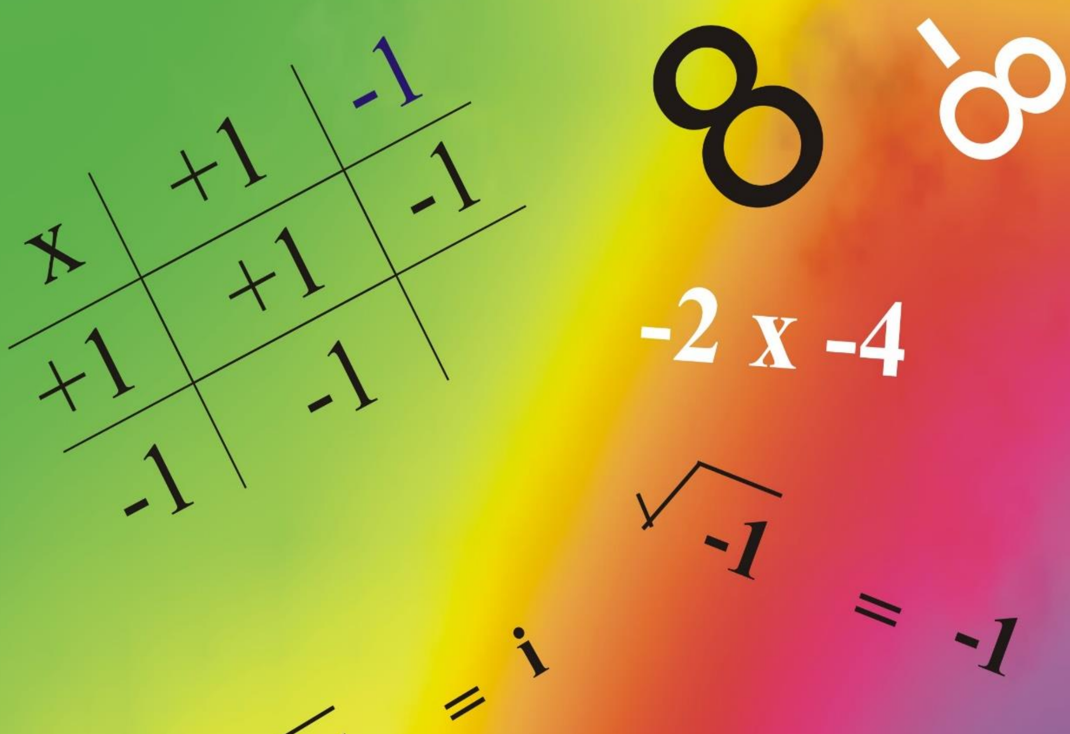
Regra dos sinais: saga e implicações didáticas

Selma Felisbino Hillesheim
Méricles Thadeu Moretti



REVEMAT/GPEEM/UFSC

Selma Felisbino Hillesheim

Méricles Thadeu Moretti

Regra dos sinais: saga e implicações didáticas

Edição REVEMAT/GPEEM/ UFSC

Florianópolis

2020

Conselho consultivo

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina

H652r Regra dos sinais: saga e implicações didáticas [recurso eletrônico] / Selma Felisbino Hillesheim, Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis: Edição REVEMAT/GPEEM/UFSC, 2020.
214 p.: il.
E-book (PDF)

Disponível em:
https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

ISBN 978-65-00-06699-9

1. Números inteiros. 2. Adição. 3. Multiplicação. 4. Subtração. 5. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. I. Hillesheim, Selma Felisbino. II Moretti, Méricles Thadeu. III. Título.

CDU: 51:37

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

INTRODUÇÃO

APRESENTAÇÃO

Este livro é um convite para uma reflexão acerca do processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais de números inteiros relativos. Do ponto de vista didático/pedagógico, o ensino dessa regra encontra-se envolto por crenças e metáforas. Uma dessas metáforas é a ideia de que esses números sejam associados a um modelo comercial de ganho e de perda: o sinal "–" é relacionado a perda, enquanto "+" está relacionado ao ganho. Como explicar que uma dívida multiplicada por outra dívida se transformaria em um ganho?

Glaeser e Coquin-Viennot enfatizam que o modelo comercial, utilizado para o ensino das propriedades aditivas, contribui para a formação de obstáculos no ensino das propriedades multiplicativas dos relativos. O modelo comercial encontra na noção de congruência semântica de Duval uma forte oposição por conta de uma associação codificada entre verbos e operação. Então, a partir das ideias de Caraça, a respeito do princípio de extensão, inferimos que o ensino das operações com relativos deve seguir esse mesmo princípio.

Encontra-se relatada neste livro a sequência didática que elaboramos e aplicamos com uma turma de 7º ano. Essa intervenção didática contemplou as operações de adição, multiplicação e subtração dos números inteiros relativos evitando o modelo comercial. Essa experiência, com toda a riqueza de detalhes, encontra-se descrita neste livro. No decorrer da leitura serão apresentados aspectos de cunho teórico e pedagógico. As situações vivenciadas em sala de aula e os resultados dos testes aplicados com os alunos foram analisados a luz dos referencias teóricos.

Cabe salientar que a sequência didática por nós elaborada e aplicada não é uma “receita”, mas apenas aponta possibilidades teóricas e metodológicas para que o professor reflita e elabore a sua própria proposta de ensino para os números inteiros, mais especificamente para a regra de sinais. Esperamos que a proposta de trabalho aqui apresentada possa subsidiar novas práticas pedagógicas envolvendo o processo de ensino e aprendizagem da regra de sinas. Desejamos a todos uma ótima leitura!

Os autores

INTRODUÇÃO

O ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos. A dificuldade enfrentada pelos alunos na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos direcionou o tema da nossa pesquisa para o ensino dos números inteiros, com ênfase nas operações de adição, multiplicação e subtração. A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no Século III depois de Cristo (Eves, 2004, p. 207). Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética,* ele menciona que: “Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos” (2007, p. 22). No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos procuraram construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém, Hankel (1867), demonstra que a regra usual dos sinais é a única das regras possíveis que preserva a distributividade[1] à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza. De acordo com Glaeser (1981, p. 338), Hankel, diferentemente de Laplace que acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, aborda a questão em outra dimensão, os números não são descobertos, são

---

[1] Dizemos que um conjunto A não vazio preserva a distributividade à direita e à esquerda se para a, b, c, três elementos quaisquer deste conjunto ocorrerem as igualdades: a(b+c)=ab+ac e (b+c)a = ba+ca.

imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana e, deste modo, uma convenção, uma convenção "conveniente" porque preserva a distributividade.

Aproximamo-nos da versão construtivista dos conhecimentos matemáticos por percebemos que o conhecimento matemático se dá na inter-relação do homem com o mundo, que ele é construído por meio da ação do homem. Nesse sentido, nas situações de ensino, o aluno constrói seus conceitos a partir de problematizações de ações reflexivas sobre materiais e atividades do saber matemático. De acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se num obstáculo à compreensão da multiplicação desses números. Hoje, do ponto de vista matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. Entretanto, do ponto de vista didático/pedagógico, muitos obstáculos ainda precisam ser ultrapassados. Por meio do modelo metafórico, o aluno é facilmente convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (–3), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+2), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em $(-3) \times (-2) = +6$. Como uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? "Nessas condições, não se está introduzindo um *falso contrato didático* quando se utiliza o modelo concreto para apresentar o conjunto dos números relativos?" (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183). Esse questionamento de Coquin-Viennot (1985) nos provocou um desconforto que, de certa forma, vem ao encontro dos problemas que vivenciamos na sala de aula ao longo da nossa vida profissional. O fato da multiplicação de dois números negativos não estar relacionado a situações contextualizadas, como as situações da adição, desafiou-nos a buscarmos subsídios teóricos e metodológicos a fim de melhorar a nossa prática de ensino a respeito dos problemas que se estabelecem no ensino dos números relativos, principalmente, da regra de sinais. As operações de adição, multiplicação e subtração com números relativos mostram-se como uma barreira que precisa ser transposta nas situações de ensino e aprendizagem da sala de aula. A explicação da regra de sinais apresentada por Hankel (1867) mostrou que a regra usual é a única regra possível que preserva a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição tanto a direita quanto a esquerda. Dessa maneira, as mesmas propriedades que regem os números positivos foram estendidas também para os negativos. Essa capacidade que o homem civilizado tem para fazer generalizações e abstrações Caraça (1963, p.10) chama de “princípio de extensão”. O trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios foi que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos. O homem por meio das suas abstrações e generalizações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi essa barreira que Hankel (1867) derrubou ao mostrar que a explicação para a regra de sinais $- \times - = +$ não poderia ser procurada na natureza, pois ela é fruto do pensamento humano e, como tal, precisa atender as regras da consistência interna da própria matemática.

O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), pode facilitar o entendimento do aluno a respeito de problemas aditivos de números relativos, assim como os que aparecem nos livros didáticos, porém essa abordagem pode trazer obstáculos para a compreensão de problemas multiplicativos. Deste modo, pensamos que "é necessário para a construção do pensar matemático também uma formalização da linguagem matemática, e trabalhar a sua construção, permite uma melhor compreensão das produções e das problematizações da matemática nas condições ontológicas" (SAD, 2005, p. 159). Além dessa questão, podemos analisar o ensino das operações dos relativos numa outra perspectiva, o da congruência e da não congruência semântica, introduzida por Duval (2012). Um dos obstáculos enfrentados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial se destaca da congruência semântica. Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. Para isso, de acordo com Duval (2004, p. 53), ela deve atender a três condições: (1) as condições de correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; (2) manter a mesma ordem de apreensão possível destas unidades nas duas representações; (3) converter a unidade significativa na representação de chegada. Porém quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro pode não ocorrer de forma imediata.

Na sala de aula, a adição de números relativos é apresentada de forma contextualizada com exemplos que podem convencer rapidamente. Porém, a multiplicação de números relativos é explicada dogmaticamente. Sob o ponto de vista da perspectiva da congruência semântica, a adição de números relativos nem sempre representa um ganho e a subtração nem sempre representa uma perda. Na multiplicação de números inteiros, a ideia de adição de parcelas iguais encontra como obstáculo a multiplicação de dois números negativos. Então, embrenhados, nesse contexto conturbado emergiu o seguinte questionamento: de que forma o "princípio de extensão" pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação de números negativos? Movidos por este desafio, realizamos uma pesquisa, propondo-nos a analisar uma sequência didática em que as operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros relativos foram abordados por meio do "princípio de extensão", e verificamos as suas possíveis contribuições no processo de ensino e aprendizagem. Visando atender o objetivo deste trabalho, sentimos necessidade de buscar na história da matemática como aconteceu o processo de consolidação do número negativo. Uma história de muitas idas e vindas, traçadas por uma trajetória não linear, que apresentou muita hesitação a respeito dos negativos. Essa trajetória histórica é apresentada no primeiro capítulo – *Contexto histórico do surgimento da regra de sinais.* Bem, se historicamente o contexto do surgimento dos números negativos foi conturbado, precisamos saber se esses problemas ainda persistem nas salas de aulas atuais. O que nos apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a respeito do ensino dos números negativos? Essa é uma das questões que abordamos na segunda parte do nosso trabalho – *Os números inteiros relativos na sala de aula, BNCC, PCN e NCTM.* No terceiro capítulo – *Fundamentos teóricos para o ensino de números inteiros relativos: princípio de extensão e congruência semântica* - apresentamos o embasamento teórico que nos deu suporte para construir uma sequência didática que se opôs ao modelo comercial e conduziu o ensino dos relativos, atendendo ao “princípio de extensão”. Exploramos situações que se apresentam no ensino dos números relativos, relacionados à congruência semântica e propomos reflexões à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Na quarta parte do nosso trabalho – *Caminhos da Pesquisa: aplicação da sequência didática e análise dos resultados* – embrenhados nas dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, sentimos a necessidade de apresentar uma abordagem diferente para a adição dos relativos, a fim de não comprometer o ensino da multiplicação desses números. Assim, neste capítulo, apresentamos o relato da aplicação da nossa sequência didática e postura que assumimos na condução do ensino dos números relativos. Por fim, apresentamos as *Considerações finais* em que enfatizamos os principais achados do estudo, buscando atender aos nossos objetivos e responder aos questionamentos que fomentaram todo o nosso trabalho. Também apresentamos algumas considerações acerca das implicações futuras desta pesquisa, principalmente, aquelas relacionadas à prática pedagógica referente ao ensino dos números negativos.

CAPÍTULO I

CONTEXTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DA REGRA DE SINAIS

Neste capítulo, abordaremos alguns aspectos da história do número negativo, bem como do surgimento e da consolidação da regra de sinais da multiplicação desses números, que se mostram relevantes no contexto histórico geral. Uma história de incertezas, de idas e vindas e de muitas hesitações na aceitação da ideia de número negativo. Acreditamos que esses aspectos históricos poderão trazer significativas contribuições para o entendimento das dificuldades encontradas pelos matemáticos, no passado, e sua estreita relação com as dificuldades encontradas hoje por nossos alunos no que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos.

1.1 Um pouco da história antiga sobre os números negativos

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é, em geral, atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele, pouco se sabe, até mesmo o período em que viveu. No entanto, os historiadores apontam evidências e tendem a situá-lo no século III de nossa era. Esse algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Prisma (EVES, 2004, p. 207).

A regra que estabelece que "– × – = +" aparece no começo do livro I da sua Aritmética de forma explícita: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22). Porém, em nenhum momento Diofanto apresenta uma justificativa para tal regra. Ele apenas a usava nos cálculos intermediários e não aceitava as raízes negativas na solução das equações quadráticas (BOYER, 2010).

No oriente, a matemática assumiu um caráter prático voltado às questões administrativas, organizações públicas e cobrança de impostos. Não se encontra na matemática oriental anotações de demonstrações ou argumentações sobre os cálculos, apenas uma prescrição de como aplicar as regras. Inicialmente, foi dada ênfase à aritmética prática e à medição, no entanto, com o passar do tempo, fortes tendências levam a abstração e a aritmética transformou-se em álgebra (STRUIK, 1992).

Contrariando a posição de Struik (1992), a respeito de não se encontrar na matemática oriental demonstrações sobre cálculos, Joseph (1991) defende, ao longo das 494 páginas do seu livro “La Cresta Del Pavo Real: las matemáticas y sus raíces no europeas”, a posição de que a atividade matemática fora da Europa tem sido ignorada, desvalorizada e distorcida. O autor afirma que existe uma certa resistência com relação aos conhecimentos matemáticos anteriores ao período da matemática grega, comparando-a com “rabiscos de crianças que estão aprendendo a escrever em oposição a grande literatura” (KLINE, 1962)[2]. Essa visão atribui à matemática egípcia e babilônica a ideia de que essas matemáticas não tinham regras gerais, careciam de demonstrações e não eram abstratas. Entretanto, não se pode negar que nas resoluções dos problemas que foram apresentadas por esses povos, tanto no *papiro de Ahmes* como nas *tábuas*

[2] Citado por JOSEPH (1991, p. 32).

babilônicas “indicaria que existia uma compreensão da generalidade das regras subjacentes” (JOSEPH, 1991, p. 181). Assim, o autor reconhece que diferentes culturas, em diferentes momentos da história, têm contribuído para os conhecimentos matemáticos do mundo, cada qual com suas características próprias.

De acordo com Struik (1992), grande parte do que sabemos sobre os conhecimentos egípcios encontram-se em dois papiros: *Papiro de Rhind* e *Papiro de Moscovo*. Esses papiros apresentam problemas que estão baseados numa matemática pautada no sistema de numeração decimal. De acordo com Lumpkin (1996), apesar da ideia de número negativo não ter sido registrada na civilização egípcia, eles já mostravam indicativos desses números ao utilizarem malhas quadriculadas na construção de pirâmides. Eles escolhiam uma linha no nível do chão como sendo a linha zero e numeravam as outras linhas como sendo cúbico acima de zero e abaixo de zero. Mesmo assim, de acordo com Eves (2004, p. 67), “a matemática do Egito antigo nunca alcançou o nível da matemática da Babilônia”.

Na civilização babilônica, perto do ano 2000 a. C., a aritmética da Babilônia já tinha se desenvolvido e passado para a álgebra retórica. Encontram-se anotações que apontam que eles resolviam equações lineares e quadráticas e, também, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadradas. No entanto, encontravam apenas raízes positivas. Sua geometria tinha base em problemas práticos relacionados à medição, mas a forma geométrica era apenas uma forma de apresentar uma questão algébrica (STRUIK, 1992; EVES, 2004).

O estudo da matemática antiga chinesa pode ser encontrado na mais importante obra da matemática chinesa *Jiu zhang suan-shu (Chiu chang suan shu),* ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Essa obra foi produzida, muito provavelmente, durante a dinastia Han (206 a. C. – 220 d. C.) e constitui um livro totalmente voltado à matemática. Sua matemática consiste num conjunto de problemas, e uma série desses problemas conduziria a sistemas de equações lineares. A solução dessas equações lineares era efetuada por transformações de matrizes. E nessas matrizes é que encontramos pela primeira vez na história a anotação de números negativos (STRUIK, 1992, p. 67). Um número negativo era representado traçando uma diagonal na sua última coluna, por exemplo, –12 era representado por  (JOSEPH, 1991, p. 207).

Parece que para os chineses a ideia de números negativos não causou problemas, já estavam acostumados a calcular manipulando duas coleções de barras vermelhas e pretas, correspondendo a números positivos e negativos, respectivamente. Contudo, eles não aceitavam a ideia de que um número negativo pudesse ser raiz de alguma equação, eram usados apenas como intermediários na execução de algum tipo de cálculo (BOYER, 2010).

Em contraste à matemática chinesa, a história da matemática grega nos aponta que o conceito de número negativo não foi registrado nesse período. O principal objetivo da matemática grega, expresso nos primeiros estudos, foi o de compreender o lugar do homem no universo. Desta forma, a matemática auxiliaria a ordenar as ideias em sequências lógicas e a encontrar a ordem no caos. Dois grupos de pensadores merecem ser destacados na matemática grega. De um lado estavam os “sofistas”, preocupados em desenvolver uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. E, de outro, os “pitagóricos”, que davam importância ao estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Estudavam geometria, aritmética, astronomia e música. A aritmética era especulativa e pouco tinha em comum com a dos babilônicos (STRUIK, 1992).

De acordo com Eves (2004), uma das características da matemática grega era a sua persistência com as rigorosas demonstrações, alcançando uma existência independente. Os gregos dispunham de duas maneiras principais para resolver equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Ao que tudo indica, esses métodos se originaram dos pitagóricos. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois “[...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não exatamente como números” (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 94).

Segundo Struik (1992, p. 108), os matemáticos gregos fizeram uma separação entre “aritmética” e “logística”. A “aritmética” (*arithmoi*) era a ciência dos números que expressava um número natural, uma “quantidade composta por unidades”. Enquanto a “logística” era o cálculo prático que estava baseado num sistema de numeração que mudou com o tempo. Isso mostra que:

> Historicamente, os números negativos não surgiram na *contagem*, mas nos *cálculos*; ou seja, surgiram na Logística, mais explicitamente na resolução de equações. Isso se concretizou com Diofanto (*fl*. Século III), na sua obra *Arithmetiké*, que era essencialmente um trabalho da Logística Teórica. Nessa obra, Diofanto desenvolveu resoluções de equações usando implicitamente as regras de sinais, todavia desconsiderou a existência independente dos números negativos (ANJOS, 2008, p. 24, grifos do autor).

A matemática grega não aceitou a existência independentemente do número negativo, no entanto, as regras de sinais aparecem implicitamente na obra de Diofanto como uma tentativa de abreviar os cálculos. Diofanto não aceitou a ideia de número negativo isoladamente, estes aparecem somente como cálculos intermediários.

1.2 Alguns aspectos históricos dos números negativos na Idade Média

A ciência chinesa influenciou e deixou sua marca na ciência de outras sociedades, por exemplo, o sistema decimal e os números negativos podem ter vindo da China para a Índia. No entanto, não podemos negar que a ciência indiana também exerceu influência sobre a China. "A influência indiana na China pode ser tão antiga como a introdução do budismo na China" (STRUIK, 1992, p. 128).

Os hindus se destacaram como calculadores, no entanto sua geometria era insuficiente, pois era muito empírica e, em geral, ligada à mensuração. Como eram excelentes aritméticos, deram importantes contribuições à álgebra. "Ao contrário de Diofanto, que procurava *uma qualquer das soluções racionais* de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar *todas as soluções inteiras possíveis*" (EVES, 2004, p. 256, grifos do autor).

Na matemática hindu, o mais relevante matemático do século VII foi Brahmagupta (598-665). Segundo Boyer (2010), Brahmagupta fez contribuições importantes à álgebra ao considerar duas raízes, mesmo as negativas, como solução das equações quadráticas. Pela primeira vez, em sua obra, encontra-se a aritmética sistematizada dos números negativos e do zero. Sua obra fornece, também, as seguintes regras operatórias envolvendo os números negativos: "Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador" (BOYER, 2010, p. 150).

No entanto, Brahmagupta complicou-se um pouco ao afirmar que 0/0 = 0, porém para o caso de a/0 ele não se comprometeu. Outro matemático hindu que teve destaque na segunda metade da Idade Média foi Bhaskara (1114 a cerca de 1185). Ele foi responsável por preencher algumas lacunas apresentadas na obra de Brahmagupta como, por exemplo, o problema da divisão por zero. Na sua obra mais conhecida, o *Lilavati,* cujo título é o nome da sua filha, Bhaskara reuniu problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando suas novas observações. O *Lilavati* apresenta uma série de problemas sobre os itens prediletos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressão aritmética e geométrica e outros (BOYER, 2010, p. 152).

Bhaskara, em um de seus livros, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$ encontrando as raízes $x = 50$ e $x = -5$ como solução do problema. Para a raiz negativa, ele manifestou um certo ceticismo. No entanto, não se pode desconsiderar que, de certa forma, os números negativos ganharam com isso uma vagarosa aceitação (STRUIK, 1992, p. 117).

No período de 650 a 750, os árabes não demonstravam muito interesse intelectual, foi somente na segunda metade do oitavo século que se observou um despertar cultural no Islã. Neste período, foram chamados para Bagdá estudiosos da Síria e da Mesopotâmia e a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o califado de al-Mamum se estabeleceu em Bagdá uma “Casa da Sabedoria” onde se encontrava, entre os mestres, um matemático e astrônomo chamado Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi que escreveu obras de astronomia e matemática. Dentre essas obras, a mais importante foi *Al-jabr Wa’l muqabalah* da qual teve origem o termo *álgebra*.

A álgebra apresentada nesta obra está mais próxima da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, no entanto nem al-Khowarizmi nem outros matemáticos árabes usaram a sincopação ou números negativos (BOYER, 2010, p. 156). As contribuições de al-Khowarizmi foram importantes no contexto histórico da matemática, pois foi ele uma das principais fontes pela qual os numerais indianos e a álgebra árabe chegaram à Europa (STRUIK, 1992, p. 122).

Outro matemático que também se destacou no campo da álgebra geométrica foi Omar Khayyam. Ele resolveu as equações cúbicas geometricamente, no entanto não aceitava as raízes negativas e, com frequência, não encontrava todas as raízes positivas (EVES, 2004).

A matemática árabe sofreu influência das matemáticas grega e hindu. No entanto, a matemática árabe possui características próprias, em geral tinham uma boa e clara apresentação e uma organização sistemática dos cálculos. Apesar do conhecimento que os árabes tinham a respeito das regras que regem os números negativos, eles rejeitavam as raízes negativas e não utilizavam nenhum tipo de abreviatura ou símbolo de notação (BOYER, 2010).

Na Europa, com a expansão do comércio, o interesse pela matemática na Idade Média se espalhou vagarosamente. A matemática especulativa quase desapareceu nesse período, era apenas apreciada pelos filósofos escolásticos. Os homens práticos estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação, desejos que foram influenciados diretamente pelo crescimento das cidades mercantis (STRUIK, 1992).

O *Liber abaci* – Livro do ábaco – de autoria de Leonardo de Pisa (1175-1250) constitui-se num manual para práticas comerciais transitando entre prática e teoria. Leonardo, também conhecido como Fibonacci, filho de comerciante e nascido na cidade de Pisa, na Itália, escreveu esse livro no regresso da viagem que fez pelo oriente como mercador; nele constam várias informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens (STRUIK, 1992).

Para Boyer (2010), Fibonacci foi, sem dúvida, o matemático mais original e capaz do mundo medieval, e muito de sua obra era demasiado avançado para ser entendido pelas pessoas que viveram na sua época. Pycior (1997, p. 18) assumiu que Fibonacci em sua obra *Flos* (1225) aceitou os números negativos como raízes de uma equação. No entanto, Eves (2004), a respeito da obra *Liber abaci,* afirma que: “As raízes negativas e imaginárias não são admitidas e a álgebra é retórica” (p. 293).

> Conforme a maioria dos historiadores, a estrutura que Fibonacci seguiu nas resoluções das equações foi similar ao modelo propagado por al-Khowarizmi o que levaria a crer que Fibonacci usou demonstrações geométricas. Consequentemente, isso indicaria uma certa restrição à aceitação dos números negativos como raízes de equação, a qual só seria válido, para representação de dívidas (ANJOS, 2008, p. 30).

O uso dos números negativos passou a ser admitido com a expansão das relações financeiras no comércio, que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. A ideia de tirar 8 de 5 apresentava um aspecto milagroso, assim

> [...] foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 5 menos 7 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5 (SINGH, 1961, p. 13).

Nesse contexto, o número negativo acabou sendo usado com finalidades contábeis. No entanto, apesar de útil, a ideia dos negativos associada a um débito não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se trava da regra dos sinais (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

1.3 Elementos históricos importantes a respeito dos números negativos na Idade Moderna

No início da Renascença, a maior parte dos matemáticos tinha origem alemã ou italiana. Contudo, em 1484, foi composto na França um manuscrito intitulado de *Triparty em La science des nombres* de autoria de Nicolas Chuquet. Nesse manuscrito, a segunda metade da última parte trata da resolução de equações, onde traz uma novidade importante: pela primeira vez, ao escrever $4x = -2$, Chuquet expressou um número negativo isolado numa equação algébrica (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), o início do século XVI foi marcado por grandes algebristas alemães. Um deles Michael Stifel (1486-1567), ex-monge e professor de matemática em Jena, escreveu *Arithmetica integra* publicada em 1544. Essa obra apresenta-se dividida em três partes: os números racionais, os números irracionais e a álgebra. Dentre os vários assuntos que aborda, o aspecto mais importante é o seu tratamento sobre os números negativos, radicais e potências. “Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pode reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que parecia como única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial quando usar + e quando -” (BOYER, 2010, p. 193). Ele tinha conhecimento sobre as propriedades dos números negativos, embora não os aceitasse como raiz de uma equação e costumava chamá-los de *“*números absurdos*”*.

Em 1545, muito dos problemas não resolvidos pela *Arithmetica integra,* com relação à resolução das equações cúbicas e quárticas, foram superadas e tornaram-se conhecidas com a publicação da *Ars magna* de Cardano (1501-1576). No entanto, deve ser mencionado que Cardano não foi o descobridor original da solução da cúbica e da quártica. Depois de um juramento de manter segredo sobre a solução, conseguiu arrancar de Tartaglia a solução da cúbica. Cardano era médico e um respeitado professor em Bolonha e Milão. Seguidor de al-Khowarizmi, pensava em equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de classes gerais. Cardano encontrou dificuldades para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ utilizando o seu método, pois ele conhecia a raiz 4, e, com a aplicação da regra, chegava-se a $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, no entanto, não entendia como a sua regra faria sentido nessa situação. Ele chamava essas raízes de “números fictícios” ou “números falsos” correspondendo aos números negativos e suas raízes complexas (BOYER, 2010).

De acordo com Eves (2004), a *Ars Magna* foi o primeiro grande tratado dedicado especialmente à álgebra, escrito em latim. Uma de suas importantes contribuições se deve ao fato de que, nele, se dá atenção às raízes negativas e ao cálculo de números complexos.

Com a resolução das equações cúbicas, um novo tipo de número começa a aparecer: os negativos. Até o momento, os matemáticos podiam negar a existência de um número negativo ou de uma raiz quadrada negativa alegando que equações do tipo $x + 1 = 0$ e $x^2 + 4 = 0$ não são resolúveis. No entanto, com a resolução das cúbicas, sempre que as três raízes de uma equação são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva ao cálculo de uma raiz quadrada negativa. Nesse contexto, aparece a figura de um algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), que teve a brilhante ideia dos imaginários conjugados que levariam ao número real 4. Porém, as observações de Bombelli não contribuíram na resolução efetiva das cúbicas, pois só funcionava se ele conhecesse antecipadamente o valor de uma das raízes. Entretanto, Bombelli apontou o papel importante que os imaginários conjugados iriam desempenhar futuramente (BOYER, 2010, p. 197).

A falta de suporte matemático expressado por Bombelli cedeu espaço ao simbolismo expressado por François Viète (1540-1603). Esse jurista francês, nascido em Fontenay, ligado a corte de Henrique IV, fez contribuições no campo da aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Mas, foi sem dúvida, na álgebra que ele deu as mais importantes contribuições. Segundo Boyer (2010, p. 208), “Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados”.

Desse modo, aparece pela primeira vez uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Embora Viète tenha contribuído de maneira significativa no campo da álgebra, não considerava as raízes negativas. Fato que o impossibilitou de enunciar as relações entre raízes e coeficientes, na resolução das equações cúbicas. Cabendo a Girard, em 1629, enunciar claramente essas relações. Girard, ao contrário de Viète, admitia as raízes negativas e imaginárias (BOYER, 2010).

Outro matemático francês que se destacou foi René Descartes (1596-1650), natural de Touraine, residiu muitos anos na Holanda e morreu em Estocolmo. "Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e *encontrar a verdade nas ciências*" (STRUIK, 1992, p. 162, grifos do autor). Assim como os platônicos acreditavam na harmonia do universo, os cartesianos acreditam num método geral baseado na razão. Na sua obra *La Géométrie*, publicada em 1637, inclui a aplicação da álgebra à geometria. O Livro I fornece instruções detalhadas de como resolver as equações quadráticas geometricamente, contribuindo de certa forma para a não aceitação de raízes negativas, tomando-as como raízes "falsas" (BOYER, 2010).

O desconforto provocado pelos números negativos ainda perdurou por um certo tempo. No entanto, percebe-se que tal assunto incomoda os matemáticos a tal ponto que se sentem desafiados a buscar uma explicação plausível para o assunto. Um exemplo é Simon Stevin (1548-1620), um importante matemático Belga do século XVI. Ele se propôs na sua

"Aritmética" (1634) apresentar uma demonstração da regra de sinais que segue:

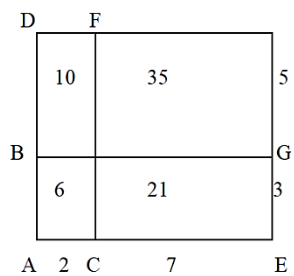
> Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. Explicação do dado: Suponhamos 8 – 5 multiplicado por 9 – 7 da seguinte maneira: –7 vezes –5 são +35 (+35, porque, como diz o teorema, – vezes – dá +). A seguir –7 vezes 8 faz –56 (–56, porque, como é dito no teorema, – por + dá –). E semelhante seja 8 – 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 – 45; depois adicione +72 + 35, são 107. Depois adicione os –56 – 45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto da tal multiplicação. Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá mais, & que – por – dá +, & que + por –, ou – por + dá –. Demonstração. O número a multiplicar 8 – 5 vale 3, & o multiplicador 9 – 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6. Logo o produto acima também 6, é o produto verdadeiro. Mas o valor encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto +, & – por – dá produto +, & + por –, ou – por + dá produto –, logo o teorema é verdadeiro.

$$\begin{array}{rr} & 8-5 \\ & 9-7 \\ \hline & -56+35 \\ 72-45 & \\ \hline & 6 \end{array}$$

(GLAESER, 1981, p. 312)

Observemos que o argumento apresentado por Stevin é apenas uma verificação de um caso particular que não apresenta uma generalização. Outro aspecto que pode ser considerado é o fato que em nenhum momento ele considera a ideia de número negativo isolado, o sinal de menos que aparece, por exemplo, no 56 não representa um número negativo, mas apenas uma operação de subtração que precisa ser realizada para que o cálculo seja efetuado. No entanto, ele ainda prossegue com uma demonstração geométrica. Vejamos:

> Outra demonstração geométrica: Suponhamos AB 8 – 5 (a saber AD8 – DB5). Depois AC 9 – 7 (a saber AE9 – EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 – EF56 – DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. Conclusão. Logo mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar.



(GLAESER, 1981, p. 312)

O exemplo de Stevin nos mostra como a geometria oferece apoio à aritmética, contribuindo para a comprovação de que a regra funciona. Para Glaeser (1981), a demonstração geométrica apresentada por Stevin pode servir de base para o desenvolvimento geral de (a – b) × (c – d) = ac – ad – bc + bd. No entanto, observamos que nesse período histórico a regra – × – = + só é usada como um procedimento transitório.

O sintoma de evitamento dos números negativos, assim denominado por Glaeser (1981), vai continuar incomodando muitos matemáticos. Pierre

Fermat (1601-1665) pode ser citado, como exemplo, ao fazer que seu amigo Jacques de Billy escrevesse conselhos sobre como proceder diante de uma “raiz falsa” no caso das equações diofantinas, a fim de se obter uma solução “aceitável” (GLAESER, 1981, p. 315). Outro personagem que mostrou uma insatisfação com relação aos negativos foi Thomas Harriot (1560-1621) que pensou ter provado em seu *“Artes Analíticas Aplicadas”* (1631) a impossibilidade das raízes negativas (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Nesse contexto, podemos observar que mesmo os matemáticos que viveram na mesma época assumiram posturas contraditórias a respeito dos negativos. Enquanto Fermat e Harriot evitavam os negativos, Stevin e Euler faziam tentativas de demonstrar a regra de sinais, apesar de não obterem êxito em seus ensaios.

