



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Bruno Polloni

**MODELAGEM DE PROBLEMA DE MEMBRANA
ORTOTRÓPICA VIA MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS HÍBRIDO**

Florianópolis

2019

Bruno Polloni

**MODELAGEM DE PROBLEMA DE MEMBRANA
ORTOTRÓPICA VIA MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS HÍBRIDO**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Me-
cânica para a obtenção do Grau de
Mestre em Engenharia Mecânica.
Orientador: Paulo de Tarso Rocha Men-
donça, Ph.D.

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Polloni, Bruno

Modelagem de problema de membrana ortótropica via método de elementos finitos híbrido / Bruno Polloni ; orientador, Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D., 2019.

83 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Método de Elementos Finitos. 3. Materiais Ortotrópicos. 4. Solução Fundamental. I. Rocha Mendonça, Ph.D., Paulo de Tarso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Bruno Polloni

**MODELAGEM DE PROBLEMA DE MEMBRANA
ORTOTRÓPICA VIA MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS HÍBRIDO**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por
banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

José Carlos de Carvalho Pereira, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original** e **final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Jonny Carlos da Silva, Dr. Eng.
Coordenador

Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D.
Orientador

Florianópolis, 13 de Fevereiro 2019.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, prof. Paulo de Tarso R. Mendonça pela orientação, esclarecimentos, dedicação e paciência. Aos professores do curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina por todos os ensinamentos transmitidos, imprescindíveis para minha formação.

A todos os amigos do Grupo de Análise e Projeto Mecânico GRANTE, em especial aos meus colegas Hebert, Douglas, Bruno, Luís e André pela companhia e grande ajuda.

Finalmente agradeço, à toda minha família e namorada pela compreensão e auxílio.

The first step is to establish that something is possible; then probability will occur.

Elon Musk

RESUMO

No presente trabalho implementou-se um modelo de estado plano de tensões usando o Método de Elementos Finitos Híbrido com funções de aproximação baseada em soluções fundamentais (FEM-HFS). A implementação foi utilizada para investigar os resultados de deslocamento, os efeitos da continuidade dos campos de tensão e a convergência do método. A continuidade inter-elementar é imposta mediante o uso de um princípio variacional modificado incorporando um campo de interface independente entre os elementos. A formulação pode envolver base equilibrada regular ou singular, no entanto as matrizes são, em ambos os casos, obtidas por integração em regiões regulares. As matrizes do domínio do elemento podem ser convertidas em integrais de contorno devido às características da base auto-equilibrada das soluções fundamentais. É realizada a discretização do problema para aplicação numérica via FEM-HFS e o código computacional foi implementado em linguagem Fortran. A malha é composta por elementos triangulares lineares de três nós para definir os resultados de deslocamentos no domínio de integração e elementos triangulares de até nove nós ao longo de cada aresta, em grade regular, para definir os deslocamentos inter-elementares. Por fim, o método é testado em problemas padrão com solução de referência disponível: são os casos de placa de material linear em regime elástico sob carregamento distribuído uniforme, de flexão para pequenas deformações e deslocamentos, além de problema de placa com concentração de tensões. Os resultados são comparados com a literatura e software Ansys[®].

Palavras-chave: Solução fundamental, método elementos finitos híbrido, base auto equilibrada, membrana ortotrópica, placa laminada

ABSTRACT

In the present work, a plane stress state model was implemented using the Hybrid Finite Element Method with the fundamental solutions approach (FEM-HFS). The implementation was used to investigate the displacement results, the effects of the continuity of the stress fields and the convergence of the method. Inter-element continuity is imposed by using a modified variational principle incorporating an independent interface field between the elements. The formulation may involve regular or singular self-balanced basis, however the matrices are obtained in both cases by integration into regular regions. The domain matrices of the element can be converted into boundary integrals because of the characteristics of the self-balanced base of the fundamental solutions. The discretization of the problem was performed for numerical application via FEM-HFS and the computational code was implemented in Fortran. The mesh is composed of linear triangular elements of three nodes to define the results of displacements in the integration domain and triangular elements of up to nine nodes in each eadge to define the inter-element displacements. Finally, was caried out simulations of a plate of linear material in elastic regime under uniform distributed load of bending for small deformations and displacements besides to analyze plate problem with concentration of tensions. The results were compared with the literature results available and Ansys[®] software.

Keywords: Fundamental solution, hybrid finite element method, self-balanced basis, orthotropic membrane , laminated plate.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Ilustração do plano de elasticidade linear: Domínio (Ω) e contorno (Γ).....	33
Figura 2 Ilustração da continuidade entre dois elementos e_1 e e_2 adjacentes, onde Γ_{Ie} é o contorno comum a ambos elementos.	43
Figura 3 <i>Intra-element</i> e <i>frame field</i> em um elemento particular na formulação híbrida.	46
Figura 4 Típica interpolação linear para campo de deslocamento entre-elementos em uma aresta do elemento aleatório.	49
Figura 5 Modelo físico de placa em forma de L em análise, com origem em $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = 0$	54
Figura 6 Malha triangular com: zero subdivisão na borda (a) M1; duas subdivisões (b) M2.....	55
Figura 7 Malha Ansys ref.: 2014 nós e 3826 elementos, utilizada como resultados de referência.	56
Figura 8 Exemplificação de aplicação dos pontos de plotagem com grade uniforme npi 22 x 22 utilizado neste trabalho aplicado a um elemento triangular genérico.....	56
Figura 9 Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $\gamma = 5$, em relação a diferentes números de pontos de integração npi e $npp = 22$ aplicada a malha M1.....	57
Figura 10 Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $\gamma = 5$, em relação a diferentes números de pontos de integração npi e $npp = 22$ aplicada a malha M1.....	57
Figura 11 Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1.....	58

Figura 12 Comportamento do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1. 59

Figura 13 Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1. 60

Figura 14 Comportamento da tensão σ_{22} na linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1. 60

Figura 15 Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4. 61

Figura 16 Comportamento do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4. 62

Figura 17 Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4. 62

Figura 18 Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4. 63

Figura 19 Comportamento do erro relativo do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3 , M4 e M5. 64

Figura 20 Comportamento do erro relativo do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3 , M4 e M5. 64

Figura 21 Comportamento do erro relativo da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3 , M4 e M5. 65

