



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E
SISTEMAS

Stephanie Loi Brião

**Estabilização de Sistemas Lineares com Cálculo Explícito dos Ganhos de
Realimentação via Conjuntos Invariantes Poliédricos**

Florianópolis
2019

Stephanie Loi Brião

Estabilização de Sistemas Lineares com Cálculo Explícito dos Ganhos de Realimentação via Conjuntos Invariantes Poliédricos

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutora em Engenharia de Automação e Sistemas.
Orientador: Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Florianópolis
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Brião, Stephanie Loi

Estabilização de sistemas lineares com cálculo explícito dos ganhos de realimentação via conjuntos invariantes poliédricos / Stephanie Loi Brião ; orientador, Eugênio de Bona Castelan, 2019.

85 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Realimentação de estados. 3. Realimentação estática de saída. 4. Conjuntos poliédricos. 5. Invariância. I. Castelan, Eugênio de Bona . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

Stephanie Loi Brião

Estabilização de Sistemas Lineares com Cálculo Explícito dos Ganhos de Realimentação via Conjuntos Invariantes Poliédricos

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. José Mário Araújo, Dr.
Instituto Federal da Bahia

Prof. Daniel Coutinho, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutora em Engenharia de Automação e Sistemas.

Prof. Werner Kraus Junior, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Orientador

Florianópolis, 30 de setembro de 2019.

Dedico esse trabalho a minha mãe Jeane, a meu pai Renato e a minha avó Claudete.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem ele eu nada seria
A meu orientador Prof. Dr. Eugênio que tanto se dedicou e acreditou no meu potencial
A minha mãe Jeane que tanto sacrifício fez por mim
A meu pai Renato que soube tirar risos de mim mesmo em horas que eu estava triste
A minha avó Claudete que muitas vezes me consolou em momentos difíceis
A meu noivo Luiz por tanto saber me ouvir e dialogar, aos pais do Luiz e sua irmã pelo grande acolhimento
Aos meus dindos, Giovanni e Maria, e minhas primas Monique e Nicole
Aos meus tios Paulo, Raquel, Berna e primos Jana, Laura, Rafa, Jaque, Joaquim
A minha avó Inah (*in memoriam*) pelo exemplo de fé
Aos meus amigos de pós-graduação, em especial, Leonardo Martins, Matheus Pedrosa, Luís Fernando, Karila, Rejane, Leonardo de Assis, Daniel Costa, Sidney, Carla, Carlos
As minhas amigas de Pelotas, Nath e Tami, que mesmo distante eu sabia que tinha o apoio delas
A minha amiga de infância Jeny pelo presente em ser madrinha da Maria Flor
Aos amigos que conquistei em Floripa: Márcia, Dani, Fernanda, Kauê, Ademar, Micarla, Eliete, Janete, Priscila, Moisés, Jéssica, João, Diego, Frei Frigo
Aos membros da banca pelas recomendações a esse trabalho
As minhas orientadoras de mestrado Graçaliz e Catia Maria pelas cartas de referências
Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas e seus professores
Ao secretário Ênio pelo grande suporte
Ao CNPQ pelo apoio financeiro

*"A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus."
(Pitágoras)*

RESUMO

A invariância positiva tem sido reconhecida como uma ferramenta teórica poderosa e amplamente explorada para tratar vários problemas de controle onde é necessário lidar com restrições práticas, como limites de amplitude aplicados às variáveis de controle, estado ou saída. Em particular, a determinação de conjuntos invariantes garante propriedades de estabilidade local para sistemas sujeitos a restrições, funções de Lyapunov poliédricas associadas e permite considerar conjuntos convexos poliédricos. Esses conjuntos têm recebido atenção especial em virtude de sua propriedade de ajustar-se melhor às restrições em amplitude. Nesta tese lida-se com a estabilização de sistemas lineares discretos invariantes no tempo por Realimentação de Estado (*StF*, *State Feedback*) e por Realimentação Estática de Saída (*SOF*, *Static Output Feedback*) via conjuntos invariantes poliédricos. Inicialmente, um método para estabilização por *StF*, baseado em restrição de posto, foi desenvolvido para a resolução das condições algébricas de Invariância Positiva, cuja programação torna-se linear nas variáveis de decisão. O problema de estabilização por *SOF* de sistemas sujeitos a restrições foi abordado via programação bilinear (PB). No caso especial de sistemas sujeitos a perturbações persistentes, cujas amplitudes são limitadas, utiliza-se a propriedade de Δ -invariância, a qual garante que toda trajetória de estados que parte de um conjunto Δ -invariante permanecerá neste conjunto e será ultimamente limitada em algum de seus subconjuntos. A obtenção desta propriedade, para um conjunto de restrições de estado *a priori* conhecido, via relações algébricas que descrevem a Δ -invariância, caracteriza condições lineares em relação às variáveis matriciais envolvidas, incluindo a matriz de ganhos de realimentação. Em geral, o conjunto de restrições de estado ($\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$) não pode ser feito Δ -invariante com uma lei de controle linear ou mesmo não-linear. Neste contexto, objetiva-se nesta tese a determinação conjunta de uma lei de controle linear *SOF*, um poliedro Δ -invariante, contido no interior de \mathcal{X} , e um poliedro mais interno no qual as trajetórias são ultimamente limitadas. Assim, um novo conjunto de condições algébricas é proposto garantindo a propriedade de Δ -invariância e a contratividade de um conjunto interno de \mathcal{X} para um conjunto mais interno cujas trajetórias permanecem limitadas no mesmo. A metodologia de projeto de controladores é baseada na resolução destas relações algébricas via PB e na utilização de uma função objetivo a qual pondera a maximização do poliedro Δ -invariante e a minimização do poliedro com trajetórias ultimamente limitadas. Os exemplos numéricos apresentados mostram que a utilização do *solver* não linear KNITRO permite encontrar soluções adequadas e eficientes tanto para *SOF* quanto para *StF*.

Palavras-chave: Realimentação de Estados. Realimentação Estática de Saída. Conjuntos Poliédricos. Invariância.

ABSTRACT

Positive invariance has been recognized as a powerful and widely explored theoretical tool for various control problems where practical constraints such as amplitude limits applied to control, state, or output variables need to be addressed. In particular, the determination of invariant sets ensures local stability properties for constrained systems, polyhedral Lyapunov functions associated, and it allows to consider polyhedral convex sets. These sets have received special attention because of the propriety they use to fit the amplitude constraints. This thesis deals with the stabilization of discrete linear time-invariant systems by State Feedback (*StF*, *State Feedback*) and Static Output Feedback (*SOF*, *Static Output Feedback*) via polyhedral invariant sets. Initially, a method for stabilization by *StF*, based on rank restriction, was developed for the resolution of Positive Invariance algebraic conditions, which programming becomes linear in the decision variables. The problem of *SOF* stabilization of constrained systems could be approached via bilinear programming (PB). In the special case of systems subjected to persistent disturbances, which amplitudes are limited, the Δ -invariance property is used, and ensures that any state trajectory that starts from a Δ -invariant set shall remain in this set and it shall ultimately be limited in any of its subsets. The obtention of this propriety, for a set of *a priori* known state constraints via algebraic relations describing the Δ -invariance, characterizes linear conditions with respect to the matrix variables involved, including the feedback gain matrix. In general, the state constraint set ($\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$) can not be made Δ -invariant with a linear or even non-linear control law. In this context, the objective of this thesis is the joint determination of a linear control law *SOF*, a Δ -invariant polyhedron, contained within \mathcal{X} , and a more internal polyhedron where the trajectories are ultimately limited. Thus, a new set of algebraic conditions is proposed guaranteeing the propriety of Δ -Invariance and the contractivity of an internal set of \mathcal{X} for a more internal set which trajectories remain limited in it. The controller design methodology is based on the resolution of these algebraic relations via PB and the use of an objective function that considers the maximization of Δ -invariant polyhedron and the minimization of a polyhedron with ultimately limited trajectories. The numerical examples presented show that using the non-linear KNITRO solver allows finding suitable and efficient solutions for both *SOF* and *StF*.

Keywords: State Feedback. Static Output Feedback. Polyhedral Sets. Invariance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Trajetórias dos estados e ações de controle para $x_0 = [-1 \ -1 \ 1]^T$.	45
Figura 2 – Trajetória dos estados e ações de controle para $x_0 = [1.1 \ -0.91 \ -1.5 \ 1.7]^T$	56
Figura 3 – Conjuntos $\mathcal{S}(\gamma I_n)$ (-.-), $\mathcal{S}(L)$ (-) e $\mathcal{S}(KC)$ (- -)	59
Figura 4 – Trajetórias dos estados e ação de controle para $x_0 = [1.85 \ -1.4]^T$.	60
Figura 5 – Conjuntos \mathcal{X} (- -), \mathcal{L}_0 (-) e \mathcal{L}_∞ (-.-) ¹	72
Figura 6 – Conjuntos \mathcal{X} (- -), \mathcal{L}_0 (-), \mathcal{L}_∞ (-.-) e \mathcal{S}_0 (.) ²	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados para alocação de polos	43
Tabela 2 – Resultados para valores decrescentes de β	43
Tabela 3 – Resultados para valores decrescentes de ϕ	44
Tabela 4 – Resultados para alocação de polos	45
Tabela 5 – Resultados para valores decrescentes de β	46
Tabela 6 – Critérios de desempenho para <i>StF</i>	54
Tabela 7 – Projeto <i>StF</i> : K e L para 0.99 e $\alpha = 0.98$	55
Tabela 8 – Critérios de desempenho para <i>SOF</i>	57
Tabela 9 – Projeto <i>SOF</i> : K e L para $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.98$	57
Tabela 10 – Projeto <i>StF</i> : K, L e Q para $\alpha = 0.99, 0.98$ e 0.97	58
Tabela 11 – Projeto <i>StF</i> : $r = 5$	71
Tabela 12 – Projeto <i>SOF</i> : $r = 5$ e $r = 6$	72
Tabela 13 – Projeto <i>StF</i> : $\alpha = 1$ e $r = 4$	74
Tabela 14 – Projeto <i>StF</i> : $\alpha = 0.5$ e $r = 4$	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LDIT	Linear Discreto Invariante no Tempo
SOF	<i>Static Output Feedback</i>
StF	<i>State Feedback</i>
PL	Programação Linear
PB	Programação Bilinear
SDP	Semi-Definida Positiva
PRP	Problema de Restrição de Posto
FLP	Função de Lyapunov Poliédrica
UB	<i>Ultimately Bounded</i>
LFE	Lema de Farkas Estendido

LISTA DE SÍMBOLOS

m_{ij}	Elementos da matriz M
m_i	i -ésima linha de M
M^T	Transposta da matriz M
$\ M\ _\infty$	Norma infinita da matriz M
$\text{posto}(M)$	Posto da matriz M
$\text{Tr}(M)$	Traço da matriz M
I_n	Matriz identidade de dimensão apropriada
\mathbb{S}^N	Conjunto de matrizes simétricas semi-definidas positivas
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais não-negativos
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\hat{M}	Matriz estimada de M
M_0	Valor inicial da matriz M
$\text{diag}\{M_i\}$	Matriz diagonal formada pelas M_i matrizes
\mathcal{M}	Conjunto poliédrico que contém a origem em seu interior
1	Vetor coluna de escalares 1 com dimensão apropriada
0	Vetor coluna de escalares 0 com dimensão apropriada
$\text{vec}(M)$	Vetor coluna formado pelos elementos de M
$V(x_k)$	Função de Lyapunov Poliédrica
$\beta\mathcal{M}$	Conjunto contrativo do poliedro \mathcal{M}
$\sigma(M)$	Conjunto espectral da matriz M
$\rho(M)$	Raio espectral da matriz M
$\lambda_i(M)$	Autovalor i da matriz M
$ M = m_{ij} $	Valor absoluto da matriz M / Valor absoluto de cada escalar de M
$\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$	Conjunto diferença de \mathcal{M} por \mathcal{M}_0

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	OBJETIVOS	27
1.2	ORGANIZAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES	28
2	INVARIÂNCIA POSITIVA E ESTABILIDADE EM SISTEMAS LDIT	31
2.1	INVARIÂNCIA POSITIVA E CONJUNTOS POLIÉDRICOS	31
2.2	ESTABILIDADE COM FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLIÉDRICAS	34
2.3	Δ -INVARIÂNCIA DE CONJUNTOS POLIÉDRICOS	35
2.4	CONCLUSÃO	36
3	ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LDIT VIA RESTRIÇÃO DE POSTO	37
3.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	37
3.2	REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA	39
3.3	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RESTRIÇÃO DE POSTO	41
3.4	EXEMPLOS	42
3.4.1	Sistema 1	42
3.5	CONCLUSÃO	46
4	ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LDIT VIA PROGRAMAÇÃO BILI-NEAR	49
4.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	49
4.2	ESTABILIZAÇÃO LOCAL NA PRESENÇA DE RESTRIÇÕES NO CONTROLE	50
4.3	ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO	52
4.4	EXEMPLOS	53
4.4.1	Sistema 2: Estabilização StF e SOF	54
4.4.2	Sistema 3: Restrição no Controle	58
4.5	CONCLUSÃO	59
5	ESTABILIZAÇÃO SOB RESTRIÇÕES DE SISTEMAS LDIT COM PERTURBAÇÕES VIA PROGRAMAÇÃO BILINEAR	63
5.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	63
5.2	CONDIÇÕES DE INCLUSÃO E Δ -INVARIÂNCIA	64
5.3	ESTRATÉGIA DE PROJETO UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO BILINEAR	68
5.3.1	Aspectos de Projeto	68
5.3.2	Aspectos de Implementação	69
5.4	EXEMPLOS	70
5.4.1	Sistema 4	70
5.4.2	Sistema 5	73
5.5	CONCLUSÃO	75
6	CONCLUSÃO	77

6.1	PUBLICAÇÕES	78
6.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS:	78
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, as funções de Lyapunov poliédricas (FLP) e a propriedade de Invariância Positiva dos conjuntos associados têm recebido atenção no tratamento de diferentes problemas de controle. Dentre estes, cabe destacar a presença de restrições devidas a limites físicos ou de segurança, dos atuadores ou das variáveis de estado e de saída do sistema a controlar (BLANCHINI, F.; MIANI, S., 2015),(CASTELAN; CORSO *et al.*, 2006).

Para um sistema dinâmico autônomo, a propriedade de Invariância Positiva de um dado subconjunto, contido no espaço de estados desse sistema, garante que qualquer trajetória iniciando no interior deste conjunto nele permanece durante toda a sua evolução (HENNET, 1995). Portanto, essa propriedade é verificada pelos conjuntos de nível, associados a funções de Lyapunov, que demonstram a estabilidade (assintótica) de sistemas dinâmicos e, em especial, pelos conjuntos poliédricos associados a FLPs (MOLCHANOV; PYATINITSKIY, 1989),(KIENDL; ADAMY; STELZNER, 1992). Além disso, a existência de um conjunto positivamente invariante, associado ao sistema, garante a estabilidade, ao menos localmente, das trajetórias. Em particular, caso o conjunto invariante seja contrativo, ou seja, as trajetórias do sistema convergem continuamente para um conjunto homotético interno, então esse conjunto assegura a estabilidade assintótica (local) das trajetórias.

Portanto, baseada na propriedade e nos conceitos mencionados, a invariância de conjuntos (*set invariance*, em inglês) é reconhecida como uma ferramenta poderosa e tem sido extensivamente explorada para tratar, principalmente, o controle de sistemas sujeitos a restrições. Nesse contexto, diferentes tipos de conjuntos convexos podem ser considerados para análise e síntese de sistemas de controle, por exemplo, os conjuntos poliédricos, elipsoidais ou de estruturas compostas como a união, a intersecção ou a "casca convexa" de outros conjuntos. Os conjuntos elipsoidais e as estruturas compostas associadas foram considerados, prioritariamente, devido à possibilidade de utilizar-se a programação semi-definida positiva (SDP) e os algoritmos baseados em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities*-LMI) para análise e síntese de sistemas de controle (BOYD *et al.*, 1994),(HU; BLANCHINI, 2010). Por outro lado, os conjuntos poliédricos têm recebido atenção especial pelo motivo de seus formatos serem adaptados à descrição dos limites encontrados na prática. Também, os poliedros apresentam formato mais flexível que os elipsoidais, possibilitando uma melhor adequação ao descrever os conjuntos invariantes associados ao sistema.

Assim, já no final dos anos 80, as FLPs, associadas aos conjuntos invariantes poliédricos, foram utilizadas na solução do problema de regulação linear restrita (PRLR) via programação linear (VASSILAKI; HENNET; BITSORIS, 1988),(HENNET, 1995)(BITSORIS; OLARU, 2013),(BITSORIS; OLARU; VASSILAKI, 2014). Também,

algumas extensões foram propostas para a resolução dos problemas de análise e síntese em sistemas sujeitos a perturbações e sistemas incertos (BLANCHINI, F.; MIANI, S., 2015),(SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997). No caso de sistemas dinâmicos sujeitos a perturbações persistentes, trabalha-se a propriedade de Δ -Invariância, a qual demonstra que toda trajetória, a partir de um conjunto dentro do espaço de estados, permanecerá neste conjunto e, eventualmente, será limitada em alguns de seus subconjuntos (BLANCHINI, Franco, 1990),(MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996).

Nessa tese, as condições algébricas para a invariância positiva de poliedros consideram o cálculo da matriz de ganho de forma explícita, a busca da matriz, que corresponde à FLP, e da matriz que possui limitante superior. Então, ao buscar o ganho para resolver o problema de estabilização de sistemas lineares discretos invariantes no tempo (LDIT), uma abordagem é proposta via restrição de posto (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018). Assim, busca-se uma lei de controle linear clássica, onde a matriz de ganho da realimentação de estados (StF) ou da realimentação estática de saída (SOF) torna o sistema estável em malha fechada.

Diversos critérios de desempenho são definidos na literatura e utilizados na teoria e prática de controle, sendo relacionados aos domínios temporal ou frequencial (HESPANHA, 2009; CHEN, 1998). O desempenho do sistema de controle pode ser entendido através de alguma medida que permita avaliar como evoluem as trajetórias do sistema em função de um critério pré-especificado. Então, acrescenta-se, como restrições adicionais, ao problema StF ou SOF o critério temporal associado à convergência exponencial das trajetórias do sistema e ao esforço de controle (SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997).

Um método clássico para encontrar solução do problema de estabilização é pelo método de posicionamento de polos (SYRMOS; LEWIS, 1993)(CASTELAN; HENNET; VILLARREAL, 2003), onde utiliza-se uma matriz na forma real de Jordan formada com blocos da diagonal reais, mesmo no caso de autovalores conjugados, que são posicionados em uma região específica no interior do círculo unitário (HENNET, 1995). A partir da solução pelo método anterior, aborda-se o problema via restrição de posto (PRP), o qual calcula uma matriz estruturalmente linear e, em seguida, relaxa-se o PRP, um problema difícil pela natureza combinatória, para um problema de otimização convexa, o qual consegue-se tratar numericamente (DELGADO; AGÜERO; GOODWIN, 2014).