Leonardo Euler (1707-1783) foi um importante matemático suíço que atuou em vários ramos da matemática. Euler, assim como outros matemáticos da época, também se mostrou perturbado a respeito da regra de sinais e, na sua obra de cunho pedagógico intitulada “*Elementos da Álgebra*”, destinada aos iniciantes, ele ofereceu uma explicação sobre a regra de sinais. Glaeser apresenta a argumentação de Euler em três partes, vejamos:

> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade: três dívidas de “a escudos” fazem uma dívida de “3 a escudos”. Então b × (–a) = –ab.
> 2. Pela comutatividade, Euler deduz que (–a) × b = –ab.
> 3. Resta determinar o que é o produto (–a) pelo (–b). É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Se trata então de se decidir entre +ab e –ab. Mas como (–a) × b vale –ab, não resta mais como única possibilidade que (–a) × (–b) = +ab (!!!) (1981, p. 319).

O malabarismo apresentado por Euler para justificar a regra de sinais demonstra que ele não tinha ainda conhecimentos suficientes para esclarecer convincentemente os pontos obscuros apresentados pela regra de sinais. Na mesma obra, segundo Glaeser (1981), Euler concebe o número negativo como sendo uma letra precedida com o sinal – (menos). Euler não consegue estabelecer uma ideia para a formação do conceito de número negativo, nem muito menos concebê-los como sendo quantidades menores que zero.

Para começar a mudança na questão da aceitação dos números negativos, o final do século XVII foi marcado pelo nascimento de um importante matemático chamado Colin MacLaurin (1698-1746). A sua obra "*Tratado da Álgebra*", publicada dois anos após a sua morte, tornou-se referência na Grã-Bretanha e sobre o continente. Nesse livro, ele aborda a ideia de número negativo como sendo uma quantidade tomada no sentido oposto à positiva.

> Assim, a quantidade negativa, bem longe de ser rigorosamente menos que nada, não é menos real em sua espécie que a quantidade positiva, mas ela é posta num sentido oposto; de onde não se segue mais que uma quantidade considerada única, não seria negativa; ela só é por comparação, e quanto a quantidade que chamamos positiva não há nada a mais que seja oposto a ele. Não se saberia subtrair uma maior: por exemplo, seria absurdo de querer subtrair uma maior quantidade de matéria de uma menor (MACLAURIN, 1748, p. 4).

MacLaurin (1748) não consegue conceber as quantidades negativas isoladamente, o que futuramente causará conflitos ao não fazer a distinção entre zero absoluto e zero origem. No entanto, de acordo com Pontes (2010), MacLaurin passa a entender o número como uma ação e não mais como um estado.

Nessa mesma obra, MacLaurin (1748) apresenta uma justificação para a regra de sinais utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição e sua dedução contribuiu para o início de um formalismo até então inexistente. Sua explicação se baseava na seguinte ideia: Se $+ a - a = 0$, então se multiplicarmos essa expressão por um número positivo $+ n$, teremos o primeiro termo $+ na$, e como segundo termo $- na$, pois o produto também deverá ser zero, logo $-na + na$, também deverá ser zero. E quando a expressão $+a - a$ for multiplicada por um número negativo, esse produto também deverá ser zero. Assim se multiplicarmos a expressão $+a - a$ por $-n$, teremos $-na$ como o primeiro termo e $+na$ para o segundo termo, pois os dois termos precisam ser anulados.

Dessa forma, ele enuncia a regra de sinais colocando que o produto de dois números com sinais diferentes é negativo, e o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. Apesar das importantes contribuições de MacLaurin (1748) a respeito dos números relativos, ele não chegou a apresentar a teoria dos números relativos, mas seus estudos foram tomados como referência por matemáticos posteriores.

1.4 Os números negativos na Idade Contemporânea: o começo de uma nova história

O século dezenove, de acordo com Boyer (2010), mais do que qualquer outra época, merece ser considerada a Idade de Ouro da matemática. Dentre os muitos matemáticos que se destacaram nesse período, podemos citar o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Como seu pai era um artesão, então, o duque de Brunswick, reconhecendo em Gauss uma criança prodígio, assumiu a sua educação. O jovem estudou em Göttingen e em 1799 obteve o grau de doutor. A sua carreira foi marcada por estudos realizados no campo da astronomia, geodésia e principalmente na matemática. Partes de suas descobertas foram publicadas na sua dissertação em 1799, onde deu a primeira prova do chamado “teorema fundamental da álgebra” e nas *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. Estas correspondem a uma reunião de todos os trabalhos anteriores a Gauss que tratam sobre a teoria dos números, na qual Gauss faz importantes contribuições.

Em 1831, Gauss, em um de seus tratados, apresenta uma nova teoria dos números complexos, em que elucidou muitos enigmas apresentados na aritmética e a lei da reciprocidade quadrática se tornou mais simples que nos números reais. Gauss, ao representar os números complexos por pontos num plano, afastou para sempre o mistério que ainda assombrava os números complexos (BOYER, 2010; STRUIK, 1992).

O estilo de imprimir rigor à análise iniciado por Gauss no século XIX foi ampliado e aprofundado por Cauchy (1789-1857), o mais importante analista da primeira metade do século (EVES, 2004). Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris e dentre as suas muitas contribuições na matemática, foi ele o primeiro a estabelecer uma confusão entre os sinais operatórios e predicativos. Como operatórios, os sinais (+ ou –) poderiam designar uma ação: aumentar e diminuir. E, como predicativos qualificariam um estado: positivo ou negativo.

No entanto, essas definições caíram em contradição quando Cauchy tenta justificar as propriedades aditivas dos relativos e, de repente, ele abandona o modelo metafórico e aborda a multiplicação de números relativos dogmaticamente. “O modelo metafórico apresentado no início, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação” (GLAESER, 1981, p. 334). A discussão levantada por Cauchy a respeito dos sinais operatórios e predicativos irá posteriormente despertar o interesse de Hankel, mas, nesse momento, ele não consegue apresentar os números relativos de forma clara.

As dificuldades enfrentadas por Cauchy também podem ser percebidas em Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nas suas conferências pedagógicas realizadas na Escola Normal Superior, declarando algumas dificuldades a respeito da teoria dos números relativos. Vejamos como Laplace apresenta a justificação da regra de sinais:

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: temos apenas que conceber que o produto de –a por –b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar essa identidade sensível, nós observamos que o produto de –a por +b é –ab (visto que o produto é –a repetido tantas vezes que quando tem unidades em b). Observamos em seguida que o produto de –a por b –b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim o produto de –a por + b

> é –ab, o produto de –a por –b deve ser de sinal contrário ou igual à +ab para o destruir (*apud* GLAESER, 1981, p. 333).

Na sua justificativa, observamos alguns aspectos familiares à demonstração apresentada por Euler, no entanto, Laplace consegue avançar no aspecto referente à demonstração da propriedade distributiva e o desapego a um modelo físico. Mesmo assim, Laplace não consegue propor uma extensão formal para os números relativos. Talvez isso possa estar ligado com a forma de Laplace apresentar suas demonstrações. Na sua maneira de escrever não explicava nada, quando satisfeito com o resultado, não se importava em deixá-los sem demonstração. A matemática, para Laplace, era como uma caixa de ferramentas a serem usadas na explicação da natureza (EVES, 2004, p. 486).

A partir da segunda metade do século XVIII surge na Inglaterra um grupo de matemáticos com o objetivo de reformar o ensino e a notação do cálculo. Dentre eles, George Peacock (1791-1858), que foi uma figura de destaque na reforma da matéria na Inglaterra, principalmente no que se refere à álgebra, pois lá ainda havia quem achasse que os números negativos não tinham validade (BOYER, 2010, p. 368).

Peacock publicou em 1830 o "*Tratado em Álgebra*" e nessa obra ele apresenta uma distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica. De acordo com Eves, a álgebra aritmética era considerada por Peacock "como sendo o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números"

(2004, p. 576). Dessa forma, apenas as operações com números inteiros positivos seriam possíveis. Ao contrário, a álgebra simbólica "[...] adota as regras da álgebra aritmética, mas remove todas as restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas" (PEACOCK, 1842, p. 6).

Essa justificativa apresentada por Peacock, em que ele transita de uma álgebra para outra, era chamada por ele como "*princípio de permanência das formas equivalentes*".

> Para incluir os novos símbolos –1, –2, –3,... em uma aritmética ampliada a qual englobe tanto os inteiros positivos como os negativos nós devemos, certamente, definir operações com eles de um modo tal que as regras originais das operações aritméticas sejam preservadas. Por exemplo, a regra (–1)×(–1) = 1 a qual estabelecemos para governar a multiplicação de inteiros negativos, é uma consequência do nosso desejo de preservar a lei distributiva a.(b + c) = ab + ac. Pois se nós tivéssemos estabelecido que (–1) × (–1) = –1, então, fazendo a = –1, b =1, c = –1, nós deveríamos ter tido –1.(1 – 1) = –1 – 1 = –2, enquanto por outro lado nós realmente temos –1.(1 – 1) = 1 × 0 = 0. Levou muito tempo para que os matemáticos percebessem que a 'regra dos sinais', junto com todas as outras definições governando os inteiros negativos e frações não podem ser 'provadas'. Elas são criadas por nós com o objetivo de obter liberdade de operação ao mesmo tempo que preservando as leis fundamentais da aritmética. O que pode – e deve – ser provado é apenas que com base nestas definições as leis comutativa, associativa e distributiva da aritmética são preservadas (COURANT; ROBBINS, 1987)[3].

[3] Citado por MEDEIROS; MEDEIROS (1992, p. 56).

Essa visão moderna apresentada por Peacock, fazendo valer para a álgebra simbólica as mesmas regras da álgebra aritmética, provoca uma verdadeira evolução para a formação da teoria dos números relativos.

Como consequência das contribuições de Peacock, o alemão Hermann Hankel (1839-1873) publica em 1867 a obra *Theorie der Komplexen Zahlensysteme* que amplia o conceito de número de uma forma mais clara e explícita. Ele observava que "a condição para construir uma aritmética universal é, pois, uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções" (BOYER, 2010, p. 389). Assim como fez Peacock, Hankel também estabeleceu um *Princípio da permanência das leis formais:*

> Quando duas formas da *arithmetica universalis* expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo (HANKEL, 1867, p.11).

Pautado nesse princípio de permanência e conhecendo as propriedades aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^+$, Hankel propõe prolongar a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e enuncia o seguinte Teorema: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$, respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais":

> Demonstração:
> $0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$
> $0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{ opp } b) + a \times (\text{opp } b)$
> De onde
> $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$
>
> (GLAESER, 1981, p. 338)

Observamos que, de certa maneira, essa demonstração pode ser encontrada em documentos anteriores, no entanto, Hankel, ao contrário de Laplace que procurava uma explicação na natureza, aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Dessa forma, a regra de sinais é uma convenção que objetiva manutenção de consistência interna da própria matemática.

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL, 1867, p. 41).

A revolução cumprida por Hankel, recusando a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

No transcorrer da história da construção dos números relativos, percebemos que, enquanto os matemáticos estavam presos em buscar exemplos que explicavam esses números, eles não fizeram grandes progressos. A difícil aceitação dos números negativos que se fez presente durante todo esse percurso, ainda se mostrou presente por um certo período, mesmo após a revolução cumprida por Hankel.

Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática a respeito da hesitação dos relativos. Mencionaremos um trecho de Hoffmann (1884)[4], citado por Schubring, onde posta um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, se os professores tiverem que dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: "Eu temerei ver os olhos de surpresa e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?" (2007, p. 17).

> Carlo Bourlet em 1896 introduziu na França um manual de ensino secundário sobre os números relativos. Nele ele apresenta as propriedades aditivas dos números relativos baseados sobre o modelo comercial e sobre a referência de um ponto sobre um eixo. Contudo, no capítulo seguinte, a multiplicação logo se mostra dogmática (GLAESER, 1981, p. 343).

Apesar da aceitação do conceito de número negativo e suas operações, na comunidade dos matemáticos profissionais, após a publicação de Hankel, na comunidade de professores esse debate ainda perdurou por muito tempo. A resistência dos professores em aceitar que a regra de sinais não pode ser provada, que $- \times -$ precisa ser mais para

[4] HOFFMANN, J. C. V. Zwei wichtige Fragen über das Negative, beantwortet vom Herausgeber. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, vol. 15, p. 580-582, 1884

preservar o formalismo matemático, já existente, foi um fator de destaque no percurso histórico da aceitação da regra de sinais.

Agora, fazendo uma ponte desse contexto histórico aos nossos dias atuais, podemos nos perguntar: depois de passados mais de um século, como acontece o processo de ensino dos números relativos para as nossas crianças de hoje? Essa entre tantas outras indagações serão abordadas no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NA SALA DE AULA, BNCC, PCN E NCTM

No Brasil, os números inteiros relativos são apresentados formalmente aos alunos no 7º ano[5] e muitas dificuldades podem ser percebidas no seu processo de ensino e aprendizagem. A não compreensão do conceito de números relativos e sua repercussão ao longo da trajetória estudantil tem sido uma preocupação dos professores de matemática e de pesquisadores (COQUIN-VIENNOT, 1985; PASSONI, 2002; PONTES, 2010; ALVES; MAIA, 2011) que buscam explicações para as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem desses números, bem como, procuram outros modelos de ensino para os números inteiros.

Os alunos chegam ao 7º ano associando a ideia de número a uma grandeza. Isto pode ser percebido nos mais variados assuntos contemplados no currículo dos anos iniciais do ensino fundamental e do 6º ano. Até o 6º ano, operações do tipo a – b só podem ser resolvidas se a ≥ b, pois é impossível conceber, por exemplo, a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas.

> A perturbação se instala quando a subtração (a – b) é aplicada a casos em que b > a, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de números – os negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 62).

---

[5] O 7º ano corresponde à antiga 6ª série do Ensino Fundamental de oito anos.

Dessa forma, nos anos que antecedem o 6º ano, a concepção formada pelos alunos a respeito da operação de adição está fortemente relacionada a um aumento e a subtração está ligada ao ato de tirar/diminuir. Essas concepções prévias que os alunos trazem consigo, de acordo com Fischbeim (1987)[6] e Hefendehl-hebeker (1991)[7], citados por Nascimento, contribuem ainda mais para gerar dificuldades e conflitos que se estabelecem entre o "significado prático de magnitude ou associação de quantidades com número anterior ao ensino da aritmética e o conceito de número negativo" (NASCIMENTO, 2004, p. 2).

Essa dificuldade encontrada hoje no ensino, também, pode ser percebida na trajetória histórica da construção do conceito de número negativo. William Frende (1757-1841)[8], citado por Medeiros e Medeiros (1992), expressou, em seu "Princípios de Álgebra", que "um número se presta a ser subtraído de um número maior do que ele mesmo, mas tentar subtrair de um número menor do que ele mesmo é ridículo" (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 55). Para Schubring, essa dificuldade está relacionada ao fato de que "operar com números negativos implicava em operar com um outro conceito de número que não aquele subjacente às operações comumente assumidas como geralmente válidas na aritmética" (SCHUBRING, 2007, p. 2).

---

[6] FISCHBEIM, E. Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach (D. Reidel Publishing Co., Dordrecht), 1987, p. 97-102.

[7] HEFENDEHL-HEBEKER, L. Obstacles in Their evolution From Intuitive to Intellectual Construts. For the Learning of Mathematics, v. 11, .(1, 1991, p. 26-32.

[8] FREND *apud* KLINE, M. Mathematics in the Western Culture. Middlesex, Peregrine Books, 1987.

No conjunto dos números inteiros relativos as concepções que os alunos trazem sobre as operações de adição e subtração simplesmente caem por terra, uma vez que neste conjunto adicionar nem sempre representa um aumento, assim como subtrair nem sempre representa diminuir. Para Teixeira (1993), o conceito de adição deve ser ampliado no conjunto dos números inteiros relativos, não pode mais se limitar a ideia de acrescentar. Da mesma forma, "subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição" (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Por exemplo, $-4 - (-5) = -4 + 5$ ou ainda, $-4 - (+5) = -4 - 5$.

Ainda, seguindo essa linha de pensamento das operações com números inteiros, a multiplicação, no conjunto dos números inteiros, não pode mais ser completamente compreendida como uma adição de parcelas iguais. Vejamos o caso quando um dos fatores é positivo e o outro negativo, ele pode ser facilmente compreendido como a repetição do fator negativo conforme indica o operador positivo, por exemplo, $(+2) \times (-5)$ pode ser expressa como $(-5) + (-5)$. O mesmo raciocínio se aplica quando temos dois fatores positivos. Mas, para Teixeira (1993, p. 65), a multiplicação com números inteiros relativos encontra um obstáculo: como mostrar que $(-1) \times (-1) = 1$?

Nesse sentido, para que o aluno consiga lidar com essas situações e possa dominar as operações com números inteiros relativos, faz-se necessário que ele amplie o seu conceito de número. De acordo com Teixeira (1993, p. 62):

> A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas. Entretanto, se, do ponto de vista formal e lógico, esse raciocínio nos é apresentado atualmente como coerente e organizado, sabemos que na perspectiva histórica ou da evolução do pensamento matemático, tal ampliação encontrou muitas dificuldades e obstáculos.

Sendo assim, uma das principais contribuições de Förstemann (1791-1836)[9], citado por Schubring (2007), foi sublinhar a diferença ontológica entre números e grandezas. Nas palavras de Förstemann, “Grandezas são: linhas, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões de tempo, conjunto de pessoas ou de livros. Números, no entanto, são apenas expressões das relações entre grandezas da mesma espécie” (FÖRSTEMANN, 1817)[10].

Dessa forma, não podemos realizar as operações algébricas com grandezas, mas somente com os números. Essa ideia de Förstemann foi amplamente abraçada e disseminada por Gauss, na qual provocou mudanças no modo de perceber que os “conceitos matemáticos não representavam mais coisas, mas relações entre coisas” (ASSIS NETO, 1995, p. 3). Nesse sentido, a contribuição de Gauss foi de perceber que a “Matemática é, no sentido mais geral possível, a ciência das relações na qual se abstrai de todos os conteúdos das relações” (GAUSS, 1809)[11].

---

[9] FÖRSTEMANN, W. A. Über den Gegensatz positiver und negativer Gröben. Nordhausen: Happach, 1817.
[10] Citado por SCHUBRING (2007, p. 5).
[11] Citado por ASSIS NETO (1995, p. 3).

Os resultados das pesquisas desenvolvidas por Borba e Guimarães (2009) apontam que os números positivos e negativos podem assumir diferentes significados nos mais diversos contextos. Um número positivo poderá representar uma *medida positiva,* uma *transformação positiva* ou uma *relação positiva*[12]*.* Da mesma forma, porém com sentido contrário, um número negativo poderá representar uma *medida negativa,* uma *transformação negativa* ou uma *relação negativa* que, matematicamente, podem ser representados por um mesmo símbolo, no entanto cognitivamente envolvem significados diferentes. A autora aponta como conclusão dos seus estudos quanto à compreensão dos números inteiros relativos que "(...) é mais fácil entender o significado de número relativo enquanto medida do que o significado de relação" (BORBA; GUIMARÃES, 2009, p. 99). No entanto,

> É importante que o número seja entendido enquanto relação, para além de uma simples resposta às questões *quantos são? E quanto mede?* Acostumar a criança a *pensar em relações,* ajudá-la a superar o obstáculo do pensamento substancial e ensiná-la a trabalhar corretamente a relação entre *Matemática e aplicação da Matemática* são diretrizes básicas para o professor de Matemática (ASSIS NETO, 1995, p. 4, grifos do autor).

Esse trabalho de acostumar à criança a pensar a matemática como uma relação é um processo desafiador, pois, para além das fronteiras do

---

[12] A autora caracteriza a medida positiva como dinheiro possuído, temperatura acima de zero, saldo credor de um campeonato. A transformação positiva pode ser entendida como dinheiro depositado ou ganho, subida de temperatura, pontos ganhos em um jogo. E, relação positiva como dinheiro, temperatura, pontos a mais que a medida inicial.

espaço escolar, estudos apontam que, apesar da apresentação formal do conceito de número negativo ser feita somente no 7º ano, as crianças em anos anteriores já possuem algumas noções intuitivas acerca de números negativos.

A pesquisa realizada por Maranhão, Camejo e Machado (2008) relata-nos uma experiência com alunos do 2º ano, em que um desses alunos para resolver a subtração 35 – 27 fez o seguinte raciocínio: "Eu tiro 20 do 30 e 7 do 5 [30 – 20 = 10; 5 – 7 = –2]" (p. 163). Chegando ao resultado 8. Esse caso foi levado para cinco professoras-alunas do 6º semestre do curso de pedagogia, para que elas realizassem uma análise da situação. Os relatórios apresentados pelas professoras-alunas mostraram um certo desconforto em lidar com a situação. Apenas uma professora-aluna admitiu a existência do número negativo. As demais atribuíram o sinal negativo do 2 a operação de subtração. Essa experiência comprova que os professores dos anos iniciais também precisam estar preparados para trabalhar com situações que envolvam o conceito de números negativos. Caso contrário, poderão contribuir para a formação de entraves que, futuramente, afetarão no processo de ensino e aprendizagem desses números.

Buscando descobrir o que os alunos já sabem antes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo, Moretti e Borba (2004) realizaram a aplicação de um teste com 65 crianças de 9 a 12 anos numa escola particular do Recife. O teste foi composto por 11 questões contendo situações de jogo, compras, saldo bancário, deslocamento em elevadores, viagens e esportes. Os resultados da pesquisa mostraram que:

> Antes de serem formalmente introduzidas ao conceito de inteiro relativo as crianças são capazes de resolver não só problemas inseridos em contextos de jogos – como observado em estudos anteriores – mas também em questões mais formais como as usualmente trabalhadas na escola (MORETTI; BORBA, 2004, p. 19).

Desse modo, podemos perceber que a noção intuitiva de número negativo ultrapassa as barreiras do espaço escolar. A pesquisa realizada por Santos (1990) mostrou que os agricultores com apenas 2,9 anos de média de frequência escolar conseguiram resolver situações hipotéticas envolvendo as operações de adição, subtração e divisão com números relativos. Esse autor concluiu que a ausência do ensino formal não impediu a realização dos cálculos com números negativos por parte dos agricultores. Isso porque eles se basearam nas suas experiências cotidianas em relação a lucros e prejuízos.

Pensando ainda na ideia de número negativo fora do espaço escolar, Lins e Gimenez (1997) propõem uma reflexão bastante interessante a esse respeito. Eles argumentam que o significado do número negativo “da rua” se diferencia do significado de número negativo da escola. Nas palavras dos autores:

> Na rua encontramos, sim, números negativos – temperaturas negativas e saldo bancário negativo –, mas certamente não são os números negativos da escola. Temperaturas, por exemplo, não são jamais somadas (Qual o resultado de somar a temperatura de Fortaleza com a de São Paulo?), e menos ainda multiplicamos os números negativos da rua (Três abaixo de zero vezes cinco abaixo de zero? Débito vezes débito?). Muitos de vocês podem estar pensando: ‘Mas temperaturas e dívidas são bons recursos didáticos...’ Sugerimos que o leitor que achou estranho o que dissemos anteriormente pare e reflita: Quando usamos como recursos as dívidas, e queremos produzir

> significado para (-3) × (-5), não é verdade que o primeiro fator quer dizer 'perder 3 vezes' e não 'uma dívida de três'? Você acha que faz sentido multiplicar duas *dívidas*? (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 13, grifos do autor)

Não se trata aqui de defendermos o número negativo da rua ou o da escola, mas sabermos que cada uma dessas concepções precisa ser levada em consideração nos momentos de ensino, cada qual com o seu potencial. Não se trata de legitimar uma em detrimento da outra. "A ideia de valorizar o que a rua sabe apenas como ponto de partida faz parte de um discurso que, embora pareça razoável do ponto de vista didático, é perverso do ponto de vista cultural" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 19). Foi justamente esse pensamento de número negativo atrelado ao pensamento concreto que travou durante um longo período histórico o debate a respeito da multiplicação desses números, na comunidade acadêmica. Entretanto, somente

> [...] quando a matemática acadêmica assume que definitivamente não há significado na rua para a multiplicação de números negativos, e passa a buscar, então, um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 13).

Voltando agora para contexto da sala de aula, segundo Borba e Guimarães (2009), os alunos associam mais rapidamente o significado de um número inteiro relativo enquanto medida do que como relação. Os professores ao apresentarem os números relativos aos alunos como medidas, associando ao número positivo a ideia de um ganho e ao número negativo a ideia de uma perda, como eles aparecem na rua, conseguem obter sucesso nas suas aulas, e os alunos compreendem facilmente as operações de adição e subtração com esses números. Contudo, esse modo de ensinar os números inteiros relativos encontra dificuldades quando o professor apresenta a multiplicação desses números, assim como aquela sofrida pelos matemáticos do passado. Como explicar que uma perda multiplicada por uma perda se transformou num ganho? Exemplificando, $(-2) \times (-3) = +6$.

O que antes era completamente contextualizado com situações concretas, que poderiam ser vivenciadas e compreendidas pelos alunos, agora na multiplicação precisa ser entendido como uma regra sem relação nenhuma com o que foi aprendido anteriormente. E, a partir desse momento, instala-se a grande confusão entre as regras de sinais da adição e as regras de sinais da multiplicação de números inteiros relativos.

O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), em que os números relativos estão associados à ideia de ganho/perda não têm relação nenhuma com a regra de sinais “menos vezes menos dá mais”. No entanto,

> [...] como é concreto e ele facilita muito a compreensão dos relativos no início de sua aprendizagem, os alunos o adotam e querem utilizá-lo enquanto não é mais adaptado: não somente, ele não explica mais nada, mas ele representa mais nada, ele não funciona mais ao nível do símbolo (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183).

Nesse sentido, “a noção do número negativo só pode ser definida corretamente pelo nível do pensamento formal” (MICHELOT, 1966)[13] pois, ao contrário, segundo Coquin-Viennot, não estaríamos introduzindo um falso contrato didático ao utilizarmos um modelo concreto para apresentarmos os números relativos? Quando o professor se utiliza desse modelo comercial, ele procura somente facilitar a apresentação e a aprendizagem dos números relativos, no entanto “[...] esse modelo comercial é tão prático, tal que ele é reforçado durante todo o início da aprendizagem que ele se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma *concepção* dos relativos” (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 184, grifos do autor).

Para Coquin-Viennot (1985), o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação, que procede a adição dos números relativos, pode encontrar dificuldades se a concepção desses números for plantada somente em bases concretas. Assim, para que a multiplicação dos números relativos possa ser alcançada e compreendida pelos alunos, de acordo com essa autora, é preciso que ocorra uma reversão desse quadro. Porém, essa concepção está tão bem estabelecida, que ela, nela mesmo constitui um verdadeiro obstáculo para a compreensão das propriedades multiplicativas dos números relativos.

Ainda, segundo Coquin-Viennot (1985), a apresentação dos números relativos pautados somente no “modelo comercial” pode trazer prejuízos ao ensino da multiplicação desses números, bem como dificultar a

---

[13] Citado por COQUIN-VIENNOT (1985, p. 183).

aprendizagem de outros conceitos. Mas, como será que os PCN, a BNCC e o NCTM abordam a questão do ensino dos números inteiros relativos?

Realizamos uma consulta aos documentos oficiais para sabermos quais as orientações que eles trazem a respeito do ensino dos números inteiros e quais as suas recomendações para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação desses números.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), para as séries iniciais do ensino fundamental – 1ª a 4ª séries – (BRASIL, 1997) os números negativos são citados em poucos momentos. Tanto no primeiro ciclo (1ª e 2ª séries) quanto no segundo ciclo (3ª e 4ª séries) parte-se da ideia de que os conhecimentos numéricos são construídos num processo dialético. O aluno, nesse processo, perceberá a existência das diferentes categorias de números, criadas em função de diferentes problemas enfrentados pela humanidade ao longo da história, entre eles os negativos. Destaca-se, também, a preocupação evidente no tratamento de número como uma relação, o que futuramente possibilitará uma melhor aceitação dos números negativos.

De acordo com os PCN para as séries finais do ensino fundamental – 5ª a 8ª séries – (BRASIL, 1998, p. 66), no terceiro ciclo[14], os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, podendo, desse modo, representar diferença, falta, orientação e posições relativas. A apresentação dos números inteiros pode apoiar-se nas concepções intuitivas que os alunos trazem a respeito desses números por meio das

[14] O terceiro ciclo corresponde a 5ª e a 6ª séries do ensino fundamental de 8 anos.

situações vivenciadas, por eles, de ganhos e perdas num jogo, débitos e créditos, temperaturas, entre outras. Entretanto, advertem que o estudo desses números não deverá restringir-se somente a situações práticas, deve abranger outros aspectos que promovam a compreensão das regras do cálculo, com esses números, pela observação de regularidades.

Na parte em que os PCN tratam sobre conceitos e procedimentos para o terceiro ciclo, a respeito dos números relativos, eles apontam o "[...] reconhecimento dos números inteiros em diferentes contextos – cotidianos e históricos - e exploração de situações problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos" (BRASIL, 1998, p. 71).

Nada consta sobre o ensino da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros para o terceiro ciclo do ensino fundamental, como também não aponta de forma explícita como deva acontecer o ensino das operações de adição e subtração desses números.

Contudo, no quarto ciclo[15] deste documento, destinado a séries finais do ensino fundamental, podemos constatar a apresentação dos números inteiros com mais detalhes. Primeiramente, é apresentado-nos um pequeno histórico a respeito dos números negativos. A seguir, os PCN afirmam que na escola o estudo dos números inteiros apresenta dificuldades e que a aprendizagem, ao longo do ensino fundamental, tem sido insatisfatória. Neste sentido, é importante reconhecer os obstáculos que o aluno enfrenta ao entrar em contato com esses números. A saber:

---

[15] O quarto ciclo corresponde a 7ª e 8ª séries do ensino fundamental de 8 anos.

> - conferir significado às quantidades negativas;
> - reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
> - reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero-origem);
> - perceber a lógica dos números negativos que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível "adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado", como também é possível "subtrair um número de 2 e obter 9";
> - interpretar sentenças do tipo x = –y, (o aluno costuma pensar que x é positivo e y é negativo) (BRASIL, 1998, p. 98).

Assim, com o intuito de superar esses obstáculos, o documento apresenta alguns exemplos de recurso que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem desses números. O primeiro deles é a representação geométrica dos números inteiros numa reta numérica orientada, por meio dela podem ser explorados vários segmentos desse conteúdo, tais como:

> - visualizar o ponto de referência (origem) a partir da qual se definem os dois sentidos;
> - identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;
> - reconhecer a ordenação dos inteiros: dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está á esquerda (no sentido positivo da reta numérica); assim, dados dois números positivos será maior o que estiver mais distante do zero e dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero;
> - comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles; inferir regras para operar com adição e subtração, como: (+3) + (–5) = +3 –5 = –2 (BRASIL, 1998, p. 98-99)

Ainda, para explorar as operações de adição e subtração, o documento indica outro recurso: o ábaco de inteiros, "[...] que consiste em duas varetas verticais fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar os pontos” (BRASIL, 1998, p. 99).

Para a apresentação da multiplicação de números inteiros, os PCN indicam que essa operação pode ser trabalhada por meio de tabelas. Inicialmente, far-se-á o produto entre dois números positivos. A seguir, a multiplicação entre um número positivo por um número negativo pode ser interpretada como a soma de parcelas negativas e resolvida por procedimentos aditivos, por exemplo, (+2) × (–5) = (–5) + (–5) = –10. Através da observação das regularidades das sequências numéricas construídas, pode-se chegar à multiplicação de dois números negativos, compreendendo que este produto precisa ser positivo para manter o padrão numérico observado na sequência. Ilustrando:

Tabela 1- Sequência formada na multiplicação de números inteiros

x

-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	×
-6	-3	0	3	6	9	**3**
-4	-2	0	2	4	6	**2**
-2	-1	0	1	2	3	**1**
0	0	0	0	0	0	**0**
+2	+1	0	-1	-2	-3	**-1**
+4	+2	0	-2	-4	-6	**-2**

y

Fonte: Brasil (1998)

Podemos observar que os produtos obtidos entre os números da primeira linha (x) com os da última coluna (y), na posição vertical, decrescem de cima para baixo, para $x>0$ e crescem para $x<0$. Na posição horizontal, da direita para a esquerda, os produtos crescem para $y>0$ e decrescem para $y<0$.

De um modo geral, os PCN apontam que o trabalho com números inteiros não pode estar relacionado somente a situações concretas. Contudo, adverte que o ensino, conduzido exclusivamente pelo caminho formal, corre o risco de reduzir o estudo a um formalismo vazio. “Assim, devem-se buscar situações que permitam aos alunos reconhecer alguns aspectos formais dos números inteiros a partir de experiências práticas e do conhecimento que possuem sobre os números naturais” (BRASIL, 1998, p. 100).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aprovada recentemente em nosso país (BRASIL, 2017), propõe cinco unidades temáticas para a área da matemática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística) que, segundo o documento, estão correlacionadas e orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas as longo do Ensino Fundamental.

A unidade temática Números tem por objetivo desenvolver ao longo do Ensino Fundamental[16], o pensamento numérico que “[...] implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e

[16] O Ensino Fundamental compreende a fase do 1º ao 9º ano e atende crianças dos seis aos 14 anos de idade, dividindo-se em anos iniciais e finais.

interpretar argumentos baseados em quantidades" (BRASIL, 2017, p. 266). Para a construção do conceito de números, a BNCC indica que os alunos precisam desenvolver as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, por meio de situações significativas e sucessivas ampliações dos campos numéricos.