Figura 22 Comportamento do erro relativo da tensão σ_{22} ao longo

da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3, M4 e M5.....	65
Figura 23 Modelo físico de uma placa quadrada finita (100 mm x 100 mm) com furo central, $d = 10$ mm e carregamento unidirecional uniforme $p = 100$ MPa.	67
Figura 24 Malha triangular M1 em análise da placa quadrada com furo central.	68
Figura 25 Distribuição das tensões principais em torno de um furo circular com carga aplicada a $\theta = 45^\circ$ em relação as direções principais. Fonte: (LEKHNITSKII; TSAI; CHERON, 1968)	69
Figura 26 Malha de referência Ansys com 394 nós e 707 elementos, com refino localizado no contorno do furo.	71
Figura 27 Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha de $\chi_1 = 0$ mm, com $\gamma = 5$ e $npp = 22$, para malha M1, M2, Ansys e Ansys ref.....	72
Figura 28 Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha de $\chi_1 = 0$ mm, com $\gamma = 5$ e $npp = 22$, para malha M1, M2, Ansys e Ansys ref.	72
Figura 29 Ilustração da decomposição do modelo geométrico (a) em uma malha triangular usual de FEM (b) e em uma malha aplicável a FEM-HFS (c).	80
Figura 30 Modelo de geração dos nós internos da malha híbrida aplicável ao FEM-HFS.....	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Propriedades e características geométricas da lâmina ortotrópica da placa em L.	54
Tabela 2	Descriminação das malhas utilizadas para análise para o problema de placa em L.	55
Tabela 3	Propriedades e características geométricas da lâmina ortotrópica da placa quadrada com furo central.	66
Tabela 4	Descriminação das malhas utilizadas para análise para o problema de placa com furo central.	67
Tabela 5	Fator de concentração de tensão K_t no ponto $(x,y)=(0;5)$ para diferentes propriedades de material e malhas.	70

LISTA DE ABREVIACOES

MEF	Método de Elementos Finitos
MEF-H	Método de Elementos Finitos Híbrido
MEF-HT	Método de Elementos Finitos Híbrido-Trefftz
MEF-HFS	Método de Elementos Finitos Híbrido Baseado em So- lução Fundamental
BEM	Método de Elementos de Contorno
GRANTE	Grupo de Análise e Projeto Mecânico
DOF	Graus de Liberdade

LISTA DE SIMBOLOS

χ_i	Coordenadas cartesianas
Ω	Domínio global do corpo
Γ	Contorno global do corpo
Γ_u	Contorno global das condições de deslocamentos prescritos
Γ_t	Contorno global das condições de esforços prescritos
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a superfície média
t_i	Componente da tração atuando no contorno
u_i	Componente do campo de deslocamentos
ε_{ij}	Componente do campo de deformações
σ_{ij}	Componente do campo de tensões
\mathbf{u}	Vetor componentes dos deslocamentos
\mathbf{x}	Posição no domínio
ε	Vetor de deformação
\mathbf{L}	Operador diferencial
\mathbf{D}	Matriz constitutiva do material
D_{ij}	Componentes da matriz constitutiva do material
\tilde{D}_{ij}	Componentes da matriz constitutiva reduzida do material
\tilde{S}_{ij}	Componentes da matriz constitutiva reduzida inversa do material
\mathbf{b}	Vetor forças de corpo
b_i	Componentes do vetor forças de corpo
$\tilde{\mathbf{u}}$	Vetor componentes dos deslocamentos no contorno das con-

dições essenciais

- $\bar{\mathbf{t}}$ Vetor tração atuando no contorno das condições naturais
- \mathbf{t} Vetor tração atuando no contorno
- \mathbf{A} Matriz transformação relacionada as direções cossenos ao vetor normal \mathbf{n}
- \mathbf{x}_s Posição de aplicação das soluções fundamentais (*source points*)

- u_{ik}^* Componente i do descolamento induzido
- δ Função delta de Dirac
- Π_e Funcional híbrido de um elemento
- Ω_e Domínio do elementos
- Γ_e Contorno do elementos
- Γ_{ue} Contorno com deslocamentos prescritos do elemento
- Γ_{te} Contorno com esforços prescritos do elemento
- Γ_{Ie} Contorno interno comum a dois elementos adjacentes
- f Função suave qualquer
- n_i Componentes cartesianas do vetor unitário normal a superfície
- n_s Número de *source points*
- N_e Funções de aproximação internas
- \mathbf{c}_e Vetor coeficientes incógnitos
- \mathbf{x}_o Posição de um ponto no contorno de elemento
- \mathbf{x}_c Centróide geométrico do elemento
- γ Coeficiente adimensional que controla a distância física do ponto \mathbf{x}_s ao contorno do elemento
- \mathbf{B}_e Matriz campo de deformação

\mathbf{T}_e	Matriz campo de tensões
\mathbf{Q}_e	Matriz campo de esforços
$\tilde{\mathbf{N}}_e$	Funções de aproximação externas
\mathbf{d}_e	Vetor deslocamentos nodais
\mathbf{K}_e	Matriz rigidez do elemento
\mathbf{g}_e	Vetor forças nodais
U_e	Energia de deformação do elemento
\mathbf{H}_e	Matriz de deformabilidade interna do elemento
\mathbf{G}_e	Matriz de deformabilidade externa do elemento
\mathbf{R}_e	Matriz de recuperação movimento de corpo rígido
\mathbf{r}_e	Vetor de recuperação movimento de corpo rígido
\mathbf{c}_0	Vetor movimento de corpo rígido
\mathbf{E}_{ij}	Módulo de elasticidade na direção ij
\mathbf{G}_{ij}	Módulo de cisalhamento na direção ij

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	CONTEXTO	27
1.2	OBJETIVOS	28
1.3	ESTRUTURA DO TEXTO	29
2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO	31
2.1	TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR	32
2.1.1	Relações deformação-deslocamento	33
2.1.2	Equações constitutivas	34
2.1.3	Equações de equilíbrio	36
2.1.4	Condições de contorno	36
2.2	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL PARA ELASTICIDADE PLANA ORTOTRÓPICA	37
2.3	FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA FEM-HFS	40
2.4	DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	44
2.4.1	Campo de deslocamento interno do elemento	45
2.4.2	Pontos de aplicação das soluções fundamentais	45
2.4.3	Campo de deformações	47
2.4.4	Campo de tensões	47
2.4.5	Esforços no contorno	48
2.4.6	Campo de deslocamento entre-elementos	48
2.4.7	Funcional discretizado	50
2.4.8	Condições de estacionaridade	50
2.4.9	Matriz de rigidez do elemento	51
2.4.10	Recuperação do movimento de corpo rígido	51
3	RESULTADOS	53
3.1	MODELO DE PLACA EM L	53
3.2	MODELO DE PLACA ORTOTRÓPICA FINITA COM FURO CIRCULAR	66
4	CONCLUSÕES	73

REFERÊNCIAS	75
APÊNDICE A – Procedimento computacional para formulação da matriz conectividade híbrida e fluxo de cálculos do FEM-HFS	79

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

Entre outras coisas o desenvolvimento tecnológico está intrinsecamente relacionado ao desenvolvimento de novos materiais. A ideia de materiais compostos não é nova, uma vez que na natureza pode-se observar inúmeros exemplos, tal como a madeira, um material composto fibroso. A partir dos anos 60, há uma grande demanda por materiais com maior rigidez e resistência e que, ao mesmo tempo, aliassem um baixo peso. Atualmente, elementos estruturais como vigas e placas de materiais compostos são usados largamente em muitos setores da indústria como em equipamentos, em dutos ou em vasos de pressão, na indústria aeroespacial muitas vezes sob forma de compostos laminados, em navios, pontes (MENDONÇA, 2005).