Também, desenvolveu-se um método de resolução para o problema de estabilização, SOF ou StF , de sistemas sob restrições via programação bilinear (PB) (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018). Assim, trata-se os termos bilineares da relação de invariância, de forma mais satisfatória numericamente em comparação as abordagens já citadas. Além disso, estende-se a abordagem PB para sistemas sob perturbações e, no projeto de controladores, busca-se determinar uma região fechada (limitada),

onde as trajetórias ultimamente limitadas (UB) convergem em um tempo finito (DILDA; JUNGERS; CASTELAN, 2015). Então, consegue-se computar conjuntos Δ -invariantes, sendo um ultimamente limitado, obedecendo às limitações do sistema, e obtendo a matriz de ganho linear. Diante de trabalhos de (GUPTA; FALCONE, 2019), os quais tratam o problema de estabilização *StF* via LMI, comparam-se a abordagem PB com a LMI através de exemplos numéricos.

Dentre os *solvers* que tratam termos não lineares e que utilizam a linguagem AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 1987), para implementar problemas de otimização, um que permite resolver o problema de estabilização via PB de forma eficiente trata-se do KNITRO (BYRD; NOCEDAL; WALTZ, 2006). Esse *solver* tem potencial para solucionar uma grande variedade de problemas complexos de otimização e é especialista na solução de problemas em larga escala. O *solver* KNITRO considera sete diferentes algoritmos e utiliza extensivamente a computação multicore com memória compartilhada. Especificamente, a otimização é simultânea para determinar a melhor escolha entre os algoritmos e o procedimento é paralelo de múltiplas etapas para encontrar soluções ótimas locais de alta qualidade.

1.1 OBJETIVOS

A partir da contextualização descrita anteriormente, apresentam-se os objetivos, geral e específicos, desta tese.

Objetivo Geral:

- O objetivo geral neste documento de tese é tratar a estabilização por realimentação estática de saída de sistemas LDITs, com cálculo explícito dos ganhos de realimentação, via construção de funções de Lyapunov poliédricas e de conjuntos positivamente invariantes poliédricos.

Objetivos Específicos:

- Considerar o problema de estabilização de sistemas lineares, com cálculo explícito dos ganhos de realimentação, via resolução das relações algébricas que descrevem a invariância positiva de conjuntos poliédricos.
- Utilizar e avaliar técnicas de otimização com restrição de posto para resolução implícita das relações de invariância positiva e determinação das funções de Lyapunov poliédricas associadas.
- Utilizar a formulação bilinear intrínseca das relações de invariância positiva para a estabilização com cálculo explícito dos ganhos, nos casos com e sem restrições sobre as entradas de controle.

- Propor relações algébricas que descrevem a Δ -invariância (invariância positiva na presença de perturbações persistentes) de um conjunto poliédrico, e de um conjunto interno associado no qual as trajetórias permanecem ultimamente limitadas; utilizar a formulação bilinear das relações propostas para estabilização de sistemas lineares sujeitos a perturbações e restrições sobre as variáveis de estados e de controle.
- Utilizar a linguagem AMPL e o *solver* não linear KNITRO na programação e na solução dos problemas de otimização bilinear propostos para a estabilização com cálculo explícito dos ganhos.

1.2 ORGANIZAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

Capítulo 1: Uma breve contextualização sobre análise e síntese de sistemas lineares discretos invariantes no tempo, com ou sem restrições, foi apresentada.

Capítulo 2: São apresentados conceitos de base desta tese, como as propriedades de Invariância Positiva e de Δ -Invariância, para conjuntos poliédricos. Neste capítulo, também mostram-se a definição de funções de Lyapunov poliédricas, associadas aos conjuntos invariantes, e a relação existente com a estabilidade de sistemas lineares.

Capítulo 3: A contribuição deste capítulo é a determinação de uma lei de controle linear clássica, por cálculo explícito da matriz de ganhos, para a estabilização por realimentação de estados e por realimentação estática de saída, via restrição de posto, em sistemas lineares (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018). Além disso, determinam-se funções de Lyapunov poliédricas associadas ao sistema. A ferramenta utilizada para solucionar numericamente a estabilização via restrição de posto foi o *solver* CVX, o qual aborda problemas de otimização convexa.

Capítulo 4: A estabilização por realimentação de estados e por realimentação estática de saída para sistemas LDITs, com ou sem restrições nas entradas de controle, é resolvida via programação bilinear (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018). Para mostrar a eficácia desse método de resolução, exemplos numéricos são expostos. Utilizou-se a linguagem AMPL e o *solver* KNITRO para gerar as soluções ótimas locais do problema.

Capítulo 5: A estabilização de sistemas LDITs, sujeitos a restrições nos estados, nas entradas de controle e nas perturbações, é resolvida via programação bilinear. Assim, novas condições algébricas bilineares são descritas baseadas nas propriedades de invariância. Além disso, no projeto de controladores proposto é possível tratar com multiobjetivos de desempenhos de controle na otimização, como

maximizar o conjunto de condições admissíveis iniciais e minimizar o conjunto Δ -invariante de trajetórias UB, no qual a perturbação persistente fica confinada. Na resolução desse problema de estabilização, também, utilizou-se o *solver* KNITRO.

Capítulo 6: A conclusão desta tese é apresentada, os resultados em forma de artigos são mostrados e os trabalhos futuros são sugeridos.

2 INVARIÂNCIA POSITIVA E ESTABILIDADE EM SISTEMAS LDIT

Neste capítulo, consideram-se sistemas lineares discretos invariantes no tempo (LDIT), representados no espaço de estados, e apresentam-se alguns conceitos e resultados básicos a serem utilizados nos próximos capítulos. Assim, para um sistema LDIT autônomo as propriedades de Invariância Positiva e de Contratividade para conjuntos poliédricos são consideradas. Além disso, a caracterização algébrica das relações de invariância e a estabilidade assintótica associada são tratadas nessas propriedades. Já, para sistemas LDITs sujeitos a perturbações persistentes, a propriedade de Δ -Invariância é aplicada e relacionada ao conceito de conjuntos com trajetórias ultimamente limitadas.

2.1 INVARIÂNCIA POSITIVA E CONJUNTOS POLIÉDRICOS

Inicialmente, considera-se um sistema linear discreto invariante no tempo representado por:

$$x_{k+1} = A_0 x_k, \quad (1)$$

onde o índice $k \in \mathbb{N}$, o vetor de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ e a matriz dinâmica do sistema $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Por definição, um subconjunto Ω do espaço de estados é positivamente invariante, relativamente ao sistema (1), se para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto Ω , a trajetória dos estados correspondente permanece em Ω , ou de forma equivalente (veja, por exemplo, (HENNET, 1995)):

$$x_{k+1} \in \Omega, \quad \forall x_k \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

A condição (2) pode ser apresentada nas seguintes formas equivalentes:

$$x_k \in \Omega \Rightarrow x_{k+1} \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

ou, usando a linguagem da Teoria de Controle Geométrico (WONHAM, 1985):

$$A_0 \Omega \subseteq \Omega.$$

A propriedade de Invariância Positiva pode ser aplicada a diferentes classes de conjuntos, como subespaços vetoriais e conjuntos do tipo elipsoidal ou poliédrico. Também, esse conceito é aplicável a outras classes de sistemas como: não lineares, incertos, variantes no tempo, dentre outros.

Neste trabalho, o interesse principal é na classe de conjuntos poliédricos, pois esses conjuntos adaptam-se, em especial, ao tratamento de limitações em amplitude, as quais estão presentes em problemas práticos de controle (CASTELAN; HEN-

NET, 1992),(BLANCHINI, F.; MIANI, S., 2015),(TARBOURIECH *et al.*, 2011). Então, apresenta-se a seguinte definição de conjunto poliédrico.

Definição 1 *Qualquer conjunto poliédrico $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, que contém a origem em seu interior, $\mathbf{0} \in \mathcal{M}$, pode ser caracterizado por uma matriz $M \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e um vetor $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^r$, sendo r um inteiro positivo. Assim, esse conjunto é definido por:*

$$\mathcal{M} = \{x_k \in \mathbb{R}^n; Mx_k \leq \mathbf{1}\}^1. \quad (4)$$

Diante da Definição 1, descreve-se abaixo a definição por (HENNET, 1995).

Definição 2 *Se $\text{posto}(M) = n$ e $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, então o conjunto poliédrico \mathcal{M} é um poliedro simplicial, sendo a origem como um ponto interior. Assim, \mathcal{M} é chamado de poliedro simplicial apropriado.*

Pela Definição 1, o poliedro convexo \mathcal{M} é representado pelas seguintes inequações lineares:

$$Mx_k \leq \mathbf{1}, \quad (5)$$

sendo $M \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^r$. De maneira similar, um conjunto poliédrico \mathcal{N} será definido pela restrição a seguir:

$$Nx_k \leq \mathbf{1}, \quad (6)$$

sendo $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^p$. Então, considerando a inclusão dos poliedros $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ significa que todo elemento de \mathcal{M} pertence ao poliedro \mathcal{N} , ou seja, $x_k \in \mathcal{N}, \forall x_k \in \mathcal{M}$. Portanto, uma condição necessária e suficiente da inclusão poliédrica $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ pelo Lema de Farkas Estendido (LFE) é apresentada a seguir (HENNET, 1989).

Lema 1 *O sistema de desigualdades escalares (6) é satisfeito para qualquer ponto do conjunto poliédrico convexo não vazio definido em (5) se, e somente se, existe uma matriz (dual) não negativa $U \in \mathbb{R}^{p \times r}$ tal que:*

$$UM = N \quad (7a)$$

$$U\mathbf{1} \leq \mathbf{1}. \quad (7b)$$

Como citado anteriormente, a propriedade de Invariância Positiva pode ser aplicada a essa classe de poliedros (HENNET, 1995),(VASSILAKI; HENNET; BITSORIS, 1988), então define-se abaixo um poliedro invariante.

Definição 3 *Um poliedro convexo \mathcal{M} é um conjunto positivamente invariante para o sistema (1) se, e somente se,*

$$x_{k+1} \in \mathcal{M}, \quad \forall x_k \in \mathcal{M} \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

¹ O símbolo \leq representa a desigualdade na formulação linha por linha

A interpretação geométrica da Definição 3 significa que, ao considerar um sistema dinâmico, qualquer trajetória dos estados x_k na região \mathcal{M} permanece nessa mesma região ao longo da evolução de k . Uma classe importante de conjuntos positivamente invariantes é a de conjuntos contrativos, conforme definida a seguir (DANTAS, 2018), (DOREA; HENNET, 1999).

Definição 4 *Um conjunto poliédrico \mathcal{M} , não vazio contendo a origem, é um conjunto β -contrativo para o sistema (1) se, para um dado escalar $\beta \in [0, 1)$,*

$$x_{k+1} \in \beta\mathcal{M}, \forall x_k \in \mathcal{M}, k \geq 0, \text{ sendo } \beta\mathcal{M} = \{x_k; Mx_k \leq \beta\mathbf{1}\}. \quad (9)$$

Logo, pela Definição 4 e pela aplicação do LFE (Lema 1) à condição de inclusão (9), chega-se ao resultado a seguir, o qual estabelece condições algébricas necessárias e suficientes para a invariância positiva com contratividade de um poliedro \mathcal{M} .

Proposição 1 *A condição do poliedro \mathcal{M} ser positivamente invariante do sistema (1), com fator de contratividade $\beta \in [0, 1)$, é a existência de uma matriz não negativa $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ tal que:*

$$\mathcal{H}M = MA_0 \quad (10a)$$

$$\mathcal{H}\mathbf{1} \leq \beta\mathbf{1}. \quad (10b)$$

A equação (10b) pode ser vista como uma transformação de similaridade generalizada entre as matrizes A_0 e \mathcal{H} . Por outro lado, como \mathcal{H} é uma matriz com elementos não negativos e $0 \leq \beta < 1$, a relação (10b) garante que os autovalores de \mathcal{H} estão no interior do círculo unitário (BERMAN; PLEMMONS, 1994). Assim, ao considerar-se que M tem posto completo por linhas ou colunas, tem-se:

- se $r < n \Rightarrow \sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma(A_0)$: as relações de Invariância Positiva (10) não garantem a estabilidade assintótica do sistema (1);
- se $r \geq n \Rightarrow \sigma(A_0) \subseteq \sigma(\mathcal{H})$: as relações de Invariância Positiva (10) garantem a estabilidade assintótica do sistema (1).

Observa-se que para o caso de $\beta = 1$ em (10b), tem-se uma condição necessária e suficiente para a invariância positiva de \mathcal{M} , sem garantir a contratividade. Portanto, mesmo quando $r \geq n$ a invariância positiva não garante a estabilidade assintótica do sistema (1) para $\beta = 1$.

2.2 ESTABILIDADE COM FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLIÉDRICAS

Uma classe especial de conjuntos poliédricos é caracterizada por poliedros simétricos dados por:

$$\mathcal{S}(G) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |Gx_k| \leq \mathbf{1}\}, \text{ com } G \in \mathbb{R}^{l_g \times n}. \quad (11)$$

Nota-se que o conjunto simétrico $\mathcal{S}(G)$ pode ser escrito sob a forma (4), se a desigualdade $|Gx_k| \leq \mathbf{1}$ for reescrita, como:

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} x_k \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Então, obtém-se o resultado que segue (ver, por exemplo, (HENNET, 1995)).

Proposição 2 *Uma condição necessária e suficiente para $\mathcal{S}(G)$ ser um poliedro positivamente invariante com coeficiente de contratividade $\beta \in [0, 1)$ do sistema (1) é a existência de uma matriz $H \in \mathbb{R}^{l_g \times l_g}$, tal que:*

$$HG = GA_0 \quad (13a)$$

$$|H|\mathbf{1} \leq \beta\mathbf{1}. \quad (13b)$$

Nesse caso, de poliedros simétricos, a relação (13b) pode ser equivalentemente substituída pela limitação da norma infinita de H :

$$\|H\|_\infty \leq \beta \quad (14)$$

e tem-se que o raio espectral $\rho(H) \leq \beta < 1$ (HENNET, 1995). Além disso, se $r \geq n$ e $\text{posto}(G) = n$, então a inclusão de espectros $\sigma(A_0) \subseteq \sigma(H)$ é satisfeita e o sistema (1) é necessariamente assintoticamente estável. Também, pode-se mostrar que $V(x_k) = \max_i |g_i x_k| = \|Gx_k\|_\infty$ define uma função de Lyapunov poliédrica decrescente ao longo das trajetórias do sistema (1). De modo mais geral, tem-se o resultado abaixo (KIENDL; ADAMY; STELZNER, 1992; MOLCHANOV; PYATINITSKIY, 1989).

Teorema 1 *O sistema (1) é assintoticamente estável se, e somente se, existe um número inteiro $r \geq n$ e uma matriz $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$ de posto igual a n , tais que as seguintes condições equivalentes são verificadas:*

1. $V(x_k) = \max_i |l_i x_k|, \forall i = 1, \dots, r$ é uma função de Lyapunov poliédrica associada ao sistema, e decrescente ao longo das suas trajetórias.

2. Para alguma matriz $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\beta \in [0, 1)$:

$$HL = LA_0 \quad (15a)$$

$$|H|\mathbf{1} < \beta\mathbf{1}. \quad (15b)$$

Portanto, a construção de um poliedro simétrico $\mathcal{S}(L) = \{x_k; |Lx_k| \leq \mathbf{1}\}$, com $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $\text{posto}(L) = n \leq r$, positivamente invariante contrativo é uma forma de provar a estabilidade assintótica do sistema (1). Entretanto, é importante notar que a equação (15a) é não linear em termos das matrizes a serem determinadas H e L , muito embora a desigualdade (15b) \Leftrightarrow (14) seja convexa.

Uma metodologia para construção de domínios poliédricos a partir da decomposição, sob forma real de Jordan, da matriz A_0 é mostrada em (HENNET, 1995). Além disso, um caso de especial interesse ocorre quando os autovalores de A_0 , denotados por $\lambda_i(A_0) = \eta_i + j\omega_i$, são distintos e satisfazem a seguinte desigualdade:

$$|\eta_i| + |\omega_i| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Nesse caso, que considera a decomposição de Jordan de A_0 , as relações (15) são verificadas definindo-se $H = \Lambda_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como a forma real de Jordan e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\text{posto}(L) = n$, como a matriz associada dos autovetores (reais) à esquerda (veja (KIENDL; ADAMY; STELZNER, 1992)).

2.3 Δ -INVARIÂNCIA DE CONJUNTOS POLIÉDRICOS

Considera-se agora um sistema LDIT sujeito a perturbações persistentes dado por:

$$x_{k+1} = A_0 x_k + D d_k, \quad (17)$$

onde $D \in \mathbb{R}^{n \times l_d}$ e $d_k \in \Delta \subset \mathbb{R}^{l_d}$, com

$$\Delta = \{d_k; \Pi d_k \leq \mathbf{1}\}, \quad \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_\pi}, \quad \Pi \in \mathbb{R}^{l_\pi \times l_d}. \quad (18)$$

Definição 5 O poliedro $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto Δ -invariante para o sistema (17) se, para qualquer condição inicial x_0 pertencente a \mathcal{M} , a trajetória correspondente se mantém em \mathcal{M} para qualquer sequência de perturbações $d_k \in \Delta$, ou seja,

$$x_{k+1} \in \mathcal{M}, \quad \forall x_k \in \mathcal{M}, \forall d_k \in \Delta \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Pela Definição 5, observa-se que se $d_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, então a propriedade de Δ -Invariância se reduz à Invariância Positiva. Por outro lado, a partir de (4), (17) e (18), a relação (19) pode ser reescrita sob a forma:

$$M[A_0 \ D] \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq \mathbf{1}, \quad \forall \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Assim, pode-se obter a caracterização algébrica abaixo para a Δ -invariância (ver, por exemplo, (MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996)).

Proposição 3 *O conjunto poliédrico \mathcal{M} é Δ -invariante para o sistema (17) se, e somente se, existem matrizes não negativas $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{r \times l_\pi}$, tais que para $\beta \in [0, 1)$:*

$$\mathcal{H}M = MA_0 \quad (21a)$$

$$\mathcal{V}\Pi = MD \quad (21b)$$

$$\mathcal{H}\mathbf{1} + \mathcal{V}\mathbf{1} < \beta\mathbf{1}. \quad (21c)$$

Na proposição anterior, o coeficiente $\beta \in [0, 1)$ garante a contratividade das trajetórias dos estados no sistema (17). Além disso, devido à perturbação persistente, a estabilidade não é assintótica, ou seja, as trajetórias não convergem para a origem. Entretanto, para valores de k suficientemente grandes, as trajetórias convergem para um conjunto $\mathcal{M}_\infty \subseteq \mathcal{M}$, onde permanecem ultimamente limitadas (FIACCINI, 2010). Portanto, \mathcal{M}_∞ será também um conjunto Δ -invariante para o sistema (17).

A propriedade de Δ -Invariância com a determinação de um conjunto, com trajetórias ultimamente limitadas, associado será retomada no Capítulo 5 para tratar um problema de controle de sistemas LDITs sujeitos a restrições nas variáveis de estado e de controle, e sob a ação de perturbações persistentes.