Para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental[17], não há nenhuma indicação sobre a necessidade de abordar os números inteiros relativos nessa fase do ensino. Tem-se como expectativa para a unidade temática Números a resolução de problemas envolvendo números naturais e racionais e o desenvolvimento de habilidades de "[...] leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos" (BRASIL, 2017, p. 266-267).

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental[18], de maneira geral, a expectativa é de que os números inteiros sejam utilizados pelos alunos na resolução de problemas, envolvendo as operações fundamentais, com diferentes significados e utilizando estratégias diversas (BRASIL, 2017). Mais especificamente, os números inteiros são abordados, pela BNCC, no sétimo ano. Na unidade temática Números, entre outros objetos do conhecimento para esse nível de ensino, contempla-se os "Números inteiros: usos, história,

---

[17] Os Anos Iniciais do Ensino Fundamental corresponde a fase do 1º ao 5º ano.
[18] Os Anos Finais do Ensino Fundamental correspondem a fase do 6º ao 9º ano.

ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações" (BRASIL, 2017. p. 304), objetivando o desenvolvimento das seguintes habilidades:

> (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros (BRASIL, 2017. p. 305).

Podemos observar que a BNCC trata da questão dos números inteiros relativos superficialmente. Propõe a resolução e a elaboração de problemas utilizando as operações com esses números, porém não especifica quais seriam essas operações e nem aponta uma alternativa metodológica para o ensino dessas operações. A problemática da multiplicação de dois números negativos é completamente silenciada.

Vejamos, agora, o que nos dizem o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Princípios e Normas para a Matemática Escolar à respeito do ensino dos números inteiros e das suas operações de adição, subtração e multiplicação.

Segundo as Normas (NCTM, 2008), os inteiros negativos devem ser introduzidos no período do 3º ao 5º anos de escolaridade

> [...] através da utilização de modelos familiares, como a temperatura ou dívidas de dinheiro. A reta numérica também constitui um modelo útil e adequado, e os alunos deverão reconhecer que os pontos situados a esquerda de 0, numa reta numérica horizontal, podem ser representados por números menores que 0 (NCTM, 2008, p. 175).

No período que corresponde do 6º ao 8º anos de escolaridade, as Normas (NCTM, 2008) apontam para a importância de os alunos aprofundarem os seus conhecimentos a respeito dos inteiros relativos, devendo adquirir competência na sua utilização para a resolução de problemas. Os alunos deverão ampliar os seus conhecimentos informais a respeito dos negativos, decorrente de suas experiências cotidiana, como as temperaturas ou a redução do número de metros numa jogada de futebol americano. Neste sentido,

> Os inteiros positivos e negativos deverão ser percebidos como úteis na indicação de variações ou valores relativos. Os alunos poderão ainda avaliar a utilidade dos inteiros negativos quando trabalharem com equações, cujas resoluções exijam a sua utilização, como em $2x + 7 = 1$ (NCTM, 2008, p. 256).

Pelo exposto, pode ser percebido que, embora este documento, NCTM (2008), indique a compreensão dos negativos pela ampliação dos conhecimentos informais adquiridos pelos alunos, nada consta a respeito, especificamente, da regra de sinais nem de indicações para a condução das operações de adição, subtração e multiplicação com esses números. Entretanto, de acordo com Pontes (2010), no Caderno 9 da Coleção Temas Matemáticos do NCTM, intitulado o sistema dos inteiros[19], aparece uma sugestão para a multiplicação de números inteiros relativos. Vejamos:

> Nessa justificativa, é sugerida a multiplicação da sequência dos números inteiros de 4 até -4 pelo número positivo 5. Iniciando

[19]NCTM. The system of integers. Washington, 1968. (Topics in Mathematics for Elementary Scholl Teachers), Booklet Number 9.

pelo produto 4 × 5 = 20 e seguindo até o produto 0 × 5 =0 pode ser observado que o primeiro fator vai diminuindo de um em um, que o segundo fator permanece igual e que os produtos vão diminuindo de cinco em cinco unidades. Portanto, continuando a realizar os produtos até -4 × 5 = -20, obtemos a seguinte sequência:

4	×	5	=	20
3	×	5	=	15
2	×	5	=	10
1	×	5	=	5
0	×	5	=	0
-1	×	5	=	-5
-2	×	5	=	-10
-3	×	5	=	-15

Assim, concluímos que o produto de um número negativo por um número positivo é um número negativo. Em seguida, é usada a mesma estratégia para multiplicar os números inteiros de 4 a -4 pelo número negativo -5, inicialmente de 4 até 0, para que a sequência dos produtos seja percebida e, em seguida de -1 a -4, que geram os produtos:

4	×	-5	=	-20
3	×	-5	=	-15
2	×	-5	=	-10
1	×	-5	=	-5
0	×	-5	=	0
-1	×	-5	=	+5
-2	×	-5	=	+10
-3	×	-5	=	+15

> De acordo com a sequência anterior, concluímos que o produto de um número negativo por um número negativo é um número positivo (PONTES, 2010, p. 104).

Nessa sugestão, percebemos que o ensino da regra de sinais para a multiplicação aconteceu pela via formal. Ela está em consonância com a indicação apontada pelos PCN. Entretanto, a regra de sinais, para a multiplicação de números inteiros, é sugerida pelos PCN somente para as últimas séries do ensino fundamental.

Nesses documentos: BNCC, PCN e NCTM, há diversas sugestões de ensino para a compreensão do campo aditivo dos relativos. Contudo, o ensino da multiplicação de números negativos, nesses documentos, é sugerido por meio de uma sequência numérica em que um padrão precisa ser preservado. Ou seja, a compreensão de que a multiplicação de dois números negativos precisa ser positivo, deve acontecer pela via formal, fugindo de exemplos do cotidiano.

Finalizando este capítulo, cabe, agora, tecermos algumas considerações sobre o tema discutido neste tópico. O ensino dos números inteiros encontra dificuldades, principalmente, no que se refere à multiplicação desses números e suas regras de sinais. O fato de a adição de números relativos ser conduzida por meio do modelo aritmético, utilizando-se de situações-problema contábeis, pode trazer prejuízos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números.

Analisando as orientações dos documentos oficiais, percebe-se que na BNCC não se encontra indicativos de como deve ser conduzido o processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros relativos e a regra de sinais para a multiplicação, envolvendo esses números, não chega a ser mencionada. Os PCN apontam que o ensino dos números inteiros não deve ser conduzido exclusivamente por exemplos práticos. Mas, que, partindo das situações vivenciadas pelos alunos, estes sejam levados a fazer generalizações e possam compreender que a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros atende as regras da consistência interna da própria matemática. A sugestão de ensino, apresentada pelo caderno 9 do NCTM, apresenta um modelo que atende a esta perspectiva. No próximo capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica que subsidiou a nossa proposta de intervenção didática que será tratada com mais detalhes no decorrer desse livro.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: PRINCÍPIO DE EXTENSÃO E CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

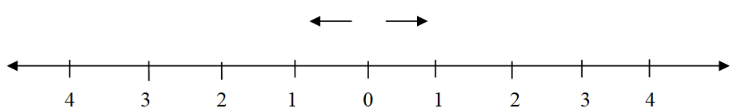
Se o processo de ensino e aprendizagem dos números relativos encontra dificuldades, o que fazer? Na busca por uma resposta a esse questionamento fomos desafiados a procurar subsídios teóricos e metodológicos que nos auxiliassem a encontrar um caminho que pudesse trazer melhorias ao processo de ensino e aprendizagem desses números, diferentemente daquela prática que se encontra instaurado em nossas escolas, conforme tratamos no capítulo anterior.

Glaeser (1981) nos provoca ao dizer que o "bom modelo" utilizado para ensinar as propriedades aditivas, baseado no "modelo comercial" associando a ideia de ganho a um número positivo e ao número negativo ao de uma perda, pode trazer riscos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números. Desta forma, o ensino dos números relativos precisa sofrer mudanças, não podendo mais se prender somente nos exemplos baseados em situações cotidianas, haja vista que, historicamente, o número negativo não surgiu num contexto aritmético, mas, sim, num contexto algébrico.

> Contudo, o ensino atual dos números inteiros se introduz em um contexto aritmético, tanto nas situações que introduz como nas técnicas que utilizam para resolvê-las, contexto em que não são necessários como estratégia de resolução. Como consequência, o estabelecimento de suas regras de cálculo fica totalmente a mercê do modelo concreto que se utiliza para introduzi-los, e este tratamento didático contribui, todavia, ainda mais para agravar o obstáculo epistemológico (CID, 2000, p. 13).

Dessa forma, Costa (1971) complementa ao apontar no sentido de que a origem histórica da noção de número negativo não está atrelada à classe de grandezas, mas que ela emergiu “[...] na necessidade de interpretar o resultado de uma subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo” (COSTA, 1971, p. 222). Seguindo o mesmo pensamento, Caraça nos apresenta a operação de subtração sob a perspectiva de deslocamentos sobre uma reta. E, que para orientar esses deslocamentos, há necessidade de se determinar um sinal que indique o sentido do movimento. “Esse sinal pode ser qualquer, mas há necessidade de tomar um sobre o qual nos entendamos para sempre” (CARAÇA, 1963, p. 96).

Figura 1 – A reta r



Fonte: (CARAÇA, 1963, p. 96)

Assim, de acordo com Caraça (1963), imaginamos um móvel que se desloca sobre a reta r, partindo do 0, considerado a origem, ele se desloca três medidas e em seguida muda o sentido do movimento e se desloca duas medidas, ao final dos movimentos se encontra a uma distância da origem. Caraça propõe que podemos obter o resultado do deslocamento deste móvel por meio de uma subtração do tipo 3 – 2 = 1.

No entanto, Caraça afirma, que nem sempre isto é possível, pois se considerarmos um móvel que parte da origem e se desloca quatro medidas, para e retrocede seis medidas, a sua posição final será duas medidas à esquerda da origem; "mas este resultado é impossível de obter por uma subtração" (p. 96), visto que o minuendo 4 é menor que o subtraendo 6. Nas palavras de Caraça (1963, p. 97), "se desejamos obter, sempre, resultados de problemas como os postos acima, temos que nos libertar da impossibilidade da subtração". Para isso se instaura a necessidade da criação de um novo campo numérico, os números relativos.

Para Caraça, a definição de um número relativo é dada da seguinte forma: "Seja, a e b dois números reais quaisquer: à diferença a – b chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo conforme for a > b, a = b, a < b" (CARAÇA, 1963, p. 97). Nesse sentido, a representação dos números relativos na reta numérica é organizada a partir da origem que passa a corresponder ao número zero.

Nessa reta, a partir do zero, tomam-se dois sentidos opostos, estabelecendo-se que a direita do zero corresponde ao sentido positivo e a esquerda do zero o sentido negativo. Agora, nesta reta dos relativos, podemos então representar os movimentos mencionados anteriormente sobre a reta, da seguinte forma: a diferença 3 – 2 é o número relativo positivo 1; a diferença 4 – 6 é o número relativo negativo –2.

Segundo Caraça, "os elementos novos que aparecem no campo dos relativos são os números negativos; os números positivos são os números reais anteriormente conhecidos, incorporados agora no novo campo com uma qualificação nova" (CARAÇA, 1963, p. 97).

Com a ampliação dos conjuntos numéricos, muitas impossibilidades foram resolvidas ao longo do caminho, por exemplo:

a) a divisão de 3 por 2 que antes não era possível nos Naturais, agora ela é perfeitamente solucionada no campo dos números Racionais;

b) A $\sqrt{5}$ que não era possível de ser calculada nos racionais, com a ampliação para os Reais, ela foi definitivamente elucidada;

c) A subtração do tipo 4 – 7 que não era solucionada nos Naturais, passou a ser compreendida e resolvida no campo dos Relativos.

Bem, parece-nos, então, que a ampliação dos conjuntos numéricos até aqui resolveu todas as impossibilidades. No entanto, com a introdução dos números relativos, vimos surgir um outro tipo de impossibilidade diferente de tudo o que havia se apresentado até o momento, estamos falando das raízes de índice par com radicando negativo.

Como consequência da regra de sinais da multiplicação, aplicadas a potenciação, podemos perceber que a potência com expoente par será positiva, e, a potência com expoente ímpar manterá o mesmo sinal da base. Como a potenciação é a operação inversa da radiciação, estamos frente, nas palavras de Caraça, a uma nova impossibilidade.

> [...] essa dificuldade pode dar origem a um novo campo numérico que se obterá por negação dessa negação. Isto é evidentemente realizável, mas, antes de o fazer, ponhamos a pergunta - vale a pena? Haverá porventura problemas cuja plena resolução exija a ultrapassagem da negação mencionada? (CARAÇA, 1963, p. 104).

O transcorrer da própria história mostrou que sim. Não era apenas uma questão particular que poderia ser resolvido optando-se por adotar a regra – × – = – e, assim, poder calcular, por exemplo, $\sqrt{-25}$ = –5, uma vez que nesta lógica (–5) × (–5) = –25. Esta questão vai além, tendo em vista que os matemáticos se depararam, no transcorrer da história, com situações problemas que recaiam em equações em que as manipulações algébricas de resolução faziam surgir uma raiz quadrada negativa, e isso impedia a continuação do cálculo formal. Mas a situação do problema os fazia entender que era possível achar um resultado.

O fato da impossibilidade de calcular uma raiz quadrada negativa no conjunto dos números Reais e a situação que apontava para a existência dessa raiz contribuiu para que os matemáticos avançassem no cálculo. Essa dicotomia fez com que os matemáticos mantivessem a regra – × – = + e, com essa atitude, permitiu-se a criação de um novo número, o imaginário.

> Que essa necessidade imperiosa tenha sido posta em relevo pelas equações de 3º grau, e não pelas do 2º grau (nas quais, porém, o fato da impossibilidade analítica já aparecera muitos séculos antes), mostra bem que o progresso da Matemática se não realiza sempre em obediência a um plano lógico de desenvolvimento interno, mas, muitas vezes, pelas pressões exteriores, que a obrigam a procurar, às apalpadelas, o seu caminho (CARAÇA, 1963, p. 161).

Com a engenhosa ideia da criação do símbolo i (unidade imaginária) e da igualdade $i^2 = -1$, foi possível ultrapassar o obstáculo relacionado às raízes de índice par com radicando negativo. Assim, $\sqrt{-9}$ = $\pm 3i$ e, como consequência, fez-se necessário criar um novo campo numérico, o campo dos Complexos. Nas palavras de Costa: “A necessidade de levantar essa exceção, de modo a tornar possíveis todas as operações sobre os números reais, teve como resultado a criação dos números complexos. Essa nova classe de números é, portanto, de origem algébrica” (1971, p. 222).

Essa capacidade que o homem civilizado, de hoje, tem para fazer generalizações e abstrações, ao contrário do homem primitivo e até mesmo de alguns filósofos que percebiam os números como impregnados na natureza, Caraça chama de “princípio de extensão”, nas suas palavras:

> [...] o homem tem tendência a generalizar e entender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão (CARAÇA, 1963, p. 10).

Esse trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios, do qual Caraça nos fala, foi o que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos e das suas operações. Assim, “As operações sobre números relativos definem-se por extensão imediata das operações com o mesmo nome estudadas no campo real” (CARAÇA, 1963, p. 100).

O homem pelas suas generalizações e abstrações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi justamente este obstáculo que Hankel (1867), citado por GLAESER (1981), conseguiu superar ao mostrar que a explicação para a regra de sinais – × – = + não poderia ser procurada na natureza, e que ela precisaria ser demonstrada formalmente[20].

No entanto, no transcorrer da história, podemos perceber que os números negativos, assim como os números complexos, foram rejeitados durante muito tempo, porém a hesitação lógica perdeu espaço frente às vantagens práticas. Neste caso, a $\sqrt{-1}$ que representava uma operação impossível era aplicada no cálculo como um instrumento intermediário a fim de se obter resultados reais como, por exemplo, $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. Desta forma, a multiplicação de dois números impossíveis resultava em um número real.

Segundo Costa, os números complexos perderam o seu aspecto paradoxal de resultados de operações impossíveis quando foram aplicados ao cálculo das grandezas vetoriais (1971). Assim, podemos perceber que "as extensões sucessivas da ideia de número se justificam pela necessidade que temos de simbolizar certas grandezas concretas, com a sua divisibilidade, a sua orientabilidade, a sua continuidade" (COSTA, 1971, p. 224).

No processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos esse processo de generalização também precisa estar presente, uma vez que a descoberta da existência do número negativo está ligada a existência do positivo. Desta forma,

> A compreensão do que seja número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações, na medida em que a criança descobre que se negativo é menor do que

[20] Neste trabalho, entendemos como ensino formal aquele que atende aos princípios da consistência interna da matemática, atendendo as regras para a formação de fórmulas e permitindo generalizações.

> positivo, há um ponto de onde positivo e negativo se originam. Isso leva, por sua vez, à necessidade de nova ampliação, porque, nos naturais, a assimilação do zero foi feita com base no significado da ausência de quantidade. Agora, é preciso ampliar este significado, ou seja, diferenciá-lo da concepção de zero origem (TEIXEIRA, 1993, p. 63).

Da mesma maneira que a concepção do zero precisa ser ampliada, também, a concepção das operações de adição, subtração e multiplicação precisa sofrer novas significações no conjunto dos números inteiros relativos. Uma vez que até o 6º ano as crianças são levadas a associar a ideia de adição com a ideia de juntar, a ideia de subtração atrelada a tirar, e, por sua vez, a multiplicação é vista como uma adição de parcelas iguais. No entanto, estas concepções precisam ganhar um novo significado no conjunto dos relativos. Além das operações, o sinal de + (mais) que outrora representava uma adição, agora nos relativos pode representar um estado. Da mesma forma, o sinal de – (menos) que no conjunto dos Naturais representava uma operação de subtração, agora também passa a ser considerado como um sinal predicativo. Neste sentido, vale salientar que:

> Os números positivos e negativos representam estados e operações, por exemplo: –2 representa ao mesmo tempo 2 unidades abaixo de zero, portanto, que se localizam na região negativa, como também significa “2 a menos que”, indicando a operação de deslocamento, que produzirá transformações em um certo sentido (no caso de número negativo significa deslocar a esquerda e, de positivo, deslocar a direita) (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Esta confusão entre os sinais operatórios e predicativos, de acordo com Glaeser (1981), foi percebida primeiramente por Cauchy em meados do século XIX que os diferenciou como sinais operatórios aqueles que designam uma ação (aumentar, diminuir) e os predicativos aqueles que qualificam um estado (positivo ou negativo).

No nível de aprendizagem, essas ampliações e ressignificações das operações dos naturais para os relativos requerem uma atenção especial. Podemos pensar no sentido da congruência semântica apresentada por Raymond Duval através da sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

3.1 Os Registros de Representação Semiótica

Nesta teoria, o estudo da matemática se estabelece com base em representações, pois os objetos matemáticos não sendo acessíveis pela percepção o fazem pela representação. Desta forma, surge a necessidade das representações semióticas para poder dar representantes aos objetos matemáticos e, por outro lado, a possibilidade de operar com esses objetos matemáticos dependem de um sistema de representação semiótico.

Desse modo, percebe-se que surge um novo regime de saber pautado na ordem da representação, onde a apreensão do objeto matemático passa por intermédio de suas representações. Essas representações foram o ponto principal para o desenvolvimento do conhecimento matemático, pois elas são imprescindíveis na formação e na construção de conhecimentos.

> [...] o conhecimento é veiculado e limitado pelas representações. Limitado porque, para se ter conhecimento, é preciso que o objeto do conhecimento esteja em presença do

> sujeito do conhecimento – é preciso que o objeto do conhecimento seja dado a conhecer, o que ocorre por meio das representações. Estas possibilitam o acesso aos objetos do conhecimento. (...) As representações, enquanto parte concreta que relaciona o objeto do conhecimento e o sujeito que aprende, se estabelece como elemento importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007, p. 185).

Porém, é imprescindível salientar "[...] o entendimento de que nenhum dos registros de representação 'é' o objeto matemático, mas eles apenas o 'representam', estão 'no lugar dele' para, assim, permitir o acesso a esses objetos matemáticos" (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 45). Nesse sentido, é que Duval (1993) chama a atenção para o paradoxo cognitivo do pensamento matemático:

> [...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, de outro, é somente pelo meio de representações semióticas que uma atividade sobre os objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles só podem tratar com representações semióticas? (DUVAL, 1993, p. 38).

Muitas vezes no ensino não damos a devida importância ao paradoxo cognitivo do pensamento matemático devido ao fato de estarmos mais atentos às representações mentais do que às representações semióticas. Segundo Duval, as representações mentais dizem respeito "[...] às conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto [...]" (DUVAl, 1993, p. 38), ao passo que, as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem seus embaraços próprios de significação e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39).

Ainda, segundo Duval, essas representações semióticas não são somente para fins de comunicação, mas também são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. Neste sentido, os registros de representação semiótica são fundamentais tanto para a criação de objetos matemáticos como para a sua apreensão.

Numa aula de matemática, por exemplo, o –2, objeto externo, é utilizado para estabelecer a relação com as noções e ideias do conceito desse número. Desta forma, o emprego do signo é como um instrumento internalizado, operado em nível mental. Assim, dois deslocamentos à esquerda na reta dos números inteiros, a temperatura de dois graus abaixo de zero, dois metros de profundidade são instrumentos externos. As respectivas representações são signos internos.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece como uma atividade fundamental para a apreensão conceitual dos objetos, que, por sua vez, não deve ser confundido com suas representações. O objeto deve ser reconhecido em cada uma das suas representações possíveis, pois somente nessas condições é que a representação dá acesso ao objeto representado (DUVAL, 1993).

Dentre a diversidade de representações semióticas, Duval agrupa-as em quatro grandes grupos de registros, sendo eles: a linguagem natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas (2005). Segundo Duval (1993), para que um sistema semiótico possa ser considerado um registro de representação, ele deve promover três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

a) *A formação de uma representação identificável* como uma representação de um registro dado tem por finalidade assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação, como também a possibilidade de sua utilização para tratamentos. De um modo geral, são regras de conformidade que já se encontram estabelecidas, dessa forma não é competência do sujeito criá-las, mas apenas usá-las para reconhecer as representações. Neste sentido, não cabe aos nossos alunos criar o conjunto dos números relativos, mas apropriar-se dele e de suas regras de conformidade para a construção das operações fundamentais.

b) *O tratamento* de uma representação é a transformação interna a um registro, ou seja, é a transformação dessa representação dentro do registro onde ela foi formada, sendo que, em cada registro, há regras de tratamentos próprios que variam em quantidade e natureza. Por exemplo, quando trabalhamos com a operação de adição de números relativos, o tratamento exige a compreensão das regras algorítmicas próprias desses números.

Precisamos ressaltar que os tratamentos estão ligados a forma e não ao conteúdo do objeto matemático, tomemos o exemplo fornecido por Duval (2012, p. 99):

> 4/2, (1+1) e $\sqrt{4}$ são formas escritas que designam um mesmo número, quer dizer, são expressões que fazem referência a um mesmo objeto. Mas não possuem o mesmo significado, uma

> vez que não são reveladores do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade. Uma simples mudança na escrita é suficiente para exibir propriedades diferentes do objeto, mesmo se for mantida a mesma referência.

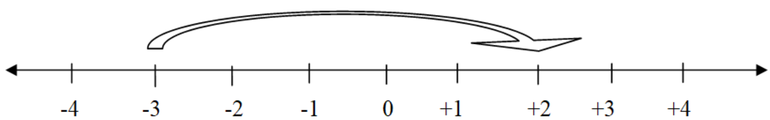
Os tratamentos efetuados com número fracionário 4/2, são diferentes dos tratamentos efetuados com a expressão (1 + 1), embora as duas expressões sejam representações do mesmo objeto matemático.

> O fato de que duas representações distintas para um mesmo objeto têm cada uma delas sentidos diferentes, logo, tratamentos diferenciados, implicam em um custo cognitivo também diferente. Somar dois números fracionários, por exemplo, não tem o mesmo custo cognitivo que somar os mesmos dois números em sua forma decimal. Como foi visto, tudo depende do sentido que se dá para cada uma das formas da apresentação do objeto matemático (FLORES, 2006, p. 97).

Na maioria das vezes, no ensino não nos preocupamos com os diferentes tipos de registros para um mesmo objeto matemático e dificilmente nos damos conta de que as diferentes formas de representar o objeto matemático possam apresentar dificuldades para nossos alunos. Assim, nos processos pedagógicos, geralmente, somente esse tipo de transformação interna – tratamento que chama a atenção, pois ele corresponde aos procedimentos de justificação e prova.

c) *A conversão* é a transformação de uma representação dada em um registro, em uma representação de um outro registro, mantendo os mesmos objetos revelados, conservando a sua totalidade, ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. Não podemos, de forma alguma, confundir a conversão com o tratamento. A conversão se estabelece entre registros diferentes, enquanto o tratamento acontece dentro do mesmo registro. Por exemplo, passar a representação da operação numérica (–3) + (+5) para uma representação geométrica na reta dos inteiros indica uma conversão. Ilustrando:

Figura 2 - Representação geométrica da adição (–3) + (+5)



Fonte: Hillesheim (2013)

No entanto, o simples cálculo dessa operação (–3) + (+5) sem uma mudança de registros consiste num tratamento. A conversão não tem um papel de prova ou justificação nos processos matemáticos, talvez, por esse motivo, ela não desperte tanto a atenção nesses processos.

> [...] como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2005, p. 16).

Assim, de acordo com este autor, podemos perceber que a essência da atividade matemática repousa na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo. Baseado nesse raciocínio, Duval levanta a hipótese de que a compreensão em matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representações semióticas. Nas palavras de Duval, “a compreensão da matemática implica a capacidade de mudar de registro” (2005, p. 21). Neste sentido, percebemos então, em consonância com esse autor, que é no trânsito coordenado entre esses diversos registros de representação que se encontra a “chave” para a aprendizagem em matemática.

A atividade de conversão pode ser analisada ao compararmos a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, e esse processo de substituição de uma expressão de uma rede semântica a uma expressão de outra rede semântica aparece, muitas vezes, em situações de aprendizagem, como um salto dificilmente transponível para os estudantes. É relativamente a essa substitutividade que duas relações devem ser consideradas: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica.

3.2 Congruência semântica e a atividade de conversão

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial se destaca da congruência semântica. Sobre este assunto, Duval escreve:

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão (DUVAL, 2012, p. 100).

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica de um sistema a outro sistema semiótico de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. Para isso, ela deve atender a três condições, de acordo com Duval (2004, p. 53):

> - Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
> - Univocidade "semântica" terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
> - A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

Porém, quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro pode não acorrer de forma imediata (DUVAL, 2004, p. 17).

Em outras palavras, poderíamos dizer, *grosso modo*, que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorre tão facilmente, diz-se que não há congruência semântica. Dessa forma, o problema da congruência ou da não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

$$Paulo\ tem\ 12\ figurinhas\ e\ perdeu\ 5\ em\ uma\ partida.$$

Neste exemplo, podemos destacar a identidade entre a frase e a expressão 12 – 5, onde o verbo “perdeu” pode ser facilmente associado à operação de subtração. Percebemos que a ordem de apresentação e quantidade dos dados numéricos na frase são conservados na mesma ordem da operação. Neste caso podemos dizer que existe a congruência semântica entre a frase e a expressão, e, também, pode ser notada a equivalência referencial entre a frase e a expressão aritmética.

Porém, na seguinte situação: “No início de uma tarde de inverno de uma cidade da Serra Catarinense, os termômetros registram três graus Celsius e, no início da noite, os termômetros registraram dois graus Celsius negativos. Qual a variação da temperatura nesse período?” Esta situação possui congruência semântica com a expressão (+3) + (–2). Entretanto, a situação e a expressão não são referencialmente equivalentes. A situação descrita acima não possui congruência semântica com a expressão (–2) – (+3), contudo a situação e a expressão aritmética são referencialmente equivalentes e conduzem a resolução correta do problema. “Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes” (DUVAL, 2012, p.100).

Moretti aponta para os reflexos da congruência semântica no ensino:

> Problemas discursivos que são semanticamente congruentes com a expressão matemática, mas que não são referencialmente equivalentes, levam a uma taxa muita baixa de sucesso; da mesma forma acontece com problemas que são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. A resolução de problemas que solicitam a passagem de um registro discursivo para um registro aritmético ou algébrico exige a equivalência referencial (MORETTI, 2012, p. 705).

Nessa direção, o professor deve ficar atento ao fato de que nem sempre a congruência semântica conduz a resultados bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos, e que, produzindo diferentes formulações para um mesmo problema, poderá, desta forma, contribuir para uma verdadeira compreensão matemática.

Dois fenômenos podem ser observados, no que se refere à natureza cognitiva, nas operações de conversão. Primeiramente, as variações de congruência semânticas, já expostas anteriormente, e a segunda diz respeito à heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada” (DUVAL, 2005, p. 20).

Segundo Duval (2005), no ensino da matemática, na maioria das vezes, um sentido de conversão é privilegiado, reforçando a falsa ideia de que o treinamento realizado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Esta é uma visão muito ingênua que se propaga nas situações de ensino da matemática. Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem perceber o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes. Por exemplo, a representação do cálculo de uma adição de números relativos e a sua representação através de deslocamentos na reta numérica, dificilmente um aluno, em nível de ensino fundamental e até mesmo médio, consegue estabelecer as relações entre o cálculo e a sua representação geométrica na reta numérica, e vice-versa.

Essa coordenação está longe de ser natural e observa-se, então, o que Duval chama de um "enclausuramento de registros de representação" (DUVAL, 1993, p. 52). O aluno "enxerga" o objeto matemático apenas por um sistema de representação. Essa ausência de coordenação não impede toda a compreensão, mas esta compreensão limitada, que se dá através do monorregistro, conduz um trabalho às cegas onde o aluno não tem um controle do sentido do que é feito. Duval (2012) afirma que mudanças na escrita permitem mostrar propriedades diferentes de um mesmo objeto matemático, porém conservando a mesma referência.

Os diferentes registros de representação se completam, dando-nos uma melhor compreensão do objeto matemático. A aprendizagem de um objeto matemático torna-se significativa quando o aluno, além de realizar os tratamentos em diferentes registros de representação, consegue, também, naturalmente converter um registro de representação em outro. Do ponto de vista cognitivo, de acordo com Duval (2005), a atividade de conversão é essencial na condução à compreensão.

Conseguir registrar as compreensões matemáticas e compreender o significado da escrita dentro da matemática são atividades essenciais no fazer matemático, possibilitando uma aprendizagem mais significativa. Para construir o saber, o aprendiz aplica os seus "[...] conhecimentos e modos de pensar ao objeto de estudo; age, observa, seleciona os aspectos que mais chamam a sua atenção, estabelece relações entre vários aspectos deste objeto e atribui significados a ele, chegando a uma interpretação própria" (MICOTTI, 1999, p. 158).

Duval (2005) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Uma vez que o principal papel da representação semiótica é que ela pode ser convertida em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, que podem levar a significações diferentes pelo sujeito, de um mesmo objeto matemático.

A articulação de diferentes registros, de acordo com Duval (2005), é uma condição necessária para a compreensão em matemática, no entanto, várias abordagens didáticas não levem isto em conta, porque o que chama a atenção nos processos de ensino são os tratamentos e não a conversão.

3.3 O papel da diversidade dos registros de representação para o funcionamento do pensamento humano

Segundo Duval (1993), a necessidade de uma diversidade de registros para o funcionamento do pensamento humano se funda sobre três aspectos: a economia de tratamento, a complementaridade dos registros e a conceitualização implica uma coordenação do registro de representação.

Sobre a economia de tratamento, Duval sublinha que “A existência de muitos registros permite mudar de registro, e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais poderosa” (1993, p. 49). Efetuar o cálculo numérico da expressão, por exemplo, (–2) + (+15) + (–27) + (+12) é mais econômico do que resolvê-lo através de deslocamentos sobre a reta numérica. São registros diferentes que apresentam um custo de tratamento completamente diferente.

Com relação à complementaridade de registros, Duval destaca que:

> [...] a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que o representamos. Esta seleção se faz em função de possibilidades e de embaraços semióticos do registro escolhido (DUVAL, 1993, p. 49).

Uma situação representada na linguagem natural não oferece as mesmas possibilidades de representações que um cálculo numérico ou que uma representação geométrica, como nos exemplos citados anteriormente. Isto porque, como nos aponta Duval (1993), toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e que as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático exprimem aspectos diferentes do mesmo conteúdo.

A complementaridade de registro é fundamental, pois nenhum dos registros é capaz de representar o objeto matemático em seu todo. Esse fato acaba exigindo que o professor promova um trabalho utilizando-se de várias representações do mesmo objeto matemático, visando tanto o desenvolvimento das capacidades globais do indivíduo, como a não confusão do objeto matemático com a sua representação.

Para Duval, a conceitualização implica uma coordenação do registro de representação. Assim, "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (DUVAL, 1993, p. 51).

Esta coordenação, de acordo com este autor, entre pelo menos dois registros de representação, está longe de ser natural, isto porque os alunos não conseguem perceber o mesmo objeto através de representações diferentes. A este fato Duval chama de um "enclausuramento de registros de representação" (DUVAL, 1993, p. 52).

No ensino da multiplicação de números relativos, geralmente nos livros didáticos, a operação é dada e se espera que o aluno apresente o resultado, dificilmente o caminho inverso é proposto. Desse modo, como o aluno poderá perceber que a frase "O produto de dois números inteiros é –6" e a expressão (–2) × (+3) representam o mesmo objeto matemático? Duval (1993) salienta que a ausência de uma coordenação não impede toda a compreensão, contudo esta compreensão limitada a um só registro faz com que os conhecimentos adquiridos se tornem pouco ou nada mobilizados.

Dentre as razões que podem explicar o fenômeno do enclausuramento de registros de representação, Duval (1993) associa os fenômenos da congruência semântica, haja vista que, quando há congruência semântica, a conversão é realizada quase que intuitivamente. No entanto, quando não há congruência semântica, a conversão é muito custosa e torna-se quase que como uma barreira intransponível. No ensino dos inteiros relativos, o fenômeno da não congruência semântica pode ser percebido em muitas situações, mas agora vamos tratar dos casos da não congruência semântica observados nas operações de adição, subtração e multiplicação desses números.