Esta utilização é justificada pelo fato de que, nestas estruturas, o carregamento é suportado principalmente por tensões coplanares, resultando em uma geometria muito compacta, mas ao mesmo tempo rígida, reforçando a caracterização de componentes que aliam o baixo peso e a alta capacidade de carga.

Muitos problemas de engenharia cujos modelos matemáticos podem ser expressos na forma diferencial ou na forma integral são resolvidos unicamente via aproximações numéricas, devido sua complexidade para derivação teórica. As técnicas largamente utilizada para resolver estes problemas são o Método de Elementos Finitos (MEF) e Método de Elementos de Contorno (BEM). O MEF caracteriza-se por discretizar o domínio do problema bem como o contorno da região a ser analisada. Em contrapartida, o BEM, discretiza apenas o contorno da região a ser avaliada. As simplificação do modelo de problema real para modelo matemático expresso pelo MEF possibilita a economia considerável de trabalho numérico além de constituir uma maneira

muito conveniente para tratar regiões não limitadas (como os meios semi-infinitos de problemas de geomecânica) através de meios numéricos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984) (BREBBIA; WALKER, 1980) em contraste ao BEM.

Sob a ótica matemática, os modelos de vigas e placas apresentam um desafio interessante por diversos fatores, por exemplo: (1) seja pelo acoplamento das equações diferenciais que surgem com não-linearidades geométricas ou acoplamento de relações constitutivas; (2) pelo surgimento de problemas numéricos como o travamento por cisalhamento (GARCIA et al., 2000); (3) pela exigência de alta regularidade das funções de aproximação em alguns modelos, como os de Kirchhoff e de ordem superior (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009), não providas naturalmente pelo MEF. Desta forma, fica claro o grande interesse, tanto industrial quanto acadêmico em estudar, analisar e prever o comportamento dessas estruturas.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é implementar o modelo de estado plano de tensões usando o Método de Elementos Finitos Híbrido com aproximação via solução fundamental (FEM-HFS), para modelagem de placa de material composto laminado ortotrópico, simétrico, sob carregamento em flexão de membrana, para pequenas deformações e deslocamentos e, analisar problemas de concentração de tensões. Visa-se usar a implementação para investigar os resultados de deslocamento, os efeitos da continuidade dos campos de tensão e a convergência do método. Para tal, foi utilizado a linguagem FORTRAN, esta desenvolvida na década de 1950 e utilizada até os dias de hoje nas áreas da Ciência da Computação e análise numérica, e bibliotecas de dados disponíveis no GRANTE. Finalmente, realizaram-se testes comparativos do método implementado com software Ansys®.

1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

De modo a organizar o documento e facilitar o entendimento do texto, esta dissertação está organizada como segue. No Capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica dos principais tópicos que envolvem este trabalho.

Na Seção 2.1 é apresentado uma breve revisão bibliográfica referente a teoria de elasticidade linear de materiais ortotrópicos. Na Seção 2.2 são apresentados os conceitos principais da solução fundamental aplicada a elasticidade plana ortotrópica. Na Seção 2.3 introduz as bases da formulação variacional para o Método de elementos Finitos Híbrido baseado em solução fundamental (FEM-HFS) e por fim, na Seção 2.4 a é apresentada as etapas da discretização do modelo em Elementos Finitos.

O Capítulo 3 abrange os resultados referente aos modelos dois modelos propostos: modelo de placa em L e modelo de placa ortotrópica infinita com furo circular.

Encerra-se este trabalho com o Capítulo 4, no qual são feitas as considerações finais deste trabalho bem como sugestões de trabalhos futuros. Por fim, no apêndice A é apresentado os detalhes das etapas operacionais referentes aos algoritmos numéricos para criação da malha híbrida utilizados neste trabalho e um breve fluxograma das etapas de cálculo.

2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO

O Método de Elementos Finitos Híbrido-Trefftz (FEM-HT) originou-se com dois trabalhos pioneiros de Jirousek (JIROUSEK, 1978), (JIROUSEK; LEON, 1977). O método consiste em uma versão modificada do Método Variacional de Trefftz apresentado primeiramente por Trefftz em 1926 (TREFFTZ, 1926) em contrapartida ao Método Variacional de Rayleigh-Ritz. O FEM-HT é considerado um método computacionalmente eficiente para complexos problemas de contorno (QIN, 2000). O método também apresentou-se eficiente para a modelagem de placas de Mindlin (CHOO; CHOI; LEE, 2010), (JIROUSEK, 1987).

Os métodos atualmente existentes, tais como MEF e FEM-HT, possuem algumas desvantagens em resolver problemas de engenharia com materiais compostos e efeitos locais, tal como furos ou trincas (QIN; WANG, 2008) (WANG; QIN, 2009). No MEF, faz-se necessário avaliar integrais que necessitam muito tempo computacional para serem resolvidas além da necessidade de refino local de malha para análise dos efeitos locais (WANG; QIN, 2010). A principal desvantagens do método FEM-HT consiste na necessidade de construção das funções polinomiais Trefftz, a necessidade de escolher os termos a serem truncados do polinômio, além da complexidade na transformação das coordenadas necessária para estabilidade do método (WANG; QIN, 2010). Para transpor os problemas mencionados, (WANG; QIN, 2010) desenvolveram um novo método híbrido baseado no método FEM-HT. FEM-HFS é um método híbrido que usa dois campos de deslocamentos, a princípio independentes, sendo um campo de deslocamentos internos ao elemento, conhecido como *intra-element field* (QIN, 2000), e um campo de deslocamento definido apenas nas interfaces entre os elementos, conhecido como *frame field* (QIN, 2000), responsável por impor, de forma fraca, a posteriori, a continuidade de deslocamentos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

O campo interno deve ser escolhido de forma a satisfazer, *a priori*, as equações locais de equilíbrio do problema (QIN, 2000). A continuidade inter-elementar é imposta mediante o uso de um princípio variacional modificado incorporando um campo de interface independente entre os elementos (QIN, 1994). A formulação pode envolver base equilibrada regular ou singular, mas as matrizes são obtidas por integração em regiões regulares. Ao final da formulação a matriz de rigidez é simétrica e positiva semi-definida. As matrizes do domínio do elemento podem ser convertidas em integrais de contorno devido às características da base auto-equilibrada, o que pode reduzir drasticamente o custo do processo de integração em diversos tipos de problemas. Devido às características da formulação híbrida, torna-se possível desenvolver diretamente elementos de placa livres de *locking* de cisalhamento, como constatou Jirousek (JIROUSEK; WRÓBLEWSKI; SZYBIŃSKI, 1995), em seu trabalho para placas homogêneas-isotrópicas.

