UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
FILOSOFIA

Angell Mayara Maroco Magri

TEORIA DA RELATIVIDADE E LÓGICA TEMPORAL

Florianópolis

2019

Angell Mayara Maroco Magri

TEORIA DA RELATIVIDADE E LÓGICA TEMPORAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para a obtenção do Grau de Mestre em Filosofia.
Orientador: Prof. Dr. Jonas Rafael Becker Arenhart

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Magri, Angell Mayara Maroco
Teoria da Relatividade e lógica temporal / Angell Mayara Maroco Magri ; orientador, Jonas Rafael Becker Arenhart, 2019.
106 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Filosofia. 2. Tempo. 3. Teoria da Relatividade. 4. Lógica Temporal. I. Arenhart, Jonas Rafael Becker. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

Angell Mayara Maroco Magri

"TEORIA DA RELATIVIDADE E LÓGICA TEMPORAL"

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre em Filosofia", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Florianópolis, 01 de março de 2019.

Prof. Roberto Wu, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Jonas Rafael Becker Arenhart, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Cezar Augusto Mortari, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Newton Marques Peron, Dr.
(com participação por videoconferência)
Universidade Federal da Fronteira Sul

Prof. Dr. Roberto Wu
Coordenador do Programa de Pos-Graduação
em Filosofia/CFH-UFSC
Portaria nº 1344/2016/GR

À Maria da Conceição.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa, sem a qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu orientador, professor Jonas Rafael Becker Arenhart, pelos ensinamentos e dedicação que foram indispensáveis para a minha formação acadêmica e para a construção deste trabalho.

Ao professor Décio Krause, por ter participado da banca de qualificação, contribuindo com sugestões e incentivo para a conclusão do trabalho.

Ao professor Cezar A. Mortari, por ter participado das bancas de qualificação e defesa. Sua paciência em apontar os erros e sugerir melhorias foi essencial para o resultado final desta pesquisa.

Ao professor Newton M. Peron, por ter participado da banca de defesa e contribuído com correções e com ideias para o desenvolvimento de futuras pesquisas.

Aos professores do Departamento de Filosofia da UEL, pelo incentivo a seguir a carreira acadêmica durante toda a minha graduação. Em especial ao professor Carlos L. Montagnoli, por suas aulas e orientações que foram fundamentais para que eu seguisse com a pesquisa em lógica.

Aos amigos que fiz em Florianópolis e aos amigos de Cambé, em especial Taila e Claudia, por compartilharmos momentos importantes desde o início de nossas jornadas acadêmicas.

Ao meu irmão, Reynald Magri, por ser o meu exemplo acadêmico, profissional e pessoal. E à minha mãe, Maria da Conceição, por estar sempre comigo mesmo estando longe e a quem este trabalho é dedicado.

RESUMO

A lógica temporal surgiu no século XX como uma alternativa à limitação da lógica clássica que não leva em conta o tempo verbal das sentenças em sua análise da noção de consequência lógica. A lógica temporal, por sua vez, leva em consideração o tempo na formalização de sentenças e argumentos em pelo menos dois aspectos: 1) reconhecendo que certas sentenças usualmente mudam seu valor de verdade de acordo com o momento em que são enunciadas; 2) levando em conta que em alguns casos, o tempo verbal das sentenças que compõem um argumento influencia diretamente na determinação da sua validade ou invalidade. Isso leva muitas abordagens a considerar que o mundo está, de algum modo, temporalmente estruturado. A forma como se caracteriza essa estrutura é essencial para se determinar como o valor de verdade de sentenças na lógica temporal depende do tempo. Concepções diferentes de passagem do tempo levam a sistemas lógicos temporais distintos. Por ser o tempo um conceito muito discutido, podemos encontrar inúmeras concepções de tempo ao longo da história da filosofia e também da física. Uma das formas de se pensar a passagem do tempo pode ser aquela descrita da Teoria da Relatividade Restrita, desenvolvida pelo físico Albert Einstein. Como veremos, a noção de tempo na Teoria da Relatividade difere daquele pensado na física clássica e em outras teorias físicas, inclusive com o surgimento de alguns "paradoxos" acerca da passagem do tempo. É esta concepção de tempo que interessa-nos investigar, a fim de identificar um sistema lógico temporal capaz de representar tal concepção de tempo. Alguns esforços já foram feitos a fim de tentar compreender a estrutura lógica do tempo da Teoria da Relatividade Restrita através do desenvolvimento de sistemas lógicos temporais. Faremos uma investigação com base nestes esforços a fim de obtermos um esclarecimento mais abrangente da concepção de tempo da Teoria da Relatividade e sua relação com uma lógica temporal. Um trabalho desta natureza é importante para se compreender a estrutura lógica de uma das teorias mais conhecidas da física moderna, e como a filosofia pode contribuir na compreensão de aspectos da física, através de aplicações da lógica temporal.

Palavras-chave: Tempo. Teoria da Relatividade. Lógica Temporal.

ABSTRACT

Temporal logic arose in the twentieth century as an alternative to a limitation of classical logic, which does not take into account the verbal tense of sentences in its analysis of the notion of logical consequence. Temporal logic, on the other hand, takes time into account in the formalization of sentences and arguments in at least two aspects: 1) recognizing that certain sentences usually change their truth value according to the moment in which they are enunciated; 2) taking into account that in some cases, the verbal tense of the sentences that compose an argument directly influences the determination of its validity or invalidity. This leads many approaches to consider that the world is somehow temporally structured. The way this structure is characterized is essential to determine how the truth value of sentences in temporal logic depends on time. Different conceptions of the passage of time lead to different temporal logic systems. Because time is a much discussed concept, we can find countless conceptions of time throughout the history of philosophy and also of physics. One way of thinking about the passage of time can be drawn from the Theory of Special Relativity, developed by the physicist Albert Einstein. As we will see, the notion of time in the Theory of Relativity differs from the one advanced by classical physics and other physical theories, including the emergence of some "paradoxes" about the passage of time. This conception of time will be the focus of our investigation: we shall be searching for a system of temporal logic capable of representing such a conception. Some efforts have already been made in attempts to understand the logical structure of time in the Theory of Restricted Relativity through the development of temporal systems. We will advance an investigation based on these efforts in order to obtain a more comprehensive clarification of the concept of time in the Theory of Relativity and its relation to a temporal logic. A work of this nature is important in understanding the logical structure of one of the most well-known theories of modern physics, and may shed some light on how philosophy can contribute to the understanding of aspects of physics through the applications of temporal logic.

Keywords: Time. Theory of Relativity. Temporal Logic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho parte do interesse na relação entre tempo, física e lógica. O tempo é um assunto estudado desde os filósofos antigos até os dias atuais. Dentre as inúmeras teorias envolvendo o tempo, uma que consideramos das mais impactantes para a nossa ideia intuitiva é advinda da Teoria da Relatividade, e é especificamente dela que iremos tratar neste trabalho.

Não só a física se ocupa da questão do tempo, mas também a lógica. A lógica surge com Aristóteles enquanto uma forma de estudo de argumentos válidos, mas se desenvolveu em grande medida a partir do século XIX, encontrando aplicações na matemática, na computação e inclusive na física. A lógica temporal surge no século XX reconhecendo que a validade de alguns argumentos depende justamente do tempo verbal de suas premissas e conclusão.

A solução que a lógica temporal apresentou a fim de lidar com a formalização adequada do tempo verbal de cada sentença[1] foi introduzir operadores lógicos que representem os tempos verbais das sentenças no passado e no futuro. Usando tais operadores é possível formalizar adequadamente os argumentos da linguagem natural em que as distinções dos tempos verbais sejam importantes na sua formulação. Mas para estabelecermos uma semântica para tais operadores precisamos nos aproximar de uma discussão sobre a natureza do tempo.

A atribuição de valor de verdade para as fórmulas da lógica temporal vai depender justamente da forma como pensamos o tempo: modelos de tempo diferentes dão origem a diferentes lógicas temporais. Veja: se pensarmos no tempo como uma linha reta que vai do passado ao futuro então é válido que um instante nunca vem antes e depois de outro (ou vem antes ou vem depois). Mas se pensarmos que o tempo é como um círculo – tudo que já aconteceu voltará a acontecer – então está correto dizer que um instante pode vir antes e depois de outro. Uma lógica temporal pode, inclusive, trabalhar com noções de tempo advindas da física. É nesse ponto que a relação entre tempo, física e lógica se dá: queremos responder como seria uma lógica temporal para o modelo de tempo decorrente da Teoria da Relatividade Restrita, a fim de saber quais fórmulas seriam válidas e quais inferências seriam

[1] Com 'sentenças' estamos nos referindo apenas a sentenças declarativas, ou seja, expressões bem formadas gramaticalmente cujo um valor de verdade (verdadeiro ou falso) pode ser atribuído. Usaremos os termos "proposição", "frase" e "enunciado" neste mesmo sentido.

legitimadas quando a concepção de tempo utilizada é aquela descrita por uma de nossas melhores teorias físicas..

Um dos resultados contra intuitivos da Teoria da Relatividade é conhecido como 'dilatação temporal': o tempo não passa da mesma forma em qualquer situação, mas seu fluxo pode ser mais rápido ou mais lento para diferentes observadores. Como decorrência disso, a ordem dos eventos não é a mesma para qualquer observador. Talvez este resultado nos soe com estranheza pelo fato de não termos em nossa gramática uma estrutura natural para falar que algo 'é' em relação à mim e 'será' em relação a outra pessoa. Mas embora não tenhamos na linguagem natural uma forma de representar isso, a lógica temporal fornece uma linguagem artificial que pode auxiliar nessa questão. Apesar de não ser o objetivo primário do lógico responder à pergunta 'o que é o tempo?', a lógica temporal pode ser uma ferramenta que caminha em conjunto com a nossa compreensão deste problema.

Aqui iremos tratar principalmente da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), mas acreditamos que a Teoria da Relatividade Geral (TRG) apresenta pontos importantes na discussão sobre o tempo, de modo que seria de grande contribuição para a lógica temporal levar tais pontos em consideração também. Falaremos disso brevemente no final deste texto. Frente a isso, este trabalho tem por objetivo investigar a concepção de tempo da Teoria da Relatividade Restrita, apresentar os esforços já feitos no desenvolvimento de uma lógica temporal para a concepção de tempo de tal teoria e buscar possíveis problemas ainda em aberto a fim de indicar um rumo para futuras pesquisas. Para tanto, este trabalho se dividirá em quatro capítulos (sem contar com a introdução e considerações finais).

No primeiro capítulo apresentamos uma breve discussão sobre a relação entre tempo, física e lógica, a fim de situar o problema abordado. A fim de compreender como funcionam os sistemas de lógica temporal, apresentar conceitos importantes e demonstrar resultados fundamentais, apresentamos neste capítulo um sistema lógico temporal bem simples, cuja compreensão será importante para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Usaremos os resultados provados sobre este sistema como base para as provas sobre lógica temporal para a TRR.

No segundo capítulo fazemos uma exposição da Teoria da Relatividade Restrita, com foco principalmente no seu conceito de tempo. Começamos expondo seu histórico, a fim de compreender como surge a teoria. Os principais resultados em relação ao tempo residem nas transformações de Lorentz, onde vemos o fenômeno de dilatação temporal, e nos diagramas de espaço-tempo de Minkowski, que consistirão na base da lógica temporal que apresentaremos no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo apresentamos uma lógica temporal relativística – como assim chamaremos a lógica temporal para a concepção de tempo da Teoria da Relatividade Restrita – baseada no que foi apresentado no capítulo anterior. Nossa apresentação será firmada sobre o trabalho de Robert Goldblatt, que foi o primeiro a apresentar uma axiomatização para este problema. Goldblatt usa a lógica modal (dos operadores de necessidade e possibilidade) com uma interpretação temporal. Ao invés disso, nos manteremos na lógica temporal, usando operadores para o passado e futuro.

No quarto capítulo levantaremos alguns problemas ainda em aberto na discussão sobre sistemas lógicos para a Teoria da Relatividade. Nesse momento falaremos brevemente da Teoria da Relatividade Geral, indicando caminhos que podem ser tomados em futuras pesquisas sobre o tema.

Com este trabalho pretendemos fornecer um texto claro tanto para o leitor habituado à lógica, mas não tão familiarizado à física, quanto o contrário, para o leitor familiarizado à física, mas não à lógica. E claro, a quem mais possa interessar. Um trabalho dessa natureza é importante para se compreender a relação entre tempo, física e lógica bem como indicar caminhos para possíveis contribuições sobre o tema e consequente avanço da lógica temporal.

2 TEMPO, FÍSICA E LÓGICA

A tentativa de compreender o tempo tem sido fonte de investigação desde a antiguidade, e percorre o pensamento de filósofos, físicos e lógicos ao longo da história. As palavras de Santo Agostinho ilustram o problema: "O que é, pois, o tempo? Se ninguém mo pergunta, sei o que é; mas se quero explicá-lo a quem mo pergunta, não sei" (2008, Livro XI, Capítulo XIV).

Uma das primeiras abordagens à questão sobre 'o que é o tempo' foi proposta por Aristóteles. Para ele o tempo está relacionado ao movimento: "só apreendemos o tempo quando marcamos o movimento, marcando-o antes e depois; e é só quando percebemos antes e depois em movimento que dizemos que o tempo passou" (ARISTÓTELES, 1991, IV, 219a22). Embora o tempo esteja relacionado ao movimento, para Aristóteles, o tempo não é o próprio movimento, mas a sua medida, ou seja, a contagem que fazemos entre uma mudança e outra. Por exemplo, se digo que algo irá acontecer daqui a dois dias, isso significa simplesmente que irá acontecer quando a terra completar duas rotações. Se digo que algo irá acontecer em uma hora, significa que devo esperar o ponteiro dos minutos de um relógio completar uma volta. O tempo não existe de forma independente de modo que um relógio seja um mecanismo que marca a sua passagem, mas sim a contagem que fazemos entre os ponteiros estarem em uma posição e outra compreende o que chamamos de tempo. O tempo é a contagem da mudança, para Aristóteles.

Segundo Aristóteles, se não existe mudança então não existe tempo. Para imaginarmos um universo sem mudança deveríamos considerar qualquer tipo de mudança, inclusive qualquer processo corporal e mental que possa nos ocorrer: "pois mesmo quando está escuro e não estamos sendo afetados pelo corpo, se algum movimento ocorre na mente, supomos imediatamente que algum tempo realmente se passou" (ARISTÓTELES, 1991, IV, 219a4-6).

Para entender o pensamento de Aristóteles, tente responder à seguinte pergunta: seria possível que todo o movimento do universo cessasse, que nenhuma mudança ocorresse, e enquanto isso se passassem alguns anos? Para Aristóteles isso seria impossível, ou até mesmo uma formulação sem sentido, pois só tem sentido falarmos em tempo quando há mudança. Se nada acontece então não há contagem de movimento algum, que é justamente o que chamamos de 'tempo'. Como poderíamos falar em passagem de anos em um universo estático se definimos um ano (terrestre) como um movimento de translação completo da terra? Sem este movimento a própria definição de 'ano' se perderia, e perguntar quantos anos se passaram em um universo estático sequer faria sentido.

Mas podemos ter uma posição diferente da de Aristóteles e considerar que é sim possível que todo o movimento do universo cesse e com isso se passem anos. Se este é o caso então temos uma ideia de tempo mais próxima à do físico Isaac Newton. Para Newton, o tempo concebido por Aristóteles é apenas aparente. Quando concebemos o tempo apenas em relação a coisas perceptíveis (como o movimento) estamos empregando um tempo meramente relativo no lugar do verdadeiro tempo. Segundo o autor: "o tempo absoluto, verdadeiro e matemático, flui sempre igual por si mesmo e por sua própria natureza, sem relação com nenhuma coisa externa" (NEWTON, 2005, p. 24). Portanto, se todo o movimento do mundo cessasse (inclusive qualquer mudança mental ou corpórea que poderíamos ter) então o tempo, para Newton, continuaria a fluir. E seria possível se passarem anos sem que nenhuma mudança ocorra, pois o tempo verdadeiro flui uniforme e independentemente de qualquer movimento.

A diferença entre o tempo aparente e o tempo verdadeiro, pra Newton, é que o primeiro é impreciso, enquanto o segundo, não podendo ser acessado diretamente, mas apenas indiretamente por meio da matemática, é exato. Os dias medidos pela rotação da terra não têm todos exatamente a mesma duração. Mas os físicos podem corrigir essa imprecisão empregando o tempo verdadeiro por meio de deduções matemáticas.

Pensar o tempo enquanto algo absoluto permitiu a construção da mecânica clássica newtoniana. A mecânica newtoniana se baseia em três leis fundamentais, que permitem calcular como um sistema mecânico evolui ao longo do tempo a partir das forças que agem sobre ele em cada instante. A segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Onde $\vec{F}$ é a força, m a massa, $\Delta\vec{v}$ é a variação da velocidade e Δt é a variação do tempo[1]. Esta fórmula nos diz, basicamente, que a força que atua sobre um corpo é igual ao produto da massa deste corpo por sua aceleração. Mas é claro que para esta lei (ou qualquer outra lei

[1]Como $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ é igual à aceleração $\vec{a}$, é mais comum encontrarmos essa fórmula escrita como: $\vec{F} = m.\vec{a}$.

da mecânica clássica em que t ocorra) valer universalmente, t não pode ser impreciso como o tempo advindo da medida de coisas aparentes. É preciso um tempo uniforme e universal.

Enquanto o tempo de Aristóteles é um resultado de como observamos o mundo, o tempo de Newton é uma construção intelectual. Se a visão newtoniana do tempo nos parece mais familiar é porque estamos mais habituados com a física clássica e isso de alguma forma influencia nossa concepção quando nos colocamos a pensar sobre o tempo. Se quando pensamos sobre o tempo imaginamos uma linha infinita totalmente ordenada, que vai do passado ao futuro, e que é absoluta e independente de qualquer mudança no mundo, estamos mais próximos da visão newtoniana. Mas se consideramos que o tempo só pode ser definido enquanto a medida do movimento, então estamos mais próximos às ideias de Aristóteles.

Cabe ressaltar que as posições de Newton e Aristóteles não são as únicas. Estamos apresentando ambas pela influencia que estes pensadores tiveram ao longo da história, e por suas posições divergentes ilustrarem bem o problema de pensar sobre o que é o tempo[2]. De um lado temos a ideia aristotélica de tempo que parece seguir nossa experiência do mundo, e do outro temos a ideia newtoniana de tempo que funciona muito bem com as equações da física clássica. Qual delas deveríamos adotar? Seria possível determinar qual delas é a correta? Seria mesmo necessário escolher uma delas?

Talvez uma resposta a essas questões possa ser encontrada em uma espécie de síntese entre estes dois autores, síntese esta que permeia uma das teorias mais conhecidas da física moderna: a Teoria da Relatividade. Mas isso irá implicar abandonar muitas das noções intuitivas que tínhamos sobre o tempo. Nesta teoria, o tempo não é simplesmente uma medida que só existe quando existe movimento, mas também não é algo absoluto e totalmente independente do espaço. O tempo, para a Teoria da Relatividade, passa a ser visto como uma dimensão do espaço. Tempo e espaço coexistem juntos, mas não são independentes de tudo o que acontece.

A Teoria da Relatividade Restrita surge com o físico Albert Einstein em 1905, e em 1915 é publicada a Teoria da Relatividade Geral. A Teoria Relatividade Restrita sugere que os eventos não estão definitivamente ordenados. A estrutura do tempo é muito mais complicada e articulada do que a simples linha que vai do passado ao futuro, que está na nossa imaginação.

[2]Uma abordagem mais completa em relação às várias teorias sobre o tempo pode ser vista em van Frassen, 1970.

Em seu artigo publicado em 1905, "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", Einstein compreendeu que o tempo é desacelerado pela velocidade. Isso implica que o tempo não flui da mesma forma em qualquer situação. Esta descoberta impactou profundamente a nossa intuição sobre o tempo, de modo que as noções de passado, presente e futuro precisaram ser revistas.

Em geral, a nossa noção de presente é 'o que está acontecendo exatamente agora' em qualquer lugar do universo, de modo que podemos nos perguntar o que está acontecendo agora em um planeta distante, por exemplo, e obter uma resposta precisa. Mas a Teoria da Relatividade Restrita mostra que esta questão não é tão simples assim, e que a pergunta sobre o que está acontecendo *agora* em um lugar distante sequer tem sentido. Vejamos o porquê.

Imagine que um astronauta viajou até um planeta cinco anos luz distante da Terra, e queremos saber o que este astronauta está fazendo 'agora'. Vamos supor que dispomos de um dispositivo, como um telescópio, que nos permite observar tal planeta. Ora, bastaria observar pelo telescópio o que faz o astronauta neste momento e responderíamos o que ele faz 'agora', poderiam dizer. Mas nesse caso veríamos o que o astronauta fazia há cinco anos, uma vez que o planeta está a cinco anos luz da Terra, e a luz do que observamos pelo telescópio demorou cinco anos para chegar até nós. Então, poderiam objetar, o que astronauta faz 'agora' corresponde simplesmente a o que ele faz cinco anos depois do momento em que o observamos pelo telescópio. Mas este também não é o caso, pois cinco anos passados na terra e cinco anos para o astronauta podem não ser equivalentes. Imagine que o astronauta decide voltar para a Terra. Se ele fizer essa viagem a noventa por cento da velocidade da luz, se passariam aproximadamente cinco anos e meio na Terra do período de sua viagem. Mas para ele a viagem demoraria bem menos, apenas dois anos e meio, aproximadamente, pois o tempo se dilata para corpos em altas velocidades[3]. Este é um dos resultados mais impactantes da teoria. Não podemos mais falar em 'agora' universalmente. O presente se reduz e se limita, de modo que passaremos a falar em um 'tempo próprio' que tem a sua própria marcha que varia em relação a cada estado de movimento.

O chamado 'tempo próprio' é o tempo que marca um relógio próximo e em repouso em relação a um referencial[4]. Cada referencial

[3]Uma abordagem mais completa da Teoria da Relatividade Restrita será feita no segundo capítulo deste trabalho, onde explicaremos a questão da dilatação temporal. Por enquanto, estamos apenas apresentando alguns aspectos introdutórios importantes para a compreensão inicial do problema.

[4]Formalmente, um referencial pode ser entendido como um conjunto de eixos de

em movimento tem o seu próprio tempo. Como o fluxo do tempo é diferente para diferentes referenciais em movimento, então a ordem de sucessão dos eventos também é diferente. Para dois referenciais que se deslocam entre si a uma velocidade próxima à velocidade da luz, um evento a pode ser anterior a um evento b em um dos referenciais, mas posterior visto do outro referencial. Da mesma forma, dois eventos podem ser simultâneos vistos de um dos referenciais, mas podem estar separados por um lapso de tempo visto do outro referencial.

Uma das primeiras confirmações da Teoria da Relatividade Restrita se deu em outubro de 1971, com o experimento Hafele-Keating (dos físicos Joseph Hafele e Richard Keating). Quatro relógios atômicos foram sincronizados e colocados em aviões a jato em voos ao redor do mundo uma vez para leste e uma vez para oeste e, após isso, foram comparados com relógios que permaneceram no Observatório Naval dos Estados Unidos. Quando reunidos, os relógios que voaram apresentaram um atraso em relação ao relógio que permaneceu na terra, proporcional ao previsto pela Teoria da Relatividade[5]. Hoje a Teoria da Relatividade é comprovada diariamente por satélites de GPS (Global Positioning System): devido a sua alta velocidade em órbita, os efeitos da relatividade precisam ser considerados a fim de manterem seus relógios sempre sincronizados.

A simultaneidade não é absoluta, os eventos não estão totalmente ordenados temporalmente, o tempo se dilata. Por que tudo isso nos parece tão contra intuitivo quando, na verdade, isto é parte da estrutura do mundo em que vivemos? Talvez a aproximação a uma resposta se relacione à nossa linguagem, e como ela molda a forma como pensamos. Segundo Rovelli (2018), o motivo desta estranheza é que a gramática das línguas naturais está fundada em uma distinção 'passado-presente-futuro'. Embora essa distinção nos sirva bem à comunicação, ela surgiu de uma experiência limitada do mundo, e por isso não consegue apreender a complexidade da estrutura do tempo. A gramática nos permite falar, por exemplo, de coisas que 'são', 'foram', ou 'serão', mas não temos uma estrutura igualmente natural para falar que algo 'é' em relação a mim e 'será' em relação a outra pessoa. É nesse ponto que começamos a nos aproximar da lógica temporal.

Antes de abordar propriamente a lógica temporal, cabe ressaltar que não defendemos aqui que a Teoria da Relatividade seja a pala-

---

coordenadas cartesianas X, Y e Z onde posição e movimento podem ser especificados. Para tornar a visualização desta problematização inicial mais simples, podemos imaginar um referencial simplesmente como um sujeito/observador.

[5]Os resultados deste experimento estão em Hafele e Keating, 1972.

vra final para o problema do tempo. Se avançássemos mais nos desdobramentos da física no século XX iríamos nos deparar com novos problemas relacionados à compreensão do tempo, em grande parte advindos da mecânica quântica. Além disso, um estudo abrangente da nossa compreensão temporal deveria incluir também os aspectos psicológicos de nossa relação com o tempo. Podemos brevemente citar que um estudo desse tipo possivelmente incluiria uma abordagem sobre o funcionamento da memória humana[6]. Mas o que propomos é que o desenvolvimento da lógica temporal pode andar em conjunto com o desenvolvimento da física, de modo que ambas podem ser ferramentas para a compreensão de aspectos filosóficos, físicos e linguísticos do tempo. Vamos então compreender como surge a lógica temporal e sua relação com o cenário aqui construído.

A lógica temporal surge com a obra de Arthur Prior, na década de 1950. Prior chamou sua lógica temporal de *'tense logic'* ao invés de *'temporal logic'*. A expressão *'tense logic'* também pode ser lida como 'lógica temporal', mas a palavra *tense*, no inglês, se refere ao tempo verbal. A motivação dessa escolha foi para refletir a intenção original de Prior: "avançar a filosofia do tempo estabelecendo sistemas formais que tratam os tempos das linguagens naturais como o inglês como modificadores sentenciais" (MÜLLER, 2011, p. 325).

Prior, contudo, não foi o primeiro a abordar o tempo na lógica. Inclusive, uma motivação adicional para os estudos de Prior foi retomar problemas já levantados por filósofos antigos e medievais. Uma das primeiras abordagens do tempo na lógica remonta a Aristóteles, que em sua obra *Da Interpretação*, formula o problema dos futuros contingentes em seu conhecido exemplo da 'batalha naval amanhã'.

O problema dos futuros contingentes diz respeito à atribuição de valor de verdade a sentenças que falam sobre o futuro. A formulação do problema por Aristóteles é simples: se eu digo hoje que 'haverá uma batalha naval amanhã', esta sentença é hoje verdadeira ou falsa? A investigação de Aristóteles parte do princípio de bivalência, que é o princípio que diz que há apenas duas possibilidades para uma sentença: ou ela é verdadeira ou é falsa. Se o que a sentença enuncia ocorre, ela é verdadeira, se não, ela é falsa. Para Aristóteles, é fácil ver que o princípio de bivalência vale adequadamente para proposições sobre o presente e sobre o passado: "A respeito das coisas que são ou que já foram, é necessário que a afirmação (ou a negação) seja verdadeira ou falsa." (ARISTÓTELES, 2013, 18a 28-29). Ou seja, para Aristóteles o que aconteceu no passado é necessário, não é possível mudar. Portanto,

[6] Uma apresentação introdutória destas questões pode ser vista em Rovelli, 2018.

qualquer afirmação sobre o passado é necessariamente verdadeira ou necessariamente falsa.