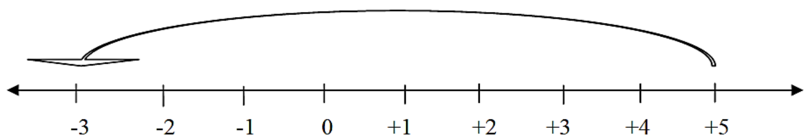
3.4 A congruência semântica e as operações de adição, subtração e multiplicação com os números inteiros relativos

Na atividade matemática, o ato de substituir uma fórmula ou um cálculo por uma outra expressão referencialmente equivalente é essencial. Você já pensou na possibilidade de resolver uma situação problema sem substituí-la por outra forma de registro permanecendo somente na linguagem natural? A substitutividade de expressões é uma propriedade que está ligada a estrutura de todo registro semiótico, ela é uma conduta muito importante e frequente nos procedimentos matemáticos.

Os procedimentos utilizados na atividade matemática implicam numa substitutividade tanto inter-registro quanto intrarregistro, ambos pautados numa mesma referência. “A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência e não congruência semântica são importantes” (DUVAL, 2012, p.113).

Para mostrar, por exemplo, que o deslocamento da reta:

Figura 3 - Representação geométrica da adição (+5) + (–8)



Fonte: Hillesheim (2013)

pode ser representado pela operação (+5) + (–8) exigiu uma substituição inter-registro, que não apresenta uma congruência semântica com a sua representação geométrica. A congruência semântica conduziria a expressão (+5) + (–3) que, por sua vez, se diferencia da equivalência referencial.

Nas operações com relativos é que os fenômenos de congruência semântica se destacam. Até a apresentação dos números inteiros os alunos concebiam, nos naturais, que a adição estava rigorosamente atrelada a ideia de juntar. A subtração corresponderia à operação de tirar, e a multiplicação como uma adição de parcelas iguais.

Contudo, mesmo que estes conceitos sejam ampliados nos relativos, os fenômenos da não congruência semântica insistem em aparecer. Seja a seguinte situação, por exemplo, “Um submarino encontra-se a –250 metros de profundidade. Depois de passados 30 minutos encontra-se a –180 metros. Esse submarino subiu ou desceu? Quantos metros?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão (–180) – (–250) o que resulta numa subida de 70 metros realizada pelo submarino. Entretanto, a expressão possui congruência semântica com a situação seria (–250) –

(–180) o que levaria ao resultado –70, que significa dizer, o submarino desceu 70 metros.

Vejamos outra situação: “A temperatura registrada durante a madrugada, em uma cidade, foi de –6º C e no decorrer do dia a temperatura aumentou 10º C. Qual foi a temperatura máxima registrada neste dia?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão (–6) + (+10) o que indica que a temperatura máxima foi de +4º.

No entanto, apesar da operação ser de adição foi preciso diminuir os valores absolutos dos números para chegar ao resultado correto. Do ponto de vista da congruência semântica, não seria de se estranhar que um aluno chegasse ao resultado +16, uma vez que a operação indicada é uma adição.

Contudo, de acordo com Caraça, nos relativos tem-se que:

> $a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$; $a - (-b) = a - (0 - b) = a + b - 0 = a + b$, isto é, somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo. No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama adição algébrica (CARAÇA, 1963, p. 101).

No caso dos relativos, a operação de adição pode representar situações em que há acréscimo ou decréscimo, ou até mesmo somas que dão resultado zero. Assim, “a adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Da mesma forma que a adição, a subtração também precisa ser ampliada. Para Teixeira,

> [...] a construção operatória da subtração supõe a assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que em uma dada reunião ou associação de elemento $(a + b = c)$, é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença $(c - b)$, ou seja, pela operação inversa (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

No entanto, neste trabalho, concordamos com Moretti (2012) e defendemos a ideia de que a operação de subtração deve ser apresentada aos alunos depois da operação de multiplicação, uma vez que neste ponto os alunos já conhecem as regras de sinais e poderão simplificar expressão do tipo "$a - (-b)$" e "$a - (+b)$". O resultado da expressão simplificada, aplicando a regra de sinais, conduziria ao que Caraça (1963) chama de adição algébrica, podendo ser tratada como deslocamentos sobre a reta dos inteiros, da mesma forma como acontece com a adição dos relativos.

Defendemos esse ponto de vista pois acreditamos que, ao apresentar a operação da subtração como a operação inversa, estaríamos conduzindo os alunos a efetuarem "manobras meio fantasiosas" para a realização dessa operação, e assim conduzindo o aluno ao questionamento: por que precisamos recorrer à operação inversa para efetuar a subtração, uma vez que a adição não exige essa transformação? A resposta a essa pergunta encontra-se justamente na regra de sinais. Para que a subtração nos inteiros seja efetuada, precisamos aplicar a regra de sinais a fim de obtermos uma adição algébrica. "Dada a natureza do sistema dos inteiros, a subtração nada mais é que a composição entre operadores, ou seja, uma adição" (TEIXEIRA, 1993, p. 65).

No caso da multiplicação dos relativos, a barreira encontrada para o seu ensino encontra-se na ideia de que a multiplicação, nos naturais, é concebida como uma soma de parcelas iguais. Nos inteiros, a multiplicação de um número positivo por outro positivo, já dominada nos naturais, e a multiplicação de um número positivo por um número negativo pode ser perfeitamente entendida como uma repetição de parcelas. Por exemplo, (+3) × (–5) pode ser concebido como três deslocamentos de (–5) que resulta em –15. Da mesma forma a multiplicação de dois números positivos, por exemplo, (+4) × (+2) pode ser entendido como quatro deslocamentos de (+2) que resulta em +8.

Todavia, esses exemplos se deparam com um obstáculo quando se tenta explicar a multiplicação de dois números negativos. Moretti (2012) nos apresenta o ensino da regra de sinais para o campo multiplicativo, obedecendo ao Teorema de Hankel atendendo a ideia do “princípio de extensão” proposto por Caraça, já citado anteriormente. De acordo com o princípio de extensão, devemos estender a propriedade distributiva dos positivos para o caso dos negativos.

Moretti (2012) nos apresenta um exemplo com o objetivo de explorar as distributividades à direita e à esquerda. Ele propõe um quadro com duas regras de sinais (Tabela 2) na qual serão aplicadas a expressão (1 – 3) × (–5 + 1).

“Observemos que na Regra 2 colocamos que **– × – = –** o que é diferente do que está definido na regra usual. Apliquemos estas duas regras à expressão (1 – 3) × (–5 + 1)” conforme a Tabela 3 a seguir que mostra que os resultados obtidos pela regra usual se mantêm, mesmo quando são resolvidos de modos diferentes.

Tabela 2 - A regra usual e outra regra de sinais

Regra usual	Regra 2
+ × + = +	+ × + = +
+ × − = −	+ × − = −
− × + = −	− × + = −
− × − = +	− × − = −

Fonte: Moretti (2012)

Tabela 3 - Comparação entre duas regras de sinais para a multiplicação

(1– 3) × (–5 + 1)	Cálculo com a Regra usual	Cálculo com a Regra 2
Eliminando ambos os parênteses	–2 × –4 = +8	–2 × –4 = – 8
Eliminando o parêntese à esquerda e usando a distributividade	–2 × (–5 + 1) = –2 × –5 –2 × (+1) = 10 – 2 = +8	–2 × (–5 + 1) = –2 × –5 –2 × (+1) = –10 –2 = –12
Eliminando o parêntese à direita e usando a distributividade	(1 – 3) × –4 = 1×–4 –3 × (–4) = –4 + 12 = +8	(1 – 3) × –4 = 1×–4 – 3 × (–4) = – 4 – 12 = –16

Fonte: Moretti (2012, p. 710)

O mesmo não acontece com a regra 2. Este tipo de situação poderá conduzir o aluno a fazer generalizações e abstrações. E, “[...] com base em abstrações de níveis mais complexos, é possível compreender que se Z é uma ampliação de N, o produto de Z tem que ser uma extensão de N, portanto distributivo com relação à soma, comutativo e associativo" (TEIXEIRA, 1993, p. 65). Esse processo conduz as justificativas algébricas formais, tal como demonstrou Hankel.

A congruência semântica pode ser percebida na multiplicação dos relativos principalmente quando estes números estão associados ao modelo comercial. Como uma dívida multiplicada por uma outra dívida pode se transformar num ganho? De acordo com Duval, o fenômeno da congruência semântica exerce um papel importante no interior de um mesmo registro, mais particularmente, no discurso natural. "Se a formulação da questão é congruente à formulação das informações dadas no enunciado do problema e se essa formulação é também congruente a uma formulação possível da resposta, esta resposta será mais rápida do que no caso da não-congruência" (DUVAL, 2012, p. 104).

Segundo Duval (2012), a não-congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático, uma vez que, a

> [...] atividade matemática pode ser bem sucedida se a sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulações ou de representações congruentes e, a mesma tarefa matemática dada como uma variante que implique uma manipulação de dados não congruentes, pode conduzir ao insucesso (DUVAL, 2012, p. 110).

Desse modo, a passagem da frase "o produto de dois números inteiros é + 10" para a expressão "(–2) × (–5)" exige uma manipulação de dados não congruentes e uma substitutividade inter-registro, passando da linguagem natural para a linguagem numérica. Esta passagem exige um custo cognitivo elevado, o que pode contribuir para um insucesso.

CAPÍTULO IV

CAMINHOS DA PESQUISA: APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Pautados nas reflexões teóricas apontadas no capítulo anterior e nas dificuldades encontradas na sala de aula, no que diz respeito ao processo de ensino aprendizagem dos números inteiros relativos, nós elaboramos e aplicamos uma sequência didática. Nessa sequência, os números inteiros relativos foram abordados pelo "princípio de extensão" proposto por Caraça (1963), opondo-se ao modelo comercial assim denominado por Glaeser (1981), levantando-se as situações de congruência semântica que se apresentam nesse processo e a sua repercussão no processo de ensino e aprendizagem. Nosso trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, cuja abordagem adotada foi o estudo de caso.

Os números inteiros relativos foram introduzidos por meio de atividades que visaram o ensino desses números, atendendo o "princípio de extensão", assim denominado por Caraça (1963). A operação de adição foi apresentada como deslocamentos na reta numérica; a multiplicação e a regra de sinais como a única que preserva a distributividade à esquerda e à direita; e, a subtração por meio da simplificação das expressões, utilizando a regra de sinais da multiplicação, tornando-a uma adição algébrica, podendo, desse modo, ser resolvida por deslocamentos na reta numérica. Na nossa sequência didática, buscamos apresentar os números negativos como uma ampliação dos naturais, opondo-se ao modelo comercial, no sentido de associar o número negativo a uma perda e o número positivo a um ganho.

No início da sequência didática foi difícil conciliar e atuar como professora titular da turma, pesquisadora e observadora simultaneamente, mas como o ambiente da sala de aula nos era familiar, em pouco tempo, estávamos cumprindo os três papéis com naturalidade. Encaminhávamos os trabalhos com a turma e, na medida em que íamos fazendo os atendimentos individuais e em grupo, atuando como professora, nosso lado pesquisador e observador entrava em cena. Apesar do grande desafio que foi atuar nesses três papéis, mesmo assim ainda pensávamos que esta opção seria mais adequada, do que correr o risco de termos um outro personagem atuando como professor.

A sequência didática foi dividida em três etapas que contemplou: as operações de adição, multiplicação e, por último, a subtração com números inteiros; sendo constituída por aulas expositivas dialogadas, trabalhos individuais e em grupo, pesquisa, exercícios de aprendizagem, troca de ideias entre alunos, entre alunos e professor a fim de institucionalizar a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros relativos. O registro das observações foi realizado por meio da observação cuidadosa descrita em relatórios, aplicação de testes ao final de cada bloco de ensino, e, as produções realizadas pelos alunos em classe ou extra classe.

4.1 Preparando o ambiente para a pesquisa

A nossa sequência didática ocorreu no ano letivo de 2012, em uma turma de 7º ano, composta por 39 alunos de uma escola da rede municipal de São José, onde fazemos parte do quadro de professores efetivos da escola desde 2004. Antes da aplicação da sequência didática prevista, apresentamos o conjunto dos números inteiros relativos. Essa apresentação aconteceu por intermédio de problematizações de situações em que esses números aparecem, como, por exemplo, na tabela de saldo de gols, nas temperaturas, no extrato bancário, no nível do mar.

Por meio da exploração dessas ideias, propusemos aos alunos que trouxessem recortes de jornais, de revistas e de livros, ocorrendo, assim, a formalização da ideia de número negativo. Então, pedimos para que os alunos desenhassem um termômetro, do jeito que eles imaginassem. O resultado foi apresentado à turma, e eles elegeram o desenho do termômetro mais completo, que coincidiu com o modelo tradicional de um termômetro, com temperaturas positivas acima do zero e negativas abaixo do zero.

Nesta atividade do desenho do termômetro, é interessante ressaltar que dos 36 desenhos, 4 desenhos apresentavam somente as temperaturas positivas e não se observou a presença do zero; 3 desenhos apresentavam as temperaturas positivas acima do zero e as negativas abaixo de zero, no entanto, o sinal da temperatura estava colocado depois do número; 5 desenhos apresentavam as temperaturas negativas abaixo de zero na ordem correta e as temperaturas positivas acima de zero na ordem inversa; 5

desenhos apresentavam as temperaturas positivas (sem o sinal +) acima de zero na ordem correta e as temperaturas abaixo de zero estavam na ordem certa, contudo, não foi registrado o sinal desses números, o que os torna positivos; 14 desenhos estavam com as temperaturas registradas corretamente; 2 desenhos apresentaram o termômetro digital; 2 desenhos apresentaram o termômetro com as temperaturas positivas e negativas uma ao lado da outra; 1 desenho apresentou o zero no centro do termômetro, mas os números acima e abaixo do zero eram todos positivos numa ordem completamente aleatória. Podemos perceber que dos 36 alunos que participaram da atividade, 14 já conseguiam dispor corretamente os números inteiros na sequência correta e os outros 22 encontravam-se em processo de construção e de assimilação desse novo campo numérico.

Partindo dessa atividade, propusemos aos alunos que este termômetro fosse agora desenhado na posição horizontal e, em conjunto com a turma, após vários questionamentos sobre como organizar esses números nessa reta, chegou-se a reta numérica dos inteiros relativos, atentando ao fato que este campo numérico surge da ampliação dos Naturais.

Chamou-nos atenção que, ao dispor os números na reta, os alunos destacaram que, primeiramente, deveríamos localizar o zero nesta reta, para então podermos colocar os positivos e os negativos adequadamente. Nesta fase, realizamos uma atividade entregando para cada aluno um número inteiro entre –20 à +20 e explicamos que cada um deveria colocar o número que recebeu no cordão que se encontrava esticado horizontalmente em frente ao quadro, prendendo-o com um grampo de roupa. E, acrescentamos dizendo que o cordão com os números estaria representando um termômetro na posição horizontal.

Primeiramente, a turma percebeu que precisava colocar o zero no cordão, para então poder colocar o +1 a direita do zero e o –1 a esquerda do zero e seguindo a sequência, os demais números. Quando o cordão estava completamente preenchido, levamos os alunos a pensarem na continuidade daqueles números dispostos no cordão, e que esses números constituem o conjunto dos Números Inteiros Relativos, representado por Z. Pedimos, então, para que os alunos pesquisassem o significado do símbolo Z para os números inteiros.

Na aula seguinte, a turma apresentou o resultado da pesquisa, apontando que o conjunto dos números inteiros é representado por Z, por ter se originado da palavra alemã *zahl,* que significa número ou algarismo. Nas aulas seguintes, foram realizados exercícios em duplas, em que foram propostas atividades de construção da reta numérica, localização de pontos na reta numérica, conceito de número positivo, negativo, neutro, conjunto numéricos (Naturais e Inteiros).

O conceito de oposto de um número inteiro foi trabalhado na reta numérica como sendo o número que se encontra a mesma distância do zero, porém no lado oposto. O módulo de um número inteiro foi apresentado como o da distância que esse número se encontra do zero. E a comparação de números inteiros foi explorada por meio de situações que envolviam temperaturas.

4.2 O ensino da operação de adição de números inteiros

O processo de ensino da adição de números inteiros foi conduzido, principalmente, usando o procedimento de deslocamento sobre a reta numérica dos inteiros relativos, não associando a ideia de um número positivo a um ganho, nem a ideia de um número negativo a uma perda. Demos destaque ao sinal predicativo e ao sinal operatório, a fim de que os alunos pudessem compreender suas diferenças. Mesmo não enfatizando a associação de um ganho a um número positivo e uma perda a um número negativo, estivemos propondo atividades que apresentaram esse tipo de situação para que os alunos pudessem ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos percebendo as diferenças entre sinal predicativo e sinal operatório. Os nossos objetivos a serem alcançados por meio da nossa sequência didática para a adição de números inteiros foram:

- compreender os processos usados para a adição de números inteiros na reta numérica;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos;
- diferenciar os sinais operatórios dos sinais predicativos.

A fim de atender aos nossos objetivos, este bloco de ensino foi composto por 8 aulas de 45 minutos, cujo planejamento encontra-se no apêndice A. A introdução da adição de números inteiros aconteceu por meio de uma problematização. Propusemos a construção do desenho de um prédio com um andar térreo, nove andares acima do térreo e dois andares abaixo do térreo, destinados às garagens.

A seguir, juntamente com a turma, cada um desses andares foi representado por um número inteiro. O térreo foi numerado por zero, os andares acima por números positivos e as garagens por números negativos. Assim, nós apresentávamos os deslocamentos nesse prédio e fazíamos o registro, na lousa, desses deslocamentos por meio de expressões numéricas e anotando o ponto de chegada como resultado dessa expressão, por exemplo: partindo do térreo, descer 2 andares e, em seguida, subir 1 andar, foi representado pela expressão: $0 + (-2) + (+1) = -1$.

Nessas expressões, destacávamos a diferença entre o sinal operatório (sinal que aparece fora dos parênteses indicando uma soma de deslocamentos) e o sinal predicativo (que é o sinal do número, indicando o deslocamento para cima como positivo e para baixo como negativo). Depois de vários deslocamentos neste prédio, propusemos que esse prédio fosse representado por uma reta numérica, e juntamente com a turma, ficou estabelecido que os deslocamentos, feitos sobre a reta, para a direita seriam positivos e os deslocamentos para a esquerda seriam negativos. Deste modo, juntamente com os alunos, efetuávamos a adição dos inteiros por meio de movimentos sobre a reta dos inteiros.

Para envolver ainda mais os alunos, organizamos a turma em quatro fileiras, deixando o corredor central da sala vazio. Os alunos dispostos nas fileiras estavam todos voltados para o centro da sala. No corredor, que foi organizado no centro da sala, colocamos um segmento da reta numérica de

7 metros de comprimento desenhada numa folha de papel pardo, e, juntamente com a turma, foi definido que os deslocamentos feitos à direita seriam considerados positivos e os deslocamentos feitos à esquerda como negativos.

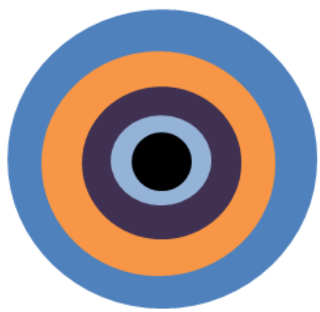
Então, explicamos que, em duplas, eles iriam fazer deslocamentos sobre essa reta. Um aluno escrevia no quadro uma adição que representaria o deslocamento que o colega realizaria sobre a reta colocada no chão da sala e, ao final, registraria o ponto de chegada como o resultado da adição. No início os alunos se mostraram um pouco receosos em participar da atividade, mas logo tomaram gosto e se prontificaram a participar. As primeiras duplas propuseram adições de no máximo 4 parcelas, enquanto as últimas duplas propuseram adições com mais de seis parcelas, favorecendo, desta forma, a um cálculo mais trabalhoso.

Durante a realização da atividade, a turma se mostrou participativa, embora a atividade tenha gerado um pouco de barulho, compreensível, pois eles estavam conversando sobre as possibilidades de cálculos que poderiam ser resolvidos sobre a reta.

Após a realização dessas atividades que exigiram uma certa movimentação, pensamos ser o momento de proporcionar momentos de concentração e sistematização do que havia sido trabalhado até o momento. Para isso, organizamos a turma em duplas para resolverem uma lista de atividades (contemplada no planejamento em anexo), que era composta por exercícios sobre a adição dos inteiros realizados por meio de deslocamentos sobre a reta numérica. Os alunos sentiram dificuldades para realizar as somas que apresentavam números com dois algarismos, pois isso os forçava, de certo modo, a fazer algumas generalizações, uma vez que a realização do deslocamento sobre a reta tornou-se trabalhoso.

Depois da realização e da correção da lista de exercícios, propusemos à turma o jogo do "tiro ao alvo"[21].

Figura 4 – Disco colorido do jogo "tiro ao alvo"



Fonte: Hillesheim (2013)

Para esta atividade, organizamos a turma em grupos e explicamos as regras do jogo, explicitando que cada participante do grupo teria o direito de jogar o milho cinco vezes sobre o disco colorido, montando, assim, a expressão numérica que determinaria a sua pontuação. Cada integrante do grupo deveria estar atento aos cálculos do colega, para que não ocorressem somas incorretas e falsas pontuações. Após a realização dos cálculos da primeira rodada, far-se-ia o mesmo procedimento para a segunda, e, ao

[21] Este jogo é similar ao jogo de dardos, no entanto fizemos uma adaptação. O disco colorido ao invés de ficar na parede fica sobre a carteira na posição horizontal. E, os dardos foram substituídos por milho de pipoca.

final, cada equipe somaria a sua pontuação geral. Em conjunto com a turma, decidimos os valores referentes a cada cor do alvo, conforme a tabela[22]:

Tabela 4 - Tabela das cores do jogo "tiro ao alvo"

Cores	**Pontos**
Azul escuro	–5
Laranja	–3
Roxo	+ 2
Azul claro	+ 5
Preto	+ 10
Arremesso fora	0

Fonte: Hillesheim (2013)

Na sequência, fizemos uma simulação, demonstrando para a turma uma jogada. Por exemplo: 1º arremesso: azul claro; 2º arremesso: roxo; 3º arremesso: preto; 4º arremesso: foi fora e 5º arremesso: azul escuro. Fomos registrando a adição no quadro, que, no final, ficou assim: (+5) + (+2) + (+10) + 0 + (–5) = +12. Logo, os pontos feitos, por nós, corresponderam a + 12.

Durante a realização do jogo, fomos prestando esclarecimentos e ajudando os grupos nos cálculos. Na resolução dos cálculos, alguns alunos sentiram a necessidade de fazer o desenho da reta numérica para auxiliá-los nas adições. Outros, porém, conseguiram efetuar os cálculos sem o auxílio

[22] Este disco mede aproximadamente 20 cm de diâmetro.

da reta numérica, efetuaram os cálculos mentalmente imaginando os deslocamentos sobre a reta. Podemos perceber, então, que alguns alunos já se encontravam no caminho das abstrações, enquanto outros ainda estavam em processo de construção.

Após a finalização do jogo, questionamos a turma sobre as estratégias que eles utilizaram para realizar os cálculos na execução do jogo. Alguns alunos responderam que se apoiaram nos deslocamentos sobre a reta numérica. Outros responderam que fizeram os cálculos de "cabeça", quer dizer, mentalmente. Nessa conversa, tentávamos extrair algumas generalizações a respeito da regra de sinais, no entanto, eles se mostravam ainda imaturos.

Então, sugerimos algumas adições de números inteiros que apresentavam sinais iguais e outras com sinais diferentes no quadro e perguntávamos: vocês conseguem perceber alguma característica em comum nesses cálculos? Eles responderam, baseados nos deslocamentos sobre a reta, por exemplo, $(+4) + (-7) = -3$, pois, partindo do mais quatro, faremos um deslocamento de 7 unidades para a esquerda e chegaremos no -3. Em nenhum momento, falaram que se os sinais fossem diferentes deveríamos diminuir e conservar o sinal do número maior em módulo. Tentávamos induzi-los a fazer generalizações, mas, naquele momento, não obtivemos êxito. Embora tivéssemos percebido que, quando os alunos falaram que efetuaram os cálculos "de cabeça", já apontava para um processo de generalizações, mesmo assim, ainda não foi possível externalizar esse pensamento.

Prosseguindo com a sequência didática, propusemos aos alunos a resolução de atividades escritas com exercícios que envolviam a adição de números inteiros nos mais variados contextos. Dentre as questões da segunda lista desse bloco, os alunos apresentaram dificuldades para resolver as seguintes questões.

A primeira questão foi referente à formação de uma sequência numérica, que dizia assim: “Observe as sequências de números: a) 12, 7, 2, –3, –8, –13, ... Como essa sequência foi formada? b) –7, –3, +1, +5, +9, +13, ... Como essa sequência foi formada?” Os alunos não conseguiram perceber, na sequência, o ordenamento pelo qual elas se formavam. Então, durante a resolução das atividades, atendemos ao chamado das duplas que solicitavam nossa ajuda na resolução da questão e problematizávamos ainda mais perguntando: nessa sequência, o que aconteceu para que, partindo do 12, o próximo número seja o 7? E partindo do 7, o próximo ser o 2? Nessa forma de fazer a pergunta, o aluno quase que instantaneamente respondia que foi diminuindo 5. Uma aluna respondeu, baseada nos deslocamentos sobre a reta, dizendo que “andou 5 para a esquerda”. Assim, nós fomos esclarecendo as dúvidas em relação ao item **a,** e os alunos consequentemente resolviam o item **b** sozinhos.

Outra questão em que os alunos apresentaram dificuldades para resolver foi a questão que apresentava os deslocamentos sobre a reta numérica e pedia para que eles escrevessem uma expressão numérica que representasse esses deslocamentos.

*Figura 5 - Item **a** da quarta questão da segunda lista de atividades*

Fonte: Hillesheim (2013)

Os alunos confundiam o número de chegada da seta com o deslocamento proposto. Assim, eles escreviam a expressão (–4) + (–1) + (–5) para representar os movimentos sobre a reta que deveria ser (–4) + (+3) + (–4) = –5.

Então, enquanto prestávamos assistência às duplas, chamamos a atenção dos alunos para que eles percebessem que aquele ponto de chegada representaria o resultado da operação e não o seu deslocamento. Relembramos a atividade realizada na sala, em que eles andaram sobre o segmento da reta numérica desenhada no chão, os números da expressão representavam os deslocamentos que deveriam ser realizados e o ponto de chegada representaria o resultado da operação.

Desse modo prosseguimos indagando os grupos: Onde é o ponto de partida? O deslocamento foi para a direita ou para a esquerda? Quantas casas? Depois, deslocou-se novamente? Para onde? Quantas casas? Assim, o grupo, a medida que respondia as nossas perguntas, registrava a expressão e, no final, anotava o resultado.

Nessa mesma lista de atividades, propusemos também expressões numéricas, envolvendo números inteiros com dois ou mais algarismos. E quando realizamos a correção dessas expressões, promovemos um debate em que os alunos expuseram a sua maneira de resolver os cálculos. Então, alguns alunos colocaram que se basearam nos deslocamentos sobre a reta para efetuar os cálculos. Outros disseram que fizeram o cálculo mentalmente, imaginando os deslocamentos.

Neste momento, aproveitamos algumas adições da lista para destacar a adição de números com sinais iguais, e a adição de números com sinais diferentes. E, partindo dessas adições e seus respectivos resultados, perguntamos à classe: o que acontece quando eu adiciono números com sinais diferentes? Por exemplo: (–10) + (+15) = +5 e (–15) + (+13) = -2 Eu somo ou diminuo esses números? E o resultado, por que, às vezes, é positivo e, às vezes, é negativo? E quando eu adiciono números com sinais iguais, por exemplo: (–1) + (–3) = –4 e (+4) + (+2) = +6, o que acontece? Eu somo ou diminuo esses números? E o sinal, o que acontece com eles?

Foi interessante que, partindo dessa problemática, os alunos começaram a perceber algumas regularidades, dizendo que quando os sinais são diferentes os valores dos números são subtraídos. E ao serem indagados a respeito dos sinais, argumentaram dizendo que seria o do número maior, pois o deslocamento estaria sobre aquele lado da reta. Mas nós retrucávamos perguntando: o (–15) é maior que o (+13)? Então, eles colocaram que deveria desconsiderar o sinal e complementamos com a ideia de módulo.

Com relação à adição de números com sinais iguais, prontamente perceberam que ocorreu uma soma dos valores permanecendo o mesmo sinal, argumentando que se estão do lado negativo e continuam para a esquerda chegarão num valor negativo. Desse modo, nesse momento, já foi possível fazer algumas generalizações, mesmo que em fase inicial. Já percebemos que alguns alunos não precisavam mais desenhar a reta numérica e fazer deslocamentos para realizarem uma adição de números relativos, outros, porém, ainda se encontravam em processo de abstração.

Após a realização desse debate e da correção das atividades, propusemos a última lista de atividades desse bloco. Essa lista era constituída por exercícios que envolviam deslocamentos sobre a reta, situações problemas, envolvendo temperaturas e pirâmides. Contudo, os alunos apresentaram dificuldades especialmente em duas questões. Uma delas pedia para completar o quadrado mágico de modo que as somas nas linhas verticais, horizontais e diagonais fossem todas iguais.

Figura 6 - Quadro mágico proposto aos alunos

2		–2
	–1	
		–4

Fonte: Hillesheim (2013)

Os alunos sentiram dificuldades para encontrar o número que completaria a linha, coluna ou diagonal que completasse a soma requerida. Então, fomos prestando assistência aos grupos mostrando e explicando por meio da reta numérica, que, por exemplo, se a soma deveria ser –3, e em uma das colunas a soma dos dois números era –6, perguntávamos ao grupo: Qual deverá ser o deslocamento sobre a reta para que se chegue no –3?

Com isso, os alunos perceberam que precisavam fazer um deslocamento de 3 casas para a direita, o que resultaria no +3, número este que completaria a coluna indicada. Assim, o grupo foi compreendendo e seguiu completando o quadrado mágico.

A outra questão dizia respeito ao contexto de movimento bancário, vejamos:

Dona Judite foi ao banco e verificou a movimentação de sua conta corrente:

Tabela 5 - Tabela apresentada aos alunos durante a atividade

Data	**Descrição**	**Valor**	**Saldo**
21/04	Depósito	+R$ 120,00	+R$ 165,00
23/04	Cheque debitado	– R$ 87,00	
02/05	Saque	– R$ 65,00	
05/05	Depósito	+R$ 415,00	
12/05	Saque	– R$ 390,00	

Fonte: Hillesheim (2013)

De acordo com a tabela, responda: a) Qual era o saldo ao final do dia 23/04? b) Qual era o saldo anterior ao depósito de R$ 120,00? c) Em quais dias o saldo ficou negativo? O que isso representa? d) Em quais dias o saldo ficou positivo? O que isso representa?

As dúvidas levantadas pelos grupos estavam diretamente relacionadas aos termos contábeis que foram apresentados na questão, por exemplo, depósito, cheque debitado, saldo, saque. Estes termos se mostraram desconhecidos pelo grupo, o que acabou criando barreiras para a realização da questão. Na medida que os grupos foram esclarecendo as suas dúvidas referentes aos termos, foram conseguindo realizar as operações necessárias para resolverem a questão.

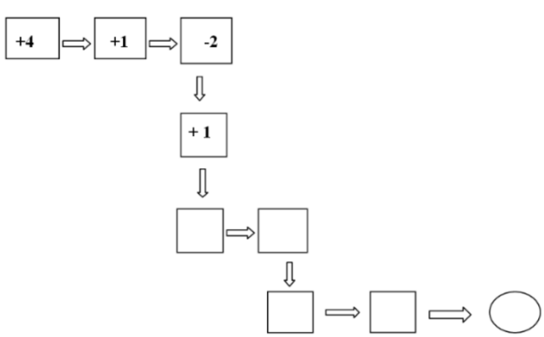
4.3 Aplicação do teste da adição e análise dos resultados

Ao final das atividades propostas no bloco da adição, aplicamos um teste com a turma a fim de analisar o nível de compreensão desses alunos. Realizamos, também, uma análise das situações de ensino em que a ideia de congruência semântica se destaca e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. Esse teste encontra-se no apêndice B.

Para a realização deste teste, os alunos utilizaram o tempo de uma aula (45 minutos), estando presentes 36 dos 39 alunos que compõem a turma. O teste foi realizado individualmente. A primeira questão do teste solicitava que eles completassem a trilha conforme a indicação das setas:

⇒ adicione –3 (horizontal)

⇓ adicione + 3 (vertical)

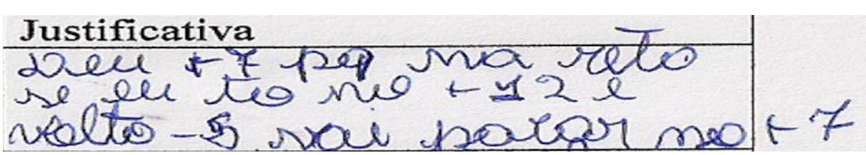


Em que número você chegou? ______

De todos os alunos pesquisados apenas um deixou a questão em branco. Quinze alunos completaram a trilha corretamente, seis acertaram a questão parcialmente, e, quatorze alunos erraram completamente os cálculos. Podemos observar que esta questão exigia, além do domínio da adição de números inteiros, uma atenção especial para a posição da seta, que ora adicionava (+3) e ora adicionava (–3). Isto pode ter influenciado nos resultados, pois os alunos teriam que atender a dois comandos ao mesmo tempo; prestar atenção na posição da seta e realizar a operação.