O Método de Elementos Finitos Híbrido baseado em soluções fundamentais (FEM-HFS) utilizado neste trabalho baseia-se em uma malha triangular linear que é utilizada para definir os resultados de deslocamentos nas interfaces dos elementos e o domínio de integração numérica para material ortotrópico sob estado plano de tensões. O desenvolvimento matemático do FEM-HFS pode ser dividido em duas etapas:

1. Criação numérica de malha triangular linear, utilizada para definição dos resultados nas interfaces dos elementos;
2. Criação de uma sub-malha mediante a subdivisão das arestas dos elementos da malha linear (em até 8 subdivisões por aresta) utilizada para gerar os pontos de aplicação das soluções fundamentais.

2.1 TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Na teoria da elasticidade linear assume-se que o material de estudo comporta-se linearmente e as mudanças na orientação do corpo

no estado deformado são negligenciadas. Como resultado, podem ser usadas as relações deformação-deslocamento e as equações de equilíbrio referentes a geometria não deformada (QIN, 2000). Por conveniência, no decorrer do presente trabalho será adotado o sistema de coordenadas cartesianas (χ_1, χ_2) , como pode ser observado na Figura 1.

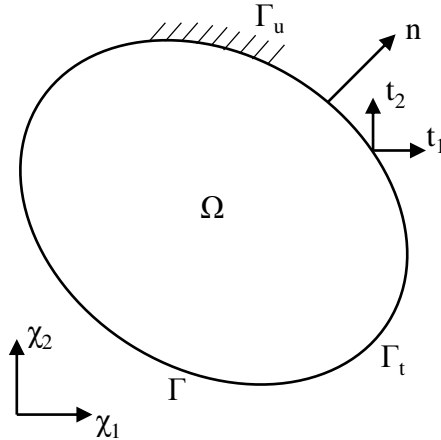


Figura 1: Ilustração do plano de elasticidade linear: Domínio (Ω) e contorno (Γ).

Considera-se u_i , ε_{ij} e σ_{ij} , respectivamente, as componentes dos campos de deslocamento, deformação e tensão, com subíndices i e j que variam de $(1,2)$. O estado plano de tensões considera duas componentes de deslocamentos globais, u_1 e u_2 , definidos nas direções globais χ_1 , χ_2 , respectivamente como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

2.1.1 Relações deformação-deslocamento

A deformação é relacionada aos deslocamentos mediante a equação

$$\varepsilon = \mathbf{L}^T \mathbf{u} , \quad (2.2)$$

onde $\varepsilon = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \gamma_{12}\}^T$ é o vetor de deformação e o operador diferencial \mathbf{L} é dado por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial_{,1} & 0 & \partial_{,2} \\ 0 & \partial_{,2} & \partial_{,1} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde, a vírgula no subíndice representa a derivação em relação as coordenadas cartesianas, ou seja, $\partial_{,i} = \partial/\partial\chi_i$, $\partial_{,ij} = \partial^2/\partial\chi_i\partial\chi_j$ com subíndices i e j que variam de (1,2).

Rearranjando as equações (2.2) e (2.3) obtemos a equação cinemática

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{,1} & 0 \\ 0 & \partial_{,2} \\ \partial_{,2} & \partial_{,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} . \quad (2.4)$$

2.1.2 Equações constitutivas

Em problemas de elasticidade 2D, a relação tensão/deformação do material nas direções principais pode ser relacionada por meio da Lei de Hooke, que na forma compacta é definida por

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon , \quad (2.5)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material.

No presente trabalho, como o objetivo é avaliar materiais ortotrópicos homogêneos lineares no regime elástico, a equação compacta (2.5) tem a forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Uma placa é um sólido tridimensional com uma geometria característica que pode ser descrita como dois planos paralelos, chamados de faces, separados por uma espessura h . Paralela às faces, é considerada uma superfície de referência Ω , geralmente localizada na superfície média. A placa possui uma única normal \mathbf{n} e, pelo fato de ser plana, esta é constante em todo ponto da placa. Devido à sua pequena espessura em relação às outras dimensões (comprimento e largura), frequentemente não é necessário utilizar Equações de Elasticidade 3D, podendo ser gerada uma formulação simplificada 2D. Assim, pode-se assumir o problema como um de estado plano de tensões, onde o corpo em análise possui deformações transversais nulas, portanto, problemas de placas com espessuras muito inferiores as dimensões globais, em relação ao plano $\chi_1 - \chi_2$, (Figura 1), podem ser facilmente avaliados. Desta forma, a Lei de Hooke (2.6) pode ser reduzida a,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & 0 \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

onde $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ representa deformação de engenharia. As componentes do tensor elástico podem ser invertidas mediante as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{11} &= \frac{\tilde{S}_{22}}{\Lambda}, & \tilde{D}_{22} &= \frac{\tilde{S}_{11}}{\Lambda}, & \tilde{D}_{12} &= \frac{\tilde{S}_{12}}{\Lambda}, & \tilde{D}_{66} &= \frac{1}{\tilde{S}_{66}}, \\ \Lambda &= \tilde{S}_{11}\tilde{S}_{22} - \tilde{S}_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\tilde{D}_{ij} = D_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) e $\tilde{D}_{66} = D_{66}$.

2.1.3 Equações de equilíbrio

Para problemas no estado plano de tensões, as equações que caracterizam o equilíbrio do plano deformado são dadas por

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \chi_2} + b_1 = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \chi_2} + b_2 = 0, \quad (2.10)$$

onde b_1 e b_2 são as componentes das forças de corpo nas direções cartesianas. Assim as equações de equilíbrio na forma reduzida podem ser escritas como

$$\mathbf{L}\sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (2.11)$$

2.1.4 Condições de contorno

Condições de contorno podem ser aplicadas diretamente nos deslocamentos ou em forças tratativas/compressivas. As condições de contorno de deslocamentos ou condições essenciais, de Dirichlet, são deslocamentos prescritos, enquanto as condições de contorno tratativas/-compressivas ou naturais, de Neumann, exigem que as trações induzidas devam estar em equilíbrio com as forças externas aplicadas a um ponto específico no contorno do corpo (QIN; WANG, 2008). Matematicamente, as condições de contorno essenciais são aplicadas no contorno de deslocamentos, ou seja, em Γ_u ,

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \Gamma_u. \quad (2.12)$$

Enquanto as condições naturais aplicadas em Γ_t são

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em} \quad \Gamma_t, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{t} é o vetor de tração e \mathbf{A} é a matriz de transformação relacionada as direções dos cossenos ao vetor $\mathbf{n} = \{n_1 \ n_2\}^T$ normal à superfície

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 \\ \tau_{12} n_1 + \sigma_2 n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

2.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL PARA ELASTICIDADE PLANA ORTOTRÓPICA

As soluções fundamentais, também conhecidas na literatura como funções de Green, são essenciais para o desenvolvimento do método híbrido, uma vez que permitem converter as integrais de domínio em integrais de contorno.