Além disso, para poliedros simétricos $\mathcal{S}(G) \subset \mathbb{R}^n$ e

$$\Delta_s = \mathcal{S}(\Pi) = \{d_k \in \mathbb{R}^{l_d}; |\Pi d_k| \leq \mathbf{1}\} \quad (22)$$

a propriedade de Δ -Invariância é descrita segundo a proposição (MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996),(SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997):

Proposição 4 *O conjunto poliédrico simétrico $\mathcal{S}(G)$ é Δ -invariante contrativo para o sistema (17) se, e somente se, existem matrizes $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $V \in \mathbb{R}^{r \times l_\pi}$, tais que para $\beta \in [0, 1)$:*

$$HG = GA_0 \quad (23a)$$

$$V\Pi = GD \quad (23b)$$

$$|H|\mathbf{1} + |V|\mathbf{1} < \beta\mathbf{1}. \quad (23c)$$

2.4 CONCLUSÃO

Nesse capítulo, mostraram-se resultados básicos das propriedades de Invariância Positiva e Δ -Invariância aplicados em sistemas LDITs (com possível presença de perturbações persistentes). Também, foram apresentados conceitos de estabilidade associados à invariância. Nos próximos capítulos, duas abordagens serão propostas, utilizando os conceitos apresentados, na resolução de problemas de estabilização, com e sem restrições, via realimentação estática de saída e realimentação de estados.

3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LDIT VIA RESTRIÇÃO DE POSTO

A computação explícita de ganhos de realimentação de estados (*StF*) e de realimentação estática de saída (*SOF*) é tratada neste capítulo considerando-se as funções de Lyapunov poliédricas. Assim, as condições algébricas necessárias e suficientes, que provam a estabilidade em malha fechada, são exploradas para propor um problema de otimização com restrição de posto. Mais especificamente, a equação não linear associada é substituída por uma restrição de posto de uma matriz com estrutura linear, mantendo a condição de estabilidade relacionada à função de Lyapunov poliédrica. Além disso, alguns desempenhos de controle são explorados como a velocidade de convergência das trajetórias e o esforço de controle, os quais podem ser representados por restrições convexas. Na resolução do problema de otimização proposto é utilizado um método iterativo que requer uma solução inicial factível obtida a partir de técnicas de posicionamento de polos. Por fim, dois experimentos numéricos mostram a eficácia e algumas desvantagens de nossa proposta.

3.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O sistema linear discreto invariante no tempo em malha aberta considerado é:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (24a)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (24b)$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é o índice de tempo, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle e $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas medidas. Além disso, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ formam os pares ordenados matriciais (A, B) controlável e (C, A) observável. Assim, o problema principal deste capítulo é encontrar a matriz de realimentação estática de saída K , tal que satisfaz a lei de controle linear:

$$u_k = Ky_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}. \quad (25)$$

Caso a síntese de controle seja realizada por realimentação de estados, atribui-se à matriz $C = I_n$ no espaço de estados (24) e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Diante da equação (25), o sistema (24) em malha fechada é representado por:

$$x_{k+1} = (A + BKC)x_k \quad (26)$$

e deve ser assintoticamente estável. Logo, pode-se fazer uso do Teorema 1, do capítulo anterior, e estabelecer a seguinte condição algébrica necessária e suficiente para que o sistema (26) seja estável via invariância positiva e contratividade de um conjunto poliédrico $\mathcal{S}(L) = \{x_k; |Lx_k| \leq \mathbf{1}\}$ e via funções de Lyapunov do tipo $V(x_k) = \max_i |l_i x_k|$ (KIENDL; ADAMY; STELZNER, 1992), (MOLCHANOV; PYATINITSKIY, 1989).

Teorema 2 *O sistema em malha fechada (26) é assintoticamente estável se, e somente se, existir um escalar $r \geq n$ e matrizes $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, com $\text{posto}(L) = n$, e $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tais que para $\beta \in [0, 1)$:*

$$L(A + BKC) = HL \quad (27a)$$

$$|H|\mathbf{1} \leq \beta\mathbf{1}. \quad (27b)$$

Se L é uma matriz dada *a priori*, a equação (27a) é linear em relação às variáveis matriciais H e K , e a desigualdade (27b) é convexa. Dessa forma, a busca da matriz de ganho K que torna um dado conjunto $\mathcal{S}(L)$ positivamente invariante contrativo pode ser realizada via Programação Linear (PL), como na resolução de problemas de regulação linear restrita (PRLR); ver, por exemplo, (SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997), (VASSILAKI; HENNET; BITSORIS, 1988), (HENNET, 1989).

No caso de L ser também uma variável matricial, é possível considerar a matriz H na forma real de Jordan obedecendo a limitação (27b). Assim, a relação de invariância (27a) pode ser resolvida pelo método de alocação de polos (HENNET, 1995). Como o sistema (26) é controlável para o caso da realimentação de estados, $C = I_n$, os polos podem ser posicionados arbitrariamente no círculo unitário no plano complexo, conforme desempenho desejado. Então, escolhe-se um conjunto de polos $\sigma(A + BKC) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, tais que pela Seção 2.2:

$$|\eta_i| + |\omega_i| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Dessa forma, considera-se a matriz $L = V^{-1}$ e obtém-se

$$L(A + BKC) = \Lambda_R L \quad \text{e} \quad \|\Lambda_R\|_\infty < 1, \quad (29)$$

sendo Λ_R a forma real de Jordan da matriz $A + BKC$ e as linhas de L correspondem aos autovetores reais associados.

Também, no caso da realimentação estática de saída, $p < n$ aplica-se a técnica de posicionamento de polos. Em particular, se $p + m > n$ é possível realizar o posicionamento arbitrário, portanto impor a condição (28) (SYRMOS; LEWIS, 1993)(CASTELAN; HENNET; VILLARREAL, 2003). Entretanto, nota-se que o cálculo da matriz de ganho não aparece de forma explícita quando utiliza-se a técnica por posicionamento de autoestrutura, sendo K encontrado ao final em função da matriz de autovetores reais e de outras direções associadas.

Neste trabalho, por outro lado, considera-se que ambas as matrizes L e H não são *a priori* dadas. Além disso, busca-se o ganho K , por *SOF* ou por *StF*, de forma explícita. Então, a proposta desse capítulo surge da necessidade de resolver a equação não linear (27a), com a restrição convexa (27b), tendo em vista que os termos não lineares correspondem aos produtos $LBKC$ e HL . A solução pode ser

encontrada usando, por exemplo, a técnica de programação bilinear proposta por (KOLODZIEJ; CASTRO; GROSSMANN, 2013), a qual será apresentada no próximo capítulo. Entretanto, neste capítulo, propõe-se uma reescrita da igualdade matricial (27a) sob a forma de restrição de posto de uma matriz. Assim, uma matriz de estrutura especial, linear em relação às variáveis H e K , é construída sujeita a uma limitação de seu posto. Logo, o cálculo da matriz de ganho K , será possível através da formulação de um problema de restrição de posto (PRP), como será mostrado na próxima seção.

3.2 REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para esse método, a matriz L é composta por vetores de linhas, então

$$L = \begin{bmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_r^T \end{bmatrix}, \quad \text{com } l_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, r \quad (30)$$

e a matriz H é denotada por:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & \cdots & h_{rr} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Dessa forma, considerando as notações (30) e (31), obtém-se o lema fundamental para a proposta deste capítulo.

Lema 2 *Seja a matriz $\text{tvec}(L) = [l_1^T \ l_2^T \ \cdots \ l_r^T] \in \mathbb{R}^{1 \times nr}$ e a matriz $M(H, KC) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, com $N = n \cdot r$, dada em:*

$$M(H, KC) = \begin{bmatrix} (A + BKC) - h_{11}I_n & \cdots & -h_{r1}I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{1r}I_n & \cdots & (A + BKC) - h_{rr}I_n \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Então, reescreve-se a igualdade não linear (27a) como:

$$(\text{tvec}(L)) \cdot M(H, KC) = 0. \quad (33)$$

Prova: Considerando a notação elemento a elemento, a equação matricial (27a) pode ser reescrita linha por linha como $l_i^T(A + BKC) = \sum_{j=1}^r h_{ij}l_j^T$, para $i = 1, \dots, r$. Logo, pelas definições de $\text{tvec}(L)$ e $M(H, KC)$, obtém-se a relação de igualdade (33). \square

Observa-se que a matriz $M(H, KC)$ é linear em relação às variáveis matriciais H e K . Além disso, existem vetores não nulos $\text{tvec}(L)$ tais que (33) é verificada se, e

somente se, $\text{posto}(M(H, KC)) < N$. É necessário, porém, obter-se mais informações sobre essa condição de posto para usá-las estabelecendo a abordagem por restrição de posto no problema de otimização. Para tanto, apresenta-se a seguir um resultado básico aplicado à matriz estruturada $M(H, KC)$ (HORN; JOHNSON, 1994).

Lema 3 *Sejam os conjuntos espectrais de $A + BKC$ e H definidos por:*

$$\sigma(A + BKC) = \{\lambda_i(A + BKC) \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (34)$$

$$\sigma(H) = \{\lambda_j(H) \in \mathbb{C}, \forall j = 1, \dots, r\}. \quad (35)$$

Então, o espectro de $M(H, KC)$ é composto por todas as possíveis diferenças em pares dos autovalores de $A + BKC$ e H , incluindo as multiplicidades algébricas:

$$\sigma(M(H, KC)) = \left\{ \lambda_{ij}(M) = \lambda_i(A + BKC) - \lambda_j(H) \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n, \\ \forall j = 1, \dots, r \end{array} \right\}. \quad (36)$$

Logo, pelo Lema 3 e pelos resultados anteriores, formula-se a proposição a seguir, que se constitui em uma das principais contribuições do presente trabalho, pois é a base para o desenvolvimento dos resultados posteriores neste capítulo.

Proposição 5 *Se a igualdade (27a) for verificada com $\text{posto}(L) = n \leq r$, então:*

$$\text{posto}(M(H, KC)) = \bar{N} \leq N - n. \quad (37)$$

Prova: Nota-se que a relação de invariância positiva (27a) pode ser vista como uma transformação de similaridade generalizada, sob a hipótese $\text{posto}(L) = n \leq r$, o que implica na inclusão $\sigma(A + BKC) \subseteq \sigma(H)$. A partir da condição (36), afirma-se que $M(H, KC)$ tem pelo menos n autovalores nulos resultando na restrição $\text{posto}(M(H, KC)) \leq N - n$. \square

Portanto, pela Proposição 5, descreve-se o seguinte problema geral de estabilização de sistemas LDITs via restrição de posto com restrições adicionais:

$$\begin{array}{l} \text{Encontrar } H, K \\ \text{sujeito a (37) e } f_\ell(H, KC) \leq \varphi_\ell, \end{array} \quad (38)$$

onde ℓ é inteiro não negativo, φ_ℓ são limites superiores escalares. As restrições convexas adicionais $f_\ell(H, KC) \leq \varphi_\ell$, dependentes das matrizes H e KC , representam os respectivos critérios de desempenho de controle:

i) a velocidade de convergência (exponencial) da resposta do estado relativa ao coeficiente de contratividade β :

$$\|H\|_\infty \leq \beta, \quad \beta \in [0, 1). \quad (39)$$

Pois, considerando que $\sigma(A + BKC) \subseteq \sigma(H)$, tem-se que $\varrho(A + BKC) \leq \beta$.

ii) o esforço de controle ϕ relativo à restrição de norma infinita de KC :

$$\|KC\|_\infty \leq \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}_+. \quad (40)$$

A partir da lei de controle considerada, segue-se que $\|u_k\|_\infty = \|KCx_k\|_\infty \leq \phi\|x_k\|_\infty$ e, por consequência, ϕ determina um limite superior para o esforço de controle representado por $\|u_k\|_\infty$. Observa-se que a condição (37) é necessária, mas não suficiente. Assim, caso o problema (38) tenha solução deve-se verificar que a matriz $M(H, KC)$ encontrada permite a construção de L , pela relação (33), tal que $\text{posto}(L) = n$. Também, é importante ressaltar que diferentes FLPs podem ser associadas a uma solução de ganho, a partir de (33).

3.3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RESTRIÇÃO DE POSTO

Como a função de restrição de posto (37) não é convexa, busca-se resolver o problema (38) utilizando a função convexa traço por meio da programação SDP (DELGADO; AGÜERO; GOODWIN, 2014). Dessa forma, a matriz SDP $M_a(H, KC)$ é construída, dependente da matriz $M(H, KC)$ e cuja diagonal principal possui as matrizes $Y, Z \in \mathbb{S}^N$:

$$M_a(H, KC) = \begin{bmatrix} Y & M(H, KC) \\ (M(H, KC))^T & Z \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{2N}. \quad (41)$$

Conforme (DATTORRO, 2011), pode-se substituir a condição (37) pela restrição de posto da matriz $M_a(H, KC)$, reformulando o problema (38), como:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } H, K \\ & \text{sujeito a } \text{posto}(M_a(H, KC)) \leq N - n \text{ e} \\ & f_\ell(H, KC) \leq \varphi_\ell. \end{aligned} \quad (42)$$

Então, no problema acima, utiliza-se o Lema 4, o qual é demonstrado em (DELGADO; AGÜERO; GOODWIN, 2014), pois trata o comportamento não convexo da função posto.

Lema 4 *O posto da matriz $M_a(H, KC) \in \mathbb{S}^{2N}$ é inferior ou igual a $N - n$ se, e somente se, existir $Q \in \Omega_{2N, N-n}$, tal que:*

$$\text{Tr}(M_a(H, KC) Q) = 0, \quad (43)$$

onde $\Omega_{2N, N-n} = \{Q \in \mathbb{S}^{2N}, \mathbf{0} \preceq Q \preceq I_{2N}, \text{Tr}(Q) = N + n\}$.

Logo, pelo Lema 4, com a matriz Q não conhecida *a priori*, o problema PRP (42) torna-se o seguinte problema de otimização de traço com restrições convexas:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \text{Tr} (M_a(H, KC) Q) \\ & \text{sujeito a } M_a(H, KC) \succeq 0, \\ & \quad \text{Tr}(Q) = N + n, \\ & \quad \mathbf{0} \preceq Q \preceq I_{2N} \text{ e} \\ & \quad f_\ell(H, KC) \leq \varphi_\ell. \end{aligned} \tag{44}$$

Para atualizar os valores de Q e $M_a(H, KC)$ de forma linear, adota-se o método iterativo proposto em (DELGADO; AGÜERO; GOODWIN, 2014):

$$\hat{Q}^{\kappa+1} = \arg \{ \min \text{Tr} (\hat{M}_a(H, KC)^\kappa Q) \} \tag{45}$$

$$\hat{M}_a(H, KC)^{\kappa+1} = \arg \{ \min \text{Tr} (M_a(H, KC) \hat{Q}^{\kappa+1}) \}, \tag{46}$$

onde κ representa o número de iterações. Uma solução inicial para $\hat{M}_a(H, KC)^0$ é obtida buscando as matrizes Y e Z , sujeitas à (41), e utilizando uma matriz $M(H_0, K_0)$ a partir de uma solução inicial (H_0, K_0) factível para (27). Portanto, resume-se todos esses procedimentos no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Realimentação Estática de Saída com Critérios de Desempenho

Entrada: A, B e C

- 1: Escolher uma matriz H_0 na forma real de Jordan;
- 2: Calcular K_0 pelo método de alocação de polos;
- 3: Calcular a matriz inicial $M(H_0, K_0 C)$;
- 4: Construir a matriz inicial aumentada $M_a(H_0, K_0 C)$;
- 5: Resolver o problema de otimização convexa (44) sujeito a (39) e (40);
- 6: Iterar as equações (45) e (46);
- 7: Calcular L que satisfaz o teorema de estabilidade $(\text{tvec}(L)) \cdot M(H, KC) = 0$

Saída: K, H e L

3.4 EXEMPLOS

Para implementar o Algoritmo 1 utilizou-se o software MATLAB (MOLER *et al.*, 1982) e o pacote CVX¹ (GRANT; BOYD; YE, 2008). A tolerância da função *posto* foi $tol \leq 10^{-10}$ e os valores numéricos serão apresentados com 4 casas decimais.

3.4.1 Sistema 1

O sistema LDIT (26) é formado pelo seguinte par de matrizes (HENNET, 1995):

¹ O CVX é um sistema de modelagem para otimização convexa. Também, o pacote CVX permite que restrições e funções objetivos sejam especificados usando a linguagem padrão do MATLAB.

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.55 & -0.625 \\ -0.1 & 0.4 & -0.25 \\ -0.7 & -0.1 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \\ 2.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo conjunto espectral $\sigma(A) = \{1.1282, -0.0391 \pm 0.3731i\}$, esse sistema é instável. Além disso, consideram-se dois possíveis casos da matriz C .

Caso StF: Utilizando o Algoritmo 1 para $C = I_3$, escolhe-se uma matriz H_0 e determina-se K_0 , pelo método de alocação de polos (CASTELAN; HENNET, 1992), conforme a tabela abaixo:

Tabela 1 – Resultados para alocação de polos

K_0	H_0
$\begin{bmatrix} 0.3285 & 0.7950 & -0.3062 \\ 0.0292 & -1.4338 & 0.7806 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$

Fonte: (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018).

Da Tabela 1, pode-se concluir que $\sigma(H_0) = \sigma(A + BK_0C) = \{0.5000, 0.3000 \pm 0.3000i\}$, ou seja, o Sistema 1 tornou-se estável em malha fechada. Também, pela Tabela 1 calculam-se as normas infinitas de cada matriz obtendo: $\|K_0\|_\infty = 2.2436$ e $\|H_0\|_\infty = 0.6000$.

Primeiro Experimento: O critério de desempenho (39), o qual busca diminuir o coeficiente de contratividade, será tratado de forma que $f_1(H, K) = \|H\|_\infty < \|H_0\|_\infty$. Assim, atribui-se para β os seguintes valores: $\{0.57, 0.47, 0.37, 0.27\}$. Já, no critério (40) o esforço de controle será compatível com o valor inicial. Então $f_2(H, K) = \|K\|_\infty \leq \|K_0\|_\infty$, ou seja, a norma infinita de K_0 será o limitante superior de $\|K\|_\infty$. Logo, aplicando esse experimento no Algoritmo 1, obtiveram-se os resultados resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados para valores decrescentes de β

β	$\ K\ _\infty$	K	$\sigma(H)$
0.57	2.2077	$\begin{bmatrix} 0.3402 & 0.7833 & -0.3112 \\ 0.0070 & -1.4256 & 0.7751 \end{bmatrix}$	$\{0.4775, 0.2852 \pm 0.2848i\}$
0.47	2.2412	$\begin{bmatrix} 0.3789 & 0.7561 & -0.3333 \\ -0.0651 & -1.4114 & 0.7647 \end{bmatrix}$	$\{0.4056, 0.2358 \pm 0.2342i\}$
0.37	2.2436	$\begin{bmatrix} 0.4052 & 0.7263 & -0.3450 \\ -0.1153 & -1.3881 & 0.7402 \end{bmatrix}$	$\{0.3409, 0.2023 \pm 0.1677i\}$
0.27	–	–	–

Fonte: (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018).

Nota-se que na Tabela 2 mesmo diminuído os valores de β até 0.37 conseguiu-se diferentes matrizes de ganho K factíveis, que mantivessem o Sistema 1 estável,

em malha fechada, isto é, com os autovalores de $A + BKC$ pertencentes ao círculo unitário.