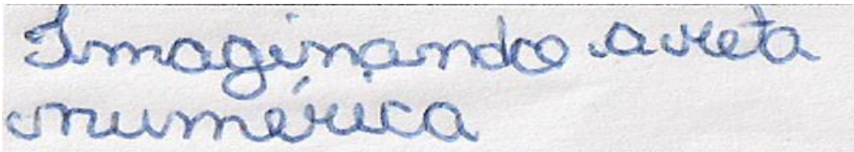
Na segunda questão, foi solicitado que os alunos resolvessem quatro adições com números inteiros: duas adições de números com sinais iguais e duas adições de números inteiros com sinais diferentes. Em seguida, deveriam elaborar justificativas para as resoluções. A primeira adição +12 + (–5) foi respondida de modo correto por 28 alunos, incorretamente por 7 e, ainda, 1 aluno deixou em branco. Entre as justificativas apresentadas pelos alunos que resolveram de forma correta este item, identificamos quatro categorias. Nas justificativas mais frequentes, 19 alunos apontaram a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica. Vejamos alguns exemplos:

Figura 7 - Justificativa apresentada pelo aluno 03



Fonte: Hillesheim (2013)

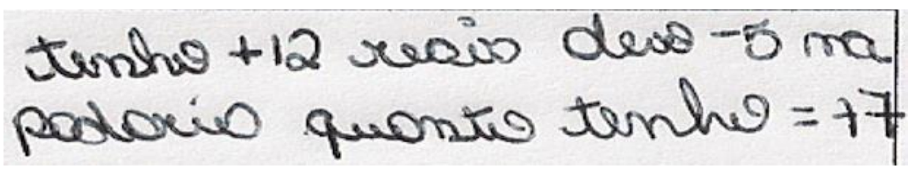
Figura 8 - Justificativa apresentada pelo aluno 18



Fonte: Hillesheim (2013)

Um grupo de seis alunos apresentou como justificativa o fato de ter somado/diminuído os números. Dois alunos apresentaram justificativas aleatórias. Um aluno apresentou como justificativa o modelo comercial (ganho/ perda), vejamos:

Figura 9 - Justificativa apresentada pelo aluno 07



Fonte: Hillesheim (2013)

É importante destacar que este aluno (07) já cursou esta mesma série no ano letivo de 2011. Mesmo que este tipo de situação não tenha sido evidenciado na sequência didática deste ano, o aluno ainda recorre a situações de ensino vivenciadas em anos anteriores. Neste sentido, podemos destacar as palavras de Coquin-Viennot (1985) quando ela nos coloca que este modelo comercial que é utilizado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas "[...] se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma *concepção* dos relativos" (1985, p. 184, grifos do autor).

Parece que esta ideia ficou tão fortemente consolidada, que nem mesmo a sequência didática, apresentando a adição dos relativos por meio de movimentos na reta numérica, foi capaz de abalá-la. Foi interessante perceber que entre as respostas incorretas, dois alunos utilizaram como justificativa os deslocamentos sobre a reta numérica.

A segunda adição desta questão correspondia à soma de dois números positivos: (+8) + (+9). Do total dos sujeitos, 26 resolveram de modo correto; 7 erraram e 3 deixaram em branco. Podemos observar que, apesar de ser uma adição de dois números positivos, a quantidade de acertos diminuiu referente à adição de um número positivo e um número negativo, elencados anteriormente.

Com relação às justificativas apresentadas pelos 26 alunos que acertaram, 16 citaram movimentos sobre a reta numérica; 6 elencaram a ação de somar/diminuir; 3 apresentaram justificativas aleatórias e um utilizou o modelo comercial, todos seguindo o padrão como os apresentados no primeiro item da questão.

O terceiro item apresentou a soma de um número negativo com um número positivo (–17) + (+3) que foi respondida corretamente por 26 alunos; 9 alunos erraram e 1 deixou em branco. Nas justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram a questão, as categorias elencadas anteriormente se mantêm, dentre elas 19 alunos citaram os deslocamentos sobre a reta numérica; 2 utilizaram o modelo comercial; 2 empregaram a ideia de somar/subtrair; 2 empregaram uma justificativa aleatória e 1 não justificou. Merece ser mencionado que os dois alunos que utilizaram o modelo comercial como justificativa já cursaram esta série no ano anterior.

O último item correspondia a uma soma de dois números negativos (–8) + (– 5). Do total de alunos que participaram deste teste, 27 resolveram corretamente; 7 erraram e 2 não responderam. No conjunto das justificativas apresentadas para as respostas corretas, foram percebidas 3 justificativas que alegaram ter somado os números, pois eles apresentavam sinais iguais. Neste caso, notamos um pequeno grupo começando a fazer generalizações.

> Na medida em que se abstrai das diferentes associações de números positivos e negativos, um invariante, expresso na ideia de operador aditivo que produz transformações de acordo com os elementos em jogo, é possível chegar às generalizações expressas nas regras da adição: sinais iguais somam-se e conservam-se os sinais; sinais diferentes ou opostos subtraem-se e conserva-se o sinal do de módulo maior (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Acreditamos que estas generalizações, tenham sido construídas por meio da descoberta das relações de regularidades apresentadas nos vários deslocamentos realizados sobre a reta numérica.

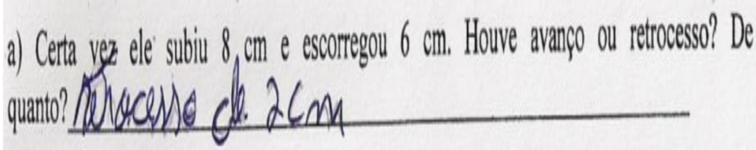
As demais justificativas seguiram dentro do padrão das apresentadas nos itens anteriores, 17 se pautaram nos deslocamentos sobre a reta numérica; 2 utilizaram o modelo comercial; 3 empregaram a ideia de somar/diminuir não referenciando os sinais; 1baseou-se num modelo aleatório e 1 não apresentou justificativa.

Foi possível perceber que, em nenhum dos casos apresentados, nos quatro itens desta questão, os alunos fizeram alusão a uma regra de sinais pré-estabelecida, mesmo aquelas justificativas das respostas incorretas. Acreditamos ter contribuído de alguma forma para a compreensão da operação da adição de números inteiros de maneira mais significativa, ao optar pelo ensino dos números inteiros não enfatizando o modelo comercial e conduzindo o processo de ensino atendendo ao “princípio de extensão”.

Na terceira questão deste teste, retirada do livro didático de matemática do Projeto Araribá (2006, p. 28), foi solicitado aos alunos que eles lessem e respondessem as questões: “Um caracol pretendia chegar ao topo de um muro; no entanto, subia alguns centímetros e escorregava outros”. O primeiro item da questão, apresentava a seguinte situação: “Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto?”.

Esta questão foi respondida corretamente por 15 alunos, os quais alegaram que houve um avanço de dois centímetros; parcialmente correta por 10 alunos e 11 não responderam corretamente. Dentre os alunos que acertaram parcialmente, pode ser percebido uma certa confusão entre os termos avanço e retrocesso. Vejamos um exemplo:

Figura 10 - Resposta apresentada pelo aluno 35

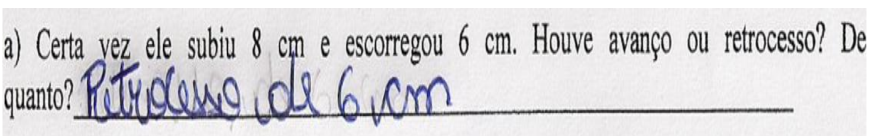

a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Retrocesso de 2cm

Fonte: Hillesheim (2013)

Este aluno, apesar de ter realizado corretamente os deslocamentos necessários, chegando ao resultado +2, associou esta posição final a um retrocesso e não a um avanço como indica o sinal de positivo.

Dentre os alunos que não responderam corretamente, podemos perceber que eles se prenderam ao fato do caracol ter escorregado seis, não levando em consideração o primeiro deslocamento de subir oito centímetros. Vejamos um caso:

Figura 11 - Resposta apresentada pelo aluno 01

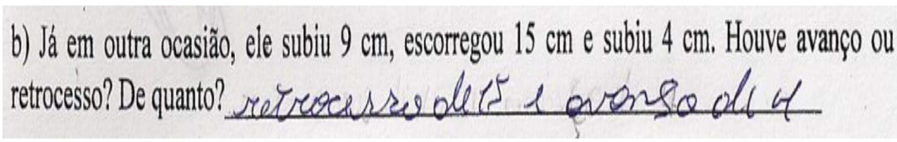

a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Retrocesso de 6 cm

Fonte: Hillesheim (2013)

O segundo item desta questão apresentava a seguinte situação: “Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto?” Neste item, encontramos 10 respostas corretas, identificando que houve um retrocesso de –2; parcialmente correta 10; 15 alunos não responderam corretamente e 1 não respondeu a questão.

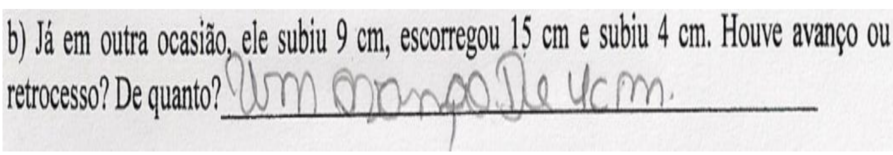
Dentre as respostas parcialmente corretas, podemos destacar dois grupos de respostas: retrocesso de 2, sem colocar o sinal, o que o torna um número positivo; e avanço de –2, que indica que houve uma movimentação correta sobre a reta numérica, porém nota-se uma confusão entre os termos avanço e retrocesso. Em meio às respostas incorretas, podemos notar que os alunos ficaram presos às movimentações realizadas pelo caracol, indicando que houve avanços e retrocessos e não consideraram o balanço final das movimentações realizadas por ele. Vejamos alguns exemplos:

Figura 12 - Resposta apresentada pelo aluno 12


b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? retrocesso de 15 e avanço de 4

Fonte: Hillesheim (2013)

Figura 13 - Resposta apresentada pelo aluno 10


b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Um avanço de 4cm.

Fonte: Hillesheim (2013)

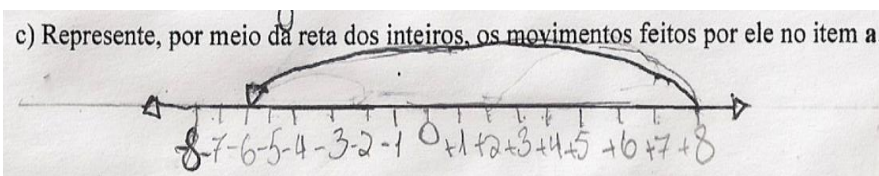
Em ambos os casos apresentados, os alunos não consideraram o conjunto de movimentos realizados pelo caracol, apenas consideraram alguns desses movimentos. E, de um modo geral, classificaram estes movimentos adequadamente, conforme aparece na questão, associando os termos escorregou a um retrocesso e subir a um avanço.

No terceiro tópico da questão três, foi solicitado aos alunos que eles representassem, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos pelo caracol no primeiro item. Dentre os desenhos apresentados como respostas a esta alternativa, 24 estavam corretos; 1 parcialmente correto e 11 estavam incorretos.

A resposta parcialmente correta apresentou os movimentos adequadamente, no entanto os números positivos estavam à esquerda do zero e os negativos a direita do zero. Nas respostas incorretas, percebemos dois tipos de situação: o desenho da reta foi realizado com sucesso, no entanto não houve o registro das movimentações.

Outra situação está fortemente ligada a não congruência semântica entre os movimentos realizados pelo caracol e o seu registro na reta numérica, observemos um exemplo:

Figura 14 - Resposta apresentada pelo aluno 24

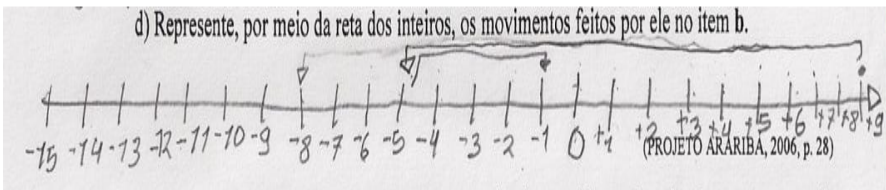


Fonte: Hillesheim (2013)

No momento em que o aluno faz a conversão da linguagem natural, “subiu 8 cm e escorregou 6” para o registro geométrico, a congruência semântica conduz a associação do (+8) ao (–6). No entanto, a equivalência referencial indica que, partindo do +8, devemos voltar seis. Neste caso, de acordo com Duval (1993), a congruência semântica destaca-se da equivalência referencial e o sucesso da resposta, para esta questão, depende da equivalência referencial.

No último item desta questão, os alunos deveriam representar, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos pelo caracol no segundo item da questão. Do total dos alunos que participaram do teste, 23 fizeram de forma correta; 10 incorretos e 3 deixaram a questão em branco. A maior parte dos desenhos incorretos, neste item, estavam relacionados a contagem inadequada dos movimentos, vejamos:

Figura 15 - Resposta apresentada pelo aluno 31



Fonte: Hillesheim (2013)

Neste desenho, assim como em outros que foram apresentados neste item, o aluno contou 15 marcações e não 15 intervalos, o que fez com que ele chegasse no –5 e não no –6. No entanto, o próximo movimento foi realizado com sucesso, porém como este dependia do movimento anterior, chegou-se ao resultado final incorreto. Nos outros casos de respostas incorretas, repetiu-se o caso do item anterior, os alunos fizeram o desenho da reta numérica corretamente, contudo não houve anotação dos deslocamentos.

Na quarta questão deste teste, foi solicitado que os alunos resolvessem a seguinte situação problema: “Pedro está jogando bolinhas de gude. Na primeira partida perde seis. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, ele nem perdeu, nem ganhou. O que aconteceu na segunda partida?” Como resposta a esta situação, 18 alunos obtiveram êxito; 2 disseram que “ele parou de jogar”, 4 alunos apontaram que “ele perdeu bolinhas", 4 deixaram a questão em branco e 8 alunos apresentaram respostas variadas como, por exemplo: " não ganhou nem perdeu bolinhas", "continua com a mesma percentagem de bolinhas", "–6 + (0) = 0", entre outras.

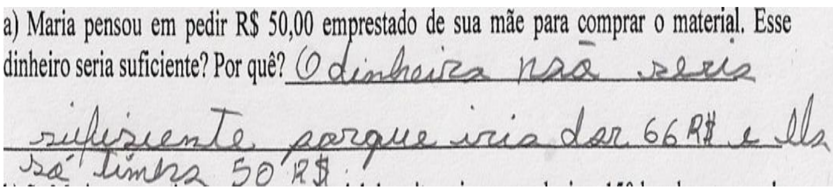
Nesta questão, podemos perceber como o fato da não congruência semântica entre a expressão discursiva e a escrita da expressão matemática correspondente contribui para um elevado índice de insucessos, confirmando-se as previsões de Duval (2012). Se a mesma situação fosse apresentada de uma outra forma, na qual houvesse uma congruência semântica certamente o índice de acertos teria sido maior.

Na última questão do teste foi proposta a seguinte situação: Maria resolveu fazer bombons para vender. Foi então a uma doçaria para fazer o levantamento do custo da matéria prima.

Material	**Gastos**
Leite condensado	R$ 18,00
Chocolate	R$ 27,00
Formas para bombons	R$ 6,00
Embalagens	R$ 8,00

No primeiro item da questão foi colocado que: "Maria pensou em pedir R$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê?" Este item foi respondido corretamente por 21 alunos, eles justificaram que o dinheiro não seria suficiente, pois os gastos seriam de 59 reais, ultrapassando o valor previsto. Do total de alunos, 11 responderam parcialmente correto, 3 não responderam corretamente e 1 não respondeu a questão. Dos 11 alunos que acertaram parcialmente, todos alegaram que o dinheiro não seria suficiente, no entanto ao apresentarem suas justificativas percebemos que eles erraram nos cálculos, vejamos:

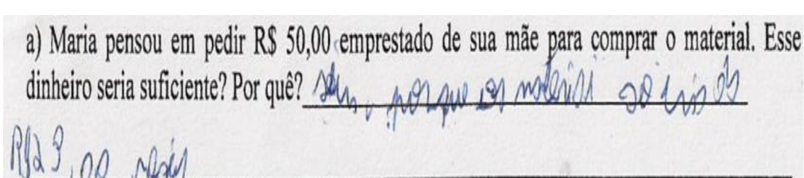
Figura 16 - Resposta apresentada pelo aluno 31


a) Maria pensou em pedir R$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? O dinheiro não seria sufisiente porque iria dar 66 R$ e ela só tinha 50 R$.

Fonte: Hillesheim (2013)

Nesta resposta, assim como nas demais que acertaram parcialmente, houve um equívoco nos cálculos aritméticos. Apesar de o cálculo poder ser realizado, utilizando-se somente números naturais, mesmo assim ainda houve uma elevada taxa de erros. Dentre os alunos que não responderam corretamente, todos justificaram que o dinheiro seria suficiente para cobrir as despesas, vejamos:

Figura 17 - Resposta apresentada pelo aluno 06


a) Maria pensou em pedir R$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? Sim, porque os materiais só dão R$ 29,00 reais

Fonte: Hillesheim (2013)

Neste caso, assim como nos casos que acertaram parcialmente, houve problemas na resolução da adição dos valores da matéria prima.

No segundo item desta questão, foi proposta a seguinte situação: “Se Maria conseguisse comprar o material descrito acima e produzisse 150 bombons com ele. Se ela vendesse cada bombom por R$ 2,00, teria lucro ou prejuízo? De quanto?” Do total dos alunos que realizaram o teste, apenas 6 responderam corretamente a questão; 16 acertaram parcialmente; 8 erraram e 6 não responderam.

Dentre os 16 que acertaram parcialmente, todos responderam que teria lucro, mas os valores do lucro variavam a cada resposta. Alguns consideraram lucro de 300 reais, sem descontar o valor dos produtos comprados. Outros descontaram as despesas, porém esses cálculos não foram realizados corretamente. Entre os alunos que erraram este item, encontramos justificativas de que haveria prejuízo, apresentando diferentes valores a cada resposta.

Analisando de uma maneira geral os resultados apresentados por este teste podemos observar que os números relativos não são mais tratados como números naturais. Por meio da questão 3 do teste, percebemos que os alunos já unificaram a reta numérica, e, a adição de números relativos, quando apresentada através de uma expressão numérica, como na questão 2, obteve um índice maior de acertos do que quando apresentada por meio de situações problemas, como na questão três.

4.4 O ensino da operação de multiplicação de números inteiros e a regra de sinais

A multiplicação de números inteiros relativos foi apresentada baseando-nos no Teorema de Hankel, que tem por base a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos. Estivemos também pautados no resultado apresentado na pesquisa realizada por Pontes (2010), apresentando a multiplicação dos números inteiros numa abordagem aritmética vislumbrando possíveis generalizações. Para a realização e aplicação das atividades deste bloco de ensino, utilizou-se sete aulas de 45 minutos. O planejamento detalhado deste bloco de ensino encontra-se no apêndice C.

Os objetivos que direcionaram o nosso trabalho no processo de ensino e aprendizagem da multiplicação dos números inteiros foram:

- compreender os processos usados para a multiplicação de números inteiros aplicando a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a multiplicação desses números;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição e multiplicação de números inteiros.

A apresentação da operação da multiplicação dos relativos e da regra de sinais aconteceu por meio de problematizações com o intermédio de um debate caloroso. Iniciamos a aula resolvendo no quadro algumas adições com números inteiros relativos por meio de deslocamentos sobre a reta dos números inteiros relativos. A seguir, sugerimos algumas multiplicações. Primeiramente, uma multiplicação de dois números positivos e perguntávamos para a classe: como essa multiplicação pode ser representada por meio de uma adição?

No caso, a multiplicação era (+2) × (+3) e a turma, com a nossa ajuda, sugeriu que fosse (+3) + (+3) que resultaria +6, pois teríamos, partindo do zero, fazendo dois deslocamentos de +3. Logo, nós apontávamos que, então, o resultado de (+2) × (+3) também seria +6. Depois, colocamos no quadro uma multiplicação de um número positivo por um número negativo, a saber, (+2) × (–3) e questionamos a turma sobre como poderíamos representar aquela multiplicação através de uma adição. A turma prontamente sugeriu que fosse (–3) + (–3) que resultaria e –6, pois teríamos, partindo do zero, dois deslocamentos de –3 sobre a reta. E colocávamos, então, que o resultado de (+2) × (–3), também, deveria ser –6.

A seguir, escrevemos no quadro uma multiplicação de um número negativo por um número positivo: (–2) × (+4) e perguntamos para a turma de que modo poderíamos representar essa multiplicação por meio de uma adição. Num primeiro momento, os alunos disseram que poderia ser (+4) + (+4), então interferimos, colocando que é o número positivo que determina a quantidade de vezes que a parcela precisa ser somada.

Nesse caso, poderíamos escrever a multiplicação (–2) × (+4) como (+ 4) × (–2), usando a propriedade comutativa da multiplicação. Assim, a turma logo apontou que a multiplicação poderia ser representada por (–2) + (–2) +

$(-2) + (-2)$ que teria -8 como resultado. Então, ressaltávamos que $(+4) \times (-2)$, também, seria -8. A seguir, escrevemos na lousa as seguintes multiplicações:

$$
\begin{array}{rccc}
+3 & \times & (+4) & = \\
+2 & \times & (+4) & = \\
+1 & \times & (+4) & = \\
0 & \times & (+4) & = \\
-1 & \times & (+4) & = \\
-2 & \times & (+4) & = \\
-3 & \times & (+4) & =
\end{array}
$$

E, juntamente, com a turma, fomos resolvendo as multiplicações. A turma foi dizendo os resultados naturalmente. Depois, pedimos para que os alunos analisassem os números dispostos na primeira coluna, e perguntamos: Como estão dispostos estes números? A classe respondeu que eles estavam em ordem decrescente. Depois, pedimos para que eles analisassem os números da segunda coluna. A turma colocou que os números eram os mesmos. E, finalmente, pedimos para que eles analisassem os números dispostos na terceira coluna. Prontamente, a turma percebeu que os números formavam uma sequência que estava diminuindo sempre 4.

Então, nós e a classe, fizemos uma sistematização a respeito da multiplicação de dois números positivos e de um número positivo por um número negativo. Obtivemos êxito, pois a turma logo conclui que na multiplicação de dois números positivos o resultado seria positivo, e na multiplicação de um número positivo por um número negativo, o resultado seria negativo. Nesse momento, lançamos a pergunta: E qual será o resultado da multiplicação de dois números negativos? A turma fica em silêncio. Nada de argumentações. Depois surgem algumas sugestões: positivo, outro disse negativo. Mas, nada que fosse uma posição firme. Então, nós anotamos na lousa as seguintes multiplicações:

$$\begin{array}{llll}
+3 & \times & (-4) & = \\
+2 & \times & (-4) & = \\
+1 & \times & (-4) & = \\
0 & \times & (-4) & = \\
-1 & \times & (-4) & = \\
-2 & \times & (-4) & = \\
-3 & \times & (-4) & =
\end{array}$$

A turma foi respondendo na medida que foi sendo indagada, quando chegou à multiplicação (–1) × (–4), fizemos uma pausa para analisarmos a sequência que estava sendo formada pelos resultados. E a turma percebeu que estava aumentado 4 unidades. Então, perguntamos para a classe: para continuar essa sequência, qual deverá ser o resultado da multiplicação (–1) × (–4)? Eles responderam dizendo que deveria ser o +4, pois o número anterior foi o zero, e, zero + 4 é +4.

E, assim, concluíram as multiplicações. Mas, problematizamos um pouco mais, propomos a seguinte multiplicação: (1 – 4) × (–5 + 1) e perguntamos a turma como poderia ser resolvida esta expressão. Um aluno levantou a possibilidade de resolver os parênteses, chegando à multiplicação (–3) × (–4) que deveria, pela sequência anterior, resultar em +12. Depois, sugerimos que fosse resolvido apenas os dois primeiros parênteses, chegando à multiplicação (–3) × (–5 + 1) que resultaria em –3 × (–5) –3 × (+1) = +15 – 3 = +12. Por último, sugerimos que fosse resolvido apenas os dois últimos parênteses, chegando à multiplicação (1 – 4) × (–4) que resultaria em 1× (–4) – 4 × (–4) = –4 + 16 = +12.

Neste momento, interrogamos a turma sobre os resultados encontrados para as três maneiras diferentes de resolvermos a multiplicação, e os alunos colocaram que de todas as formas o resultado permaneceu sempre o mesmo. Mas, nós continuamos problematizando: Mas, se adotarmos que – × – = –, será que isso também vai acontecer?

Então, fizemos no quadro, ao lado do cálculo realizado anteriormente, os mesmos cálculos, porém adotando – × – = –. Primeiramente, resolvendo os parênteses, chegando a (–3) × (–4) = –12. A seguir, resolvendo o primeiro parênteses, chegando a (–3) × (–5 + 1) = –3 × (–5) –3 × (+1) = –15 – 3 = –18. Para finalizar, resolvendo o segundo parênteses, temos (1 – 4) × (–4) = 1 × (–4) – 4 × (–4) = –4 –16 = –20. Concluídos os cálculos, perguntamos a classe a respeito dos resultados encontrados nas três maneiras diferentes de resolver a multiplicação adotando a possibilidade de – × – = –, e a turma observou que os resultados foram todos diferentes, logo concluíram que essa regra não pode ser válida. Finalizando o debate, nós, juntamente com a turma, fizemos a sistematização da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros relativos e registramos as seguintes conclusões:

- Na multiplicação de dois números positivos, o resultado deverá ser positivo.
- Na multiplicação de um número positivo por um número negativo, o resultado deverá ser negativo.
- Na multiplicação de dois números negativos, o resultado deverá ser positivo.

Por meio da nossa observação, cuidadosa, das reações apresentadas pelos alunos, podemos perceber que, embora os alunos tenham compreendido a necessidade de $- \times -$ ser $+$, por meio do que foi feito aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, a receptividade dos alunos não foi muito boa, devido ao seu teor genérico e abstrato. A receptividade dos alunos à apresentação da regra de sinais por meio da construção da sequência foi melhor recebida, percebida e compreendida pelos alunos. Talvez, se tivéssemos abordado a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição de uma outra forma, a reação dos alunos tivesse sido diferente, mas isso já é tema para futuras pesquisas.

Prosseguindo com a sequência didática, propusemos à turma um jogo de dominó, envolvendo a multiplicação de inteiros. Organizamos a turma em grupos com 4 alunos, e explicamos que as regras do jogo obedeceriam às regras do dominó tradicional, porém as pedras eram compostas por perguntas e respostas que deveriam ser colocadas numa sequência unindo-se a cada pergunta a pedra correspondente a sua resposta, ou a cada resposta uma questão que a representasse. Durante o desenvolvimento do jogo, percebemos que muitos alunos apresentavam dificuldades para multiplicar os números, não com relação aos sinais, mas com relação à multiplicação de seus valores, por exemplo, $7 \times 8 = 72$; ou ainda, $(-1) \times (-1) = +2$. Outra situação identificada foi a confusão das operações de multiplicação com a adição de números inteiros relativos, por exemplo, um aluno ao resolver $(-3) \times (+2)$, deu como resposta -1. No entanto, na maioria dos grupos, essas dificuldades foram sendo superadas com a ajuda e a interferência dos próprios colegas da equipe. Após a realização do jogo, organizamos os alunos em grupos com três alunos e passamos para a resolução de atividades escritas.

Na resolução da primeira lista de atividades desse bloco, os alunos apresentaram dificuldades para resolver a questão que pedia para completar uma sequência e responder de acordo com essa sequência. A questão dizia assim: Complete a sequência apresentada na tabela e responda:

3 × 12 = 36
2 × 12 = 24
1 × 12 = 12
0 × 12 =
–1 × 12 =
× =
× =

a) O que acontece com o 1º fator quando se lê as contas de cima para baixo?

b) O que acontece com o 2º fator quando se lê as contas de cima para baixo?

c) O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo?

d) Com base no que você observou: Um número negativo vezes um número positivo dá um produto...

Os grupos precisaram do nosso auxílio, pois esta questão exigia um certo grau de generalização. Com a nossa interferência para ajudar a interpretar e completar a tabela, os alunos foram compreendendo e conseguiram responder a questão.

Outra dúvida levantada pelos grupos, nesta primeira lista de exercícios, foi com relação à questão em que apareciam algumas multiplicações e adições na forma de expressões numéricas. Os alunos apresentaram dificuldades, porque não sabiam qual das operações deveria ser resolvida primeiro, mas com a nossa interferência foram conseguindo desenvolver os cálculos, mesmo que, muitas vezes, não estivessem completamente corretos.

Concluída a primeira lista de atividades desse bloco, passamos para a resolução da segunda lista de exercícios elaborada para a pesquisa. Esta lista de atividades foi resolvida em sala de aula com a nossa assistência. Os alunos foram organizados em duplas e, durante a resolução das atividades, alguns alunos apresentaram dificuldades para entender a expressão “não nulo” que apareceu na 1ª questão. Nessa questão, foi solicitado que se marcasse (V) para a alternativa verdadeira ou (F) para a alternativa falsa nas proposições a seguir:

a) (   ) O produto de um número inteiro por zero dá o próprio número.

b) (   ) Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo.

c) (   ) Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo.

Ao serem esclarecidos sobre o tema, seguiram resolvendo a questão. Os grupos, também, sentiram necessidade de se certificarem a respeito da 3ª questão desta lista. Nessa questão, foi solicitado que eles montassem uma operação que atendesse aos critérios estabelecidos. Assim, eles precisavam montar uma operação para os seguintes critérios: a soma de dois números inteiros é –7; e o produto de dois números inteiros é +10.

Os alunos nos perguntavam se era para fazer uma conta que apresentasse aquele resultado. E, na nossa interação com o grupo, é que se percebeu a dificuldade que eles apresentavam com relação aos termos soma e produto. Os alunos sabiam que precisavam montar uma operação, porém não sabiam qual. Com a nossa intervenção nos grupos, foi possível esclarecer as dúvidas.

Após a resolução da lista de atividades, organizamos a classe numa circunferência, mas, como a turma era muito numerosa, foi preciso fazer uma semicircunferência dentro da circunferência. Em seguida, deu-se início a discussão e correção da segunda lista de atividades desse bloco.

Conduzimos a discussão, começando pela primeira questão, fazendo a leitura de cada uma das proposições com intervalo para as devidas reflexões. Ao lermos a primeira proposição (o produto de um número inteiro por zero dá o próprio número), alguns alunos disseram que a proposição era falsa, outros, porém disseram ser verdadeira. Ao serem indagados sobre a justificativa, um dos alunos citou como exemplo que 0 + (–2) dá –2.

Neste momento, interferimos perguntando sobre o significado da expressão produto. Um aluno respondeu dizendo que era o resultado. Então, perguntamos novamente: Resultado do quê? Ele respondeu: “De uma conta”. Retrucamos: Que conta? Outro aluno respondeu: “De vezes”. Então, voltamos ao exemplo dado e perguntamos: Este pode ser um exemplo de produto? A classe respondeu que não, pois representava uma soma. Um aluno trouxe outro exemplo 0 × (+3) dá 0, por isso a alternativa é falsa. A turma concordou com o exemplo, citaram outros e concluíram que a proposição era falsa.

Com relação à segunda proposição (Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo), os alunos não manifestaram sua opinião, então, indagamos: O que quer dizer não nulo? Um aluno respondeu: Nulo é zero, então não nulo deve ser que não pode ser o zero. E perguntamos à classe: Quais os exemplos de números não nulos? Eles responderam: 2, 3, 5, ... (somente números positivos).

Então, sentimos a necessidade de complementar com: –3, –4, +3, –2, etc. Depois, prosseguimos voltando a proposição e perguntando para a turma: Que tipo de exemplos podemos dar para essa proposição? Um aluno citou (–3) × (+3) dá –9, outro aluno citou (+5) × (–5) dá –25. Então, perguntamos: Que sinal apresentou o resultado de cada multiplicação. E a classe respondeu: Negativo. Um aluno se pronunciou dizendo que ele não havia pensado nos números, mas apenas nos sinais, que como eles eram opostos um era positivo e o outro negativo, assim a multiplicação seria sempre negativo, por isso a proposição era verdadeira. A turma, após essa problematização, também chegou à mesma conclusão.

Na terceira proposição (Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo), os alunos já se manifestaram com exemplos, dizendo que a proposição era verdadeira, pois (–5) × (–5) dá + 25 e (+4) × (+4) dá + 16.

Com relação a terceira questão dessa lista de atividades, em que foi solicitado montar uma operação de acordo com os critérios, no primeiro critério (A soma de dois números inteiros é – 7), os alunos citaram vários exemplos como: (–2) + (–5), (–10) + (+3), entre outros, mas teve um exemplo que merece ser destacado (+3) + (–4). Escrevemos, na lousa, todos os exemplos citados, inclusive este, e na medida que realizávamos a escrita, indagávamos a turma sobre o exemplo colocado. E quando colocamos o exemplo (+3) + (–4), um aluno disse que este não servia, pois o resultado seria -1, obtendo o respaldo da turma. No segundo critério (O produto de dois números inteiros é + 10), a turma esgotou todas as possibilidades de multiplicações rapidamente. Referente a essa lista de atividades, pensamos ser estas as considerações mais importantes, pois envolveram reflexões que visaram generalizações.

Prosseguindo com a nossa sequência didática, propomos a resolução da última lista de atividades desse bloco. Para a resolução desta lista, os alunos foram organizados em duplas. Durante a resolução das atividades, percebemos que os alunos apresentavam dificuldades para resolverem a questão dois desta lista. Nesta questão, foi solicitado a eles que escrevessem uma operação para cada situação, utilizando os números da tabela.