Contudo, isso não vale para sentenças sobre o futuro, pois nos deparamos com um problema. Vamos supor que amanhã não aconteça uma batalha naval. Nesse caso, a sentença 'haverá uma batalha naval amanhã' é hoje falsa. Mas se a sentença é falsa, então ela se tornará necessariamente falsa. O mesmo vale se supormos que amanhã haverá uma batalha naval. Nesse caso, sempre foi necessariamente verdade que 'haverá uma batalha naval amanhã'. Mas se uma sentença sobre o futuro é necessariamente verdadeira ou falsa, então o futuro parece já estar determinado: o que acontece ou não acontece já iria, de qualquer forma, acontecer ou não acontecer.

A estratégia de Aristóteles para resolver este problema foi tratar das sentenças sobre o futuro de modo diferente que as demais. Para o autor, as duas sentenças 'haverá uma batalha naval amanhã' e 'não haverá uma batalha naval amanhã' não podem ser possíveis ao mesmo tempo:

> Necessariamente, tudo é ou não é, e será ou não será. Em verdade, não é em dividir que se pode dizer que uma das duas alternativas é necessária. Digo, por exemplo, que, necessariamente, acontecerá uma batalha naval amanhã ou não acontecerá; em verdade, nem acontecerá necessariamente a batalha naval amanhã, nem necessariamente não acontecerá. Todavia, acontecerá ou não acontecerá necessariamente. (ARISTÓTELES, 2013, 9, 19a, 25-35)

Com isso, não é necessário agora que o futuro já esteja determinado. Para Aristóteles o que ocorre é que:

Necessariamente (haverá ou não haverá uma batalha naval amanhã).

Mas o seguinte não ocorre:

(Necessariamente haverá uma batalha naval amanhã) ou
(Necessariamente não haverá uma batalha naval amanhã).

Ou seja, o que é necessário é simplesmente que uma das duas opções aconteça: que haja ou não haja. Mas qual das duas irá ocorrer não é algo que já está determinado.

Embora os antigos tenham se ocupado de problemas como este dos futuros contingentes, o desenvolvimento da lógica formal que se deu a partir do século XIX parece ter se esquecido do tempo. Em parte porque a lógica formal surge como uma tentativa de fundamentação da matemática. Na matemática, entretanto, o tempo não é um aspecto que determina a validade. Proposições matemáticas não mudam seu valor de verdade de acordo com o tempo em que são enunciadas. Dizer que "hoje 1 mais 1 é igual a 2", "amanhã 1 mais 1 será igual a 2" ou que "ontem 1 mais 1 era igual a 2" são todas proposições verdadeiras. Por isso, a lógica desenvolvida a partir do final do século XIX, também chamada 'lógica clássica', surge com uma linguagem formal que abstrai o tempo verbal das proposições, formalizando-as todas no presente.

A lógica clássica é composta por uma linguagem formal, na qual argumentos da linguagem natural podem ser traduzidos e uma relação de consequência lógica pode ser definida. Prior percebeu que alguns argumentos que consideramos válidos (ou inválidos) na linguagem natural, quando formalizados na linguagem da lógica clássica acabam deixando de ser válidos (ou inválidos). Veja, por exemplo, o argumento:

Exemplo 2.1

> Se Pedro é bibliotecário, então ele trabalha em uma biblioteca.
> Pedro foi bibliotecário.
> Logo, Pedro trabalha em uma biblioteca.

Intuitivamente diríamos que este é um argumento inválido: se Pedro *foi* bibliotecário, não significa que ele ainda seja e que esteja trabalhando em uma biblioteca agora. Este argumento seria válido apenas se na segunda premissa tivéssemos que 'Pedro *é* bibliotecário'. Mas se formos formalizar este argumento na linguagem do Cálculo Proposicional Clássico (CPC) ele acabaria se tornando válido. Vamos, a seguir, apresentar a linguagem do CPC a fim de ver que este é de fato o caso.

Definição 2.1 O *alfabeto proposicional clássico* é o conjunto de símbolos $A = \{p,\ q,\ r,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ \ldots,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ ),\ (\}$, onde:

i) $\{p,\ q,\ r,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ \ldots\}$ forma um conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais

ii) $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$ são operadores lógicos, respectivamente da negação, conjunção, disjunção, implicação e bi-implicação, onde $\neg$ é dito um operador unário e $\wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$ são ditos operadores binários.

iii)) e (são sinais de pontuação.

Definição 2.2 A *linguagem formal* L sobre A é um conjunto de sequências finitas dos símbolos de A que satisfazem as seguintes condições:

i) se $\alpha \in \{p,\ q,\ r,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ \dots\}$ então $\alpha \in L$

ii) se $\alpha \in L$ e Δ é um operador unário, então $\Delta\alpha \in L$

iii) se $\alpha \in L$ e $\beta \in L$ e Δ é um operador binário, então $(\alpha\Delta\beta) \in L$

iv) qualquer elemento de L é uma fórmula de L

v) nada mais é fórmula.

Chamamos as fórmulas com ocorrência apenas de variáveis proposicionais de fórmulas atômicas, e as fórmulas onde ocorrem operadores lógicos de fórmulas moleculares. Adotaremos como convenções notacionais:

1. Em fórmulas do tipo $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ omitiremos o par de parênteses externo.

2. As sequências de implicações escritas sem parênteses, da forma: $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n$ são abreviações de: $(((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \rightarrow \alpha_3) \rightarrow \dots) \rightarrow \alpha_n$.

Dada esta linguagem, podemos formalizar argumentos da linguagem natural e verificar se sua conclusão é consequência lógica das premissas [7]. Para formalizar o argumento do exemplo anterior vamos escolher a variável proposicional p para 'Pedro é bibliotecário' e a variável proposicional q, para 'Pedro trabalha em uma biblioteca'. O argumento formalizado fica da seguinte forma:

Exemplo 2.2

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

[7] Essa relação de consequência lógica pode ser definida semântica ou sintaticamente. Não apresentaremos, neste momento, as definições de consequência lógica para o CPC, visto não ser o nosso propósito fazer uma apresentação completa da lógica clássica, mas apenas apontar como surge o problema da formalização do tempo na lógica. Para uma abordagem mais completa da lógica clássica, ver: Elliott Mendelson (1997).

Onde o símbolo $\therefore$ indica a conclusão. Podemos ver que a formalização do argumento abstrai o tempo verbal das frases formalizando todas no presente. No Cálculo Proposicional Clássico isto resulta em uma forma de argumento válida, contrariando nossa intuição inicial de invalidade (que a conclusão se segue validamente das premissas pode ser visto utilizando-se a regra *Modus Ponens*. Esta regra será vista mais adiante, ao falarmos dos sistemas de lógica temporal.).

Frente a problemas como esse e a fim de retomar discussões antigas sobre o tempo na lógica, Arthur Prior passa a se dedicar ao desenvolvimento de sistemas lógicos temporais e publica, em 1957, o livro *Time and Modality*. Este livro consiste em um compilado de palestras proferidas pelo autor onde aborda a formalização de tempos verbais por meio de uma lógica que introduz novos operadores lógicos à linguagem, que capturam a noção de passado e futuro.

Vamos, na sequência, apresentar a linguagem da lógica temporal e uma semântica para esta linguagem. Em seguida, apresentaremos um dos sistemas mais simples de lógica temporal a fim de compreender alguns conceitos importantes. Usaremos a compreensão destes conceitos e os resultados demonstrados sobre este sistema como base para a apresentação do sistema para a Teoria da Relatividade Restrita, mais adiante.

2.1 A LINGUAGEM DA LÓGICA TEMPORAL

A linguagem temporal que apresentaremos aqui é uma extensão da linguagem do CPC, onde introduzimos novos operadores lógicos que representam o passado e o futuro das sentenças. Os operadores primitivos são dois: P, que pode ser lido como "foi o caso que"; e F, que pode ser lido como "será o caso que". Sendo assim, um alfabeto temporal A_t pode ser obtido simplesmente acrescentando ao conjunto A da lógica proposicional clássica os operadores unários F e P, ou seja, $A_t = A \cup \{F,\ P\}$. Portanto, seja a linguagem temporal L_t a linguagem formada a partir de do alfabeto A_t, a definição de fórmulas de L_t permanece a mesma dada na definição 2.2, pois sendo F e P operadores unários, então se α é uma fórmula de L_t, então $F\alpha$ e $P\alpha$ também são fórmulas.

Podemos ainda introduzir novos operadores temporais a partir dos operadores F e P, através de algumas convenções notacionais, que facilitarão a escrita de algumas fórmulas. Para a linguagem L_t manteremos a convenção notacional de que quando uma fórmula começa com '(' e termina com ')' podemos omitir esse par de parênteses, e acrescentaremos ainda:

i) $G\alpha$ abrevia $\neg F \neg \alpha$.

ii) $H\alpha$ abrevia $\neg P \neg \alpha$.

Dessa forma, G e H são operadores definidos a partir dos operadores primitivos F e P. Informalmente, $F\alpha$ significa que α será verdadeiro em algum instante no futuro. Podemos obter a fórmula contraditória a $F\alpha$ acrescentando a ela uma negação, obtendo $\neg F\alpha$ (não será o caso que α). Podemos ainda acrescentar outra negação a esta fórmula, logo após o operador F, obtendo $\neg F \neg \alpha$, onde se lê: "nunca será o caso que α não ocorre", o que é equivalente a dizer que sempre será o caso que α ocorre. O operador temporal representado pela letra G captura o sentido de "sempre será o caso que", que é equivalente a $\neg F \neg \alpha$. Por definição, se α é uma fórmula, então $G\alpha$ também é uma fórmula. $G\alpha$ significa que α é verdadeiro em todos os instantes do futuro.

Informalmente, $P\alpha$ significa que α foi verdadeiro em algum instante do passado. Podemos obter a fórmula contraditória a $P\alpha$ acrescentando a esta uma negação, obtendo $\neg P\alpha$ (não foi o caso que α). Podemos ainda acrescentar outra negação a esta fórmula, logo após o operador P, obtendo $\neg P \neg \alpha$, onde se lê: "nunca foi o caso que α não ocorre", que é equivalente a dizer "sempre foi o caso que α". O operador temporal representado pela letra H captura o sentido de "sempre foi o caso que", que é equivalente a $\neg P \neg \alpha$. Por definição, se α é uma fórmula, então $H\alpha$ também é fórmula. $H\alpha$ significa que α é verdadeiro em todos os instantes do passado.

Apresentada a linguagem L_t podemos retornar ao exemplo 2.1 dado anteriormente e formalizá-lo utilizando operadores temporais adequados. Podemos agora representar a premissa "Pedro foi bibliotecário" (para a qual havíamos escolhido a notação p), de modo a preservar na formalização a ideia inicial de que a sentença está no tempo passado, utilizando o operador P, obtendo Pp. O argumento completo pode ser formalizado da forma:

Exemplo 2.3

$$\begin{gathered} p \rightarrow q \\ Pp \\ \therefore q \end{gathered}$$

Nesta formalização temos: se Pedro é bibliotecário, então ele trabalha em uma biblioteca; foi o caso que Pedro é bibliotecário; logo, Pedro trabalha em uma biblioteca. Esta é uma forma de argumento inválida [8] na lógica temporal, como havíamos inicialmente sugerido.

A lógica temporal, portanto, utiliza normalmente quatro operadores lógicos para o tempo: F e P, e os operadores que destes derivam, G e H. Estes operadores, diferentemente dos operadores do cálculo proposicional clássico ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\leftrightarrow$), não são funções de verdade, ou seja, seu valor de verdade não pode ser definido a partir do valor de verdade das fórmulas às quais eles se aplicam. Sendo assim, a semântica para os operadores temporais não pode ser feita da mesma forma como no cálculo proposicional clássico, utilizando-se tabelas de verdade, por exemplo. Se a fórmula α é verdadeira neste momento, isso não nos garante que ela foi verdadeira no passado ou que será verdadeira no futuro. Portanto, atribuir um valor de verdade para $F\alpha$ ou $P\alpha$ apenas a partir da fórmula α não é possível. A solução para isso é adotar uma nova interpretação semântica para lógica temporal. Veremos, na seção seguinte, como isso é feito.

2.2 UMA SEMÂNTICA PARA A LINGUAGEM TEMPORAL

Para fazer uma semântica para a linguagem temporal precisaremos falar em 'estruturas temporais'. Uma estrutura temporal é um par ordenado com um conjunto de instantes de tempo e uma relação de ordenação entre tais instantes. Dada uma estrutura temporal, podemos definir o valor de verdade das fórmulas de L_t e, com isso, definir o conceito de fórmula válida de L_t . Formalmente:

Definição 2.3 Uma *estrutura temporal* (ou simplesmente estrutura) E é um par ordenado $E = \langle T, \prec \rangle$ onde T é um conjunto não vazio e $\prec \subseteq T \times T$.

Intuitivamente podemos entender os elementos de T como os instantes de tempo e $\prec$ como a relação de ordenação entre esses instantes. Designaremos os elementos de T por $t, t', t'', \ldots$. Se t' e t'' são dois elementos do conjunto T e $\langle t', t'' \rangle \in \prec$, esta relação pode ser entendida como 'o instante t' é anterior ao instante t''' ou 'o instante t'' está no

[8] Ainda não definimos o que é um argumento válido na lógica temporal, pois diferentes lógicas temporais darão origem a diferentes conjuntos de fórmulas válidas. Isso será visto na próxima seção. Contudo, a forma do argumento do exemplo é inválida no sistema a ser apresentado adiante, como pode ser visto no exemplo 2.4.

futuro de t''. Para tornar a leitura mais fácil, vamos abreviar $\langle t', t'' \rangle \in \prec$ como $t' \prec t''$, e $\langle t', t'' \rangle \notin \prec$ como $t' \not\prec t''$.

Note que ao definir uma estrutura estamos especificando, basicamente, quais instantes temos e como eles estão ordenados entre si. Em geral, espera-se que uma estrutura temporal capture a nossa ideia de como é o tempo. Se quisermos representar que o tempo teve um início o conjunto T deve possuir um elemento mínimo, dada a relação $\prec$ que o ordena; se quisermos representar um tempo discreto a relação $\prec$ deve ser uma relação discreta. Enfim, há infinitas estruturas possíveis, podemos especificar uma estrutura temporal o quanto quisermos e cada estrutura irá gerar um conjunto diferente de fórmulas válidas (veremos a definição de fórmula válida mais adiante).

Na lógica temporal não falamos mais de fórmulas verdadeiras, simplesmente, mas de fórmulas verdadeiras em um determinado instante de uma estrutura. O valor de verdade das fórmulas passa a ser relativizado a instantes, e o que irá determinar quais fórmulas são consequências lógicas de algum conjunto de fórmulas é o modo como tais instantes estão ordenados. Para compreender como é feita a atribuição de valor de verdade às fórmulas da lógica temporal precisamos compreender como as valorações se relacionam com as estruturas temporais.

Na lógica temporal uma valoração v é uma função que atribui a cada fórmula atômica (a cada variável proposicional) um valor de verdade (verdadeiro ou falso) em um instante de tempo, ou seja, $v : ATOM \times T \longrightarrow \{1, 0\}$, onde $ATOM$ é o conjunto das fórmulas atômicas da linguagem, T é o conjunto de instantes de uma estrutura e $\{1, 0\}$ representa os valores de verdade, respectivamente o verdadeiro e o falso. Desse modo, se uma fórmula α é verdadeira em um instante t que pertence ao conjunto T, escrevemos $v(\alpha, t) = 1$, e se é falsa, escrevemos $v(\alpha, t) = 0$. A atribuição de valor de verdade a fórmulas em que ocorrem operadores temporais vai depender justamente da relação $\prec$. As condições para atribuição de valor de verdade às fórmulas moleculares são dadas a seguir.

Definição 2.4 Seja uma estrutura $E = \langle T, \prec \rangle$ e α e β duas fórmulas de L_t, a *valoração* atribuída a cada fórmula da linguagem é definida da seguinte forma:

1. $v(\neg\alpha, t) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 0$
2. $v(\alpha \to \beta, t) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 0$ ou $v(\beta, t) = 1$
3. $v(\alpha \wedge \beta, t) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$ e $v(\beta, t) = 1$
4. $v(\alpha \vee \beta, t) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$ ou $v(\beta, t) = 1$

5. $v(\alpha \leftrightarrow \beta, t) = 1$ sse $v(\alpha, t) = v(\beta, t)$

6. $v(F\alpha, t) = 1$ sse há um instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $v(\alpha, t') = 1$

7. $v(P\alpha, t) = 1$ sse há um instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ e $v(\alpha, t') = 1$

Como estamos usando as expressões $G\alpha$ para abreviar $\neg F \neg \alpha$ e $H\alpha$ para abreviar $\neg P \neg \alpha$, temos que:

a) $v(G\alpha, t) = 1$ sse para todo $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ $v(\alpha, t') = 1$

b) $v(H\alpha, t) = 1$ sse para todo $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ $v(\alpha, t') = 1$

Podemos nos referir as estruturas acrescidas de valorações como modelos temporais:

Definição 2.5 Um *modelo temporal* (ou simplesmente modelo) M é um par ordenado $M = \langle E, v \rangle$, onde E é uma estrutura e v é uma valoração.

Um modelo $M = \langle E, v \rangle$, é sempre baseado em uma estrutura $E = \langle T, \prec \rangle$, acrescida de uma valoração. Por isso também podemos entender um modelo como uma tripla ordenada $M = \langle T, \prec, v \rangle$.

Visto isso, podemos entender as noções de consequência lógica semântica e fórmula válida na lógica temporal. Começaremos com as noções de fórmula válida:

Definição 2.6 Seja α uma fórmula, a *validade* de α é definida do seguinte modo:

1. α é *válida em um modelo* $M = \langle T, \prec, v \rangle$ (em símbolos $\vDash_M \alpha$) sse para todo instante $t \in T$, $v(\alpha, t) = 1$. Se há ao menos um instante $t \in T$ em que α é falsa então α é inválida no modelo M, e escrevemos $\nvDash_M \alpha$.

2. α é *válida em uma estrutura* $E = \langle T, \prec \rangle$ (em símbolos $\vDash_E \alpha$) sse α é válida em todo modelo baseado em nesta estrutura. Se há ao menos um modelo baseado em E em que α é inválida então α não é válida na estrutura E, e escrevemos $\nvDash_E \alpha$.

3. α é *válida em uma classe de estruturas* K (em símbolos $\vDash_K \alpha$) sse α é válida em toda estrutura que pertence a K. Se há ao menos uma estrutura $E \in K$ em que α é inválida então α não é válida na classe K, e escrevemos $\nvDash_K \alpha$.

4. α é *válida em uma classe de modelos* C (em símbolos $\vDash_C \alpha$) sse α é válida em todo modelo que pertence a C. Se há ao menos um modelo $M \in C$ em que α é inválida então α não é válida na classe C, e escrevemos $\nvDash_C \alpha$.

Também podemos estabelecer uma relação de consequência lógica semântica entre um conjunto de fórmulas e uma fórmula da linguagem temporal – o que é interessante para analisar argumentos da linguagem natural, quando temos um conjunto de premissas e uma conclusão a verificar.

Definição 2.7 Seja α uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas, a relação de *consequência lógica semântica* é definida da seguinte forma:

1. α é consequência lógica semântica de Γ em um *modelo* $M = \langle T, \prec, v\rangle$ (em símbolos $\Gamma \vDash_M \alpha$) sse para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$ e todo instante $t \in T$, se $v(\gamma, t) = 1$ então $v(\alpha, t) = 1$. Se há ao menos um instante $t \in T$ tal que para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$ $v(\gamma, t) = 1$ e $v(\alpha, t) = 0$ então α não é consequência lógica de Γ no modelo M, e escrevemos $\Gamma \nvDash_M \alpha$.

2. α é consequência lógica semântica de Γ em uma *estrutura* $E = \langle T, \prec\rangle$ (em símbolos $\Gamma \vDash_E \alpha$) sse α é consequência lógica de Γ em todo modelo baseado nesta estrutura. Se há ao menos um modelo baseado em E em que α não é consequência lógica de Γ então α não é consequência de Γ na estrutura E, e escrevemos $\Gamma \nvDash_E \alpha$.

3. α é consequência lógica semântica de Γ em uma *classe de estrutura* K (em símbolos $\Gamma \vDash_K \alpha$) sse α é consequência lógica de Γ em toda estrutura que pertence a K. Se há ao menos uma estrutura $E \in K$ em que α não é consequência de Γ, então α não é consequência de Γ na classe K, e escrevemos $\Gamma \nvDash_K \alpha$.

4. α é consequência lógica semântica de Γ em uma *classe de modelos* C (em símbolos $\Gamma \vDash_C \alpha$) sse α é consequência lógica de Γ em todo modelo que pertence a C. Se há ao menos um modelo $M \in C$ em que α não é consequência de Γ, então α não é consequência de Γ na classe C, e escrevemos $\Gamma \nvDash_C \alpha$.

Perceba que para α ser válida em uma classe de estruturas K, α deve ser válida em todo modelo M baseado em qualquer estrutura $E \in K$. Em geral, pretendemos que uma classe de estruturas contenha as estruturas que refletem a ideia de tempo que queremos capturar. Por exemplo, se temos a ideia de que os instantes de tempo estão organizados de forma transitiva, podemos falar da classe de todas as estruturas transitivas. Assim, as estruturas que pertencerão a esta classe serão aquelas cuja relação $\prec$ é transitiva. Se tomarmos o conjunto de todos os modelos que podem ser baseados nestas estruturas, obteremos a classe dos modelos transitivos. Dado isso, uma fórmula será válida na classe de todas as estruturas K-transitivas se e somente se for válida na classe de todos os modelos M-transitivos. De modo geral, uma fórmula α é válida na classe das p-estruturas se e somente se α é válida na classe dos p-modelos, onde p é uma propriedade da relação $\prec$.

Podemos, inclusive, falar da classe de todas as estruturas temporais. Nesse caso, as fórmulas válidas nessa classe seriam aquelas válidas em qualquer estrutura. Vamos chamar esta classe de todas as estruturas de K_0. E vamos chamar de C_0 a classe de todos os modelos temporais. Dessa forma, as fórmulas válidas nestas classes serão aquelas válidas em qualquer classe, independentemente da relação $\prec$. Isso dá origem ao menor conjunto possível de fórmulas válidas (seguindo a semântica que estamos usando aqui, é claro). Por serem K_0 e C_0 as classes mais simples possíveis (sequer estabelecemos alguma propriedade para a relação $\prec$), usaremos elas para demonstrar alguns resultados importantes das lógicas temporais nas próximas seções. Tendo demonstrado esses resultados, poderemos usá-los como base para provas futuras.

Um método para decidir se uma fórmula α é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ em uma estrutura qualquer E consiste em supor que $v(\gamma, t) = 1$, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, e $v(\alpha, t) = 0$ e chegar a uma contradição. Como só há duas possibilidades para o valor de verdade de uma fórmula – verdadeiro ou falso – se ao supor que $v(\alpha, t) = 0$ chegamos a uma contradição, concluímos que $v(\alpha, t) = 1$, e que, portanto, $\Gamma \vDash_E \alpha$. No caso de α não ser consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ podemos verificar demonstrando um modelo que faz as fórmulas $\gamma \in \Gamma$ verdadeiras em um instante t e α falsa no mesmo instante t. Vamos ver como isto funciona testando o argumento dado no exemplo 2.1 e verificando que trata-se, de fato, de uma inferência inválida.

O exemplo dizia: "Se Pedro é bibliotecário, então Pedro trabalha em uma biblioteca. Pedro foi bibliotecário. Logo, Pedro trabalha em uma biblioteca". Usando a linguagem temporal para formalizar este exemplo, vamos verificar se é válido que $\{p \to q,\ Pp\} \vDash_E q$.

Exemplo 2.4

Seja o modelo $M = \langle T, \prec, v\rangle$, onde $T = \{t,\ t'\}$, $\prec = \{\langle t',\ t\rangle\}$, $v(p,t) = 0$, $v(p,t') = 1$ $v(q,t) = 0$. Seguindo a definição 2.4, temos $v(p \to q, t) = 1$, $v(Pp, t) = 1$ e $v(q,t) = 0$. Portanto, $\{p \to q,\ Pp\} \not\vDash_E q$.

2.3 O SISTEMA K_T

Veremos, na sequência, como definir a noção de consequência lógica em L_t de uma maneira sintática, ou seja, de maneira a definir que fórmulas são consequência lógica de determinados conjuntos de fórmulas com base apenas em operações com os símbolos (sem interpretar as fórmulas como verdadeiras ou falsas). A noção sintática de consequência lógica pode ser apresentada introduzindo-se um sistema formal [9]. Um sistema formal será aqui entendido simplesmente como um conjunto de fórmulas contendo alguns axiomas como elementos iniciais e fechado sob certas regras. Vamos entender o que isso significa.

Os axiomas de um sistema formal são fórmulas da linguagem aceitas sem demonstração e escolhidas como ponto de partida do sistema. Uma regra de inferência é uma relação entre um conjunto de fórmulas e uma fórmula. Ou seja, uma regra é um par $\langle\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \beta\rangle$, onde as fórmulas do conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ são as premissas da regra, e a fórmula β é a conclusão da regra. Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é fechado por deduções se tudo que for deduzido das fórmulas de Γ ainda pertence a Γ (DA COSTA. 2015, p. 15). Todas as fórmulas que pertencem a um conjunto de fórmulas Γ fechado por deduções são chamadas de teoremas de Γ. Uma lógica é, então, um conjunto de teoremas[10] identificado por axiomas iniciais e regras de inferência.

Embora ao apresentar um sistema formal estejamos interessados apenas nas noções sintáticas, ou seja, na noção de consequência lógica apenas enquanto uma manipulação de símbolos, isso não significa que na escolha dos axiomas de um sistema não tenhamos nenhuma inter-

[9] Usamos os termos 'sistema formal', 'sistema lógico' ou simplesmente 'lógica' no mesmo sentido.

[10] A palavra 'teorema' é vista neste texto em dois sentidos diferentes: teorema enquanto uma fórmula que pertence a um sistema formal; e teorema metateórico, que são resultados que podem ser provados sobre os sistemas formais. Por exemplo: a fórmula $p \to p$ é um teorema da lógica proposicional clássica (e das lógicas temporais que tomam o CPC como base). Já a afirmação: 'se uma fórmula é dedutível de um conjunto fórmulas Γ então esta fórmula é dedutível de $\Gamma \cup \Delta$' é um teorema sobre um sistema formal, ou um metateorema, que demonstra alguma propriedade do sistema – esta, no caso, é chamada de 'monotonicidade'. Os metateoremas serão apresentados de forma numerada ao longo do texto, portanto esta distinção ficará clara.

pretação das fórmulas em mente. Nós poderíamos, a princípio, escolher qualquer conjunto de fórmulas como axiomas de um sistema. Contudo, nossa escolha dos axiomas, em geral, é motivada pelo interesse de que as fórmulas que escolhemos sejam válidas, segundo algum critério de validade que tenhamos em mente. Com o sistema que vamos apresentar a seguir pretendemos que os teoremas sejam válidos segundo a classe de modelos C_0 da qual falamos na seção anterior. O sistema que vamos apresentar a seguir é chamado $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$. Os axiomas e regras de $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ são os mesmos apresentados por Burgess (2002, p. 4) .

Axioma LP: α, tal que α é uma instância de tautologia da lógica proposicional clássica

Axioma $\mathbf{K}_{\boldsymbol{f}}$: $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$

Axioma $\mathbf{K}_{\boldsymbol{p}}$: $H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$

Axioma GP: $\alpha \to GP\alpha$

Axioma HF: $\alpha \to HF\alpha$

E as regras de $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ são:

MP(*Modus Ponens*): $\langle\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \beta\rangle$

GT(Generalização Temporal): $\langle\alpha, G\alpha\rangle$ e $\langle\alpha, H\alpha\rangle$, tal que α é um teorema.

