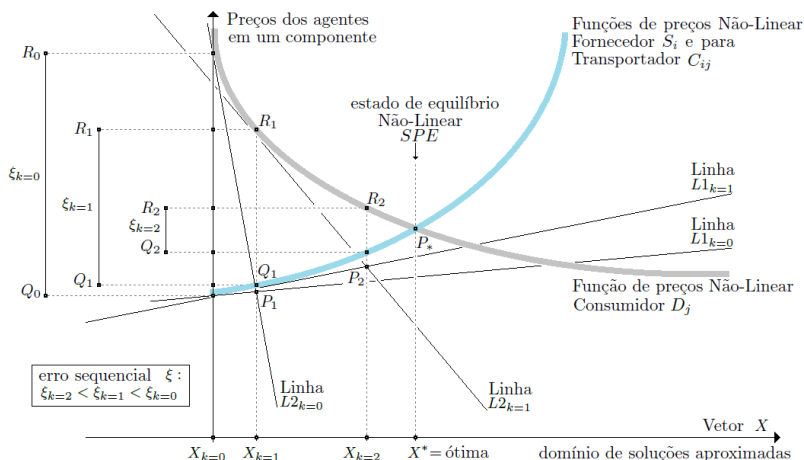


Figura 7. Processo de convergência da solução final para o equilíbrio de um componente equilibrado, pelo algoritmo proposto. Fonte: o autor.

A verificação de convergência do método proposto é realizada em cada linearização por meio de uma medida  $\xi$ , dada pela máxima diferença absoluta entre os valores das funções não-lineares de custo marginal de produção -somados com os respectivos valores dos custos de transportes- e os valores das funções não-lineares de preços, calculadas no ponto aproximado  $X$ . Desta forma, como o problema original  $\Pi_o$  é modelado somente por funções de preços monotônicas, a convergência do método de aproximação é descrita por medidas de erro  $\xi_k$  que sistematicamente decrescem a cada novo passo de linearização  $k$ :  $\xi_{max} < \dots < \xi_{k=2} < \xi_{k=1} < \xi_{k=0}$ . De fato, o quê está por trás deste

comportamento convergente é que o *Algoritmo Alternativo* opera semelhantemente ao método de *Newton* para resolver um problema equivalente de *Programação Quadrática*  $\Pi_q$ . Por conta da propriedade de monotonicidade das funções envolvidas, tem-se convergência assintótica.

Em termos matemáticos, a referida convergência algorítmica é realizada pelo processo de prova na qual uma solução aproximada qualquer  $\Delta \mathbf{X}$  pertence ao domínio dos espaços lineares  $\Omega \subset R^n$  das funções contínuas  $\mathbf{u} \in U \subset R^n$ , que estão definidas em um subespaço linear limitado e fechado  $\bar{\Omega} \subset R^n$ . Estas funções contínuas formam uma série de *Cauchy* (convergente) em respeito à uma dada norma  $\|\mathbf{u}(\Delta X)\| \leq K$ , para alguma constante real  $K > 0$  e todas as aproximações  $\Delta X \in \{\bar{\Omega}\}$ . Neste sentido, está-se especialmente preocupado com o uso de espaços lineares completos de funções contínuas  $U \in C^2(\Omega \cup \bar{\Omega}) \subset R^n$ , cujos membros convergem para um limite que deve fazer parte do espaço  $U$  considerado. Assim, a norma do supremo deste conjunto *sup-norm* é aplicável porque um conjunto fechado  $U$  possui um valor mínimo e um valor máximo em seu fechamento para  $\Delta X \in \{\bar{\Omega}\}$ . Esta condição implica em uma convergência uniforme para o espaço  $U$ : esta é a noção de completude e de fechamento que se utiliza com o objetivo de garantir que a propriedade de convergência para o conjunto de soluções aproximadas  $\mathbf{u}(\Delta X)$  seja sempre mensurável sobre todas as linearizações realizadas para um dado componente equilibrado.

A prova matemática de convergência e unicidade das soluções aproximadas, obtidas pelo método proposto durante cada linearização sucessiva, é apresentada no Apêndice A. Para ilustrar o seu funcionamento, utiliza-se um pequeno exemplo algébrico de um sistema econômico a ser equilibrado, sendo apresentado no Apêndice B.

### 3.5 ALGORITMO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO DO *SPE*

O método proposto é constituído por dois algoritmos específicos que controlam completamente o processo de busca da solução de um problema original  $\Pi_o$ . O Algoritmo 1 EQUILIBRATE( $G(M \cup N, L)$ ), é o primeiro algoritmo que organiza o problema original  $\Pi_o$  e o descreve em estruturas de dados adequadas para a sua resolução geral em um contexto computacional, sendo apresentado na página seguinte. O Algoritmo 2 EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ ), é o segundo algoritmo desta abordagem e é responsável pela busca da solução *SPE* para cada um dos subproblemas particionados, em sucessivas linearizações, sendo apresentado em seqüência.



---

**Algoritmo 1** EQUILIBRATE( $G(M \cup N, L)$ )
 

---

**Input:** O grafo bipartido  $G = (M, N, L)$  com os agentes.

**Output:** O vetor solução  $(X, q, d)$  do problema  $\Pi_0$ .

**Step 1.** *Inicialização:* Introduzindo o grafo bipartido  $G$

Set  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d}) = 0$  solução básica inicial.

$S_i(q_i = 0) \leftarrow \{ S_i(x) \mid \forall i \in M \}$  fornecedores: preços

$D_j(d_j = 0) \leftarrow \{ D_j(x) \mid \forall j \in N \}$  consumidores: preços

$C_{ij}(x = 0) \leftarrow \{ C_{ij}(x) \mid \forall (i, j) \in L \}$  transportes: preços

Set  $G = \bigcup_{k=1}^K \{ G_p^k(M_p^k, N_p^k, L_p^k) \}$  união de  $K$  partições

**Step 2.** *Linearização das Funções de Preço:* tome  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$

Set  $\{ \bar{S}_i(q_i), \bar{D}_j(d_j), \bar{C}_{ij}(x_{ij}) \}$  de  $\{ S_i(q_i), D_j(d_j), C_{ij}(x_{ij}) \}$

Obtendo-as conforme (3.11), (3.12) e (3.13)

**Step 3.** *Determinação do arco entrante :* por (3.14) e (3.46)

Procure o arco  $(\alpha, \beta) \in L \setminus \bigcup_{k=1}^K \{ L_p^k \}$  que satisfaz  $\Delta_{\alpha\beta}$  onde:

$\Delta_{\alpha\beta} = \max \{ \Delta_{ij}[(i, j)] \}$  tal que:

$\Delta_{ij}[(i, j)] = \{ \bar{D}_j(d_j) - \bar{S}_i(q_i) - \bar{C}_{ij}(x_{ij}) \}$

**if**  $( (\alpha, \beta) = \{\emptyset\} \vee (\Delta_{\alpha\beta} \leq \varepsilon) )$  **then**

| Vá direto para o **Step 5**.

**end**

**else**

| Tome os componentes  $\{ G_p, G_{p'} \}$  associados com  $(\alpha, \beta)$  :

$G_p \leftarrow \{ G_p(M_p, N_p, L_p) \} \mid (\alpha \in M_p, \beta \in N_{p'})$

$G_{p'} \leftarrow \{ G_{p'}(M_{p'}, N_{p'}, L_{p'}) \} \mid (\alpha \in M_p, \beta \in N_{p'})$

| Após unir  $G_p$  com  $G_{p'}$ , exclua a partição  $G_{p'}$ .

$G_p \leftarrow \{ G_p \cup G_{p'} \} \{ \{ M_p \cup M_{p'} \}, \{ N_p \cup N_{p'} \}, \{ L_p \cup L_{p'} \cup \{ (\alpha, \beta) \} \}$

**end**

**Step 4.** *Equilibrar o grafo unido  $G_p$  :*

Executar EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )

Voltar para **Step 3**.

**Step 5.** *Teste de Finalização:*  $G_p$  tem um erro  $\varepsilon_p$  :

$\varepsilon_p = \max \{ | \bar{S}_i(q_i) - S_i(q_i) |, | \bar{D}_j(d_j) - D_j(d_j) |, | \bar{C}_{ij}(x_{ij}) - C_{ij}(x_{ij}) | \}$

**if**  $( \varepsilon_p > \varepsilon )$  **then**

| Voltar para **Step 2**.

**end**

**else**

|  $( \varepsilon_p \leq \varepsilon )$  O problema SPE para  $G_p$  foi resolvido.

| **return**  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ . Mostre o vetor  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$  e pare.

**end**

**Algorithm 1:** EQUILIBRATE( $G(M \cup N, L)$ )

---

**Algoritmo 2** EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )
 

---

**Input:** Partição  $G_p$ , o arco entrante  $(\alpha, \beta)$  e o vetor  $(X, \hat{q}, \hat{d})$ .

**Output:** O vetor solução corrente  $(X, q, d)$  que representa o SPE para o componente  $G_p$  atual.

**Step 1.** *Encontre a Direção de Descida*  $(\delta, \eta, \mu)$ , tal que:  $\{\delta = [\delta_{ij}], \eta = [\eta_i], \mu = [\mu_j]\}$ , conforme (3.50)-(3.52)  
 Formular o sistema linear para  $G_p$  com o arco  $(\alpha, \beta)$ .  
 Resolver o sistema linear para obter  $(\delta, \eta, \mu)$ .

**Step 2.** *Seleção do Tamanho do Passo:*  $x_{\alpha\beta} = \lambda \cdot \delta_{\alpha\beta}$

$\lambda = \min \left\{ 1, \frac{-x_{ij}}{\delta_{ij}} \mid \delta_{ij} < 0 \right\}$ , limite superior para  $x_{\alpha\beta}$ , (3.54)

**Step 3.** *Atualização Linear:* fluxos nos nós de  $G_p$  por (3.53):

$$(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ q_i \\ d_j \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{ij} \\ \hat{q}_i \\ \hat{d}_j \end{bmatrix}^t + \lambda \cdot \begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \eta_i \\ \mu_j \end{bmatrix}^{t+1} \geq 0$$

**if**  $(\lambda < 1)$  **then**

Excluir o arco  $(i, j)$  de  $G_p$  onde  $\lambda = \frac{-x_{ij}}{\delta_{ij}} \mid \delta_{ij} < 0$

**if**  $(G_p \text{ permanece conexo})$  **then**

Executar EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )

**end**

**else if**  $(G_p \text{ está particionado em } \{G_p^{k1}, G_p^{k2}\})$  **then**

Excluir  $G_p$  e incluir ambos  $\{G_p^{k1}, G_p^{k2}\}$ .

**if**  $(\alpha, \beta) \in \{L_p^{k1}\}$  **then**

O componente  $G_p^{k2}$  já está equilibrado.

Executar

EQUILIBRATEPARTITION( $G_p^{k1}, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )

**end**

**else if**  $(\alpha, \beta) \in \{L_p^{k2}\}$  **then**

O componente  $G_p^{k1}$  já está equilibrado.

Executar

EQUILIBRATEPARTITION( $G_p^{k2}, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )

**end**

**end**

**end**

**else**

O SPE para o componente  $G_p$  foi bem sucedido:  $(\lambda = 1)$

Mostre o vetor solução atual  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ .

**return**  $(\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ .

**end**

**Algorithm 2:** EQUILIBRATEPARTITION( $G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ )

Uma vez que as bases teóricas -que fundamentam o funcionamento do algoritmo descrito pelo método proposto- foram apresentadas neste capítulo, convém apresentar a capacidade deste algoritmo de produzir soluções adequadas para problemas de equilíbrio espacial de preços (*SPE*). Esta apresentação é realizada no capítulo seguinte, onde foram escolhidas várias situações-problema para a realização de testes numéricos de resolução. A capacidade do método proposto de produzir soluções efetivas para a determinação do estado de equilíbrio final de cada uma das situações testadas foi considerada. Nestes testes numéricos, os resultados obtidos foram comparados com um *frame* resolvidor, consagrado na comunidade científica, denominado “*GAMS/IPOPT*”. Estas comparações foram descritas com uma medida de efetividade, baseada no tempo de processamento e no tamanho do problema, dado pelo número de agentes econômicos envolvidos no sistema econômico a ser equilibrado.



## 4 TESTES NUMÉRICOS E RESULTADOS

... le terme “programme”, em particular,  
 est toujours employé ici comme synonyme de “solution réalisable”,  
 et jamais comme synonyme de “problème de programmation”,  
 sens que lui donnent certains auteurs:  
 “un programme linéaire” est une solution réalisable  
 d’un problème de programmation linéaire ...

M. Simonnard

### 4.1 TESTES NUMÉRICOS REALIZADOS

Este capítulo descreve os testes numéricos que foram realizados com o objetivo de apresentar os resultados obtidos com a execução do *Algoritmo Alternativo* sobre trinta problemas *SPE* distintos.

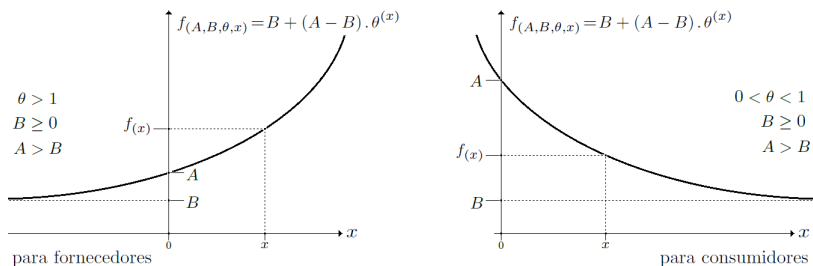


Figura 8. As funções de preços são utilizadas nos testes são estritamente monotônicas. Fonte: o autor.

Neste experimento, as funções de preços  $f(x) > 0$  dos agentes envolvidos foram positivamente modeladas em conformidade com as expressões (4.1) e (4.4), nas quais seus parâmetros tiveram seus domínios restritos em conformidade com as expressões (4.2), (4.3) e (4.5). As funções de preços geradas para os trinta problemas são consistentes com a propriedade de monotonicidade dos agentes. Os agentes fornecedores e consumidores possuem os parâmetros  $A$  and  $B$  com o mesmo sinal e o parâmetro  $\theta$  difere pelo intervalo de domínio.

Apenas por conveniência técnica, decidiu-se por funções de preços lineares para os transportadores nestes experimentos. Esta decisão

torna as soluções pouco mais realista pois procurou-se associar custos de transportes maiores para distâncias maiores entre agentes produtores e consumidores. Assim, os agentes transportadores receberam funções de preços lineares. A Figura 8 descreve o comportamento monotônico para os agentes produtores e consumidores, associados à modelagem de suas funções de preços não-lineares.

Funções de preços para Fornecedores e Consumidores:

$$f_{(A,B,\theta,x)} = B + (A - B) \cdot \theta^{(x)} \quad (4.1)$$

$$\text{parâmetros para fornecedor: } \{ \theta > 1 ; B \geq 0 ; A > B \} \quad (4.2)$$

$$\text{parametros para consumidor: } \{ 0 < \theta < 1 ; B \geq 0 ; A > B \} \quad (4.3)$$

Funções de preços para Transportador:

$$f_{(A,B,x)} = A + B \cdot (x) \quad (4.4)$$

$$\text{parâmetros para transportador: } \{ A \geq 0 ; B > 0 \} \quad (4.5)$$

O conjunto de trinta problemas experimentais foi construído automaticamente levando em consideração o número de de agentes associados como um critério para variar o tamanho de cada problema. Utilizando-se um gerador aleatório, o conjunto de parâmetros  $\{A, B, \theta\}$  para todas as funções de preços dos agentes foi gerado. O processo de geração automática dos valores dos parâmetros usou limites inferiores e superiores para estabelecer intervalos específicos para os seus domínios. Estes limites estão descritos na Tabela 2. Os três maiores problemas foram gerados com dois milhões de agentes transportadores.

Tabela 2. Faixa de valores dos parâmetros das funções de preços dos agentes presentes nos trinta problemas gerados no experimento

agentes	A		B		$\theta$	
	min	max	min	max	min	max
fornecedor	20.00	25.00	10.00	15.00	1.01	1.02
consumidor	150.00	160.00	15.00	24.00	0.97	0.99
transportador	0.00	2,250.00	0.01	0.03	—	—

O conjunto de trinta problemas *SPE*, depois de gerado, foi completamente resolvido pelo *Algoritmo Alternativo*. As soluções obtidas foram alcançadas pela aplicação sistemática do processo de linearizações sucessivas sobre cada *EC* associado ao problema em questão. Em cada etapa de linearização um novo modelo de representação  $\Pi_q$ ,

quadrático, foi construído a partir do modelo original  $\Pi_o$  -na qual está definido pelos parâmetros gerados aleatoriamente na fase de preparação deste experimento- usando um conjunto contingencial de funções de preços lineares  $f^L(a, b, x)$  para os agentes envolvidos. Uma vez tendo-se definida a forma das funções não lineares de preços dos agentes, pode-se definir a forma de suas representações lineares, para que se possa realizar o referido contingenciamento em cada linearização, em conformidade com as expressões (4.6) e (4.7).

considerando, por (3.11)-(3.13), que:  $f^L(a, b, x) = a + b \cdot x$

então, por (4.1):

$$b = (A - B) \cdot (\ln \theta) \cdot \theta^{(x_s)} \quad (4.6)$$

$$a = B + (A - B) \cdot (1 - x_s \cdot \ln \theta) \cdot \theta^{(x_s)} \quad (4.7)$$

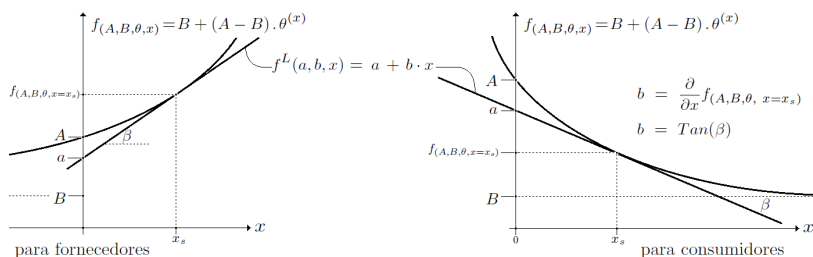


Figura 9. A representação das funções lineares de preços  $f^L(x)$  dos agentes de cada problema resolvido experimentalmente. Fonte: o autor.

Salienta-se que os parâmetros  $\{a, b\}$  são derivados a partir dos parâmetros  $\{A, B, \theta\}$ . Para os testes que foram realizados neste experimento levou-se em consideração que somente fornecedores e consumidores tiveram suas funções de preços contingencialmente linearizadas nos processos de linearizações sucessivas, porque as funções de preços dos agentes transportadores foram construídas automaticamente como já sendo lineares (uma decisão técnica conveniente para dar realismo aos custos de transportes associados às distâncias relativas entre os agentes espacialmente distribuídos) em cada problema  $\Pi_o$ .