No estado plano num corpo infinito de material ortotrópico, para uma força unitária agindo no ponto de fonte \mathbf{x}_s (*source point*), as soluções fundamentais singulares correspondentes em um ponto \mathbf{x} satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}\partial_{,11} + \tilde{D}_{66}\partial_{,22} & (\tilde{D}_{12} + \tilde{D}_{66})\partial_{,12} \\ (\tilde{D}_{12} + \tilde{D}_{66})\partial_{,12} & \tilde{D}_{22}\partial_{,22} + \tilde{D}_{66}\partial_{,11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1k}^* \\ u_{2k}^* \end{Bmatrix} + \{\delta_{k1}, \delta_{k2}\}^T \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = 0, \quad (2.16)$$

onde as soluções u_{1k}^* e u_{2k}^* são dadas por Rizzo and Shippy (1970) como

$$\begin{aligned}
u_{11}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) &= Q \left(\sqrt{\lambda_1} A_2^2 \ln \rho_1 - \sqrt{\lambda_2} A_1^2 \ln \rho_2 \right), \\
u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) &= u_{21}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = Q A_1 A_2 \left(\arctan \frac{r_2}{\sqrt{\lambda_2} r_1} - \arctan \frac{r_2}{\sqrt{\lambda_1} r_1} \right), \\
u_{22}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) &= -Q \left(\frac{A_1^2}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \rho_1 - \frac{A_2^2}{\sqrt{\lambda_2}} \ln \rho_2 \right),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ é a função delta Dirac, u_{ik}^* é a componente i do deslocamento induzido no ponto \mathbf{x} . Uma força unitária é aplicada ao longo da direção k no ponto de fonte \mathbf{x}_s , e

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2\pi(\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{S}_{22}}, \\
\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{2\tilde{S}_{12} + \tilde{S}_{66}}{\tilde{S}_{22}}, \\
\lambda_1 \lambda_2 &= \frac{2\tilde{S}_{11}}{\tilde{S}_{22}}, \\
A_i &= \tilde{S}_{12} - \lambda_i \tilde{S}_{22}, \\
\rho_i &= \sqrt{\lambda_i r_1^2 + r_2^2}, \\
r_i &= x_i - x_{si}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim, realizando a substituição das equações (2.17) na equação cinemática (2.4) obtêm-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{111}^* &= \frac{\partial u_{11}^*}{\partial \chi_1} = B_1 r_1, \\
\varepsilon_{221}^* &= \frac{\partial u_{21}^*}{\partial \chi_2} = \frac{\partial u_{12}^*}{\partial \chi_2} = -B_3 r_1, \\
\gamma_{121}^* &= \frac{\partial u_{21}^*}{\partial \chi_1} + \frac{\partial u_{11}^*}{\partial \chi_2} = (B_3 + B_2) r_2, \\
\varepsilon_{112}^* &= \frac{\partial u_{12}^*}{\partial \chi_1} = B_3 r_2, \\
\varepsilon_{222}^* &= \frac{\partial u_{22}^*}{\partial \chi_2} = B_5 r_2, \\
\gamma_{122}^* &= \frac{\partial u_{12}^*}{\partial \chi_2} + \frac{\partial u_{22}^*}{\partial \chi_1} = (-B_3 + B_4) r_1,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 &= Q \left(\sqrt{\lambda_1} A_2^2 \frac{\lambda_1}{\rho_1^2} - \sqrt{\lambda_2} A_1^2 \frac{\lambda_2}{\rho_2^2} \right), \\
B_2 &= Q \left(\sqrt{\lambda_1} A_2^2 \frac{1}{\rho_1^2} - \sqrt{\lambda_2} A_1^2 \frac{1}{\rho_2^2} \right), \\
B_3 &= Q A_1 A_2 \frac{(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})(r_2^2 - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} r_1^2)}{(\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} r_1^2 + r_2^2)^2 + (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})^2 r_1^2 r_2^2}, \\
B_4 &= -Q \left(\frac{A_1^2}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{\lambda_1}{\rho_1^2} - \frac{A_2^2}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{\lambda_2}{\rho_2^2} \right), \\
B_5 &= -Q \left(\frac{A_1^2}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{A_2^2}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{1}{\rho_2^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ao realizar o mesmo procedimento de substituição, para a equação constitutiva (2.7), obtêm-se as seguintes relações de tensões

$$\begin{aligned}
\sigma_{111}^* &= \tilde{D}_{11}\varepsilon_{111}^* + \tilde{D}_{12}\varepsilon_{221}^* = \left(\tilde{D}_{11}B_1 - \tilde{D}_{12}B_3 \right) r_1, \\
\sigma_{221}^* &= \tilde{D}_{12}\varepsilon_{111}^* + \tilde{D}_{22}\varepsilon_{221}^* = \left(\tilde{D}_{12}B_1 - \tilde{D}_{22}B_3 \right) r_1, \\
\sigma_{121}^* &= \tilde{D}_{66}\gamma_{121}^* = \tilde{D}_{66} (B_3 + B_2) r_2, \\
\sigma_{112}^* &= \tilde{D}_{11}\varepsilon_{112}^* + \tilde{D}_{12}\varepsilon_{222}^* = \left(\tilde{D}_{11}B_3 + \tilde{D}_{12}B_5 \right) r_2, \\
\sigma_{222}^* &= \tilde{D}_{12}\varepsilon_{112}^* + \tilde{D}_{22}\varepsilon_{222}^* = \left(\tilde{D}_{12}B_3 + \tilde{D}_{22}B_5 \right) r_2, \\
\sigma_{122}^* &= \tilde{D}_{66}\gamma_{122}^* = \tilde{D}_{66} (-B_3 + B_4) r_1.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA FEM-HFS