Segundo Experimento: Por outro lado, partindo da Tabela 1, deseja-se diminuir o esforço de controle considerando o critério $f_2(H, K) = \|K\|_\infty < \|K_0\|_\infty$ com diferentes valores de $\phi \in \{2.07, 1.95, 1.87, 1.75\}$. Simultaneamente, mantém-se a velocidade de convergência satisfazendo a condição inicial $f_1(H, K) = \|H\|_\infty \leq \|H_0\|_\infty$. Assim, ao aplicar esses critérios de desempenho no Algoritmo 1, geram-se os seguintes resultados:

Tabela 3 – Resultados para valores decrescentes de ϕ

ϕ	$\ H\ _\infty$	K	$\sigma(H)$
2.07	0.5335	$\begin{bmatrix} 0.3344 & 0.7340 & -0.2758 \\ 0 & -1.3649 & 0.7051 \end{bmatrix}$	$\{0.4349, 0.2989 \pm 0.2346i\}$
1.95	0.4854	$\begin{bmatrix} 0.3266 & 0.6844 & -0.2477 \\ 0 & -1.3068 & 0.6432 \end{bmatrix}$	$\{0.3915, 0.3122 \pm 0.1726i\}$
1.87	0.4432	$\begin{bmatrix} 0.3217 & 0.6575 & -0.2431 \\ 0 & -1.2698 & 0.6002 \end{bmatrix}$	$\{0.3460, 0.3156 \pm 0.1290i\}$
1.75	–	–	–

Na Tabela 3 observa-se que ao diminuir o esforço de controle consegue-se diferentes matrizes de ganho K . Entretanto, percebe-se que há um limite na diminuição de ϕ para soluções manterem-se factíveis e o sistema estável.

Pelo Teorema 1, cada solução encontrada de K pode determinar diversas FLPs associadas ao sistema em malha fechada. Desse modo, formando uma base do espaço nulo à esquerda de $M(H, K)$ em (33), consegue-se determinar matrizes L adequadas ao Teorema 2, por consequência encontram-se diferentes $V(x_k)$. Por exemplo, $\beta = 0.57$ na Tabela 2 corresponde a uma matriz K , e duas matrizes L_1 e L_2 cujas diferentes FLPs, a seguir:

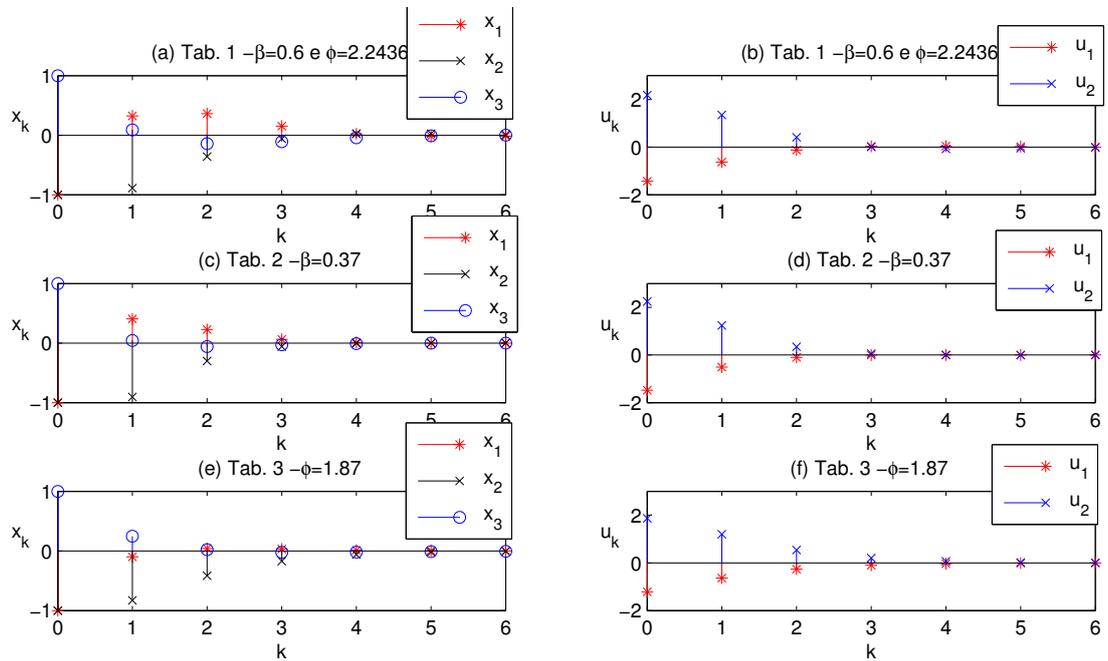
$$V_1(x_k) = \|L_1 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -1.6397 & -1.1052 & -2.2561 \\ 1.9763 & -1.1985 & -0.8492 \\ 1.5252 & 3.2231 & -2.6874 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty$$

e

$$V_2(x_k) = \|L_2 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -1.6397 & -1.1052 & -2.2561 \\ -0.6601 & 0.8789 & 0.0492 \\ -0.8733 & -1.2253 & 1.2350 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty.$$

Na Figura 1 pode-se observar e comparar os desempenhos temporais obtidos para a solução inicial (H_0, K_0C) , descrita na Tabela 1, conforme Figura 1(a) e 1(b). O restante da Figura 1 é formado pelos desempenhos relativos as soluções, de $\beta = 0.37$ e $\phi = 1.87$, presentes nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

Analisando a Figura 1(c) percebe-se que a trajetória de estados converge mais rápido à origem, em relação à convergência da Figura 1(a), o que mostra o compor-

Figura 1 – Trajetórias dos estados e ações de controle para $x_0 = [-1 \ -1 \ 1]^T$ 

Fonte: (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018).

tamento esperado. Assim, houve coerência à proposta de critério de desempenho estipulada. Nota-se que pelas Figuras 1(e) e 1(f) há diminuição do esforço de controle e aumento da velocidade de convergência para a origem, em comparação às Figuras 1(a) e 1(b).

Caso SOF: Para $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, o número de linhas é $p = 2$, então $m + p = 4 > n = 2$. Diante disso, aplicou-se o método de alocação de polos por (SYRMOS; LEWIS, 1993) para buscar a matriz de ganho de realimentação estática de saída. Na primeira solução, escolheu-se os mesmos polos do caso *StF*, os quais formam a matriz real de Jordan H_0 , por conseguinte obteve-se a matriz K_0 inicial presente na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados para alocação de polos

K_0	H_0
$\begin{bmatrix} 0.2350 & -0.4386 \\ -0.1067 & 1.2391 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$

Fonte: (BRIÃO; CASTELAN; PEDROSA, 2018).

Pela Tabela 4, calcula-se o conjunto espectral $\sigma(A + BK_0C) = \{0.5000, 0.3000 \pm$

$0.3000i\} = \sigma(H_0)$, além disso as normas infinitas $\|K_0C\|_\infty = 1.3458$ e $\|H_0\|_\infty = 0.6000$.

Análogo ao *Primeiro Experimento*, colocou-se $f_1(H, KC) = \|H\|_\infty < \|H_0\|_\infty$ e atribuiu-se os diferentes valores $\{0.59, 0.56, 0.53, 0.5\}$ para o coeficiente de contratividade β . Também, foi mantido o critério de desempenho $f_2(H, KC) = \|KC\|_\infty \leq \|K_0C\|_\infty$. Os resultados obtidos, aplicando-se o Algoritmo 1, estão sumarizados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados para valores decrescentes de β

β	$\ KC\ _\infty$	K	$\sigma(H)$
0.59	1.3458	$\begin{bmatrix} 0.2371 & -0.4379 \\ -0.1089 & 1.2369 \end{bmatrix}$	$\{0.5019, 0.2970 \pm 0.2930i\}$
0.56	1.3458	$\begin{bmatrix} 0.2433 & -0.4358 \\ -0.1157 & 1.2301 \end{bmatrix}$	$\{0.5078, 0.2881 \pm 0.2719i\}$
0.53	1.3458	$\begin{bmatrix} 0.2494 & -0.4334 \\ -0.1228 & 1.2230 \end{bmatrix}$	$\{0.5141, 0.2789 \pm 0.2511i\}$
0.5	—	—	—

Portanto, ao comparar os experimentos aplicados ao Sistema 1, cujos critérios de desempenhos impostos são idênticos, observa-se que o menor coeficiente de contratividade em *SOF* $\beta = 0.57$ é maior que o coeficiente de *StF*. Diante disso, confirma-se que o caso *SOF* é mais restritivo em relação ao *StF*. Por fim, utilizando a matriz de ganho de $\beta = 0.53$ da Tabela 5, através de (33), as matrizes L_1 e L_2 deram origem as seguintes funções de Lyapunov poliédricas:

$$V_1(x_k) = \|L_1 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.0848 & -0.9757 & -0.2019 \\ 0.0658 & -3.1614 & -1.5312 \\ -0.5290 & 0.5068 & 0.3466 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty$$

$$V_2(x_k) = \|L_2 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.9757 & 0.2019 \\ -0.8596 & 1.0619 & 0.6777 \\ -0.0657 & 5.0678 & 2.4468 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty.$$

3.5 CONCLUSÃO

A computação explícita de ganhos de realimentação estática de saída foi considerada nesse capítulo. Para tanto, foi proposto um problema de otimização com restrição de posto que permite determinar funções de Lyapunov poliédricas associadas à condição de estabilidade do sistema. Também, ao calcular a matriz relacionada à FLP consegue-se determinar conjuntos invariantes associados. Como esse procedimento é realizado posteriormente, o projeto de controladores, o qual leva em conta restrições sobre as variáveis de estado ou de controle, apresenta limitações.

O algoritmo proposto é iterativo e necessita de soluções iniciais factíveis, as quais foram obtidas por posicionamento de polos. Além disso, na presente proposta

os requisitos de controle são considerados como restrições adicionais do problema de otimização cuja função objetivo utilizada trata apenas a restrição de posto. Essas duas características podem ser consideradas como limitações à abordagem apresentada e podem, eventualmente, ser atacadas de forma mais eficiente (DELGADO; AGÜERO; GOODWIN, 2014; SUN; DAI, 2017). Uma outra possibilidade é tratar as bilinearidades presentes na condição de invariância positiva via técnicas eficientes de otimização não linear, como será visto nos próximos capítulos.

4 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LDIT VIA PROGRAMAÇÃO BILINEAR

A estabilização por Realimentação Estática de Saída (*SOF*), e também por Realimentação de Estados (*StF*), são tratadas neste capítulo considerando as FLPs. Mais especificamente, as condições, algébricas não lineares, necessárias e suficientes, que provam a estabilidade do sistema em malha fechada, são exploradas para propor problemas de otimização bilinear que permitem projetar explicitamente os ganhos de controle. A função objetivo considerada pode ponderar a velocidade de convergência dos estados e o esforço de controle ou, no caso de entradas de controle restritas, o tamanho de uma região de condições iniciais admissíveis. Além disso, no projeto proposto, deste capítulo, é utilizado um *solver* para otimização não linear, o qual mostrará ser eficiente, especialmente, para lidar com as bilinearidades presentes nas restrições do problema. Dois exemplos numéricos são apresentados para mostrar a eficácia da nossa proposta para projetos *SOF* e *StF*.

4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Como no capítulo anterior, considera-se o sistema LDIT em malha aberta:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (47a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (47b)$$

e a lei de controle linear por realimentação estática de saída (*SOF*)

$$u_k = Ky_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}. \quad (48)$$

Logo, o sistema (47) em malha fechada é dado por:

$$x_{k+1} = (A + BKC)x_k. \quad (49)$$

Caso a síntese de controle seja por realimentação de estados (*StF*), então a matriz $C = I_n$ no espaço de estados (49) e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Análogo ao Capítulo 3, busca-se estabilizar o sistema em malha fechada pela utilização de FLPs, na forma $V(x_k) = \|Lx_k\|_\infty$, pelo cálculo explícito da matriz de ganho K e, agora também, da matriz L . Portanto, deseja-se encontrar as matrizes K , L e H , e um escalar $\beta \in [0, 1)$, tais que as seguintes relações de invariância positiva sejam verificadas:

$$L(A + BKC) = HL \quad (50a)$$

$$|H\mathbf{1}| \leq \beta\mathbf{1}. \quad (50b)$$

Relembra-se que, pelo Teorema 2, a matriz $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$ deve ter posto coluna completo n , o que é equivalente à existência de uma matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ (pseudo)-inversa com posto linha completo, a qual deve satisfazer a seguinte igualdade bilinear:

$$UL = I_n, \quad (51)$$

onde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Além disso, serão considerados inicialmente os critérios de desempenhos, utilizados no capítulo anterior, em relação à velocidade de convergência das trajetórias dos estados e ao esforço de controle, respectivamente:

$$\|H\|_\infty \leq \beta, \quad \beta \in [0, 1] \quad (52)$$

e

$$\|KC\|_\infty \leq \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}_+. \quad (53)$$

Tendo em vista a equivalência entre (50b) e (52), então a desigualdade (53) pode também ser reescrita, sob a forma de valor absoluto:

$$|KC|\mathbf{1} \leq \phi\mathbf{1}. \quad (54)$$

Logo, propõe-se um primeiro problema de otimização bilinear para a estabilização do sistema (49), como segue:

$$\begin{aligned} & \underset{(H,L,K,\beta,\phi)}{\text{Minimizar}} && \Phi(\beta, \phi) = \alpha\beta + (1 - \alpha)\phi \\ & \text{sujeito a} && (50a), (50b), (51) \text{ e } (54). \end{aligned} \quad (55)$$

No problema (55), a função objetivo linear $\Phi(\beta, \phi)$, também usada em (SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997) e (HENNET, 1995), permite ponderar, através da escolha de α para $0 \leq \alpha \leq 1$, a velocidade de convergência das trajetórias, pelo coeficiente de contratividade β , e o esforço de controle pelo ϕ .

Diferentemente do Capítulo 3, os termos bilineares HL e $LBKC$ em (50a) são considerados explicitamente na formulação do problema (55). Assim, será mostrado um pouco adiante como essa formulação bilinear pode ser resolvida utilizando, por exemplo, o *solver* KNITRO (BYRD; NOCEDAL; WALTZ, 2006) que obtém soluções de problemas de otimização bilineares.

4.2 ESTABILIZAÇÃO LOCAL NA PRESENÇA DE RESTRIÇÕES NO CONTROLE

Nesta seção, mostra-se como a formulação bilinear pode ser também explorada para tratar problemas de controle sob restrições simétricas na variável de entrada de controle. Um problema mais geral de sistemas sujeitos a perturbações persistentes limitadas, e com restrições nas variáveis de estado e de controle, será abordado no próximo capítulo.

Então, considera-se que o sistema (47) tem suas variáveis de controle, limitadas em amplitude, representadas pelo conjunto poliédrico simétrico:

$$\mathcal{U} = \{u_k \in \mathbb{R}^m; |u_k| \leq \mathbf{1}\}. \quad (56)$$

A partir de (47b),(48) e (56), obtém-se o poliedro simétrico abaixo que define o conjunto de validade do modelo linear (49):

$$\mathcal{S}(KC) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |KCx_k| \leq \mathbf{1}\}, \text{ com } KC \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (57)$$

Observa-se que se o estado excursiona para o exterior de $\mathcal{S}(KC)$, o vetor de controle satura e o desempenho em malha fechada pode degradar, podendo inclusive causar instabilidade (TARBOURIECH *et al.*, 2011). Assim, adotando-se como objetivo a determinação de uma região de condições iniciais admissíveis, na qual evita a saturação, busca-se determinar um poliedro positivamente invariante e contrativo para o sistema (49) que satisfaça a seguinte relação de inclusão:

$$\mathcal{S}(L) \subseteq \mathcal{S}(KC). \quad (58)$$

Dessa forma, para qualquer estado inicial $x_0 \in \mathcal{S}(L)$ a trajetória correspondente converge para a origem, sem que haja saturação da ação de controle.

Definindo um conjunto poliédrico como um domínio de estados iniciais admissíveis, deseja-se que esse poliedro seja o maior possível segundo algum critério. Por simplicidade, será considerado o seguinte poliedro cujo coeficiente escalar $\gamma^{-1} > 0$ deverá ser maximizado:

$$\mathcal{S}(\gamma I_n) = \{x_k; |I_n x_k| \leq \gamma^{-1} \mathbf{1}\}. \quad (59)$$

Assim, ao impor-se a inclusão abaixo:

$$\mathcal{S}(\gamma I_n) \subseteq \mathcal{S}(L) \quad (60)$$

pode-se aumentar o tamanho de $\mathcal{S}(L)$ através da maximização de γ^{-1} ou, equivalentemente, pela minimização de γ .

Logo, pelas inclusões poliédricas (58) e (60), e aplicando-se o LFE, Lema 1, obtém-se o resultado a seguir; veja, por exemplo, (SANTOS, 1996).

Lema 5 *A existência dos conjuntos $\mathcal{S}(\gamma I_n)$, $\mathcal{S}(L)$ e $\mathcal{S}(KC)$ tais que $\mathcal{S}(\gamma I_n) \subseteq \mathcal{S}(L) \subseteq \mathcal{S}(KC)$ é equivalente à verificação das seguintes relações para alguma matriz $Q \in \mathbb{R}^{m \times r}$ com elementos não negativos:*

$$QL = KC, \quad (61a)$$

$$|Q|\mathbf{1} \leq \mathbf{1} \mathbf{e} \quad (61b)$$

$$|L|\mathbf{1} \leq \gamma\mathbf{1}. \quad (61c)$$

A partir da discussão acima, pode-se formular o seguinte problema de otimização bilinear, no qual a função objetivo $\Phi(\beta, \gamma)$ permite ponderar, pela escolha de α para $0 \leq \alpha \leq 1$, a velocidade de convergência para a origem e o tamanho do conjunto de estados iniciais admissíveis $S(L)$:

$$\begin{aligned} & \underset{(H,L,K,Q,U,\beta,\phi,\gamma)}{\text{Minimizar}} && \Phi(\beta, \gamma) = \alpha\beta + (1 - \alpha)\gamma \\ & \text{sujeito a} && (50a), (50b), (51), \\ & && (54) \text{ e } (61). \end{aligned} \quad (62)$$

4.3 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Diferentes técnicas de otimização não linear podem ser consideradas para resolver os problemas acima, por exemplo, métodos de otimização livre de derivadas, baseados em modelos de (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009) ou de (KENNEDY; EBERHART, 1995), ou métodos baseados em programação matemática (FLOUDAS, 2005). Também, para lidar com tais problemas, uma abordagem sob medida pode obter um limite inferior resolvendo uma PL na qual os termos bilineares são aproximados com envelopes de McCormick (MCCORMICK, 1976). Como os problemas de otimização (55) e (62) são bilineares, pode ser utilizado na resolução o *solver* KNITRO (BYRD; NOCEDAL; WALTZ, 2006). Pois, esse *solver* de programação não linear (NLP) é baseado em métodos para tratar, de modo eficiente, problemas com restrições bilineares do tipo desse capítulo. Os resultados pelo KNITRO não garantem ser soluções ótimas globais, no entanto encontram-se com agilidade soluções ótimas locais, de alta qualidade, após a convergência. Um *solver* global, que implementa uma derivação espacial e busca limites para encontrar soluções ótimas globais é o BARON (SAHINIDIS, 1996). Entretanto, se o problema for em grande escala, o tempo de gerar a solução pode aumentar exponencialmente.

A reformulação apresentada a seguir permite a implementação na linguagem AMPL ¹(FOURER; GAY; KERNIGHAN, 1987) dos problemas de otimização (55) e (62). Então, as igualdades e as desigualdades desses problemas são reescritas na forma de elemento a elemento. Desse modo, assume-se que os índices dos elementos das matrizes possuem os seguintes valores: $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ e $s \in \{1, \dots, m\}$.