–4	3	–2	–8	+7	0

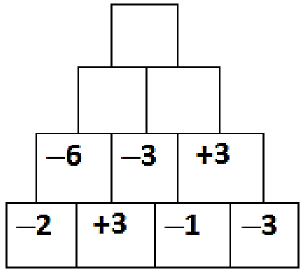
a) Uma multiplicação de dois fatores com resultado igual a +32.

b) Uma adição de três parcelas com resultado igual a –7.

c) Uma multiplicação de três fatores com o resultado igual a 24.

As dúvidas apresentadas pelos alunos diziam respeito aos termos fatores e parcelas expressos na questão. Com a nossa interferência no esclarecimento desses termos, rapidamente as duplas apresentavam uma operação que atendesse aos critérios propostos pela questão.

Na questão três desta lista de atividades, os alunos apresentaram dificuldades para descobrir a operação que servia de base para completar a pirâmide. Eles precisavam descobrir o “segredo” da pirâmide e determinar o número inteiro que deve estar no alto dessa pirâmide.



Na resolução deste exercício foi percebida uma confusão entre as operações de adição e multiplicação com números inteiros, que foi sendo elucidada com a nossa intervenção nos grupos.

Outra situação que deve ser discutida diz respeito à quinta questão desta lista de atividades. Nesta questão, foi solicitado aos alunos que completassem a tabela:

a	**b**	**a × b**
–2	–3	
	+4	–20
–4		+32
+12	+8	

Dois fatores podem ter contribuído para que os alunos apresentassem dificuldades nesta questão. Um deles pode ser o fato de apresentar os números por meio de letras. Outro pode ser o fato de ora pedir o produto dos números e ora pedir um dos fatores da multiplicação que resultaria num determinado produto. Esse vai e vem na resolução da operação de multiplicação gerou um certo desconforto nos alunos, ocasionado pela necessidade da utilização da operação inversa da multiplicação.

4.5 Aplicação do teste da multiplicação e análise dos resultados

Finalizando as atividades propostas nesse bloco de ensino, aplicamos um teste diagnóstico que se encontra no apêndice D. Esse teste foi realizado individualmente em sala de aula, por 37 dos 39 alunos que compõem a turma, durante uma aula de 45 minutos. A primeira questão solicitava aos alunos que resolvessem as operações, num total de 7 itens, e justificassem a sua resposta. O detalhamento dos índices referentes a esta questão está exposto na tabela a seguir:

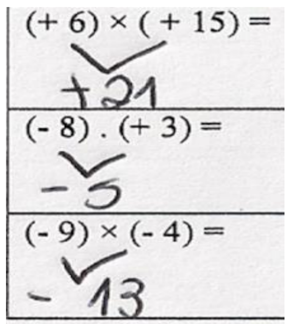
Tabela 6 - Resultados referentes a questão 1 do teste da multiplicação

Operação	Nº de acertos	Nº de erros	Em branco
+ 15 + (+ 6)	30	07	00
(–32) + (–16)	15	21	01
–12 + (+13)	19	16	02
(+20) + (–7)	17	18	02
(+6) × (+15)	16	18	03
(–8) . (+3)	21	13	03
(–9) × (–4)	21	13	03

Fonte: Hillesheim (2013)

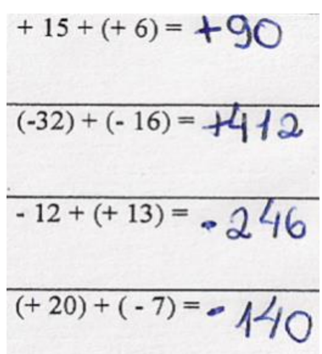
A quantidade de alunos que responderam a segunda operação [(–32) + (–16)] errada chamou-nos atenção. Ao analisarmos estas respostas, observamos que entre as 21 respostas incorretas, 11 delas apresentaram + 48 como resultado. Ou seja, houve uma confusão entre a regra de sinais da adição e da multiplicação de números relativos. Com relação ao conjunto geral de respostas incorretas desta questão, percebemos que ocorreu uma inversão entre as operações de adição e multiplicação, vejamos:

Figura 18 - Resposta apresentada pelo aluno 01



Fonte: Hillesheim (2013)

Figura 19 - Resposta apresentada pelo aluno 17



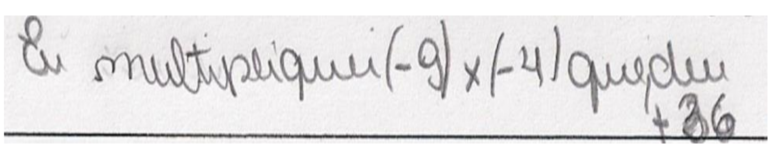
Fonte: Hillesheim (2013)

Podemos observar na primeira figura que o aluno 01 trocou a operação de multiplicação por adição, efetuando os cálculos corretamente, se fosse uma adição. Na segunda figura, ocorreu o contrário, o aluno 17 realizou a operação de multiplicação no lugar da adição, multiplicando corretamente, inclusive aplicando a regra se sinais adequadamente.

Com relação às respostas incorretas para a multiplicação (+6) × (+15), observamos que das 18 respostas erradas, 7 delas realizaram a multiplicação dos sinais corretamente, no entanto erraram ao efetuar a multiplicação, obtendo como resposta, por exemplo, +80, +60, etc. Apenas 2 das 18 respostas incorretas apresentaram –90 como resultado desta operação, ou seja, efetuaram o cálculo adequadamente, porém erraram na aplicação da regra de sinais.

As justificativas apresentadas para cada um dos itens desta questão não estavam tão elaboradas como no teste da adição, os alunos foram mais sucintos em suas respostas. Porém, notamos que nas justificativas para a adição de números relativos prevaleceu a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica; nas justificativas apresentadas nas multiplicações, a predominância foi a de respostas curtas, como:

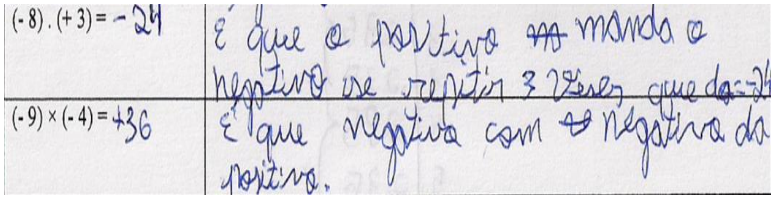
Figura 20 - Justificativa apresentada pelo aluno 14


Eu multipliquei (-9) x (-4) que deu +36

Fonte: Hillesheim (2013)

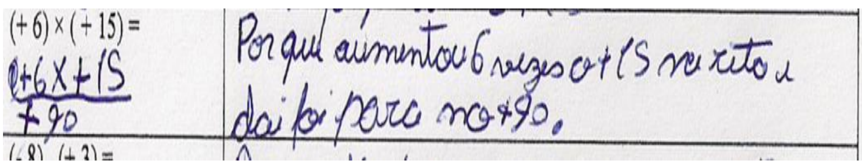
Desse modo, não podemos fazer uma análise mais apurada. No entanto, encontramos também algumas justificativas mais elaboradas, vejamos:

Figura 21 - Justificativa apresentada pelo aluno 26



Fonte: Hillesheim (2013)

Figura 22 - Justificativa apresentada pelo aluno 11

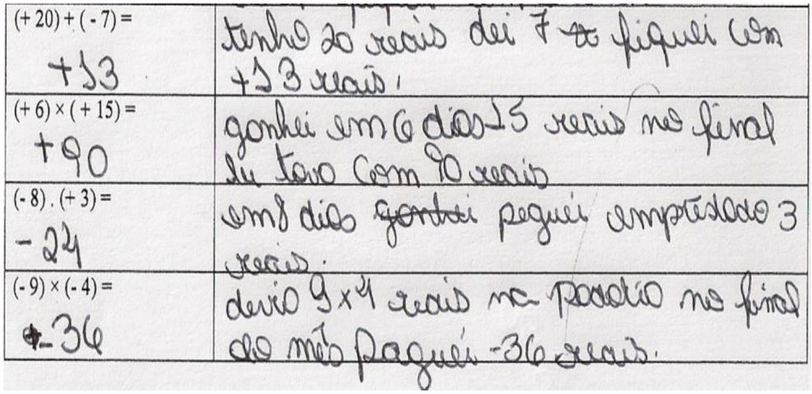


Fonte: Hillesheim (2013)

Nestes exemplos, assim como em outros, observamos que a regra sinais emerge em meio às regularidades que foram propostas durante a sequência didática. Notamos que a regra de sinais não está completamente consolidada, mesmo porque os alunos ainda se encontram num processo de construção, o que exige um certo tempo para que possa se estabelecer plenamente.

Uma justificativa interessante merece destaque neste contexto, uma vez que ela é um forte exemplo de como o modelo comercial traz prejuízos ao ensino da multiplicação dos relativos:

Figura 23 - Justificativa apresentada pelo aluno 07



(+ 20) + (- 7) = +13	tenho 20 reais dei 7 ~~r~~ fiquei com +13 reais.
(+ 6) × (+ 15) = +90	ganhei em 6 dias 15 reais no final eu tava com 90 reais
(- 8) . (+ 3) = -24	em 8 dias ~~ganhei~~ peguei emprestado 3 reais.
(- 9) × (- 4) = -36	devio 9x4 reais no padrão no final do mês paguei -36 reais.

Fonte: Hillesheim (2013)

Esse aluno obteve sucesso em todos os seus cálculos e justificativas até o momento que se deparou com uma multiplicação entre dois números negativos. Então, o modelo comercial que se adequava tão bem até o momento, deixou de funcionar e o conduziu a um resultado errado. Neste contexto, Coquin-Viennot nos aponta que:

> Essa concepção (na base concreta) não pode funcionar numa estrutura multiplicativa; é necessário revertê-la a fim de prosseguir a aprendizagem, mas ela está bem estabelecida, bem cômoda para resolver os problemas aditivos encontrados até aqui, que ela, nela mesmo, constitui um verdadeiro obstáculo para a instalação do nível IV (1985, p. 184).

O nível IV que Coquin-Viennot menciona é justamente a concepção da multiplicação de números relativos. Em outras palavras, o modelo concreto que funciona muito bem para o ensino das propriedades aditivas constitui-se como um entrave para o ensino das propriedades multiplicativas desses números.

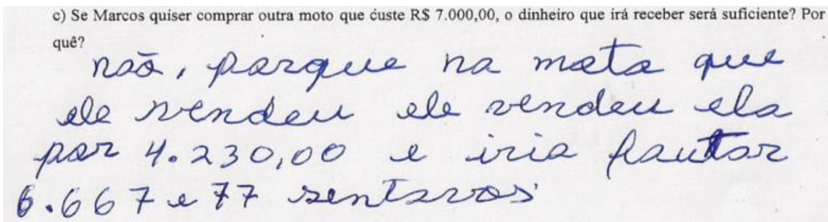
A segunda questão desse teste apresentava a seguinte situação: “Marcos vendeu sua moto, mas irá receber o dinheiro em 18 parcelas de R$ 235,00.” Nestas condições, a questão solicitava, na primeira alternativa, que os alunos, utilizando números inteiros, escrevessem uma expressão numérica que representasse essa situação. Dos 37 alunos que participaram desse teste, temos os seguintes resultados: 24 escreveram a expressão numérica corretamente; 5 não conseguiram escrever a expressão corretamente e 8 deixaram a questão em branco. Neste caso, observamos que a necessidade de mudar de registro, passando da linguagem natural para a escrita numérica pode ter contribuído para os índices de respostas erradas e em branco.

No segundo item desta questão, os alunos deveriam escrever o valor total que Marcos iria receber. Como resposta a esta alternativa encontramos 12 respostas corretas; 21 incorretas e 4 em branco. Em relação ao item anterior, podemos perceber que, apesar de 24 alunos terem montado a expressão numérica corretamente, apenas12 alunos efetuaram o cálculo corretamente. Os 21 alunos que erraram a resposta apresentaram dificuldades para efetuar a multiplicação entre os números 18 e 235.

No último item dessa questão, foi proposta a seguinte situação: “Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê?” Dentre os alunos que participaram do teste, encontramos 10 respostas corretas; 20 parcialmente corretas; 3

respostas incorretas e 4 em branco. Com relação às respostas parcialmente corretas, todos alegaram que o dinheiro não seria suficiente, porém ao justificarem a sua resposta apresentaram valores não correspondentes com a situação, por exemplo:

Figura 24 - Resposta apresentada pelo aluno 31


c) Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê?

não, porque na moto que ele vendeu ele vendeu ela por 4.230,00 e iria faltar 6.667 e 77 sentavos

Fonte: Hillesheim (2013)

Os alunos sabiam que o dinheiro não seria suficiente, no entanto erraram ao efetuar os cálculos.

Na terceira questão desse teste, os alunos deveriam colocar no lugar de cada letra um número inteiro que atendesse às operações propostas pelo quadro:

–7	**.**	**–4**	**=**	**A**
=				**+**
+29				**–10**
+				**=**
C	**=**	**–2**	**×**	**B**

O detalhamento dos índices de acertos referentes aos valores encontrados para as letras deste quadro está exposto na tabela a seguir:

Tabela 7 - Resultados referentes a questão 3 do teste da multiplicação

Incógnita	**Nº de acertos**	**Nº de erros**	**Em branco**
A	30	03	04
B	11	20	06
C	08	23	06

Fonte: Hillesheim (2013)

Com base nesta tabela, podemos observar que 81,08% dos alunos que participaram do teste obtiveram sucesso na multiplicação (–7) × (–4) que corresponde ao valor da incógnita **A,** ou seja, a multiplicação de dois números negativos parece estar consolidada. Entretanto, apesar do alto índice de acertos para o valor da incógnita **A,** o percentual de acertos para a incógnita **B,** que correspondia a operação (+28) + (–10), caiu para 29,72%, e, como o valor de C dependia de B ou da igualdade (–7) = +29 + C, este índice de acertos, consequentemente, também apresentou uma queda. Inferimos que estes baixos índices de acertos referentes as incógnitas **B** e **C** decorrem da forma de como a questão foi apresentada, uma vez que, em oportunidades anteriores, os mesmos alunos já demonstraram não terem dificuldades para efetuarem uma adição e nem uma multiplicação entre um número positivo e um número negativo.

Nesse teste, a quarta questão foi retirada do livro didático Matemática do Projeto Araribá, que propôs a seguinte situação:

> Sérgio e Paulo estavam brincando com um jogo que funcionava segundo as regras: a cada resposta certa, o jogador anda 3 casas para frente; a cada resposta errada, anda 2 casas para trás. Ganharia o jogo quem primeiro alcançasse a 25ª casa. Os dois jogadores responderam a um total de 20 questões cada um. Sérgio acertou 12 e Paulo acertou 13 (2006, p. 72).

No primeiro item da questão foi perguntado: “Quantas questões cada um deles errou?” Dentre os alunos que realizaram o teste, 18 responderam corretamente, 17 erroneamente e 2 não responderam. Acreditamos que os alunos que não responderam corretamente este item tiveram dificuldades na leitura e na interpretação da questão, pois grande parte das respostas incorretas apresentou como resposta “Sérgio 12 e Paulo 13” justamente os valores que estavam no problema, representando a quantidade de acertos de cada um dos personagens.

O segundo item desta questão perguntava: “Quantas casas Sérgio andou para a frente? E para trás?” No conjunto das respostas, obtivemos 12 respostas corretas, 5 parcialmente corretas, 15 incorretas e 5 não foram respondidas. Nas respostas parcialmente corretas, todos acertaram o número de casas que Sérgio andou para a frente, porém erraram o número de casas que ele andou para trás. Novamente, neste item se apresenta a dificuldade que os alunos têm na interpretação textual, e podemos perceber, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2005), como passagem de um registro a outro é um processo custoso. Aqui as dificuldades que se apresentam não se encontram na ordem do tratamento dos registros, mas, sim, na conversão.

Como terceiro item desta questão foi perguntado: "Quantas casas Paulo andou para frente? E para trás?" Dos alunos pesquisados, 11acertaram a questão, 6 acertaram parcialmente, 15 erraram e 5 não responderam. Nas respostas parcialmente corretas, os alunos acertaram somente um dos casos, ou para a frente ou para trás. Nesta situação, podemos observar que os índices de acertos e de erros estão muito próximos com os apresentados no item anterior, acreditamos que os problemas também sejam da mesma natureza.

Dando continuidade ao trabalho, no quarto item da questão foi solicitado aos alunos que eles dissessem a casa em que cada um dos jogadores parou. No conjunto das respostas, obtivemos 5 corretas, 4 parcialmente corretas, 16 incorretas e 12 em branco. Com relação às respostas parcialmente corretas, os alunos acertaram somente uma das alternativas, acertaram a posição da casa de Paulo ou a de Sérgio.

No último item desta questão, foi perguntado: "Quem ganhou o jogo?" O resultado foi surpreendente, 31 alunos acertaram, 1errou e 5 não responderam. Os resultados obtidos nesta questão não estão de acordo com o esperado, uma vez que, durante todo o desenvolvimento da questão, o índice de acertos foi bem inferior ao de erros e que o resultado final dependia desses acertos.

Como os alunos conseguiram acertar o vencedor sem ter realizado os deslocamentos solicitados no desenvolvimento do jogo? Então, estamos frente a um desafio. Será que os alunos contaram com a sorte, ou eles realizaram superficialmente os deslocamentos? Mesmo sem conseguir respostas imediatas a estes questionamentos, de um modo geral, percebemos por meio desta questão o quão difícil é para os estudantes mobilizarem os seus conhecimentos e realizarem a conversão. Como nos aponta Duval (2005, p. 21), a mudança de registros muitas vezes é uma barreira intransponível para a maioria dos alunos, no entanto a coordenação de diferentes registros exerce um papel fundamental nos processos de compreensão.

Por fim, foi solicitado aos alunos, na última questão deste teste, que eles descobrissem o erro cometido por Jonas na resolução da expressão:

$$(-3)\ .\ (+19 + 6) + (+3).\ (-1) + 4 =$$

$$(-3)\ .\ (+25) + (-3) + 4 =$$

$$-75 - 3 + 4 = 74$$

A seguir, foi perguntado, no primeiro item da questão: “Qual foi o erro que Jonas cometeu ao resolver a expressão?” Apenas 3, dos 37 alunos participantes, perceberam que foi no sinal do 74; 11 alunos não responderam a questão; 9 alunos mencionaram que o erro estava no resultado final, porém apresentaram outros valores diferentes e não –74; 6 alunos justificaram que houve erro nos sinais, contudo não especificaram o caso; 8 alunos apresentaram respostas diversas como: “Ele trocou o sinal era +3 ele colocou –3” (aluno 08) ou ainda, “O erro foi que (–1) + 4 é igual a +3 não a mais 4” (aluno 26). Podemos observar, por meio dos resultados apresentados para este item, que os alunos ainda se encontram num processo de entendimento dos procedimentos necessários para realizar o cálculo de uma expressão numérica. Talvez nesse exercício esse fato tenha tomado lugar de destaque devido ao grau de complexidade da questão.

No segundo tópico da questão foi perguntado: “Será que este tipo de erro é comum? Por quê?” Dentre o conjunto de respostas apresentadas para esta pergunta, encontramos 11 em branco; 4 disseram que sim, mas não justificaram; 5 disseram que sim e que o erro é comum por falta de atenção, ou por fazer muito rápido não realizando as devidas correções; 9 afirmaram ser comum porque confundem os sinais dependendo da operação; 7 apresentaram respostas aleatórias não condizentes com a pergunta e apenas 1 resposta afirmou não ser comum este tipo de erro.

É possível observar, por meio das respostas apresentadas neste item, que os alunos estão conscientes das dificuldades que se estabelecem na realização do cálculo que envolve números relativos. Mesmo não tendo apontado corretamente o erro cometido por Jonas no desenvolvimento dos cálculos, eles foram capazes de perceber os riscos pertinentes na execução deste cálculo.

Finalizando a questão, foi solicitado aos alunos para que eles resolvessem a expressão que fora resolvida por Jonas. No conjunto total das respostas, obtivemos um número expressivo de respostas em branco: 21 alunos não resolveram a expressão; 7 alunos resolveram a expressão parcialmente correta; 6 erraram e apenas 3 alunos resolveram os cálculos corretamente.

Com base nestes resultados, percebemos que os alunos se encontram num processo de apropriação das propriedades multiplicativas dos relativos. O domínio das operações dos números inteiros ainda deve levar um certo tempo, os alunos, de acordo com os elementos da transposição didática, precisam de tempo para superar os seus bloqueios e atingir uma posição de equilíbrio frente às novas situações de aprendizagem.

Analisando os dados obtidos por meio da aplicação deste teste percebemos que os alunos não tratam os relativos como se fossem naturais, prova disso pode ser encontrada nas respostas apresentadas na primeira questão, tanto nos resultados dos cálculos, quanto nas justificativas. Observamos que os números negativos não são tratados separadamente dos positivos. Isto porque os alunos efetuam a adição algébrica dos inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta e isso acaba contribuindo para que eles percebam o conjunto dos inteiros como uma união entre positivos, negativos e o zero.

Por meio das análises das respostas obtidas nas questões 1, 3 e 4 deste teste, notamos que a reta numérica foi unificada, e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos. A predominância dos deslocamentos sobre a reta, nas justificativas apresentadas na primeira questão, convidam-nos a pensar que a compreensão das propriedades aditivas por meio de deslocamentos sobre a reta contribuiu para o estabelecimento deste nível de compreensão. O conjunto de respostas obtidas nas questões 1, 2, 3 e 4 mostrou que a multiplicação de números inteiros obteve um número considerável de sucessos. Entretanto, os alunos ainda não assimilaram completamente as propriedades multiplicativas dos relativos.

4.6 O ensino da operação de subtração de números inteiros

Uma vez que os alunos já se apropriaram da regra de sinais para a multiplicação desses números, puderam fazer uso dessa regra nas simplificações das expressões numéricas e efetuarem os cálculos adequadamente. Optamos por apresentar a operação de subtração após a multiplicação, pois acreditamos que essa atitude poderá facilitar a aprendizagem desta operação, uma vez que expressões do tipo (+5) – (–3) precisam ser simplificadas e escritas como +5 + 3 para serem operadas. Os livros didáticos apresentam como alternativa de resolução desta operação a estratégia de se escrever a subtração como a soma do oposto, por isso apresentam a operação de subtração antes da multiplicação de números inteiros. No entanto, a nosso ver, essa postura poderá trazer dificuldades para o ensino dessa operação por apresentar-se de forma arbitrária.

Nesse bloco de ensino, os objetivos que direcionaram o nosso trabalho foram:

- compreender a lógica dos processos usados para a subtração de números inteiros, aplicando a regra de sinais da multiplicação para simplificar as expressões;
- resolver situações-problema, envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a subtração de números inteiros relativos;

- resolver expressões numéricas, envolvendo adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

Para atingir essa meta, este bloco de ensino foi composto por 4 aulas de 45 minutos, cujo planejamento detalhado encontra-se no apêndice E. A introdução da operação da subtração de números inteiros foi conduzida por meio de problematizações. Propusemos à classe a seguinte situação: "Vamos supor uma noite de inverno numa cidade da Serra Catarinense, os termômetros registraram +4° C no início da noite. Durante a madrugada da mesma noite, os termômetros chegaram a registrar –2° C. Qual foi a variação da temperatura nesta noite?" Alguns alunos prontamente responderam 6 graus. E indagamos: Subiu 6 graus ou diminuiu 6 graus? Eles responderam que havia diminuído. A seguir, problematizamos um pouco mais, perguntando a turma como poderíamos representar esta situação.

A turma ficou silenciosa, pensando. Até que um aluno disse que poderia ser representado através do termômetro. Neste momento, desenhamos o termômetro no quadro, registrando as temperaturas –2° e +4°, e podemos constatar, juntamente com a turma, que a variação da temperatura realmente foi de –6° C. A seguir, perguntávamos a turma de que maneira poderíamos representar essa situação através de uma operação. Então, foram surgindo várias possibilidades citadas pelos alunos, e fomos escrevendo cada uma delas na lousa.

A partir das anotações, fomos indagando a turma sobre a validade ou não da operação realmente representar a situação problema. Um aluno levantou a possibilidade de ser (+4) + (–2), então questionamos se o resultado dessa adição seria –6. Eles responderam que não. Assim, fomos prosseguindo, até que interferimos fazendo outras simulações como, por exemplo: Se a temperatura estava em +20° passou para +26°, quanto à temperatura variou? Eles responderam +6. Perguntávamos novamente: Que cálculo vocês realizaram? Os alunos responderam 26 – 20.

Então, indagamos novamente: E se a temperatura fosse +4 e passasse para +18, qual seria a variação? Os alunos responderam 14. Perguntamos: Que conta vocês realizaram? Eles disseram 18 – 4. A seguir, fizemos as seguintes anotações no quadro: (+26) – (+20) = +6, (+18) – (+4) = +14, procurando levar os alunos a observarem que, para descobrirmos a variação da temperatura, precisamos diminuir a temperatura final da temperatura inicial. Assim, voltamos a perguntar para a turma: Como poderíamos representar a variação da temperatura na cidade da situação problema? Então, um aluno disse que poderia ser (–2) – (+4), porque -2 era a temperatura final e +4 a temperatura inicial.

Deste modo, fizemos a anotação da operação no quadro juntamente com as outras escritas anteriormente. E procuramos levar os alunos a observarem que a operação (–2) – (+4) pode ser escrita sem os parênteses, assim –2 – 4, pois para eliminarmos os parênteses utilizamos a regra de sinais da multiplicação, obtendo uma expressão mais simples que pode ser resolvida por meio de deslocamentos na reta numérica. Finalizando o debate, organizamos a classe em duplas para resolução de uma lista de atividades.

Durante a resolução das atividades, fomos prestando assistência às duplas, esclarecendo as suas dúvidas. Os alunos apresentaram dificuldades na resolução da questão 3 dessa lista, que pedia para que eles completassem as sentenças com os sinais operatórios de +, – e × nos itens: a) (–3)___(–2) = –1 b) (–2) ___(–5) = + 10 c) (+10)___(–14) = +24 d) (–12)____(–3) = –15.

Os alunos, na maioria das vezes, colocavam o sinal sem se preocuparem em como ficaria a operação após a sua escrita na forma reduzida. No momento em que realizávamos o atendimento dos alunos, chamávamos a sua atenção para que eles atentassem a esse detalhe. E nesse instante alguns alunos começaram a perceber este aspecto da operação.

Prosseguindo com a sequência didática, organizamos a turma em grupos e propusemos o jogo das argolas. Para a realização do jogo cada grupo recebeu um tabuleiro contendo 12 hastes presas verticalmente nele e 4 argolas, 2 azuis e 2 vermelhas. Cada uma das hastes presas ao tabuleiro representou um número, esses números estavam dispostos alternando um positivo e um negativo, como no esquema a seguir:

+16	–24	+4
–12	+20	–8
+8	–16	+24
+12	–20	–4

Explicamos à turma que, nesse jogo, as argolas vermelhas nos fazem ganhar pontos e as azuis perder pontos. Para esclarecer, realizamos uma jogada, como exemplo: arremessamos as argolas vermelhas nos números –24 e +8, e as argolas azuis nos números +16 e –4 e escrevemos a expressão que representou a jogada no quadro, da seguinte forma:

$$0 + (-24) + (+8) - (+16) - (-4) = -28$$

Início ganha ganha perde perde

Assim, explicamos que cada jogador ao fazer sua jogada irá arremessar as quatro argolas, fazer a sua expressão e efetuar os seus cálculos adequadamente. Após a explicação sobre as regras do jogo, demos início às atividades.

Durante a realização do jogo, fomos prestando assistência aos grupos que solicitavam nossa ajuda. Os grupos nos chamavam, principalmente, para certificar-se que haviam realizado o cálculo corretamente. As equipes se mostraram interessadas em realizar o jogo e montavam as expressões sem dificuldades. Os integrantes do grupo se ajudavam mutuamente na execução dos cálculos, faziam as devidas simplificações e realizavam a soma algébrica.

Ao final do jogo, promovemos um debate com a turma a fim de identificar as estratégias que eles utilizaram durante o jogo. Dois alunos disseram que eles procuraram jogar as argolas vermelhas nos números que eram positivos e as argolas azuis nos negativos, a fim de obter como resultado um número positivo que fosse o maior possível.

Neste diálogo com a turma, tentamos fazer com que os alunos observassem que, no conjunto dos números inteiros, nem sempre a adição equivale a um aumento e nem sempre a subtração significa diminuir, fazendo, desta forma, uma conexão com as situações vivenciadas por eles através do jogo das argolas. Pensamos que os nossos objetivos, ao optarmos por este jogo na situação didática, foram atingidos, pois os alunos aplicaram seus conhecimentos na execução do jogo, bem como conseguiram perceber que, no conjunto dos inteiros, as operações de adição e subtração apresentam aspectos diferentes daqueles apresentados nos naturais.

Ao serem indagados sobre a atividade, os alunos disseram que gostaram da atividade, pois desta forma "aprenderam brincando" de maneira descontraída, contando com a ajuda dos colegas e da professora.

4.7 Aplicação do teste da subtração e análise dos resultados

Após o término das atividades propostas para a subtração, os alunos foram organizados para a realização do teste diagnóstico da subtração de números inteiros que se encontra no apêndice F. O teste desse bloco de ensino foi realizado em duplas, e os alunos puderam consultar seus materiais como cadernos, livro didático e listas de exercícios. O tempo de duração do teste foi de 1 hora, sendo realizado por 36 dos 39 alunos que compõem a turma. Os demais alunos faltaram no dia da aplicação do teste.

Na primeira questão do teste, foi solicitado aos alunos que resolvessem a seguinte situação problema: "Durante as férias, Carla e

Mateus foram para a serra. No início da viagem, ainda em sua cidade, Mateus verificou que a temperatura local era de 25° C. Já, na serra, Carla viu que a temperatura era de 18° C. Qual foi a variação da temperatura ao longo da viagem?" Do total de alunos que participaram do teste, 28 alunos indicaram que houve uma variação de 7 graus; 4 alunos não indicaram a variação corretamente e 4 não responderam a questão. Por meio desta questão, podemos perceber que a maioria dos alunos consegue realizar deslocamentos sobre a reta numérica e realizar a subtração de números relativos.

Para os alunos resolverem a segunda questão, eles precisavam completar o quadrado mágico; onde a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais deveria ser sempre a mesma.

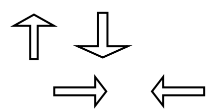
–3		–2
	0	
		+3

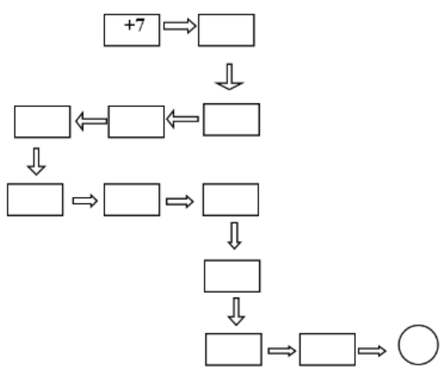
Do total de respostas, obtivemos 10 alunos que completaram os quadrados mágicos corretamente, 14 parcialmente corretos e 12 incorretos. Os quadrados mágicos completados de modo parcialmente corretos evidenciavam que os números que estavam localizados em lados opostos do zero eram opostos.

No entanto, os alunos não atentaram ao fato que a soma nas linhas e colunas também deveriam ser iguais a zero. Nesta questão, a dificuldade encontrada para a sua resolução não diz respeito à soma algébrica dos números, mas sim em elaborar uma soma algébrica que possa ser enquadrada nos critérios estabelecidos. Critérios estes, que os próprios alunos tiveram que buscar, neste caso, saber que as somas em todas as linhas eram iguais a zero.

Na terceira questão, os alunos deveriam completar a trilha conforme a indicação das setas:

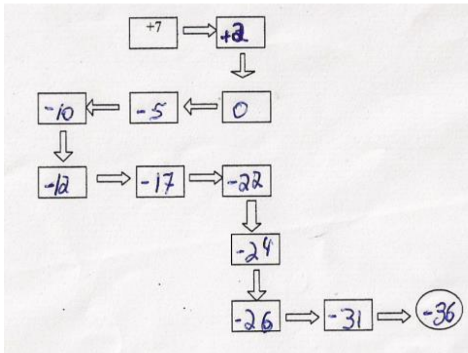
- Vertical: adicione (–2)
- Horizontal: subtraia (–5)





No final, os alunos deveriam indicar o resultado a que chegaram. Somente 4 alunos conseguiram o resultado final correto; 32 alunos não conseguiram completar a trilha corretamente. A maior dificuldade percebida está relacionada às operações e a mudança de sinais para resolver a subtração. Os alunos não relacionaram a expressão subtrair (–5) a somar 5, pois – (–5), simplificando a expressão, torna-se +5. Vejamos um exemplo do que estamos dizendo:

Figura 25 - Resposta apresentada pelos alunos 02 e 21



Fonte: Hillesheim (2013)

Neste caso, assim como em outros que nos foram apresentados como resposta, podemos observar que logo no início, os alunos ao invés de subtraírem (–5) adicionaram (–5), na sequência, adicionaram (–2) como o recomendado. Nos relativos, o fato da subtração de um número negativo estar associado a uma soma, constitui um obstáculo a ser superado, porque a subtração nos relativos tem uma concepção diferente daquela encontrada nos naturais.

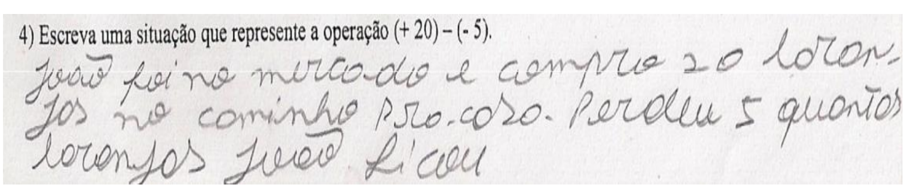
De acordo com Teixeira, a subtração de números relativos está associada a trabalhar com operadores negativos que operam transformações de oposição. Deste modo, “[...] a generalização do caráter de inversão presente na subtração para os inteiros é muito mais complexa, porque é preciso identificar com clareza a operação que está em jogo, tarefa não muito simples, quando se trata de operar com números positivos e negativos” (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Percebemos por meio das respostas desta questão que a adição com números inteiros parece não apresentar dificuldades, uma vez que os alunos adicionaram corretamente o (–2). No entanto, a operação de subtração parece ainda não ter sido consolidada, encontra-se em processo de aprimoramento.