Na presente seção, um sumário da formulação variacional é mostrado para problemas típicos de estado plano de tensões de materiais ortotrópicos, apresentado por Wang e Qin (WANG; QIN, 2010). A presente formulação descreve um problema de equilíbrio de um corpo que ocupa um domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$, onde Γ_t e Γ_u são as regiões sob força e deslocamento prescrito, tais que $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$. Incluindo as forças de corpo, o funcional híbrido para um elemento qualquer e é dado por

$$\Pi_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \mathbf{t} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma, \tag{2.22}$$

onde \mathbf{u} e $\tilde{\mathbf{u}}$ são o campo independente de deslocamento intra-elemento e o campo de interface entre-elementos, respectivamente. Ω_e e Γ_e são domínio e contorno do elemento. Γ_{te} é a parte do contorno do elemento comum ao contorno global Γ_t de condições de contorno de Neumann. O contorno do elemento é considerado dividido em $\Gamma_e = \Gamma_{ue} + \Gamma_{te} + \Gamma_{Ie}$ onde Γ_{ue} é a parte de Dirichlet e Γ_{Ie} a parte de contorno interno com outro elemento. Assim, $\Gamma_{te} = \Gamma_e \cap \Gamma_t$ e $\Gamma_{ue} = \Gamma_e \cap \Gamma_u$. A última integral é o termo adicional em relação ao funcional comumente utilizado no MEF, obtido mediante a primeira variação de Π_e em relação t_i , u_i e \tilde{u}_i

$$\begin{aligned} \delta\Pi_e = & \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{te}} \delta\bar{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\delta\tilde{\mathbf{u}} - \delta\mathbf{u}) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A primeira integral da equação (2.23) pode ser manipulada mediante o uso da identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta\mathbf{u}), \quad (2.24)$$

resultando em

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta\mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega. \quad (2.25)$$

Aplicando o teorema do divergente no penúltimo termo da equação (2.25) tem-se

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{u} \, d\Omega = - \int_{\Omega_e} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (2.26)$$

Assim, o funcional $\delta\Pi_e$ da equação (2.23) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \delta\Pi_e = & \int_{\Omega_e} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_e} \delta\bar{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\delta\tilde{\mathbf{u}} - \delta\mathbf{u}) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A segunda integral da equação (2.27) pode ser cancelada com o último termo da última integral. A integral do penúltimo termo pode ser separada nas parcelas $\Gamma_e = \Gamma_{ue} \cup \Gamma_{te} \cup \Gamma_{Ie}$. Assim, a manipulação do conjunto de termos pertencentes ao contorno na equação (2.27) resulta

$$\begin{aligned}
I &= - \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\delta \tilde{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{u}) \, d\Gamma, \\
&= - \int_{\Gamma_{te}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{t} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \\
&\quad \int_{\Gamma_{ue}} \mathbf{t} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Ie}} \mathbf{t} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma, \\
&= - \int_{\Gamma_{te}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{ue}} \mathbf{t} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \\
&\quad \int_{\Gamma_{Ie}} \mathbf{t} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Como $\delta \tilde{\mathbf{u}} = 0$ em Γ_{ue} , o penúltimo termo da equação (2.28) se anula. Logo, para garantir a continuidade de forças e deslocamentos nas interfaces inter-elementares usa-se o teorema de Green de conversão entre integral de domínio e de contorno

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\Gamma_e} f n_i \, d\Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, d, \tag{2.29}$$

para qualquer função suave f , a primeira variação de Π_e (2.27) pode ser simplificada

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_e &= - \int_{\Omega_e} (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{te}} (t_i - \bar{t}_i) \delta \tilde{u}_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \delta t_i (\tilde{u}_i - u_i) \, d\Gamma + \\
&\quad \int_{\Gamma_{Ie}} t_i \delta \tilde{u}_i \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Considerando a energia potencial total modificada associada a dois elementos contíguos $\Pi_{e_1} + \Pi_{e_2}$ a variação pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{e_1} + \delta\Pi_{e_2} = & - \int_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_2}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{te_1} \cup \Gamma_{te_2}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{e_1} \cup \Gamma_{e_2}} \delta\mathbf{t} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Ie_1}} \mathbf{t}_1 \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Ie_2}} \mathbf{t}_2 \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

As últimas duas integrais são feitas no contorno de elemento e_1 que é comum ao elemento e_2 , bem como na borda do elemento e_2 comum ao do elemento e_1 , como pode ser facilmente visualizado na Figura 2. Assim, essas duas integrais podem ser arranjadas por

$$\int_{\Gamma_{Ie}} (\mathbf{t}_{e_1} + \mathbf{t}_{e_2}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma. \quad (2.32)$$

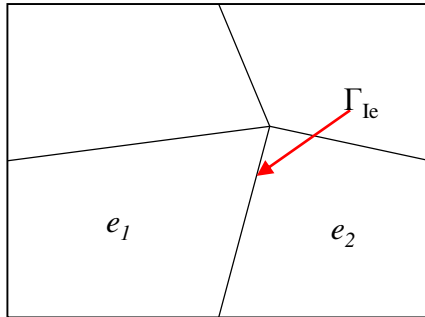


Figura 2: Ilustração da continuidade entre dois elementos e_1 e e_2 adjacentes, onde Γ_{Ie} é o contorno comum a ambos elementos.

Observando as equações (2.30)-(2.32), onde a solução buscada deve ser tal que $\delta\Pi_e = 0$ para funções $\delta\mathbf{u}$, $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ e $\delta\mathbf{t}$, o teorema fundamental do cálculo variacional mostra que as condições de otimalidade de Π são

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \\
\mathbf{t} &= \bar{\mathbf{t}}, \quad \forall x \in \Gamma_{te}, \\
\mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall x \in \Gamma_e, \\
\mathbf{t}_{e_1} + \mathbf{t}_{e_2} &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_{te},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

onde \mathbf{t}_{e_1} e \mathbf{t}_{e_2} são trações ao longo da borda Γ_{Ie} comum entre dois elementos adjacentes que garantem a continuidade inter-elementares.

As condições de estacionaridade apresentadas na equação (2.33) garantem que a minimização do funcional Π_e satisfaça as condições locais de equilíbrio do elemento, as condições de contorno de força e as condições de continuidade inter-elementares, contanto que as condições de Dirichlet sejam satisfeitas *a priori*.

Aplicando o teorema de Green novamente, desta vez diretamente no funcional Π_e (2.30) obtêm-se

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma} t_i u_i \, d\Gamma - \int_{\Omega_e} \sigma_{ij,j} u_i \, d\Omega \right] - \int_{\Gamma_{te}} \bar{t}_i \tilde{u}_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} t_i (\tilde{u}_i - u_i) \, d\Gamma. \tag{2.34}$$

Uma vez que $\sigma_{ij,j} = 0$ devido ao uso da base auto-equilibrada, e subdividindo as regiões de contorno, obtêm-se o funcional híbrido

$$\Pi_e = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} t_i u_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{te}} \bar{t}_i \tilde{u}_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} t_i \tilde{u}_i \, d\Gamma. \tag{2.35}$$

Como inicialmente comentado, o funcional híbrido modificado é composto apenas por integrais de contorno devido as características da base auto-equilibrada que reduz o custo computacional no processo de integração (QIN, 1994).