A rigor, deveríamos nos referir aos axiomas apresentados enquanto 'esquemas de axiomas'. Dessa forma teríamos 5 esquemas de axiomas que dão origem a infinitas instâncias de axiomas, obtidas a partir da substituição das fórmulas α e β por fórmulas da linguagem L_t. A fim de facilitar a leitura deste texto, continuaremos usando simplesmente 'axiomas' quando esta distinção não for fundamental.

O axioma LP e a regra de *Modus Ponens* garantem que $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ é uma extensão da Lógica Proposicional Clássica. Assim, se uma fórmula é um teorema no Cálculo Proposicional Clássico, é também em $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$. Se uma lógica temporal possui os axiomas LP, K_f, K_p, GP e HF e é fechada sob as regras MP e GT, então esta lógica é chamada de 'normal'. Dessa forma, o sistema $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ é a menor lógica temporal normal.

Podemos agora definir o que é uma prova (ou derivação/dedução) de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas em um sistema formal.

Definição 2.8 Uma fórmula α é um *teorema* de um sistema formal **F** (em símbolos $\vdash_F \alpha$) sse α pertence a **F**. Uma fórmula α é *dedutível (derivável)* de um conjunto de fórmulas Γ em um sistema formal **F** (em símbolos $\Gamma \vdash_F \alpha$) sse há uma sequência de fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_1 \to \cdots \to \gamma_n \to \alpha$ é um teorema de **F**, ou seja, $\vdash_F \gamma_1 \to \cdots \to \gamma_n \to \alpha$.

Se uma fórmula α não é teorema de um sistema formal **F**, escrevemos $\nvdash_F \alpha$. Se α não é consequência lógica de Γ em um sistema **F**, escrevemos $\Gamma \nvdash_F \alpha$. Dizer que α é um teorema em um sistema **F** é equivalente a dizer que α é dedutível do conjunto vazio ($\emptyset \vdash_F \alpha$).

A demonstração de um teorema em $\mathbf{K_t}$ pode ser feita na forma de uma tabela com três colunas: na primeira coluna enumeramos todas as linhas da demonstração; na segunda coluna listamos as fórmulas usadas na demonstração; e na terceira coluna informamos qual axioma ou regra de inferência foi usada para obter a fórmula. Vamos visualizar isto com um exemplo, demonstrando que $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash_{K_t} \alpha \to \gamma$. Esta é uma propriedade das lógicas fechadas por MP, que é conhecida como transitividade.

1.	$\alpha \to \beta$	Premissa
2.	$\beta \to \gamma$	Premissa
3.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	Axioma LP
4.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	MP nas linhas 2 e 3
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	Axioma LP
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	MP nas linhas 4 e 5
7.	$\alpha \to \gamma$	MP nas linhas 1 e 6

Quando um teorema é demonstrado em um sistema formal, podemos introduzir um novo esquema de regra de inferência com base nessa derivação que poderá ser usado em outras provas. Vamos, portanto, introduzir a regra:

SH (Silogismo Hipotético): $\langle\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}, \alpha \to \gamma\rangle$

Outras duas regras derivadas serão importantes para demonstrações futuras. Mostraremos a seguir que $\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash_{K_t} \neg\alpha$ e que $\neg\neg\alpha \vdash_{K_t} \alpha$.

1.	$\alpha \to \beta$	Premissa
2.	$\neg\beta$	Premissa
3.	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	Axioma LP
4.	$(\neg\beta \to \neg\alpha)$	MP nas linhas 1 e 3
5.	$\neg\alpha$	MP nas linhas 2 e 4

A partir dessa prova vamos introduzir a regra:

MT (*Modus Tollens*): $\langle\{\alpha \to \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha\rangle$

1.	$\neg\neg\alpha$	Premissa
2.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	Axioma LP
3.	α	MP nas linhas 1 e 2

A partir dessa prova vamos introduzir a regra:

DN (Dupla Negação): $\langle\neg\neg\alpha, \alpha\rangle$

Da definição de prova em um sistema formal seguem alguns resultados interessantes. Um deles é conhecido como Teorema da Dedução (TD). O Teorema da Dedução diz que uma fórmula β é dedutível de um conjunto de fórmulas Γ unido ao conjunto $\{\alpha\}$ se e somente se a fórmula $\alpha \to \beta$ é dedutível do conjunto Γ. Ou formalmente:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_F \beta \text{ sse } \Gamma \vdash_F \alpha \to \beta$$

A prova deste metateorema é bem simples quando estamos utilizando o cálculo proposicional clássico. Porém, a prova do Teorema da Dedução para a lógica temporal é um tanto mais complicada e demandaria uma demonstração demasiadamente longa, fugindo ao escopo deste trabalho, por isso esta prova não será feita aqui. O leitor pode encontrar a demonstração deste metateorema em Buvac (2003, pp 107-115) e Hakli (2010, pp 8-14)[11].

Outro resultado interessante que segue da definição de prova em um sistema formal é que qualquer fórmula que pode ser provada a partir de um conjunto de fórmulas (ou um conjunto vazio) também pode ser provada em qualquer extensão desse conjunto (ZALTA, 1995, p. 52). Vamos apresentar isto formalmente, na sequência, a fim de usar esse resultado em demonstrações futuras.

[11] A prova de Buvac utiliza o método de dedução rotulada e a prova de Hakli utiliza o método de cálculo de sequentes. Ambas as provas são feitas para a lógica modal alética, mas uma prova para a lógica temporal seguiria os mesmos passos, apenas trocando as ocorrências do operador $\Box$ pelos operadores temporais G e H, e fazendo as demais adequações necessárias para a lógica temporal.

Teorema 2.1 Seja α uma fórmula, Γ e Δ dois conjuntos de fórmulas e **F** um sistema formal. Se $\Gamma \vdash_F \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash_F \alpha$.

Prova: Se $\Gamma \vdash_F \alpha$ então existe uma sequência de fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_F \gamma_1 \to \cdots \to \gamma_n \to \alpha$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$ então $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$. Pela definição de dedução, se $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$ e $\vdash_F \gamma_1 \to \cdots \to \gamma_n \to \alpha$, então $\Delta \vdash_F \alpha$.

Um outro metateorema sobre lógicas temporais normais diz que se uma sequência de implicações do tipo $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$ é um teorema em um sistema formal normal, então as sequências de implicações com as generalizações temporais $G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$ e $H\alpha_1 \to \cdots \to H\alpha_n \to H\alpha$ também são. Vamos apresentar isso formalmente, na sequência, a fim de também usar este resultado em demonstrações futuras. Esta demonstração é baseada em Zalta (1995, p. 87).

Teorema 2.2 Seja **F** uma lógica temporal normal:
1. se $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$ então $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$
2. se $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$ então $\vdash_F H\alpha_1 \to \cdots \to H\alpha_n \to H\alpha$.

Prova: 1. A prova é feita por indução no número de fórmulas da sequência $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$.
Base: n = 0
Temos que mostrar que se $\vdash_F \alpha$ então $\vdash_F G\alpha$. Isto se segue diretamente da regra GT, e como **F** é um sistema normal então **F** é fechado sob esta regra. Portanto, o teorema vale para n = 0.
Hipótese da Indução (HI): O teorema vale para $n-1$, ou seja, se $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_{n-1} \to \beta$ então $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_{n-1} \to G\beta$.
Vamos assumir que $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$, disto segue-se, por HI, que $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_{n-1} \to G(\alpha_n \to \alpha)$. Como **F** é uma lógica temporal normal então **F** contém a instância do axioma K_f: $\vdash_F G(\alpha_n \to \alpha) \to (G\alpha_n \to G\alpha)$.
Se $\vdash_F [G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_{n-1}] \to [G(\alpha_n \to \alpha)]$ e
$\vdash_F [G(\alpha_n \to \alpha)] \to [(G\alpha_n \to G\alpha)]$, então, por SH
$\vdash_F [G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_{n-1}] \to [(G\alpha_n \to G\alpha)]$, ou seja
$\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$.

2. A prova para o operador H segue exatamente os mesmos passos, apenas substituindo as ocorrências de G por H.

As definições semânticas e sintáticas de consequência lógica podem não parecer, a princípio, diretamente relacionadas, mas podemos demonstrar que uma fórmula é semanticamente válida se e somente se é sintaticamente provável (um teorema). Isto é feito através de algumas provas chamadas 'metateóricas' sobre o sistema. Demonstraremos isto, na sequência, através das provas [12] de correção e completude do sistema $\mathbf{K_t}$.

2.3.1 Correção

Um sistema é correto em relação a uma classe de estruturas se e somente se toda fórmula que é teorema do sistema é válida nesta classe de estruturas, ou seja, para qualquer fórmula α, se $\vdash \alpha$ então $\vDash \alpha$. Vamos demonstrar, na sequência, que o sistema $\mathbf{K_t}$ é correto em relação à classe K_0 de todas as estruturas temporais. Para isso, precisaremos demonstrar que todos os axiomas de $\mathbf{K_t}$ são válidos em K_0 e que todas as regras de $\mathbf{K_t}$ preservam a validade das fórmulas em K_0. A demonstração dos axiomas K_f, K_p, GP e HF e das regras de inferência é simples e pode ser feita sem necessidade de qualquer definição ou lema prévio. A prova do axioma LP, contudo, necessita de mais passos. Parece intuitivo, a princípio, que qualquer instância de tautologia do Cálculo Proposicional Clássico seja válida em uma estrutura temporal, mas para demonstrar isso adequadamente precisamos provar alguns lemas primeiramente, o que faremos a seguir. Nossa demonstração para o axioma LP será baseada em Zalta (1995, pp. 18-23), e para os demais axiomas e regras de inferência, em Burgess [13] (2002, pp. 7-8).

Para provar que as instâncias de tautologias do CPC são válidas em qualquer estrutura temporal precisamos primeiramente distinguir o conjunto das instâncias de tautologias das demais fórmulas válidas. Faremos isso mostrando que as instâncias de tautologias da lógica temporal têm a mesma forma que as tautologias da Lógica Proposicional Clássica. Para isso, iremos tratar as fórmulas com ocorrência de operadores temporais, $(F\alpha, G\alpha, P\alpha, H\alpha)$ enquanto fórmulas atômicas. Por exemplo, na fórmula $F(q \to r) \vee \neg F(q \to r)$, $F(q \to r)$ será entendido

[12] Ao falar destes teoremas metateóricos usaremos as palavras 'prova' e 'demonstração' em um mesmo sentido (a fim de evitar muita repetição da mesma palavra e tornar a leitura deste texto mais fácil). Dessa forma, podemos falar em 'provar a completude' (ou qualquer outro metateorema) ou 'demonstrar a completude' de um sistema.

[13] Preferimos citar a referência às páginas dos textos em questão apenas no início da prova, ao invés de mencionar os autores durante toda a demonstração, a fim de tornar a leitura mais fácil. Daqui em diante, continuaremos mencionando as referências usadas em cada prova apenas no começo da demonstração, como fizemos aqui.

como uma variável proposicional, como p, por exemplo. Dessa forma, a fórmula $p \vee \neg p$ se parecerá como uma tautologia da lógica proposicional clássica. Poderemos então dizer que a fórmula $F(q \to r) \vee \neg F(q \to r)$ é uma instância de tautologia do CPC e conseguiremos a distinção destas fórmulas com o restante das fórmulas válidas da lógica temporal, como pretendido. Vamos, em seguida, ver como definir as fórmulas com ocorrência de operadores temporais enquanto um tipo de fórmula atômica.

Definição 2.9 uma fórmula α que pertence à linguagem L_t é uma *fórmula quase-atômica* se α é uma variável proposicional ou α é do tipo $G\beta$, $H\beta$, $F\beta$ ou $P\beta$, tal que $\beta \in L_t$. O conjunto das fórmulas quase-atômicas de L_t será chamado L_t^*. Usaremos γ^* para representar uma fórmula qualquer de L_t^*.

Definição 2.10 Uma *atribuição básica de valor de verdade* é uma função f^* das fórmulas de L_t^* em $\{1,\ 0\}$, ou seja, $f^* : \gamma^* \to \{1, 0\}$ tal que γ^* é uma fórmula de L_t^*.

Definição 2.11 Sejam α e β fórmulas de L_t e γ^* uma fórmula quase-atômica qualquer, uma *atribuição total de valor de verdade* é uma função f definida de L_t em $\{1,\ 0\}$, tal que:

1. $f(\gamma^*) = f^*(\gamma^*)$, para toda fórmula quase-atômica $\gamma^* \in L_t^*$.
2. $f(\neg\alpha) = 1$ sse $f(\alpha) = 0$
3. $f(\alpha \to \beta) = 1$ sse $f(\alpha) = 0$ ou $f(\beta) = 1$
4. $f(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $f(\alpha) = 1$ e $f(\beta) = 1$
5. $f(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $f(\alpha) = 1$ ou $f(\beta) = 1$
6. $f(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ sse $f(\alpha) = f(\beta)$

Dizemos que a atribuição de valor de verdade f estende f^*, ou é baseada em f^*.

Definição 2.12 Uma fórmula $\alpha \in L_t$ é uma *instância de tautologia* se e somente se, para qualquer atribuição total de valor de verdade f, $f(\alpha) = 1$.

Por exemplo, vamos mostrar que a fórmula $F(q \to r) \vee \neg F(q \to r)$ é uma instância de tautologia, conforme a definição. Sendo $F(q \to r)$ uma fórmula quase-atômica, então $f(F(q \to r)) = 1$ ou $f(F(q \to r)) =$

0. Se $f(F(q \to r)) = 1$ então já se segue da definição 2.11 que $f(F(q \to r) \vee \neg F(q \to r)) = 1$. Se $f(F(q \to r)) = 0$ então $f(\neg F(q \to r)) = 1$ e também se segue que $v(F(q \to r) \vee \neg F(q \to r)) = 1$. Logo, a fórmula é verdadeira em qualquer atribuição de valor de verdade e, portanto, é uma instância de tautologia, conforme definição. Agora vamos definir uma correspondência entre a atribuição de valor de verdade definida para as instâncias de tautologias e as valorações da lógica temporal.

Definição 2.13 Seja um modelo temporal $M = \langle T, \prec, v\rangle$, um instante $t \in T$ e uma fórmula quase-atômica $\gamma^* \in L_t^*$, uma *atribuição básica de valor de verdade determinada por* M *e* t é uma função f_t^* tal que $f_t^*(\gamma^*) = 1$ sse $v(\gamma^*, t) = 1$.

Da mesma forma como na definição 2.11, uma atribuição total de valor de verdade f_t estende f_t^* seguindo as mesmas cláusulas da definição 2.11, para qualquer fórmula $\alpha \in L_t$. Chamamos f_t de uma atribuição total de valor de verdade determinada por M e t.

Lema 2.1 Seja um modelo $M = \langle T, \prec, v\rangle$, um instante $t \in T$ e uma fórmula $\alpha \in L_t$, $f_t(\alpha) = 1$ sse [14] $v(\alpha, t) = 1$.

Prova: a prova é feita por indução sobre o número de operadores de α.

Base: $k = 0$
Se não ocorrem operadores em α então α é uma variável proposicional. Nesse caso, α é uma fórmula quase-atômica e, pela definição 2.13, $f_t^*(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$. Como a função f_t estende f_t^* seguindo as mesmas cláusulas da definição 2.11, então $f_t(\alpha) = f_t^*(\alpha)$. Logo, $f_t(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$.

Hipótese da Indução(HI): o lema 2.1 vale para $k - 1$.
Se o número de operadores de α é igual a k, então α é do tipo $F\beta$, $G\beta$, $P\beta$, $H\beta$, $\neg\beta$, $\beta \to \gamma$, $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$ ou $\beta \leftrightarrow \gamma$.

Suponha que α é do tipo $\boldsymbol{F\beta, G\beta, P\beta}$ ou $\boldsymbol{H\beta}$. Nesse caso, α é uma fórmula quase-atômica e, pela definição 2.13, $f_t^*(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$. Como a função f_t estende f_t^* seguindo as mesmas cláusulas da definição 2.11, então $f_t(\alpha) = f_t^*(\alpha)$. Logo, $f_t(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha, t) = 1$.

[14] Em provas do tipo 'A se e somente se B' ou simplesmente 'A sse B' precisaremos dividir a prova em duas etapas: se A então B, e se B então A. Por isso será comum durante as provas usarmos o símbolo '($\to$)', significando a primeira etapa da prova, e '($\leftarrow$)', significando a segunda etapa da prova.

Seja $\boldsymbol{\alpha = \neg\beta}$. ($\rightarrow$) Se $f_t(\neg\beta) = 1$ então $f_t(\beta) = 0$; disto segue-se por HI que $v(\beta, t) = 0$ e, portanto, $v(\neg\beta, t) = 1$. Logo, se $f_t(\neg\beta) = 1$ então $v(\neg\beta, t) = 1$. ($\leftarrow$) Agora suponha que $v(\neg\beta, t) = 1$, disto segue-se que $v(\beta, t) = 0$; com isso temos, por HI, que $f_t(\beta) = 0$ e, portanto, $f_t(\neg\beta) = 1$. Logo, se $v(\neg\beta, t) = 1$ então $f_t(\neg\beta) = 1$. Com isso mostramos que $f_t(\neg\beta) = 1$ sse $v(\neg\beta, t) = 1$.

Seja $\boldsymbol{\alpha = \beta \rightarrow \gamma}$. ($\rightarrow$) Se $f_t(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ então $f_t(\beta) = 0$ ou $f_t(\gamma) = 1$, disto segue-se por HI que $v(\beta, t) = 0$ ou $v(\gamma, t) = 1$. Se $v(\beta, t) = 0$ então $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$ e se $v(\gamma, t) = 1$ então também é o caso que $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$. Logo, se $f_t(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ então $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$. ($\leftarrow$) Agora suponha que $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$, disto segue-se que $v(\beta, t) = 0$ ou $v(\gamma, t) = 1$; com isso temos, por HI, que $f_t(\beta) = 0$ ou $f_t(\gamma) = 1$. Se $f_t(\beta) = 0$ então $f_t(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ e se $f_t(\gamma) = 1$ então $f_t(\beta \rightarrow \gamma) = 1$. Logo, se $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$ então $f_t(\gamma) = 1$. Com isso mostramos que $f_t(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ sse $v(\beta \rightarrow \gamma, t) = 1$.

Seja $\boldsymbol{\alpha = \beta \wedge \gamma}$. ($\rightarrow$) Se $f_t(\beta \wedge \gamma) = 1$ então $f_t(\beta) = 1$ e $f_t(\gamma) = 1$; disto segue-se, por HI, que $v(\beta, t) = 1$ e $v(\gamma, t) = 1$ e, portanto, $v(\beta \wedge \gamma, t) = 1$. Logo, se $f_t(\beta \wedge \gamma) = 1$ então $v(\beta \wedge \gamma, t) = 1$. ($\leftarrow$) Agora suponha que $v(\beta \wedge \gamma, t) = 1$, disto segue-se que $v(\beta, t) = 1$ e $v(\gamma, t) = 1$; com isso temos, por HI, que $f_t(\beta) = 1$ e $f_t(\gamma) = 1$ e, portanto, $f_t(\beta \wedge \gamma) = 1$. Logo, se $v(\beta \wedge \gamma, t) = 1$ então $f_t(\beta \wedge \gamma) = 1$. Com isso mostramos que $f_t(\beta \wedge \gamma) = 1$ sse $v(\beta \wedge \gamma, t) = 1$.

Seja $\boldsymbol{\alpha = \beta \vee \gamma}$. ($\rightarrow$) Se $f_t(\beta \vee \gamma) = 1$ então $f_t(\beta) = 1$ ou $f_t(\gamma) = 1$; disto segue-se, por HI, que $v(\beta, t) = 1$ ou $v(\gamma, t) = 1$ e, portanto $v(\beta \vee \gamma, t) = 1$. Logo, se $f_t(\beta \vee \gamma) = 1$ então $v(\beta \vee \gamma, t) = 1$. ($\leftarrow$) Agora suponha que $v(\beta \vee \gamma, t) = 1$, disto segue-se que $v(\beta, t) = 1$ ou $v(\gamma, t) = 1$; com isso temos, por HI, que $f_t(\beta) = 1$ ou $f_t(\gamma) = 1$ e, portanto, $f_t(\beta \vee \gamma) = 1$. Logo, se $v(\beta \vee \gamma, t) = 1$ então $f_t(\beta \vee \gamma) = 1$. Com isso mostramos que $f_t(\beta \vee \gamma) = 1$ sse $v(\beta \vee \gamma, t) = 1$.

Seja $\boldsymbol{\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma}$. ($\rightarrow$) Se $f_t(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$, então $f_t(\beta) = f_t(\gamma)$; disto segue-se, por HI, que $v(\beta, t) = v(\gamma, t)$ e, portanto, $v(\beta \leftrightarrow \gamma, t) = 1$. Logo, se $f_t(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$, então $v(\beta \leftrightarrow \gamma, t) = 1$. ($\leftarrow$) Agora suponha que $v(\beta \leftrightarrow \gamma, t) = 1$, disto segue-se que $v(\beta, t) = v(\gamma, t)$; com isso temos, por HI, que então $f_t(\beta) = f_t(\gamma)$ e, portanto, $f_t(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$. Logo, se $v(\beta \leftrightarrow \gamma, t) = 1$ então $f_t(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$. Com isso mostramos que $f_t(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$ sse $v(\beta \leftrightarrow \gamma, t) = 1$. Isso conclui nossa demonstração de que o teorema vale para qualquer fórmula α com qualquer número

k de operadores.

Teorema 2.3 Se α é uma instância de tautologia então α é válida na classe K_0 de todas as estruturas temporais.

Prova: Se α é uma instância tautologia então α é verdadeira em qualquer atribuição de valor de verdade pela função f. Seja a função f_t uma função baseada em f, definida por um modelo $M = \langle T, \prec, v\rangle$ (onde $\langle T, \prec\rangle$ é uma estrutura qualquer) e um instante $t \in T$, temos pelo lema 2.1 que $v(\alpha, t) = 1$. Como t é um instante qualquer, então α é verdadeira em todos os instantes que pertencem a T, logo α é válida na estrutura $\langle T, \prec\rangle$. Como esta é uma estrutura temporal qualquer, então α é válida em qualquer estrutura, logo α é válida na classe K_0 de todas as estruturas temporais.

Tendo demonstrado que o axioma LP é válido na classe de estruturas K_0, podemos agora partir para a demonstração dos demais axiomas do sistema $\boldsymbol{K_t}$, a fim de demonstrar que $\boldsymbol{K_t}$ é correto em relação a K_0.

Teorema 2.4 (Teorema da Correção): O sistema $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ é correto em relação à classe K_0 de todas as estruturas temporais.

Prova: A prova é feita demonstrando que todos os axiomas de $\mathbf{K}_{\boldsymbol{t}}$ são válidos em K_0 e que todas as regras de inferência preservam a validade das fórmulas. Como o axioma LP já foi demonstrado no teorema 2.3, resta demonstrar os demais axiomas e regras de inferência.

Axioma $\mathbf{K}_{\boldsymbol{f}}$ ($\boldsymbol{G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)}$): Vamos supor que o axioma K_f não é válido em K_0. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta),\ t) = 0$. Disto segue-se que $v(G(\alpha \rightarrow \beta),\ t) = 1$ e $v(G\alpha \rightarrow G\beta,\ t) = 0$, e deste último segue-se que $v(G\alpha,\ t) = 1$ e $v(G\beta,\ t) = 0$. Se $v(G\beta,\ t) = 0$ então existe um instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $v(\beta,\ t') = 0$. Se $v(G(\alpha \rightarrow \beta),\ t) = 1$ e $v(G\alpha,\ t) = 1$ então para todo instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$, $v(\alpha \rightarrow \beta,\ t') = 1$ e $v(\alpha,\ t') = 1$. Se $v(\alpha \rightarrow \beta,\ t') = 1$ e $v(\alpha,\ t') = 1$ então $v(\beta,\ t') = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\beta,\ t') = 0$ – contradição. Logo, a fórmula $G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$ é válida em K_0.

Axioma $\mathbf{K}_{\boldsymbol{p}}$ ($\boldsymbol{H(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)}$): Vamos supor que o axioma K_p não é válido em K_0. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta),\ t) = 0$. Disto segue-se que $v(H(\alpha \to \beta),\ t) = 1$ e $v(H\alpha \to H\beta,\ t) = 0$, e deste último segue-se que $v(H\alpha,\ t) = 1$ e $v(H\beta,\ t) = 0$. Se $v(H\beta,\ t) = 0$ então existe um instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ e $v(\beta,\ t') = 0$. Se $v(H(\alpha \to \beta),\ t) = 1$ e $v(H\alpha,\ t) = 1$ então para todo instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$, $v(\alpha \to \beta,\ t') = 1$ e $v(\alpha,\ t') = 1$. Se $v(\alpha \to \beta,\ t') = 1$ e $v(\alpha,\ t') = 1$ então $v(\beta,\ t') = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\beta,\ t') = 0$ – contradição. Logo, a fórmula $H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$ é válida em K_0.

Axioma GP ($\boldsymbol{\alpha \to GP\alpha}$): Vamos supor que o axioma GP não é válido em K_0. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(\alpha \to GP\alpha,\ t) = 0$. Disto segue-se que $v(\alpha,\ t) = 1$ e $v(GP\alpha,\ t) = 0$. Se $v(GP\alpha,\ t) = 0$ então há um instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $v(P\alpha,\ t') = 0$. Deste último segue-se que não há em T nenhum instante t'' tal que $t'' \prec t'$ e $v(\alpha,\ t'') = 1$, ou seja, para todo instante $t'' \in T$ tal que $t'' \prec t'$, $v(\alpha,\ t'') = 0$. Como vimos que $t \prec t'$, então também é o caso que $v(\alpha,\ t) = 0$. Mas havíamos visto que $v(\alpha,\ t) = 1$ – contradição. Logo, a fórmula $\alpha \to GP\alpha$ é válida em K_0.

Axioma HF ($\boldsymbol{\alpha \to HF\alpha}$): Vamos supor que o axioma HF não é válido em K_0. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(\alpha \to HF\alpha,\ t) = 0$. Disto segue-se que $v(\alpha,\ t) = 1$ e $v(HF\alpha,\ t) = 0$. Se $v(HF\alpha,\ t) = 0$ então há um instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ e $v(F\alpha,\ t') = 0$. Deste último segue-se que não há em T nenhum instante t'' tal que $t' \prec t''$ e $v(\alpha,\ t'') = 1$, ou seja, para todo instante $t'' \in T$ tal que $t' \prec t''$, $v(\alpha,\ t'') = 0$. Como vimos que $t' \prec t$, então também é o caso que $v(\alpha,\ t) = 0$. Mas havíamos visto que $v(\alpha,\ t) = 1$ – contradição. Logo, a fórmula $\alpha \to HF\alpha$ é válida em K_0.

Regra MP: Devemos mostrar que a regra de *Modus Ponens* preserva a validade, ou seja, que dadas duas fórmulas válidas em K_0 $\alpha \to \beta$ e α, a fórmula β resultante da aplicação da regra MP também é válida. Se as fórmulas $\alpha \to \beta$ e α são válidas então para qualquer modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e qualquer instante $t \in T$, $v(\alpha \to \beta,\ t) = 1$ e $v(\alpha,\ t) = 1$. Disto já se segue, necessariamente, que $v(\beta,\ t) = 1$ e, portanto, β também é válida em K_0.