¹ A *Mathematical Programming Language* (AMPL) é uma linguagem de modelagem algébrica para resolver problemas de otimização em grande escala.

Também, define-se que $\Theta = BKC$ para $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$, assim a igualdade bilinear (50a) torna-se as seguintes $r.n$ equações:

$$\sum_{\kappa=1}^n [l_{i\kappa}(a_{\kappa j} + \theta_{\kappa j})] - \sum_{\kappa=1}^r h_{i\kappa} l_{\kappa j} = 0, \quad (63)$$

onde $\theta_{\kappa j} = \sum_{s=1}^m b_{\kappa s} f_{sj}$, com $f_{sj} = \sum_{\kappa=1}^p k_{s\kappa} c_{\kappa j}$. Além disso, a restrição associada à velocidade de convergência da trajetória de estados (52), é reescrita pelas r inequações:

$$\sum_{\kappa=1}^r |h_{i\kappa}| \leq \beta \text{ com } 0 \leq \beta < 1.$$

Porém, para emitir o valor absoluto de $h_{i\kappa}$, considera-se uma matriz positiva auxiliar $\Psi \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que:

$$\sum_{\kappa=1}^r \psi_{i\kappa} \leq \beta \text{ com } 0 \leq \beta < 1 \text{ e } -\psi_{i\kappa} \leq h_{i\kappa} \leq \psi_{i\kappa}. \quad (64)$$

Análogo à igualdade (63) e à desigualdade (64), a transformação elemento a elemento é aplicada em (51) e (53). Adicionalmente, para todo $\nu \in \{1, \dots, r\}$ e $\iota \in \{1, \dots, p\}$, os elementos de H , K , L e U possuirão limites inferiores e superiores, respectivamente:

$$\underline{h} \leq h_{i\nu} \leq \bar{h} \quad (65)$$

$$\underline{k} \leq k_{s\iota} \leq \bar{k} \quad (66)$$

$$\underline{l} \leq l_{ij} \leq \bar{l} \quad (67)$$

$$\underline{v} \leq v_{ji} \leq \bar{v}, \quad (68)$$

onde $\underline{h}, \bar{h}, \underline{k}, \bar{k}, \underline{l}, \bar{l}, \underline{v}, \bar{v} \in \mathbb{R}$. Logo, considerando o problema (55) com as reformulações, elemento a elemento, de suas restrições e as limitações de (65)-(68), obtém-se o seguinte problema, na linguagem AMPL:

$$\begin{aligned} & \underset{(H,L,K,U,\beta,\phi)}{\text{Minimizar}} && \Phi(\beta, \phi) = \alpha\beta + (1 - \alpha)\phi \\ & \text{sujeito a} && (63) - (68). \end{aligned} \quad (69)$$

Similarmente, as restrições do problema de otimização (62) podem ser reescritas, elemento a elemento, e o problema será reescrito como em (69) para implementação na linguagem AMPL.

4.4 EXEMPLOS

Nessa seção, tratam-se dois exemplos numéricos por programação bilinear. Na implementação, considera-se que a matriz L buscada é quadrada, isto é, $r = n$. Além disso, os limites inferiores e superiores de cada variável possuirão os seguintes valores: $\underline{k} = \underline{l} = \underline{v} = -1000$, $\bar{k} = \bar{l} = \bar{v} = 1000$, $\underline{h} = -1$, $\bar{h} = 1$ e $\bar{\beta} = 0.99999$. No Sistema 3, são atribuídos os limites $\underline{u} = -1$, $\bar{u} = 1$, $\underline{\gamma} = 0.000001$ e $\bar{\gamma} = 1000$. As soluções desses problemas foram geradas pelo *solver* KNITRO.

Tabela 6 – Critérios de desempenho para *StF*

α	β	ϕ	$\ H\ _\infty$	$\ KC\ _\infty$
1.00	0.00499	1500.64	0.00499	1156.00
0.99	0.72807	18.0209	0.72807	18.0209
0.98	0.90317	5.07403	0.90317	5.07403
0.97	0.95715	2.87411	0.95714	2.87405
0.96	0.98405	2.11815	0.98405	2.11815
0.95	0.99999	1.77467	0.99999	1.77467
0.90	0.99999	1.77182	0.99999	1.77182

Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

4.4.1 Sistema 2: Estabilização *StF* e *SOF*

Considerou-se o modelo contínuo no tempo utilizado em (FLETCHER *et al.*, 1985) e (CASTELAN; HENNET; VILLARREAL, 2003). Assim, obteve-se pela discretização ZOH, com tempo de amostragem 0.1 segundos, um sistema linear discreto no tempo do tipo (47) com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0052 & 0.1053 & 0 & 0 \\ 0.1053 & 1.1105 & 0 & 0 \\ -0.1002 & -0.0052 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0.0052 & 0 \\ 0.1053 & 0 \\ -0.0002 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Para a estabilização *StF*, tem-se a matriz $C = I_4$. Já para a lei de controle *SOF* de (48), a matriz C atribuída é:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Na função objetivo $\Phi(\beta, \phi)$, testou-se diferentes valores para o fator de ponderação α com o objetivo de verificar o efeito sobre o desempenho do controle neste sistema. Os resultados são sumarizados e discutidos na sequência (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

- *Projeto StF:*

A Tabela 6 mostra o comportamento dos coeficientes β e ϕ para o problema (55), em relação às normas infinitas $\|H\|_\infty$ e $\|KC\|_\infty$, para diferentes valores de ponderação α . Já a Tabela 7 mostra os resultados numéricos, para $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.98$, das matrizes de ganho K e das matrizes L associadas às FLPs.

Tabela 7 – Projeto *StF*: K e L para 0.99 e $\alpha = 0.98$

α	K e L
0.99	$K = \begin{bmatrix} -7.46280 & -1.09108 & 5.12477 & -4.34223 \\ 0.00001 & 7.41249 & -0.00001 & -10.60836 \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} -20.88941 & -14.00997 & 19.14366 & 9.89085 \\ 695.96043 & 364.24567 & -768.87467 & -234.44812 \\ 886.29247 & 454.27496 & -992.10846 & -289.74772 \\ -32.84237 & -16.61548 & 36.94641 & 10.52380 \end{bmatrix}$
0.98	$K = \begin{bmatrix} -2.09156 & -1.93643 & 0.29996 & -0.74608 \\ 0.00001 & 2.14337 & -0.00001 & -2.93064 \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 37.71193 & 45.63137 & -13.83748 & -20.09811 \\ 366.68366 & 422.17924 & -138.75894 & -179.43743 \\ 510.02020 & 574.35096 & -195.68542 & -240.17537 \\ 73.52326 & 87.25618 & -27.32369 & -37.92254 \end{bmatrix}$

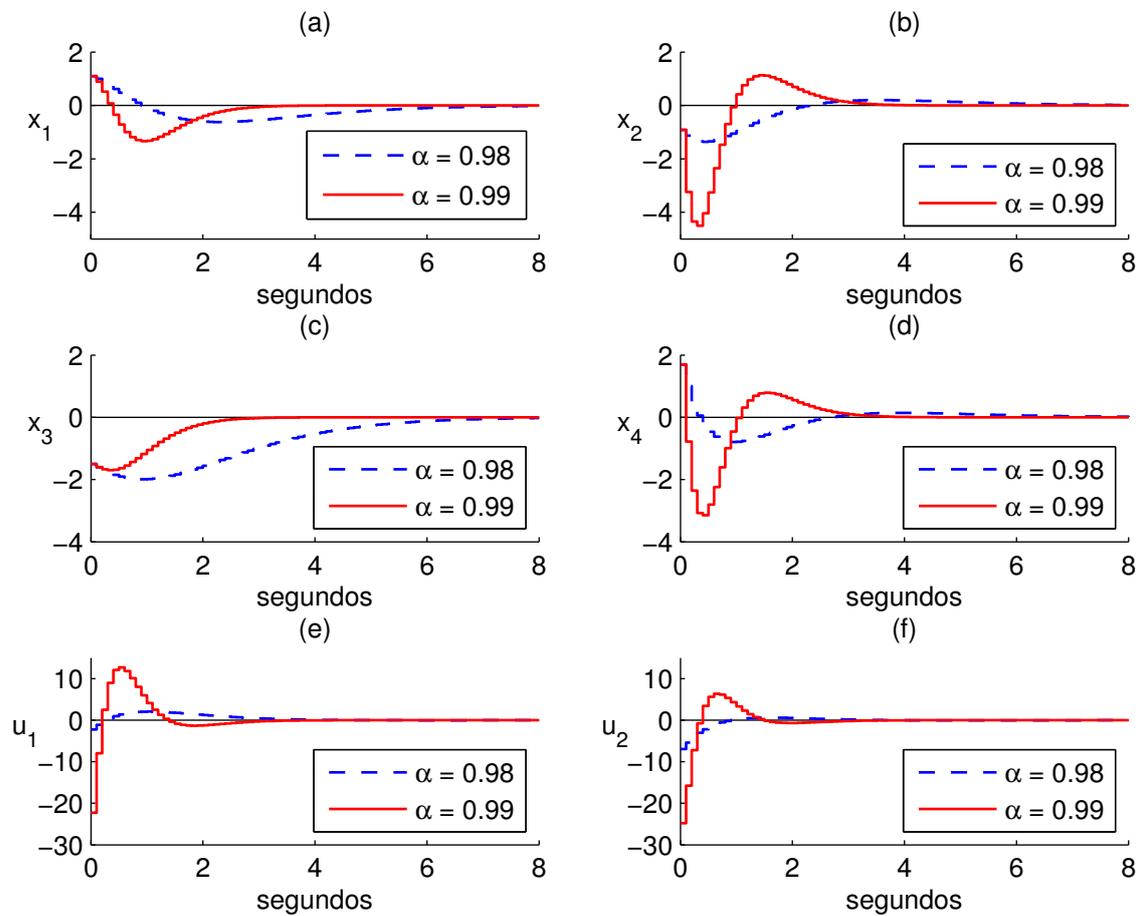
Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

Como esperado, observa-se que na Tabela 6 o menor coeficiente de contratividade é $\beta = 0.00499$ para $\alpha = 1.00$, o que implica na maior velocidade de convergência para a origem das trajetórias dos estados. Por consequência, o valor do esforço de controle foi alto, implicando em $\phi = 1500.64$. Também, percebe-se que para $\alpha \leq 0.99$, os valores de β e ϕ são iguais a $\|H\|_\infty$ e $\|KC\|_\infty$, respectivamente.

Além disso, observa-se que para valores de α decrescentes, o peso do esforço de controle toma mais importância na otimização. Então, o esforço de controle vinculado ao ϕ apresenta um decréscimo significativo e o coeficiente de contratividade, relacionado ao raio espectral de $\sigma(A + BK)$, torna-se maior com a diminuição de α .

A Fig. 2 foi construída para melhor visualização do comportamento dinâmico desse sistema, cujas trajetórias de estados em malha fechada e suas respectivas ações de controle são mostradas, para um estado inicial $x_0 = [1.1 \ -0.91 \ -1.5 \ 1.7]^T$ ². Então, pela Fig. 2 observa-se que a maior velocidade de convergência das trajetórias

² A simulação em malha fechada corresponde ao controle digital *StF* do sistema original de tempo contínuo, usando ZOH com o período de amostragem considerado para obter o modelo de tempo discreto (70).

Figura 2 – Trajetória dos estados e ações de controle para $x_0 = [1.1 \ -0.91 \ -1.5 \ 1.7]^T$ 

Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

de estados, obtida para $\alpha = 0.99$, implicou em ações de controle maiores que as obtidas para $\alpha = 0.98$, as quais se observam trajetórias de estados mais suaves e lentas.

- *Projeto SOF:*

Os resultados dos critérios de desempenho para diferentes pesos de α no projeto *SOF*, estão resumidos na Tabela 8. Já a Tabela 9 mostra as soluções para a matriz de ganho K e a matriz quadrada L , relacionadas a $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.98$.

Pelas Tabelas 8 e 9, percebe-se a similaridade em relação ao projeto anterior *StF*. Assim, em *SOF* quanto menor o peso α maior o coeficiente de contratividade β (e correspondente $\|H\|_\infty = \sigma(A + BKC)$) e menor o esforço de controle ϕ (e $\|KC\|_\infty$). Como o projeto *SOF* é mais restritivo que o *StF*, valores diferentes de β , por exemplo, foram obtidos para valores semelhantes de α . Também, pode ser observado que o limite superior numérico imposto ao coeficiente de velocidade de convergência foi

Tabela 8 – Critérios de desempenho para *SOF*

α	β	ϕ	$\ H\ _{\infty}$	$\ KC\ _{\infty}$
1.00	0.02152	1680.14	0.02150	1446.08
0.99	0.98139	4.49208	0.98139	4.49208
0.98	0.99999	2.81344	0.99999	2.81344
0.97	0.99999	2.82477	0.99999	2.82477
0.96	0.99999	2.82297	0.99999	2.82297

Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

Tabela 9 – Projeto *SOF*: K e L para $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.98$

α	K e L
	$K = \begin{bmatrix} -3.10622 & 0.00000 & -1.38586 \\ -2.70020 & -0.00107 & -1.79081 \end{bmatrix}$
0.99	$L = \begin{bmatrix} -368.994 & 300.88 & -1.47658 & -257.0566 \\ -10.51657 & 5.32081 & 0.05175 & -6.66446 \\ -2.68274 & 2.23809 & -0.00429053 & -1.85167 \\ -283.50 & 226.41341 & -0.97465 & -196.47237 \end{bmatrix}$
	$K = \begin{bmatrix} -2.12414 & -0.00000 & -0.68930 \\ -1.74403 & -0.00000 & -1.06941 \end{bmatrix}$
0.98	$L = \begin{bmatrix} -999.99496 & 952.84995 & -0.00063 & -613.26387 \\ -123.17598 & 109.52000 & -0.00034 & -75.51114 \\ 389.42609 & -366.98336 & -0.00018 & 238.83435 \\ -994.15894 & 939.20476 & 0.000007 & -609.59721 \end{bmatrix}$

Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

atingido para todo $\alpha \leq 0.98$ no *SOF*, diferentemente do *StF*, no qual foi atingido para todo $\alpha \leq 0.95$. Além disso, foi verificado por experimentos numéricos que o projeto *SOF* é mais sensível a menores variações do peso α em comparação ao projeto *StF*.

Tabela 10 – Projeto StF: K, L e Q para $\alpha = 0.99, 0.98$ e 0.97

	K	L	Q
α	0.99		
β	0.7937	$\begin{bmatrix} -7.3091 & -5.2406 \\ 10.1846 & 2.3651 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9999 & -0.00000004 \end{bmatrix}$
γ	12.5497		
α	0.98		
β	0.9284	$\begin{bmatrix} -0.8040 & -1.7987 \\ 1.4142 & 1.1886 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9999 & -0.00000002 \end{bmatrix}$
γ	2.6028		
α	0.97		
β	0.92840	$\begin{bmatrix} -0.0886 & -0.6021 \\ 0.1859 & 0.5048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9999 & -0.00000006 \end{bmatrix}$
γ	0.6907		

Fonte: (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018).

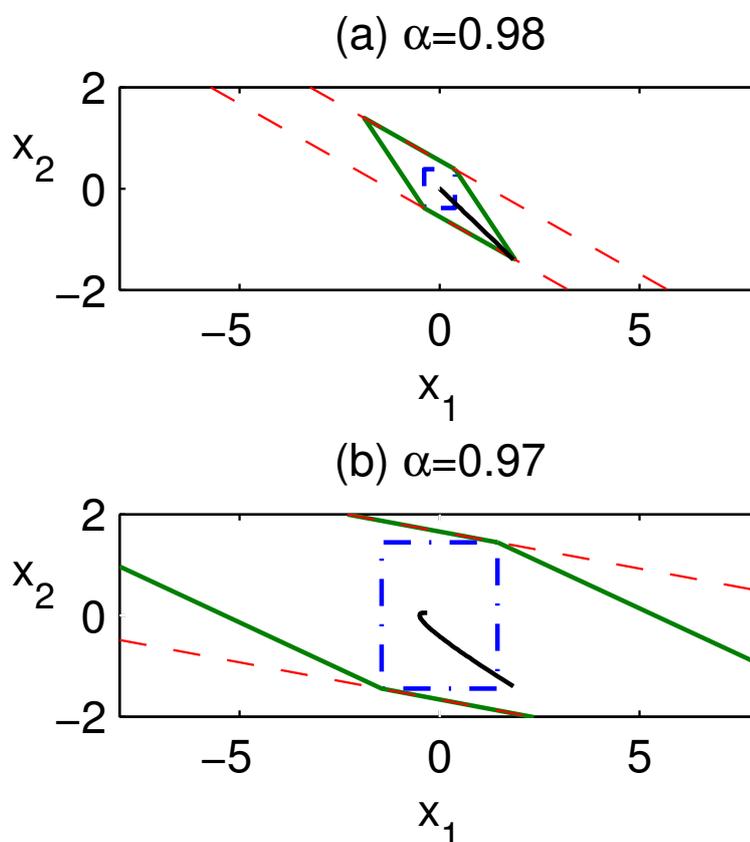
4.4.2 Sistema 3: Restrição no Controle

Este sistema linear discreto no tempo, definido pelas matrizes em (72), foi obtido por uma discretização, com tempo de amostragem de 0.1 segundos, de um sistema duplo integrador em tempo contínuo (BLANCHINI, F., 1999).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = I_2. \quad (72)$$

Então, soluciona-se o problema de otimização (62), para $\alpha \in \{0.99, 0.98, 0.97\}$, sendo a função objetivo $\Phi(\beta, \gamma)$. Assim, os resultados numéricos obtidos estão resumidos na Tabela 10.