2.4 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A discretização é feita tomando uma base de funções $\phi_n(\mathbf{x})$ que satisfazem as equações diferenciais de equilíbrio de Navier (2.11). Em problemas de elasticidade, dois campos de deslocamentos, a princípio

independentes, são assumidos: um campo de deslocamentos internos ao elemento, conhecido como *intra-element field* (QIN, 2000), e um campo de deslocamento definido apenas nas interfaces entre os elementos, conhecido como *frame field* (QIN, 2000), responsável por impor, de forma fraca, a posteriori, a continuidade de deslocamentos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

2.4.1 Campo de deslocamento interno do elemento

O campo de deslocamentos interno ao elemento é obtido mediante a combinação linear das soluções fundamentais do problema de interesse e é expresso como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_s} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sj}) & u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sj}) \\ u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sj}) & u_{22}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sj}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_e(\mathbf{x})\mathbf{c}_e, \quad (\forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \forall \mathbf{x}_{sj} \notin \Omega_e), \quad (2.36)$$

onde n_s é o numero de pontos de fonte \mathbf{x}_{sj} ($j = 1, 2, \dots, n_s$) a qual são arranjados externamente ao domínio do elemento, como pode ser visualizado na Figura 3.

$\mathbf{N}_e(\mathbf{x})$ é uma matriz formada pelas funções de aproximação e \mathbf{c}_e o vetor de coeficientes incógnitos que são dados como

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} u_{11}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{s1}) & u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{s1}) & \cdots & u_{11}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sn_s}) & u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sn_s}) \\ u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{s1}) & u_{22}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{s1}) & \cdots & u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sn_s}) & u_{22}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{sn_s}) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{c}_e = \left\{ c_{11} \quad c_{21} \quad \cdots \quad c_{1n_s} \quad c_{2n_s} \right\}^T. \quad (2.38)$$

2.4.2 Pontos de aplicação das soluções fundamentais

Desta forma, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ satisfaz *a priori* as equações de Navier, quaisquer que sejam os valores incógnitos em \mathbf{c}_e . Portanto, para deter-

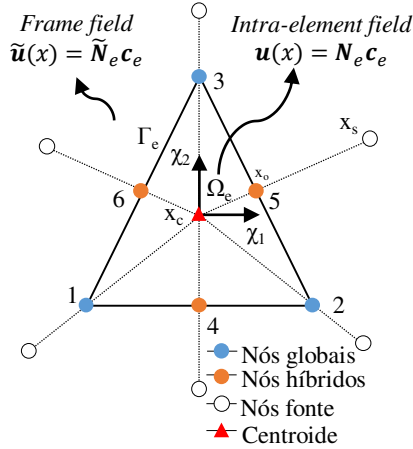


Figura 3: *Intra-element* e *frame field* em um elemento particular na formulação híbrida.

minar adequadamente os pontos de aplicação das soluções fundamentais externamente ao domínio do elemento, ou seja, os pontos de fonte, aplica-se (WANG; QIN, 2009),

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_o + \gamma(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_c) \quad (2.39)$$

onde γ é coeficiente adimensional que controla a distância física do ponto de fonte ao contorno do elemento, \mathbf{x}_o é o ponto no contorno do elemento e \mathbf{x}_c é o centro geométrico do elemento, como observado na Figura 3.

São utilizados os nós globais dos elementos juntamente com a criação de nós extras, chamados de nós híbridos, gerados mediante a subdivisão das faces de cada elemento, com a finalidade de auxiliar na criação dos pontos de fonte. Segundo Qin (2000), os pontos de fonte devem possuir a mesma quantidade de nós do elemento para prevenção de energia de modos espúrios bem como manter a matriz rigidez do elemento não singular.

Adicionalmente, como o parâmetro γ controla a distância física

do ponto de fonte ao contorno do elemento alguns cuidados devem ser tomados. Primeiramente, se $\gamma = 0$ as singularidades das soluções fundamentais não podem ser evitadas devido a sobreposição dos pontos de fonte e os pontos físicos dos nós. Então, devem-se utilizar valores de $\gamma > 0$ para evitar singularidades. Além disso, caso os valores de γ sejam pequenos, estes podem afetar a precisão numérica uma vez que se encontram próximos a pontos de singularidade da solução fundamental. Caso os valores de γ sejam muito elevados podem gerar instabilidade na solução e erros de arredondamento (WANG; QIN, 2010).

2.4.3 Campo de deformações

O campo de deformações é obtido mediante a substituição da equação (2.36) na equação (2.2), que resulta

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{L}^T \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{c}_e, \quad (2.40)$$

onde

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{L}^T \mathbf{N}_e, \quad (2.41)$$

com

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \varepsilon_{211}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \varepsilon_{111}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \varepsilon_{211}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \\ \varepsilon_{122}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \varepsilon_{222}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \varepsilon_{122}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \varepsilon_{222}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \\ \varepsilon_{112}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \varepsilon_{212}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \varepsilon_{112}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \varepsilon_{212}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

2.4.4 Campo de tensões

O campo de tensões é obtido mediante a substituição da equação (2.36) nas equações (2.2) e (2.5), o que resulta

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{DL}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{DL}^T \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{c}_e, \quad (2.43)$$

onde

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{DL}^T \mathbf{N}_e, \quad (2.44)$$

com

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \sigma_{211}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \sigma_{111}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \sigma_{211}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \\ \sigma_{122}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \sigma_{222}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \sigma_{122}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \sigma_{222}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \\ \sigma_{112}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \sigma_{212}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) & \cdots & \sigma_{112}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) & \sigma_{212}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{n_s}) \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

2.4.5 Esforços no contorno

De modo análogo, os esforços no contorno do elemento podem ser escritos como

$$\mathbf{t}_e = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{T}_e \mathbf{c}_e = \mathbf{Q}_e \mathbf{c}_e, \quad (2.46)$$

com,

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A} \mathbf{T}_e. \quad (2.47)$$

2.4.6 Campo de deslocamento entre-elementos

Em paralelo, um campo de deslocamento independente é aproximado ao longo da interface entre-elementos, ou seja, $\mathbf{u}_{e_1} = \mathbf{u}_{e_2}$ em $\Gamma_{e_1} \cap \Gamma_{e_2}$ para qualquer elemento adjacente

2.4.7 Funcional discretizado

Realizando a substituição das equações (2.36), (2.48) e (2.46) no funcional (2.35) tem-se o funcional discretizado

$$\Pi_e = -\frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{g}_e + \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad (2.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e &= \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}_e \, d\Gamma, \\ \mathbf{G}_e &= \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \tilde{\mathbf{N}}_e \, d\Gamma, \\ \mathbf{g}_e &= \int_{\Gamma_{te}} \tilde{\mathbf{N}}_e^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.4.8 Condições de estacionariedade