Regra GT: Devemos mostrar que a regra de Generalização Temporal preserva validade, ou seja, que dada qualquer fórmula α válida em K, as fórmulas $G\alpha$ e $H\alpha$ também são válidas em K_0. Se a fórmula α é válida, então para qualquer modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e qualquer instante $t \in T$, $v(\alpha,\ t) = 1$. Como α é uma fórmula válida, α também é verdadeira em todo instante t' tal que $t \prec t'$, sendo assim $v(G\alpha,\ t) = 1$. Do mesmo modo, α é verdadeira em todo instante t'' tal que $t'' \prec t$, logo $v(H\alpha,\ t) = 1$. Portanto, se α é válida em K, $G\alpha$ e $H\alpha$ também são válidas em K_0.

2.3.2 Completude

Um sistema formal **F** é completo em relação a uma classe de modelos C (ou uma classe de estruturas K) se toda fórmula que é válida nesta classe é um teorema do sistema, ou seja, para toda fórmula α, se $\vDash_C \alpha$ então $\vdash_F \alpha$. Nesta seção iremos provar que o sistema $\mathbf{K_t}$ é completo em relação à classe de todos os modelos temporais C_0 (consequentemente em relação à classe de todas as estruturas K_0). Nossa prova irá se basear em Zalta (1995, pp. 69-75).

Uma das formas de se provar a completude de um sistema em relação a uma classe de modelos é provando que se uma fórmula não é um teorema do sistema então esta fórmula não é válida na classe de modelos em questão. Portanto, nossa estratégia para demonstrar a completude de $\mathbf{K_t}$ em relação a C_0 será provar que para toda fórmula α da linguagem L_t, se $\nvdash_{K_t} \alpha$ então α é inválida em ao menos um modelo $M \in C_0$. Formalmente, o enunciado que iremos provar é:

(A) Se $\nvdash_{K_t} \alpha$ então existe um modelo $M \in C_0$ tal que $\nvDash_M \alpha$

Provando o enunciado (A) demonstramos que toda fórmula que não é teorema de $\mathbf{K_t}$ não é válida em C_0, e assim estabelecemos a completude de $\mathbf{K_t}$ em relação a C_0. Para provar o enunciado (A) precisamos, então, procurar por um modelo que invalida todos os não-teoremas de $\mathbf{K_t}$. Na tentativa de provar a completude para os sistemas normais conseguiu-se demonstrar um resultado ainda mais geral: que para qualquer sistema normal **F** existe um modelo M que invalida todos os não teoremas de **F**. Chamamos o modelo que invalida todos os não-teoremas de um sistema formal **F** de 'modelo canônico de **F**' (em símbolos M^F).

O modelo canônico que iremos demonstrar possui algumas características importantes: uma delas é que as fórmulas válidas no modelo M^F são todos e somente os teoremas de **F**. Se o modelo M^F possui essa característica, dizemos que M^F determina **F**. Formalmente:

M^F determina **F** sse, para toda fórmula α, $\vDash_{M^F} \alpha$ sse $\vdash_F \alpha$.

Se todos e somente os teoremas de **F** são válidos em M^F, então se uma fórmula não é teorema do sistema, ela não é válida em M^F. Como **F** é um sistema qualquer, precisaremos ainda demonstrar que $M^F \in C_0$. Portanto, a prova da completude de $\mathbf{K_t}$ em relação à classe de todos os modelos temporais C_0 se dividirá em duas etapas. Precisamos provar que:

(a) Para qualquer sistema **F** existe um modelo M^F que determina **F**.

(b) $M^F \in C_0$

O resultado (a) é mais geral e pode ser usado para a prova da completude de qualquer sistema de lógica temporal normal. Portanto (a) é provado somente uma vez. No terceiro capítulo, ao falarmos do sistema para a Teoria da Relatividade Restrita usaremos este resultado, bem como outras provas já realizadas neste primeiro capítulo. A demonstração de (b), por sua vez, deve ser feita individualmente para cada sistema formal. Por exemplo, se quisermos mostrar que um sistema é completo em relação à classe dos modelos transitivos (C-transitivo), devemos mostrar que $M^F \in C$-transitivo. Se quisermos mostrar que um sistema é completo em relação à classe dos modelos reflexivos (C-reflexivo), devemos mostrar que $M^F \in C$-reflexivo. E assim para qualquer outra prova.

Os elementos do conjunto T do modelo canônico serão conjuntos maximais consistentes de fórmulas. Para entender o que isso significa precisamos, primeiramente, introduzir as definições de conjuntos maximais consistentes e demonstrar alguns resultados sobre isso. Aqui nos basearemos em Zalta (1995, pp. 54-65).

Definição 2.14 Seja Γ um conjunto de fórmulas:

1. Γ é *maximal* (em símbolos $\mathrm{Max}(\Gamma)$) se e somente se para qualquer fórmula α, $\alpha \in \Gamma$ ou $\neg\alpha \in \Gamma$.

2. Γ é *consistente em relação a um sistema* **F** (em símbolos $\mathrm{Con}_F(\Gamma)$) se e somente se não é o caso que ambos $\Gamma \vdash_F \alpha$ e $\Gamma \vdash_F \neg\alpha$. Podemos também dizer que $\mathrm{Con}_F(\Gamma)$ sse $\Gamma \nvdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$.

3. Γ é *maximal consistente em relação a um sistema* **F** (em símbolos

MaxCon$_F$(Γ)) se e somente se é o caso que Max(Γ) e Con$_F$(Γ).

Quando não é o caso que Max(Γ), escrevemos ¬Max(Γ); quando não é o caso que Con$_F$(Γ), escrevemos ¬Con$_F$(Γ); e quando não é o caso que MaxCon$_F$(Γ), escrevemos ¬MaxCon$_F$(Γ).

Desta definição seguem-se algumas consequências importantes, que poderão ser usadas em demonstrações futuras.

Teorema 2.5 Os seguintes resultados podem ser obtidos a partir da definição de conjunto maximal consistente:

1. $\boldsymbol{\Gamma \vdash_F \alpha}$ **sse** $\boldsymbol{\neg}$**Con**$\boldsymbol{_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})}$

Prova: (→) Se $\Gamma \vdash_F \alpha$ então $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ também deriva α, ou seja, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_F \alpha$. Mas pela definição 2.8, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ também deriva $\neg\alpha$, ou seja, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_F \neg\alpha$. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ não é consistente com **F** (¬Con$_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$) .
(←) Se ¬Con$_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$ então $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_F \beta \wedge \neg\beta$. Pelo Teorema da Dedução, $\Gamma \vdash_F \neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$. Usando o axioma LP temos $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ e aplicando a regra MT em $\neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$ e $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ obtemos $\neg\neg\alpha$. Por fim, aplicando a regra DN em $\neg\neg\alpha$ obtemos α. Logo, se ¬Con$_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$ então $\Gamma \vdash_F \alpha$.

2. Se Con$\boldsymbol{_F(\Gamma)}$ **então para qualquer fórmula** $\boldsymbol{\alpha}$**, ou Con**$\boldsymbol{_F(\Gamma \cup \{\alpha\})}$ **ou Con**$\boldsymbol{_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})}$**.**

Prova: Prova por redução ao absurdo. Vamos supor que Con$_F$(Γ), mas $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ são inconsistentes. Se $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ são inconsistentes, então $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_F \beta \wedge \neg\beta$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_F \beta \wedge \neg\beta$. Pelo Teorema da Dedução temos $\Gamma \vdash_F \alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$ e $\Gamma \vdash_F \neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$. Introduzindo o axioma LP $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ e usando a regra MT em $\Gamma \vdash_F \alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$ e em $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ temos que $\Gamma \vdash_F \neg\alpha$. E usando a regra MT em $\Gamma \vdash_F \neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$ e em $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ temos que $\Gamma \vdash_F \neg\neg\alpha$; e aplicando a regra DN em $\neg\neg\alpha$ obtemos $\Gamma \vdash_F \alpha$. Dessa forma, temos que $\Gamma \vdash_F \alpha$ e $\Gamma \vdash_F \neg\alpha$, o que faz o conjunto Γ inconsistente. Mas isso contradiz nossa suposição inicial de que Con$_F$(Γ). Logo, Se Con$_F$(Γ) então para qualquer fórmula α, ou Con$_F(\Gamma \cup \{\alpha\})$ ou Con$_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$.

Demonstraremos a seguir que qualquer conjunto consistente de fórmulas pode ser estendido para um conjunto maximal consistente.

Lema 2.2 (Lema de Lindenbaum): Se um conjunto de fórmulas Γ é consistente em relação a um sistema **F** (Con$_F$(Γ)), então há um conjunto de fórmulas Δ que é maximal consistente em relação a **F** (MaxCon$_F$(Δ)), tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Prova: Seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ uma enumeração de todas as fórmulas da linguagem. Definimos uma sequência de conjuntos de fórmulas, denominados $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$, e um conjunto que une todos os membros de $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$, denominado Δ, da seguinte forma:

$$\Delta_0 = \Gamma$$
$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\alpha_n\}, \text{ se } \Delta_n \vdash_F \alpha \\ \Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\}, \text{ se } \Delta_n \nvdash_F \alpha \end{cases}$$
$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$$

Dada esta definição, precisamos provar que, de fato, Δ é maximal consistente em relação a **F** e que $\Gamma \subseteq \Delta$. Para isso, temos três passos a demonstrar: i) $\Gamma \subseteq \Delta$; ii) Δ é maximal ($\text{Max}(\Delta)$); e iii) Δ é consistente ($\text{Con}_F(\Delta)$)

i) Como $\Delta = \{\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots\}$, então $\Delta_0 \subseteq \Delta$, e como $\Delta_0 = \Gamma$ então $\Gamma \subseteq \Delta$.

ii) De fato, para qualquer n, $\Delta_n \subseteq \Delta$, pois Δ consiste na união de todos os conjuntos Δ_n. Nós definimos que $\Delta_n \vdash_F \alpha$ ou $\Delta_n \nvdash_F \alpha$, e também definimos que Δ_{n+1} é igual a $\Delta_n \cup \alpha_n$ ou $\Delta_n \cup \neg\alpha_n$. Dessa forma, temos que ou $\alpha \in \Delta_{n+1}$ ou $\neg\alpha \in \Delta_{n+1}$. Como para qualquer n, $\Delta_n \subseteq \Delta$, então Δ é um conjunto maximal. Em outras palavras: em cada passo da construção dos conjuntos nós adicionamos uma nova fórmula (α_n ou $\neg\alpha_n$) a um conjunto já construído. Como todas as fórmulas da linguagem estão listadas, então ao final teremos que, para qualquer fórmula α_n, ou $\alpha_n \in \Delta$ ou $\neg\alpha_n \in \Delta$, que é justamente a definição de conjunto maximal. Logo, $\text{Max}(\Delta)$.

iii) Para provar $\text{Con}_F(\Delta)$ vamos mostrar que: iii.a) se Δ não fosse consistente com **F** então haveria um conjunto $\Delta_n \in \Delta$ que é inconsistente em relação a **F** ($\neg\text{Con}_F(\Delta_n)$); e iii.b) todos os conjuntos Δ_n são consistentes em **F**.

iii.a) Vamos supor que $\neg\text{Con}_F(\Delta)$. Então $\Delta \vdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$, ou seja, existe um subconjunto finito de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ que pertencem a Δ, tal que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \vdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$. Como cada conjunto Δ_n é construído com base em um conjunto anterior, então Δ_1 contém todas as fórmulas de Δ_0 e mais uma; Δ_2 contém todas as fórmulas de Δ_1 e mais uma, e assim sucessivamente. Portanto, para todo $j \leq i$,

$\Delta_j \subseteq \Delta_i$. Seja Δ_n o maior conjunto dessa sequência, então todas as fórmulas α_i da listagem pertencem a Δ_n, inclusive o conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ tal que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \vdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$. Sendo assim, $\Delta_n \vdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$. Como Δ consiste na união de todos os conjuntos da sequência, então $\Delta_n \subset \Delta$. Logo, existe um conjunto Δ_n que está contido em Δ que é inconsistente em relação a **F** ($\neg\mathrm{Con}_F(\Delta_n)$).

iii.b) A prova que todos os conjuntos Δ_n são consistentes em **F** é feita por indução sobre os Δ_ns.
Base: $n = 0$
Como estamos supondo que $\mathrm{Con}_F(\Gamma)$, e $\Delta_0 = \Gamma$, então $\mathrm{Con}_F(\Delta_0)$.
Hipótese da Indução (HI): Vamos supor que $\mathrm{Con}_F(\Delta_n)$ e mostrar que Δ_{n+1} também é consistente, ou seja, $\mathrm{Con}_F(\Delta_{n+1})$.
Definimos que Δ_{n+1} é igual a $\Delta_n \cup \{\alpha_n\}$ ou $\Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\}$. Vamos analisar cada caso.
Se $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\alpha_n\}$ então $\Delta_n \vdash_F \alpha_n$. Se $\Delta_n \vdash_F \alpha_n$ então, pelo teorema 2.5.1, $\neg\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\})$. Por HI, $\mathrm{Con}_F(\Delta_n)$. Pelo teorema 2.5.2, se $\mathrm{Con}_F(\Delta_n)$ então $\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\alpha_n\})$ ou $\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\})$, mas já vimos que $\neg\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\})$, portanto $\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\alpha_n\})$, que é o mesmo que $\mathrm{Con}_F(\Delta_{n+1})$.
Se $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ então $\Delta_n \nvdash_F \alpha_n$. Se $\Delta_n \nvdash_F \alpha_n$ então, pelo teorema 2.5.1, $\mathrm{Con}_F(\Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\})$, que é o mesmo que $\mathrm{Con}_F(\Delta_{n+1})$.
Dessa forma fica provado, por indução, que $\mathrm{Con}_F(\Delta_n)$

Do Teorema de Lindenbaum seguem-se os seguintes corolários:

Corolário 2.1 $\Gamma \vdash_F \alpha$ sse para todo $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$, $\alpha \in \Delta$.

Prova: ($\rightarrow$) Seja $\Gamma \vdash_F \alpha$ e um $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Vamos supor, por absurdo, que $\alpha \notin \Delta$, então como Δ é maximal, $\neg\alpha \in \Delta$, disto segue-se que $\Delta \vdash_F \neg\alpha$. Pelo teorema 2.1 qualquer fórmula provada a partir de um conjunto é provada de qualquer um dos seus superconjuntos, logo $\Delta \vdash_F \alpha$. Mas se Δ deriva α e $\neg\alpha$ então Δ é inconsistente. Mas havíamos suposto que Δ é maximal e consistente – contradição. Logo, se $\Gamma \vdash_F \alpha$ então $\alpha \in \Delta$ para qualquer $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.
($\leftarrow$) Suponha que α pertence a todo $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Vamos supor, por absurdo, que $\Gamma \nvdash_F \alpha$. Disto segue-se, pelo teorema 2.5.1 que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é consistente com **F**. Pelo Lema de Lindenbaum, há um $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta')$ que estende $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, e com isso $\neg\alpha \in \Delta'$. Mas como havíamos suposto que α pertence a todo $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que Γ é um subconjunto, então $\alpha \in \Delta'$. Se α e $\neg\alpha$ pertencem a Δ' então

$\Delta' \vdash_F \alpha \wedge \neg\alpha$, o que torna Δ' inconsistente. Mas havíamos suposto que $\text{MaxCon}_F(\Delta')$ – contradição. Logo, para todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\alpha \in \Delta$ então $\Gamma \vdash_F \alpha$.

Corolário 2.2 $\vdash_F \alpha$ sse para todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$, $\alpha \in \Delta$

Prova: a prova segue os mesmos passos do corolário anterior, trocando Γ por $\emptyset$.

Os instantes do modelo canônico serão conjuntos maximais consistentes. E definiremos que uma fórmula atômica é verdadeira em um conjunto maximal, ou seja, em um instante, apenas se a fórmula pertence àquele conjunto. Com isso conseguiremos mostrar que uma fórmula é verdadeira em um conjunto (i.e., um instante) Γ apenas se for derivável de $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$ – uma vez que todas as fórmulas que pertencem a um conjunto $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$ são deriváveis dele. Estendendo esta ideia, teremos que uma fórmula é verdadeira em todos os instantes do modelo canônico M^F (ou seja, válida), apenas se for um teorema de **F**.

Mas antes de introduzir a definição de modelo canônico, precisamos ainda estabelecer uma relação entre os conjuntos maximais que servirá como a relação $\prec$.

Lema 2.3 Seja **F** um sistema normal, Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Se $\Gamma \vdash_F \alpha$ então $\{G\beta \,|\, \beta \in \Gamma\} \vdash_F G\alpha$ e $\{H\beta \,|\, \beta \in \Gamma\} \vdash_F H\alpha$.

Prova: Se $\Gamma \vdash_F \alpha$ então há uma sequência de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$. Pelo teorema 2.2, $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$ e $\vdash_F H\alpha_1 \to \cdots \to H\alpha_n \to H\alpha$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ então $G\alpha_1, \ldots, G\alpha_n \in \{G\beta \,|\, \beta \in \Gamma\}$ e $H\alpha_1, \ldots, H\alpha_n \in \{H\beta \,|\, \beta \in \Gamma\}$. Pela definição de dedução, $\{G\beta \,|\, \beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$ e $\{H\beta|\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$.

Lema 2.4 Seja **F** uma lógica temporal normal. Se $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$ então $\Gamma \vdash_F G\alpha$. E se $\{\beta \,|\, H\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$ então $\Gamma \vdash_F H\alpha$.

Prova: Se $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$ então existe uma sequência de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\}$ tal que $\vdash_F \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$. Pelo teorema 2.2, $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\}$ então $G\alpha_1, \ldots, G\alpha_n \in \Gamma$. Se $G\alpha_1, \ldots, G\alpha_n \in \Gamma$ e $\vdash_F G\alpha_1 \to \cdots \to G\alpha_n \to G\alpha$, então pela definição de dedução, $\Gamma \vdash_F G\alpha$. A prova para o operador H segue exatamente os mesmos passos, apenas substituindo as ocorrências de G por H.

Lema 2.5 Seja **F** um sistema normal e $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$.
1. $G\alpha \in \Gamma$ sse para todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$, $\alpha \in \Delta$.
2. $H\alpha \in \Gamma$ sse para todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\{\beta \,|\, H\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$, $\alpha \in \Delta$.

Prova: 1. ($\rightarrow$) Vamos supor que $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$, $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ e $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$. Se $G\alpha \in \Gamma$ então $\alpha \in \{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\}$. Como $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$, segue-se que $\alpha \in \Delta$.
($\leftarrow$) Vamos supor que para todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$, $\alpha \in \Delta$ e que $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$. Pelo corolário 1.1 se α pertence a todo $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$, então $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$. Pelo lema 2.4 se $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \vdash_F \alpha$ então $\Gamma \vdash_F G\alpha$. Como dissemos que os sistemas normais são fechados sob deduções, então tudo que pode ser deduzido de um conjunto ainda pertence àquele conjunto. Logo $G\alpha \in \Gamma$.
2. A prova para o segundo caso segue exatamente os mesmos passos do primeiro, apenas substituindo as ocorrências de G por H.

Lema 2.6 Seja **F** um sistema normal, $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$ e $\text{MaxCon}_F(\Delta)$:
1. [para toda fórmula α, se $G\alpha \in \Gamma$, então $\alpha \in \Delta$] sse [para toda fórmula α, se $\alpha \in \Delta$ então $F\alpha \in \Gamma$].
2. [para toda fórmula α, se $H\alpha \in \Gamma$, então $\alpha \in \Delta$] sse [para toda fórmula α, se $\alpha \in \Delta$ então $P\alpha \in \Gamma$].

Prova: 1. ($\rightarrow$) Vamos supor que para toda fórmula α, se $G\alpha \in \Gamma$, então $\alpha \in \Delta$, e vamos supor também que $\beta \in \Delta$ (com isso queremos mostrar que $F\beta \in \Gamma$). Se $\beta \in \Delta$ então, como Δ é maximal consistente, $\neg\beta \notin \Delta$. Disto segue-se, pela nossa suposição inicial, que $G\neg\beta \notin \Gamma$. Como Γ é maximal consistente, então $\neg G\neg\beta \in \Gamma$. Pela definição dos operadores temporais, $\neg G\neg\beta =_{df} F\beta$. Logo, $F\beta \in \Gamma$.
($\leftarrow$): Vamos supor que para toda fórmula α, se $\alpha \in \Delta$ então $F\alpha \in \Gamma$, vamos supor também que $G\beta \in \Gamma$ (com isso queremos mostrar que $\beta \in \Delta$). Se $G\beta \in \Gamma$ então, pela definição dos operadores temporais, $\neg F\neg\beta \in \Gamma$. Como Γ é maximal consistente então $F\neg\beta \notin \Gamma$. Disto segue-se, pela nossa suposição inicial, que $\neg\beta \notin \Delta$. Como Δ é maximal consistente, então $\beta \in \Delta$.
2. A prova para o segundo caso segue exatamente os mesmos passos do primeiro, apenas substituindo as ocorrências de G por H e de F por P.

Observação: dizer que para toda fórmula α, se $G\alpha \in \Gamma$, então $\alpha \in \Delta$ é mesmo que formular que $\{\alpha \,|\, G\alpha \in \Gamma\} \subseteq \Delta$. E dizer que para toda

fórmula α, se $\alpha \in \Delta$ então $F\alpha \in \Gamma$ é equivalente a $\{F\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\} \subseteq \Gamma$. Portanto, uma formulação equivalente ao lema 2.6 é:
1. $\{\alpha \,|\, G\alpha \in \Gamma\} \subseteq \Delta$ sse $\{F\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\} \subseteq \Gamma$.
2. $\{\alpha \,|\, H\alpha \in \Gamma\} \subseteq \Delta$ sse $\{P\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\} \subseteq \Gamma$.

Teorema 2.6 Seja **F** um sistema normal e $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$:
1. $F\alpha \in \Gamma$ sse há um $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que (a) $\{F\beta \,|\, \beta \in \Delta\} \subseteq \Gamma$ e (b) $\alpha \in \Delta$.
2. $P\alpha \in \Gamma$ sse há um $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que (a) $\{P\beta \,|\, \beta \in \Delta\} \subseteq \Gamma$ e (b) $\alpha \in \Delta$.

Prova: 1. Suponha que $F\alpha \in \Gamma$. Pela definição dos operadores temporais, então $\neg G\neg\alpha \in \Gamma$. Como Γ é maximal consistente então $G\neg\alpha \notin \Gamma$. Pelo lema 2.5, $G\neg\alpha \notin \Gamma$ sse há um $\text{MaxCon}_F(\Delta)$, tal que (i) $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$ e (ii) $\neg\alpha \notin \Delta$. Conforme observação do lema 2.6, $\{\beta \,|\, G\beta \in \Gamma\} \subseteq \Delta$ sse $\{F\beta \,|\, \beta \in \Delta\} \subseteq \Gamma$, portanto (i) é equivalente a (a). E como Δ é maximal consistente, então (ii) é equivalente a (b) ($\alpha \in \Delta$). Substituindo as equivalências concluímos que $F\alpha \in \Gamma$ sse há um $\text{MaxCon}_F(\Delta)$ tal que (a) $\{F\beta \,|\, \beta \in \Delta\} \subseteq \Gamma$ e (b) $\alpha \in \Delta$.
2. A prova para o caso 2 segue os mesmos passos do primeiro caso, trocando as ocorrências de G por H e de F por P.

Vamos agora à definição de modelo canônico.

Definição 2.15 O *modelo canônico* de uma lógica temporal normal consistente **F** é a tripla $M^F = \langle T, \prec, v\rangle$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $T = \{\Gamma \,|\, \text{MaxCon}_F(\Gamma)\}$
2. $t \prec t'$ sse $\{\alpha \,|\, G\alpha \in t\} \subseteq t'$
3. $t' \prec t$ sse $\{\alpha \,|\, H\alpha \in t\} \subseteq t'$
4. $v(p, t) = 1$ sse $p \in t$ (onde p é uma fórmula atômica qualquer)

Teorema 2.7 Para qualquer lógica temporal normal consistente **F**, $\vDash_{M^F} \alpha$ sse $\vdash_F \alpha$.

Prova: A definição 2.6 de fórmula válida diz que uma fórmula é valida em um modelo sse é verdadeira em todos os instantes do modelo. Então seguindo a definição 2.15.4, uma fórmula α é válida no modelo canônico M^F ($\vDash_{M^F} \alpha$) sse para todo instante $t \in T$, $\alpha \in t$. Mas pela definição 2.15 todo instante que pertence a T é um conjunto maximal consistente. Então ($\vDash_{M^F} \alpha$) sse para todo $\text{MaxCon}_F(\Gamma)$, $\alpha \in \Gamma$. Disto segue-se, pelo corolário 2.2, que $\vdash_F \alpha$. Logo, $\vDash_{M^F} \alpha$ sse $\vdash_F \alpha$.

Teorema 2.8 (Teorema Geral da Completude): Se $\Gamma \vDash_F \alpha$ então $\Gamma \vdash_F \alpha$.

Prova: Prova por redução ao absurdo. Vamos supor que $\Gamma \vDash_F \alpha$, mas não é o caso que $\Gamma \vdash_F \alpha$ (ou seja, $\Gamma \nvdash_F \alpha$). Se $\Gamma \nvdash_F \alpha$, então a união de Γ com $\neg\alpha$ é consistente ($\mathrm{Con}_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$). Pelo lema de Lindenbaum, se $\mathrm{Con}_F(\Gamma \cup \{\neg\alpha\})$ então existe um conjunto Δ tal que $\mathrm{MaxCon}_F(\Delta)$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$. Como estamos supondo que $\Gamma \vDash_F \alpha$, então para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$ e todo instante t do modelo canônico de **F**, se $v(\gamma, t) = 1$ então $v(\alpha, t) = 1$. Como o conjunto Δ é um conjunto maximal consistente, então Δ é um instante do modelo canônico, logo se $v(\gamma, \Delta) = 1$ então $v(\alpha, \Delta) = 1$. Pela definição, todas as fórmulas que pertencem ao conjunto Δ são verdadeiras no instante Δ. Como temos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$, então $\neg\alpha \in \Delta$ e consequentemente $v(\neg\alpha, \Delta) = 1$ e, portanto, $v(\alpha, \Delta) = 0$. Mas havíamos suposto que , $v(\alpha, \Delta) = 1$ – contradição. Logo, nossa suposição inicial é falsa, e portanto se $\Gamma \vDash_F \alpha$ então $\Gamma \vdash_F \alpha$.

Teorema 2.9 (Teorema da Completude para $\mathbf{K_t}$): O sistema $\mathbf{K_t}$ é completo em relação à classe C_0 de todos os modelos temporais.

Prova: Pelo teorema 2.7, $\vDash_{M^{K_t}} \alpha$ sse $\vdash_{K_t} \alpha$. Como C_0 é a classe de todos os modelos temporais, então $M^{K_t} \in C_0$. Então existe um modelo M que pertence a C_0 tal que se $\vDash_{M^{K_t}} \alpha$ então $\vdash_{K_t} \alpha$. Isto é equivalente a: se $\nvdash_{K_t} \alpha$ então existe um modelo $M \in C_0$ tal que $\nvDash_{M^{K_t}} \alpha$. Que é justamente o que havíamos proposto provar no início do capítulo. Logo, o sistema $\mathbf{K_t}$ é completo em relação à classe C_0 de todos os modelos temporais.