A Figura 9 descreve a interpretação geométrica de  $f^L(a, b, x)$  que é gerada contingencialmente em cada etapa de linearização das funções não-lineares de preços para as dois tipos de agentes econômicos (fornecedores e consumidores) utilizados neste teste numérico. Elas

são linhas tangentes que passam pelas funções de preços não-lineares  $f_{(A,B,\theta,x)}$  nos pontos aproximados  $x_s$ , que são soluções factíveis obtidas em um processo de linearização imediatamente anterior.

## 4.2 RESULTADOS OBTIDOS NOS TESTES NUMÉRICOS

Todos os problems gerados neste experimento foram efetivamente resolvidos pelo *Algoritmo Alternativo*.

Com o objetivo de descrever os resultados obtidos por meio de uma análise comparativa de resultados, estes mesmos problemas também foram submetidos ao frame tecnológico denominado *GAMS-IPOPT*.

O referido *frame* não foi efetivo na resolução de cinco problemas específicos: (i) os problemas {26, 27} foram interrompidos pelo critério de tempo de busca de solução anunciado pelo próprio *frame* e as terminações destes processos ocorreram quando as soluções aproximadas estavam efetivamente próximas das respectivas soluções finais obtidas pelo *Algoritmo Alternativo*; (ii) os problemas {28, 29, 30} permaneceram sem solução e processo de busca do *frame* terminou a sua execução sem quaisquer soluções aproximadas, com uma mesma mensagem de erro “*error-exit*”.

Os problemas identificados pelos rótulos 01 à 25 foram resolvidos com o mesmo valor para a função objetivo em ambos os resolvedores.

Observou-se experimentalmente que o *frame* tecnológico *GAMS-IPOPT* foi mais rápido na apresentação da solução somente em dois problemas, {19, 20} com efetividade comparada média de 5.81%. Para os demais problemas, o *Algoritmo Alternativo* proposto foi efetivamente mais rápido, com efetividade média comparada de 55,46%.

Os resultados numéricos obtidos neste experimento são apresentados na Tabela 3. Cada linha da tabela corresponde a um problema que foi resolvido pelos dois métodos de resolução.

As duas colunas à esquerda identificam os problemas pelo tamanho e pelo valor da função objetivo computados como idênticos em valor com centésimos de precisão para os dois resolvedores testados.

O tempo de resposta do *Algoritmo Alternativo* é identificado na quinta coluna pelo cabeçalho com o acrônimo *AA*.

A última coluna representa o tempo de resposta do *frame* *GAMS-IPOPT* com o cabeçalho com o acrônimo *IPOPT*.

A terceira coluna da tabela acima faz referência ao número de *clusters* isolados que representam os subsistemas econômicos em es-



tado de equilíbrio espacial de preços. Estes subsistemas são os próprios *Componentes Equilibrados - EC* que foram instanciados computacionalmente durante o processo de solução do problema original pelo *Algoritmo Alternativo*. Por isso, essa coluna não guarda nenhuma relação com o *frame* de comparação *GAMS-IPOPT*. A quarta coluna também é específica para o algoritmo proposto e representa a quantidade de iterações que foi necessária para que o *Algoritmo Alternativo* computasse o estado de equilíbrio para cada problema testado. A medida de desempenho dos dois resolvidores comparados é descrita na quinta e na sexta coluna, em segundos, em termos de *CPU's time*, o tempo mais curto obtido desde o início da resolução até a sua apresentação de cada problema. Assim, esta medida representa o tempo consumido para resolver o problema. A última coluna foi reservada para esta medida obtida pelo *frame GAMS-IPOPT*<sup>1</sup>, no qual foi considerado ferramental tecnológico para *benchmarking* e utilizado neste experimento, em sua versão livre de ônus, somente para processos de comparação com o *Algoritmo Alternativo* proposto.

Nos testes realizados, o *Algoritmo Alternativo - AA* foi 100% efetivo na produção da resolução dos problemas experimentados. A medida de efetividade comparada média descreve o fato de que *AA* foi 54,46% mais rápido que o *frame GAMS-IPOPT* em 23/25 dos casos testados. Esta métrica está apresentada pela equação (4.8), onde  $P = 23$  foi o número de problemas comparados. Foi percebido que *AA* was mais rápido também nas situações onde o tamanho do problema estava associado com um maior número de *clusters* que ficaram formados quando a solução final foi alcançada. Isto ocorreu porque uma baixa quantidade de *clusters* aponta para situações onde a ordem da matriz inversa utilizada é maior. Desta forma, espera-se que o processo de inversão de matrizes de maior ordem induzam uma elevação significativa na medida de *CPU's time* no processo de obtenção das soluções por meio do *Algoritmo Alternativo*. Entretanto, isso também vale para qualquer outra ferramenta resolutive. Problemas com mais de dois milhões de agentes transportadores não foram testados neste

---

<sup>1</sup>GAMS® é um *frame* tecnológico, um resolvidor numérico conhecido como ferramental técnico-científico produzido e disponível como um dos líderes do mercado na indústria de otimização. ele foi o primeiro sistema de *software* a combinar pacotes e linguagens de álgebra matemática com pacotes de software baseados em conceitos de programação tradicional com o objetivo de descrever a eficiência de soluções para problemas de programação não-lineares. Suas características técnicas estão bem descritas em <https://www.gams.com>. O termo *IPOPT* ® faz referência a um conjunto de pacotes específicos e a um competente resolvidor numérico que funciona de forma acoplada ao *frame* para determinar uma forma específica de resolver o problema modelado. Ele está descrito no sítio <https://projects.coin-or.org/Ipopt>.

trabalho.

A medida de efetividade comparada do AA:

$$\Delta_{AA} \% = \left[ \frac{\sum_{p=1}^P \left[ \frac{AA_p - IPOPT_p}{IPOPT_p} \right]}{P} \right] \cdot 100 \quad (4.8)$$

O conjunto de problemas foi resolvido pelo *Algoritmo Alternativo*, no qual foi implementado na linguagem de programação *Object Pascal Delphi*®7.0. Já o *frame* utilizado como *benchmark* foi escrito na linguagem *C*. Ambos rodaram em uma mesma máquina, sobre o sistema operacional *Windows 10 Pro*® 64 bits, dotada de um processador *Intel*® Core (TM) i7 - 7700 HQ Turbo P1 3.7 GHz, com 16 GB de RAM.

À título de ilustração, uma pequena representação gráfica de um estado *SPE* resolvido pelo *Algoritmo Alternativo* é apresentada na Figura 10. Nela, uma representação gráfica de um sistema econômico em estado de *SPE* alcançado por meio da aplicação do *Algoritmo Alternativo*, na forma de um problema constituído por um conjunto de 101.100 agentes: 100 produtores, 1.000 consumidores e 100.000 transportadores. Apenas por questões de realismo com os custos de transportes, os transportadores foram caracterizados com funções de preços lineares. Problemas grandes são difíceis de visualizar.

Tabela 3. O desempenho do *Algoritmo Alternativo* na resolução de trinta problemas especialmente construídos em um teste experimental

Características dos problemas <i>SPE</i> testados				<i>CPU time</i> (s)	
problema	otimalidade	<i>EC</i> 's	itera.	<b>AA</b>	<b>IPOPT</b>
01 :10 x 20	54,345.53	4	105	0.046	0.391
02 :10 x 20	63,569.83	2	110	0.063	0.453
03 :10 x 50	91,214.27	3	286	0.125	0.297
04 :10 x 50	91,001.38	2	350	0.156	0.312
05 :20 x 50	141,204.56	3	263	0.109	0.250
06 :20 x 50	134,515.47	6	254	0.125	0.407
07 :20 x 100	178,250.62	2	475	0.218	0.719
08 :20 x 100	196,343.36	4	652	0.328	0.438
09 :50 x 100	299,110.94	10	745	0.359	3.078
10 :50 x 100	279,489.58	7	756	0.391	2.719
11 :50 x 200	425,772.53	6	1,407	1.016	4.281
12 :50 x 200	415,564.29	6	1,312	1.031	6.579
13 :100 x 200	612,937.28	16	1,508	1.687	2.922
14 :100 x 200	567,900.56	21	1,544	1.702	5.468
15 :100 x 500	943,704.85	11	3,085	9.608	17.110
16 :100 x 500	892,523.76	16	3,173	10.138	13.797
17 :200 x 500	1,301,993.84	35	3,484	21.386	69.672
18 :200 x 500	1,386,342.57	23	3,650	21.526	48.406
19 :200 x 1000	1,784,953.72	35	7,446	58.875	55.984
20 :200 x 1000	1,866,139.93	30	6,163	72.420	67.562
21 :200 x 1000	1,953,662.14	24	6,494	73.295	88.141
22 :500 x 1000	2,626,818.61	112	7,200	137.795	306.781
23 :500 x 1000	2,775,068.62	84	7,572	181.238	254.719
24 :500 x 1000	3,037,462.09	65	9,748	187.532	218.672
25 :500 x 2000	3,993,569.65	116	12,352	458.798	706.094
26 :500 x 2000	4,172,976.62	75	12,983	475.433	> 3,600
27 :500 x 2000	4,317,253.08	45	16,878	633.875	> 3,600
28 :1000 x 2000	5.398.013,58	204	14,564	1,036.509	—
29 :1000 x 2000	5.029.123,66	290	13,457	1,070.163	—
30 :1000 x 2000	4.643.654,52	378	15,742	1,145.869	—

**AA** : O *CPU time* para *Algoritmo Alternativo*, em segundos  
**IPOPT** : O *CPU time* para o *frame GAMS-IPOPT*, em segundos  
“otimalidade”: Os valores iguais da *função objetivo*: AA e IPOPT

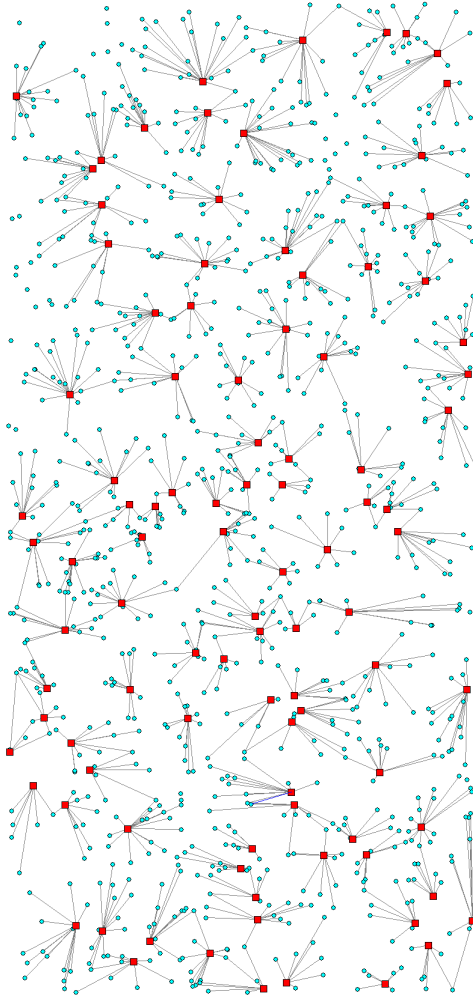


Figura 10. Representação gráfica de um sistema econômico em estado de *SPE*, constituído por um conjunto de 101.100 agentes. Fonte: o autor.

## 5 CONCLUSÃO

... *Attitude is a little thing that makes a big difference* ...  
*Winston Churchill*

### 5.1 CONCLUSÕES ASSOCIADAS AO PROCESSO DE PROPOSIÇÃO DO ALGORITMO ALTERNATIVO

Este trabalho fornece uma prova concreta da propriedade de efetividade do *Algoritmo Alternativo* proposto para resolver problemas *SPE* com agentes econômicos dotados de funções de preços não-lineares. Como um método numérico, o algoritmo proposto está em conformidade com o triplo *tradeoff* (*accuracy; size; speed*) citado por (FRIESZ; HARKER; TOBIN, 1984). As soluções obtidas por este método são as mesmas que foram obtidas pelo *frame GAMS-IPOPT*, no qual foi utilizado como *benchmark* para fins de comparação. Foram resolvidos problemas *SPE* com mais de um milhão de agentes com tempo de execução menor que mil segundos. Quando levado em consideração a escala de tamanho dos problemas, os resultados são os mesmos em acurácia e são equivalentes em tempo de resolução, quando ambos os resolvedores são postos para trabalhar em máquinas com mesma arquitetura e mesmo processador.

Os resultados computados pelo *Algoritmo Alternativo* foram consistentes com a realidade dos problemas. A maneira de como agentes reais percebem o ambiente econômico atuando em modo de competição é simplesmente capturada para dentro do modelo não-linear do problema *SPE* original  $\Pi_o$  por meio de um processo que decodifica as características comportamentais dos agentes em termos de uma coleção adequada de parâmetros matemáticos  $\{A; B; \theta\}$  e de estruturas de dados para descrever suas conectividades e capacidades de consumo, transporte e produção. Este processo está representado por um conjunto de tarefas que poderiam ser realizadas por um analista responsável por estabelecer umnexo entre um sistema econômico real com o modelo matemático que faz a representação abstrata da realidade modelada. O estado de equilíbrio final produzido pela aplicação do *Algoritmo Alternativo*, o próprio *SPE* de cada problema, é obtido a partir de sistemáticas linearizações  $\Pi_q$  associadas ao problema original  $\Pi_o$ . Este estado é efetivamente consistente com a representação

abstrata de um problema real formado com agentes econômicos atuando em concorrência perfeita, constituídos por funções de preços não-lineares: as restrições, o conceito de *SPE*, juntamente com o princípio de conservação de fluxos entre agentes, são sempre satisfeitos.

Além disso, ressalta-se aqui que a representação do problema *SPE* original está em total conformidade com as definições de *Problema de Otimização Equivalente - EOP* proposta por (FRIESZ; BERNSTEIN, 2016). Este fato nos deixa muito à vontade para capturar e transferir, em termos conceituais, as propriedades de *Existência* e de *Unicidade* para os modelos de problemas  $\{\Pi_o; \Pi_q^t\}$  do *Algoritmo Alternativo*. Mesmo com a referida tranquilidade, fez-se questão de apresentar a prova matemática para estas mesmas propriedades por meio de teoremas específicos, especialmente elaborados no contexto das características próprias dos elementos presentes no *Algoritmo Alternativo*, descritas no Apêndice A.

Os aspectos mencionados anteriormente foram apresentados no decorrer do presente trabalho e podem ser considerados como evidências claras de que os seus objetivos propostos foram efetivamente alcançados. Dois aspectos destacam-se em relação aos demais: (i) a utilização de conceitos novos para conceber arcos entrantes, componentes equilibrados e as representações originais  $\Pi_o$  e quadráticas  $\Pi_q$ , todas elas relacionadas por meios de estruturas de dados em grafos e matrizes, permitiram com que as soluções aproximadas pudessem ser submetidas à sucessivas inserções de arcos entrantes e sucessivas linearizações de  $\Pi_o$  em  $\Pi_q$ , de tal maneira que elas são todas verificáveis do ponto de vista da *Convergência* e *Unicidade* de solução, em cada iteração controlada. Pode-se afirmar que o método proposto é matematicamente consistente, uma vez que as propriedades matemáticas dos elementos que o referido método utiliza são mensuráveis; (ii) a utilização da *Análise Funcional*, principalmente dos teoremas *Riesz* e de *Lax-Milgram* aplicados sobre espaços métricos de *Hilbert*, formados por elementos concebidos no Capítulo 3, garante a *Convergência* e *Unicidade* de cada solução obtida por aproximação pelo método proposto.

## 5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O aspecto diferencial do *Algoritmo Alternativo*, em contraste com outros -igualmente efetivos- métodos numéricos, é que a solução final  $X^*$  obtida em cada problema tratado, é alcançada dentro de um processo de linearizações sucessivas que está efetivamente acoplado a um

outro processo de inserções sucessivas de *Arcos Entrantes*  $a(\alpha, \beta)$ , nos quaisuma formulação matricial elaborada sobre representações contingenciais  $\Pi_q$  de problemas quadráticos são resolvidas com uma solução aproximada  $\Delta X^{t+1}$  que é única para cada problema linearizado (atendendo as restrições no sistema linear de equações). Isto é feito utilizando-se um operador linear auto-adjunto (*self-dual*)  $[A]$  que opera sobre um espaço linear de dimensão finita dotado de produto interno como norma, mapeando um funcional linear dual  $\mathbf{u}$  qu, no contexto do problema real, é uma representação abstrata na forma de um vetor de densidades de variação de preços e fluxos  $u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}[\Delta X^{t+1}]$ , no qual encontra-se em correspondência *um-para-um* com o vetor solução no espaço primal  $\Delta X^{t+1}$ . Desta forma, considerando que o equilíbrio anterior  $X^t$  é sempre conhecido, é possível obter o próximo equilíbrio  $X^* = X^{t+1} = X^t + \Delta X^{t+1}$ . O critério de parada para os *loops* associados aos processos acoplados referenciados anteriormente são disparados quando nenhum outro arco pode assumir o papel de arco entrante (não pode ser inserido dentro de nenhum componente - um subgrafo conexo maximal) e também são disparados quando a diferença entre as duas linearizações mais recentes e consecutivas é menor que uma medida de erro prédefinida (tolerância)  $\varepsilon_{max}$ . As ações controladas para tornar cada problema *SPE* resolvível são realizadas utilizando-se estruturas de dados baseadas na Teoria dos Grafos e na representação matricial, objetivando-se manipular em tempo de execução o conjunto de arcos que estão associados aos subgrafos conexos maximais. Estes subgrafos estão vinculados contingencialmente ao arco inserido no momento de cada linearização realizada. Com estas representações é sempre possível atender as restrições modeladas no problema original, evitando-se as situações de não-positividade para as variáveis de decisão  $x_{ij}$  envolvidas, nas quais são representativas dos fluxos de mercadorias que ocorrem nos agentes transportadores do sistema real, nos processos de sucessivas aproximações.

### 5.3 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Durante a proposição do método que fundamenta a efetividade do *Algoritmo Alternativo*, percebeu-se oportunidades para o desenvolvimento de novas linhas de atuação no âmbito do equilíbrio espacial de preços. Entre elas, citam-se algumas:

1. utilizar o modelo proposto para resolver problemas com tamanho maior que dois milhões de agentes transportadores;

2. construir um *frame* para simular as situações onde a análise de sensibilidade do modelo proposto seria a base para indicar os agentes mais sensíveis em um sistema econômico, em termos de diminuição ou aumento de fluxos e preços, quando um novo certo agente produtor ou consumidor entra no sistema com alta capacidade de produção ou com grande demanda por produtos;
3. idem à situação anterior, observando-se formas alternativas de impor aumento nos custos de transportes causados por motivações regulamentaórias nas relações comerciais entre os agentes do sistema que efetivamente realizam comércio;
4. utilizar o sistema econômico para descrever as variações no equilíbrio de preços de sistemas espacialmente distribuídos envolvendo situações problemas reais.