Analisando a Tabela 10, observa-se que quanto menor o peso α mais lenta é a convergência das trajetórias dos estados para a origem, pois essa velocidade é associada ao coeficiente de contratividade β . Também, diminuindo α , o poliedro computado $S(L)$, das condições iniciais admissíveis, será maior cujo tamanho está associado ao escalar γ da inclusão $S(\gamma I_n) \subseteq S(L)$. Essa relação entre o desempenho temporal e o tamanho do $S(L)$, que aparece em problemas com restrições de controle, está representada na Fig. 3, onde a inclusão $S(L) \subseteq S(KC)$ caracteriza o projeto que evita a saturação. Em ambas Figuras 3 (a) e (b), o conjunto $S(KC)$ é representado por linhas tracejadas, o conjunto poliédrico $S(L)$ por linhas contínuas e o conjunto $S(\gamma I_n)$ está desenhado por ponto e linhas sequenciais. Observa-se que nas Figuras 3 (a) e (b) as trajetórias de estados iniciam no ponto $x_0 = [1.85 \quad -1.4]^T$, o qual é vértice do

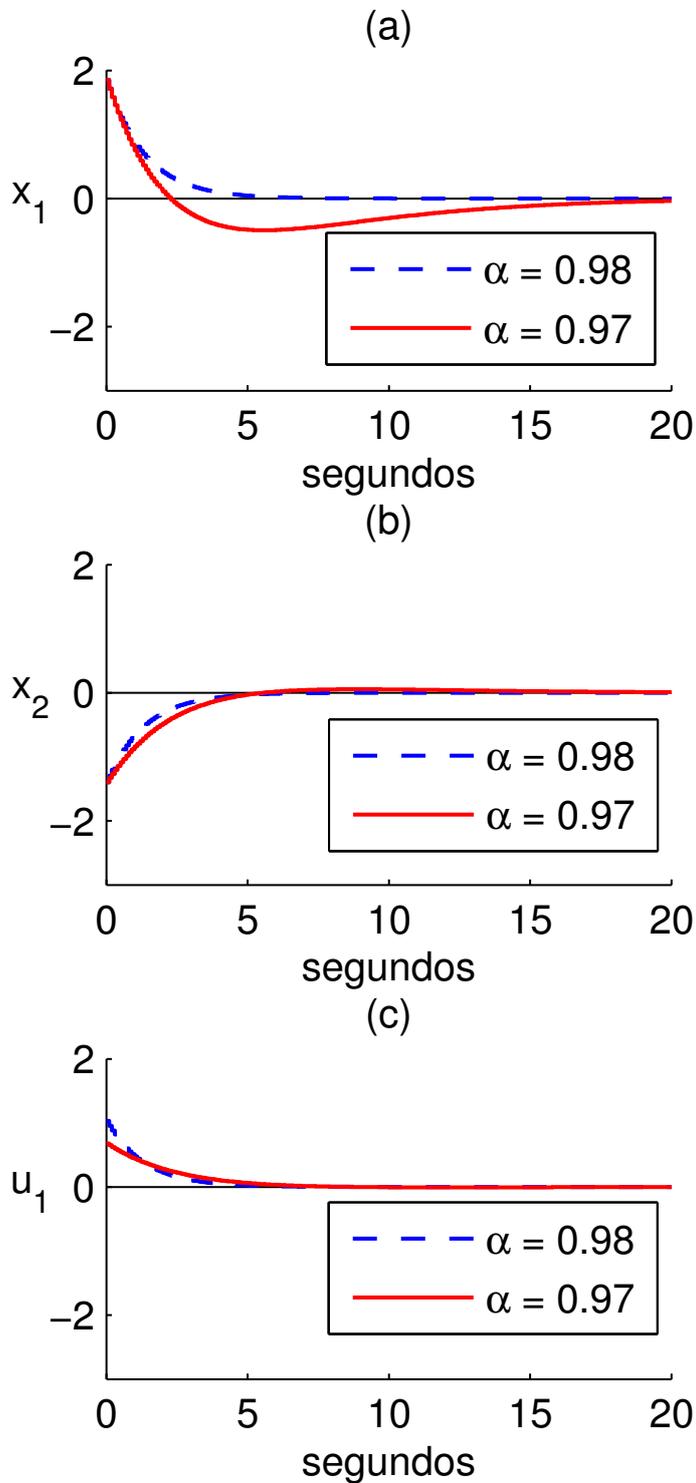
Figura 3 – Conjuntos $\mathcal{S}(\gamma I_n)$ (-.-.), $\mathcal{S}(L)$ (-) e $\mathcal{S}(KC)$ (- -)

conjunto poliédrico $\mathcal{S}(L)$, e convergem assintoticamente, como esperado pela teoria utilizada. Também, pelas figuras acima nota-se que, ao diminuir o peso α , aumenta-se o conjunto de condições iniciais e diminui-se o esforço de controle.

A Fig. 4 mostra o comportamento dinâmico do sistema (72) em malha fechada, com suas trajetórias de estados e suas respectivas ações de controle, para um estado inicial $x_0 = [1.85 \ -1.4]^T$. Então, pela Fig. 4 observa-se que a maior velocidade de convergência das trajetórias de estados, obtida para $\alpha = 0.98$, implicou em ações de controle maiores que as obtidas para $\alpha = 0.97$, as quais se observam trajetórias de estados mais suaves.

4.5 CONCLUSÃO

Neste Capítulo, foram encontradas soluções para os problemas de estabilização *StF* e *SOF* de sistemas LDIT considerando a formulação bilinear e as relações algébricas relacionadas às FLPs. Para fins de projeto, foram propostos dois problemas de otimização bilinear para estabilização de sistemas LDITs, sem e com restrições sobre a entrada de controle. Também, as funções objetivo permitiram ponderar um critério associado à velocidade de convergência e um critério adicional, em cada caso.

Figura 4 – Trajetórias dos estados e ação de controle para $x_0 = [1.85 \ -1.4]^T$ 

Para implementação dos problemas de otimização foi utilizada a linguagem AMPL e na resolução o *solver* KNITRO, que aborda as bilinearidades de maneira eficiente o que permite projetar ganhos *StF* e *SOF* para diferentes ponderações α nas funções obje-

tivo. Para os resultados dos exemplos numéricos apresentados, o método mostrou-se eficaz em termos de objetivos de controle. No próximo capítulo, essa abordagem será estendida em sistemas que estão sujeitos a perturbações persistentes e em problemas de controle com restrições não simétricas sobre os estados e as entradas de controle.

5 ESTABILIZAÇÃO SOB RESTRIÇÕES DE SISTEMAS LDIT COM PERTURBAÇÕES VIA PROGRAMAÇÃO BILINEAR

Neste capítulo, a propriedade Δ -Invariância de poliedros é utilizada no projeto de realimentação estática de saída (*SOF*) ou de realimentação de estados (*StF*) para sistemas LDIT, sujeitos a perturbações persistentes, tais que as restrições nos estados e no controle sejam respeitadas. Assim, novas condições algébricas são propostas para garantir que qualquer trajetória iniciando no poliedro Δ -invariante permaneça nele e convirja, em tempo finito, para outro poliedro em torno da origem, onde a trajetória fica confinada. Então, a solução proposta, para o problema de controle considerado, requer a determinação de dois poliedros Δ -invariante, sendo o poliedro interno com trajetórias ultimamente limitadas (UB) (*ultimately bounded*, em inglês). Portanto, um problema de otimização bilinear é proposto, para a resolução do problema de estabilização de sistemas LDITs. Nesse problema, a função objetivo pondera o tamanho dos dois conjuntos poliédricos mencionados e as restrições são formadas pelas relações de invariância, pelas limitações intrínsecas ao sistema e pelas condições impostas ao problema. Além disso, um *solver* de otimização não linear é usado para lidar eficientemente com as bilinearidades presentes. Para demonstrar nossa proposta, serão explorados dois exemplos numéricos.

5.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O sistema LDIT considerado, sujeito a perturbações persistentes, possui a representação abaixo:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + B_p p_k \quad (73a)$$

$$y_k = Cx_k + Nn_k, \quad (73b)$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é o índice de tempo discreto, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida, e $p_k \in \mathbb{R}^s$ e $n_k \in \mathbb{R}^q$ são as perturbações/ruídos. Nesse sistema, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times s}$, e $N \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Além disso, o par matricial (A, B) é controlável e (C, A) é observável.

As variáveis de estado, de entrada de controle e de perturbação possuem restrições cujas representações, sem perda de generalidade, são dadas pelos conjuntos poliédricos (BLANCHINI, Franco; MIANI, Stefano, 2008):

$$\mathcal{X} = \{x_k : Gx_k \leq \mathbf{1}\} \text{ com } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_g}, G \in \mathbb{R}^{l_g \times n}, \quad (74a)$$

$$\mathcal{U} = \{u_k : Zu_k \leq \mathbf{1}\} \text{ com } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_z}, Z \in \mathbb{R}^{l_z \times m}, \quad (74b)$$

$$\mathcal{P} = \{p_k : Pp_k \leq \mathbf{1}\} \text{ com } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_p}, P \in \mathbb{R}^{l_p \times s}, \quad (74c)$$

$$\mathcal{N} = \{n_k : Rn_k \leq \mathbf{1}\} \text{ com } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_r}, R \in \mathbb{R}^{l_r \times q}. \quad (74d)$$

Então, no sistema em malha aberta (73), procura-se uma lei de controle linear por realimentação estática de saída da seguinte forma:

$$u_k = Ky_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}. \quad (75)$$

Portanto, aplicando (75) no sistema (73), resulta-se o respectivo sistema em malha fechada:

$$x_{k+1} = (A + BKC)x_k + Dd_k, \quad (76)$$

sendo a matriz $(A + BKC)$ Schur estável, $D = [B_p | BKN] \in \mathbb{R}^{n \times l_d}$, com $l_d = s + q$, e $d_k = [p_k^T | n_k^T]^T \in \mathbb{R}^{l_d}$. Caso a realimentação de estados seja utilizada, a matriz $C = I_n$ e a matriz de ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ no espaço de estados (76).

As perturbações exógenas, pertencentes aos conjuntos (74c) e (74d), são persistentes e limitadas pela amplitude. Assim, as restrições sobre as perturbações podem ser reformuladas no seguinte conjunto poliédrico:

$$\Delta = \{d_k : \Pi d_k \leq \mathbf{1}\}, \quad \text{com } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_p + l_r}, \Pi = \text{diag}\{P, R\}. \quad (77)$$

Também, a restrição de entrada de controle (74b) pode ser reescrita de modo que o seu domínio sejam os estados x_k e as perturbações n_k . Então, considerando (73b), (74b) e (75), reformula-se o poliedro referente à limitação do controle como:

$$\mathcal{U}_y = \left\{ \begin{bmatrix} x_k \\ n_k \end{bmatrix} : ZK \begin{bmatrix} C & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ n_k \end{bmatrix} \leq \mathbf{1} \right\}. \quad (78)$$

Logo, apresenta-se a seguir o problema de estabilização por SOF deste capítulo.

Problema 1 *Encontrar uma matriz K do problema SOF, para a estabilização do sistema em malha fechada (76), um conjunto externo $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{X}$ e um conjunto interno $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$, tal que para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$ e para qualquer perturbação persistente $d_k \in \Delta$, a condição de admissibilidade do controle (78) é satisfeita e a trajetória de estados associada permanece em \mathcal{X} , converge para \mathcal{L}_∞ , em um tempo finito \tilde{k} , e permanece em \mathcal{L}_∞ para todo $k \geq \tilde{k}$.*

5.2 CONDIÇÕES DE INCLUSÃO E Δ -INVARIÂNCIA

Para resolver o Problema 1, considera-se a seguinte definição de Δ -Invariância de um conjunto poliédrico \mathcal{L}_0 , com um poliedro associado \mathcal{L}_∞ , onde as trajetórias permanecem UB.

Definição 6 *Um conjunto poliédrico \mathcal{L}_0 é um conjunto Δ -invariante contrativo para o sistema (76), com o conjunto $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$ se, para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$*

e para qualquer $d_k \in \Delta$, a trajetória dos estados correspondente permanece no \mathcal{L}_0 , converge para \mathcal{L}_∞ , no tempo finito $\tilde{k} \geq 0$, e mantém-se em \mathcal{L}_∞ para todo $k \geq \tilde{k}$.

Pela propriedade de contratividade, mencionada na definição acima, a qual deve ocorrer em $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$, há garantia da convergência da trajetória de estados para o poliedro Δ -invariante \mathcal{L}_∞ . Também, pela Definição 6, observa-se que não considerando o conjunto \mathcal{L}_∞ , essa definição corresponde à propriedade clássica de Δ -Invariância (SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997), (MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996), (BLANCHINI, F.; MIANI, S., 2015). Caso o sistema (76) não sofra a ação da perturbação, ou seja $d_k = \mathbf{0}$ para todo $k \geq 0$, então o conjunto \mathcal{L}_∞ será o ponto de origem no espaço de estados. Assim, a condição de Δ -Invariância se reduzirá à propriedade clássica de Invariância Positiva de \mathcal{L}_0 com contratividade.

Além disso, é importante lembrar que \mathcal{L}_0 é considerado admissível se as restrições (73b), (74b), (74d) e (75) são garantidas (MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996), isto é:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ n_k \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_y, \text{ para todo } x_k \in \mathcal{L}_0 \text{ e } n_k \in \mathcal{N}. \quad (79)$$

Portanto, pela Definição 6 e pelas observações anteriores, resume-se a solução do Problema 1 através da proposição a seguir.

Proposição 6 *Qualquer tupla $(K, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_\infty)$, sendo K uma matriz de estabilização SOF, \mathcal{L}_0 um conjunto Δ -invariante contrativo admissível, tal que $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{X}$, e $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$ um poliedro Δ -invariante com trajetórias UB, caracteriza uma solução do Problema 1.*

Para obter soluções apropriadas do Problema 1, o poliedro de condições iniciais admissíveis \mathcal{L}_0 e o poliedro \mathcal{L}_∞ são definidos, respectivamente, como:

$$\mathcal{L}_0 = \{x_k : Lx_k \leq \mathbf{1}\} \quad (80)$$

e

$$\mathcal{L}_\infty = \{x_k : Lx_k \leq \rho\}, \quad (81)$$

onde $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, para $r > n$ com $\text{posto}(L) = n$, e $\mathbf{0} < \rho = \bar{\rho}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^r$ para algum escalar real $\bar{\rho} \in (0, 1]$ garantir a inclusão $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$.

Assim, utiliza-se o Lema 1, para estabelecer as condições algébricas, que descrevem a inclusão $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{X}$ e a condição de admissibilidade (79), na sequência (HENNET, 1995).

Lema 6 *A inclusão $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{X}$ é verificada ou, equivalentemente, $x_k \in \mathcal{X}$ para todo $x_k \in \mathcal{L}_0$ se, e somente se, existir uma matriz não negativa $T \in \mathbb{R}^{l_g \times r}$, tal que:*

$$TL = G, \quad (82a)$$

$$T\mathbf{1} \leq \mathbf{1}. \quad (82b)$$

Lema 7 A admissibilidade de \mathcal{L}_0 em (79) é satisfeita se, e somente se, existirem matrizes não negativas $Q_1 \in \mathbb{R}^{l_z \times r}$ e $Q_2 \in \mathbb{R}^{l_z \times l_r}$, tais que:

$$Q_1 L = ZKC, \quad (83a)$$

$$Q_2 R = ZKN, \quad (83b)$$

$$Q_1 \mathbf{1} + Q_2 \mathbf{1} \leq \mathbf{1}. \quad (83c)$$

Além disso, a partir da Definição 6 e da aplicação do LFE, propõe-se a seguinte formulação algébrica da propriedade de Δ -Invariância do poliedro \mathcal{L}_0 , com o conjunto UB \mathcal{L}_∞ associado.

Proposição 7 Para $\beta \in [0, 1)$, o conjunto poliédrico (80) é um conjunto Δ -invariante contrativo para o sistema (76), com o conjunto UB associado dado por (81) se, e somente se, existirem matrizes não negativas $(H_1, H_2, W) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $(V, X) \in \mathbb{R}^{r \times (l_p + l_r)}$, e um vetor não negativo $\rho \leq \mathbf{1} \in \mathbb{R}^r$, tais que:

$$(H_1 - H_2)L = L(A + BKC), \quad (84a)$$

$$V\Pi = LD, \quad (84b)$$

$$H_1 \mathbf{1} - H_2 \rho + V \mathbf{1} \leq \beta \mathbf{1}, \quad (84c)$$

$$WL = L(A + BKC), \quad (84d)$$

$$X\Pi = LD, \quad (84e)$$

$$W\rho + X \mathbf{1} \leq (1 - \epsilon)\rho, \quad (84f)$$

onde $\epsilon > 0$ é um escalar real suficientemente pequeno.

Prova: As relações (84d)-(84f) são condições necessárias e suficientes para a Δ -Invariância do poliedro \mathcal{L}_∞ . Elas são facilmente obtidas aplicando o Lema 1 à inclusão do conjunto descrita pela seguinte condição de admissibilidade de um passo (ver, por exemplo, (SANTOS; CASTELAN; HENNET, 1997), (MILANI; CASTELAN; TARBOURIECH, 1996)), que também admite um grau mínimo de contratividade para \mathcal{L}_∞ representado pelo coeficiente $(1 - \epsilon)$:

$$L \begin{bmatrix} (A + BKC) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq (1 - \epsilon)\rho, \\ \forall \begin{bmatrix} L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Então, a verificação de (84d)-(84f) garante que para qualquer $\tilde{k} \geq 0$, se $x_{\tilde{k}} \in \mathcal{L}_\infty$, x_k permanecerá em \mathcal{L}_∞ para qualquer $k \geq \tilde{k}$ e para qualquer $d_k \in \Delta$. A propriedade

Δ -Invariância com contratividade em $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$, para $\beta \in [0, 1)$, também pode ser descrita pela relação de admissibilidade a um passo, como segue:

$$L \begin{bmatrix} (A + BKC) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq \beta \mathbf{1},$$

$$\forall \begin{bmatrix} L^T & -L^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & -\rho^T & \mathbf{1}^T \end{bmatrix}^T.$$

A partir do Lema 1, essa inclusão é equivalente à existência de uma matriz não negativa $\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & V \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (2r + l_p + l_r)}$, que verifica as seguintes relações algébricas:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & -L^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi^T \end{bmatrix}^T = L \begin{bmatrix} (A + BKC) & D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & -\rho^T & \mathbf{1}^T \end{bmatrix}^T \leq \beta \mathbf{1}.$$

Assim, as condições (84a)-(84c) são obtidas. Finalmente, para mostrar a convergência das trajetórias em tempo finito iniciando em $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_\infty$ para \mathcal{L}_∞ , determina-se que $\delta \mathcal{L}_\infty = \{x_k : Lx_k \leq \delta \rho\}$, com $1 \leq \delta \leq \bar{\rho}^{-1}$, também é um conjunto Δ -invariante para o sistema (76) e tem coeficiente de contratividade $\tilde{\beta} = (1 - \epsilon) < 1$ (BLANCHINI, F.; MIANI, S., 2015). Então, considerando $\delta_0 \in (1, \bar{\rho}^{-1})$ percebe-se que, para qualquer conjunto homotético entre $\delta_0 \mathcal{L}_\infty$ e \mathcal{L}_0 , tem-se pelo menos a mesma taxa de contratividade $\tilde{\beta}$ de \mathcal{L}_∞ . Além disso, assume-se que $x_0 \in \delta_0 \mathcal{L}_\infty$ e $x_k \in (\tilde{\beta}^k \delta_0) \mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_\infty$, $\forall d_k \in \Delta$ com $k > 0$. Dessa forma, pode ser observado que $x_k \in \mathcal{L}_\infty$ quando $\tilde{\beta}^k \delta_0 \leq 1 \Rightarrow \tilde{\beta}^k \leq \delta_0^{-1}$, e solucionando para k , conclui-se que para $k \geq \tilde{k} = -\log_{\tilde{\beta}} \delta_0 \Rightarrow x_k \in \mathcal{L}_\infty$. O número de passos \tilde{k} deve ser visto como um valor de referência, porque a trajetória pode atingir o conjunto \mathcal{L}_∞ em um número de passos k menor do que \tilde{k} . \square

A estabilidade Schur de $(A + BKC)$, também pode ser mostrada a partir das condições algébricas da Proposição 7. Assim, relembra-se que, por suposição, $r > n$ e $\text{posto}(L) = n$, o que implica, para as igualdades (84a) e (84d), em $\sigma(A + BKC) \subset \sigma(H_1 - H_2)$ e $\sigma(A + BKC) \subset \sigma(W)$, respectivamente. Logo, $\sigma(A + BKC) \subset \sigma(H) \cap \sigma(W)$, onde $H = H_1 - H_2$ não é necessariamente não negativa. Mas, para (84f) tem-se que $W\rho \leq (1 - \epsilon)\rho$, o que garante que $\sigma(W)$ pertence ao interior do círculo unitário, pois, por construção, $W \geq \mathbf{0}$. Além disso, tem-se um autovalor real, denotado por λ , que é igual ao seu raio espectral e satisfaz $\tilde{\lambda} < (1 - \epsilon)$ com $\tilde{\lambda}$ pertencente aos reais não negativos (BERMAN; PLEMMONS, 1994; HENNET, 1995). Por consequência, $(A + BKC)$ é Schur estável necessariamente. Mais especificamente, para qualquer $\lambda \in \sigma(A + BKC)$ mostra-se que $|\lambda| \leq \tilde{\lambda}$. Entretanto, para o fato que $\sigma(A + BKC) \in \sigma(W) \cap \sigma(H_1 - H_2)$ pode existir um valor $\hat{\lambda} > 0$ tal que $|\lambda| \leq \hat{\lambda} < \tilde{\lambda}$.