Apresentamos uma lógica temporal cuja ordenação do conjunto de instantes é uma ordenação qualquer, a fim de compreendermos as bases da lógica temporal. Porém, quando pensamos a passagem do tempo tendemos a exigir alguma ordenação específica deste conjunto de instantes, a fim de que a estrutura temporal capture nossa ideia do que seja o tempo. A ideia de tempo que pretendemos capturar neste trabalho é a proposta pela Teoria da Relatividade Restrita, a fim de investigar qual seria a lógica temporal mais adequada para tal ideia de tempo. Para isso, uma apresentação mais detalhada desta teoria será feita no próximo capítulo.

3 O TEMPO NA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

A Teoria da Relatividade Restrita (daqui por diante também denominada TRR) é resultado de uma série de investigações envolvendo mecânica e eletromagnetismo. Contudo, é a partir dos trabalhos de Einstein que uma revolução nos conceitos de tempo e espaço surge em decorrência da teoria. A apresentação da Teoria da Relatividade Restrita a ser feita aqui visa compreender como a teoria trata o conceito de tempo. Para tanto, será apresentado apenas os aspectos necessários para a compreensão de tal conceito, não sendo nosso objetivo uma apresentação completa da teoria.

3.1 RELATIVIDADE PRÉ-EINSTEINIANA

Uma tendência a um pensamento relativístico sobre as leis da física surge na idade moderna em oposição à tradição física aristotélica. A física aristotélica abrange vários problemas naturais, como princípios de movimento e repouso, os conceitos de forma e matéria, cosmologia etc. É particularmente a noção cosmológica aristotélica, descrita em grande parte na obra *Sobre o Céu* (2015), que nos interessa aqui citar a fim de compreender as bases históricas do surgimento do princípio da relatividade. A cosmologia aristotélica tem a terra no centro do universo, cercada por sete esferas concêntricas. Cada esfera contém um corpo celeste que realiza um movimento de translação em torno da terra, numa órbita perfeitamente circular – com exceção da última esfera, também chamada Primeiro Céu, que é formada pelas estrelas fixas. Para Aristóteles, os corpos celestes eram formados por uma matéria perfeita e incorruptível, ao contrário dos objetos terrestres que são formados por matéria deteriorável. Também o movimento dos corpos celestes, segundo Aristóteles, é perfeito e eterno. Dessa forma, Aristóteles organizou o espaço em uma ordem hierárquica fixa. Essa ideia de uma hierarquia na ordem da natureza levou à noção de que alguns referenciais desempenham um papel privilegiado, de modo que, no estudo das leis da física, os demais objetos devem analisados sempre em comparação a tais referenciais especiais.

A primeira grande ruptura com o pensamento geocêntrico e a tradição aristotélica surge com a revolução copernicana no início do século XVI. Copérnico propôs um modelo de universo heliocêntrico, mostrando que era possível descrever a órbita dos planetas de modo muito mais simples que o até então sistema de epiciclos descritos pelo geocentrismo, se considerarmos que a terra e os demais planetas se movem em torno do sol. A mudança trazida com a teoria copernicana leva à ideia de que não há lugares ou referenciais privilegiados no espaço e que "as leis da física podem referir-se igualmente a qualquer ponto, tomado como seu centro, e dará origem às mesmas relações" (BOHM, 2015, p.28). É a partir dessa tendência a um pensamento relativístico que surge o princípio da relatividade e a teoria da relatividade de Galileu.

Galileu Galilei foi um dos primeiros a perceber que é impossível determinar se um objeto está em repouso ou em movimento por si próprio, mas só é possível determinar o movimento de um corpo em relação a um referencial, ou seja, não há movimento nem repouso absolutos. E não há referenciais privilegiados. As leis físicas que descrevem o movimento de um corpo devem ser as mesmas tomadas de qualquer referencial. A base do princípio da relatividade do qual parte Galileu é, portanto, a equivalência entre referenciais.

Podemos esclarecer o conceito de referencial definindo-o como um conjunto de eixos de coordenadas cartesianas X, Y e Z onde posição e movimento podem ser especificados [1]. O princípio da relatividade fala sobre um grupo específico de referenciais, chamados referenciais inerciais. Um referencial inercial pode ser definido como um referencial que não sofre alteração na sua aceleração ou direção. Mais especificamente é um sistema cuja soma das forças que atuam sobre ele é igual a zero. Portanto, dados dois referenciais, se estes são inerciais, eles podem estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme um em relação ao outro.

Vamos falar, em um primeiro momento, de um princípio trivial da relatividade. Este diz respeito à adoção de um sistema de coordenadas para a descrição de um evento, dentre sistemas de coordenadas em repouso entre si. Por exemplo, suponhamos que queremos calcular a aceleração de um bloco que se desloca em um plano inclinado. Para isso, precisamos primeiramente traçar um plano cartesiano sobre o qual iremos analisar o movimento do bloco. Podemos traçar o plano cartesiano com o eixo X paralelo à base do plano inclinado e calcular a aceleração do bloco com base neste sistema de coordenadas. Mas podemos também traçar o plano cartesiano com o eixo X paralelo ao movimento do bloco e calcular sua aceleração a partir deste referen-

[1] Usaremos os termos "referencial", "sistema de referência" e "sistema de coordenadas" em um mesmo sentido

cial. Há inúmeras formas de se estabelecer um referencial para calcular a aceleração do bloco, e não importa como o façamos, a fórmula que calcula sua aceleração será a mesma.

Neste exemplo, estamos analisando um evento (o movimento do bloco) a partir de referenciais parados um em relação ao outro. A teoria da relatividade de Galileu surge da extensão deste problema a referenciais que se movem entre si, ou seja, queremos investigar como dois observadores, em movimento retilíneo uniforme um em relação ao outro, descrevem um mesmo evento. Um evento é um acontecimento que se dá em uma determinada posição do espaço e num determinado instante de tempo, podendo, portanto, ser medido por três coordenadas espaciais e uma temporal em um dado sistema de referência. Por exemplo, suponha que um sistema de referência S, com os eixos X, Y, e Z, mede a posição de um evento P pelas coordenadas x, y, z e t, onde x, y e z são os pontos no espaço onde se deu o evento e t é o tempo em que o evento ocorreu. E temos um sistema S', com os eixos X', Y', e Z', que se desloca em relação a S com velocidade constante v e queremos saber como as coordenadas medidas pelo sistema S podem ser transformadas em coordenadas no sistema S'.

As fórmulas que descrevem essas transformações de coordenadas entre referenciais inerciais são conhecidas como Transformações de Galileu, e são escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_x t \\ y' &= y - v_y t \\ z' &= z - v_z t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Onde v_x, v_y e v_z são as componentes da velocidade v de S' em relação a S. Usando a notação vetorial para representar as posições e velocidades de S' em relação a S, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &= \mathbf{s} - \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Dessa forma, conhecendo a posição e o tempo de ocorrência de um evento em um referencial inercial, podemos calcular as posições correspondentes em qualquer outro referencial inercial. Note que o tempo de ocorrência do evento P é o mesmo em ambos os referenciais

S e S'. Considerava-se que medidas realizadas em um referencial ou em outro sempre levariam aos mesmos intervalos de tempo. Essa ideia será revista com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, como veremos mais adiante.

3.2 ELETROMAGNETISMO E PROBLEMAS COM ESPAÇO E TEMPO ABSOLUTOS

O princípio da relatividade de Galileu se expressa nas suas transformações através da invariância das leis físicas: as leis da mecânica, escritas em um dado referencial inercial, são escritas da mesma forma em qualquer outro referencial inercial. Ou seja, as leis de Newton da mecânica são invariantes (mantêm a mesma forma) sob as transformações de Galileu. A teoria da relatividade de Galileu apresentava grande eficiência para tratar de problemas relacionados ao movimento relativo dos corpos. Contudo, a teoria veio a sofrer um abalo na segunda metade do século XIX, com o desenvolvimento do eletromagnetismo.

Na década de 1860, o físico James Clark Maxwell formulou um conjunto de equações, conhecidas como Equações de Maxwell, que fundamentam os fenômenos de campo elétrico e magnético. A teoria de Maxwell previa a existência de ondas eletromagnéticas, que se propagam a uma velocidade constante c que é de aproximadamente 300.000 quilômetros por segundo, e a luz foi considerada uma dessas ondas. Sendo a luz interpretada por Maxwell como uma onda, deve haver um meio privilegiado no qual ela se propaga. Este meio foi designado por éter. O éter poderia ser considerado o meio para a transmissão dos efeitos eletromagnéticos.

Além disso, sendo a luz uma onda, ela deveria se comportar como tal. Se, por exemplo, um observador arremessa uma pedra em um lago, ele veria se formar um sistema de ondas circulares em torno do ponto onde a pedra caiu. Se o observador que arremessou a pedra no lago se mover em direção ao centro de propagação das ondas, as ondas terão sua velocidade aumentada em relação ao observador, pois, conforme a fórmula de transformações de velocidade de Galileu, a velocidade relativa entre ambos resulta da soma da velocidade de propagação das ondas e do deslocamento do observador.

Tendo o éter em analogia ao lago onde as ondas se propagaram e a luz em analogia à pedra que foi arremessada, suponhamos que, em um dado intervalo de tempo, uma luz se acenda no vácuo: essa luz deveria propagar-se de forma esférica com suas ondas centradas no ponto do éter onde se iniciou a perturbação (RODRIGUES, 1998, p. 19). Da mesma forma como no exemplo anterior, se um observador se mover em direção a estas ondas, terá a velocidade de propagação da luz aumentada em relação a ele, bem como se afastando do centro de propagação das ondas, terá a velocidade da luz reduzida em relação a ele. Sendo assim, segundo a teoria da relatividade de Galileu, o valor da velocidade da luz seria diferente em diferentes referenciais inerciais, variando conforme a velocidade de cada referencial.

Contudo, um problema surge com as transformações de Galileu e o eletromagnetismo de Maxwell: há uma incompatibilidade entre as duas teorias. O módulo da velocidade da luz nas equações de Maxwell deve possuir valor constante c e, para isso, as equações de Maxwell devem assumir uma forma diferente para cada referencial inercial, a depender da sua velocidade. Ou seja, as equações de Maxwell não são invariantes sob as transformações de Galileu.

Segundo o princípio da relatividade de Galileu, os referenciais inerciais seriam todos equivalentes, uma vez que as leis físicas se escreveriam da mesma forma em qualquer que fosse o referencial. Mas agora vemos que este princípio parece não poder ser estendido às leis que descrevem os fenômenos eletromagnéticos. A solução proposta por Maxwell foi considerar que suas equações seriam invariantes apenas para o éter e para referenciais em repouso em relação ao éter. O éter passou a ser um referencial privilegiado no eletromagnetismo.

O éter, contudo, era apenas uma hipótese introduzida para explicar a propagação das ondas eletromagnéticas. Suas propriedades ainda não eram experimentalmente conhecidas. Era necessário, portanto, fazer um experimento que comprovasse a sua suposta existência e suas propriedades. Uma das formas de verificar isso seria medir a velocidade da luz em relação a um referencial que se move no éter e ver se sua velocidade c em relação ao referencial móvel se altera para $c{-}v$, onde v é a velocidade de tal referencial. Diante disso, era preciso um referencial que se movesse a uma velocidade grande o bastante para que a soma de sua velocidade com a velocidade da luz pudesse ser detectada.

Por volta de 1881, o físico Albert Michelson teve a ideia de usar o próprio movimento de translação da terra para realizar tal experimento. Michelson criou um aparelho, chamado interferômetro, para realizar tal medição. Um interferômetro consiste em um medidor de interferência de ondas eletromagnéticas. O aparelho possui uma fonte que emite um feixe de luz; esse feixe incide em um espelho semitransparente, onde o feixe é dividido em dois; uma parte atravessa o espelho, é refletida por outro espelho mais a frente, retorna ao espelho semitransparente e é refletida novamente para um detector (anteparo) posicionado abaixo dele; o outro feixe é refletido pelo espelho semitransparente em direção a um espelho posicionado acima dele, onde é refletido novamente para baixo, atravessa o espelho semitransparente e é detectado pelo anteparo.

O princípio de funcionamento do interferômetro consiste em comparar o tempo que a luz demora para percorrer dois caminhos diferentes, em direções perpendiculares. Segundo as transformações de Galileu para as velocidades, os dois feixes de luz apresentariam velocidades diferentes, considerando o caminho que fizeram e a soma da velocidade da terra. Portanto, esperava-se que o movimento da terra em relação ao éter levaria a uma diferença de tempo no caminho dos dois feixes de luz e uma diferença na sua detecção pelo anteparo. Contudo, essa diferença prevista por Michelson não foi detectada.

Mais tarde, em 1887, o físico Edward Morley desenvolveu um interferômetro mais sofisticado e de maior precisão, onde os experimentos foram realizados novamente. Novamente o resultado contrariou o que era esperado: nenhuma diferença de tempo na detecção dos feixes de luz pôde ser notada. Em todas as circunstâncias a luz se propagava com a mesma velocidade.

O experimento Michelson-Morley, como assim ficou conhecido, mostrou a incapacidade de detecção do éter e reafirmou a incompatibilidade entre o eletromagnetismo e a relatividade de Galileu. A tentativa de detectar um meio privilegiado no qual a luz se propaga e tornar as equações de Maxwell invariantes sob as transformações de Galileu tornou resultado negativo. Neste cenário, poderíamos considerar que ou as transformações de Galileu estavam erradas, ou o eletromagnetismo estava. A solução parecia ser reformular as transformações de Galileu ou reformular as leis do eletromagnetismo. Uma opção a este problema foi apresentada por Lorentz, que chegou a um conjunto de transformações onde as leis do eletromagnetismo eram invariantes.

Por volta de 1895, o físico Hendrik Lorentz pesquisava, de forma independente, o potencial de partículas. Dado um sistema de referência S e uma partícula P, que se move uniformemente em relação a S, Lorentz queria saber como escrever o potencial da partícula no sistema S, levando em conta o seu retardo. Pesquisando isso, chegou, em 1904, a um conjunto de transformações diferente das transformações de Galileu. Neste conjunto de transformações verificou-se que as equações de Maxwell eram invariantes. Estas transformações, que ficaram conhecidas como Transformações de Lorentz, se apresentam da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \frac{v}{c^2}x)
\end{aligned}
$$

Onde v é a velocidade relativa entre os dois referenciais e c a velocidade da luz. Aqui estamos supondo que o movimento do referencial S' é apenas ao longo do eixo X, por isso permanece $y' = y$ e $z' = z$. A expressão $\frac{v}{c}$ é usualmente representada pela letra grega β e a expressão $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ também conhecida como Fator de Lorentz, pela letra grega γ.

Note que nesse conjunto de transformações o tempo não é o mesmo para os dois referenciais, mas pode sofrer uma dilatação que depende da velocidade de deslocamento entre ambos. Também o espaço não é o mesmo, mas sofre um encurtamento na direção do movimento da partícula. Lorentz ainda não descartava a ideia do éter, e acreditava que esse encurtamento poderia ser um efeito do movimento da partícula através do mesmo.

A teoria de Lorentz reconcilia a ideia do éter com o experimento de MichelsonMorley. Pelas suas transformações é de se esperar que o braço do interferômetro que aponta na direção do movimento da terra sofra o encurtamento previsto pelas equações. Considerando que os dois braços do interferômetro têm o mesmo comprimento quando estão em repouso, calculou-se o encurtamento do braço paralelo ao movimento da Terra e verificou-se que independentemente da velocidade da Terra, não haverá nenhuma diferença na detecção dos feixes de luz pelo anteparo. Isso explica os resultados de Michelson-Morley e mantém a ideia do éter.

Para Lorentz, contudo, as verdadeiras transformações de coordenadas eram as transformações clássicas de Galileu. Parecia contra intuitivo abandonar as noções de espaço e tempo absolutos e adotar os resultados das transformações de Lorentz como propriedades físicas do espaço e tempo. Para Lorentz, seu conjunto de transformações seria artificial, ou puramente matemático, criado para tornar invariantes as equações de Maxwell. É neste cenário que surgem as contribuições de Einstein para o eletromagnetismo que culminariam na sua Teoria da Relatividade Restrita, quando, em 1905, Einstein propõe que as transformações de Lorentz não deveriam ser entendidas apenas como um conjunto de artifícios que justificam os resultados das experiências, mas como propriedades do espaço e do tempo, propriamente.

3.3 O TEMPO A PARTIR DE EINSTEIN

Frente ao problema da não compatibilidade do eletromagnetismo e as transformações usadas na mecânica clássica, o físico Albert Einstein foi o primeiro a reconhecer que as transformações de Galileu é que estavam erradas e deveriam ser substituídas, e deduziu, então, quais deveriam ser as transformações corretas. Em 1905, publica um artigo chamado “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, onde chega às mesmas transformações que Lorentz apresentou um ano antes, em 1904. Há discussões sobre se Einstein teria tido acesso aos trabalhos de Lorentz, ou se chegou às mesmas fórmulas de forma totalmente independente. Mas apesar disso, as contribuições de Einstein se devem principalmente à sua interpretação da dilatação temporal e da contração do espaço, previstas pelas fórmulas, como propriedades do espaço e do tempo em si, e não apenas como artifícios matemáticos.

A teoria de Einstein, além de abandonar a ideia de espaço e tempo absolutos, descarta também a ideia do éter: “A introdução de um ‘éter luminífero’ será supérflua na medida em que a visão aqui a ser desenvolvida não exigirá um ‘espaço absolutamente estacionário’ dotado de propriedades especiais” (Einstein, 1905, p.1). O conjunto de todas essas ideias, apresentado em 1905, atribui a Einstein grande parte da formulação da Teoria da Relatividade Restrita como a conhecemos hoje.

Nesse artigo de 1905, Einstein apresenta dois postulados base para a TRR:

1. (Princípio da relatividade.) As leis da física assumem a mesma forma para todos os corpos em sistemas de referência inerciais, isto é, corpos que não estão sujeitos a alterações em sua aceleração ou direção.

2. (Princípio da luz.) A luz se propaga no vazio com a velocidade definida c (300 mil km/s) que é independente dos estados de movimento da fonte e do observador.

Tais postulados são enunciados em seu texto da seguinte forma:

> [...] as tentativas frustradas de descobrir qualquer movimento da Terra relativamente ao “meio de luz” [éter] sugerem que os fenômenos da eletrodinâmica, assim como da mecânica, não possuem propriedades que correspondam à ideia de repouso absoluto. Elas sugerem que [...] as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica serão válidas para todos os quadros de referência para os quais as equações da mecânica são válidas. Vamos levantar essa conjectura (a cujo significado será doravante chamado de ”Princípio da Relatividade”) para o status de um postulado, e também introduzir outro postulado, que é apenas aparentemente inconciliável com o primeiro, ou seja, que a luz é sempre propagada no espaço vazio com uma velocidade definida c que é independente do estado de movimento do corpo emissor. (EINSTEIN, 1905, p.1)

Iremos a partir de agora abordar os fenômenos em relação ao tempo, previstos pela teoria. Os problemas em relação ao tempo na TRR surgem quando se pensa no deslocamento de corpos com velocidade igual ou próxima à velocidade da luz. Um desses problemas se relaciona com a questão da simultaneidade. Na TRR, dois eventos podem ser simultâneos em um dado sistema de referência e não ser em outro. Para ilustrar isso podemos realizar um experimento mental utilizado por Einstein e posteriormente pelos livros que tratam da TRR.

Imaginemos um trem que se desloca a uma velocidade próxima à velocidade da luz. No exato momento em que este trem passa em frente a uma estação ele é atingido por dois sinais luminosos (dois raios, suponhamos) em suas extremidades opostas. Um observador situado no meio desta estação, de forma que se encontra à mesma distância entre as duas extremidades do trem no momento em que os raios o atingem, vê os dois raios atingindo o trem ao mesmo tempo, o que o leva a concluir que a emissão de ambos os raios foi simultânea. Agora imaginemos que há um passageiro neste trem e que também se encontra equidistante entre suas duas extremidades opostas no momento da emissão dos sinais luminosos. Dado que o trem se desloca em velocidade constante próxima à velocidade da luz em direção a um sinal luminoso e afastando-se do outro, o passageiro veria primeiro o sinal luminoso na extremidade frontal do trem e posteriormente veria o sinal luminoso na extremidade oposta, e por isso, concluiria que a emissão dos sinais não foi simultânea.

Vamos aqui chamar o sinal luminoso que atinge a extremidade frontal do trem de P_1, e o sinal luminoso que atinge a extremidade oposta de P_2. Dado este exemplo, a afirmação "P_1 e P_2 ocorrem em um mesmo tempo t_1" é verdadeira para o observador na estação, mas falsa para o passageiro do trem. E a afirmação "P_1 ocorre em um tempo t_1 e P_2 ocorre em um tempo t_2 que é posterior a t_1" é verdadeira para o passageiro do trem, mas falsa para o observador na estação. Ambas as afirmações tratam do mesmo evento, mas recebem valores de verdade diferentes quando tomadas de sistemas de referência distintos.

A diferença temporal da ocorrência de um evento em relação a dois observadores em referenciais distintos é um fenômeno que sempre ocorre quando um dos observadores se encontra em movimento em relação ao evento e o outro não, como no exemplo citado anteriormente. A explicação disso deve-se ao fato da velocidade da luz ser finita, constante e a mesma para todos os observadores, independente de seus estados de movimento, conforme o segundo postulado da TRR. Conforme exemplo anterior, por não haver variação na distância entre o observador na plataforma e os dois raios que atingem o trem (ou seja, o observador está em repouso em relação a estes eventos), e dado que a distância entre o observador e o primeiro e segundo raios é a mesma, o observador considera que a emissão de ambos os raios foi simultânea. Já o passageiro do trem tem a distância que o separa do raio que cai na direção em que o trem viaja diminuindo rapidamente, e por isso, a impressão luminosa demora menos tempo para atingi-lo, pois percorre uma distância menor em relação ao observador na estação. Da mesma forma, a distância do passageiro em relação ao sinal luminoso da parte traseira do trem aumenta rapidamente, o que faz com que a luz demore mais tempo para alcançá-lo.

Retomando a proposição formulada anteriormente sobre a ocorrência dos eventos, "P_1 e P_2 ocorrem em um mesmo tempo t_1", podemos questionar: visto que essa sentença é verdadeira para o observador na estação, mas falsa para o passageiro do trem, qual sistema de referência devemos privilegiar e adotar para verificar qual o real valor de verdade da sentença? A resposta é nenhum deles. Tanto o observador na estação, quanto o passageiro do trem estão corretos. Isso porque na TRR não há um tempo absoluto, mas a medida de tempo em um dado referencial pode variar conforme o seu estado de movimento. Não é possível privilegiar a medida de tempo de um único referencial e considerá-la correta em relação a outras.

Problemas em relação ao tempo surgem não só quando se considera um evento em relação a dois observadores em estados de movimentos distintos, mas também quando se considera o próprio deslocamento dos observadores entre si. Para exemplificar isto, consideremos um aviador voando a uma velocidade de 257.600 quilômetros por segundo em relação à terra:

> Se observássemos o aviador cuidadosamente deduziríamos que os seus movimentos eram desusadamente lentos; e que os acontecimentos havidos no dispositivo que se deslocava com ele eram igualmente retardados – como se o tempo se tivesse esquecido de prosseguir em sua marcha. O seu charuto dura duas vezes mais do que o nosso. Eu usei propositadamente a expressão "deduziríamos", pois deveríamos ver um retardamento ainda mais extravagante do tempo; mas isto é facilmente explicável, porque a distância que nos separa do aviador estará aumentando rapidamente e as impressões luminosas gastarão mais tempo para nos atingirem. O retardamento mais moderado que deduzimos permanece após ser dada uma compensação pelo tempo de transmissão da luz. Mas novamente se verifica uma reciprocidade, porque na opinião do aviador somos nós que estamos viajando a 161.000 milhas por segundo, e depois de ter ele dado todas as compensações necessárias, constará que nós é que somos morosos. O nosso charuto dura o dobro do dele. (EDDINGTON, 1920, apud RUSSELL,1966 p. 70).

Dado que o movimento é a variação da distância, podemos tanto considerar que o aviador está em movimento em relação a um observador na terra enquanto este está em repouso, quanto que o aviador está em repouso e o observador na terra se desloca em relação a ele. Em qualquer referencial que se adote (do aviador ou do observador na terra), os acontecimentos que um deles considera simultâneos, o outro considera separados por um lapso de tempo, que é proporcional à velocidade do deslocamento entre eles. Esse fenômeno é conhecido como dilatação temporal.

Podemos usar as transformações de Lorentz para compreender melhor esse efeito de dilatação temporal. Para isso, suponhamos que o observador na Terra dispõe de algum mecanismo que lhe permite observar o relógio do aviador, e que este observador decide medir o tempo que o ponteiro dos minutos do relógio do aviador leva para efetuar uma evolução completa. Em outras palavras, queremos determinar o tempo medido por um observador na terra após o aviador ter observado que o seu relógio marcou a passagem de uma hora. Para isso, imaginemos que o observador na terra inicia sua medição no momento em que o relógio do aviador marca 11 horas, e a finaliza quando este mesmo relógio marca 12 horas. Vamos considerar dois eventos: o evento 1, que consiste relógio do aviador marcando 11 horas, e o evento 2, que consiste no relógio do aviador marcando 12 horas. Sendo S' o aviador e S o observador na Terra, vamos considerar que o evento 1 se dá no instante de tempo t'_1 e o evento 2 no instante t'_2. E o intervalo de tempo transcorrido entre esses eventos é de $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, no referencial S'. Queremos saber qual o intervalo de tempo transcorrido no referencial S, ou seja, $\Delta t = t_2 - t_1$. Pelas transformações de Lorentz, temos:

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x') \\ t_2 &= \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x') \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x') - \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x') \\ &= \gamma(t'_2 - t'_1) \end{aligned}$$

E usando $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, temos:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Agora, sabendo que o aviador se desloca a 257.600 quilômetros por segundo, o que é equivalente a 85 por cento da velocidade da luz, temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{0{,}85 \cdot c}{c})^2}} \\ &= 1,9 \end{aligned}$$

Tendo determinado o valor de γ e sabendo que o tempo medido no relógio do aviador foi de uma hora ($\Delta t' = 1$), temos que:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1,9 \cdot 1 \\ &= 1,9 \end{aligned}$$

Ou:

$$\Delta t = 1 \text{ hora e } 54 \text{ minutos}$$

Podemos observar que enquanto o observador na terra vê o relógio do aviador marcar a passagem de uma hora, o seu relógio marca a passagem de uma hora e cinquenta e quatro minutos. Enquanto os referenciais se encontram em um sistema inercial este efeito é recíproco. Se o aviador observasse o relógio do referencial na Terra, veria este marcar a passagem de uma hora enquanto o seu marca a passagem de uma hora e cinquenta e quatro minutos.

Devido ao fato de a velocidade do distanciamento entre o observador na Terra e o aviador ser constante e por não haver mudança de direção entre eles, tanto o aviador vê os movimentos do observador na Terra lentos quanto o observador na Terra vê o atraso nos movimentos do aviador. Essa reciprocidade permanece desde que a velocidade do aviador permaneça a mesma e sua direção também. Contudo, uma assimetria surge quando um dos observadores permanece em um sistema inercial e o outro não. Essa questão é discutida no que ficou conhecido como Paradoxo dos Gêmeos. Em 1911 Einstein escreve:

> Se tivéssemos um organismo vivo numa caixa... poderíamos proceder de maneira que o organismo, depois de um vôo longo arbitrário retornasse ao ponto inicial, numa condição muito pouco alterada, enquanto que os organismos correspondentes, que permaneceram em suas posições iniciais, haviam há tempo cedido lugar a novas gerações. Para o organismo em movimento, o longo tempo de jornada foi um mero instante, desde que o movimento tenha sido realizado com uma velocidade aproximada à da luz. (EINSTEIN, 1911 apud RESNIK, 1971, p. 216).