## REFERÊNCIAS

- BAWDEN, D.; SCHMITZ, A. A spatial price analysis of the world wheat economy. some long-run predictions, in g.g. judge and t. takayama eds. *Journal of Studies in Economic Planning over space and time*, I, n. Part I, 1973.
- BAWDEN, D. L. A spatial price equilibrium model of international trade. *Journal of Farm Economics*, v. 48, n. 4 Part I, p. 862–874, 1966.
- BERTALANFFY, L. V. *Teoria Geral dos Sistemas*. São Paulo, SP: Editora Vozes, 2008. ISBN 9788532636904.
- BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear programming*. [S.l.]: Athena Scientific, 1999. (Athena Scientific optimization and computation series). ISBN 9781886529007.
- BOYCE, D. E.; MAHMASSANI, H. S.; NAGURNEY, A. A retrospective on beckmann, mcguire and winsten's studies in the economics of transportation. *Papers in Regional Science*, Blackwell Science Ltd, v. 84, n. 1, p. 85–103, 2005. ISSN 1435-5957.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9780387709130.
- CHAO, G. S.; FRIESZ, T. L. Spatial price equilibrium sensitivity analysis. *Transportation Research Part B: Methodological*, v. 18, n. 6, p. 423 – 440, 1984. ISSN 0191-2615.
- COURNOT, A. A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. London, London: McMillan BiblioBazaar 2008, 1838. ISBN 9780554700601.
- CRUZ, J. B.; PÉREZ, L. L. Convergence of a projected gradient method variant for quasiconvex objectives. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 73, n. 9, p. 2917 – 2922, 2010. ISSN 0362-546X.
- DAFERMOS, S.; NAGURNEY, A. Sensitivity analysis for the general spatial economic equilibrium problem. *Operations Research, INFORMS*, v. 32, n. 5, p. 1069–1086, 1984.

DAFERMOS, S.; NAGURNEY, A. Oligopolistic and competitive behavior of spatially separated markets. *Regional Science and Urban Economics*, v. 17, n. 2, p. 245 – 254, 1987. ISSN 0166-0462.

DAFERMOS STELLA; NAGURNEY, A. A network formulation of market equilibrium problems and variational inequalities. *Operations Research Letters*, v. 3, n. 5, p. 247 – 250, 1984. ISSN 0167-6377.

DENNIS, J.; SCHNABEL, R. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898713640.

FANG, S. C.; PETERSON, E. L. General network equilibrium analysis. *International Journal of Systems Science*, v. 14, n. 11, p. 1249–1257, 1983.

FLORIAN, M.; LOS, M. A new look at static spatial price equilibrium models. *Regional Science and Urban Economics*, v. 12, n. 4, p. 579 – 597, 1982. ISSN 0166-0462.

FRIESZ, T. L.; BERNSTEIN, D. *Foundations of Network Optimization and Games*. New York, NY, USA: Springer US, 2016. (Complex Networks and Dynamic Systems). ISBN 9781489975942.

FRIESZ, T. L.; HARKER, P. T.; TOBIN, R. L. Alternative algorithms for the general network spatial price equilibrium problem\*. *Journal of Regional Science*, Blackwell Publishing Ltd, v. 24, n. 4, p. 475–507, 1984. ISSN 1467-9787.

FUKUSHIMA, M. A modified frank-wolfe algorithm for solving the traffic assignment problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, v. 18, n. 2, p. 169 – 177, 1984. ISSN 0191-2615.

GEOFFRION, A. M. *Lagrangean Relaxation for Integer Programming*. [S.l.]: Springer, 1974.

GERE, J.; TIMOSHENKO, S. *Mechanics of Materials*. [S.l.]: Stanley Thornes, 1999. ISBN 9780748739981.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. [S.l.]: Campus, 2000. ISBN 9788535205411.

GUBIN, L.; POLYAK, B.; RAIK, E. The method of projections for finding the common point of convex sets. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 7, n. 6, p. 1 – 24. ISSN 0041-5553.

HARKER, P. T. *Spatial Price Equilibrium: Advances in Theory, Computation and Application: Papers Presented at the Thirty-First North American Regional Science Association Meeting Held at Denver, Colorado, USA November 1984*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems). ISBN 9783642465482.

HARKER, P. T. Alternative models of spatial competition. *Operational Research*, Operational Research 34, p. 410 – 425, 1986. ISSN 0000-0000.

HARKER, P. T.; PANG, J. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications. *Math. Program.*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 48, n. 2, p. 161–220, set. 1990. ISSN 0025-5610.

HARTOG, J. D. *Advanced Strength of Materials*. [S.l.]: Dover Publications, 1987. (Dover Civil and Mechanical Engineering Series). ISBN 9780486654072.

HILLIER, F.; LIEBERMAN, G. *Introdução à Pesquisa Operacional*. [S.l.]: McGraw-Hill Brasil, 2013. ISBN 9788580551198.

IRWIN, C.; YANG, C. Iteration and sensitivity for a spatial equilibrium problem with linear supply and demand functions. *Operations Research*, v. 30, n. 2, p. 319–335, 1982.

IUSEM, A. *On the Convergence Properties of the Projected Gradient Method for Convex Optimization*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2002. (Informes de matemática).

JAGGI, M. Revisiting frank-wolfe: Projection-free sparse convex optimization. *JMLR*, v. 28, p. 427 – 35, 2013.

KELLY, T.; KUPFERSCHMID, M. Numerical verification of second-order sufficiency conditions for nonlinear programming. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 40, n. 2, p. 310 – 314, 1998. ISSN 00361445.

KNUTH, D. E. *The art of computer programming Vol 1 3rd edition*. Reading, MA: Addison Wesley, 1997. ISBN 0-201-89683-4.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis With Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1978. (Wiley Classics Library). ISBN 9780471507314.

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. Nonlinear programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, CA: University of California Press, 1951. p. 481 – 492.

LEVITIN, E.; POLYAK, B. Constrained minimization methods. *USSR - Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 6, n. 5, p. 1 – 50, 1966. ISSN 0041-5553.

MACHADO, C. M.; MAYERLE, S. F.; TREVISAN, V. A linear model for compound multicommodity network flow problems. *Computers & Operations Research*, v. 37, n. 6, p. 1075 – 1086, 2010. ISSN 0305-0548.

MACKINNON, J. G. An algorithm for the generalized transportation problem. *Regional Science and Urban Economics*, Elsevier, v. 5, n. 4, p. 445–464, 1975.

MANKIW, N. G. *Introdução à Economia 13 edição*. São Paulo, SP: Thomson Learning Edições, 2006. ISBN 8522104085.

MAYERLE, S. F.; BASTOS, T. D. A. O problema dos transportes sob a ótica dos modelos de equilíbrio espacial de mercados. In: *Anais do SPOLM*. SPOLM99, BR: SPOLM99, 1999. p. 1 – 11.

MURTY, K. G. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. [S.l.]: Heldermann, 1988. (Sigma Series in Applied Mathematics). ISBN 9783885384038.

MYERSON, R. B. Refinements of the nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, Springer, v. 7, n. 2, p. 73 – 80, 1978.

MYERSON, R. B. Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, JSTOR, v. 37, n. 3, p. 1067 – 1082, 1999.

NAGURNEY, A. An algorithm for the classical spatial price equilibrium problem. *Operations Research Letters*, v. 6, n. 2, p. 93 – 98, 1987. ISSN 0167-6377.

NAGURNEY, A. *NetWork Economics: A Variational Inequality Approach*. Boston, MA: Kluwer academic Publishers, 1999. ISBN 0-7923-8350-8.

NAGURNEY, A.; ARONSON, J. A general dynamic spatial price equilibrium model: formulation, solution, and computational results. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 22, n. 2, p. 339 – 357, 1988. ISSN 0377-0427.

NAGURNEY, A.; LIU, Z. Multiperiod competitive supply chain networks with inventorying and a transportation network equilibrium reformulation. *Springer Science+ Business Media: Optim Eng*, v. 13, n. 13, p. 471 – 503, 2012.

NASH, J. F. *Non-cooperative Games*. [S.l.]: Princeton University, 1950.

NASH, J. F. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, v. 54, n. 1, p. 286 – 298, 1951.

NIKOLSKY, S.; VOLOSOV, V. *A Course of Mathematical Analysis-1*. [S.l.]: Mir Publishers Moskow, 1977.

NIKOLSKY, S.; VOLOSOV, V. *A Course of Mathematical Analysis-2*. [S.l.]: Mir Publishers Moskow, 1977.

ODEN, J.; DEMKOWICZ, L. *Applied Functional Analysis, Second Edition*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2010. (Computational mechanics and applied analysis). ISBN 9781420091953.

ORCHARD-HAYS, W. *Advanced linear-programming computing techniques*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1968.

PANG, J.-S.; LEE, P. S. A parametric linear complementarity technique for the computation of equilibrium prices in a single commodity spatial model. *Mathematical Programming*, Springer, v. 20, n. 1, p. 81–102, 1981.

POLAK, E. *Computational Methods In Optimization: A unified approach*. New York, NY: Academic Press, 1971. ISBN 0-387-94971-2.

POLAK, E. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1997. ISBN 0-387-94971-2.

POPOV, E. *Engineering Mechanics Of Solids*. [S.l.]: Pearson, 2010. ISBN 9788178085357.

PORTER, M. E. *Competição: Estratégias Competitivas Essenciais 13 edição*. [S.l.]: Elsevier Editora, 1999. ISBN 8535204474.

POSSAMAI, J. P. *Equilíbrio espacial e temporal de preços - Intervenção governamental*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção - PPGEP-UFSC, Florianópolis, 2015.

REDDY, B. *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. [S.l.]: Springer New York, 2013. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9781461205753.

REDDY, B. D. *Functional Analysis and Boundary-Value Problems: An Introductory Treatment*. [S.l.]: Longman Scientific & Technical, 1986. (Pitman Monographs & Surveys in Pure & Applied Mathematics). ISBN 9780470203842.

RODRIGUES, L.; NEVES, F. Niklas luhmann: a sociedade como sistema. *EdiPUCRS*, v. 14, n. 20, p. 1 – 132, 2013. ISSN 2175-9553.

SAMUELSON, P. A. Spatial price equilibrium and linear programming. *The American Economic Review*, JSTOR, v. 42, n. 3, p. 283 – 303, 1952. ISSN 00028282.

SHEFFI, Y. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc, 1985. ISBN 0-13-939729-9.

SMITH, T. E.; FRIESZ, T. L. Spatial market equilibria with flow-dependent supply and demand. *Regional Science and Urban Economics*, v. 15, n. 2, p. 181 – 218, 1985. ISSN 0166-0462.

TAKAYAMA, T.; JUDGE, G. G. Spatial and temporal price allocation models. *North-Holland Publishing Company*, *Journal of International Economics* Amsterdam 1971, v. 1, n. 3, p. 490–528, August 1971.

TARJAN, R. E. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, *SIAM Journal on Computing*, v. 1, n. 2, p. 146 – 160, 1972.

TOBIN, R. L.; FRIESZ, T. L. Formulating and solving the network spatial price equilibrium problem with transshipment in terms of arc variables. *Journal of Regional Science*, v. 23, n. 2, p. 187 – 198, 1983. ISSN 0166-0462.

WOLFE, P. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 382–398, 1959.

WOLSEY, L. A. *Integer programming*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1998. ISBN 0471283665.

WONNACOTT, P.; WONNACOTT, R. J. *Economia*. [S.l.]: Makron Books, 1994. ISBN 9788534601498.





**APÊNDICE A - Considerações sobre a convergência do  
método proposto**



... *We must know. We will know* ...  
*David Hilbert*

O presente Apêndice A descreve os elementos de prova matemática que são necessários para garantir as propriedades de convergência e de unicidade das soluções aproximadas obtidas pelo método proposto, apresentado no Capítulo 3. A primeira propriedade faz referência à condição de *Existência* de soluções que são geradas pelo método proposto. Isto implica em afirmar que as soluções geradas são elementos de um conjunto descrito por um espaço métrico previamente conhecido e caracterizado: para estes elementos, mesmo antes de serem gerados, é possível transferir as propriedades do conjunto que os contém. Assim, busca-se nas seções seguintes apresentar as propriedades do referido conjunto (espaço de funcionais), de modo que se possa caracterizar as soluções obtidas em termos de uma medida que converge para um limite que pertence a um espaço válido de medidas. Desta forma, provando-se a propriedade de *Existência* (e de convergência) pode-se executar o método proposto com a certeza de que as soluções convergem. A segunda propriedade diz respeito à condição de unicidade de cada uma das soluções. Será mostrado que o espaço das soluções aproximadas possui uma representação dual adequadamente dotada de um operador *auto-adjunto*, regular e inversível: tais propriedades são suficientes para a prova de unicidade de cada uma das soluções aproximadas obtidas pelo método proposto.

## A.1 A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO PROPOSTO

As bases teóricas do *Algoritmo Alternativo* descritas no Capítulo 3 descrevem o método posto como um método que opera tarefas de controle sobre a maneira pela qual os componentes equilibrados, que representam um sistema econômico a ser equilibrado, recebem sistematicamente arcos entrantes, num processo de inserções sucessivas. Em cada inserção realizada, o equilíbrio espacial de preços dos componentes envolvidos é perturbado e o estado *SPE* de cada um deles precisa ser novamente computado. Este processo se repete até que uma medida de erro pré-estabelecida seja alcançada. Em cada repetição, tem-se que os componentes envolvidos se submetem à sucessivos processos de linearizações. Em cada linearização, a solução aproximada obtida para o

equilíbrio do componente tem sua convergência verificada.

Nesta seção, a referida convergência algorítmica é submetida por processo de prova matemática onde uma solução aproximada qualquer  $\Delta X$  pertence ao domínio dos espaços lineares  $\Omega \subset R^n$  das funções contínuas  $u \in U \subset R^n$ , que estão definidas em um subespaço linear limitado e fechado  $\bar{\Omega} \subset R^n$ . Estas funções contínuas formam uma série de *Cauchy* (convergente) em respeito à uma dada norma  $\|u(\Delta X)\| \leq K$ , para alguma constante real  $K > 0$  e todas as aproximações  $\Delta X \in \{\bar{\Omega}\}$ . Assim, usam-se espaços lineares  $U \in C^2(\Omega \cup \bar{\Omega}) \subset R^n$  completos de funções contínuas, cujos elementos convergem para um limite que faz parte do espaço  $U$  considerado. A norma do supremo deste conjunto, denominada *sup-norm*, é aplicável, pois o conjunto fechado  $U$  possui um valor mínimo e um valor máximo em seu fechamento. Isto implica em uma convergência uniforme para o espaço  $U$ : esta noção de completude e de fechamento é utilizada para garantir que a propriedade de convergência para o conjunto de soluções aproximadas  $u(\Delta X)$  seja sempre mensurável sobre todas as linearizações realizadas em um componente equilibrado.

As provas matemáticas das propriedades de *Convergência* e de *Unicidade* das soluções aproximadas, obtidas pelo método descrito no Capítulo 3, são apresentadas a seguir pelo Teorema 3 e pelos Lemas  $\{1, 2, 3\}$ , os quais provam que o processo de sucessivas linearizações sobre um dado componente equilibrado converge e produz única solução. Estes teoremas estão suportados pela Teoria da *Análise Funcional*<sup>1</sup>. Note-se que um componente equilibrado pode ter seu estado de equilíbrio (*SPE*) descrito por um sistema homogêneo de equações lineares a serem reescritos de uma tal forma que seja possível extrair um operador linear auto-adjunto  $[A]_{N \times N}$ . Com base nas referidas teorias, teoremas e lemas, este operador é aplicável sobre qualquer vetor  $u(\Delta X) \in U$  com  $U$  sendo um espaço linear de dimensão finita dotado de produto interno como norma, onde  $\dim(U) = n$ . De acordo com os suportes teóricos mencionados, existe um isomorfismo isométrico de  $U$  para  $R^n$  onde  $[A] \cdot u = v$ ,  $\{u, v\} \in U$ , com  $U = R^n$ . As provas dos teoremas são realizadas por meio da especificação de um operador auto-adjunto análogo, com o objetivo de encontrar um vetor  $u$  densidade de variação

---

<sup>1</sup>A Teoria da Análise Funcional —como definida em (REDDY, 2013), (BREZIS, 2010), (ODEN; DEMKOWICZ, 2010), (KREYSZIG, 1978) e (REDDY, 1986)— fornece um suporte adequado, pelo uso de conceitos de espaços de *Banach* e espaços de *Hilbert*, associados com os conceitos de *Operadores Lineares* que operam sobre espaços lineares de dimensão finita, nos quais possuem uma representação matricial geral que pode ser utilizada para resolver uma classe particular de problemas considerados “bem-postos”.

de preços e fluxos por unidade de fluxo no arco entrante, visto também como sendo o próprio vetor de direção de descida para a aproximação (linearização) considerada. Vector  $v$  é análogo ao vetor densidade de variação de preços e fluxos no arco entrante  $(\alpha, \beta)$ . Será mostrado que  $u = [A]^{-1} \cdot v$  existe e é único em cada linearização realizada sobre um dado componente.

## A.2 SOBRE O FATO DE QUE UM COMPONENTE EQUILBRADO POSSUI UM OPERADOR AUTO-ADJUNTO $[A]$ ASSOCIADO

O sistema de equações lineares que está associado ao estado *SPE* de um dado componente equilibrado, montado<sup>2</sup> a partir de sua representação quadrática  $\Pi_q$ , no mais recente processo de linearização em conformidade com as expressões (3.50) à (3.53) -sob a condição mandatária em (3.19) ou (3.31)- possui uma representação matricial com operadores lineares para descrever as variações  $[\Delta X]$  em preços e em fluxos que foram causados por influência do processo de inserção de um arco entrante. Assim, desta representação matricial pode-se extrair um operador auto-adjunto (*self-dual*)  $[A]$ , de ordem  $N$ , que mapeia um espaço linear  $H$  de dimensão finita que é dotado de produto interno como norma, cujos membros  $\{u(\Delta X), v(\Delta X)\} \in \{U = U' = R^N\}$  são vetores densidade de variação daqueles preços e fluxos  $[\Delta X]$ , todos eles tomados em respeito à variação de fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que ocorre dentro do arco entrante  $(\alpha, \beta)$ . Este fluxo  $x_{\alpha\beta}$  é o fluxo efetivo e necessário ao novo equilíbrio: ele afeta homeostaticamente todos os demais fluxos no componente. Desta forma,  $u = [A]^{-1} \cdot v$ , como descrito pela expressão (A.2). O operador auto-adjunto  $[A]$  confirma o mapeamento  $A : U \rightarrow U = U' = R^N$  como sendo um legítimo isomorfismo isométrico. Como consequência, a expressão (A.7) pode ser utilizada para encontrar os vetores regulares de densidade de variação  $u(\Delta X)$  que estão linearmente associados ao vetor densidade de variação relativa de fluxo  $v(\Delta X)$ , o qual, por sua vez, está sempre associado ao fluxo efetivo que flui dentro do arco entrante<sup>3</sup>  $(\alpha, \beta)$ , no momento em que

---

<sup>2</sup>O processo de montagem do sistema linear de equações não é realizado segundo uma forma arbitrária, uma vez que o *SPE* para um dado componente é representado por um conjunto de dados que é montado segundo restrições impostas pelo princípio de conservação de fluxo (nos nós do componente) e pelo conceito de equilíbrio espacial de preços sobre as variáveis de decisão do problema (não-negatividade incluída).