Cabe lembrar que a matriz L , com $r > n$, deve ter posto completo nas colunas,

ou seja todas as suas r colunas devem ser linearmente independentes. Isto ocorre se, e somente se, existe uma matriz pseudo-inversa (à esquerda) $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que, para a matriz identidade $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se:

$$UL = I_n. \quad (85)$$

Então, pelos resultados acima e pelas observações comentadas, pode-se estabelecer o seguinte corolário da Proposição 7.

Corolário 1 *O Problema 1 tem uma solução formada pelos poliedros (80) e (81) se, para $\beta \in [0, 1)$, existe um escalar $r > n$, matrizes K, L e U , um vetor não negativo ρ e matrizes não negativas H_1, H_2, W, V, X, T e Q , tais que as condições (82)-(85) são verificadas.*

5.3 ESTRATÉGIA DE PROJETO UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO BILINEAR

Na solução proposta para o Problema 1, as equações (82a), (83a), (83b), (84a), (84d) e (85) possuem produtos entre variáveis matriciais, incluindo o ganho de controle K , e termos bilineares $H_2\rho$ e $W\rho$, das desigualdades (84c) e (84f), respectivamente. Mas, esses produtos bilineares podem ser apropriadamente considerados como restrições de projeto e as técnicas de otimização não linear adaptadas podem ser usadas para encontrar soluções do Problema 1, como será discutido mais adiante nesta seção.

5.3.1 Aspectos de Projeto

Na estratégia de projeto *SOF* proposta, o conjunto de condições iniciais é \mathcal{L}_0 , enquanto o conjunto UB \mathcal{L}_∞ é minimizado. Desse modo, define-se o conjunto poliédrico ¹:

$$\mathcal{S} = \{x_k : Sx_k \leq \beta \mathbf{1}\}, \quad (86)$$

sendo $\beta > 0$ um escalar real, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{l_s}$ e $S \in \mathbb{R}^{l_s \times n}$. Visando a maximização de \mathcal{L}_0 , considera-se a inclusão poliédrica $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}_0$ e uma variável escalar $\gamma = \beta^{-1}$. Assim, essa inclusão é equivalente à condição de existência de uma matriz não negativa $J \in \mathbb{R}^{r \times l_s}$, tal que:

$$JS = L, \quad (87a)$$

$$J\mathbf{1} \leq \gamma \mathbf{1}. \quad (87b)$$

Então, o poliedro \mathcal{S} , determinado a partir da matriz S , é uma escolha de projeto e o coeficiente β é uma variável de otimização, que permite aumentar o conjunto \mathcal{S} e, por consequência, \mathcal{L}_0 através da inclusão mencionada.

¹ Esse conjunto é referido na literatura em inglês como *shape-set* (TARBOURIECH *et al.*, 2011).

Em seguida, considera-se a variável escalar $\bar{\rho} \in (0, 1]$ que define os limites do conjunto UB $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{L}_0$. Logo, para encontrar as soluções do Problema 1, é proposto o seguinte problema de otimização bilinear, para dados escalares $\bar{\beta} < 1$ e $r > n$, e dado conjunto \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}
 & \underset{(K, H_1, H_2, L, T, Q, V, X, W, J, \beta, \gamma, \bar{\rho})}{\text{Minimizar}} && \Phi(\gamma, \bar{\rho}) = \alpha\gamma + (1 - \alpha)\bar{\rho} \\
 & \text{sujeito a} && (82) - (87), \\
 & && 0 \leq \beta \leq \bar{\beta}, \\
 & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \quad \ell = 1, \dots, \bar{\ell},
 \end{aligned} \tag{88}$$

onde:

- i) $\Phi(\gamma, \bar{\rho})$ é a função objetivo proposta, com o parâmetro de ponderação $0 \leq \alpha \leq 1$, permitindo ponderar a maximização do tamanho de \mathcal{L}_0 através de γ e a minimização do conjunto UB \mathcal{L}_∞ através de $\bar{\rho}$;
- ii) $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$ são as restrições adicionais, que podem ser impostas às variáveis de decisão para diferentes fins, incluindo os numéricos, discutidos mais adiante nesta seção.

Uma escolha possível para o poliedro \mathcal{S} é considerar que ele tem a mesma forma e complexidade maior ou igual a de \mathcal{X} , então inicializa-se $S = G$ e $r \geq l_g$.

No problema de otimização (88), para $0 \leq \beta < \bar{\beta}$, percebe-se que a escolha do parâmetro α pode resultar em diversas soluções para o Problema 1.

5.3.2 Aspectos de Implementação

Implementou-se o projeto acima para a realimentação estática de saída na linguagem AMPL, pois, também, essa linguagem permite tratar do problema de otimização bilinear (88). Diante disso, reescreveu-se todas equações e inequações, na forma de elemento-a-elemento, e utilizou-se o *solver* KNITRO na resolução do problema, conforme o capítulo anterior. Por simplicidade, somente as reformulações das relações (84d)-(84f) serão apresentadas, porém em (84a)-(84c) aplica-se a mesma reformulação dada anteriormente. Desse modo, assume-se que os índices $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ e $s \in \{1, \dots, m\}$, e define-se uma nova matriz $\Theta = BKC \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, o termo $L\Theta$ torna-se bilinear e a equação matricial (84d) é reescrita como as $r \cdot n$ equações (BRIÃO; PEDROSA *et al.*, 2018):

$$\sum_{\kappa=1}^r w_{i\kappa} l_{\kappa j} - \sum_{\kappa=1}^n [l_{i\kappa} (a_{\kappa j} + \theta_{\kappa j})] = 0, \tag{89}$$

onde $\theta_{\kappa j} = \sum_{s=1}^m b_{\kappa s} f_{sj}$, com $f_{sj} = \sum_{\kappa=1}^p k_{s\kappa} c_{\kappa j}$. Analogamente, para $\tau \in \{1, \dots, l_d\}$, a igualdade (84e) é reescrita pelas seguintes $r.l_d$ equações:

$$\sum_{\kappa=1}^{(l_p+l_r)} x_{i\kappa} \pi_{\kappa\tau} - \sum_{\kappa=1}^n l_{i\kappa} d_{\kappa\tau} = 0. \quad (90)$$

Além disso, a reformulação da desigualdade (84f) fica:

$$\sum_{\kappa=1}^r w_{i\kappa} \rho_{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^r x_{i\kappa} \mathbf{1} \leq \rho_i. \quad (91)$$

Adicionalmente, para $\nu \in \{1, \dots, r\}$ e $\iota \in \{1, \dots, p\}$, as restrições $f_{\ell}(\cdot) \leq \varphi_{\ell}$ são estabelecidas para determinar limites inferiores e superiores dos elementos de W , K , L e U , tais que:

$$\underline{w} \leq w_{i\nu} \leq \bar{w}, \underline{k} \leq k_{s\nu} \leq \bar{k}, \underline{l} \leq l_{ij} \leq \bar{l} \text{ e } \underline{v} \leq v_{ji} \leq \bar{v}, \forall i, j, \nu, s \text{ e } \iota, \quad (92)$$

onde \underline{w} , \bar{w} , \underline{k} , \bar{k} , \underline{l} , \bar{l} , \underline{v} , \bar{v} são escalares reais. Da mesma forma, os limites dos elementos das outras variáveis matriciais, envolvidas nas condições (84a)-(84c), são estipulados.

5.4 EXEMPLOS

Nesta seção, são apresentados dois exemplos numéricos encontrados na literatura. Nesses exemplos foram utilizados diferentes valores para o peso α e, portanto, verificou-se o efeito na resposta dinâmica do sistema para a maximização do conjunto \mathcal{L}_0 e para a minimização do conjunto \mathcal{L}_{∞} .

O valor inicial escolhido para o número de linhas de L foi $r = 4 > n = 2$ e atribuiu-se os limites superiores e inferiores nos elementos de K , L e U , respectivamente: $\underline{k} = \underline{l} = \underline{v} = -1000$ e $\bar{k} = \bar{l} = \bar{v} = 1000$. Já os elementos das matrizes não negativas H_1, H_2, W, V e X são limitados superiormente por: $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{w} = \bar{v} = \bar{x} = 1$. Também, os escalares reais não negativos γ e β tem limites $\underline{\gamma} = 0.000001$, $\bar{\gamma} = 1000$ e $\bar{\beta} = 0.99999$. Logo, os resultados numéricos foram obtidos usando o *solver* KNITRO (BYRD; NOCEDAL; WALTZ, 2006), sendo resumidos e discutidos na sequência.

5.4.1 Sistema 4

Considera-se o sistema LDIT, mostrado em (KÖGEL; FINDEISEN, 2017), com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.745 & -0.002 \\ 5.610 & 0.780 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5.6 \cdot 10^4 \\ 0.4640 \end{bmatrix}, B_p = I_2 \text{ e } N = 1. \quad (93)$$

Tabela 11 – Projeto *StF*: $r = 5$.

α	β	$\bar{\rho}$	K	$\sigma(A + BKC)$
0.9	0.8036	0.3865	$\begin{bmatrix} -7.2831 & -0.1993 \end{bmatrix}$	$\{0.7183 \pm 0.0571i\}$
0.5	0.8036	0.3864	$\begin{bmatrix} -7.3095 & -0.1984 \end{bmatrix}$	$\{0.7185 \pm 0.0570i\}$
0.1	0.6628	0.2800	$\begin{bmatrix} -4.1733 & -0.4012 \end{bmatrix}$	$\{0.6706 \pm 0.0251i\}$

As matrizes de perturbações são definidas, como:

$$P = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad R^T = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Além disso, diferentemente de (KÖGEL; FINDEISEN, 2017), as matrizes que determinam as restrições não simétricas de estados e de controle são, respectivamente:

$$G = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -2.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0.0666 & 0 & -0.1 & 0.04 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

- *Projeto StF*:

Para diferentes escolhas do parâmetro de ponderação α , os resultados obtidos para o problema (88), sendo $C = I_2$ e $r = lg = 5$, estão resumidos na Tabela 11. Observa-se na Tabela 11 que diferentes valores de β e $\bar{\rho}$, os quais são associados, respectivamente, ao tamanho de \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_∞ , são obtidos para diferentes pesos α na função objetivo $\Phi(\gamma, \bar{\rho})$. As soluções, para $\alpha = 0.5$, do projeto *StF* via os poliedros \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_∞ estão graficamente representadas na Figura 5(c). Resultados semelhantes são obtidos aumentando a complexidade da matriz L para $r = 6$.

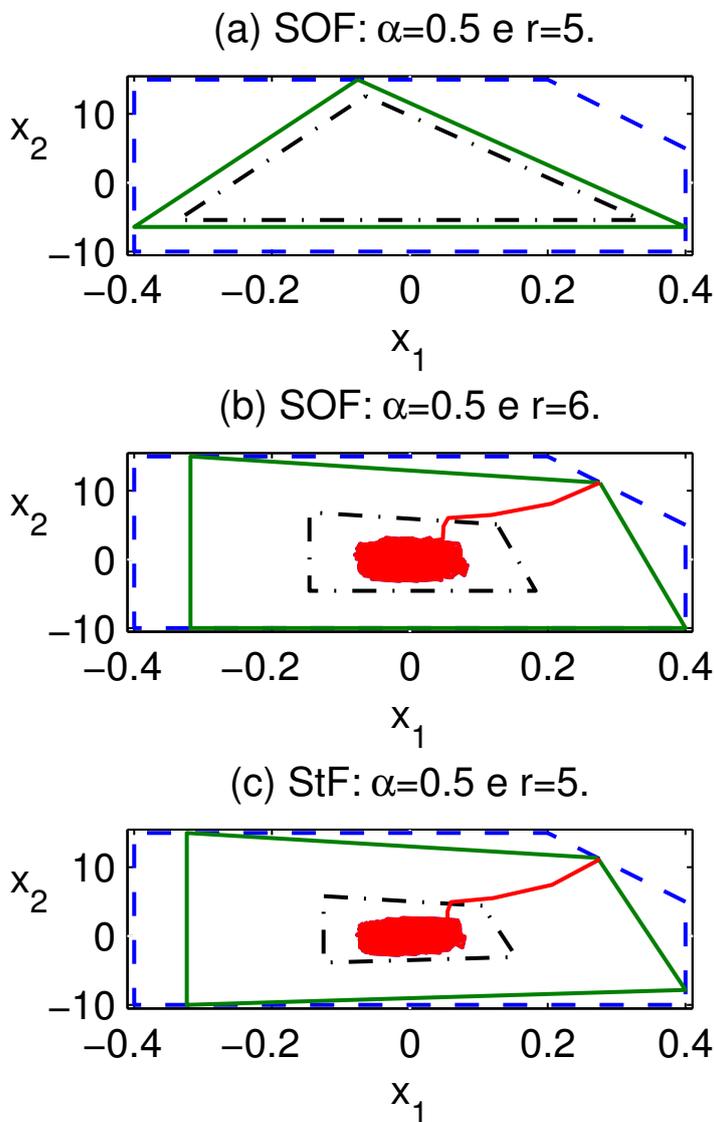
- *Projeto SOF*:

Neste caso, como em (KÖGEL; FINDEISEN, 2017), a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. A partir do problema de otimização bilinear (88), para as mesmas escolhas de parâmetros do projeto *StF*, resume-se os resultados, para $r = 5$ e $r = 6$, na Tabela 12. Como anteriormente, para diferentes pesos α pode-se gerar soluções diferentes. Além disso, na Tabela 12 observa-se que diferentes resultados foram obtidos para as duas escolhas de r , o que difere do projeto *StF*. Para $\alpha = 0.5$, as soluções do problema (88) são representadas nas Figuras 5(a) e (b), com respectivas complexidades $r = 5$ e $r = 6$, sendo \mathcal{L}_0 o poliedro Δ -invariante maximizado de condições iniciais e \mathcal{L}_∞ o poliedro Δ -invariante minimizado com trajetórias UB. Também, pode ser observado pelas Figuras 5(b) e (c), e pelos valores de β e de $\bar{\rho}$ nas Tabelas 11 e 12, que o gráfico do projeto *SOF* leva a um conjunto menor \mathcal{L}_0 e a um conjunto maior \mathcal{L}_∞ em relação aos conjuntos do projeto *StF*. Finalmente, comparam-se duas trajetórias UB, nos projetos *StF* e *SOF*,

Tabela 12 – Projeto SOF: $r = 5$ e $r = 6$.

α	r	β	$\bar{\rho}$	K	$\sigma(A + BKC)$
0.9	5	0.7959	0.4569	-9.9999997	{0.7653 ± 0.0415i}
	6	0.7959	0.4569	-9.9999998	{0.7653 ± 0.0415i}
0.5	5	0.4828	0.8423	-9.9999999	{0.7653 ± 0.0415i}
	6	0.7959	0.4569	-9.999991	{0.7653 ± 0.0415i}
0.1	5	0.7560	0.4368	-12.09051	{0.7518, 0.7800}
	6	0.7560	0.4368	-12.09048	{0.7518, 0.7800}

Figura 5 – Conjuntos \mathcal{X} (- -), \mathcal{L}_0 (-) e \mathcal{L}_∞ (-.-) ².



as quais são geradas pela mesma condição inicial e pelas mesmas sequências de perturbações.

5.4.2 Sistema 5

Utilizando esse sistema o objetivo principal é fazer uma comparação com o resultado recente de (GUPTA; FALCONE, 2019), que trata o problema de controle por *StF* similar ao considerado neste capítulo, já que não se encontra na literatura atual o tratamento do problema de estabilização por *SOF* com lei de controle linear. Então, considera-se o sistema LDIT cujas matrizes são dadas por (GUPTA; FALCONE, 2019):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } N = \mathbf{0}. \quad (96)$$

As matrizes que definem as restrições de perturbações são:

$$P = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ e } R = \mathbf{0}. \quad (97)$$

Além disso, as matrizes que determinam as restrições de estados e de controle são, respectivamente:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } Z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

- *Projeto StF:*

Para $C = I_2$, as soluções obtidas, referentes à (GUPTA; FALCONE, 2019), com $r = 4$ foram:

$$K_{GF}^3 = [-0.8630 \quad -1.7407]$$

e

$$L_{GF} = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ -\bar{L} \end{bmatrix} \text{ com } \bar{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 1.2222 & 2.2222 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o algoritmo em (GUPTA; FALCONE, 2019) não leva em conta um poliedro com trajetórias UB associado, então os resultados acima são correspondentes a $\alpha = 1$ no projeto proposto desse capítulo. Assim, atribuindo-se duas matrizes diferentes para S , G e L_{GF} , no problema de otimização (88) geram-se as soluções resumidas na Tabela 13.

Como esperado diferentes conjuntos iniciais (*shape sets*) \mathcal{S} implicaram em soluções diferentes e, em ambos os casos, obtém-se $\bar{\rho} = 1$, isto é, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_\infty$. Além disso, no projeto proposto definindo a matriz $S = L_{GF}$ resulta-se o mesmo poliedro

² As trajetórias, em linhas vermelhas, foram geradas de duas maneiras: uma saindo do vértice do poliedro \mathcal{L}_0 e a outra partindo da origem $x_0 = [0 \quad 0]^T$, sendo a sequência das perturbações aleatória e limitada pelos vetores $d_1 = [-0.1, 0.1]$, $d_2 = [-0.4, 0.4]$ e $d_3 = [-0.02, 0.02]$.

³ O subscrito GF, nas matrizes correspondentes, significa que a solução foi extraída do artigo (GUPTA; FALCONE, 2019).

Tabela 13 – Projeto StF : $\alpha = 1$ e $r = 4$.

S	β	K^T	L
G	0.4266	$\begin{bmatrix} -0.2344 \\ -1.2344 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1722 & -1.1722 \\ -0.8085 & 1.3037 \\ 0.8085 & -1.3037 \\ 1.1722 & 1.1722 \\ 1.2222 & 2.2222 \end{bmatrix}$
L_{GF}	1	$\begin{bmatrix} -0.5941 \\ -1.4561 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.2222 & -2.2222 \\ -1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$

Tabela 14 – Projeto StF : $\alpha = 0.5$ e $r = 4$.