Se imaginarmos que o organismo estacionário é um homem e aquele em viagem é o seu irmão gêmeo, então o segundo, ao voltar para casa depois da viagem, encontraria seu irmão muito mais velho comparado a ele. Vamos chamar o gêmeo que viaja de S' e seu irmão que permanece na terra de S. Vamos supor que eles possuem uma nave que atinge sessenta por cento da velocidade da luz $(0,6c)$. Para tornar o exemplo mais simples, supomos que a nave consegue atingir essa velocidade em uma pequena fração de segundo (o tempo que a nave leva para alcançar $0,6c$ não é essencial no exemplo). Enquanto S permanece na Terra, S' decide partir em uma viagem até uma estrela que se encontra a seis anos luz de distância. Seja o evento 1 o momento em que os gêmeos estão ambos na terra antes da viagem com seus relógios sincronizados, e o evento 2 o momento em que S' chega até a estrela, queremos saber quanto tempo se passará entre estes eventos para S e para S'.

Do referencial S, a estrela está a uma distância de seis anos luz e a velocidade de S' é de $0,6c$, portanto é simples calcular que, para S, seu irmão levará 10 anos para ir até a estrela. Sabendo o tempo transcorrido no referencial S, podemos usar a transformação de Lorentz $(\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma})$ para calcular o tempo da viagem para o referencial S', que será igual a 8 anos apenas. Considerando que S' faz a viagem de volta à terra com a mesma velocidade, sua viagem totalizará 16 anos de seu referencial, mas 20 anos do referencial S. Portanto, ao retornar à terra, estará 4 anos mais novo que seu irmão gêmeo.

Essa situação parece paradoxal porque, durante a viagem, o viajante também veria o relógio do seu irmão na terra correr mais lentamente que o seu, uma vez que podemos considerar que é a terra que se move em relação a ele. E, portanto, irmão que ficou na terra também deveria estar mais novo ao final da viagem. Contudo, esse aparente paradoxo só surge quando não consideramos que a trajetória do irmão viajante envolve dois sistemas inerciais diferentes (da ida e da volta), enquanto o irmão na terra permanece no mesmo referencial inercial o tempo todo. O paradoxo dos gêmeos não é um paradoxo no sentido lógico, pois nenhuma contradição é derivada. Vamos verificar como isso é resolvido.

Suponhamos que ambos possuem um mecanismo, como um telescópio, que permite observar um ao outro. Tendo sincronizado seus relógios em zero (evento 1), quando chegar até a estrela (evento 2), S' verá o seu relógio marcando oito anos. Entretanto, quando S ver que S' chegou até a estrela, o seu relógio estará marcando 16 anos. Isso porque, do referencial S, S' leva 10 anos para chegar até a estrela, mas isso só será observado 6 anos depois, que é o tempo que a luz levará para atingir S mostrando que S' chegou. Sabendo que o tempo de viagem para S' foi de 8 anos, S verifica que durante a viagem, o relógio de

S' andou a metade da velocidade do seu, ou seja, S vê uma dilatação temporal para S'.

Da mesma forma, quando S' chega até a estrela, este verá S há seis anos. Sabendo que do referencial de S, o tempo da viagem é de 10 anos, S' observará S quando este marca 4 anos de sua partida. Para S' o relógio de S é que parece andar a metade da velocidade do seu, e portanto, também observa uma dilatação temporal para S.

Vamos considerar que assim que S' chega até a estrela ele inicia sua viagem de volta à Terra. Podemos desconsiderar o tempo de desaceleração da nave e sua aceleração no sentido inverso para retornar à Terra. Vamos chamar de evento 3 o momento em que S' encontra seu irmão gêmeo novamente na Terra. Na viagem de volta, S vê o relógio de S' ir de 8 para 16 anos em apenas 4 anos do seu referencial, pois S marcava 16 anos em seu relógio quando viu S' chegar até a estrela e retornar (evento 2), e sabemos que o retorno de S' acontecerá quando S marcar 20 anos. Ou seja, S vê o relógio de S' andando duas vezes mais rápido que o seu.

Da mesma forma, S' vê o relógio de S ir de 4 para 20 anos em apenas 8 anos de seu referencial. Pois quando acontece o evento 2, S' marcava 8 anos em seu relógio, e sabemos que para S', seu retorno à Terra acontecerá quando o seu relógio marcar 16 anos. Portanto, S' também vê o relógio de S andar duas vezes mais rápido que o seu. Assim, ambos concordam que o relógio de S marcará 20 anos ao final da viagem e o relógio de S' marcará apenas 16.

Essa assimetria surge porque os eventos 1, 2 e 3 acontecem no mesmo ponto do referencial S', mas não do referencial S. O intervalo de tempo medido por um referencial no qual os eventos ocorrem na mesma posição, é chamado seu tempo próprio. O tempo próprio de um referencial é sempre menor que o tempo medido por um referencial que se move em relação a este. O conceito de tempo próprio foi introduzido pelo matemático Hermann Minkowski, que em 1908 apresentou uma geometrização para a TRR na qual o conceito de tempo que deriva da teoria pode ser bem compreendido.

3.4 ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Vimos nos exemplos que eventos que são simultâneos para um referencial podem não o ser para outros, e o intervalo de tempo entre dois eventos, para um determinado referencial, pode depender da distância que os separa. Isto significa que espaço e tempo estão interligados.

Embora a TRR, apresentada em 1905, traga a noção de que espaço e tempo estão interligados, o conceito de espaço-tempo como uma variedade quadridimensional com uma configuração de três dimensões de espaço e uma de tempo, só foi estabelecido em 1908, pelo matemático alemão Hermann Minkowski: "espaço e tempo por si próprios estão destinados a ser reduzidos a sombras, e apenas uma espécie de união entre os dois mantém uma existência independente" (Minkowski, 1918, p.288).

O espaço quadridimensional dos acontecimentos é conhecido hoje por espaço-tempo ou Universo de Minkowski. O universo de Minkowski é um contínuo quadridimensional que se compõe de eventos individuais, cada um dos quais descritos por quatro números, sendo três coordenadas espaciais x, y, z e uma coordenada temporal t. Podemos descrever a posição de qualquer ponto no espaço-tempo por meio das coordenadas x, y, z, t. E para cada ponto, existe um número infinito de "pontos vizinhos", cuja posição pode ser determinada por coordenadas x_1, y_1, z_1, t_1 que "diferem das coordenadas do evento original considerado x, y, z, t tão pouco quanto quisermos" (Einstein, 1999, p. 49).

A geometrização de Minkowski parte do princípio da velocidade da luz absoluta para qualquer observador. Seu espaço-tempo é geralmente descrito sobre um plano cartesiano de duas dimensões: uma dimensão espacial e uma temporal. Embora o espaço-tempo de Minkowski seja quadridimensional, não há problema em tratar o plano com apenas duas dimensões, pois uma vez que estamos lidando apenas com movimentos uniformes (em linha reta), é sempre possível fazer uma rotação das coordenadas de modo que o movimento seja apenas ao longo do eixo x. Portanto os eixos y e z não são essenciais nas representações tratadas aqui.

Comumente usa-se o eixo vertical para o tempo e o eixo horizontal para o espaço. O eixo temporal mescla-se com o espaço: uma vez que a velocidade da luz é constante, o tempo pode ser descrito como o espaço que a luz percorre em determinado intervalo de tempo, por isso costuma-se usar as letras ct para representar o eixo temporal. Um segundo no eixo temporal pode ser escrito como 3.10^8 metros luz (espaço que a luz percorre em um segundo), e no eixo x a distância de 3.10^8 metros pode ser escrito como um segundo luz. Por isso costuma-se trabalhar com as escalas dos eixos x e ct ambas em metros ou ambas em quilômetros.

Seja S um referencial composto pelos eixos ct e x, respectivamente de tempo e espaço. Seja O um observador situado na origem deste referencial. No caso dos eixos ct e x terem a mesma escala (tempo e espaço medidos em metros), um feixe de luz emitido por O (quando $ct = 0$) perfaz um ângulo de 45° com os eixos ct e x, conforme imagem:

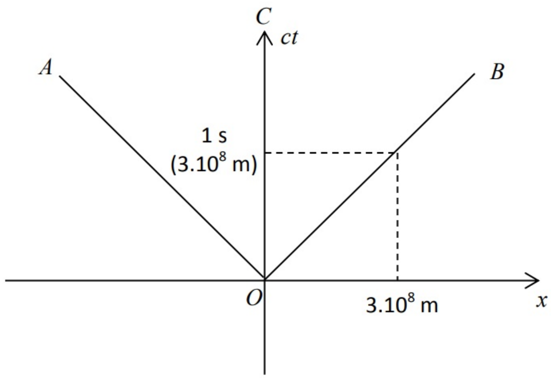

Figura 1 – Fonte: o próprio autor.

O observador O fixado na origem do referencial se localiza em $x = 0$ e no instante $ct = 0$. Se este observador permanecer na mesma posição ao longo do tempo, sua trajetória no espaço-tempo será simplesmente descrita pela linha OC. A linha que descreve a trajetória de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski é chamada de linha de mundo: "uma linha de mundo reta paralela ao eixo ct corresponde a um ponto estacionário, uma linha reta inclinada ao eixo ct corresponde a um ponto em movimento uniforme, uma linha de mundo curva corresponde a um ponto em movimento não uniforme" (Minkowski, 1918, p. 292).

As linhas OA e OB descrevem a trajetória de um raio luminoso emitido por O. Em três dimensões há muitas outras direções possíveis para um raio de luminoso, assim o conjunto completo das trajetórias da luz a partir do ponto O formaria um cone. Este "cone de luz" representa todos os eventos que estão no futuro de O. Sendo a origem do sistema (definida como $ct = 0$) entendida como o "agora", o eixo x representa todos os acontecimentos que estão no presente de O. Assim, um evento E estará no futuro de O se e somente se um feixe de luz puder ser emitido de O até E: "o cone de luz futuro de O consiste em todos os pontos de mundo [2] que 'recebem luz de O'" (Minkowski,

[2] "Eu vou chamar um ponto no espaço em um determinado tempo, ou seja, um sistema de valores x, y, z, t, um ponto de mundo [worldpoint]" (Minkowski, 1918, p. 289).

1918, p. 295). Também podemos determinar o passado de O como o conjunto de todos os eventos que emitem luz a O: "o cone de luz passado de O consiste em todos os pontos de mundo que 'enviam luz para O'" (Minkowski, 1918, p. 295). O gráfico com o passado e futuro de O ficaria:

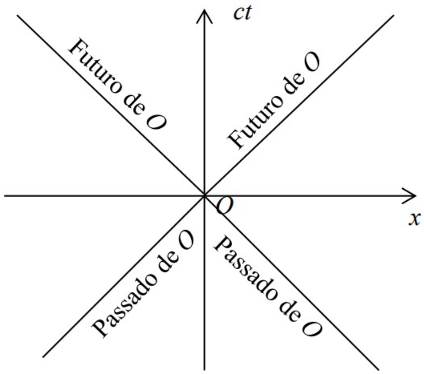

Figura 2 – Fonte: o próprio autor.

Este conceito de cone de luz é fundamental para determinar a ordem temporal dos eventos. Dados dois eventos, se ambos estão dentro do cone de luz um do outro, então há uma única ordem temporal entre eles. Contudo, se estes eventos ocorrem em lugares muito distantes, de modo que um feixe de luz não pode ser emitido de um até o outro, ou seja, se estão fora do cone de luz um do outro, então observadores podem discordar quanto a ordem de acontecimento destes eventos. Podemos verificar isso com um exemplo.

Dado um segundo sistema de referência, S', que se desloca com velocidade uniforme em relação a S, podemos analisar, a partir dos diagramas de Minkowski, a ordem temporal dos acontecimentos considerando agora os dois sistemas. Seja S um sistema composto pelas coordenadas ct e x, respectivamente de tempo e espaço, e seja S' um referencial que se move relativamente a S com a velocidade de $1,5.10^8$m/s ($0,5c$), e composto pelos eixos ct' e x'. Vamos determinar que a origem de S e S' é no mesmo ponto onde $ct = 0$ e $ct' = 0$. Para manter o postulado da velocidade da luz como a mesma para qualquer referencial, os eixos x e x' não podem ser coincidentes neste diagrama.

Sendo o eixo x o conjunto de todos os eventos que acontecem simultaneamente em $ct = 0$ para o referencial S, então todas as retas

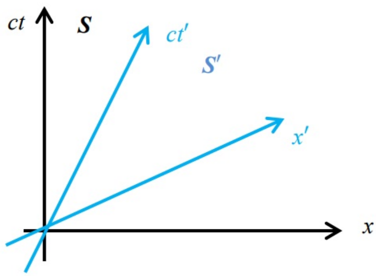

Figura 3 – Fonte: o próprio autor.

traçadas paralelamente a x compõem conjuntos de eventos simultâneos no referencial S. Sendo o eixo x' o conjunto de todos os eventos que acontecem simultaneamente em $ct' = 0$ para o referencial S', então todas as retas traçadas paralelamente a x' compõem conjuntos de eventos simultâneos no referencial S'.

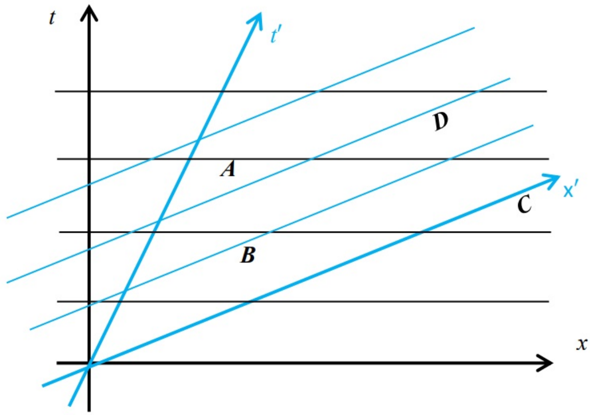

Figura 4 – Fonte: o próprio autor.

Ao traçarmos tais retas no gráfico vemos, na figura 4, que o evento A acontece depois do evento B tanto no referencial S quanto no referencial S'. E o evento C acontece depois do evento B visto do referencial S, mas é anterior a B no referencial S'. Isso acontece porque não há uma relação temporal entre os eventos B e C. Um evento só está no futuro de outro se um sinal de luz puder ser enviado de um até o outro, o que não é o caso dos eventos em questão. Em outras palavras, estes eventos não estão dentro do cone de luz um do outro, como pode ser visualizado na figura 5.

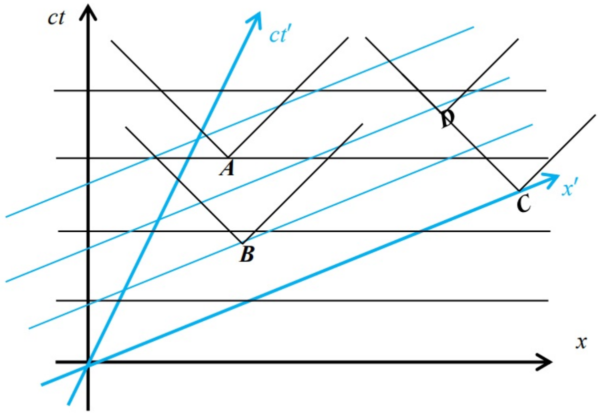

Figura 5 – Fonte: o próprio autor.

Na física clássica tratamos sobre o intervalo de tempo transcorrido entre dois eventos e o intervalo de espaço entre eles, separadamente. E esses intervalos seriam os mesmos vistos de qualquer referencial inercial. Na mecânica clássica esses intervalos são invariantes. Na relatividade, contudo, vemos que o intervalo de tempo transcorrido entre dois eventos não é o mesmo medido de referenciais inerciais que se movem, nem o intervalo de espaço é o mesmo. Contudo é invariante o intervalo espaço-temporal, quando essas duas dimensões são tomadas em conjunto. Em um sistema de referência S, o intervalo espaço-temporal entre dois eventos 1 e 2 é definido por s, onde:

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Este é um invariante sob as transformações de Lorentz: s tem o mesmo valor em todos os referenciais em movimento uniforme um em relação ao outro (Kittel, 1973, p. 352).

Olhemos a figura 5 novamente. Vemos que os eventos B e C estão fora do cone de luz um do outro. Quando temos eventos desse tipo, o intervalo de espaço entre eles será sempre maior que o intervalo de tempo, de qualquer referencial que se observe. Ou seja, $c\Delta t < \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$. Como a TRR não permite velocidades maiores que a velocidade da luz, é impossível que qualquer sinal enviado por B atinja C, e vice versa. Por isso diz-se que tais eventos não possuem relação causal. Eventos como esse são chamados eventos do tipo espaço.

Olhemos agora para os eventos A e B da figura 5. Vemos que o evento A está dentro do cone de luz do evento B. Quando temos eventos desse tipo, o intervalo de tempo entre eles será sempre maior que o intervalo de espaço, de qualquer referencial que se observe. Ou seja, $c\Delta t > \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0$. Eventos como esse possuem uma relação temporal e podem ter relação causal. Estes são chamados eventos do tipo tempo.

Em relação aos eventos C e D da figura 5, vemos que D ocorre exatamente sobre o cone de luz de C. Nesse caso a variação de tempo é igual à variação de espaço, ou seja, $c\Delta t = \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$. Eventos como esse podem ser ligados por um sinal luminoso e, portanto, pode haver relação causal entre eles. Estes são chamados eventos do tipo luz.

É para eventos que se relacionam temporalmente, como eventos do tipo tempo e eventos do tipo luz, que a lógica temporal a ser apresentada na sequência se aplica. Uma lógica temporal relativística foi mencionada pela primeira vez por Prior (1967) e foi axiomatizada pela primeira vez por Goldblatt (1993). Iremos, em seguida, apresentar estes trabalhos a fim de compreender como a lógica temporal pode se relacionar com a TRR e identificar possíveis problemas ainda em aberto nesta área.

4 LÓGICA TEMPORAL RELATIVÍSTICA

Há uma pluralidade de formas de se pensar sobre 'o que é o tempo'. Desde Aristóteles até os dias de hoje este assunto tem sido tema de inúmeras discussões. Inclusive a lógica temporal se depara com esse problema: embora não seja o objetivo do lógico responder a esta pergunta (o que é o tempo?), o desenvolvimento de sistemas lógicos temporais precisa lidar com essa questão, pois é preciso partir de alguma noção de tempo na construção de estruturas temporais. E nesse processo de desenvolvimento de sistemas formais para diferentes concepções de tempo podemos ser levados a compreender melhor essas diferentes concepções. Faremos isso, na sequência, com a ideia de tempo da Teoria da Relatividade Restrita.

Apresentaremos a seguir os principais esforços que já foram feitos na tentativa de desenvolver sistemas formais para a TRR. Em especial, nos basearemos no trabalho de Robert Goldblatt (1993). Goldblatt mostra que o sistema mais adequado para a TRR é o sistema modal **S4.2** com a interpretação diodoreana de modalidade[1]. Na apresentação que faremos aqui escolhemos usar operadores temporais para o passado e futuro, fornecendo uma lógica temporal ao invés de modal.

4.1 SEMÂNTICA PARA UMA LÓGICA TEMPORAL BASEADA NA GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO

A partir do que foi apresentado sobre o tempo na TRR já estamos aptos a introduzir uma semântica para uma lógica temporal baseada nesta teoria. Recorde que para interpretarmos semanticamente uma linguagem temporal precisamos introduzir uma estrutura $E = \langle T, \prec \rangle$ onde T é um conjunto não vazio (intuitivamente, um conjunto de instantes de tempo) e $\prec$ é uma relação em T (intuitivamente, uma relação que diz como os instantes estão ordenados entre si). Veremos, em seguida, como o espaço-tempo de Minkowski nos fornece esta estrutura. Para isso, vamos entender um pouco melhor a geometria deste espaço-tempo.

O espaço-tempo de Minkowski é um campo (espaço) vetorial real quadridimensional que combina três dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Informalmente, um campo vetorial pode ser enten-

[1] O que são sistemas modais e o que é a interpretação diodoreana de modalidade será explicado mais adiante.

dido como uma função que associa um vetor a cada ponto P no espaço. Se estivermos trabalhando em um espaço de apenas uma dimensão, cada vetor e cada ponto terá apenas um número (uma coordenada) associado a eles; em um espaço de duas dimensões, os vetores e pontos têm dois números associados a eles; em três dimensões, três números; e assim por diante. Dizemos 'campo vetorial real' porque é baseado no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, e 'quadridimensional' porque combina quatro dimensões. Vamos entender isso melhor com alguns exemplos.

Imagine um espaço de duas dimensões baseado em $\mathbb{R}$. Nesse caso, nossa representação terá dois eixos (bem como vínhamos fazendo no capítulo anterior). Seja este espaço composto pelos eixos x e y. Qualquer ponto neste espaço de duas dimensões é um elemento de $\mathbb{R}^2$, ou seja, é um elemento do conjunto dos pares (x, y) onde x e y são números reais. Podemos ter, por exemplo, os pontos $a = (0, 0)$, $b = (5, 3)$, $c = (-2, \pi)$, etc. Se definirmos a origem do gráfico em $(0, 0)$ e quisermos saber a distância da origem até o ponto b precisaremos agora de dois valores: a posição de b referente ao eixo x e a posição de b referente ao eixo y (que neste caso definimos ser $b = (5, 3)$), como representado na figura 6.

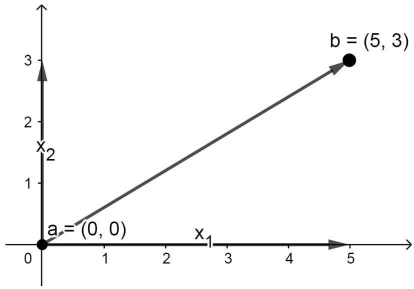

Figura 6 – Fonte: o próprio autor.

Vamos chamar o vetor que vai de a até b de $\mathbf{x}$. Os vetores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ que aparecem junto aos eixos x e y na figura 6 são chamados 'componentes' de $\mathbf{x}$. A componente de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Assim, os vetores de um espaço com duas dimensões têm duas componentes. Um vetor $\mathbf{x}$ em um espaço de duas dimensões $\mathbb{R}^2$ é representado por $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$, onde x_1 e x_2 são os módulos[2] das componentes de $\mathbf{x}$. No caso deste exemplo, $\mathbf{x} = (5, 3)$.

[2]Lembrando que o módulo de um vetor é o valor do seu comprimento. É simples ver na figura 6 que o vetor $\mathbf{x_1}$ percorre cinco unidades no espaço, portanto seu módulo é 5, e que o vetor $\mathbf{x_2}$ percorre três unidades, portanto seu módulo é 3. Para

Um vetor $\mathbf{x}$ também pode ser escrito na forma de uma combinação linear de vetores. Uma combinação linear de vetores é a soma de vetores multiplicados por constantes, ou seja, $\mathbf{x} = c_1.\mathbf{v_1} + c_2.\mathbf{v_2}$, onde $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são vetores e c_1 e c_2 são números reais. Qualquer vetor pode ser obtido a partir de uma combinação linear. A forma padrão (canônica) de escrever um vetor $\mathbf{x}$ como combinação linear é escolhendo o valor de suas componentes x_1 e x_2 como constantes e os vetores $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{e_2} = (0, 1)$. Dessa forma, temos: $\mathbf{x} = x_1.\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$. Usando os valores da figura 6, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x_1.\mathbf{e_1} + x_2.\mathbf{e_2} \\
&= 5.(1,0) + 3.(0,1) \\
&= (5,0) + (0,3) \\
&= (5,3)
\end{aligned}
$$

Os vetores canônicos $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$ são capazes de gerar qualquer vetor do espaço $\mathbb{R}^2$. Por isso dizemos que $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$ são uma ‘base’ para $\mathbb{R}^2$, nesse caso chamada ‘base canônica’.

Repare que nestes exemplos o valor das coordenadas do ponto b é o mesmo valor do vetor $\mathbf{x}$. Isso acontece porque estamos definindo a origem do vetor em $(0, 0)$. Mas a origem do vetor poderia ser em qualquer ponto. Por exemplo, se tivéssemos um ponto a com as coordenadas $x = 1$ e $y = 1$ e o ponto b com as coordenadas $x = 5$ e $y = 3$, então o vetor $\mathbf{x}$ que vai do ponto a ao ponto b (que é definido por $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$) é $\mathbf{x} = (4, 2)$, conforme figura 7.

O espaço-tempo de Minkowski é quadridimensional, portanto os vetores têm quatro componentes, ou seja, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. A base canônica de $\mathbb{R}^4$ é $e_1 = \langle 1, 0, 0, 0\rangle$, $e_2 = \langle 0, 1, 0, 0\rangle$, $e_3 = \langle 0, 0, 1, 0\rangle$ e $e_4 = \langle 0, 0, 0, 1\rangle$. Podemos generalizar isto ainda mais e definir um espaço de n dimensões (para qualquer número natural $n > 0$), da seguinte forma.

Um espaço vetorial n-dimensional baseado em $\mathbb{R}$ (em símbolos, $\mathbb{R}^n$) é o conjunto de todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde x_i é um número real. A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ tal que:

---

saber o módulo do vetor $\mathbf{x}$ basta usar o teorema de Pitágoras. Note que o vetor $\mathbf{x}$ forma um triângulo retângulo com os vetores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$. Então o módulo de $\mathbf{x}$ é dado por: $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. O módulo de um vetor pode ser escrito entre barras, da forma $|\mathbf{x}|$, ou em caractere sem negrito, da forma x. Escolhemos a segunda notação.

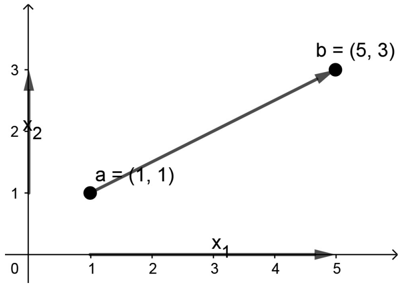

Figura 7 – Fonte: o próprio autor.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1} &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
\mathbf{e_2} &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
\mathbf{e_3} &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
\mathbf{e_n} &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

A soma de dois vetores em um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é definida pela soma de suas componentes. Sejam os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Onde x_i e y_i são as componentes de $\curvearrowleft$ e $\curvearrowright$, respectivamente. Dadas estas definições, um vetor $\curvearrowleft$ qualquer de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{e_1} + x_2.\mathbf{e_2} + \cdots + x_n.\mathbf{e_n}$$

Ou, equivalentemente:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i e_i}$$

Conforme demonstrado por Goldblatt (1993), um sistema lógico para a TRR baseia-se em $\mathbb{R}^n$ tal que $n \geq 2$. Portanto, o conjunto T de nossa estrutura temporal $E = \langle T, \prec \rangle$ será $T = \mathbb{R}^n$. Como na TRR estamos tratando do tempo enquanto uma dimensão do espaço, então um instante pode ser entendido como um evento no espaço-tempo. Portanto, podemos nos referir aos elementos de T como instantes ou eventos, indistintamente. Tendo definido T, resta agora definir a relação $\prec$. Esta relação será definida para instantes que se relacionam temporalmente, como eventos do tipo tempo e do tipo luz.