<sup>3</sup>Os vetores densidade de variação  $\{u, v\}$ , como em (A.2), são descritíveis como relativos ao fluxo  $x_{ij}$ , pois no estado *SPE* de um componente tem-se que  $x_{ij} > 0$ , que flui em qualquer outro arco  $(i, j)$  presente no referido componente.

o componente entra em equilíbrio. Em outras palavras,  $u$  é um vetor densidade de perturbação, num espaço dual, que expressa as taxas de variações de preços e de fluxos que ocorrem em cada agente (nó e arco) de um componente, por unidade de fluxo  $x_{\alpha\beta}$ , toda vez que este componente é perturbado por um fluxo absoluto  $x_{\alpha\beta}$ , o qual é originado pela nova linearização que é realizada em respeito ao mais recente arco entrante  $(\alpha, \beta)$  que foi inserido. O valor absoluto de  $x_{\alpha\beta}$  possui uma legítima representação (correspondência um-para-um) no referido espaço dual  $U = U'$ , em termos derivativos, pelo vetor  $v$ , que é uma taxa regular de variação de preços e fluxos que deve ocorrer em todos os agentes do arco  $(\alpha, \beta)$ .

**Teorema 3 (Todo componente possui operador auto-adjunto)**

*Dado um componente equilibrado  $G_p = (M_p, N_p, L_p)$ , cujo equilíbrio é perturbado pela inserção de um arco entrante  $(\alpha, \beta)$ , e sua representação matricial associada ao problema quadrático  $\Pi_q$ , descrito em (3.50) à (3.53), incluindo-se (3.19) ou (3.31), é possível extrair desta representação matricial um operador auto-adjunto  $[A]$ , regular e inversível, de ordem  $N$ , que mapeia em correspondência um-para-um as variações de densidades de fluxos em todos os demais arcos deste componente a partir da medida de variação da densidade de fluxos computada no arco entrante, num espaço dual, linear e finito, dotado de produto interno como norma. Sendo  $[A]$  auto-adjunto, é inversível e regular: a solução do problema quadrático  $\Pi_q$  primal existe e é única.*

*Um componente equilibrado possui representação matricial de seu SPE, onde  $[B]$  é montada a partir de (3.50) à (3.53) e*

*$[\Delta X]$  é o vetor de variação de preços e fluxos:*

$$[B]_{M \times M} \cdot [\Delta X]_{M \times 1} = [\mathbf{0}]_{M \times 1} \quad (\text{A.1})$$

*então,  $[A]$  é um operador auto-adjunto de ordem  $N = M - 1$ :*

$$[A]_{N \times N} \cdot [\mathbf{u}]_{N \times 1} = [\mathbf{v}]_{N \times 1} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{u} = u_1 \phi_1 + \cdots + u_n \phi_n = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}, \phi_k) \phi_k = \sum_{k=1}^n u_k \phi_k \quad (\text{A.3})$$

$u_k \in R, \mathbf{u} \in H$

$$\mathbf{v} = v_1 \phi_1 + \cdots + v_n \phi_n = \sum_{k=1}^n (\mathbf{v}, \phi_k) \phi_k = \sum_{k=1}^n v_k \phi_k \quad (\text{A.4})$$

$v_k \in R, \mathbf{v} \in H$

o conjunto maximal de bases ortonormais geradoras:

$$H = U = U' = R^N : \{\phi_k\}_{k=1}^N \quad (\text{A.5})$$

$$M = (S + D + 2T) = (N + 1) \quad (\text{A.6})$$

onde  $\{S, D, T\}$  é a cardinalidade dos conjuntos:

fornecedores, consumidores, transportadores.

assim, sendo conhecidos  $[A]$  e  $\mathbf{v}$ , pode-se encontrar  $\mathbf{u}$ :

$$[\mathbf{u}]_{Nx1} = [A]_{NxN}^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_{Nx1} \quad (\text{A.7})$$

pode-se reescrever:

$$\left[ \Delta \mathbf{X} \right]_{Mx1}^{Transposta} = x_{\alpha\beta} \cdot \left( \left[ [\mathbf{u}]_{Nx1}^{Transposta} \mid [1]_{1x1} \right]_{1xM} \right) \quad (\text{A.8})$$

O Teorema 3 propõe que as soluções aproximadas  $\Delta X$  para um dado componente equilibrado são mapeadas pelo operador auto-adjunto (*self-dual*)  $[A]$  que opera sobre um espaço linear  $H$ , de dimensão finita e dotado de produto interno como norma, cujos membros  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H\}$  são vetores densidade de variação de preços e de fluxos, relativos ao fluxo que flui dentro do mais recente arco entrante  $(\alpha, \beta)$ . Este teorema suporta a propriedade de existência para o conjunto de soluções aproximadas no dual  $H$ . Este teorema suporta também a propriedade de unicidade para cada uma das referidas soluções aproximadas que são obtidas. Como a prova do Teorema 3 é extensa, decidiu-se por apresentá-la por meio de dois lemas, apresentados a seguir.

**Lema 1 (O problema SPE em (A.1) não é “Bem Posto”)** *O sistema de equações lineares que está associado ao problema SPE de um componente sujeito a um processo de linearização que é realizado no momento  $t + 1$ , descrito por (A.1) e (A.10), em conformidade com (3.50) à (3.53), não pode ser considerado como um problema “Bem Posto” porque a solução aproximada  $\mathbf{X}^{t+1}$ , como descrita em (A.9), não pode ser diretamente determinada. Apesar deste fato, é possível utilizar todas as informações contidas em (A.1) para transformá-lo em um outro sistema não homogêneo, considerado “Bem Posto”, descrito em (A.7) e (A.8), com o objetivo de gerar a uma solução aproximada, dada por  $\Delta \mathbf{X}^{t+1}$ , exequível, que está associada ao referido componente, cujo estado de equilíbrio espacial de preços anterior, dado pelo vetor  $\mathbf{X}^t$  em (A.9), seja previamente conhecido.*

$$\mathbf{X}^{t+1} = \mathbf{X}^t + \Delta \mathbf{X}^{t+1} \quad (\text{A.9})$$

por (3.50) à (3.53) e (A.9):

$$\left[ \mathbf{B} \right]_{M \times M} \cdot \left[ \Delta \mathbf{X}^{t+1} \right]_{M \times 1} = \left[ \mathbf{0} \right]_{M \times 1} \quad (\text{A.10})$$

**Prova do Lema 1** A matriz  $[B]$  é singular. Esta propriedade assegura que as expressões em (A.1) e (A.10) não podem ser utilizadas para mapear diretamente uma solução porque o vetor zero  $\mathbf{0}$  pode ser obtido como uma combinação linear de  $[B]$  operada sobre vários vetores  $\Delta X \neq \mathbf{0}$ : logo,  $[B]$  não é inversível. Assim, os referidos sistemas devem ser transformados em um formato “Bem-Posto” do problema SPE associado, como descrito em (A.2) e em (A.7). Note-se que todas as informações necessárias e suficientes para resolver este sistema, o sistema em (A.8) e, conseqüentemente, resolver o problema em (A.9), estão descritas em (A.1) ou em (A.10): o Lema 1 diz respeito à suficiência de informações para resolver o problema SPE para um dado componente equilibrado sujeito à sucessivas linearizações. ■

O entendimento sobre o que vem a ser problema “Bem Posto” no contexto do Lema 1 precisa ser estabelecido: está-se preocupado com uma representação matricial adequada que utiliza todas as informações do sistema de equações do problema de equilíbrio descrito em (A.10) de uma tal maneira que a solução aproximada deve ser regular e ser obtida pela aplicação de um operador linear que é conservativo quando relacionado com o fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que flui dentro de um arco entrante: esta característica efetivamente implica que as soluções aproximadas devem permanecer as mesmas se e somente se não existe potencial para fluxos dentro do referido arco  $(\alpha, \beta)$ . Em caso contrário, a condição em (3.19) do Teorema 1 ou a condição em (3.31) do Teorema 2, estabelece que as soluções aproximadas irão variar regularmente na direção do novo estado de equilíbrio para o componente considerado.

O formato de representação “Bem Posto” do problema é elaborado pela especificação de um espaço dual, que é dotado de propriedades especiais, descrito sobre o problema original formulado em (A.10). Seja um funcional real  $\mathbf{u} = u(\Delta X)$ ,  $\mathbf{u} \in H$  continuamente duas-vezes diferenciável que pertence a um espaço linear que é completo e limitado num senso de espaço de *Banach*<sup>4</sup>. Ainda mais: exige-se que o refe-

<sup>4</sup>Um espaço de *Banach* é considerado um espaço onde todos os seus elementos podem ser descritos por uma série de *Cauchy* que converge para um limite, em respeito a uma dada norma  $\| \cdot \|$ . Por causa disso, os espaços de *Banach* são sempre



rido espaço seja dotado de norma especificamente caracterizada pelo produto interno,  $\|u\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ , num senso de espaço de *Hilbert*<sup>5</sup> porque deseja-se a propriedade de completude para  $H$ : para ser considerado completo, o valor do limite de convergência deve fazer parte da série de *Cauchy* contida no espaço linear  $H$ . No contexto de um componente equilibrado, o processo de completamento do espaço  $H$  é realizado pela adição do vetor zero  $\mathbf{0}$  ao espaço  $H$  por meio de soma direta:  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} \in H$ . Assim, antes de qualificar o vetor  $\mathbf{u}$ , deve-se considerar que  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \geq 0$ , e que  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$  se e somente se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  expressa o produto interno como uma norma que garante que  $H$  seja um espaço linear de dimensão finita, completo e limitado. Logo, em um senso de espaços de *Hilbert*, o vetor zero é sempre ortogonal à qualquer outro membro deste espaço.

**Lema 2 (O problema *SPE* dual (A.7) é “Bem Posto”)** *Dado um componente equilibrado e sua representação quadrática  $\Pi_q$ , conforme Definição 3 apresentada no Capítulo 3, juntamente com suas representações matriciais descritas em (A.1) e (A.10). Então, existe uma maneira adequada de representar o problema *SPE* para este componente que é considerado um formato de problema “Bem Posto”, o qual é utilizado para obter o vetor dual associado  $\mathbf{u}$  para aproximar seu correspondente vetor solução primal  $\Delta \mathbf{X}^{t+1}$ , no momento  $t + 1$ , em um processo de linearização sucessiva. Este formato está descrito nas expressões (A.7), (A.8) e descrito em (A.11), cujos elementos são caracterizados completamente a seguir.*

Seja  $U$  um espaço linear dual de dimensão finita dotado de produto interno como norma, com dimensão  $\dim(U) = N$ . Then,  $U = R^N$  é um espaço de *Hilbert*. Desta forma, existe um isomorfismo isométrico de  $U$  para  $R^N$ , de uma tal maneira que existe uma representação matricial adequada para descrever um operador linear auto-adjunto (*self-*

---

limitados. No contexto de um componente, deseja-se ativamente que o referido limite de convergência seja exclusivamente o vetor zero  $[\mathbf{0}]$ , que está associado a uma norma que oferece uma medida adequada para o senso de aproximação entre os membros  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| < k \cdot \|\mathbf{u}\|$ ,  $k > 0$  do espaço normado. Adicionalmente, deseja-se também que o vetor zero  $[\mathbf{0}]$  pertença ao fechamento deste espaço de *Banach* associado ao EC:  $[\mathbf{0}] \in \{\bar{\Omega}\}$ .

<sup>5</sup>Um espaço de *Hilbert* é um espaço linear de dimensão finita que é dotado de produto interno como norma. Esta é uma propriedade relevante para assegurar a limitação de espaço e para verificar a ortogonalidade entre os vetores destes espaços. Tal limitação pode ser descrita pela desigualdade de *Schwarz*, na qual propõe que  $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$ , para todos os membros  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U = H$ . A ortogonalidade entre dois membros  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  de um espaço linear com produto interno é verificada pela condição  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ .

*dual*)  $[A]$ , de ordem  $N \times N$ , que mapeia qualquer par de seus membros  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in U = R^N$ , em mútua correspondência *um-para-um*, como expresso em (A.17), onde  $[A]$  é obtido (extraído) como uma partição adequada da matriz  $[B]$ , de ordem  $M \times M$ . No contexto de um componente equilibrado,  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  são vetores densidade de variação de preços e de fluxos, por unidade de fluxo no arco  $(\alpha, \beta)$ , obtidos a partir de  $\Delta \mathbf{X}^{t+1}$ , ambos caracterizados por informações originárias do problema primal descrito em (A.10). A expressão (A.13) é utilizada para obter o vetor dual associado  $\mathbf{u}$  para aproximar seu correspondente vetor solução primal  $\Delta \mathbf{X}^{t+1}$ , descrito em A.11 e em A.8, no momento  $t + 1$  de um processo de linearização sucessiva. A forma bem posta da representação dual do problema *SPE* do referido componente é apresentada pelas expressões (A.7) e (A.17).

Num senso de derivativas de funções contínuas, de (A.10):

$$[\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1} \right) \cdot x_{\alpha\beta} \quad (\text{A.11})$$

Considerando que  $\Delta X_{\alpha\beta}^{t+1} = x_{\alpha\beta} > 0$   
é a  $m$ -ésima componente de  $[\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1}$ :

$$[\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{N \times 1} \\ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}_{\alpha\beta}^{t+1}] = [1]_{1 \times 1} \end{array} \right)_{M \times 1} \cdot x_{\alpha\beta} \quad (\text{A.12})$$

pode-se escrever (A.11)

usando um espaço dual de ordem reduzida por um,  $M=(N+1)$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}([\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{N \times 1}) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{N \times 1} \neq 0 \quad (\text{A.13})$$

onde:  $\mathbf{u} \in U = R^n$

onde  $[A]$  é uma matriz particionada da matriz  $[B]$  em (A.10) e

considerando  $x_{\alpha\beta}$  a  $m$ -ésima linha de (A.11):

$$[\mathbf{B}]_{M \times M} = \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{A}]_{N \times N} & [\mathbf{b}]_{N \times 1} \\ \hline [\mathbf{c}]_{1 \times N} & [\mathbf{d}]_{1 \times 1} \end{array} \right]_{M \times M}$$

$$[\mathbf{B}]_{M \times M} = \left[ \begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & b_{nm} \\ \hline b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} & b_{mm} \end{array} \right]_{M \times M} \quad (\text{A.14})$$

Assim, substituindo (A.11) e (A.14) em (A.10):

$$\left( \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{A}]_{N \times N} & [\mathbf{b}]_{N \times 1} \\ \hline [\mathbf{c}]_{1 \times N} & [\mathbf{d}]_{1 \times 1} \end{array} \right]_{M \times M} \cdot \left[ \begin{array}{c} \left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} \\ \hline [1]_{1 \times 1} \end{array} \right]_{M \times 1} \right) \cdot x_{\alpha\beta} = \left[ \begin{array}{c} [0]_{N \times 1} \\ \hline [0]_{1 \times 1} \end{array} \right]_{M \times 1} \quad (\text{A.15})$$

sendo o mesmo que:

$$\left( [\mathbf{A}]_{N \times N} \cdot \left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} + [\mathbf{b}]_{N \times 1} \right) \cdot x_{\alpha\beta} = [\mathbf{0}]_{N \times 1} \quad (\text{A.16})$$

com  $x_{\alpha\beta} \neq 0$  e  $\mathbf{v} = -[\mathbf{b}]$ , tem-se o formato “**Bem Posto**”:

$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (\text{A.17})$$

**Prova do Lema 2** O processo de prova para este lema é iniciado pela descrição do vetor de variação primal  $[\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1}$  em (A.11) como sendo uma composição de vetores particionados que descrevem as variações de preços que ocorrem nos fornecedores  $[\Delta X_{Si}]_{S \times 1}$ , nos consumidores  $[\Delta X_{Dj}]_{D \times 1}$  e nos transportadores  $[\Delta X_{Cij}]_{T \times 1}$ . Adicionalmente, ele também é composto por um vetor particionado que descreve as variações de fluxos de mercadorias que ocorrem nos agentes (arcos) transportadores  $[\Delta X_{ij}]_{T \times 1}$ : assim, a soma das cardinalidades das partições  $M = (S + D + 2T) = (N + 1)$  é a dimensão deste vetor primal, como expresso em (A.18), que representa adequadamente a variação de preços e de fluxos em um componente equilibrado, num momento  $t + 1$ , causada pela inserção de um dado arco entrante  $(\alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned}
[\Delta \mathbf{X}]^{t+1} &= \begin{bmatrix} [\Delta X_{Si}]_{Sx1} \\ [\Delta X_{Dj}]_{Dx1} \\ [\Delta X_{Cij}]_{Tx1} \\ [\Delta X_{ij}]_{Tx1} \end{bmatrix}^{t+1}_{Mx1} \\
[\Delta \mathbf{X}]^{t+1} &= \begin{bmatrix} [\Delta X_{Si}]_{Sx1} \\ [\Delta X_{Dj}]_{Dx1} \\ [\Delta X_{Cij}]_{Tx1} \\ [\Delta X_{ij}]_{(T-1)x1} \\ [\Delta X_{\alpha\beta}]_{1x1} \end{bmatrix}^{t+1}_{Mx1} = \begin{bmatrix} [\Delta X_{Si}] \\ [\Delta X_{Dj}] \\ [\Delta X_{Cij}] \\ [\Delta X_{ij}] \\ [\Delta X_{\alpha\beta}] \end{bmatrix}^{t+1}_{Nx1} \quad (A.18)
\end{aligned}$$

*Note-se que, por convenção, a última partição em RHS de (A.18) é dedicada para o fluxo  $\Delta X_{\alpha\beta}^{t+1} = x_{\alpha\beta} > 0$ , porque escolheu-se a m-ésima linha de (A.10) para representar a combinação linear envolvendo variável  $x_{\alpha\beta}$ . Considerando que o SPE para um componente é o estado onde todos os preços e fluxos são funções positivas, tem-se que ele pode ser descrito por uma noção de vetor de densidade de variação de preços e de fluxos tomados em respeito ao fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que flui no arco entrante  $(\alpha, \beta)$ . Assim, os vetores particionados possuem componentes positivas. Além disso, a última partição possui a unidade como valor adequado para o vetor densidade de variação  $\frac{\partial[\Delta X_{\alpha\beta}]}{\partial x_{\alpha\beta}} = 1$ , de forma que a expressão (A.18) pode ser reescrita como (A.19), na qual é uma forma equivalente à (A.12).*

por (A.12), tem-se:  $[\Delta \mathbf{X}]^{t+1} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}] \right) \cdot x_{\alpha\beta}$ , assim:

$$[\Delta \mathbf{X}]^{t+1} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{Si}] \\ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{Dj}] \\ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{Cij}] \\ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{ij}] \end{array} \right]_{Nx1} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{\alpha\beta}] = 1 \right]_{1x1} \end{array} \right) \cdot x_{\alpha\beta} \quad (\text{A.19})$$