A quarta questão do teste solicitava aos alunos que eles escrevessem uma situação que representasse a operação (+20) – (–5). Nenhum aluno conseguiu escrever uma situação que representasse realmente uma subtração de um número negativo; 22 alunos escreveram situações relacionadas a perder ou tirar, e 12 alunos não escreveram a situação.

No conjunto das respostas, foi possível perceber como o conceito da subtração ainda se encontra fortemente atrelado a concepção de tirar. Os alunos ainda não conseguiram ampliar o conceito de subtração nos relativos. Vejamos algumas situações que reforçam a nossa afirmação:

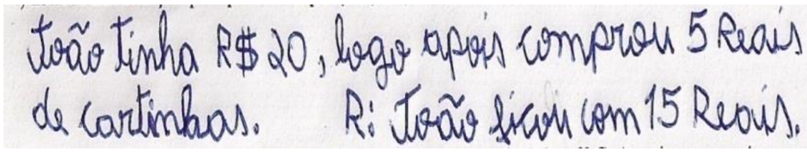
Figura 26 - Resposta apresentada pelos alunos 12 e 08


4) Escreva uma situação que represente a operação (+ 20) – (- 5).

Joao foi no mercado e comprio 20 loran-
jos no cominho pro-coso. Perdeu 5 quantos
loronjos Joao fi'cou

Fonte: Hillesheim (2013)

Figura 27 - Resposta apresentada pelos alunos 21 e 02

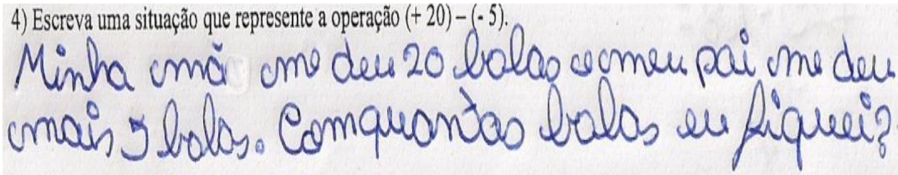

João tinha R$ 20, logo após comprou 5 Reais de cartinhas. R: João ficou com 15 Reais.

Fonte: Hillesheim (2013)

Estas situações expressam com detalhes a concepção de subtração que ainda está presente na turma. Embora tenha sido trabalhado para que eles tivessem esta concepção ampliada, parece que, neste momento, ela ainda não prosperou. Isso não significa dizer que eles não terão este conceito ampliado e aprofundado, mas sim que esta concepção se encontra em processo de mudança.

Dentre as situações que nos foram apresentadas, merece ser destacado que houve uma situação especial. Nela os alunos perceberam que precisariam efetuar uma adição para resolverem a situação. E, então, escreveram uma situação que envolvia uma adição, ao invés de escreverem uma situação que apresentasse a subtração um número negativo.

Figura 28 - Resposta apresentada pelos alunos 18 e 29


4) Escreva uma situação que represente a operação (+ 20) – (- 5).

Minha mã me deu 20 balas e o meu pai me deu mais 5 balas. Comquantas balas eu fiquei?

Fonte: Hillesheim (2013)

Neste caso, não se pode dizer que os alunos não compreenderam que para subtrair um número negativo é preciso somar. No entanto, eles não conseguiram pensar numa situação que apresentasse realmente a subtração de um número negativo.

Na quinta questão, foi proposta aos alunos a seguinte situação: “Uma pessoa encontra-se em uma câmara frigorífica cuja temperatura é de –8° C. Ao sair, encontrará uma temperatura ambiente de 23° C. Qual a variação de temperatura que essa pessoa terá de suportar?”

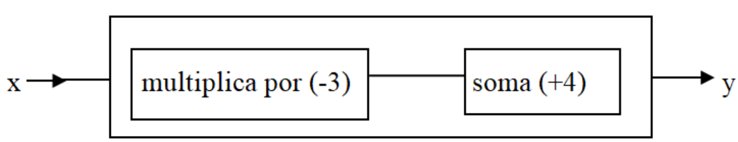
Dos 36 alunos que participaram do teste, apenas 4 responderam corretamente, 26 erraram a questão e 6 alunos não responderam. Podemos observar dentre as respostas incorretas que 14 alunos apontaram 15 graus como a variação da temperatura para esta situação. Ou seja, os alunos ao invés de subtrair (–8), acabaram adicionando (–8) para encontrar a variação da temperatura. Isto porque, como já comentamos anteriormente, a subtração de números relativos significa trabalhar com operadores negativos que operam transformações de oposição. Neste caso, os alunos sabiam que precisavam da operação de subtração, no entanto eles não realizaram o jogo de sinais a fim de simplificar a expressão, obtendo, deste modo, uma soma.

É interessante perceber que a quinta questão é justamente uma situação que poderia ser usada como exemplo para a resolução da quarta questão. Na quarta questão, foi utilizado o registro numérico, enquanto na quinta questão fora utilizada a linguagem natural. Embora os valores numéricos não sejam os mesmos, ambas as situações expressam o conceito de subtração, porém utilizando-se registros diferentes. Duval (2005) aponta que a atividade de conversão não é simétrica, ou seja, nem sempre a conversão inversa permite reencontrar o registro de partida.

Podemos analisar esta questão, também, sob a perspectiva da congruência semântica. A situação que foi proposta é semanticamente congruente a expressão +23 – 8, no entanto, neste caso, a congruência semântica destaca-se da equivalência referencial, conduzindo a um resultado incorreto.

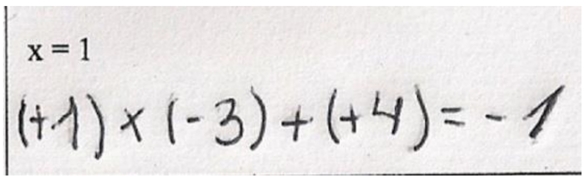
De acordo com Duval (2012), a maior parte dos insucessos cometidos pelos alunos nas atividades matemáticas está fortemente relacionada aos fenômenos da congruência semântica. “[...] a verdadeira fronteira, aquela que bloqueia muitos alunos é a congruência e a não congruência semântica no jogo da substituição de uma expressão a outra ou de uma representação a outra” (DUVAL, 2012, p. 116). Assim, nesta questão, grande parte dos alunos seguiu o caminho da congruência semântica e não conseguiu resolver a questão adequadamente.

A sexta questão do teste apresentou um esquema que representou uma máquina que levava o número inteiro **x** a um outro número inteiro **y**.



Primeiramente, foi perguntado qual o valor de y para x igual a 1. Neste caso, para resolver a questão, os alunos deveriam substituir o valor de x por 1, multiplicar por (–3) e somar a (+4) para obterem o valor de y. Dos alunos que participaram do teste, 8 responderam corretamente, 22 incorretamente e 6 não responderam a questão. Dentre as respostas erradas, percebemos que os alunos substituíram adequadamente o valor de x, porém erraram na execução dos cálculos.

Figura 29 - Resposta apresentada pelos alunos 30 e 39



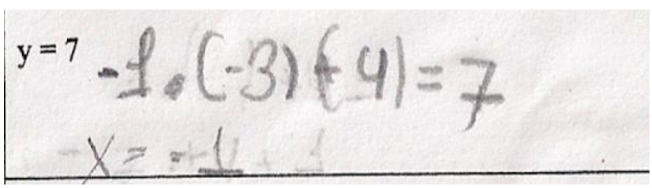
Fonte: Hillesheim (2013)

Neste exemplo, assim como em outros que nos foram apresentados, percebemos que a dificuldade encontrada está centrada no campo do tratamento dos registros e não na atividade de conversão, pois a passagem da linguagem natural para o registro numérico aconteceu espontaneamente. Neste caso, a congruência semântica está em consonância com a equivalência referencial, fato que contribuiu para o sucesso da conversão.

No segundo item desta questão foi solicitado aos alunos que eles determinassem o valor de y quando x igual a zero. No conjunto das respostas, obtivemos 12 alunos que resolveram a questão corretamente, 18 não responderam corretamente e 6 alunos deixaram a questão sem resposta. Como este item da questão envolveu os mesmos procedimentos de resolução do item anterior, porém com valores diferentes, as características das respostas incorretas são muito parecidas; ou seja, os alunos converteram a linguagem natural num registro numérico, mas não resolveram os cálculos adequadamente.

Ainda, na mesma questão, o terceiro item pedia aos alunos que determinassem o valor de x quando y igual a 7. Do total das respostas obtidas, 8 alunos responderam corretamente, 20 erroneamente e 8 alunos não responderam a questão. Nas respostas corretas, observamos que os alunos resolveram a questão atribuindo valores a x, por tentativas, para encontrar o valor de y. Vejamos:

Figura 30 - Resposta apresentada pelos alunos 03 e 09



Fonte: Hillesheim (2013)

Como os alunos ainda não aprenderam a resolver equações pelo processo algébrico, eles resolveram por meio de tentativas, ou seja, eles precisavam encontrar um número que multiplicado por (–3) e somado com (+4) desse o resultado 7. O raciocínio requerido para resolver este item foi diferente dos itens anteriores, exigiu uma elaboração de pensamento bem mais complexa. No entanto, o índice de acertos foi o mesmo apresentado no primeiro item. Dentre as respostas incorretas, percebemos que os alunos substituíram o valor de y no lugar de x e encontraram um outro valor para y, e não o valor de x como sugeria a questão. Inferimos que este problema decorre das dificuldades de interpretação, levando os alunos a fazerem substituições erradas.

Finalizando a questão, o último item solicitava que os alunos determinassem o valor de x quando y igual a 13. Dos alunos que realizaram o teste apenas 6 acertaram a questão, 20 não responderam corretamente e 10 alunos deixaram a questão em branco. Como este item da questão é parecido com o item anterior, as características das respostas também são muito parecidas. As respostas corretas foram realizadas por meio de tentativas e as respostas incorretas através de substituições inadequadas.

Na última questão do teste, os alunos deveriam realizar o cálculo de quatro expressões numéricas envolvendo a adição, a multiplicação e a subtração de números inteiros. O detalhamento dos índices referentes a esta questão encontra-se na tabela a seguir:

Tabela 8 - Resultados referentes a questão 7 do teste da subtração

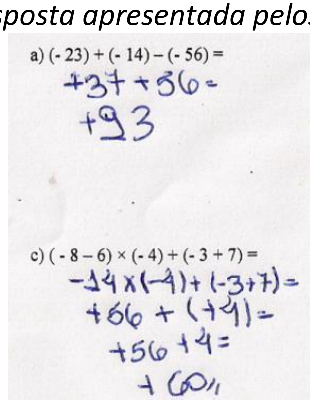
Expressão numérica	**Nº de respostas certas**	**Nº de respostas parcialmente certas**	**Nº de respostas incorretas**
(–23) + (–14) – (–56)	10	14	12
(–5) × (–3+14) – (21)	10	12	14
(–8–6) × (–4) + (–3+7)	08	12	16
(–12+31) – (4) + (+26)	16	06	14

Fonte: Hillesheim (2013)

Nesta questão, todos os alunos resolveram as quatro expressões, não havendo nenhum caso de resposta em branco. Podemos observar que o número de alunos que resolveram as expressões corretamente, somado ao número de alunos que acertaram as expressões parcialmente, em todos os itens, somou mais que 50% da turma. Nas respostas parcialmente corretas, percebemos que os alunos realizaram o jogo de sinais corretamente na simplificação das subtrações.

Ao realizarem as multiplicações, erraram no cálculo aritmético, mas fizeram o jogo de sinais adequadamente. Observamos, também, por meio do desenvolvimento do cálculo dessas expressões, que os alunos apresentam oscilações nos seus cálculos. Ora resolvem corretamente uma adição com relativos, ora efetuam a mesma operação erroneamente. Este fato também se estende para as operações de subtração e de multiplicação. Acreditamos que essas oscilações façam parte do processo de construção das generalizações a respeito dessas operações. A partir do momento em que essas operações se estabelecerem plenamente, podemos inferir que essas oscilações deixem de acontecer. Vejamos um exemplo que reforça a nossa posição:

Figura 31 - Resposta apresentada pelos alunos 13 e 07

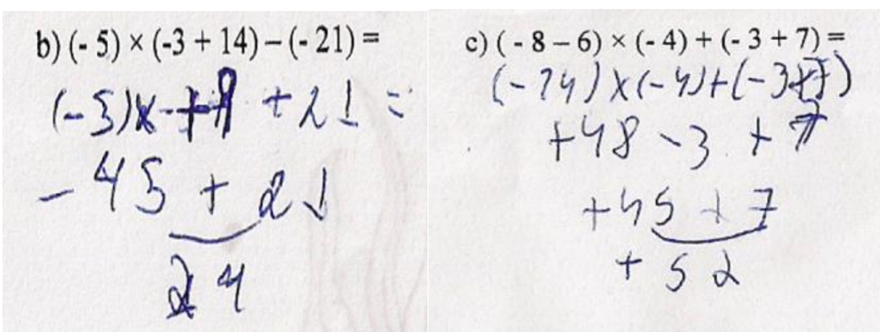


Fonte: Hillesheim (2013)

Neste exemplo, assim como em outros que nos foram apresentados, observamos que, no primeiro item, a soma entre (–23) e (–14) resultou em + 37. Entretanto, logo abaixo no item **c,** a mesma soma algébrica entre dois números negativos (–8 –6) resultou em –14. Podemos observar, ainda, que a simplificação da subtração, por meio da aplicação da regra de sinais, aconteceu naturalmente.

No conjunto das respostas incorretas, percebemos vários procedimentos de cálculo realizados de modo incorreto. Vejamos um caso:

Figura 32 - Resposta apresentada pelos alunos 06 e 38



Fonte: Hillesheim (2013)

Neste exemplo, podemos observar que a soma algébrica (–3+14) resultou em +9, os alunos diminuíram os valores e consideraram o sinal do número maior em módulo, porém não obtiveram sucesso nessa diminuição. Por outro lado, no item **c,** eles realizaram a soma algébrica entre +48 e –3 corretamente, embora o resultado +48 não represente o resultado da multiplicação entre (–14) e (–4). Notamos que todas as multiplicações apresentaram o produto com o sinal adequado e a simplificação na eliminação dos parênteses foi realizada com sucesso.

Com base nos resultados apresentados por meio da aplicação deste teste, percebemos que os alunos não operam os relativos como se fossem naturais, uma vez que eles atendem às especificidades dos sinais, como foi apresentado nas Figuras 25 e 26. Embora esses alunos não tenham efetuado o cálculo adequadamente, eles operaram os números considerando a sua condição de ser positivo ou negativo. Percebemos que os alunos consideram o conjunto dos relativos como um todo, isto porque as adições algébricas são efetuadas por meio de deslocamentos sobre a reta numérica dos inteiros. Embora nem sempre tenham sucesso em suas movimentações, como apresentamos no decorrer da análise das respostas, mesmo assim, não percebemos uma separação entre positivos e negativos na realização dos procedimentos de cálculo.

No que se refere à unificação da reta numérica, esta concepção parece ter se consolidado, por meio das respostas obtidas por intermédio dos cálculos apresentados nas adições algébricas, uma vez que eles associam o cálculo a deslocamentos sobre a reta numérica. Contudo, no que diz respeito aos problemas aditivos serem resolvidos nos relativos, os alunos demonstraram dificuldades tanto para escreverem uma situação que representasse uma subtração, quanto para resolverem uma situação que envolvia a subtração de um número negativo, como nos mostraram os resultados das questões 4 e 5. Nas respostas encontradas para a questão 4, notamos o quanto a concepção de subtração ainda está atrelada a ideia de tirar. Esta concepção tão fortemente instituída nos naturais encontra agora dificuldades nos relativos.

Percebemos por meio das respostas apresentadas as questões 6 e 7 que os alunos conseguem efetuar adequadamente a multiplicação dos sinais, embora, muitas vezes, acabem errando no produto desses números. Observamos que, em relação ao teste aplicado para a multiplicação de números relativos, os alunos apresentaram um progresso considerável nos procedimentos realizados no cálculo das expressões numéricas. Antes, os alunos mal conseguiam apontar os erros na execução de uma expressão, agora já conseguem resolver uma expressão envolvendo a adição, a multiplicação e a subtração com números relativos, atendendo, assim, as nossas expectativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho é uma tentativa de mostrar em que medida o ensino dos números relativos conduzido por meio do “princípio de extensão” pode contribuir para minimizar os problemas enfrentados pelos alunos na multiplicação desses números. Historicamente, vimos que o processo de consolidação do conceito de número negativo sofreu hesitações tanto na comunidade dos matemáticos, quanto na comunidade dos professores. A procura por um bom modelo que explicasse a multiplicação $- \times - = +$, só se resolve quando a matemática acadêmica assume que não há significado na natureza que explique esse produto. Então, a academia passa a buscar um significado produzido com base nos princípios internos da própria matemática.

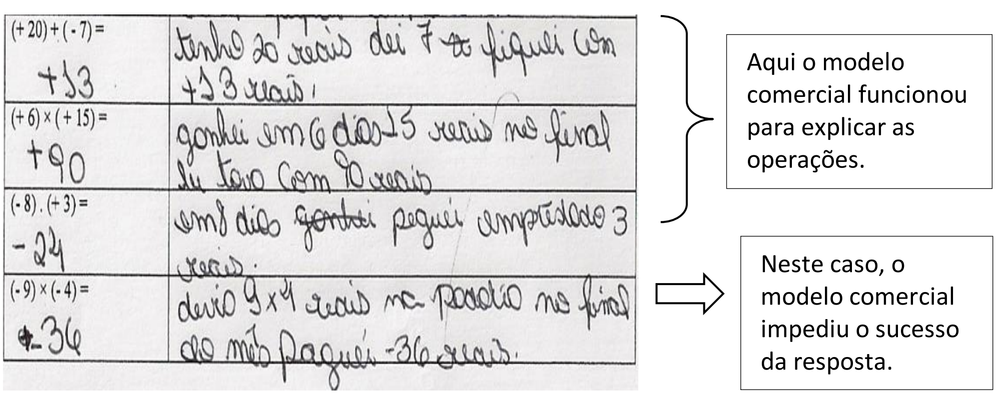
Se, historicamente, o processo de consolidação do número negativo enfrentou problemas ao procurar um bom modelo que explicasse a regra de sinais entre dois números negativos, ainda, hoje, passados mais de um século, presenciamos esse tipo de abordagem, em grande parte, dos livros didáticos. Então, sentimos a necessidade de buscar subsídios teóricos que fundamentassem a nossa sequência didática, na tentativa de amenizar os obstáculos enfrentados pelos alunos no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem dos relativos.

Nesse sentido, percebemos, por meio da nossa experiência, que o ensino da adição de números relativos, conduzido através de deslocamentos sobre a reta numérica, proporcionou aos alunos uma aprendizagem desprendida de regras pré-estabelecidas. Assim, os alunos por meio das movimentações, realizadas na reta numérica, foram capazes de sinalizar a formação de generalizações a respeito das regras de sinais para a adição de números inteiros.

Como o ensino da adição foi conduzido atendendo o "princípio de extensão", opondo-se ao modelo comercial, a maioria dos alunos não associou a ideia de ganho a um número positivo e a ideia de uma perda a um número negativo. Esse fato contribuiu para que os alunos aceitassem que o produto de dois números negativos precisa ser positivo para atender às condições internas da própria matemática.

Um forte exemplo de como o modelo comercial cria obstáculo na compreensão das propriedades multiplicativas dos números negativos pode ser observado por meio da justificativa apresentada por um aluno, como nos mostra a figura a seguir:

Figura 33 - Justificativa apresentada pelo aluno 07



Fonte: Hillesheim (2013)

Este exemplo corrobora o que viemos tentando mostrar ao longo deste trabalho. Apesar de toda uma sequência didática planejada a fim de não associar o número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda, por exemplo, esta concepção trazida de experiências anteriores não foi abalada. Nas justificativas apresentadas por esse aluno, percebemos, sem sombra de dúvidas, que o modelo comercial que serviu para explicar as propriedades aditivas e até mesmo algumas multiplicativas encontrou obstáculos para explicar a multiplicação entre dois números negativos.

Por meio das respostas obtidas pela aplicação dos testes, principalmente na terceira e na quarta questão do teste da adição e na quarta e quinta questão do teste da subtração, percebemos que as atividades que exigiram uma conversão de registros nem sempre foram resolvidos com sucesso. Isso porque as situações de ensino, nas quais a congruência semântica se destacou da equivalência referencial, segundo Duval (2012), contribuíram para um número menor de acertos em relação aos casos em que a congruência semântica e a equivalência referencial conduziam aos mesmos resultados, como os resultados apresentados na primeira questão do teste da subtração.

Alertamos para o fato de que é preciso que o professor tenha um olhar atento a essas questões. Propor diferentes formulações para um mesmo tipo de problema pode ser um caminho que ajude a diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos, quando não há congruência semântica entre a situação e a expressão matemática correspondente. A utilização de vários registros de representação semiótica e a atividade de conversão também se mostram importantes neste processo, no sentido de conduzir o aluno a apropriação do objeto matemático.

Nessa direção, a variedade de registros utilizados para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação com números relativos, poderá contribuir para que o aluno tenha uma ideia global a respeito do objeto matemático, permitindo, desse modo, que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

Na nossa sequência didática, a regra de sinais da multiplicação foi apresentada por meio de uma sequência de produtos, como a sugerida pelo Caderno 9 da Coleção NCTM (PONTES, 2010, p. 104) e de acordo com a demonstração sugerida por Moretti (2012), ambas utilizando argumentos aritméticos. Observamos nas reações dos alunos que a justificativa apresentada pelo Caderno 9 obteve uma melhor receptividade. Acreditamos que esta aceitação possa estar associada, de certo modo, ao fato de termos mobilizado os conhecimentos que já estavam ao alcance da maior parte dos alunos. Essa mobilização aconteceu quando apresentamos, primeiramente, a multiplicação de dois números positivos e de um número positivo por um negativo através de deslocamentos sobre reta. Depois, para completar a sequência fizemos uma análise dos produtos que foram surgindo e, nesse momento, os alunos perceberam que para continuar a sequência, ou seja, para atender as regras inerentes à matemática, o $- \times -$ precisa ser $+$.

As simulações de multiplicação, utilizando as regras $- \times - = -$ e $- \times - = +$, apresentadas por Moretti (2012), que foram utilizadas na nossa sequência didática, reforçaram a necessidade de que a única regra que atende as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição é a regra usual. Apesar do seu caráter teórico estar a frente da capacidade de abstração dos alunos, culminando na sua baixa aceitação, os alunos também puderam constatar que a regra usual precisa ser mantida a fim de atender as regras específicas que fundamentam a matemática.

Após a apresentação da operação da adição, apresentamos a operação de multiplicação e, por fim, apresentamos a operação de subtração. Na apresentação da operação de subtração, utilizamos a regra de sinais da multiplicação, a fim de simplificarmos as expressões e obtermos uma soma algébrica. Com a expressão simplificada, os deslocamentos sobre a reta numérica tornaram-se possíveis e os cálculos puderam ser solucionados.

No momento que aconteceu a sequência didática da subtração, percebemos que os alunos já dominavam melhor as operações de adição e multiplicação. No entanto, o conceito de subtração nos relativos encontrou dificuldades, isto porque a concepção de subtração que os alunos apresentaram estava fortemente relacionada a ação de tirar. Como o foco do nosso trabalho foi a multiplicação, ficamos surpresos ao ver emergir dos resultados dos testes esse obstáculo.

As análises das respostas apresentadas nos testes, principalmente as respostas da segunda questão do teste da adição e da primeira questão do teste da subtração, mostraram que os relativos não são mais tratados como se fossem naturais. Isso porque a operação de adição não foi associada a cálculos contábeis, ela esteve relacionada a realização de movimentações na reta numérica.

A operação de adição sendo apresentada como deslocamentos sobre a reta numérica contribuiu para que os negativos não fossem tratados separadamente dos positivos, como nos apontaram os resultados da terceira questão do teste da adição e a primeira questão do teste da subtração. Essa forma de conduzir o ensino da adição acabou contribuindo para que os alunos percebessem que o conjunto dos números inteiros é uma união entre o zero, os positivos e os negativos. Assim, observamos que a reta numérica foi unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos inteiros, como nos apontaram os resultados da terceira questão do teste da adição e da primeira questão do teste da subtração. No entanto, os problemas subtrativos não foram alcançados pelos alunos, como nos mostraram os resultados da quarta e da quinta questão do teste da subtração. Os alunos não conseguiram se libertar da concepção de subtração atrelada a ideia de tirar, concebida nos naturais, e ampliar essa concepção nos relativos em que a subtração desses números significa trabalhar com operadores negativos que operam transformação de posição.

Um pequeno grupo de alunos assimilou os problemas multiplicativos, dominando completamente as operações de adição, subtração e multiplicação nos relativos, como nos mostrou o resultado da sexta e da sétima questão do teste da subtração e da segunda questão do teste da multiplicação. Isto indica que os demais alunos ainda se encontram em processo de transição. Contudo, os resultados apresentados, na terceira questão do teste da multiplicação (81,1% de acertos no cálculo da multiplicação $(-7) \times (-4)$), levam-nos a acreditar que a multiplicação entre dois números negativos parece ter sido alcançada pela maioria dos alunos, após a nossa intervenção didática.

Como o nosso contato com a turma não se encerrou ao final da aplicação da sequência didática, continuamos observando os resultados da aplicação dessa sequência a longo prazo. Podemos então relatar que foi muito bom poder participar de uma experiência completamente inovadora, pois esta foi a primeira vez que apresentamos os números relativos e as suas operações de adição, multiplicação e subtração atendendo ao "princípio de extensão". Na nossa prática, sempre buscávamos exemplos práticos, do cotidiano dos alunos para introduzir e ensinar as propriedades aditivas dos números inteiros. Porém, quando chegava o momento da apresentação da multiplicação desses números, virávamos a página da contextualização e abríamos a página da dogmatização. Com esta postura, percebíamos a grande confusão que se estabelecia entre as regras de sinais da adição e da multiplicação de números inteiros nas situações de ensino.

Contudo a experiência que vivenciamos, conduzindo o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração atendendo o "princípio de extensão", fez-nos perceber que aquela confusão entre as regras de sinais da adição e da multiplicação foram quase extintas. Mesmo porque as regras para a adição foram construídas pelos alunos em um processo de generalizações por meio dos deslocamentos sobre a reta numérica e, em nenhum momento, elas foram primordiais na solução de um cálculo.

Dessa maneira, a regra de sinais para a multiplicação dos inteiros pode ser apresentada sem nenhum constrangimento. Ela aconteceu num processo natural como uma continuidade da adição. A multiplicação de dois números positivos ou de um número positivo por um negativo seguiu a ideia de deslocamentos sobre a reta. Assim, os alunos num processo de observação, de experimentação, de tentativas e erros foram capazes de fazer generalizações, percebendo que a multiplicação entre dois números negativos precisa ser positiva, a fim de atender as regras da consistência interna da própria matemática.

Os desafios que permanecem no processo de ensino e aprendizagem dos números relativos exigem a continuação das pesquisas, principalmente, no que se refere aos fenômenos da congruência semântica. As reflexões presentes, neste trabalho, não se esgotam, elas apontam para a importância do desenvolvimento de pesquisas nas nossas salas de aula do ensino fundamental. Acreditamos que muitas das dificuldades apresentadas por nossos alunos estão diretamente relacionados às transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, E. L.; MAIA, L. S. L. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** 1 CD-ROM.

ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos**: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_86.pdf. Acesso em: 10 out. 2012.

ASSIS NETO, F. R. de. Duas ou três coisas sobre o “menos vezes menos dá mais”. Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.

BIANCHINI, E. **Matemática (7º ano).** São Paulo, SP: Moderna 2006.

BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs). **A pesquisa em educação matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

BOYER, C. **História da matemática.** São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/CEF, 2017.
Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio> Acesso em: 05 out. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1998.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1963.

CID, E. Obstáculos epistemológicos em la ensenãnza de los números negativos. In: JORNADAS DEL SEMINÁRIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EM DIDÁTICA DE LÃS MATEMÁTICAS, 15., 2000. **Anais eletrônico...**
Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf
Acesso em: 15 set. 2012.

COLOMBO, J. A. A; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 9, p. 180-203, 2007.
Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/. Acesso em: 16 mar. 2012.

COLOMBO, J. A. A; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetikè,** v. 16, p. 41-72, 2008.
Disponível em: http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/
Acesso em: 15 jan. 2012.

COQUIN-VIENNOT, D. Complexité mathématique et ordre d'aquisition : une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. **RDM**. v. 6, n. 2.3, 1985.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da matemática** e outros ensaios. São Paulo, SP: Grijalbo, Ed. USP, 1971.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales.** Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif da la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticas y aprendizajes intelectuales**.** Colombia: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005. p. 11-33.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 14 set. 2012

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

FLORES, C. R. Registros de repreentação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006.
Disponível em : http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em: 14 set. 2012.

GLAESER, G. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM,** v.2., n.3, 1981.

HANKEL, H. **Théorie des complexen Zahlsysteme.** Leipzig: Leopold Voss, 1867.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula:** perspectivas de ensino para a regra de sinais. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

JOSEPH, G. G. **La Cresta Del Pavo Real**: las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid: Pirâmides, 1991.

KASNER, E; NEWMAN, J. **Mathematics and the Imagination**. Middlesex, Pelican Books, 1968.

KLINE, M. **Mathematics: A Cultural Approach**. Reading, Massachussets, Addison – Wesley, 1962.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

LUMPKIN, B. The ancient Egyptian concept of zero and the Egyptian symbol for zero: A note on a little known African achievement in the ethnomathematics**. Study Group on Ethnomathematics (ISGEm)** Newsletter, v. 11, n. 2, Jun 1996.
Disponível em: http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem112.htm
Acesso em: 15 de julho de 2014.

MACLAURIN, C. (1748) **Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris. C.A. Jombert 1756.

MARANHÃO, M. C. S. A; CAMEJO, A; MACHADO, S. Relatos em torno do cálculo de um aluno do 2º ano do Ensino fundamental. **Zetetiké**, Unicamp, v. 16, n. 29, 2008.
Disponível em: http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/.
Acesso em: 25 set. 2012.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema,** Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MICOTTI, M. O ensino e as propostas pedagógicas**.** In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação matemática**: concepções & Perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999. p. 153-167.

MORETTI, D. M; BORBA, R. E. S. R. O que os alunos já sabem antes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 1 CD ROM.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC36384011468.pdf.

Acesso em: 10 mai. 2012.

NASCIMENTO, R. A. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais.** 1 CD-ROM.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática, 2008.

PASSONI, J. C. (Pré-) **Álgebra:** introduzindo os números inteiros. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação matemática). PUC/SP, 2002. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joao_passoni.pdf. Acesso em: 14 jun. 2011.

PEACOCK, G. **A Treatise on Algebra**, Vol. I, Arythmetical Algebra. Reprint 1940, New York: Scripta mathematica, 1842.

PYCIOR, H. M. **Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements.** Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PROJETO ARARIBÁ. **Matemática (6ª série).** São Paulo, SP: Moderna, 2006.

SAD, L. A. História da matemática e epistemologia da aprendizagem. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1., 2005, Natal. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 4., 2005. **Anais...** Natal: UFRN, 2005.

SANTOS, A. **Compreensão e uso de números relativos na agricultura e na escola**. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1990.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. **Bolema,** Rio Claro, Ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

SING, J. **Mathematical Ideas**: Their Nature and Use. London, Hutchinson and Co. Ltd., 1961.
Disponível em: https://ia802606.us.archive.org/6/items/MathematicalIdeas/Singh-MathematicalIdeas.pdf.
Acesso em: 20 maio de 2014.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1992.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posição**, v. 4, n. 1, março, 1993.
Disponível em http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/home67.html.
Acesso em: 10 set. 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – BLOCO I

Adição de números inteiros

Objetivos:

- compreender os processos usados para a adição de números inteiros na reta numérica;
- resolver situações problemas envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos;
- diferenciar os sinais operatórios dos sinais predicativos.

1ª aula: A professora começou a aula pedindo para que os alunos desenhassem um prédio de apartamentos com 1 andar térreo, 9 andares acima do térreo, e 2 andares de garagens abaixo do térreo. A seguir, pediu que eles representassem cada andar desse prédio por um número inteiro. Então, a professora problematizou: Em que andar se encontra o elevador quando:

a) partindo do térreo, subir 7 andares e, em seguida, subir mais 2 andares;_________

b) partindo do primeiro andar, descer 3 andares;_________

c) partindo do terceiro andar, subir quatro andares e, em seguida, descer 7 andares;____

d) partindo do térreo, descer 2 andares e, em seguida, subir 1 andar.________

E, a partir desta situação, direcionou o diálogo com a turma questionando a possibilidade de desenhar o prédio na posição horizontal, como ele ficaria? Levando, com isto, os alunos a perceberem as similaridades com a reta dos inteiros. E, então sobre a reta dos inteiros desenhada no quadro na posição horizontal, definiram como sentido positivo para os deslocamentos feitos para a direita, e, como sentido negativo os deslocamentos feitos para a esquerda. A professora propôs várias situações de deslocamento sobre a reta numérica e em conjunto com a turma determinou o ponto de chegada. Depois, a professora colocou no chão da sala um segmento de reta numerada, confeccionada com papel pardo, e disse que tínhamos ali uma “pista” e sobre esta pista os estudantes iriam se deslocar como foi feito no quadro com a reta numérica, e pediu a participação dos alunos para fazerem os deslocamentos sobre a pista. Os alunos foram organizados em duplas, um aluno se deslocou na pista e o outro ditou o direcionamento, fazendo seus registros no quadro e no final registrou o ponto de chegada, por exemplo: João e José formaram uma dupla. João andou sobre a pista e José falou a sua trajetória aleatoriamente e anotou no quadro, assim: $(-2) + (+3) + (-1) + (+4) + (-5) = -1$. Nesse caso, o -1 representou o ponto de chegada. Na sequência, a professora chamou outras duplas para participarem da atividade.