Recorde que, nos gráficos apresentados na seção anterior, dois eventos são de tipo tempo se estão dentro do cone de luz um do outro; dois eventos são do tipo luz se ocorrem em cima do cone de luz um do outro; e dois eventos são do tipo espaço se ocorrem fora do cone de luz um do outro. Dois observadores em movimento entre si podem discordar quanto à ordem dos eventos do tipo espaço. Contudo, a ordem dos eventos de tipo tempo e luz é sempre a mesma em qualquer referencial, e é dada por (GOLDBLATT, 1993, p. 120):

$$x \preceq y \text{ sse} \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 \leq (y_n - x_n)^2 \text{ e } x_n \leq y_n \tag{4.1}$$

Intuitivamente, $x \preceq y$ apenas se um sinal luminoso pode ser enviado de x até y. Perceba que usamos o símbolo $\preceq$ ao invés do símbolo $\prec$ que vínhamos usando ao falar de estruturas temporais. A expressão $x \preceq y$ pode ser lida como 'o evento y acontece depois ou ao mesmo tempo que o evento x'. Isso pode parecer estranho do ponto de vista da física clássica, onde se tem o tempo totalmente independente do espaço. Na física clássica não faz sentido dizer que 'dois instantes acontecem ao mesmo tempo', pois nesse caso estaríamos falando de um único e mesmo instante. Mas como na relatividade tratamos o espaço e o tempo em conjunto, esta relação se torna possível. Isto faz de $\preceq$ uma ordem reflexiva.

Além de reflexiva, a ordem $\preceq$ é transitiva (o que é dado pela relação $\leq$) e reticulada. Dizer que a ordem $\preceq$ sobre $\mathbb{R}^n$ é transitiva significa que para quaisquer três elementos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.

Um conjunto é reticulado se é parcialmente ordenado e se para quaisquer dois elementos x e y que pertencem ao conjunto, $\{x,\ y\}$ possui um menor limite superior e maior limite inferior, ou seja, existe um supremo e um ínfimo de $\{a,\ b\}$. Por exemplo, seja A um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\leq$ e B um subconjunto de A: um elemento $m \in A$ é chamado 'limite superior' de B se para todo $x \in B$, $x \leq m$; um elemento $n \in A$ é chamado de 'limite inferior' de B se para todo $x \in B$, $n \leq x$; um elemento $s \in A$ é chamado de 'supremo' de B se é o menor limite superior de B; e um elemento $i \in A$ é chamado de ‘ínfimo’ ´de B se é o maior limite inferior de B. Portanto, dizer que uma ordem sobre $\mathbb{R}^n$ é reticulada significa que para quaisquer três elementos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \preceq y$ e $x \preceq z$ existe um elemento $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \preceq w$ e $z \preceq w$. Vamos entender melhor a ordem $\prec$ com um exemplo.

Seja $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, tal que $a = (3,3)$, $b = (4,6)$ e $c = (8,4)$, vamos demonstrar que: $a \preceq b$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(b_i - a_i)^2 &\leq (b_n - a_n)^2 \\
(4-3)^2 &\leq (6-3)^2 \\
1^2 &\leq 3^2 \\
1 &\leq 9
\end{aligned}
$$

A fórmula dada em 4.1 é satisfeita e $a \leq b$, portanto $a \preceq b$. Agora vamos checar se $a \preceq c$. Já podemos ver que $a \leq c$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(c_i - a_i)^2 &\leq (c_n - a_n)^2 \\
(8-3)^2 &\leq (4-3)^2 \\
5^2 &\leq 1^2 \\
25 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Mas vemos que, embora $a \leq c$, a fórmula 4.1 não é satisfeita. Portanto, $a \npreceq c$. Esta relação pode ser melhor visualizada na figura 8.

Na figura 8 vemos que, dados os valores $a = (3,3)$, $b = (4,6)$ e $c = (8,4)$, b está dentro do cone de luz de a, portanto $a \preceq b$. Já c está fora do cone de luz de a, portanto $a \npreceq c$ A ordem desses eventos a e c vai depender do referencial que se adote. .

Então o sistema formal que apresentaremos para tal estrutura deverá ser correto e completo em relação às classes de estruturas:

Reflexivas: para todo instante $t \in T$, $t \preceq t$;

Transitivas: para todo instante $t, t', t'', \in T$, se $t \preceq t'$ e $t' \preceq t''$ então $t \preceq t''$; e

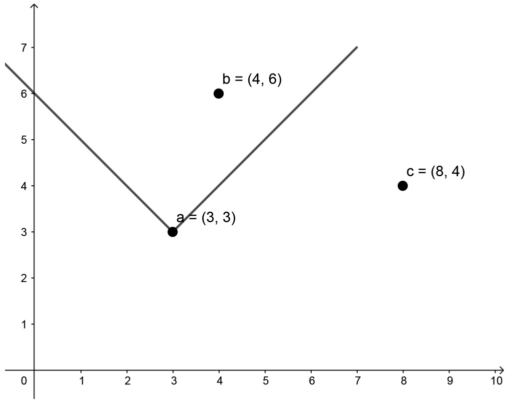

Figura 8 – Fonte: o próprio autor.

Reticuladas: para todo instante $t, t', t'', \in T$, se $t \preceq t'$ e $t \preceq t''$ então existe um instante $t''' \in T$ tal que $t' \preceq t'''$ e $t'' \preceq t'''$.

Como visto no primeiro capítulo, apresentar um sistema formal é justamente escolher um conjunto de axiomas como ponto de partida, que acreditamos capturar tais propriedades de ordenação temporal.

4.2 SISTEMA KT4G

O estudo de lógicas temporais relativísticas foi iniciado por Arthur Prior. Prior mostrou que a lógica adequada para a TRR é o sistema modal alético **S4.2** com a interpretação diodoreana de modalidade (PRIOR, 1967, p. 203). Para entender isto precisamos, primeiramente, abordar o que é um sistema modal e o que é a interpretação diodoreana de modalidade.

De modo geral, a lógica modal alética trata dos conceitos de necessidade e possibilidade. A palavra 'modal' se refere às modalidades em que uma sentença pode ser verdadeira ou falsa: necessariamente verdadeira, necessariamente falsa, possivelmente verdadeira ou possivelmente falsa. A lógica modal trata de sentenças, como por exemplo: 'é possível que esteja chovendo em Florianópolis agora', ou 'necessariamente, está chovendo ou não está chovendo em Florianópolis agora'.

A discussão sobre modalidade vem desde Aristóteles, que chegou a tentar uma teoria do silogismo para sentenças modais. Embora discussões continuassem sendo feitas ao longo da história, os primeiros sistemas formais de lógica modal só surgiram no século XX, com C. I. Lewis. A intenção original de Lewis não era somente investigar os conceitos de necessidade e possibilidade. A principal motivação de Lewis era desenvolver um sistema lógico que não gerasse os mesmos resultados contra intuitivos que a implicação material ($\rightarrow$) da lógica clássica gera.

Vamos recordar que uma sentença do tipo 'se p então q' só é falsa se o antecedente (p) for verdadeiro e o consequente (q) falso, do contrário, a sentença é verdadeira. O problema contra intuitivo é que uma sentença pode ser verdadeira mesmo que o antecedente e o consequente não tenham nenhuma relação um com o outro. Na lógica clássica, a fórmula $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ é válida. Repare: se esta fórmula fosse falsa, ambos $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow p)$ deveriam ser falsos. Mas se $(p \rightarrow q)$ é falso então p é verdadeiro e q é falso, e se $(q \rightarrow p)$ é falso, então q é verdadeiro e p é falso – o que é contraditório. Isso significa que dadas duas sentenças quaisquer, ao menos uma implica a outra.

Com a intenção de superar esses resultados pouco intuitivos com relação à implicação material, Lewis procurou desenvolver uma lógica para uma implicação estrita ($\prec$). Uma fórmula condicional estrita, do tipo $p \prec q$ é verdadeira apenas se é impossível que o antecedente seja verdadeiro e o consequente falso, o que é equivalente a $(\neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ e $\Box(p \rightarrow q)$, onde $\Diamond$ é o operador que representa a possibilidade e $\Box$ representa a necessidade. Desse modo, as fórmulas podem ser lidas como 'não é possível que p seja verdadeiro e q falso' e 'necessariamente, se p é verdadeiro então q é verdadeiro', respectivamente. A partir disso, a lógica modal passou a se concentrar no estudo dos operadores de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$).

Logo foram surgindo outros sistemas lógicos que tratam dos modos como uma sentença pode ser verdadeira ou falsa: as lógicas temporais, deônticas, epistêmicas. Todas compartilhando similaridades os sistemas desenvolvidos por Lewis. A rigor, todos esses sistemas são classificados como lógicas modais, mas a lógica modal alética (dos operadores $\Box$ e $\Diamond$) costuma ser chamada apenas de 'lógica modal' sem causar confusões.

Como foi dito, as discussões sobre a modalidade vêm desde Aristóteles, e uma das contribuições feitas ao longo da história é devida ao filósofo Diodoro Cronos (... – 284 a.C). Para definir sua ideia de possibilidade, Diodoro desenvolveu o chamado 'Argumento do Dominador'. O argumento do dominador de Diodoro é descrito em três sentenças (ØHRSTRØM; HASLE, 2015):

1) Toda proposição verdadeira sobre o passado é necessária.

2) Uma proposição impossível não se segue depois de uma possível.

3) O que não é verdadeiro agora e nem será verdadeiro no futuro, é possível.

Na primeira afirmação o passado é tido como necessário, pois uma vez que não é possível alterá-lo, as afirmações verdadeiras sobre o passado continuarão sempre verdadeiras, ou seja, são necessariamente verdadeiras. A segunda afirmação diz que se algo é possível então não se tornará impossível. E a terceira afirmação diz que o que é possivelmente verdadeiro não acontece e nem nunca acontecerá. Ora, assumindo que as afirmações (1) e (2) são aceitáveis então a afirmação (3) se torna implausível. Portanto, se a afirmação (3) é falsa, o 'possível', na verdade, é aquilo que 'é verdadeiro agora ou será verdadeiro no futuro. E o 'necessário' é aquilo que 'é e sempre será verdadeiro'. Em outras palavras:

> Diodoro define o possível como aquilo que ou é ou será, o impossível como aquilo que sendo falso não será verdadeiro, o necessário como aquilo que sendo verdadeiro não será falso e o não-necessário como aquilo que ou é já ou será falso. (KNEALE; KNEALE, 1980, p. 120).

Veja que Diodoro dá uma interpretação temporal para as modalidades de necessidade e possibilidade. Por isso, a interpretação diodoreana pode ser aplicada a sistemas modais aléticos.

Lewis formulou cinco sistemas de lógica modal, que receberam os nomes de: **S1**, **S2**, **S3**, **S4** e **S5**. O sistema **S4.2** contém todos os axiomas de **S4** e mais um, designado pelo número 2 ou pela letra G (por conta de Peter T. Geach). Os axiomas de **S4.2** são:

Axioma LP: α, tal que α é uma tautologia da lógica proposicional clássica

Axioma K: $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

Axioma T: $\Box\alpha \to \alpha$

Axioma 4: $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

Axioma G: $\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

Prior (1967) foi o primeiro a sugerir que a lógica mais adequada para a TRR é o sistema **S4.2** com a interpretação diodoreana de modalidade. Mais tarde, em 1993, o lógico Robert Goldblatt demonstrou que tal sistema é completo em relação à estrutura temporal baseada no espaço-tempo de Minkowski, ou seja, que todas as fórmulas válidas nesta estrutura são teoremas de **S4.2**.

Nossa apresentação de um sistema lógico para a TRR será baseada nesses trabalhos. Usaremos os axiomas de **S4.2**, porém com operadores temporais para o passado e futuro. Mostraremos que o sistema é correto e completo em relação à classe de estruturas reflexivas, transitivas e reticuladas. Pretendemos que essas demonstrações sejam breves e claras, uma vez que usaremos grande parte dos resultados já provados no primeiro capítulo deste trabalho e não precisaremos repeti-los.

O sistema que apresentaremos a seguir é uma extensão de $\mathbf{K}_t$, pois contém todos os axiomas de $\mathbf{K}_t$ e mais alguns. Para tornar a leitura mais intuitiva, vamos nos referir às extensões de $\mathbf{K}_t$ como a letra **K** seguida dos nomes dos axiomas adicionais (sem subscritos). Sendo assim, chamaremos de **KT4G** o sistema composto pelos seguintes axiomas:

Axioma LP: α, tal que α é uma instância de tautologia da lógica proposicional clássica

Axioma $\mathbf{K}_f$: $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$

Axioma $\mathbf{K}_p$: $H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$

Axioma GP: $\alpha \to GP\alpha$

Axioma HF: $\alpha \to HF\alpha$

Axioma $\mathbf{T}_f$: $G\alpha \to \alpha$ (reflexividade)

Axioma $\mathbf{T}_p$: $H\alpha \to \alpha$ (reflexividade)

Axioma $\mathbf{4}_f$: $G\alpha \to GG\alpha$ (transitividade)

Axioma $\mathbf{4}_p$: $H\alpha \to HH\alpha$ (transitividade)

Axioma $\mathbf{G}_f$: $FG\alpha \to GF\alpha$ (convergente)[3]

Axioma $\mathbf{G}_p$: $PH\alpha \to HP\alpha$ (convergente)

E como regras de inferência pra **KT4G**, temos:

[3]Os dois axiomas em conjunto caracterizam uma ordem reticulada.

MP(*Modus Ponens*): $\langle\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \beta\rangle$

GT(Generalização Temporal): $\langle\alpha, G\alpha\rangle$ e $\langle\alpha, H\alpha\rangle$, tal que α é um teorema.

Vamos, na sequência, provar os resultados de correção e completude para a lógica **KT4G**.

4.2.1 Correção

Vamos, a seguir, demonstrar que todos os axiomas de **KT4G** são válidos na classe K de estruturas reflexivas, transitivas e reticuladas, e que, portanto, **KT4G** é correto em relação à K.

Teorema 4.1 (Teorema da Correção): O sistema **KT4G** é correto em relação à classe K de estruturas reflexivas, transitivas e reticuladas.

Prova: a prova é feita caso a caso dos axiomas e regras de inferência de **KT4G**. As regras de inferência e os axiomas LP, K_f, K_p, GP e HF já foram demonstrados no primeiro capítulo para o sistema $\mathbf{K_t}$. Como a classe de estruturas K_0 é a classe de todas as estruturas temporais, então as fórmulas válidas em K_0 são validas em qualquer estrutura, portanto também são válidas em K. Assim, resta demonstrar demais axiomas.

Axioma $\mathbf{T_f}$ ($\boldsymbol{G\alpha \to \alpha}$): Vamos supor que o axioma T_f não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(G\alpha \to \alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(G\alpha, t) = 1$ e $v(\alpha, t) = 0$. De $v(G\alpha, t) = 1$ segue-se que para todo instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$, $v(\alpha, t') = 1$. Como a relação $\prec$ é reflexiva, então para qualquer instante $t \in T$, $t \prec t$. Dessa forma, $v(\alpha, t) = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t) = 0$ – contradição. Logo, o axioma T_f é válido em K.

Axioma $\mathbf{T_p}$ ($\boldsymbol{H\alpha \to \alpha}$): Vamos supor que o axioma T_p não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(H\alpha \to \alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(H\alpha, t) = 1$ e $v(\alpha, t) = 0$. De $v(H\alpha, t) = 1$ segue-se que para todo instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$, $v(\alpha, t') = 1$. Como a relação $\prec$ é reflexiva, então para qualquer instante $t \in T$, $t \prec t$. Dessa forma, $v(\alpha, t) = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t) = 0$ – contradição. Logo, o axioma T_p é válido em K.

Axioma 4_f ($G\alpha \rightarrow GG\alpha$): vamos supor que o axioma 4_f não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(G\alpha \rightarrow GG\alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(G\alpha, t) = 1$ e $v(GG\alpha, t) = 0$. Deste último segue-se que deve haver um instante $t' \in T$, tal que $t \prec t'$ e $v(G\alpha, t') = 0$. E deste segue-se que deve haver um instante $t'' \in T$ tal que $t' \prec t''$ e $v(\alpha, t'') = 0$. Como a relação $\prec$ é transitiva, então para quaisquer três instantes t, t' e t'' que pertencem a T, se $t \prec t'$ e $t' \prec t''$ então $t \prec t''$. Como temos que $v(G\alpha, t) = 1$, então $v(\alpha, t'') = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t'') = 0$ – contradição. Logo, o axioma 4_f é válido em K.

Axioma 4_p ($H\alpha \rightarrow HH\alpha$): vamos supor que o axioma 4_p não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(H\alpha \rightarrow HH\alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(H\alpha, t) = 1$ e $v(HH\alpha, t) = 0$. Deste último segue-se que deve haver um instante $t' \in T$, tal que $t' \prec t$ e $v(H\alpha, t') = 0$. E deste segue-se que deve haver um instante $t'' \in T$ tal que $t'' \prec t'$ e $v(\alpha, t'') = 0$. Como a relação $\prec$ é transitiva, então para quaisquer três instantes t, t' e t'' que pertencem a T, se $t' \prec t$ e $t'' \prec t'$ então $t'' \prec t$. Como temos que $v(H\alpha, t) = 1$, então $v(\alpha, t'') = 1$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t'') = 0$ – contradição. Logo, o axioma 4_p é válido em K.

Axioma G_f ($FG\alpha \rightarrow GF\alpha$): vamos supor que o axioma G não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(FG\alpha \rightarrow GF\alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(FG\alpha, t) = 1$ e $v(GF\alpha, t) = 0$. De $v(FG\alpha, t) = 1$ segue-se que existe um instante $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $v(G\alpha, t') = 1$. E de $v(GF\alpha, t) = 0$ segue-se que existe um instante $t'' \in T$ tal que $t \prec t''$ e $v(F\alpha, t'') = 0$. Como a relação $\prec$ é reticulada, então quaisquer dois elementos de T possuem um limite superior. Em outras palavras, dados quais quer dois instantes t' e t'' que pertencem a T, existe um terceiro instante t''' que está no futuro de ambos, ou seja, $t' \prec t'''$ e $t'' \prec t'''$. Sendo assim, como $v(G\alpha, t') = 1$ e $t' \prec t'''$, então $v(\alpha, t''') = 1$. E como $v(F\alpha, t'') = 0$ então α é falsa em todos os instantes posteriores a t'', e vimos que $t'' \prec t'''$, então $v(\alpha, t''') = 0$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t''') = 1$ – contradição. Logo, o axioma G_f é válido em K.

Axioma G_p ($PH\alpha \rightarrow HP\alpha$): vamos supor que o axioma G_p não é válido em K. Sendo assim, deve haver algum modelo $\langle T, \prec, v\rangle$ e algum instante $t \in T$ em que a fórmula é falsa, ou seja, $v(PH\alpha \rightarrow$

$HP\alpha, t) = 0$. Disto segue-se que $v(PH\alpha, t) = 1$ e $v(HP\alpha, t) = 0$. De $v(PH\alpha, t) = 1$ segue-se que existe um instante $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ e $v(H\alpha, t') = 1$. E de $v(HP\alpha, t) = 0$ segue-se que existe um instante $t'' \in T$ tal que $t'' \prec t$ e $v(P\alpha, t'') = 0$. Como a relação $\prec$ é reticulada, então quaisquer dois elementos de T possuem um limite inferior. Em outras palavras, dados quais quer dois instantes t' e t'' que pertencem a T, existe um terceiro instante t''' que está no passado de ambos, ou seja, $t''' \prec t'$ e $t''' \prec t''$. Sendo assim, como $v(H\alpha, t') = 1$ e $t''' \prec t'$, então $v(\alpha, t''') = 1$. E como $v(P\alpha, t'') = 0$ então α é falsa em todos os instantes anteriores a t'', e vimos que $t''' \prec t''$, então $v(\alpha, t''') = 0$. Mas tínhamos visto que $v(\alpha, t''') = 1$ – contradição. Logo, o axioma G_p é válido em K.

4.2.2 Completude

Recorde que um sistema formal **F** é completo em relação a uma classe de modelos temporais C (ou, equivalentemente, de estruturas temporais) se toda fórmula válida na estrutura é um teorema do sistema. Formalmente:

F é completo em relação a $C =_{df}$ se $\vDash_C \alpha$ então $\vdash_F \alpha$, para toda fórmula α

E para provar que se $\vdash_C \alpha$ então $\vdash_F \alpha$ podemos provar a sua contrapositiva, que é:

(A) Se $\nvdash_F \alpha$ então existe um modelo $M \in C$ tal que $\nvDash_M \alpha$

Recorde também que, em geral, para um sistema normal **F** existe um modelo canônico que determina **F**. O modelo canônico M^F determina o sistema **F** sse para toda fórmula α, $\vDash_M \alpha$ sse $\vdash_F \alpha$. Isso foi provado no primeiro capítulo deste trabalho. Repare que a contrapositiva de $\vDash_M \alpha$ sse $\vdash_F \alpha$ é $\nvDash_M \alpha$ sse $\nvdash_F \alpha$. Isso já é parte da prova de (A), ou seja, para demonstrar que um sistema **F** é completo em relação a uma classe de modelos C resta simplesmente demostrar que $M^F \in C$.

Frente a isso, precisamos mostrar que o modelo canônico de **KT4G** pertence à classe C de modelos reflexivos, transitivos e reticulados. Nossa estratégia para tornar esta demonstração mais simples será dividir a prova por axiomas. Lembre que estamos nomeando as extensões da lógica $\mathbf{K_t}$ pela letra **K** seguida do nome dos axiomas adicionais sem subscritos. Então o sistema **KT** consistiria nos axiomas e regras de $\mathbf{K_t}$ mais os axiomas T_f e T_p; o sistema **K4** consistiria nos axiomas e regras de $\mathbf{K_t}$ mais os axiomas 4_f e 4_p; e o sistema **KG** consistiria nos axiomas e regras de $\mathbf{K_t}$ mais os axiomas G_f e G_p. Então provaremos que:

- **KT** é completo em relação à classe de modelos $M = \langle T, \preceq, v\rangle$ onde a relação $\preceq$ é reflexiva. Chamaremos esta classe de C-reflexivo.
- **K4** é completo em relação à classe de modelos $M = \langle T, \preceq, v\rangle$ onde a relação $\preceq$ é transitiva. Chamaremos esta classe de C-transitivo.
- **KG** é completo em relação à classe de modelos $M = \langle T, \preceq, v\rangle$ onde a relação $\preceq$ é reticulada. Chamaremos esta classe de C-reticulado.

Com isso, estabeleceremos que o sistema **KT4G** é completo em relação à classe de modelos reflexivos, transitivos e reticulados, como havíamos proposto.

Teorema 4.2 O sistema **KT** é completo em relação à classe de modelos C-reflexivos.

Prova: Pelo teorema 2.7, $\models_M^{KT} \alpha$ sse $\vdash_{KT} \alpha$. Como o axioma T_f pertence ao sistema **KT** ($\vdash_{KT} G\alpha \to \alpha$) então $\models_M^{KT} G\alpha \to \alpha$. Vamos mostrar que, se este é o caso, então a relação $\preceq$ do modelo canônico M^{KT} é reflexiva, e portanto M^{KT} pertence à classe de modelos C-reflexivos.
Seja K o conjunto de estruturas em que o axioma T_f $(G\alpha \to \alpha)$ é válido. Vamos supor, por absurdo, que existe uma estrutura $E = \langle T, \preceq\rangle$ que pertence à classe K tal que a relação $\preceq$ não é reflexiva, ou seja, existe um instante $t \in T$ tal que $t \not\preceq t$. Seja v uma valoração aplicada a E tal que $v(p, t') = 1$ sse $t' \neq t$. Ou seja, esta valoração faz a variável p verdadeira em todos os instantes, exceto em t $(v(p, t) = 0)$. Sendo assim, $v(Gp, t) = 1$, pois p é verdadeira em todos os instantes no futuro de t (embora p seja falsa em t, isso não afeta a verdade de Gp, pois estabelecemos que este instante t não se relaciona com si próprio). Mas se $v(Gp, t) = 1$ e $v(p, t) = 0$ então $v(Gp \to p) = 0$. Se a instância $Gp \to p$ do axioma $G\alpha \to \alpha$ é falsa em um instante da estrutura E, então esta fórmula não é válida em E, e se há uma instância do axioma em questão que não é válida numa estrutura, então o axioma não é válido nesta estrutura. Se o axioma T_f não é válido em E, e $E \in K$, então o axioma também não é válido na classe de estruturas K. Mas isso contradiz nossa suposição inicial de que T_f é válido em K. Logo,

se $\models_M^{KT} G\alpha \rightarrow \alpha$ então a relação $\prec$ do modelo canônico M^{KT} tem que ser reflexiva. Portanto M^{KT} pertence à classe de modelos C-reflexivos.

Teorema 4.3 O sistema **K4** é completo em relação à classe de modelos C-transitivos

Prova: Pelo teorema 2.7, $\models_M^{K4} \alpha$ sse $\vdash_{K4} \alpha$. Como o axioma 4_f pertence ao sistema **K4** ($\vdash_{K4} G\alpha \rightarrow GG\alpha$) então $\models_M^{KT} G\alpha \rightarrow GG\alpha$. Vamos mostrar que, se este é o caso, então a relação $\preceq$ do modelo canônico M^{K4} é transitiva, e portanto M^{K4} pertence à classe de modelos C-transitivos.
Seja K o conjunto de estruturas em que o axioma 4_f $(G\alpha \rightarrow GG\alpha)$ é válido. Vamos supor, por absurdo, que existe uma estrutura $E = \langle T, \preceq \rangle$ que pertence à classe K tal que a relação $\preceq$ não é transitiva, ou seja, existem três instantes $t, t', t'' \in T$ tal que $t \preceq t'$, $t' \preceq t''$ e $t \not\preceq t''$. Seja v uma valoração aplicada a E tal que $v(p, t''') = 1$ sse $t \preceq t'''$, para todo $t''' \in T$. Ou seja, essa valoração faz p verdadeira em todos os instantes no futuro de t, e falsa nos instantes que não se relacionam com t. Se p verdadeira em todos os instantes no futuro de t, então $v(Gp, t) = 1$. E se p é falsa em todos os instantes que não se relacionam com t, então $v(p, t'') = 0$. Como $t' \preceq t''$ e $v(p, t'') = 0$ então $v(Gp, t') = 0$. E se $v(Gp, t') = 0$ e $t \prec t'$ então $v(GGp, t) = 0$. Mas se temos que $v(Gp, t) = 1$ e $v(GGp, t) = 0$ então $v(Gp \rightarrow GGp, t) = 0$. Se a instância $Gp \rightarrow GGp$ do axioma $G\alpha \rightarrow GG\alpha$ é falsa em um instante da estrutura E, então esta fórmula não é válida em E, e se há uma instância do axioma em questão que não é válida numa estrutura, então o axioma não é válido nesta estrutura. Se o axioma 4_f não é válido em E, e $E \in K$, então o axioma também não é válido na classe de estruturas K. Mas isso contradiz nossa suposição inicial de que 4_f é válido em K. Logo, se $\models_M^{K4} G\alpha \rightarrow GG\alpha$ então a relação $\preceq$ do modelo canônico M^{K4} tem que ser transitiva. Portanto M^{K4} pertence à classe de modelos C-transitivos.

Teorema 4.4 O sistema **KG** é completo em relação à classe de modelos C-reticulados.