Agora é o momento adequado para considerar  $U = H = R^n$  como um espaço linear dual, de dimensão finita  $\dim(U) = N$ , dotado de produto interno como norma. Deseja-se estabelecer uma relação entre este espaço, contendo o vetor  $\mathbf{u}$  de derivativas de variações e o espaço primal que contém o vetor de variações  $[\Delta \mathbf{X}]^{t+1}$ . Assim,  $U = H = R^n$  é um espaço dual de Hilbert que representa todas as funções  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in U = R^n$  que são vetores densidades de variação de preços e fluxos relativos ao fluxo que flui no mais recente arco entrante de um componente, em um dado momento  $t + 1$  de linearização, na qual são necessários para manter o estado SPE. Assim, existe um conjunto maximal de bases ortonormais  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  para gerar o espaço  $H = U = R^n$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}([\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{Nx1}) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{Nx1} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}, \phi_k) \phi_k \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n u_k \phi_k = u_1 \phi_1 + \dots + u_n \phi_n \quad (\text{A.21})$$

$$\text{onde: } \{u_k \in R, \mathbf{u} \in H = U = R^n\}$$

Completamento: por soma direta, adicionando o vetor  $\mathbf{0}$  à  $H$ :

$$\mathbf{0} \in H : \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.22})$$

O fato de que  $U = R^n$  seja um espaço linear de dimensão finita dotado de produto interno como norma significa que o seu conjunto de bases maximais-ortonormais  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  possui norma unitária  $\|\phi_k\| = 1$

e que são mutuamente ortogonais. Assim,  $(\phi_i, \phi_j) = 0$  se e somente se  $i \neq j$ . Caso contrário,  $(\phi_i, \phi_j) = 1$ . Além disso, o espaço dual gerado por estas bases é limitado, com todos os seus membros sendo vetores cujo valor da norma são diferentes de zero, com a norma do produto interno sendo uma medida positiva definida. Assim,  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$  e  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0 \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \neq 0 \mid \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \{U\} = H = R^n$ . Considerando que o vetor zero é adicionado ao referido espaço dual  $U$  por soma direta ao seu fechamento através do procedimento matemático de Completamento, as expressões (A.20) e (A.21) descrevem cada membro  $\mathbf{u}$  deste espaço como uma única combinação linear de suas bases ortonormais. Baseado no Teorema da Representação de Riesz<sup>6</sup> e no Teorema de Lax-Milgram<sup>7</sup> os espaços e membros destes espaços com estas características recebem propriedades especiais que são transmitidas quando estão sujeitos aos referidos operadores.

Então, está-se focado sobre o processo de acoplamento dos vetores  $\mathbf{u} \in U = R^n$  com a matriz singular  $[B]$ , como descrito em (A.10). Reitera-se aqui a relevância sobre a posição da  $m$ -ésima linha no referido sistema acoplado de equações, relativa à variável  $x_{\alpha\beta}$ . Assim, assume-se que  $\mathbf{v}$  é o vetor de densidade de variação em preços e fluxos por unidade de fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que está representado por  $[-b]$ , conforme expressão (A.23). Logo, tem-se que  $\mathbf{v} = -[b]$ . Note que agora o vetor de variação de preços e fluxos  $[\Delta X]^{t+1}$  em (A.18) está sendo descrito em um espaço linear dual de dimensão finita dotado de produto interno como norma pelos vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U = R^n$  em (A.23) à (A.27). Assim, o último é uma representação dual de seu primal, que está representado pela primeira expressão (A.23): a representação dual agora pode ser considerada como um formato “Bem Posto” do problema SPE para

---

<sup>6</sup>O Teorema da Representação de Riesz é usado para provar que existe uma única correspondência *um-para-um* entre funcionais sobre o espaço de Hilbert  $H$  e os membros de  $H$ , de uma tal maneira que o mapeamento entre dois espaços  $H$  primal e um dual associado  $H'$  seja um mapeamento isomórfico (é *um-para-um* e bi-unívoco) e também um mapeamento isométrico (ele preserva o comprimento de seus elementos).

<sup>7</sup>O Teorema de Lax-Milgram é uma ferramenta muito útil para fornecer as bases matemáticas para assegurar que todos os membros  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  de um espaço dual, linear, de dimensão finita, dotado de produto interno como norma,  $U = H = R^n$ , onde  $H$  é um espaço de Hilbert, estão associados com um funcional linear contínuo  $f(\mathbf{v})$  por meio de um operador bilinear bem-definido  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Como definido em (REDDY, 2013), (NIKOLSKY; VOLOSOV, 1977b), (REDDY, 1986) and (NIKOLSKY; VOLOSOV, 1977a), este teorema pode ser usado para especificar operadores lineares que são limitados, cujo *Range* são completos e que estão em correspondência *um-para-um* com o seu operador inverso, também limitado, assegurando que as propriedades dos membros dos dois espaços mapeados (primal e dual) são preservadas quando operados pelos operadores e suas representações inversas.

qualquer componente equilibrado que está sob um processo específico de linearização, sempre levando-se em consideração o mais recente arco entrante  $(\alpha, \beta)$ .

$$\left( \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} [\mathbf{A}]_{NxN} \\ \hline [\mathbf{c}]_{1xN} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} [\mathbf{v}]_{Nx1} \\ \hline [\mathbf{d}]_{1x1} \end{array} \right] \\ \hline & \end{array} \right)_{M \times M} \cdot \left( \begin{array}{c} [\mathbf{u}]_{Nx1} \\ \hline [1]_{1x1} \end{array} \right)_{M \times 1} \cdot x_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c} [0]_{Nx1} \\ \hline [0]_{1x1} \end{array} \right)_{M \times 1} \quad (\text{A.23})$$

o mesmo que:

$$\left( [\mathbf{A}]_{NxN} \cdot [\mathbf{u}]_{Nx1} + [\mathbf{v}]_{Nx1} \right) \cdot x_{\alpha\beta} = [\mathbf{0}]_{Nx1} \quad (\text{A.24})$$

considerando  $x_{\alpha\beta} = f(\mathbf{u}) \neq 0$ :

$$[\mathbf{A}]_{NxN} \cdot [\mathbf{u}]_{Nx1} = [\mathbf{v}]_{Nx1} \quad (\text{A.25})$$

$$[\mathbf{u}]_{Nx1} = [\mathbf{A}]_{NxN}^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_{Nx1} \quad (\text{A.26})$$

$$[A] \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$[A]^{-1} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Considerando que (A.14) descreve  $[A]$  como uma partição  $[B]$ , e que  $[A]$  mapeia um vetor  $\mathbf{u} \in U = R^n$  em um outro vetor  $\mathbf{v} \in U = R^n$ , ambos sendo descritíveis em um mesmo espaço, usando o teorema de Lax-Milgram, considerando ainda que  $U = R^n$ , como estabelecido anteriormente e suportado pelos teoremas de operadores lineares sobre espaços lineares de dimensão finita, pode-se afirmar que:

1. As matrizes  $[A]$  e  $[A]^{-1}$  são operadores lineares limitados que permanecem em correspondência um-para-um com seus operadores lineares inversos e limitados. Desta forma, tem-se que os mapeamentos  $[A] : U = R^n \rightarrow U = R^n$  e  $[A]^{-1} : U = R^n \rightarrow U = R^n$  são projeções conservativas que garantem a propriedade de regularidade para sistemas descritos em (A.24) à (A.28). Adicionalmente,  $\{[A], [A]^{-1}\}$  são operadores mutuamente auto-adjuntos

(self-dual) que realizam mapeamentos entre os membros do mesmo espaço na qual formam uma série convergente de Cauchy, cujo limite de convergência é o vetor zero  $\mathbf{0}$ , no qual está no Range dos mútuos operadores inversos  $R([A]) = R([A]^{-1})$ , sendo sempre único dentro destes núcleos:  $\mathbf{0} \in \{N([A]) = N([A]^{-1})\}$ ;

2.O Range do operador  $[A]$  é um espaço completo: pelo Completamento, o vetor zero  $\mathbf{0}$  é adicionado ao espaço por soma direta, onde  $R([A]) = N[A] \oplus N^\perp([A])$  com  $N([A]) = \{\mathbf{0}\}$ . Isso é coerente com o fato de que o vetor zero é o único membro do núcleo (kernel) do operador  $[A]$  e que ele é sempre ortogonal à qualquer outro vetor do Range. Em outras palavras, qualquer outro vetor deve pertencer ao complemento ortogonal do núcleo do operador  $[A]$ :  $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0, \forall \mathbf{u} \in N^\perp([A])$ . O mesmo pode ser dito sobre operador inverso  $[A]^{-1}$ :  $R([A]^{-1}) = N[A]^{-1} \oplus N^\perp([A]^{-1})$ , com  $N([A]^{-1}) = \{\mathbf{0}\}$  com  $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0, \forall \mathbf{u} \in N^\perp([A]^{-1})$ ;

3.O teorema de Riesz assegura que existe um isomorfismo isométrico no mapeamento descrito por ambos os operadores  $\{[A], [A]^{-1}\}$  que estão expressos em (A.25) e (A.26). Isto significa que se  $\mathbf{v}$  é um vetor densidade de variação, em preços e em fluxos, que expressa o potencial para fluir mercadorias dentro de um agente transportador (arco entrante) descrito pelo arco  $(\alpha, \beta)$ , então o vetor dual correspondente  $\mathbf{u}$  irá expressar o vetor de distribuição de taxas de variação de preços e de fluxos para todos os demais agentes do componente equilibrado, justamente na forma de um vetor de densidade de variação de preços e de fluxos dentro de cada produtor, cada consumidor e cada transportador -com  $(i, j) \neq a(\alpha, \beta)$ - no qual  $\mathbf{u}$  é necessário para estabelecer o estado SPE para o referido componente, o qual está sujeito a um certo processo de linearização, no momento  $t + 1$ , perturbado pela mais recente inserção de um arco entrante  $(\alpha, \beta)$ ;

4.O teorema de Lax-Milgram assegura que todas as propriedades do espaço linear dual de dimensão finita, dotado de produto interno como norma, são transmitidas pelos operadores  $\{[A], [A]^{-1}\}$  auto-adjuntos (self-dual), quando eles operam sobre qualquer vetor  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U = R^n$ . Este teorema garante que todos os membros deste espaço preservam suas propriedades quando operador por operadores bilineares  $B(u, v) = f(v) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H = U = R^n$ : esta característica é muito conveniente para o caso particular de um componente equilibrado, como descrito em (A.24). Isto ocorre



porque a norma do produto interno entre dois vetores  $\mathbf{u}$  and  $[A] \cdot \mathbf{u}$  está associada com a forma bilinear  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  de uma tal maneira que existe um funcional linear  $f(\cdot)$  sobre  $H$  que produz uma única representação do vetor  $\mathbf{u} \in H = U = \mathbb{R}^n$  no mesmo espaço. Em outras palavras, existe uma única representação para o vetor densidade de variação  $\mathbf{u}$  que está associada ao vetor densidade de variação  $\mathbf{v}$ , onde este último é o potencial para fluir mercadorias dentro do arco entrante  $(\alpha, \beta)$ , visando alcançar o equilíbrio. É por isso que as soluções para o estado SPE de um componente existem para o conjunto  $U = \mathbb{R}^n$ , mesmo sob infinitos processos de linearização: cada membro  $\mathbf{u}$  é uma solução factível em  $t + 1$ , sempre única e discreta. ■

**Prova do Teorema 3** O teorema de Lax-Milgram garante que os operadores lineares  $\{[A]$  e  $[A]^{-1}\}$ , que estão associados ao problema  $\Pi_q$  de um componente equilibrado, como descrito pelos Lemas 1 e 2, estão mutualmente em correspondência um-para-um com seus respectivos operadores limitados inversos. Assim, eles são operadores lineares auto-adjuntos (self-dual). A solução do problema  $\Pi_q$  existe e é única, em cada linearização. Isto é suficiente para a prova do Teorema 3. ■

Considerando que as informações sobre o problema SPE estão em um formato primal de um componente equilibrado em (A.9) e (A.10), e que o termo  $f(\mathbf{u})$  é um funcional linear sobre o vetor  $\mathbf{u}$ , descrito no formato dual em (A.23) à (A.28), o valor do fluxo  $x_{\alpha\beta}$  -como descrito em (3.54)- é determinado por (A.29) à (A.31).

$$[\Delta X_{\alpha\beta}] = \left( \frac{X_{D_\beta}^t - (X_{S_\alpha}^t + X_{C_{\alpha\beta}}^t)}{-\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{D_\beta}]_{Tx1}^{t+1} + \left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{S_\alpha}]_{Tx1}^{t+1} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{C_{\alpha\beta}}]_{Tx1}^{t+1} \right)} \right) \quad (\text{A.29})$$

de (3.54), considerando somente os casos:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{ij}]_{Tx1}^{t+1} \right) < 0$$

o fator limitante para o tamanho do passo:

$$\lambda = \text{Min} \left\{ 1, \frac{(-1) \cdot [\Delta X_{ij}]_{Tx1}^t}{\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{ij}]_{Tx1}^{t+1}} \right\} \quad (\text{A.30})$$

tem-se o tamanho do passo a ser tomado:

$$x_{\alpha\beta} = \lambda \cdot [\Delta X_{\alpha\beta}] \quad (\text{A.31})$$

Os termos em (A.29) são originados das seguintes fontes vinculadas ao componente: as expressões {(3.52), (A.9), (A.10)} para os numeradores e {(A.19), (A.20), (A.25)} para os denominadores:

1. A variável  $X_{D_\beta}^t$  é um componente do vetor  $[X^t]$  e representa o preço anterior no agente consumidor nominado por  $\overline{D}_\beta(\hat{d}_\beta)$  quando  $j = \beta$ , onde  $\overline{D}_j(\hat{d}_j)$  é a função linear de preços especificada para este agente na expressão (3.11). Note que esta variável representa o preço do único consumidor associado ao arco  $(\alpha, \beta)$ . O valor de  $\hat{d}_\beta$  está referenciado em (3.22), (3.35) e (3.51);
2. A variável  $X_{S_\alpha}^t$  é um componente do vetor  $[X^t]$  e representa o preço anterior no agente fornecedor denominado por  $\overline{S}_\alpha(\hat{q}_\alpha)$  quando  $i = \alpha$ , onde  $\overline{S}_i(\hat{q}_i)$  é a função linear de preços especificada para este agente em (3.12). Note que este é o único agente produtor que está associado ao arco  $(\alpha, \beta)$ . O valor de  $\hat{q}_\alpha$  está referenciado em (3.21), (3.33) and (3.50);
3. A variável  $X_{C_{\alpha\beta}}^t$  é um componente do vetor  $[X^t]$  e representa o preço anterior para o agente transportador  $\overline{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta} = 0)$  quando  $ij = \alpha\beta$ , onde  $\overline{C}_{ij}(x_{ij} = 0)$  é a função linear de preço para este agente na expressão (3.13). Note-se que ele é o único agente transportador associado ao arco  $(\alpha, \beta)$ . O valor de  $x_{\alpha\beta} = 0$  está zerado porque o arco  $(\alpha, \beta)$  não estava presente no estado de equilíbrio anterior para o componente, no momento  $t$ . Este valor está referenciado em (3.19) e (3.31).

Os elementos presentes no denominador da expressão (A.29) são os componentes do vetor  $\mathbf{u}$ , no qual está descrito em (A.21) como uma combinação de suas bases maximais ortonormais  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ , reescrita em (A.32) para facilitar o seu entendimento:

$$\mathbf{u} = \left\{ u_1 \phi_1 + \cdots + u_{D_\beta} \cdot \phi_{D_\beta} + u_{S_\alpha} \cdot \phi_{S_\alpha} + u_{C_{\alpha\beta}} \cdot \phi_{C_{\alpha\beta}} + \cdots + u_n \phi_n \right\} \quad (\text{A.32})$$

4. A variável  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{D_\beta}]_{Tx1}^{t+1} \right]$  representa os valores escalares para os coeficientes lineares  $u_{D_\beta}$  que estão acoplados às bases  $u_{D_\beta} \cdot \phi_{D_\beta}$  do vetor densidade de variação  $[\mathbf{u}]$  em preços  $\overline{D}_\beta(\hat{d}_\beta + x_{\alpha\beta})$  por

unidade de fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que flui dentro do arco  $(\alpha, \beta)$ , no agente consumidor nominado por  $D_\beta$ , tomado no momento  $t + 1$ ;

5.A variável  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{S_\alpha}]_{Tx1} \right]^{t+1}$  representa os valores escalares para os coeficientes lineares  $u_{S_\alpha}$  que estão acoplados às bases  $u_{S_\alpha} \cdot \phi_{S_\alpha}$  do vetor densidade de variação de fluxo  $[\mathbf{u}]$  em preços  $\bar{S}_\alpha(\hat{q}_\alpha + x_{\alpha\beta})$  por unidade de fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que flui dentro do arco  $(\alpha, \beta)$ , no agente fornecedor denominado  $S_\alpha$ , tomado no momento  $t + 1$ ;

6.A variável  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} [\Delta X_{C_{\alpha\beta}}]_{Tx1} \right]^{t+1}$  representa os valores escalares para os coeficientes lineares  $u_{C_{\alpha\beta}}$  que estão acoplados às bases  $u_{C_{\alpha\beta}} \cdot \phi_{C_{\alpha\beta}}$  do vetor densidade de variação  $\mathbf{u}$  em preços  $\bar{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta})$  por unidade de fluxo  $x_{\alpha\beta}$  que flui dentro do arco  $(\alpha, \beta)$ , no agente transportador denominado  $C_{\alpha\beta}$ , tomado no momento  $t + 1$ .

### A.3 O FORMATO “BEM POSTO” PARA O PROBLEMA *SPE* NO CONTEXTO PRIMAL DE UM DADO COMPONENTE

Por conveniência numérica, reformula-se o problema de encontrar a solução para o sistema homogêneo de equações lineares, referido em (A.10), montando-se um formato “Bem Posto” deste problema, resolvível, na forma de um sumário para as expressões (A.23) à (A.27), todas sujeitas às restrições impostas pelas expressões (A.33) à (A.38).