2ª aula: No início da aula a professora fez uma retrospectiva da aula anterior e propôs a lista de atividades a seguir, que foi realizada em grupos de três alunos, contando com o auxílio da professora, e ao final da aula a professora recolheu a atividade.

1) Desenhe uma reta numérica. Partindo do zero, determine o número de chegada quando andamos:

a) +2, e em seguida, +7;_______

b) –2, e em seguida, –5;_______

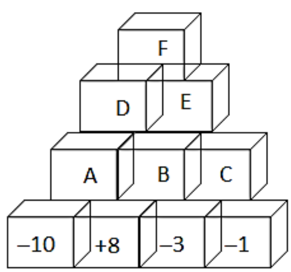
c) +4, e em seguida, +2;_______

d) +3, e em seguida, –8;_______

e) –3, e em seguida, +8;_______

f) –1, e em seguida, –3;_______

2) Cada letra equivale à soma dos números dos dois blocos imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto da pilha. (Faça o registro dos cálculos)



4) Efetue:

a) (–8) + (+3) +(+2) + (–1) + (+3) =_____________

b) 12 + (–13) + (–4) + (+5) + (–3) + 0 + (–1) = _______

c) – 3 + (+7) + (–6) + (+8) + (–3) + (+15) + (+2) = _______

d) (–25) + (+3) + (–18) + (+21) + (–30) + (–16) =_______

Explique qual foi o seu procedimento para resolver as expressões acima:

____

____

____

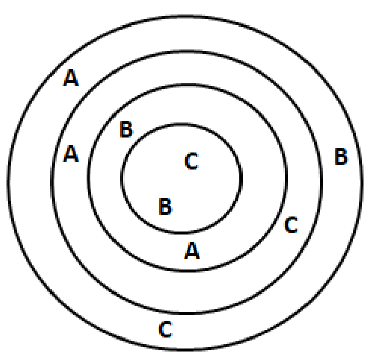
____

____

<u>3ª aula</u>: Nesta aula, a professora retomou as questões da aula anterior, procurando tirar as dúvidas dos alunos. Depois, organizou a classe em grupos de 4 ou 5 alunos para aplicar o jogo do tiro ao alvo. Cada equipe recebeu um alvo colorido, desenhado num pedaço de cartolina, e grãos de milho. Cada cor do alvo teve como valor um número inteiro, que foi decidido entre a classe e a professora. Estabelecidos os valores, cada participante do grupo jogou o milho cinco vezes no alvo, montando a sua expressão numérica e calculou a sua pontuação. Cada integrante do grupo esteve atento aos cálculos do colega, para que não ocorressem somas erradas e falsas pontuações. Após a realização dos cálculos da primeira rodada, repetiu-se o mesmo procedimento para a segunda, terceira e quarta rodadas. Ao final, cada equipe somou a sua pontuação geral e a equipe vencedora recebeu uma salva de palmas da turma. Logo após, a professora distribuiu para cada aluno um pirulito como uma forma de premiação pela participação, deixando claro que nesse jogo todos somos vencedores, pois conquistamos o melhor prêmio que foi a aprendizagem.

<u>4ª aula</u>: A professora iniciou a aula questionando a turma sobre o que acharam da aula anterior. Em seguida, registrou no quadro as conclusões que a turma chegou e verificou se a turma já conseguia fazer algum tipo de generalização sobre a adição de números inteiros. No caso positivo, a professora institucionalizaria esse conhecimento, no caso de ser negativo, induziria a turma, fazendo perguntas e problematizando. Até que eles começaram a perceber que quando os números apresentam o mesmo sinal deveriam somar os valores absolutos dos números permanecendo com o mesmo sinal, e quando eles possuíssem sinais diferentes deveriam diminuir permanecendo o sinal do número que apresentasse maior módulo. Mas, isso não foi imposto pela professora, são ideias que deveriam emergir da classe após os debates. Em seguida, a professora propôs uma lista de atividades para ser feita em dupla, com o auxílio da professora, e entregue ao final da aula.

1) Pinte os discos abaixo na seguinte ordem, de dentro para fora: preto, amarelo, verde, laranja. André, Beto e Carlos estão jogando dardos. Veja os dardos que cada um deles arremessou:



Cor	**Pontos**
Preto	+9
Amarelo	+4
Verde	–2
Laranja	–6

Cada letra no disco corresponde ao dardo arremessado pelo seu respectivo jogador. Assim, a letra A representa os dardos de André, B os dardos de Beto e C os dardos de Carlos. Agora responda:

a) Quantos pontos André fez?_____________________

b) Quantos pontos Beto fez?______________________

c) Quantos pontos Carlos fez?_____________________

d) Quem fez menos pontos?______________________

e) Quem venceu o jogo?__________________________

2) Observe as sequências de números:

a) 12, 7, 2, –3, –8, –13,...

Como essa sequência foi formada?________________________________

b) –7, –3, +1, +5, +9, +13,...

Como essa sequência foi formada?________________________________

3) Calcule:

a) 2 + (–2) + 0 + (–1) + (–3) + (+6) = _________________________

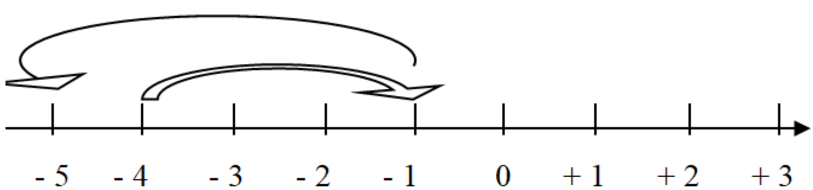
b) (–10) + (+15) + (–28) + (+46) + (–28) + (–15) + (+13) =

c) (+26) + (–15) + (+65) + (–48) + (+23) + (–6) + (+11) =

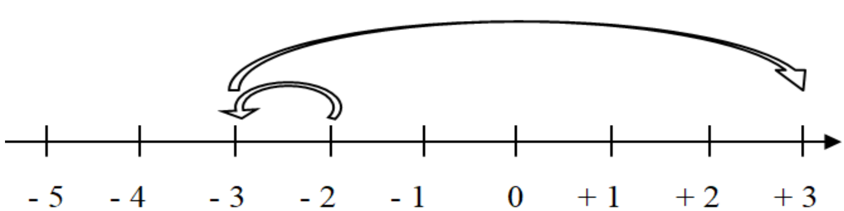
d) 45 + (–32) + (+59) + (–18) + (+21) + (–33) + (+45) =

4) Escreva a expressão numérica que representa o desenho a seguir:

a)



b)



<u>5ª aula</u>: A aula iniciou com o diálogo entre a turma e a professora sobre as estratégias que foram utilizadas para resolver a lista de atividades da aula anterior, juntamente com a correção coletiva delas. Os alunos tiveram a oportunidade de colocar para o grande grupo a maneira que usaram para resolver os cálculos que foram propostos. E nessa exposição de ideias um ajudou o outro a entender e a encontrar maneiras diferentes e mais rápidas para efetuarem o mesmo tipo de cálculo. Após o debate a professora registrou no quadro as conclusões a que o grupo chegou.

<u>6ª aula</u>: A professora deu continuidade à aula anterior propondo uma lista de atividades que foram realizadas em grupos de três alunos, contando com o auxílio da professora.

1) Joana ganha 40 reais de sua mãe. Compra um livro por 30 reais. Seu pai lhe dá 8 reais. Joana vai ao cinema e gasta 13 reais.

a) Escreva uma expressão numérica que represente o saldo de Joana.________________

b) Qual é o saldo de Joana? ____

2) Desenhe uma reta numérica e represente nela, através de flechas, os seguintes movimentos:

a) +8 + (+5) + (–13)

b) –4 + (+2) + (+5)

3) Num certo dia de inverno a temperatura na cidade de Lages era 8^0 C e caiu 10^0 C durante a madrugada.

a) Escreva uma operação com números inteiros que represente a situação.____________

b) Qual a temperatura registrada durante a madrugada? Justifique____

4) Complete o quadrado mágico sabendo que a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais é sempre a mesma.

2		–2
	–1	
		–4

5) Dona Judite foi ao banco e verificou a movimentação de sua conta corrente.

Data	**Descrição**	**Valor**	**Saldo**
21/04	Depósito	+ R$ 120,00	+ R$ 165,00
23/04	Cheque debitado	– R$ 87,00	
02/05	Saque	- R$ 65,00	

05/05	Depósito	+ R$ 415,00	
12/05	Saque	– R$ 390,00	

De acordo com a tabela, responda:

a) Qual era o saldo ao final do dia 23/04 ______________________________

b) Qual era o saldo anterior ao depósito de R$ 120,00?

____

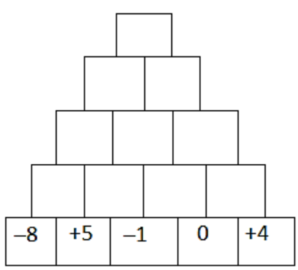
c) Em quais dias o saldo ficou negativo? O que isso representa?

____

d) Em quais dias o saldo ficou positivo? O que isso representa?

____

6) Complete a pirâmide sabendo que o tijolo acima é a soma dos dois tijolos que o sustentam.

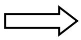


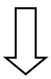
<u>7ª aula</u>: Nesta aula a professora aplicou um teste para verificar a aprendizagem da adição de números inteiros. Esse teste foi realizado individualmente e se encontra no apêndice B.

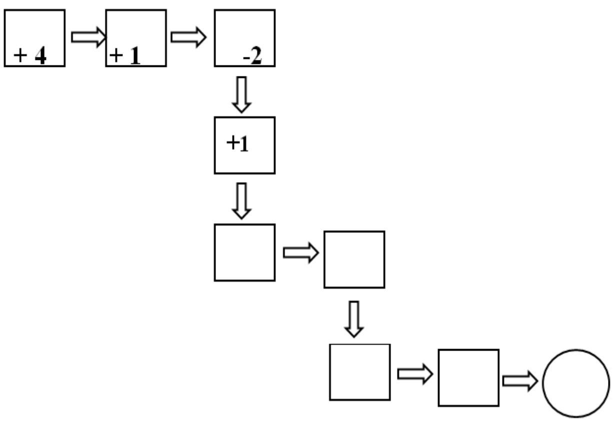
APÊNDICE B

Teste da adição

1) Complete a trilha conforme a indicação das setas:

 adicione –3 (horizontal)

 adicione +3 (vertical)



Em que número você chegou? _______

2) Resolva as operações e justifique a sua resolução.

Operação	Justificativa
+12 + (–5) =	
(+8) + (+9) =	
(–17) + (+3) =	
(–8) + (–5) =	

3) Leia e responda as questões:

Um caracol pretendia chegar ao topo de um muro; no entanto, subia alguns centímetros e escorregava outros.

a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? ____

b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? __________________________

c) Represente, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos por ele no item **a**.

d) Represente, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos por ele no item **b**.

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 28)

4) Pedro está jogando bolinhas de gude. Na primeira partida perde seis. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, ele nem perdeu, nem ganhou. O que aconteceu na segunda partida? _______________________

5) Maria resolveu fazer bombons para vender. Foi então a uma doçaria para fazer o levantamento do custo da matéria prima. Veja a tabela:

Material	**Gastos**
Leite condensado	R$ 18,00
Chocolate	R$ 27,00
Formas para bombons	R$ 6,00
Embalagens	R$ 8,00

a) Maria pensou em pedir R$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? ____

b) Se Maria conseguisse comprar o material descrito acima e produzisse 150 bombons com ele. Se ela vendesse cada bombom por R$ 2,00, teria lucro ou prejuízo? De quanto? ______________________________________

APÊNDICE C – BLOCO II

Multiplicação de números inteiros

Objetivos:

- compreender os processos usados para a multiplicação de números inteiros aplicando a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a multiplicação de números inteiros;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição e multiplicação de números inteiros.

1ª aula: A professora iniciou a aula retomando a adição algébrica de números inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta numérica dos inteiros. Assim, introduziu a multiplicação de dois números inteiros positivos como sendo o deslocamento desse número tantas vezes como um dos fatores determinar, por exemplo: $(+2) \times (+3) = (+3) + (+3) = +6$. Ou seja, na reta dos números inteiros tem-se dois deslocamentos de 3, partindo do zero, no sentido positivo e chega-se no seis positivo. Nesse primeiro momento também foi apresentado à multiplicação de um número positivo por um número negativo, de maneira análoga a apresentada anteriormente. A multiplicação de um número negativo por outro número negativo esteve embasada no exemplo apresentado no caderno 9 da Coleção NCTM, que apresenta o produto da multiplicação de dois números inteiros como uma sequência, cujo produto positivo é uma condição com vistas a manutenção da consistência interna da matemática, atendendo ao “princípio de extensão” de Caraça (1963). Como exemplo, a sequência de produtos:

$$\begin{array}{lcl}
3 \times 4 = 12 & \qquad\qquad & 3 \times -4 = -12 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
2 \times 4 = 8 & & 2 \times -4 = -8 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
1 \times 4 = 4 & & 1 \times -4 = -4 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
0 \times 4 = 0 & & 0 \times -4 = 0 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
-1 \times 4 = -4 & & -1 \times -4 = +4 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
-2 \times 4 = -8 & & -2 \times -4 = +8 \\
\quad \downarrow -4 & & \quad \downarrow +4 \\
-3 \times 4 = -12 & & -3 \times -4 = +12
\end{array}$$

Esta justificativa foi apontada na pesquisa realizada por Pontes (2010) como sendo a mais eficaz para o entendimento da regra de sinais, na opinião dos alunos da atualidade. Mas, também foi feita uma problematização utilizando a ideia Hankel, que propõe a regra de sinais usual como a única que preserva a distributividade à direita e a esquerda. Dessa forma, colocou-se a seguinte multiplicação para a classe e a turma foi questionada a respeito de como poderiam resolvê-la? $(1 – 4) \times (–5 + 1)$

- Eliminando os parênteses: $–3 \times (–4) = +12$
- Eliminando os parênteses à esquerda e usando a distributividade: $–3 \times (–5 +1) = –3 \times (–5) –3 \times (+1)$ como esse resultado deve ser o mesmo que o anterior, espera-se que os alunos cheguem a dizer que $–3 \times –5$ deve ser $+15$. Pois, $+15 –3 = +12$.

- Eliminando os parênteses à direita e usando a distributividade: $(1 - 4) \times (-4) = 1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 + 16 = +12$

Para problematizar um pouco mais a professora sugeriu que fossem feitos os mesmos cálculos novamente, porém admitindo-se, segundo Moretti (2012), a possibilidade de $- \times -$ ser $-$. E teremos:

- Eliminando os parênteses: $(-3) \times (-4) = +12$
- Eliminando os parênteses à esquerda e usando a distributividade: $-3 \times (-5 + 1) = -3 \times (-5) - 3 \times (+1) = -15 - 3 = -18$.
- Eliminando os parênteses à direita e usando a distributividade: $(1 - 4) \times (-4) = 1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 - 16 = -20$

Para finalizar a aula, a professora fez o levantamento juntamente com a turma sobre os pontos que eles perceberam ao se adotar $- \times - = -$. A seguir, fez juntamente com a turma a sistematização da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros, fazendo o registro no quadro das conclusões que a turma chegou e dos pontos destacados por eles. Pretendia-se que eles chegassem à conclusão que é preciso adotar a regra usual para manter o mesmo resultado independente da maneira como os cálculos fossem efetuados.

2ª aula: A professora retomou a aula anterior pontuando a multiplicação de números inteiros e organizou a sala em grupos constituídos por 4 alunos. Cada grupo recebeu um jogo de dominó com a multiplicação de números inteiros. O intuito do jogo foi de proporcionar a fixação da regra de sinais que foi explorada na aula anterior de uma forma descontraída. O jogo constituiu-se por 28 peças feitas de cartolina e segue as regras do dominó tradicional; as pedras oferecem cálculos e respostas que devem ser colocadas na ordem correta. O jogador que não obtiver o resultado para jogar passa a vez para o próximo. Vence o jogo quem terminar as peças primeiro. E assim, passa para a próxima rodada. No final da aula a professora perguntou para a turma: Como foi a aula? E, dessa forma, interagiu com eles buscando sanar e esclarecer as dúvidas que eles pudessem apresentar.

<u>3ª aula</u>: A aula foi iniciada com a professora perguntando para a turma:

- (+2) × (+5) é? Por quê?
- (–4) × (+3) é? Por quê?
- (–5) × (–6) é? Por quê?

Após o debate com a turma a professora pediu para que eles se organizassem em grupos com três alunos para resolverem a lista de atividades a seguir, e ao término da aula foi recolhida pela professora:

1) Complete a sequência apresentada na tabela e responda:

3 × 12 = 36
2 × 12 = 24
1 × 12 = 12
0 × 12 =
–1 × 12 =
× =
× =

a) O que acontece com o 1º fator quando se lê as contas de cima para baixo? ______________________________

b) O que acontece com o 2º fator quando se lê as contas de cima para baixo? __________________________________

c) O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo?_________________________________

d) Com base no que você observou: "Um número negativo vezes um número positivo dá um produto____________".

2) Agora observe e complete essa outra sequência apresentada na tabela e responda:

$4 \times (-8) = -32$
$3 \times (-8) = -24$
$2 \times (-8) = -16$
$1 \times (-8) =$
$0 \times (-8) =$
$\times \quad =$
$\times \quad =$

a) No que esta tabela difere da anterior?____________

b) O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo? ________________________

c) Com base no que você observou: "Um número negativo multiplicado por número negativo dá um produto_______________".

3) Calcule e justifique o seu procedimento.

Cálculo	**Justificativa**
$(-3) \times (+4) =$	
$(-6) \times (-2 + 10) =$	
$(-7) \times (-2) + 4 - 2 \times (+6) =$	

4) Um avião estava a uma altitude de 400 metros. Para escapar de uma tempestade, o piloto subia 24 metros a cada 6 minutos. Qual foi a altitude atingida pelo avião após 30 minutos? Justifique sua resposta.

5) O professor João propôs a seguinte expressão para os alunos resolverem: $-5 \,.\, (+3) - 4 \,.\, (-10 - 3)$. Marcos e Juliana resolveram a expressão de modos diferentes veja:

Marcos	Juliana
–5 . (+3) – 4. (–10 –3) = –15 – 4 . (–13) = –15 + 52 = +37	–5 . (+3) – 4. (–10 –3) = –15 – 4 . (–10) –4 . (–3) = –15 + 40 + (+12) = –15 + 40 + 12 = +37

Com base nos cálculos realizados por Marcos e Juliana, responda:

a) Se eles resolveram os cálculos de modos diferentes, como eles conseguiram chegar ao mesmo resultado? ___________________________

b) O resultado que eles chegaram está correto? Justifique. ____

c) Agora resolva do seu modo a expressão e justifique o seu procedimento.

Expressão	Justificativa
–5 . (+3) – 4. (–10 –3) =	

<u>4ª aula</u>: Nessa aula a professora retomou a adição e a multiplicação de números inteiros com o intuito de verificar se os alunos já conseguiam resolver as operações sem confusões entre os sinais a serem usados nas operações de adição e de multiplicação dos inteiros. Para isso a professora colocou no quadro operações de adição, de multiplicação e expressões envolvendo a adição e a multiplicação de números inteiros para serem resolvidas em conjunto com a turma. Por exemplo: (–2) + (–4) = ?, (+13) + (–

5) + (+ 8) + (–9) = ?, (–7) × (–3) = ?, (+4 –8) × (–3) + 5 = ?, etc. A seguir os alunos foram organizados em grupos com quatro alunos para realizarem as atividades propostas sendo recolhidas no final da aula:

1) Marque (**V**) se for verdadeira ou (**F**) se for falsa nas proposições a seguir.

a. ( ) O produto de um número inteiro por zero dá o próprio número.

b. ( ) Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo.

c. ( ) Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo.

2) Justifique suas respostas dos itens da questão anterior.

a. ____

b. ____

c. ____

3) Escreva uma operação utilizando números inteiros que atenda aos critérios propostos:

Critérios	**Operação**
A soma de dois números inteiros é –7	
O produto de dois números inteiros é +10	

4) Juliano e um amigo estão brincando de um jogo que tem as seguintes regras:

- Cada jogador inicia a partida com um saldo positivo de 10 fichas e deverá responder um total de 20 questões durante o jogo.
- A cada resposta correta o jogador recebe 3 fichas e a cada resposta incorreta perde 1 ficha.
- Será o vencedor aquele que tiver o maior saldo positivo de fichas.

a) Se Juliano acertar 10 questões, qual será seu saldo ao final do jogo?

b) Lorena, amiga de Juliano, acertou 15 questões. Qual foi seu saldo ao final do jogo?

c) Qual é o número de questões que um jogador deve acertar para ficar com 10 fichas ao final do jogo?

d) Qual é o maior número de fichas que um jogador pode acumular?

e) Nesse jogo é possível que um jogador fique com um saldo devedor de fichas. Qual é o número mínimo de questões que um jogador deve acertar para que isso não aconteça?

f) Existe a possibilidade de um jogador terminar o jogo com o saldo positivo de 1 ficha? Por quê?

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 50)

5ª aula: Essa aula foi utilizada para fazer um debate sobre as questões que foram propostas na aula anterior. A turma foi organizada formando uma circunferência e a professora devolveu as listas de atividades para cada aluno. A professora iniciou o debate pela questão 1 e pediu a participação da turma na discussão, levantando os principais aspectos da questão. Na sequência, a professora deu continuidade passando para as demais questões, sempre contando com a participação da turma. No final da aula a professora registrou no quadro os pontos que foram discutidos e sistematizados com a turma e pediu para que eles anotassem em seus cadernos, como uma forma de registrar o que foi discutido na sala de aula.

<u>6ª aula</u>: Nessa aula os alunos em duplas resolveram as seguintes atividades, contando com a assistência da professora para auxiliá-los nas dúvidas:

1) Analise cada uma das sequências e complete-as.

a) –4, –3, –2, –1, 0 ,1, ___, ___, ___, ___

b) –9, –6, –3, 0, 3, ___, ___, ___, ___

c) –8, –4, ___, 4, 8, 12

2) Utilizando os números apresentados na tabela, escreva uma operação para cada situação.

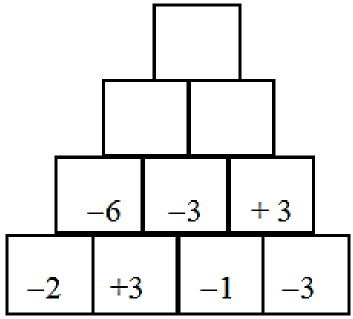
–4	3	–2	–8	+7	0

a) Uma multiplicação de dois fatores com resultado igual a +32_______

b) Uma adição de três parcelas com resultado igual a –7_____________

c) Uma multiplicação de três fatores com o resultado igual a 24_______

3) A pirâmide possui um “segredo”. Descubra o segredo e determine o número inteiro que deve estar no alto da pirâmide.



4) João tem uma coleção de miniaturas de 15 carros antigos. Durante um mês ele ganhou três novos carros, emprestou 2 e perdeu um carro. Quantos carros ele possui em sua estante neste momento? Qual das expressões abaixo representa o enunciado do problema?

a) 15 + 3 + 2 +1

b) 15 + (3 + 2 + 1)

c) 15 + 3 – (2 + 1)

d)15 – 3 + (2 + 1)

5) Complete a tabela:

a	**b**	**a × b**
–2	–3	
	+4	–20
–4		+32
+12	+8	

6) Escreva uma situação problema que possa representar a expressão numérica (–15) . (+3) + (–2).

7) Efetue:

a) (–9) . (+6) + (–15 –1) . (–2) =

b) –2 + 3 –15. (–1) =

c) $(-18) + (-3) - (-4) . (+6) . (-3) =$

7ª aula: Nesta aula a professora aplicou um teste sobre a multiplicação e a adição de números inteiros, realizado individualmente pelos alunos. Esse teste se encontra no apêndice D.

APÊNDICE D

Teste da multiplicação

1) Resolva as operações e justifique ao lado a sua resolução.

Operação	Justificativa
+15 + (+6) =	
(–32) + (–16) =	
–12 + (+13) =	
(+20) + (–7) =	
(+6) × (+15) =	
(–8) . (+3) =	
(–9) × (–4) =	

2) Marcos vendeu sua moto, mas irá receber o dinheiro em 18 parcelas de R$ 235,00.

a) Utilizando números inteiros, escreva uma expressão numérica que represente essa situação: ____

b) Qual o valor total que Marcos irá receber? ______________________

c) Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê? ____________________________

3) Na figura, qual número inteiro deve ser colocado no lugar de cada letra?

–7	**.**	**–4**	**=**	**A**
=				**+**
+29				**–10**
+				**=**
C	**=**	**–2**	**×**	**B**

4) Sérgio e Paulo estavam brincando com um jogo que funcionava segundo as regras: a cada resposta certa, o jogador anda 3 casas para frente; a cada resposta errada, anda 2 casas para trás. Ganharia o jogo quem primeiro alcançasse a 25ª casa. Os dois jogadores responderam a um total de 20 questões cada um. Sérgio acertou 12 e Paulo acertou 13.

a) Quantas questões cada um deles errou? ___________________________

b) Quantas casas Sérgio andou para a frente? E para trás? ____

c) Quantas casas Paulo andou para a frente? E para trás? _______________

d) Em qual casa cada um dos jogadores parou? _______________________

e) Quem ganhou o jogo? ____

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 72)

5) Descubra o erro cometido por Jonas na resolução da expressão e responda:

$(-3) \cdot (+19 + 6) + (+3) \cdot (-1) + 4 =$

$(-3) \cdot (+25) + (-3) + 4 =$

$-75 - 3 + 4 = 74$

a) Qual foi o erro que Jonas cometeu ao resolver a expressão? ____

b) Será que este tipo de erro é comum? Por quê? _______________________

c) Como você resolveria essa expressão? (Demonstre seus cálculos)

APÊNDICE E – BLOCO III

Subtração de números inteiros

Objetivos:

- compreender a lógica dos processos usados para a subtração de números inteiros aplicando a regra de sinais da multiplicação para simplificar as expressões do tipo a – (–b) e a – (+b);
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a subtração de números inteiros relativos;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

1ª aula: A professora começou a aula propondo a seguinte situação problema: Numa certa noite de inverno na Serra catarinense os termômetros registraram +4° C no início da noite. Na madrugada desta mesma noite os termômetros chegaram a registrar –2° C. Quantos graus a temperatura variou nesta noite?

Com esta situação a professora pediu a turma sugestões para solucionar o problema. Esperava-se que a turma mencionasse o desenho do termômetro, caso contrário a professora os direcionaria para tal. Com o desenho do termômetro feito e a solução do problema encontrada, a professora perguntou: Como podemos representar essa solução por meio de uma operação? Qual? Esperava-se que os alunos apontassem a subtração –2 – (+4). Se este fato não ocorresse a professora faria várias simulações do tipo:

Se a temperatura fosse de +20° e passasse para +26°, qual seria a variação? Como vocês fizeram o cálculo? Até que eles apontaram a subtração como a operação a ser usada nessas situações. Depois de montada a expressão a professora atentou para a multiplicação dos sinais que deverá ser realizada a fim de simplificar a expressão para efetuar os cálculos, assim: (–2) – (+4) = –2 – 4 = –6. A professora sugeriu que após a retirada dos parênteses o cálculo poderia ser efetuado por meio de deslocamentos sobre a reta numérica, como os realizados na adição. Após a explanação do assunto a professora pediu para que os alunos sentassem em dupla para realizarem as atividades que foram entregues e ao término da aula, recolhidas.

1) Um submarino encontra-se a –243 metros de profundidade. Depois de duas horas, está a –180 metros.

a) Ele subiu ou desceu? _________

b) Quantos metros? ____________

2) Escreva uma operação que atenda aos critérios:

Critérios	**Operação**
Uma subtração de dois números é +4	
A soma de três números é –5	
O produto de dois números é –16	

3) Complete as sentenças com os sinais +, – ou ×.

a) (–3)____(–2) = –1

b) (–2) ____(–5) = +10

c) (+10)___(–14) = +24

d) (–12)____(–3) = –15

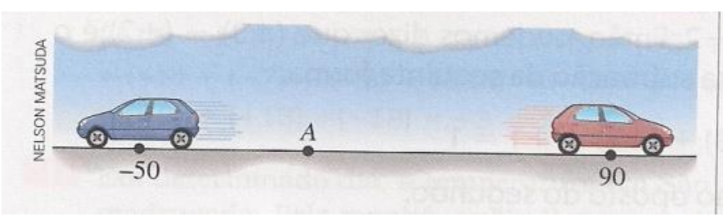
4) Efetue:

a) (–5) + (–3) × (–2) =

b) (+8) – (–13) =

c) (–7) × (–5) – (–2) =

5) Os automóveis partiram da cidade A, mas em direções opostas. O primeiro percorre 50 km à esquerda de A, e o segundo 90 km à direita de A. Nessas condições, responda:



(Figura retirada do livro Matemática. BIANCHINI, p. 28, 2006)

a) A distância entre eles aumentou ou diminuiu? ______________________

b) Escreva uma operação que represente a situação: ___________________

c) A que distância um carro se encontra do outro após o trajeto percorrido?

____

<u>2ª aula</u>: A professora começou a aula propondo o jogo das argolas. A sala foi dividida em grupos com 5 ou 6 alunos. Cada grupo recebeu um tabuleiro contendo 12 hastes presas verticalmente nele e 4 argolas, 2 azuis e 2 vermelhas. Cada uma das hastes presas ao tabuleiro representou um número e esses números estavam dispostos alternando um positivo e um negativo, como no esquema a seguir:

+16	–24	+4
–12	+20	–8
+8	–16	+24
+12	–20	–4

Neste jogo, as argolas vermelhas faziam o aluno ganhar pontos e as azuis perder pontos. Por exemplo: Foram arremessadas as argolas vermelhas nos números –24 e +8, e as argolas azuis nos números +16 e –4, que podem ser escritas na forma de expressão da seguinte forma:

$$\underset{\text{Início}}{0}\ \underset{\text{ganha}}{+\,(-24)}\ \underset{\text{ganha}}{+\,(+8)}\ \underset{\text{perde}}{-\,(+16)}\ \underset{\text{perde}}{-\,(-4)} = -28$$

Cada jogador ao fazer sua jogada arremessou as quatro argolas e montou a sua expressão numérica efetuando os seus cálculos adequadamente. A seguir, passou-se a vez para o próximo e assim sucessivamente até que todos tivessem completado a primeira rodada. O jogo foi concluído após o término da quarta rodada. Foi vencedor o aluno que alcançou o maior número de pontos na soma das quatro rodadas.

3ª aula: A professora iniciou a aula conversando com a turma sobre o jogo da aula anterior e levantou, juntamente com a turma, os pontos que eles haviam achado interessantes no jogo. A seguir fez os registros desses pontos no quadro para que eles pudessem anotar em seus cadernos. Depois, pediu para que eles se sentassem em duplas para realizar o teste que se encontra no apêndice F.

APÊNDICE F

Teste da subtração

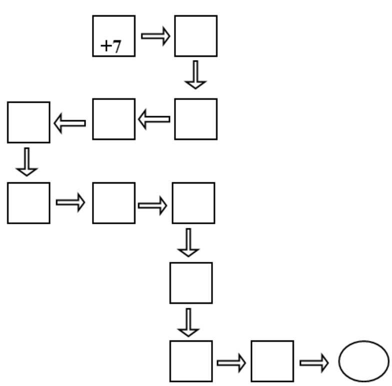
1) Durante as férias, Carla e Mateus foram para a serra. No início da viagem, ainda em sua cidade, Mateus verificou que a temperatura local era de 25° C. Já na serra, Carla viu que a temperatura era de 18° C. Qual foi a variação da temperatura ao longo da viagem?

2) Complete o quadrado mágico sabendo que a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais é sempre a mesma.

–3		–2
	0	
		+3

3) Complete a trilha conforme a indicação das setas:

- Vertical: adicione (–2) ⇧ ⇩
- Horizontal: subtraia (–5) ⇨ ⇦

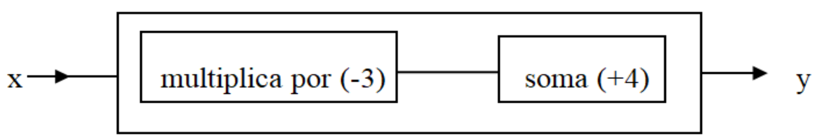


Em que número você chegou?_______

4) Escreva uma situação que represente a operação (+20) – (–5).

5) Uma pessoa encontra-se em uma câmara frigorífica cuja temperatura é de –8° C. Ao sair, encontrará uma temperatura ambiente de 23° C. Qual a variação de temperatura que essa pessoa terá de suportar?

6) O esquema abaixo representa uma máquina que leva um número inteiro **x** a outro número inteiro **y**.



Determine os valores de y para:
x = 1
x = 0

Determine os valores de quando:
y = 7
y = 13

7) Para continuar seus estudos neste e nos próximos anos, é conveniente que adições, subtrações e multiplicações com números inteiros sejam efetuadas quase automaticamente, para isso é preciso exercitar. Resolva as expressões abaixo registrando seus cálculos.

a) $(-23) + (-14) - (-56) =$

b) $(-5) \times (-3 + 14) - (-21) =$

c) $(-8 - 6) \times (-4) + (-3 + 7) =$

d) $(-12 + 31) - (-4) + (+26) =$