Prova: Pelo teorema 2.7, $\models_M^{KG} \alpha$ sse $\vdash_{KG} \alpha$. Como o axioma G_f pertence ao sistema **KG** ($\vdash_{KG} FG\alpha \rightarrow GF\alpha$) então $\models_M^{KG} FG\alpha \rightarrow GF\alpha$. Vamos mostrar que, se este é o caso, então a relação $\preceq$ do modelo canônico M^{KG} é reticulada, e portanto M^{KG} pertence à classe de modelos C-reticulados.
Seja K o conjunto de estruturas em que o axioma G_f $(FG\alpha \rightarrow GF\alpha)$ é válido. Vamos supor, por absurdo, que existe uma estrutura $E = \langle T, \preceq \rangle$

que pertence à classe K tal que a relação $\preceq$ não é reticulada, ou seja, para todo instante $t, t', t'' \in T$ tal que $t \preceq t'$, $t \preceq t''$, não existe nenhum instante $t''' \in T$ tal que $t' \preceq t'''$ e $t'' \preceq t'''$. Como não existe nenhum instante no futuro de t', então $v(Gp, t') = 1$ (pois para uma fórmula do tipo Gp ser falsa em t' deveria existir um instante no futuro de t' em que p é falsa). Como $t \preceq t'$ e $v(Gp, t') = 1$ então $v(FGp, t) = 1$. Como não há nenhum instante no futuro de t'' então $v(Fp, t'') = 0$ (pois para a fórmula Fp ser verdadeira em t'' deveria existir ao menos um instante no futuro de t'' em que p é verdadeira). E se $v(Fp, t'') = 0$ e $t \preceq t''$ então $v(GFp, t) = 0$. Mas se temos que $v(FGp, t) = 1$ e $v(GFp, t) = 0$ então $v(FGp \to GFp, t) = 0$. Se a instância $FGp \to GFp$ do axioma $FG\alpha \to GF\alpha$ é falsa em um instante da estrutura E, então esta fórmula não é válida em E, e se há uma instância do axioma em questão que não é válida numa estrutura, então o axioma não é válido nesta estrutura. Se o axioma G_f não é válido em E, e $E \in K$, então o axioma também não é válido na classe de estruturas K. Mas isso contradiz nossa suposição inicial de que G_f é válido em K. Logo, se $\vDash_M^{KG} FG\alpha \to GF\alpha$ então a relação $\preceq$ do modelo canônico M^{KG} tem que ser reticulada. Portanto M^{KG} pertence à classe de modelos C-reticulados.

Teorema 4.5 Sejam $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n$ esquemas de axiomas, e sejam $C_1, \ldots, C_n$ as classes de modelos que determinam cada um desses axiomas, respectivamente. Um sistema $\mathbf{KS_1 \ldots S_n}$ que contém os axiomas $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n$ é determinado pela classe de modelos $C_1 \cap \cdots \cap C_n$.

Prova: Se um axioma S_i é determinado pela classe de modelos C_1, então também é determinado pela classe $C_1 \cap \cdots \cap C_n$, uma vez que esta é um subconjunto de C_1. Logo, um sistema $\mathbf{KS_1 \ldots S_n}$ contendo os axiomas $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n$ é determinado pela classe $C_1 \cap \cdots \cap C_n$.

Teorema 4.6 O sistema **KT4G** é completo para a classe de modelos reflexivos, transitivos e reticulados (C_{T4G}), ou seja, se $\vDash_{C_{T4G}} \alpha$ então $\vDash_{KT4G} \alpha$.

Prova: Sejam C_T, C_4 e C_G as classes de modelos reflexivos, transitivos e reticulados, respectivamente. Pelo teorema 4.5, o sistema **KT4G** é determinado pela classe de modelos $C_T \cap C_4 \cap C_G$. Consequentemente, a classe $C_T \cap C_4 \cap C_G$ pertence a C_{T4G}. Logo, **KT4G** é completo para a classe C_{T4G} de modelos reflexivos, transitivos e reticulados.

Dadas as provas de correção e completude, somos levados a acreditar que o sistema temporal **KT4G** é o mais adequado para a Teoria da Relatividade Restrita. Mas isso apenas quando consideramos os eventos do tipo tempo e do tipo luz. Talvez para eventos do tipo espaço obteríamos uma lógica diferente (veremos mais detalhes sobre esta questão no capítulo seguinte).

Com o que foi apresentado até aqui vemos que a lógica temporal precisa partir de alguma noção de tempo em suas estruturas temporais: é preciso definir um conjunto de instantes e como estes instantes estão ordenados. Embora usualmente pensemos o tempo enquanto uma sequência de instantes linearmente ordenados, há teorias que apresentam resultados diferentes dessa visão clássica, como é o casso da TRR. O papel da lógica temporal é fornecer sistemas lógicos para as diferentes concepções de tempo, mas nesse processo podemos ser levados a compreender melhor essas diferentes ideias de tempo, podendo a lógica ser uma contribuição importante na discussão sobre tempo, física e linguagem.

Embora esforços tenham sido feitos para o desenvolvimento de sistemas lógicos para a TRR, uma lógica temporal que englobe todos os aspectos do tempo advindos da teoria parece ainda não ter sido desenvolvida. Veremos isso no capítulo seguinte, onde apresentaremos alguns desdobramentos da Teoria da Relatividade Restrita que ainda podem ser investigados e como isso influenciaria no desenvolvimento de lógicas temporais.

5 PROBLEMAS EM ABERTO

Embora os resultados que apresentamos sobre a TRR sejam impactantes para a nossa ideia comum de tempo, há ainda outros desdobramentos da teoria que não foram explorados nesse trabalho, mas que são igualmente interessantes e merecem atenção. Para isso iremos, neste capítulo, abordar também a Teoria da Relatividade Geral, mostrando qual rumo novas investigações sobre o tempo na Teoria da Relatividade poderiam tomar.

A Teoria da Relatividade Geral passa a considerar movimentos acelerados, ou seja, referenciais não inerciais. Como consequência disso tem-se uma reformulação da geometria do espaço-tempo e a introdução dos efeitos da gravidade, conforme veremos a seguir. O tempo na TRG passa a ser descrito de acordo com tais mudanças introduzidas. Por isso considera-se a descrição do tempo na Teoria da Relatividade Geral uma descrição mais completa e abrangente.

5.1 EVENTOS DO TIPO ESPAÇO

Vimos, no capítulo anterior, uma lógica temporal para eventos do tipo tempo e do tipo luz. Relembre que dois eventos são do tipo tempo se o intervalo de tempo entre eles é maior que o intervalo de espaço, ou seja, $c\Delta t > \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0$. Também podemos dizer que dois eventos do tipo tempo estão dentro do cone de luz um do outro. Dois eventos são do tipo luz quando o intervalo de tempo entre eles é igual ao intervalo de espaço, ou seja, $c\Delta t = \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$. E dois eventos são do tipo espaço quando o intervalo de espaço entre eles é maior que o intervalo de tempo, ou seja, $c\Delta t < \Delta x$ e, portanto, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$. Eventos do tipo espaço estariam fora do cone de luz um do outro.

Como visto na figura 5, em um dos referenciais o evento B acontece antes do evento C, mas no outro referencial é o evento C que acontece antes de B. Estes eventos estão fora do cone de luz um do outro, ou seja, são eventos do tipo espaço. Tais eventos não se relacionam causalmente: qualquer sinal luminoso emitido por um deles nunca atingirá o outro (dado o limite da velocidade da luz). Para eventos como esse, que estão muito distantes no espaço, a definição de uma ordem entre eles parece ser muito mais complicada, pois vai variar conforme cada observador em movimento.

A lógica temporal apresentada no capítulo anterior não se aplica a eventos do tipo espaço, mas apenas do tipo tempo e luz, onde a ordem é a mesma para qualquer referencial. Contudo, uma abordagem completa do tempo na TRR deveria considerar também tais eventos de tipo espaço. Mas para isso, deveríamos responder primeiramente:

- Quais são as diferentes ordens em que um número n de eventos pode ocorrer para diferentes observadores?

Com isso conseguiríamos uma semântica adequada, estando aptos a definir nosso conjunto T de instantes e a relação $\prec$ com base na ordenação dos eventos de tipo espaço. Estabelecida esta semântica precisaríamos ainda definir novos axiomas que capturem a ordem temporal destes eventos. Este empreendimento ainda não foi realizado, mas se sua realização for possível, consistirá em um importante avanço na área de lógicas temporais para a TRR.

5.2 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

O nome 'Teoria da Relatividade Restrita' está relacionado ao fato da teoria estar restrita a movimentos uniformes. Vimos que as transformações de Lorentz calculam como fazer as transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais, ou seja, referenciais que não sofrem aceleração ou mudança de direção (a soma das forças que atuam sobre esses referenciais é igual a zero). A Teoria da Relatividade Geral surge da generalização das transformações para qualquer referencial, inclusive não inerciais. Mas ao considerarmos a aceleração nos deparamos com novos problemas relacionados ao tempo e ao espaço, tão impactantes quanto os resultados da TRR. Vejamos isso através de um exemplo.

Sejam dois observadores, S e S', tal que S' está em movimento circular. Para que um movimento circular ocorra é necessário que uma força seja aplicada a ele, portanto o referencial S' não é um referencial inercial como vínhamos tratando até então. Vamos imaginar ambos em um sistema de coordenadas com dois eixos, onde S' mantém um movimento circular em torno de um ponto P, enquanto S permanece parado na origem do sistema de coordenadas em $(0, 0)$, como na figura 9.

O problema que surge deste exemplo é em relação à geometria que tomamos por base nas representações dos diagramas. Vamos supor que a unidade dos eixos esteja em metros. Então a distância entre

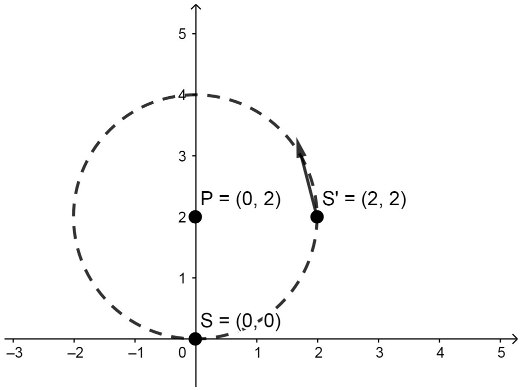

Figura 9 – Fonte: o próprio autor.

o referencial S e o ponto P é de dois metros, conforme figura 9. Se o observador situado em S quiser saber o tamanho da circunferência (perímetro) do círculo que S' percorre, bastaria usar a fórmula:

$$C = 2\pi r$$

Onde r é o valor da distância entre S e o ponto P, ou seja, é o valor do raio do círculo, que nesse caso é 2 metros; π é a constante de valor $3,14$; e C é o valor da circunferência do círculo. Então o observador S diria que o comprimento da circunferência é $2\pi r$. Mas o que diria o referencial S'?

Recorde que as transformações de Lorentz preveem um encurtamento do espaço na direção do movimento, e apenas na direção do movimento. Então o referencial S' verá um encurtamento no círculo que percorre, mas não na distância entre ele e o ponto P. Portanto, para o referencial S':

$$C \neq 2\pi r$$

Com isso o referencial S' concluiria que a geometria euclidiana não é válida para ele. Se adicionarmos movimentos acelerados na TRR decorre que os observadores acelerados descreveriam uma geometria não euclidiana. Este problema levou a uma reformulação da geometria do espaço-tempo que se deu com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral.

Não vamos apresentar todos os resultados da Teoria da Relatividade Geral, nem fazer qualquer abordagem matemática da mesma, mas apresentaremos apenas o que concernir para a discussão sobre problemas em aberto em relação a lógicas temporais para a Teoria da Relatividade. Um dos resultados importantes é que a trajetória da luz pode ser curvada por espaços com grande concentração de massa. A primeira confirmação disto se deu em 1919 durante um eclipse solar. Uma das observações deste desvio da trajetória da luz foi feita por físicos ingleses na cidade de Sobral/CE: "fotografias tiradas pelos astrônomos ingleses comprovaram o desvio da luz pela presença de campos gravitacionais intensos" (VIDEIRA, 2005, p. 83).

Isso tem algumas implicações para o sistema temporal que apresentamos no capítulo anterior. Um dos primeiros a comentar o resultado que isso traria para a lógica temporal foi Prior (1967), que reconheceu que o axioma G ($FG\alpha \rightarrow GF\alpha$) não valeria se considerássemos este aspecto da curvatura da luz. O axioma G representa a intersecção dos cones de luz: se dois eventos b e c estão no futuro de a, então existe um evento d que está no futuro de b e c, como na imagem 10.

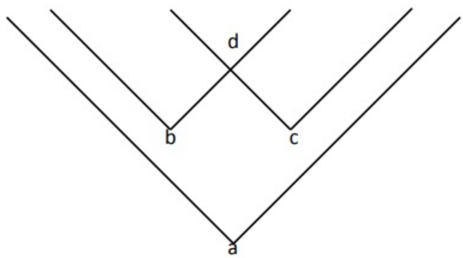

Figura 10 – Fonte: o próprio autor.

Na relatividade geral, podemos ter cones de luz tão curvados que essa intersecção nunca aconteceria. Portanto uma lógica temporal para a relatividade geral não conteria os axiomas G_f e G_p. Outra coisa que deveria ser levado em consideração no estudo de lógicas temporais para a TRG é a dilatação temporal causada pela gravidade e os casos em que essa dilatação pode ser tão grande ao ponto de não haver mais tempo, como é previsto em buracos negros. Vamos entender isso brevemente.

O efeito da dilatação temporal causada pela gravidade surge como decorrência da introdução do princípio da equivalência. O princípio da equivalência surge após Einstein constatar a dificuldade em detectar um campo gravitacional. O princípio da equivalência diz que nenhuma experiência local pode detectar a presença de um campo gravitacional (cf. EINSTEIN, 1999). Ou seja, não há como saber se o movimento de queda de um corpo é resultado da atração gravitacional ou de um referencial acelerado.

Imaginemos uma nave em aceleração constante de $9,8m/s^2$ (mesma aceleração gravitacional da Terra), porém longe de qualquer campo gravitacional. Uma pessoa dentro desta nave teria a mesma sensação de gravidade que teria se estivesse na Terra. Se esta pessoa soltasse um objeto veria o mesmo realizar um movimento de queda até o chão da nave. Suponhamos que a pessoa dentro da nave não tenha nenhuma visão do ambiente externo. Como ela saberia se a queda dos objetos é resultado da atração de um campo gravitacional ou da aceleração da nave? Esta é a equivalência do princípio de equivalência: os efeitos aparentes da força gravitacional são equivalentes aos efeitos de um referencial em aceleração.

Uma das conclusões a que Einstein chegou após estabelecer o princípio de equivalência é que, se a gravidade não pode ser detectada por experimentos locais, então talvez ela não seja de fato uma força, no mesmo sentido do magnetismo, por exemplo, mas sim uma característica do próprio espaço, o que corroborou para a formulação de um espaço curvo (não euclidiano), onde a gravidade seria uma manifestação da curvatura do espaço.

Uma previsão do princípio de equivalência é a de que, na presença de um campo gravitacional o tempo flui mais lentamente que na ausência de um. Este fenômeno é conhecido como dilatação gravitacional do tempo. Um relógio situado na superfície de um planeta com uma aceleração gravitacional maior que $9,8m/s^2$ trabalharia de forma mais vagarosa que nossos relógios. Esta dilatação é proporcional à aceleração gravitacional de um campo: quanto maior a gravidade maior a dilatação do tempo. A explicação de o fenômeno de dilatação temporal ocorrer também como efeito de campos gravitacionais decorre justamente do princípio de equivalência: uma vez que os efeitos de um referencial acelerado são equivalentes ao de um campo gravitacional, o mesmo fenômeno de dilatação temporal que ocorre em sistemas acelerados deve ocorrer também sob a ação de acelerações gravitacionais.

Existem algumas questões em relação ao tempo na TRG que não são previstas na TRR. Uma delas é o fenômeno chamado de singularidade, mas para explica-lo é necessário abordar primeiramente outra previsão da TRG, os buracos negros.

Buracos negros são geralmente formados por estrelas compactas que criam regiões no espaço com um campo gravitacional tão forte que nem a luz consegue escapar. São chamados buracos negros justamente porque a luz emitida por essas estrelas não nos atinge: qualquer luz emitida pela estrela seria puxada de volta para sua superfície devido à sua força gravitacional. Sendo assim, o que aconteceria então ao tempo em regiões do espaço com aceleração gravitacional maior que a velocidade da luz, os buracos negros?

Para responder a esta questão, suponhamos dois observadores, S e S' (seguindo o exemplo dado por Pires (2008, p. 359)). O observador S' viaja em direção ao buraco negro enquanto S permanece em uma nave orbitando o mesmo. S' envia, de acordo com seu relógio, um sinal de rádio para S a cada segundo. S receberá os sinais enviados por S' em intervalos de tempo cada vez maiores à medida que S' se aproxima do horizonte de eventos do buraco negro[1]. Para S, o tempo de S' parece cada vez mais lento. Os sinais que S' envia para S serão recebidos em intervalos de tempo cada vez maiores de modo que o sinal que S' enviar após cruzar o horizonte de eventos levará um tempo infinito para alcançar S. S' não veria nada de estranho ao passar pelo horizonte de eventos, mas S veria o tempo no horizonte de eventos passar de forma infinitamente lento. A ideia da não passagem do tempo em um buraco negro é consequência do ponto de vista de um observador externo. A ideia de que pode haver um fim no tempo para corpos em um buraco negro é chamada de singularidade.

A implicação deste exemplo para a lógica temporal está em como considerar a atribuição de verdade ou falsidade à afirmações sobre o futuro que S' fizesse, visto do seu referencial não haver passagem do tempo. Ou seja, como incluiríamos essas regiões do espaço-tempo em uma semântica para a lógica temporal? Este é outro interessante problema a ser estudado no desenvolvimento de sistemas lógicos temporais para a TRG.

A partir da breve apresentação que fizemos aqui sobre algumas questões ainda em aberto, somos levados a crer que uma lógica temporal para a Teoria da Relatividade Geral deveria considerar um espaço-tempo não euclidiano e a dilatação gravitacional do tempo. Isso tudo nos mostra que há ainda muitos problemas em aberto no que se refere ao desenvolvimento de lógicas temporais para a Teoria da Relatividade, mas isso dá margem à futuras pesquisas que podem contribuir com o avanço da lógica temporal nessa área.

[1] O horizonte de eventos de um buraco negro, também conhecido como ponto de não retorno, é uma superfície imaginária que limita as fronteiras do buraco negro: é o ponto a partir do qual nada consegue escapar à força gravitacional, nem mesmo a luz.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como tema central uma lógica temporal para a concepção de tempo da Teoria da Relatividade Restrita. O interesse nessa discussão partiu do estudo da lógica temporal e da Teoria da Relatividade e do questionamento sobre como essas duas áreas poderiam se relacionar. Destes estudos surgiu o problema de tentar compreender a noção de tempo dentro da Teoria da Relatividade e como esta noção de tempo poderia ser usada para a construção de uma lógica temporal.

Para esta investigação foi realizado, primeiramente, uma breve discussão sobre a relação entre tempo, lógica e física, a fim de situar o problema. Depois fizemos uma apresentação do menor sistema de lógica temporal normal, a fim de compreender o funcionamento das lógicas temporais e usar os resultados obtidos sobre este sistema. Após isso, apresentamos a Teoria da Relatividade Restrita, com foco no conceito de tempo dentro da teoria. Vimos que os principais resultados acerca do tempo residem nos diagramas de espaço-tempo de Minkowski, o que formará a base para uma semântica da lógica temporal relativística, que apresentamos no capítulo seguinte. No terceiro capítulo vimos que a ordem dos instantes na Teoria da Relatividade Restrita é obtida com base na geometria do espaço-tempo, e uma axiomatização para isso parte de sistemas da lógica modal, como demonstrado por Goldblatt. Ao final, fizemos um breve levantamento de problemas ainda em aberto a fim de indicar caminhos para futuras pesquisas nessa área.

Com o estudo aqui apresentado vemos que a lógica temporal para a Teoria da Relatividade deve levar em conta aspectos espaciais, uma vez que espaço e tempo estão interligados na teoria. Com isso parece que começamos a nos aproximar das lógicas do espaço. As lógicas espaciais partem do estudo da relação entre estruturas geométricas e a linguagem espacial que as descrevem. Embora a motivação inicial do nosso estudo aqui tenha sido o tempo, acabamos nos encaminhando para uma definição de ordenação temporal que se baseia na geometria do espaço de Minkowski. E os próximos estudos possíveis sobre lógica temporal e Teoria da Relatividade também partiriam da geometria do espaço-tempo, portanto a abordagem de lógicas espaciais parece ser algo a se considerar em discussões futuras.

Também vimos que o sistema apresentado por Goldblatt para o tempo da TRR usa a lógica modal com a interpretação diodoreana de modalidade. Aqui mostramos que podemos nos manter na lógica temporal, obtendo as provas de correção e completude com operadores para o passado e futuro. E as provas de correção e completude são justamente o cerne do desenvolvimento de sistemas formais: é o que nos permite mostrar que determinados axiomas capturam as noções semânticas do tempo e vice-versa.

A importância da lógica tem se tornado cada vez mais clara para áreas fora da filosofia[1]. A pesquisa aqui realizada mostrou essa importância para uma área da física moderna, a Teoria da Relatividade, o que mostra a relevância de uma pesquisa dessa natureza para a contribuição no entendimento da relação entre física e lógica. Embora o assunto aqui discutido tenha sido investigado desde as primeiras publicações em lógica temporal por Arthur Prior, os problemas em aberto levantados no último capítulo mostram que há ainda a possibilidade de evolução da pesquisa sobre o assunto. A união da ciência e filosofia parece ser um importante caminho a ser seguido pelos que se interessam em compreender os fundamentos de teorias científicas, bem como os que buscam novos olhares sobre investigações filosóficas.

[1]Um exemplo disso são as lógicas quânticas, que levando em consideração princípios da física quântica, chegaram a interessantes consequências filosóficas matemáticas e físicas. Um dos resultados interessantes do estudo de lógicas quânticas baseia-se nos conceitos de identidade e individualidade. Ver Da Costa, 2012.

7 REFERÊNCIAS

AGOSTINHO. [2008], *Confissões* - livros VII,X e XI. Tradução de Arnaldo do Espírito Santo, João Beato e Maria Cristina Castro-Maia de Sousa Pimentel. Covilhã: Universidade da Beira Interior, 2008. Disponível em: <http://www.lusosofia.net/textos/agostinho_de_hipona_confessiones_livros_vii_x_xi.pdf>. Acesso em: 11 Dez. 2018.

ARISTÓTELES. [1991]. *Physics*. Edição de Jonathan Barnes. Princeton: Princeton University Press, 1991. Disponível em: <http://www.filosofia.unimi.it/zucchi/NuoviFile/Barnes\%20\%20-\%20Physics.pdf>. Acesso em: 23 Jan. 2019.

ARISTÓTELES. [2013], *Da interpretação*. Tradução de José Veríssimo Teixeira da Mata. São Paulo: UNESP, 2013.

ARISTÓTELES. [2015], *On the heavens*. Translated by J. L. Stocks. Adelaide: University of Adelaide, 2015. Disponível em: <https://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/heavens/index.html>. Acesso em: 11 Dez. 2018.

BOHM, David. [2015], *A teoria da relatividade restrita*. Tradução de Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora Unesp, 2015.

BURGESS, John. [2002] 'Basic tense logic'. In GABBAY, Dov & GUENTHNER, Franz. *Handbook of philosophical logic*, vol. 7. 2.ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 1-42.

BUVAC, Sasa. A deduction theorem for normal modal propositional logic. In: *International and Interdisciplinary Conference on Modeling and Using Context*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. p. 107-115. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-44958-2_9>. Acesso em: 05 Mar. 2019

Da COSTA, Newton Carneiro Affonso et al. [2012] Sobre uma fundamentação não reflexiva da mecânica quântica. *Scientiae Studia*, v. 10, n. 1, p. 71-104, 2012.

Da COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. [2015]. O que é uma lógica?. *FUNDAMENTO – Revista de pesquisa em filosofia*. n. 10, jan-jun. 2015

EDDINGTON, Arthur Stanley. [1920], *Space time and gravitation* – an outline of the general relativity theory. Cambridge: University Press, 1920.

EINSTEIN, Albert. [1905], *On the electrodynamics of moving bodies.* 1905. Disponível em: `<http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Einstein_1905_relativity.pdf>`. Acesso em: 11 Dez. 2018.

EINSTEIN, Albert. [1999], A teoria da relatividade especial e geral. Tradução de Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto: 1999.

GOLDBLATT, Robert. [1993], *Mathematics of Modality.* California: CSLI Publications, 1993.

HAFELE, Joseph Carl; KEATING, Richard E. [1972] Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. Science, v. 177, n. 4044, p. 166-168, 1972. Disponível em: `<http://virgilio.mib.infn.it/~oleari/public/elementi_fis_teorica/materiale_didattico/Hafele-Keating-predict_observ.pdf>`. Acesso em: 25 Jan. 2019.

HAKLI, Raul; NEGRI, Sara. [2012] *Does the deduction theorem fail for modal logic?.* Kluwer Academic Publishers, 2010. Disponível em: `<https://www.researchgate.net/publication/226190543_Does_the_Deduction_Theorem_Fail_for_Modal_Logic>`. Acesso em: 05 Mar. 2019

KNEALE, William; KNEALE, Martha. [1980] *O desenvolvimento da lógica.* 2 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

MENDELSON, Elliott. [1977], *Introduction to mathematical logic.* 4 ed. London: Chapman & Hall, 1977.

MINKOWSKI, Hermann. [1918], Time and Space. In: *The Monist* – a quarterly magazine. v. XXVIII. Chicago: Open Court Publishing Company, 1918. pp. 288-302. Disponível em: `<https://archive.org/details/monistquart28hegeuoft>`. Acesso em: 11 Dez. 2018.

MÜLLER, Thomas. [2011]. Tense or temporal logic. In *The Continuum Companion to Philosophical Logic*. Edição de Leon Horsten e Richard Pettigrew. Londres: Continuum, 2011. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/6b02/84301bf474ac50de83bfe678715c89827f7b.pdf>. Acesso em: 25 Jan. 2019.

NEWTON, Isaac. [2005], *Princípios matemáticos da filosofia natural*; Óptica; O peso e o equilíbrio dos fluídos. Tradução de Carlos Lopes de Mattos; Pablo Rubén Mariconda; Luiz João Baraúna. São Paulo: Nova Cultural, 2005. (Coleção 'os Pensadores').

PIRES, Antonio S. T. [2008]. *Evolução das ideias da física.* São Paulo: Livraria da Física, 2008.

PRIOR, Arthur. [1957], *Time and Modality.* London: Oxford University Press: 1957.

PRIOR, Arthur. [1967], *Past, present and future.* London: Oxford University Press: 1967.

RESNIK, Robert. [1971], *Introdução à relatividade especial.* Tradução de Shigeo Watanabe. São Paulo: Polígono, 1971.

RODRIGUES, João Manuel Resina. [1998], *Introdução à teoria da relatividade restrita.* Lisboa: IST Press, 1998.

ROVELLI, Carlo. [2018]. *A ordem do tempo.* Tradução de Silvana Cobucci. Rio de Janeiro: Objetiva, 2018. (Edição do Kindle).

RUSSELL, Bertrand. [1966], *ABC da relatividade.* Tradução de Giasone Rebuá. 3 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1966.

VAN FRAASSEN, Bas C. [1970]. *An introduction to the philosophy of time and space.* Nova York: Random House, 1970. Disponível em <https://www.princeton.edu/~fraassen/BvF\%20-\%20IPTS.pdf>. Acesso em: 24 Jan. 2019.

VIDEIRA, Antônio Augusto Passos. [2005]. Einstein e o Eclipse de 1919. In *Física na Escola.* v. 6, n 1, 2005. pp. 83-87. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/eclipse.pdf>. Acesso em: 02 Fev. 2019.

ZALTA, Edward N. [1995]. *Basic concepts in modal logic*. Center for the Study of Language and Information, Stanford University 1995. Disponível em: <http://www.cs.brandeis.edu/~cs112/cs112-2004/newReadings/ConceptsModalLogic.pdf>. Acesso em: 28 Dez. 2018