O formato de problema “Bem Posto” abaixo (usando representações e estruturas de dados primais) mantém todas as características do mesmo problema original proposto em (3.15) à (3.18). Este é o principal aspecto da abordagem de resolução que está embutida no *Algoritmo Alternativo* proposto, que é fornecer uma solução computacional baseada em estruturas de dados utilizando *Teoria dos Grafos* e manipulando-as por meio de adequada *Representação Matricial* em cada aproximação realizada. Como foi provado na seção A.1, tal solução existe e é única em cada linearização sobre um componente considerado. Como o vetor  $X^t$  (no estado anterior de equilíbrio) é sempre conhecido, está-se ativamente preocupado, nesta abordagem, com a determinação de  $\Delta \mathbf{X}^{t+1}$  e com a prova das propriedades de sua existência e de sua unicidade. O formato “Bem Posto” é sumariado a seguir.

Encontrar  $[\Delta \mathbf{X}^{t+1}]_{M \times 1} = \left[ \frac{\left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1}}{[1]_{1 \times 1}} \right]_{M \times 1} \cdot (x_{\alpha\beta})$   
 sujeito à:

$$\left( [\mathbf{A}]_{N \times N} \cdot \left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} + [\mathbf{b}]_{N \times 1} \right) \cdot x_{\alpha\beta} = [\mathbf{0}]_{N \times 1} \quad (\text{A.33})$$

onde:  $M = N + 1$ ,  $[A]$  é *self-dual*,  $[b] \neq 0$

$$N = \text{rank}([A]) \quad \text{com:} \quad (\text{A.34})$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} (\Delta X_i) \neq 0 \right\} \in \left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} \neq 0$$

e  $x_{\alpha\beta} = f(\mathbf{u}) > 0$  (A.35)

$$[\mathbf{A}]_{N \times N} \cdot \left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} = (-1) \cdot [\mathbf{b}]_{N \times 1} \quad (\text{A.36})$$

$$\left[ \frac{\partial(\Delta \mathbf{X})}{\partial x_{\alpha\beta}} \right]_{N \times 1} = [\mathbf{A}]_{N \times N}^{-1} \cdot [-\mathbf{b}]_{N \times 1} \quad (\text{A.37})$$

para resolver o problema *SPE* em (3.52),

conhecido o estado anterior  $X^t$ :

$$\mathbf{X}^{t+1} = \mathbf{X}^t + \Delta \mathbf{X}^{t+1} > 0 \quad (\text{A.38})$$

#### A.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O OPERADOR $[A]$ *SELF-DUAL* ASSOCIADO AO COMPONENTE EQUILIBRADO

Esta seção tem o objetivo de adicionar esclarecimentos sobre a propriedade de invertibilidade do operador *self-dual*  $[A]$  que é extraído das relações matemáticas que expressam o conceito de *SPE* e o princípio de conservação de fluxo para um dado componente equilibrado, cuja representação matricial foi descrita em (A.17), em (A.25) e em (A.26).

A prova de que o operador *self-dual*  $[A]$  é inversível foi apresentada pelo Teorema 3, descrita na subseção 3.4 deste trabalho. Esta prova está embasada no teorema de *Lax-Milgram* e no teorema da *Representação de Riesz*. Para esclarecer o uso destes dois teoremas no embasamento do primeiro realiza-se a seguinte proposição:

**Lema 3 (O vetor  $v$  está contido no primal  $H$  e no dual  $H'$ )** Os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  que estão descritos nas expressões (A.17), (A.25) e (A.26) pertencem aos espaços de Hilbert dual  $H'$  e primal  $H$ , estando em correspondência um-a-um por meio de um operador  $[A]$  auto-adjunto.

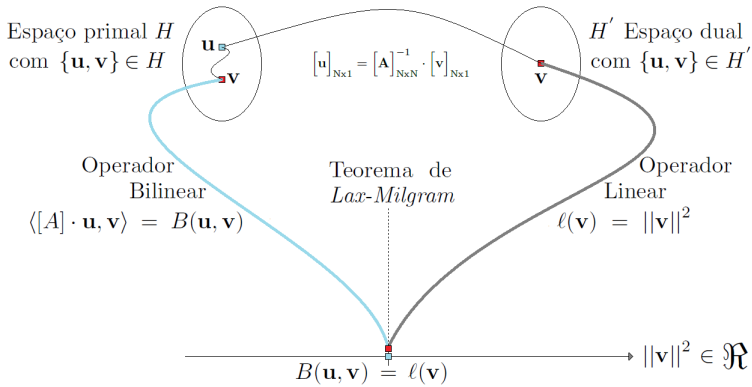


Figura 11. Os mapeamentos nos espaços Dual  $\mathbf{H}'$  e Primal  $\mathbf{H}$ , por meio do operador *auto-adjunto*  $[\mathbf{A}]$ . Fonte: o autor, baseado em (REDDY, 2013).

O Lema 3 proposto e a ilustração contida na Figura 11 são os elementos utilizados para esclarecer a propriedade de invertibilidade do operador  $[\mathbf{A}]$ , que é garantida pelo fato de que este operador é limitado, contínuo, isométrico e isomórfico. Com estas características, de acordo com o teorema de *Lax-Milgram* e o teorema da *Representação de Riesz* o operador estabelece uma correspondência *um-a-um* entre os vetores  $\{\mathbf{u}, [\mathbf{v}]\}$  em (A.26) e recebe o nome de operador *auto-adjunto* (*self-dual*). O referido Teorema 3 utiliza estes dois teoremas para propor que um novo estado de equilíbrio espacial de preços para um dado componente equilibrado estabelece uma relação de correspondência *um-para-um* análoga entre dois vetores específicos: (i) aquele que representa as densidades de variações de preços e de fluxos em toda a rede equilibrada, dado por um vetor global  $\mathbf{u}$ ; (ii) aquele que representa esta mesma grandeza tomada especialmente em um único arco considerado como sendo o arco entrante no componente, dado por um vetor local  $\mathbf{v}$ . Assim, propõe-se que o *SPE* para um componente pode ter sua transição entre estados de equilíbrio descrita por meio de um operador linear *auto-adjunto*, adequadamente extraído da representação matricial associada ao conceito de equilíbrio e do princípio de conservação de fluxos. Deseja-se mostrar que, no contexto do *SPE* de um dado componente, o operador  $[\mathbf{A}]$  conforme descrito em (A.26) é também limitado, contínuo, isométrico e isomórfico: tem-se que ele é inversível, pois ele é um legítimo operador *auto-adjunto* (*self-dual*). Estas cinco propriedades são explicadas a seguir e são consideradas como elementos de prova do Lema 3.

**1.O operador  $[A]$  é limitado:** Os vetores  $\{[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]\}$  pertencem tanto ao espaço de *Hilbert* dual  $H'$  como ao espaço de *Hilbert* primal  $H$ . Pelo teorema da *Representação de Riesz* o vetor  $\mathbf{v}$  pode ser representado tanto no espaço dual como no espaço primal. A Figura 11 ilustra esta pertinência. Considerando-se que o espaço de *Hilbert* primal  $H$  é por definição fechado e limitado, a projeção do vetor  $\mathbf{u} \in H$  em um vetor  $\mathbf{v} \in H$  pelo operador  $[A]$  é aceitável dado que os dois vetores tem a mesma grandeza (são densidades de preços e de fluxos) e compartilham nesta projeção as mesmas bases ortonormais do primal (ver expressão (A.22)). Isto significa que o operador  $[A]$  projeta um vetor em outro dentro do espaço que é limitado. Logo ele é também limitado. Como no primal e dual os vetores  $\{[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]\}$  são sempre diferentes do vetor zero  $\mathbf{0}$ , e ortogonais à ele por definição, tem-se que o operador deve ser limitado inferiormente e ter sua inversa limitada superiormente, tanto no espaço primal como no dual. A recíproca é verdadeira, pois o espaço dual  $H'$  é também um espaço de *Hilbert*;

**2.O operador  $[A]$  é contínuo:** Considerando-se que os espaços primais e duais são normados, pois são espaços de *Hilbert*, pode-se afirmar que o operador  $[A]$  é contínuo se houver um medida positiva  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|[A] \cdot \mathbf{v}_2 - [A] \cdot \mathbf{v}_1\| < \varepsilon$  sempre que  $\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\| < \delta$ . Essa característica assegura a regularidade do operador na vizinhança e está garantida pelo fato de que o operador é limitado. Este aspecto é importante porque este operador, juntamente com os espaços primal e dual, possui o núcleo (*kernel*) constituído apenas pelo vetor zero  $\mathbf{0}$ . Isto significa que o *Range*  $R([A])$  é um espaço completo (ele mapeia completamente o primal  $H$  e o dual  $H'$ ). Esta característica adicional oferece o suporte necessário para afirmar que o operador auto-adjunto estabelece uma correspondência *um-para-um* entre os vetores que ele associa (primal-primal e primal-dual). O mesmo pode ser dito sobre  $R([A]^{-1})$ . Com isso, pode-se concluir que ele é inversível, com sua inversa  $[A]^{-1}$  também sendo um operador limitado;

**3.O operador  $[A]$  é auto-adjunto (*self-dual*):** Os espaços primal  $H$  e o dual  $H'$  mapeados pelos operadores auto-adjuntos  $\{[A], [A]^{-1}\}$  são os mesmos: possuem mesma métrica, os mesmos elementos  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  e suas diferenças medidas convergem num senso de uma série de *Cauchy* pertencente ao espaço de *Bannach*, que é completo, fechado e limitado. Essa isometria ocorre antes, durante e depois da transformação linear entre os espaços pri-

mais e duais. Note-se que ao assumir que estes dois espaços possuem como norma o produto interno, eles assumem a condição de espaços de *Hilbert*. Uma ilustração adequada para a referida série convergente de *Cauchy* é apresentada na Figura 12;

#### 4. Os operadores $\{[\mathbf{A}], [\mathbf{A}]^{-1}\}$ são operadores *ponto-a-ponto*:

O operador  $[\mathbf{A}]$ , e sua inversa, é um operador *ponto-a-ponto*, em correspondência *um-a-um* entre os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ . Se o vetor  $\mathbf{v}$  mudar, tem-se que o operador  $[\mathbf{A}]$  e o vetor  $\mathbf{u}$  devem mudar simultaneamente (acompanhar a mudança de  $\mathbf{v}$ ): trata-se de uma reciprocidade<sup>8</sup> fundamental, que estabelece a propriedade dos operadores auto-adjuntos  $\{[A], [A]^{-1}\}$  de serem operadores *ponto-a-ponto*. Em outras palavras, existe somente um único operador  $[A]^{-1}$  que leva o vetor  $\mathbf{v}$  no espaço dual para o vetor  $\mathbf{u}$  no espaço primal, conforme o mapeamento  $[A]^{-1} : \{\mathbf{v} \in H'\} \rightarrow \{\mathbf{u} \in H\}$ . A recíproca é verdadeira: existe somente um único operador  $[A]$  que leva o vetor  $\mathbf{u}$  no espaço primal para o vetor  $\mathbf{v}$  no espaço dual, conforme o mapeamento  $[A] : \{\mathbf{u} \in H\} \rightarrow \{\mathbf{v} \in H'\}$ . Assim, não existe a situação onde  $[\mathbf{v}]$  muda sem haver mudança recíproca em  $[\mathbf{A}]^{-1}$  e em  $[\mathbf{u}]$ , e *vice-versa*. Em termos simples, este é o significado dos Teoremas de *Lax-Milgram* e da *Representação de Riesz* aplicados ao caso de um componente equilibrado em estado *SPE*. A cada sucessiva linearização, um novo vetor global  $\mathbf{u}$  de densidades de variação de preços e de fluxos está reciprocamente associado à um vetor local (no arco entrante)  $\mathbf{v}$  de densidades de variação de preços e de fluxos nos agentes daquele arco. Então, o operador  $[\mathbf{A}]$ , e sua inversa, são operadores *ponto-a-ponto* porque ele coloca os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  em correspondência recíproca *um-para-um* com a característica adicional de que os espaços primal e dual contém unicamente eles (somente estes dois vetores) em cada

---

<sup>8</sup>O termo reciprocidade aqui é utilizado de uma forma análoga ao *Teorema da Reciprocidade*. Este teorema, também conhecido como *Teorema de Maxwell-Betti*, estabelece que em sistemas estruturais lineares existe uma relação recíproca entre as variações de energias de deformação e as variações nas deflexões causadas pelas variações nas forças atuantes neste sistema. Isto significa que, em conformidade com a *Lei de Hooke*, e utilizando-se do *Princípio da Superposição* dos efeitos, é possível identificar novas relações em sistemas de equações para tornar os sistemas hiperestáticos em sistemas solúveis. Assim, pela referida reciprocidade, pode-se identificar as deflexões incógnitas a partir do conhecimento sobre as variações das forças atuantes, em relação à energia de deformação presente no sistema. De forma recíproca, pode-se identificar os forçantes incógnitos a partir do conhecimento sobre as variações no campo das deformações causadas por elas em locais específicos e medi-las experimentalmente. Este teorema está descrito em detalhes em (HARTOG, 1987), (POPOV, 2010) e (GERE; TIMOSHENKO, 1999).

linearização de um dado componente. Note-se que os espaços duais e primais são idênticos  $H = H'$ . A expressão (B.13) descreve a operação *ponto-a-ponto* do operador auto-adjunto utilizado na resolução de um pequeno exemplo numérico de resolução de um problema *SPE*. A Figura 12, em sua parte superior, ilustra os operadores auto-adjuntos mapeando os pares de vetores reciprocamente associados  $\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1); (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3); (\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)\}$  em linearizações sucessivas nos espaços primal e dual em um dado componente. Esses mapeamentos estão expressos em (A.42) à (A.43).

**5. Teorema da *Representação de Riesz*:** os operadores auto-adjuntos  $\{[A], [A]^{-1}\}$  são limitados inferiormente e superiormente, isométricos e isomórficos. Eles são operadores regulares. No caso de um componente equilibrado tomado em consideração, a partir de um estado de equilíbrio dado pelo vetor  $\mathbf{u}$  de densidade de variação de preços e fluxos, e considerando-se três linearizações consecutivas e equilibradas dada pelos vetores sequenciais  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ , tem-se os isomorfismos expressos em (A.39) e (A.41):

pele *Teorema de Riesz* no espaço dual  $H'$ :

$$\|\mathbf{u}\|^2 > \ell(\mathbf{v}_1) > \ell(\mathbf{v}_2) > \ell(\mathbf{v}_3) \quad (\text{A.39})$$

$$\|[\mathbf{A}_1] \cdot \mathbf{u}\|^2 > \|[\mathbf{A}_2] \cdot \mathbf{v}_1\|^2 > \|[\mathbf{A}_3] \cdot \mathbf{v}_2\|^2 \quad (\text{A.40})$$

pele *Teorema de Riesz* no espaço primal  $H$ :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) > B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) > B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), \quad (\text{A.41})$$

considerando-se que:

$$\|\mathbf{u}\| > \|\mathbf{v}_1\| > \|\mathbf{v}_2\| > \|\mathbf{v}_3\| > \dots > \|\mathbf{v}_n\| \quad \text{e que:}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{A}_1]^{-1} \cdot \mathbf{v}_1; \quad \mathbf{v}_1 = [\mathbf{A}_2]^{-1} \cdot \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{v}_{n-1} = [\mathbf{A}_n]^{-1} \cdot \mathbf{v}_n; \quad \mathbf{v}_2 = [\mathbf{A}_3]^{-1} \cdot \mathbf{v}_3 \quad (\text{A.43})$$

onde:

$$\ell(\mathbf{v}_1) = \|\mathbf{v}_1\|^2; \quad \ell(\mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_2\|^2; \quad \ell(\mathbf{v}_3) = \|\mathbf{v}_3\|^2 \quad (\text{A.44})$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = \langle [\mathbf{A}_1] \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \quad (\text{A.45})$$

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \langle [\mathbf{A}_2] \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \quad (\text{A.46})$$

$$B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \langle [\mathbf{A}_3] \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \quad (\text{A.47})$$

**6. O Teorema de *Lax-Milgram*:** os operadores auto-adjuntos  $\{[A], [A]^{-1}\}$  estabelecem a seguinte igualdade:  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$ . O operador bilinear  $B(\cdot)$  aplicado sobre os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  no



espaço primal produz a mesma medida  $\|\mathbf{v}\|^2 \in \mathfrak{R}$  que o operador linear  $\ell(\cdot)$  aplicado sobre o vetor  $\mathbf{v}$  no espaço dual  $\mathbf{v} \in H'$ . Por este teorema, tem-se que existe uma relação de reciprocidade entre os mapeamentos nos espaços dual e primal de tal maneira que eles sejam reciprocamente “duais” entre si, por meio dos referidos operadores auto-adjuntos. A Figura 12 ilustra também este teorema por meio das medidas  $\ell(\mathbf{v})$  que convergem assintoticamente num senso de uma sequência de *Cauchy*. ■

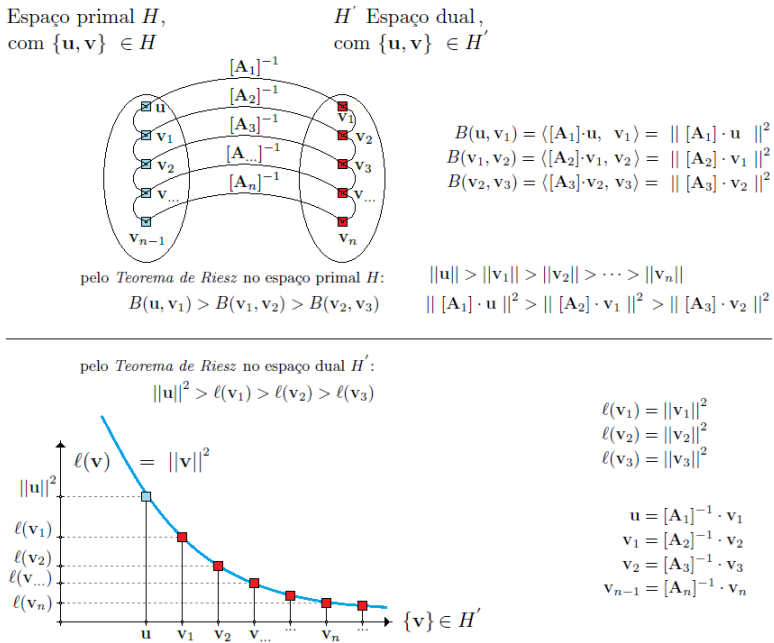


Figura 12. Teorema de *Representação de Riesz*: os operadores auto-adjuntos  $\{[A], [A]^{-1}\}$  são limitados inferiormente e superiormente, isométricos e isomórficos. As medidas nos espços dual e primal convergem num senso de uma série de *Cauchy*. Fonte: o autor, baseado em (REDDY, 2013).