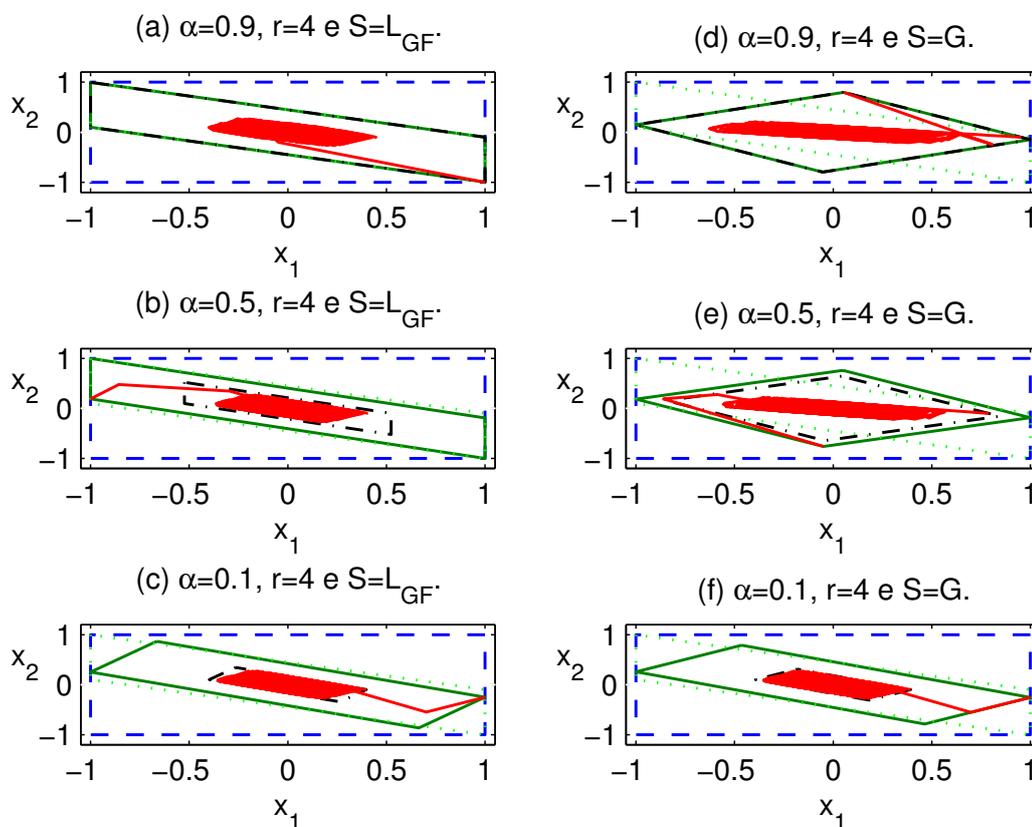
S	β	$\bar{\rho}$	K^T	L
G	0.4065	0.8457	$\begin{bmatrix} -0.2909 \\ -1.2909 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.7459 & 1.3581 \\ 0.7460 & -1.3581 \\ -1.23001 & -1.2301 \\ 1.2301 & 1.2301 \end{bmatrix}$
L_{GF}	0.8168	0.5043	$\begin{bmatrix} -0.6394 \\ -1.5967 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9999 & -0.0000000005 \\ -1.4714 & -2.4714 \\ -0.9999 & 0.0000000004 \\ 1.4714 & 2.4714 \end{bmatrix}$

Δ -invariante obtido em (GUPTA; FALCONE, 2019), mas com outra matriz K . Pela Tabela 14 verifica-se que a matriz L obtida é muito próxima em relação à matriz L_{GF} e consegue-se determinar um poliedro \mathcal{L}_∞ que também tem uma boa aproximação do conjunto mínimo Δ -invariante. Então, em $\alpha = 0.5$ pondera-se igualmente a maximização do conjunto de condições iniciais permitidas \mathcal{L}_0 e a minimização do poliedro \mathcal{L}_∞ . Assim, considerando as diferentes matrizes S , já mencionadas, os resultados correspondentes são resumidos na Tabela 14. Por outro lado, ao aplicar-se um peso maior à minimização de \mathcal{L}_∞ , obteve-se um menor conjunto \mathcal{L}_0 de condições iniciais e um menor poliedro \mathcal{L}_∞ .

Logo, os conjuntos poliédricos Δ -invariantes, para diferentes valores de α e para $S = L_{GF}$, são representados na Figura 6(a), (b) e (c). Também, para diferentes pesos α e para $S = G$, os poliedros Δ -invariantes são apresentados na Figura 6(d), (e) e (f). Nessas figuras, as linhas contínuas delimitam o conjunto \mathcal{L}_0 , as linhas tracejadas o conjunto \mathcal{L}_∞ e as linhas pontilhadas o conjunto S_0 .

Pela Figura 6 percebe-se que ao estipular $\alpha = 0.1$ a sequência aleatória de perturbações consegue cobrir quase todo o poliedro \mathcal{L}_∞ , o qual maximiza a rejeição de perturbação, assim prova-se que esse poliedro é uma boa aproximação para determinar a mínima região, onde as perturbações ficam confinadas.

⁴ As trajetórias, em linhas vermelhas, foram geradas de duas maneiras: uma saindo do vértice do poliedro \mathcal{L}_0 e a outra partindo da origem $x_0 = [0 \ 0]^T$, sendo a sequência das perturbações aleatória e limitada pelo vetor $d = [-0.1, 0.1]$.

Figura 6 – Conjuntos \mathcal{X} (- -), \mathcal{L}_0 (-), \mathcal{L}_∞ (-.-) e \mathcal{S}_0 (.)⁴.

5.5 CONCLUSÃO

O novo conjunto de relações algébricas satisfaz a propriedade Δ -Invariância do conjunto poliédrico \mathcal{L}_0 e do poliedro \mathcal{L}_∞ com trajetórias ultimamente limitadas. Assim, as trajetórias dos estados convergiram para o poliedro interno em tempo finito e mantiveram-se confinadas, conforme os resultados apresentados. Também, conseguiu-se estender a abordagem de projeto de otimização bilinear, para sistemas LDIT sujeitos a perturbações persistentes. Além disso, na resolução do problema de programação bilinear o *sol/ver* não linear KNITRO obteve resultados eficientes.

6 CONCLUSÃO

Na fundamentação teórica, Capítulo 2, apresentou-se conceitos básicos de invariância de conjuntos, a relação de equivalência com a estabilidade de sistema e com FLPs. Também nessa tese, sistemas lineares, com ou sem restrições, e o cálculo explícito da matriz de ganhos de realimentação de estados e de realimentação estática de saída foram considerados. Mais especificamente, a contribuição no Capítulo 3, foi tratar o problema de estabilização de sistemas lineares via um problema de otimização com restrição de posto. Assim, demonstrou-se como a condição matricial não linear de invariância positiva pode ser reformulada em uma restrição sobre o posto de uma matriz estruturada linearmente em relação à matriz de ganho e à matriz auxiliar. O algoritmo proposto é iterativo e necessita de uma solução inicial da matriz ganho. Também, no problema de otimização foram acrescentados critérios de desempenho de controle como restrições adicionais. Pela implementação do algoritmo no *solver* CVX conseguiu-se determinar os ganhos e as funções de Lyapunov poliédricas associadas à condição de estabilidade do sistema. Pelos resultados dos exemplos percebeu-se certas limitações do método, como no projeto *SOF*, onde obteve-se pouca alteração de coeficiente de contratividade, apesar das soluções serem factíveis ao problema de otimização.

Diante desses resultados, uma nova abordagem foi proposta no Capítulo 4, a qual não precisa de solução inicial e trata a não linearidade presente na propriedade de invariância via técnicas de otimização bilinear. Assim, as soluções, para os problemas de estabilização *StF* e *SOF* de sistemas LDTIs, foram determinadas pelas relações algébricas de invariância positiva de forma bilinear. Assim, conseguiu-se determinar a matriz de ganho, a matriz associada às funções de Lyapunov poliédricas e a matriz auxiliar com valores numéricos mais satisfatórios em relação à abordagem do capítulo anterior. Para fins de projeto, o problema de otimização bilinear foi formulado com uma função objetivo que pondera a velocidade de convergência das trajetórias e o esforço de controle. Nos exemplos numéricos, o *solver* KNITRO gerou ganhos estabilizadores de *StF* e *SOF*, para diferentes ponderações na função objetivo, tratando as bilinearidades de maneira eficiente, como esperado. Portanto, pelos resultados, os procedimentos de projeto mostraram-se eficazes em termos de objetivos de controle e resultados numéricos.

Além disso, outra vantagem de tratar-se com a abordagem de otimização bilinear é a possibilidade de extensão para sistemas sujeitos a perturbações persistentes. Então, uma das contribuições no Capítulo 5 é encontrar uma lei de controle linear de realimentação estática de saída para sistemas sujeitos a perturbações persistentes. Assim, para resolver esse problema de estabilização, um novo conjunto de relações algébricas foi definido para descrever a propriedade de Δ -Invariância de um conjunto

poliédrico e de um conjunto UB, onde as trajetórias do sistema convergem. Então, outra contribuição para essa tese é que pelas novas relações conseguiu-se determinar a matriz de ganho, por *SOF* ou *StF*, um conjunto Δ -invariante poliédrico e outro conjunto Δ -invariante UB. Como, também, nesse caso está presente termos bilineares o *solver* KNITRO foi utilizado. O que motiva a continuar usando o *solver* KNITRO em trabalhos futuros é o fato que os resultados encontrados foram eficazes e atenderam às especificações dos diferentes projetos de controladores.

Logo, neste documento de tese a propriedade de invariância positiva de conjuntos poliédricos foi explorada para a estabilização por realimentação estática de saída, com cálculo explícito da matriz de ganhos, em sistemas lineares discretos invariantes no tempo.

6.1 PUBLICAÇÕES

Os seguintes artigos foram desenvolvidos e publicados durante o doutorado:

- BRIÃO, S. L.; CASTELAN, E. B.; CAMPONOGARA, E. Output Feedback for Discrete-time Constrained Systems subject to Persistent Disturbances via Bilinear Programming. *Automática*, 2019. (*em revisão*)
- BRIÃO, S. L.; CASTELAN, E. B.; PEDROSA, M. V. A. Uma abordagem por restrição de posto para estabilização e computação explícita de ganhos de controle. *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa, 2018.
- PEDROSA, M. V.; CASTELAN, E. B.; DOREA, C. E. T.; BRIÃO, S. L. Positive Invariance of Polyhedral Sets and Linear Constrained Regulation Problem in the Context of the Delta Operator. *XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, 2018.
- BRIÃO, S. L.; PEDROSA, M. V. A.; CASTELAN, E. B.; CAMPONOGARA, E.; de ASSIS, L. S. Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral Lyapunov functions. *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation / XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (IEEE ICA-ACCA)*. Concepción, 2018.

Esse último artigo foi premiado como "Best Student Paper Award" do XXIII Congresso da Associação Chilena de Controle Automático.

6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS:

- Estender o problema de estabilização de sistemas, sujeitos a perturbações e com restrições, via programação bilinear para sistemas contínuos no tempo.

- Utilizar os resultados propostos de estabilização de sistemas LDIT, via programação bilinear, para a estabilização por realimentação dinâmica de saída ou projetos de observadores de estados.
- Estender o problema de estabilização via programação bilinear em inclusões, diferenciais, ou de diferenças, lineares, em sistemas incertos e em sistemas cujos parâmetros são variantes no tempo.
- Estender o problema de estabilização via programação bilinear em sistemas não lineares, incluindo por exemplo, em sistemas que admitam a saturação dos atuadores.

REFERÊNCIAS

BERMAN, A.; PLEMMONS, R. J. **Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences**. [S.l.]: SIAM, 1994. v. 9.

BITSORIS, G.; OLARU, S. Further results on the linear constrained regulation problem. *In: 21ST Mediterranean Conference on Control and Automation*. [S.l.: s.n.], jun. 2013. p. 824–830.

BITSORIS, George; OLARU, Sorin; VASSILAKI, Marina. On the Linear Constrained Regulation Problem for Continuous-Time Systems. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 47, n. 3, p. 4004–4009, 2014. 19th IFAC World Congress.

BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999. ISSN 0005-1098. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00113-2](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00113-2).

BLANCHINI, F.; MIANI, S. **Set-theoretic methods in control**. 2nd. Boston, MA: Birkhäuser Basel, 2015.

BLANCHINI, Franco. Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. **IEEE Transactions on automatic control**, IEEE, v. 35, n. 11, p. 1231–1234, 1990.

BLANCHINI, Franco; MIANI, Stefano. **Set-theoretic methods in control**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.

BOYD, S. *et al.* **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, jun. 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics). ISBN 0-89871-334-X.

BRIÃO, S. L.; CASTELAN, E. B.; PEDROSA, M. V. A. Uma abordagem por restrição de posto para estabilização e computação explícita de ganhos de controle. *In: ANAIS do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa: [s.n.], 2018.

BRIÃO, S. L.; PEDROSA, M. V. A. *et al.* Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral Lyapunov functions. *In: PROCEEDINGS of the IEEE International Conference on Automation / XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (IEEE ICA-ACCA)*. Concepción: [s.n.], 2018.

BYRD, Richard H.; NOCEDAL, Jorge; WALTZ, Richard A. Knitro: An Integrated Package for Nonlinear Optimization. *In: DI PILLO, G.; ROMA, M. (Ed.) Large-Scale Nonlinear Optimization*. Boston, MA: Springer US, 2006. p. 35–59.

CASTELAN, Eugênio B.; CORSO, Jones *et al.* Stability and Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Discrete-Time Systems With Saturating Actuators. *Structure e Control*, 2006.

CASTELAN, Eugênio B.; HENNET, Jean-Claude. Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems. **Automatica**, v. 28, n. 3, p. 605–611, 1992. ISSN 0005-1098. DOI: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(92\)90185-I](https://doi.org/10.1016/0005-1098(92)90185-I).

Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510989290185I>.

CASTELAN, Eugênio B; HENNET, J-C; VILLARREAL, ER Llanos. Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 48, n. 4, p. 654–660, 2003.

CHEN, Chi-Tsong. **Linear System Theory and Design**. 3rd. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778.

CONN, Andrew R.; SCHEINBERG, Katya; VICENTE, Luis N. **Introduction to derivative-free optimization**. Philadelphia, PA: SIAM, 2009.

DANTAS, Amanda. **Projeto de Controladores com Complexidade Reduzida para Sistemas Lineares Sujeitos a Restrições Usando Análise de Agrupamentos de Dados**. 2018. Tese (Doutorado) – UFRN, Natal.

DATTORRO, Jon. **Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry**. [S.l.]: Meboo Publishing USA, 2011.

DELGADO, Ramón A; AGÜERO, Juan C; GOODWIN, Graham C. A rank-constrained optimization approach: Application to factor analysis. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 10373–10378, 2014.

DILDA, Vanessa; JUNGERS, Marc; CASTELAN, Eugênio B. Uniform ultimate boundedness analysis and synthesis for linear systems with dead-zone in the actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 25, n. 14, p. 2502–2514, 2015.

DOREA, Carlos Eduardo Trabuco; HENNET, JC. (A, B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. **Journal of optimization theory and applications**, Springer, v. 103, n. 3, p. 521–542, 1999.

FIACCHINI, Mirko. **Convex difference inclusions for systems analysis and design inclusiones convexas para el análisis y el diseño**. 2010. Tese (Doutorado) – Universidad de Sevilla, Spain.

FLETCHER, LR *et al.* Some necessary and sufficient conditions for eigenstructure assignment. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 42, n. 6, p. 1457–1468, 1985.

- FLOUDAS, Christodoulos A. **Deterministic Global Optimization: Theory, Methods and Applications**. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2005. ISBN 0792360141.
- FOURER, Robert; GAY, David M; KERNIGHAN, Brian W. **AMPL: A mathematical programming language**. [S.l.]: AT & T Bell Laboratories Murray Hill, NJ 07974, 1987.
- GRANT, Michael; BOYD, Stephen; YE, Yinyu. **CVX: Matlab software for disciplined convex programming**. [S.l.: s.n.], 2008.
- GUPTA, A.; FALCONE, P. Full-Complexity Characterization of Control-Invariant Domains for Systems With Uncertain Parameter Dependence. **IEEE Control Systems Letters**, v. 3, n. 1, p. 19–24, jan. 2019. ISSN 2475-1456. DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2849714.
- HENNET, Jean-Claude. Discrete time constrained linear systems. **Control and Dynamic Systems**, ACADEMIC PRESS LIMITED, v. 71, p. 157–214, 1995.
- HENNET, Jean-Claude. Une extension du Lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes. **C. R. Acad. Sciences**, v. 308, p. 415–419, 1989.
- HESPANHA, João P. **Linear Systems Theory**. Princeton, New Jersey: Princeton Press, set. 2009. ISBN13: 978-0-691-14021-6.
- HORN, Roger A.; JOHNSON, Charles R. **Topics in matrix analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. ISBN 978-0-521-46713-1.
- HU, T.; BLANCHINI, F. Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions. **Automatica**, v. 46, p. 190–196, 2010.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. *In*: PROCEEDINGS of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. [S.l.: s.n.], 1995. p. 1942–1948.
- KIENDL, H.; ADAMY, J.; STELZNER, P. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 6, p. 839–842, jun. 1992. ISSN 0018-9286.
- KÖGEL, M.; FINDEISEN, R. Robust output feedback MPC for uncertain linear systems with reduced conservatism. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 10685–10690, 2017.
- KOŁODZIEJ, Scott; CASTRO, Pedro M.; GROSSMANN, Ignacio E. Global optimization of bilinear programs with a multiparametric disaggregation technique.

- Journal of Global Optimization**, v. 57, n. 4, p. 1039–1063, dez. 2013. ISSN 1573-2916. DOI: [10.1007/s10898-012-0022-1](https://doi.org/10.1007/s10898-012-0022-1).
- MCCORMICK, Garth P. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part I — Convex underestimating problems. **Mathematical Programming**, v. 10, n. 1, p. 147–175, 1976.
- MILANI, Basílio E.A.; CASTELAN, Eugênio B.; TARBOURIECH, Sophie. Linear Regulator Design for Bounded Uncertain Discrete-Time Systems with Additive Disturbances. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 29, n. 1, p. 3192–3197, 1996. 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July. ISSN 1474-6670. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)58167-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58167-7). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017581677>.
- MOLCHANOV, A.P.; PYATINITSKIY, Ye.S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. **Systems and Control Letters**, v. 13, p. 59–64, 1989.
- MOLER, Cleve *et al.* **MATLAB users' guide**. [S.l.]: University of New Mexico, 1982.
- SAHINIDIS, Nikolaos V. BARON: A general purpose global optimization software package. **Journal of global optimization**, Springer, v. 8, n. 2, p. 201–205, 1996.
- SANTOS, Max Mauro Dias. **Regulação sob Restrições com Alocação de Polos Abordagem por Invariância Positiva e Programação Linear**. 1996. Diss. (Mestrado) – UFSC, Florianópolis.
- SANTOS, Max MD; CASTELAN, Eugênio B; HENNET, Jean-Claude. A Linear Programming Approach for Regional Pole Placement Under Pointwise Constraints. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 30, n. 16, p. 297–302, 1997.
- SUN, Chuangchuang; DAI, Ran. Rank-constrained optimization and its applications. **Automatica**, Elsevier, v. 82, p. 128–136, 2017.
- SYRMOS, V. L.; LEWIS, F. L. Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38, n. 3, p. 495–499, 1993. ISSN 0018-9286.
- TARBOURIECH, S. *et al.* **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- VASSILAKI, M; HENNET, JC; BITSORIS, G. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. **International Journal of control**, Taylor & Francis, v. 47, n. 6, p. 1727–1735, 1988.

WONHAM, W. M. **Linear multivariable control : a geometric approach**. 3rd ed. [S.l.]: New York : Springer-Verlag, 1985. "With 29 figures." ISBN 0387960716.