Encerra-se esta seção com uma nota adicional a respeito do fato de que os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  pertencem tanto ao espaço primal  $H$  como ao espaço dual  $H'$ . As expressões (A.17) e (A.26), com um importante exemplo algébrico em (B.13), podem ser usadas novamente para esclarecer esta situação: (i) a pertinência ao espaço primal tem interpretação

física associada ao fato de que os dois vetores descrevem densidades de variação de preços e fluxos dos agentes no sistema; *(ii)* a pertinência ao espaço dual tem interpretação geométrica específica para o caso do vetor  $\mathbf{v}$ . Ele representa também a inclinação da função linear de preços dos agentes envolvidos no arco entrante. Estas duas significações estão reciprocamente associadas pelo operador *auto-adjunto* que mapeia uma correspondência *um-para-um* entre os vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ .

## APÊNDICE B - Um pequeno exemplo algébrico



*... the process of preparing programs  
 for a digital computer is specially attractive  
 not only because it can be economically and scientifically rewarding,  
 but also because it can be  
 an aesthetic experience much like  
 composing poetry or music ...*  
 Donald Erwin Knuth

Com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade e a validade do *Algoritmo Alternativo* proposto, esta seção apresenta um pequeno exemplo numérico, na forma de um estudo de caso específico, onde um determinado sistema econômico é representado por uma rede, cujo equilíbrio espacial de preços será obtido por meio da aplicação algébrica das suas várias etapas resolutivas. A rede econômica a ser utilizada tem a mesma topologia e o mesmo grafo descrito na Figura 13.

### B.1 A REDE ECONÔMICA A SER EQUILIBRADA

A rede econômica a ser equilibrada neste exemplo algébrico está representada pela Figura 13, sendo formada por cinco agentes econômicos produtores  $S_i$ , quatro agentes consumidores  $D_j$  e treze agentes transportadores  $C_{ij}$ . Por meio de um grafo conexo e dirigido,  $ij$  representa a conexão entre agentes por meio de arcos transportadores  $(i, j)$ , onde os seus nós com origem em  $i$  representam agentes produtores  $S_i$  e os nós com destino  $j$  representam mercados consumidores  $D_j$ . O problema *SPE* é identificar os preços e os fluxos, para cada agente, que estão associados ao estado *SPE* da rede.

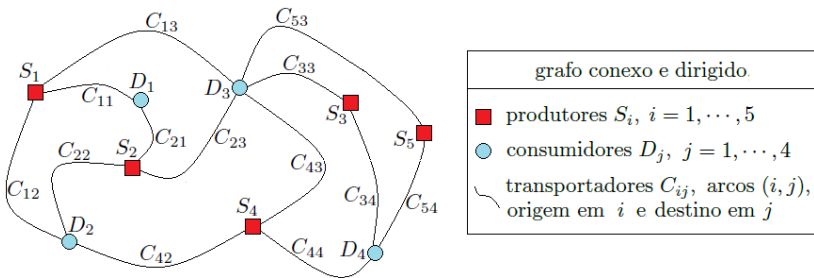


Figura 13. Um pequeno exemplo de um problema *SPE*. Fonte: o autor.

O processo de resolução deste exemplo seguirá a seqüência re-

solutiva descrita na Figura 17, onde é apresentada uma coleção de dezoito inserções de arcos livres, necessários para descrever o equilíbrio do sistema exemplificado. As configurações destes agentes encontram-se descritas na Tabela 4, em termos de funções de preços lineares com parâmetros  $f^L(x) = A + B \cdot (x)$   $A$  lineares e  $B$  angulares.

Tabela 4. Configurações iniciais dos agentes econômicos

agente	$A$	$B$	agente	$A$	$B$
$S_1$	10	+0.40	$C_{11}$	1	+0.21
$S_2$	8	+0.38	$C_{12}$	1	+0.20
$S_3$	7	+0.37	$C_{13}$	1	+0.19
$S_4$	6	+0.36	$C_{21}$	2	+0.18
$S_5$	5	+0.35	$C_{22}$	2	+0.17
$D_1$	100	-0.25	$C_{23}$	2	+0.16
$D_2$	90	-0.22	$C_{33}$	1	+0.15
$D_3$	80	-0.23	$C_{34}$	1	+0.15
$D_4$	70	-0.24	$C_{42}$	3	+0.14
$C_{53}$	4	+0.10	$C_{43}$	3	+0.13
$C_{54}$	4	+0.11	$C_{44}$	3	+0.12

## B.2 ÁLGEBRA *STEP-BY-STEP* DO ALGORITMO

O início do processo de resolução deste exemplo se dá pela inserção do primeiro arco (1, 3), representado pelo agente  $C_{13}$  na Tabela 4, conforme Algoritmo 1  $\text{EQUILIBRATE}(G(M \cup N, L))$  e Algoritmo 2  $\text{EQUILIBRATEPARTITION}(G_p, (\alpha, \beta), (\mathbf{X}, \mathbf{q}, \mathbf{d}))$ . O fluxo  $x = x_{13}$  neste arco está conforme (A.29), sendo calculado em (B.1). Os preços associados, em conformidade com (3.11)-(3.13), são dados pelas expressões (B.2) à (B.4).

$$x_{13} = \left( \frac{+A_{D_3} - (A_{S_1} + A_{C_{13}})}{-B_{D_3} + (B_{S_1} + B_{C_{13}})} \right) = 84.14634146 \quad (\text{B.1})$$

$$S_1(x = x_{13}) = A_{S_1} + B_{S_1} \cdot x_{13} = 43.65853659 \quad (\text{B.2})$$

$$C_{13}(x = x_{13}) = A_{C_{13}} + B_{C_{13}} \cdot x_{13} = 16.98780488 \quad (\text{B.3})$$

$$D_3(x = x_{13}) = A_{D_3} + B_{D_3} \cdot x_{13} = 60.64634147 \quad (\text{B.4})$$

O processo de resolução geral é mostrado na Figura 17, onde

uma coleção de dezoito inserções de arcos livres  $s$  ao computadas para descrever o equilíbrio do sistema exemplificado. Uma perturbação no equilíbrio da rede mínima ocorre quando o arco  $(1, 1)$ , no papel de *Arco da Entrante*, é inserido no componente equilibrado. Neste momento, o problema se encontra na segunda atividade da etapa do cômputo do equilíbrio. A Figura 14 descreve esta atividade de inserção do agente  $C_{11}$ , produzindo uma nova rede que passa a ficar desequilibrada no sub-grafo à direita. Após o cômputo do equilíbrio, os preços nas etiquetas estão arredondados.

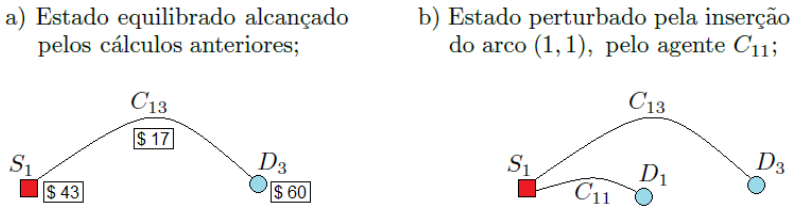


Figura 14. Perturbação pela inserção do arco  $(1, 1)$ , o agente transportador  $C_{11}$ , no componente equilibrado. Fonte: o autor.

Uma nova iteração deve computar o equilíbrio para a nova rede formada com a inserção do agente  $C_{11}$ . É necessário elaborar o equacionamento do conceito de equilíbrio econômico nos nós e do princípio de conservação dos fluxos nos arcos do *EC*. As equações associadas estão descritas em (B.5) à (B.11). Considerando-se que  $\Delta x_{ij} = \delta_{ij}$ , tem-se:

equações de variação de preços, dado que  $\delta_{ij} = \Delta x_{ij}$  :

$$\Delta S_1 = B_{S_1} \cdot (\delta_{13} + \delta_{11}) \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta D_3 = B_{D_3} \cdot (\delta_{13}) \quad (\text{B.6})$$

$$\Delta D_1 = B_{D_1} \cdot (\delta_{11}) \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta C_{13} = B_{C_{13}} \cdot (\delta_{13}) \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta C_{11} = B_{C_{11}} \cdot (\delta_{11}) \quad (\text{B.9})$$

equações de equilíbrio de preços nos nós:

$$\Delta S_1 + \Delta C_{13} = \Delta D_3 \quad (\text{B.10})$$

$$\Delta S_1 + \Delta C_{11} = \Delta D_1 \quad (\text{B.11})$$

A expressão (A.1) descreve a forma adequada de computar, matricialmente, as equações de compatibilidades associadas ao sub-grafo

de componente equilibrado. Nesta iteração, sua representante é a expressão (B.12), cuja ordem é  $M$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(B_{S_1}) & -(B_{S_1}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(B_{D_3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(B_{D_1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(B_{C_{13}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(B_{C_{11}}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{13} & +(B_{S_1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +(B_{S_1}) & \alpha_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta D_3 \\ \Delta D_1 \\ \Delta C_{13} \\ \Delta C_{11} \\ \delta_{13} \\ \delta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

onde:  $M = (N + 1) = 7$

$$\alpha_{13} = (B_{S_1} + B_{C_{13}} - B_{D_3})$$

$$\alpha_{11} = (B_{S_1} + B_{C_{11}} - B_{D_1})$$

A expressão (A.37), em seu *LHS*, conceitua o vetor de densidades de perturbações de preços e fluxos, por unidade de fluxo  $\delta_{11}$ , que flui no arco entrante  $(\alpha, \beta)$ . No presente cômputo, este arco é  $(1, 1)$  (agente  $C_{11}$ ) do sub-grafo. O referido vetor  $\mathbf{u}$  está representado nesta iteração pela expressão (B.13). Sua determinação é obtida diretamente por substituição dos parâmetros iniciais na formulação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta S_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{13}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{11}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\delta_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(B_{S_1}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(B_{D_3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(B_{C_{13}}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{13} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} +(B_{S_1}) \\ 0 \\ +(B_{D_1}) \\ 0 \\ +(B_{C_{11}}) \\ -(B_{S_1}) \end{bmatrix}$$

pelo modelo geral:  $\mathbf{u} = [A]^{-1} \cdot [\mathbf{v}] \quad (\text{B.13})$

onde:  $\alpha_{13} = (B_{S_1} + B_{C_{13}} - B_{D_3})$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta S_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{13}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{11}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\delta_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(0.40) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +(0.23) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(0.19) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +(0.82) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} +(0.40) \\ 0 \\ -(0.25) \\ 0 \\ +(0.21) \\ -(0.40) \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +(0.48780488) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(0.28048780) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & +(0.23170732) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +(1.21951220) \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta S_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta D_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{13}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\Delta C_{11}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}}(\delta_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(0.20487805) \\ +(0.11219512) \\ -(0.25000000) \\ -(0.09268293) \\ +(0.21000000) \\ -(0.48780480) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

A expressão (B.15) descreve uma importante característica do processo de obtenção do equilíbrio econômico por meio da abordagem proposta. Ela oferece uma maneira analítica de acompanhar a dinâmica do cômputo do equilíbrio em cada iteração. É possível perceber aspectos que estão associados aos valores que compõem o vetor de densidades presente na referida expressão. A seguir são apresentadas algumas situações interessantes. Por exemplo, a componente  $\frac{\partial}{\partial x_{11}}(\delta_{13})$  tem valor sintomático nesta iteração e representa factualmente o quanto de fluxo no arco (1, 3) é afetado pela acréscimo de uma unidade de mercadoria no arco denominado arco entrante,  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ . Seu valor negativo indica que esta influência tem caráter redutor. Em outras palavras, para cada unidade que flui no arco arco entrante, seis perturbações irão ocorrer na rede, em termos de variações no campo das densidades de preços e de fluxos. Todas elas estão em coerência com o fenômeno real de um mercado de *mono-commodity*, cujos agentes atuam em modo de competição perfeita. São elas:

- O fluxo no arco (1, 3) se reduz a uma taxa aproximada de 0.487: Com a inserção de um novo arco  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  um novo mercado surge. A capacidade do produtor  $S_1$  é melhor aproveitada pela presença dos dois mercados, em relação à situação anterior. Isso significa que atendê-los modifica o fluxo no arco (1, 3), para menos, uma vez que existe um fluxo de uma unidade de mercadoria, para mais, no arco entrante  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  ;
- O preço no nó  $S_1$  aumenta na taxa de aproximadamente 0.204: Esse valor é facilmente entendido se verificarmos que o coeficiente angular do produtor  $S_1$  é 0.40 e, sendo aplicado ao fator de complemento  $(1 - 0.487)$  da taxa anterior, que representa o fato real de que para cada item que flui para o novo mercado, existe uma quantidade de itens que diminui para o outro mercado. A diferença resultante, sendo positiva, indica que a taxa de variação de preços neste produtor descreve um aumento efetivo na quantidade final produzida por ele para atender estes dois mercados;
- O preço no nó  $D_3$  aumenta na taxa de aproximadamente 0.112: Esse valor é facilmente entendido pelo fato de que a quantidade que flui para esse mercado diminui a uma taxa de 0.487. Em mercados consumidores reais, uma diminuição de quantidades ofertadas está difetamente associada a uma sinalização de aumento de preços. O resultado é, de fato, coerente. Aplicando esse valor na curva inversa da demanda, tem-se a taxa de subida efetiva em seu preço;

É importante perceber aqui a forte relação existente entre os valores computados e medidos para os nós e arcos da rede, em termos de densidades de preços e de fluxos, e o comportamento real dos agentes econômicos por eles representados, num cenário real.

- O preço no nó  $D_1$  diminuiu na taxa de aproximadamente 0.250: Esse valor é facilmente entendido pelo fato de que flui para esse mercado uma unidade específica de mercadoria. O resultado é a próprio coeficiente angular do mercado, dado por  $B_{D_1}$ . Pelas mesmas razões, os valores computados são coerentes com a realidade factual: o mercado consumidor sinaliza ao processo de aumento de oferta pelo produtor com uma significativa resposta, um fenômeno, em termos de diminuição de preços;
- O preço nos arcos varia coerentemente em cada caso. A queda no preço para  $C_{13}$  está associada à diminuição de seu fluxo, cuja taxa se dá pelo acoplamento do fator 0.487 ao seu coeficiente angular  $B_{C_{13}}$ . Para o arco (1, 1), tem-se um aumento em seus preços  $C_{11}$  a uma taxa de aproximadamente 0.210, que é o mesmo valor de seu coeficiente angular  $B_{C_{11}}$ , pois há um acréscimo de uma unidade no arco entrante, que é o próprio arco  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ .

O processo de determinação do fluxo que flui no arco entrante, nesta iteração, está descrito na expressão (A.29). Neste caso, sua representante é a expressão (B.16), e o seu valor efetivo de equilíbrio é apresentado em (B.17).

$$x_{\alpha\beta} = \delta_{11} = \left( \frac{+A_{D_1} - (A_{S_1} + A_{C_{11}})}{-B_{D_1} + (B_{S_1} + B_{C_{11}})} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}} (\Delta S_1) = B_{S_1} = +(0.20487805)$$

preço anterior de equilíbrio em  $S_1$ :  $A_{S_1} = \$43.65853659$

$$x_{\alpha\beta} = \delta_{11} = +(83.23550920) \quad (\text{B.17})$$

Uma vez tendo-se determinado o vetor de densidades de perturbações  $u = \frac{\partial}{\partial x_{11}} (\Delta X^{t=1})$ , para a iteração em questão, pode-se partir para a identificação plena do vetor de perturbações  $\Delta X^{t+1}$ , em conformidade com os conceitos descritos em (A.19), cuja representação específica deste caso é apresentada em (B.18).

$$\begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta D_3 \\ \Delta D_1 \\ \Delta C_{13} \\ \Delta C_{11} \\ \delta_{13} \\ \delta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(0.20487805) \\ +(0.11219512) \\ -(0.25000000) \\ -(0.09268293) \\ +(0.21000000) \\ -(0.48780480) \\ +(1.00000000) \end{bmatrix} \cdot [+83.23550920] \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta D_3 \\ \Delta D_1 \\ \Delta C_{13} \\ \Delta C_{11} \\ \delta_{13} \\ \delta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(17.05312871) \\ +(9.33861811) \\ -(20.80887730) \\ -(7.71451061) \\ +(17.47945693) \\ -(40.60268741) \\ +(83.23550920) \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Calculadas as perturbações decorrentes da inserção do arco entrante  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  na rede, pode-se computar completamente a condição de equilíbrio da mesma, em termos de seus preços nos nós e de fluxos em seus arcos, em conformidade com os conceitos descritos algebricamente pela expressão (A.38), representada aqui por (B.20).

$$\begin{bmatrix} S_1^1 \\ D_3^1 \\ D_1^1 \\ C_{13}^1 \\ C_{11}^1 \\ x_{13}^1 \\ x_{11}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^0 \\ D_3^0 \\ D_1^0 \\ C_{13}^0 \\ C_{11}^0 \\ x_{13}^0 \\ x_{11}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta S_1^1 \\ \Delta D_3^1 \\ \Delta D_1^1 \\ \Delta C_{13}^1 \\ \Delta C_{11}^1 \\ \delta_{13}^1 \\ \delta_{11}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

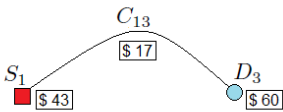
$$\begin{bmatrix} +(60.71166530) \\ +(69.98495958) \\ +(79.19112270) \\ +(9.27329427) \\ +(18.47945693) \\ +(43.54365405) \\ +(83.23550920) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(43.65683659) \\ +(60.64634147) \\ +(100.00000000) \\ +(16.98780488) \\ +(1.00000000) \\ +(84.14634146) \\ +(0.00000000) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +(17.05312871) \\ +(9.33861811) \\ -(20.80887730) \\ -(7.71451061) \\ +(17.47945693) \\ -(40.60268741) \\ +(83.23550920) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

A Figura 15 descreve o equilíbrio da rede na iteração  $i = 2$ . Os respectivos preços estão etiquetados em cada agente da rede.

Algumas observações sobre o cômpto representado por (B.21) são oportunas.

- Sobre o fato de que os preços e os fluxos em  $X^{t=0}$  são todos positivos. Esta é uma condição mandatária para uma rede em seu estado de equilíbrio atual. Não se processa um novo equilíbrio sobre uma rede que não esteja equilibrada. Isto quer dizer que toda rede equilibrada possui preços e fluxos com valores positivos, sem exceção;
- Sobre o fato de que as perturbações em  $\Delta X^{t=1}$  possuem valores positivos e negativos. As novas perturbações desequilibram uma rede. Isto significa que o desequilíbrio provocado pode levar a rede a um novo estado de equilíbrio, onde os valores de preços e fluxos são todos positivos, ou podem levar a rede a um estado provisório de desequilíbrio, onde alguns de seus preços ou fluxos sejam negativos. Neste último caso, este desequilíbrio temporário representa o fato em que algum arco da rede precisa ser removido da rede. Esta remoção pode acarretar o processo denominado *Split*. Com certeza a fase de desequilíbrio provosório é resolvida com um novo recálculo do equilíbrio já computando a retirada do referido arco;
- Sobre o fato de que os preços e os fluxos em  $X^{t=1}$  todos positivos. Neste caso específico os valores sendo positivos indicam que o equilíbrio efetivo da rede foi alcançado nesta iteração. Um novo arco pode vir a ser inserido em componente equilibrado, disparando a necessidade de um novo cômpto, em uma nova iteração. Entretanto, um nível de controle sobre a positividade final dos valores de  $X^{t=1}$  precisa ser sempre realizado em cada cômpto de equilíbrio.

a) A rede equilibrada na iteração  $t = 0$



b) A rede equilibrada na iteração  $t = 1$

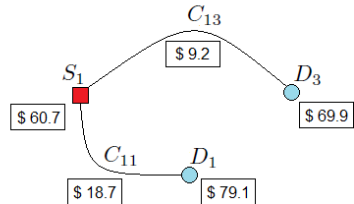


Figura 15. A rede equilibrada nas iterações  $t = 0; t = 1$ . Os preços nas etiquetas estão arredondados. Os fluxos nos arcos não estão mostrados.

### B.3 APRESENTAÇÃO DO RESULTADO FINAL

Após dezoito iterações consecutivas, o *Algoritmo Alternativo* descreve a condição final de processamento do equilíbrio espacial de preços da rede econômica apresentada como exemplo na Figura 13. O estado de equilíbrio está descrito na Figura 16 e Tabela 5, com valores arredondados. A condição *SPE* no nó  $D_3$  pode ser verificada em cinco caminhos diferentes.

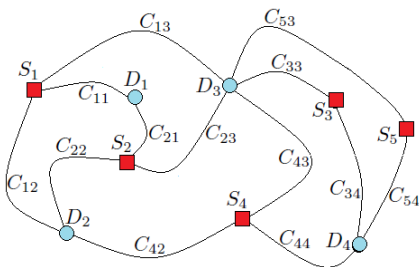


Figura 16. Solução final na iteração  $t = 17$ . Note que  $D_3 = S_1 + C_{13} = S_2 + C_{23} = S_3 + C_{33} = S_4 + C_{43} = S_5 + C_{53}$ . Fonte: o autor.

Tabela 5. Preços e Fluxos de equilíbrio final do exemplo algébrico

Agente	<i>SPE</i>	Agente	<i>SPE</i>	Fluxo	<i>SPE</i>
$S_1$	+51,6507	$C_{11}$	+14.3519	$x_{11}$	+63.5805
$S_2$	+50,9690	$C_{12}$	+7.7403	$x_{12}$	+33.7017
$S_3$	+44,9075	$C_{13}$	+2.4120	$x_{13}$	+7.4320
$S_4$	+46,9196	$C_{21}$	+15.0335	$x_{21}$	+72.4088
$S_5$	+43,8062	$C_{22}$	+8.4220	$x_{22}$	+37.7765
$D_1$	+66.0026	$C_{23}$	+3.0937	$x_{23}$	+6.8360
$D_2$	+59.3910	$C_{33}$	+9.1552	$x_{33}$	+54.3685
$D_3$	+54.0628	$C_{34}$	+8.2126	$x_{34}$	+48.0843
$D_4$	+53.1202	$C_{42}$	+12.4714	$x_{42}$	+67.6530
—	—	$C_{43}$	+7.1431	$x_{43}$	+31.8706
—	—	$C_{44}$	+6.2005	$x_{44}$	+26.6713
—	—	$C_{53}$	+10.2566	$x_{53}$	+62.5660
—	—	$C_{54}$	+9.3139	$x_{54}$	+48.3089

## B.4 SUCESSIVAS INSERÇÕES DE *ARCOS ENTRANTES*

As dezoito iterações consecutivas realizadas pelo *Algoritmo Alternativo* produziram a solução final para o exemplo algébrico descrito na Figura 13. Estas iterações estão representadas graficamente abaixo na Figura 17, onde a dinâmica do cômputo do equilíbrio ocorre com sucessivas inserções de arcos entrantes e remoções de arcos.

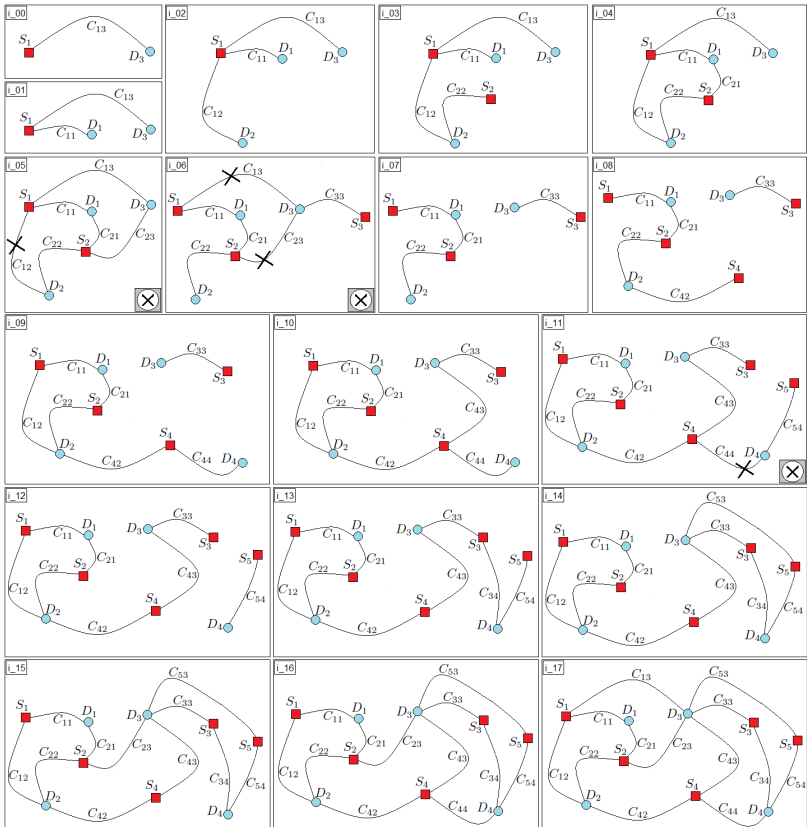


Figura 17. A seqüência de 18 iterações: a rede do exemplo. Fonte: o autor.

Algumas remoções de arcos podem levar a um processo de divisão temporária do grafos em duas ou mais partições. É o chamado processo de *Splitting*. Em outras situações, entretanto, o grafo pode continuar totalmente conexo mesmo com remoções de arcos.

Um controle adicional deve ser realizado para acompanhar o momento quando algum arco zerado é removido temporariamente, ou inserido novamente, pela união de nós do grafo, quando um novo arco é inserido no grafo. As iterações  $\{i_5; i_6; i_{11}\}$  descrevem os arcos que foram zerados durante o processamento do cômputo dos equilíbrios intermediários. Estes arcos são, respectivamente,  $\{C_{21}; C_{13}; C_{23}; C_{44}\}$ . Ao final da décima oitava iteração, todos os arcos da rede foram inseridos no componente equilibrado, representando que a rede completa foi equilibrada, com os preços e fluxos de cada agente sendo determinado completamente no estado final de equilíbrio.

## B.5 SOBRE OS VALORES DE PREÇOS E FLUXOS PARA OS AGENTES QUE FORAM OBTIDOS DURANTE O PROCESSAMENTO DO EQUILÍBRIO PELO *ALGORITMO ALTERNATIVO*

A seguir são apresentados os valores relativos ao processamento das dezessete iterações realizadas pelo *Algoritmo Alternativo* aplicado sobre a rede exemplificada nesta seção. Eles estão apresentados em quatro tabelas, nominadas Tabela 6 à Tabela 9. Estas tabelas descrevem as transições entre os estados de equilíbrio da rede para cada agente econômico envolvido. Em cada iteração, os novos preços nos nós e os novos fluxos nos arcos da rede são computados em função das perturbações causadas como decorrência do processo de inserção de um novo arco, denominado arco entrante ou de remoção de um arco zerado na iteração anterior.

Em cada iteração, vinte e dois cômputos de preços são recalculados. Destes, cinco são preços de nós produtores, nominados  $S_1$  à  $S_5$ . Quatro são relativos à nós consumidores, nominados  $D_1$  à  $D_4$ . O complemento, cuja cardinalidade vale treze, é dado pelo conjunto de preços associados aos arcos transportadores da rede, denominados  $C_{ij}$ . Os cômputos de fluxos na rede também são recalculados a cada iteração. Ao total são treze fluxos, nominados genericamente  $x_{ij}$ , descrevendo um fluxo dirigido do nó produtor  $S_i$  para o nó consumidor  $D_j$ . Observando as tabelas pode-se notar quando um arco tem seu valor zerado e quando ele assume um valor diferente de zero. No primeiro caso, ele é removido do grafo. Geralmente, seus valores vão diminuindo suavemente até o mometo da remoção. A inserção de um novo arco é seguida de um valor diferente de zero, positivo.



Tabela 6. Preços e Fluxos de equilíbrio em cinco iterações iniciais

Preços	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$
$P_{P1}$	+43.6585	+60.7116	+67.8496	+249.0188	+60.5763
$P_{P2}$	0	0	0	+185.194	+56.8022
$P_{P3}$	0	0	0	0	0
$P_{P4}$	0	0	0	0	0
$P_{P5}$	0	0	0	0	0
$P_{M1}$	0	+79.1911	+83.0704	+320.1188	+71.2346
$P_{M2}$	0	0	+78.9212	+261.7284	+68.893
$P_{M3}$	+60.6463	+69.9849	+73.8938	+283.32	+69.9108
$P_{M4}$	0	0	0	0	0
$P_{T11}$	0	+18.4794	+15.2207	+71.0996	+10.6583
$P_{T12}$	0	0	+11.0715	+12.7092	+8.3166
$P_{T13}$	+16.9878	+9.2732	+6.0441	+34.3008	+9.3344
$P_{T21}$	0	0	0	0	+14.4324
$P_{T22}$	0	0	0	+76.534	+12.0907
$P_{T23}$	0	0	0	0	0
$P_{T33}$	0	0	0	0	0
$P_{T34}$	0	0	0	0	0
$P_{T42}$	0	0	0	0	0
$P_{T43}$	0	0	0	0	0
$P_{T44}$	0	0	0	0	0
$P_{T53}$	0	0	0	0	0
$P_{T54}$	0	0	0	0	0
Fluxos	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$
$X_{11}$	0	+83.2355	+67.718	+319.5232	+45.9919
$X_{12}$	0	0	+50.3578	+43.546	+36.5832
$X_{13}$	+84.1463	+43.5436	+26.5483	+159.478	+43.8657
$X_{21}$	0	0	0	0	+69.0692
$X_{22}$	0	0	0	+403.1424	+59.3576
$X_{23}$	0	0	0	0	0
$X_{33}$	0	0	0	0	0
$X_{34}$	0	0	0	0	0
$X_{42}$	0	0	0	0	0
$X_{43}$	0	0	0	0	0
$X_{44}$	0	0	0	0	0
$X_{53}$	0	0	0	0	0
$X_{54}$	0	0	0	0	0

Tabela 7. Preços e Fluxos de equilíbrio nas iterações  $i_5$  à  $i_9$ 

Preços	$i_5$	$i_6$	$i_7$	$i_8$	$i_9$
$S_1$	+60.0968	+54.5260	+54.5260	+194.9040	+50.7078
$S_2$	+59.7205	+54.0456	+54.0456	+192.4512	+50.1399
$S_3$	0	+48.2277	+48.2277	0	0
$S_4$	0	0	0	+158.4584	+47.5644
$S_5$	0	0	0	0	0
$D_1$	+72.2075	+68.1527	+68.1527	+255.6864	+65.3673
$D_2$	+69.8503	+65.8811	+65.8811	+222.7480	+59.1701
$D_3$	+66.5243	+55.4144	+65.9416	0	0
$D_4$	0	0	0	0	+57.0429
$C_{11}$	+12.1107	+13.6267	+13.6267	+60.7820	+14.6595
$C_{12}$	+9.7535	+11.3550	+11.3550	+27.8436	+8.4623
$C_{13}$	+6.4275	+0.8883	0	0	0
$C_{21}$	+12.4870	+14.1071	+14.1071	+63.2352	+15.2273
$C_{22}$	+10.1297	+11.8354	+11.8354	+30.2964	+9.0302
$C_{23}$	+6.8037	+1.3687	0	0	0
$C_{33}$	0	+17.7139	+17.7139	0	0
$C_{34}$	0	0	0	0	0
$C_{42}$	0	0	0	+64.2892	+11.6057
$C_{43}$	0	0	0	0	0
$C_{44}$	0	0	0	0	+9.4785
$C_{53}$	0	0	0	0	0
$C_{54}$	0	0	0	0	0
Fluxos	$i_5$	$i_6$	$i_7$	$i_8$	$i_9$
$x_{11}$	+52.9084	+60.1271	+60.1271	+270.3912	+65.0452
$x_{12}$	+43.7675	+51.7753	+51.7753	+119.2188	+37.3118
$x_{13}$	+28.5660	-0.5874	0	0	0
$x_{21}$	+58.2611	+67.2618	+67.2618	+306.8624	+73.4853
$x_{22}$	+47.8219	+57.8558	+57.8558	+131.1576	+41.3542
$x_{23}$	+30.0236	-3.9450	0	0	0
$x_{33}$	0	+111.4263	+111.4263	0	0
$x_{34}$	0	0	0	0	0
$x_{42}$	0	0	0	+373.4960	+61.4693
$x_{43}$	0	0	0	0	0
$x_{44}$	0	0	0	0	+53.9875
$x_{53}$	0	0	0	0	0
$x_{54}$	0	0	0	0	0

Tabela 8. Preços e Fluxos de equilíbrio nas iterações  $i_{10}$  à  $i_{14}$ 

Preços	$i_{10}$	$i_{11}$	$i_{12}$	$i_{13}$	$i_{14}$
$S_1$	+51.7246	+50.3819	+50.3819	+50.6832	+50.1415
$S_2$	+51.1800	+49.8066	+49.8066	+50.1148	+49.5607
$S_3$	+43.7990	+41.6876	+41.6876	+46.6795	+46.2855
$S_4$	+51.6434	+46.2571	+46.2571	+47.4660	+45.2929
$S_5$	0	+41.8278	+41.8278	+38.0362	+45.2152
$D_1$	+66.1091	+65.1295	+65.1295	+65.3494	+64.9542
$D_2$	+60.9573	+58.5974	+58.5974	+59.1270	+58.1749
$D_3$	+59.7175	+56.7502	+56.7502	+59.0262	+54.9348
$D_4$	+59.7623	+47.7536	+57.4023	+52.4190	+55.5628
$C_{11}$	+14.3844	+14.7476	+14.7476	+14.6661	+14.8126
$C_{12}$	+9.2327	+8.2154	+8.2154	+8.4437	+8.0333
$C_{13}$	0	0	0	0	+0
$C_{21}$	+14.9290	+15.3229	+15.3229	+15.2345	+15.3935
$C_{22}$	+9.7773	+8.7907	+8.7907	+9.0121	+8.6142
$C_{23}$	0	0	0	0	+0
$C_{33}$	+15.9185	+15.0625	+15.0625	+12.3467	+8.6492
$C_{34}$	0	0	0	+5.7395	+9.2772
$C_{42}$	+9.3139	+12.3402	+12.3402	+11.6610	+12.8819
$C_{43}$	+8.0740	+10.4930	+10.4930	+11.5602	+9.6418
$C_{44}$	+8.1188	+1.4964	+0	+0	+0
$C_{53}$	0	0	+0	+0	+9.7195
$C_{54}$	0	+15.5744	+15.5744	+14.3828	+10.3475
Fluxos	$i_{10}$	$i_{11}$	$i_{12}$	$i_{13}$	$i_{14}$
$x_{11}$	+63.7355	+65.4650	+65.4650	+65.0768	+65.7746
$x_{12}$	+41.1636	+36.0772	+36.0772	+37.2188	+35.1668
$x_{13}$	0	0	0	0	0
$x_{21}$	+71.8279	+74.0165	+74.0165	+73.5253	+74.4083
$x_{22}$	+45.7488	+39.9458	+39.9458	+41.2481	+38.9070
$x_{23}$	0	0	0	0	0
$x_{33}$	+99.456	93.7504	+93.7504	+75.6450	+50.9952
$x_{34}$	+0	0	0	+31.5968	+55.1818
$x_{42}$	45.0993	66.7159	+66.7159	+61.8645	+70.5854
$x_{43}$	+39.0310	+57.6388	+57.6388	+65.8481	+51.0911
$x_{44}$	+42.6569	-12.5293	0	0	0
$x_{53}$	0	0	0	0	+57.1956
$x_{54}$	0	+105.2224	+105.2224	+94.3892	+57.7051

Tabela 9. Preços e Fluxos de equilíbrio nas últimas iterações

Preços	$i_{15}$	$i_{16}$	$i_{17}$
$S_1$	+50.4653	+50.8906	+51,6507
$S_2$	+50.6266	+50.9636	+50,9690
$S_3$	+45.8744	+45.1092	+44,9075
$S_4$	+45.1288	+47.0300	+46,9196
$S_5$	+44.7786	+44.0210	+43,8062
$D_1$	+65.4755	+65.7477	+66.0026
$D_2$	+58.4725	+59.2562	+59.3910
$D_3$	+54.2827	+54.3986	+54.0628
$D_4$	+55.2260	+53.2694	+53.1202
$C_{11}$	+15.0101	+14.8570	+14.3519
$C_{12}$	+8.0071	+8.3655	+7.7403
$C_{13}$	0	0	+2.4120
$C_{21}$	+14.8488	+14.78411	+15.0335
$C_{22}$	+7.8458	+8.2925	+8.4220
$C_{23}$	+3.6560	+3.4350	+3.0937
$C_{33}$	+8.4082	+9.2894	+9.1552
$C_{34}$	+9.3516	+8.1602	+8.2126
$C_{42}$	+13.3436	+12.2261	+12.4714
$C_{43}$	+9.1538	+7.3686	+7.14318
$C_{44}$	0	+6.2394	+6.2005
$C_{53}$	+9.5040	+10.3776	+10.2566
$C_{54}$	+10.4473	+9.2483	+9.3139
Fluxos	$i_{15}$	$i_{16}$	$i_{17}$
$x_{11}$	+66.7151	+65.9861	+63.5805
$x_{12}$	+35.0358	+36.8278	+33.7017
$x_{13}$	0	0	+7.4320
$x_{21}$	+71.3826	+71.0228	+72.4088
$x_{22}$	+34.3874	+37.0152	+37.7765
$x_{23}$	+10.3504	+8.9690	+6.8360
$x_{33}$	+49.3886	+55.2630	+54.3685
$x_{34}$	+55.6774	+47.7348	+48.0843
$x_{42}$	+73.8832	+65.9013	+67.6530
$x_{43}$	+47.3374	+33.6050	+31.8706
$x_{44}$	0	+26.9952	+26.6713
$x_{53}$	+55.0407	+63.7761	+62.5660
$x_{54}$	+58.6126	+47.7126	+48.3089