Para garantir a continuidade entre-elementos, os coeficientes incógnitos \mathbf{c}_e devem ser descritos em função dos graus de liberdade nodais (DOF), ou seja, o vetor de deslocamento \mathbf{d}_e . Assim, as condições de estacionariedade de Π_e geram as condições

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{c}_e^T} = -\mathbf{H}_e \mathbf{c}_e + \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{d}_e^T} = \mathbf{G}_e^T \mathbf{c}_e - \mathbf{g}_e = 0. \quad (2.52)$$

Utilizando a equação (2.51) para determinar a relação ótima entre \mathbf{c}_e e \mathbf{d}_e resulta

$$\mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e. \quad (2.53)$$

2.4.9 Matriz de rigidez do elemento

Agora, realizando a substituição da equação (2.53) junto da condição de estacionaridade (2.52), tem-se a matriz de rigidez do elemento

$$\mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{g}_e. \quad (2.54)$$

onde \mathbf{g}_e equivale ao vetor de forças nodais e \mathbf{K}_e é a matriz rigidez do elemento dada na forma

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e. \quad (2.55)$$

A matriz simétrica positiva definida e não singular \mathbf{H}_e é a matriz de deformabilidade interna do elemento e na ausência de forças de corpo, produz

$$\mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e = \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = 2U_e, \quad (2.56)$$

que representa o dobro da energia de deformação U_e armazenada no elemento.

Esta informação é de interesse uma vez que é possível constatar que a matriz \mathbf{H}_e é simétrica. Ademais, devido a característica hierárquica, a matriz \mathbf{H}_e pode ser armazenada em submatrizes de menor ordem que, além de requererem um menor espaço para armazenamento, não necessitam ser fatorizadas.

2.4.10 Recuperação do movimento de corpo rígido

Uma vez determinados os deslocamentos nodais \mathbf{d}_e , o vetor dos coeficientes incógnitos \mathbf{c}_e pode ser obtido a partir da equação (2.53). Entretanto, esses deslocamentos contém erros, pois os movimentos de corpo rígido foram descartados durante o desenvolvimento para evitar a singularidade da matriz deformabilidade do elemento \mathbf{H}_e . Uma vez

que, \mathbf{H}_e é não singular, pode-se facilmente recuperar os movimentos de corpo rígido não incorporados por (JIROUSEK; GUEX, 1986),

$$\mathbf{u}_e = \hat{\mathbf{u}}_e + \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \end{bmatrix} \mathbf{c}_0, \quad (2.57)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e$ e o vetor incógnito \mathbf{c}_0 de movimento de corpo rígido podem ser obtidos mediante mínimos quadrados da diferença de \mathbf{u}_e e $\tilde{\mathbf{u}}_e$ em n nós

$$\sum_{i=1}^n \left[(u_{1i} - \tilde{u}_{1i})^2 + (u_{2i} - \tilde{u}_{2i})^2 \right] = \min, \quad (2.58)$$

o que resulta em

$$\mathbf{R}_e \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_e, \quad (2.59)$$

com

$$\mathbf{R}_e = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{2i} \\ 0 & 1 & -x_{1i} \\ x_{2i} & -x_{1i} & x_{1i}^2 + x_{2i}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{r}_e = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \Delta u_{e1i} \\ \Delta u_{e2i} \\ \Delta u_{e1i} x_{2i} - \Delta u_{e2i} x_{1i} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

e

$$\Delta u_{eji} = \tilde{u}_{eji} - \hat{u}_{eji} \quad (j = 1, 2). \quad (2.62)$$

Assim, a partir da equação (2.59) o vetor de movimento de corpo rígido \mathbf{c}_0 é obtido

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{r}_e. \quad (2.63)$$

Uma vez determinado o campo de deslocamento \mathbf{d}_e a partir da equação (2.54), os coeficientes incógnitos \mathbf{c}_e podem ser determinados e então o vetor de recuperação do movimento de corpo rígido \mathbf{c}_0 é obtido por meio da equação (2.63). Finalmente, o campo de deslocamento \mathbf{u}_e em qualquer ponto interno pode ser avaliado por (2.36) e (2.57).

3 RESULTADOS

Este capítulo abrange os resultados obtidos referente às comparações entre o código desenvolvido neste trabalho em linguagem Fortran e resultados obtidos mediante simulações via o software comercial de elementos finito Ansys®. O primeiro teste visa verificar o comportamento do FEM-HFS mediante a perturbação do coeficiente adimensional γ bem como o comportamento mediante a variação dos números de pontos de integração numérica. O segundo estudo visa avaliar principalmente o comportamento das tensões em uma placa quadrada finita com furo circular ao centro, bem como os valores do fator de concentração de tensão K_t para 4 diferentes materiais ortotrópicos e os comparar com os valores teóricos analíticos.

3.1 MODELO DE PLACA EM L

Neste exemplo, será avaliado o comportamento dos deslocamentos e tensões de uma placa em forma geométrica de L, fina, ortotrópica e engastada sob carregamento coplanar uniformemente distribuído. O modelo físico do problema pode ser observado na Figura 5. Será avaliado o comportamento do método FEM-HFS mediante a variação do número de pontos de integração numérica (npi), variação do coeficiente adimensional γ que controla a posição dos pontos de aplicação das soluções fundamentais e, posteriormente, avaliação dos resultados para diferentes malhas e o erro relativo destes para o modelo de referência adotado.

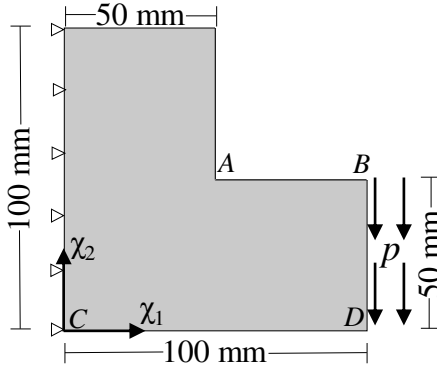


Figura 5: Modelo físico de placa em forma de L em análise, com origem em $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = 0$.

Considera-se uma placa com os parâmetros geométricos e de material conforme a Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades e características geométricas da lâmina ortotrópica da placa em L.

Módulo de elasticidade - E_1	70	GPa
Módulo de elasticidade - E_2	40	GPa
Módulo de elasticidade cisalh. - G_{12}	7	GPa
Coefficiente Poisson - ν_{12}	0.25	
Espessura - h	2	mm
Carga uni. distribuída - p	100	MPa
Comprimento e largura - a, b	100	mm

No caso do FEM-HFS, é importante definir como as condições de contorno serão impostas, da mesma forma como ocorre em FEM tradicional. As condições de contorno aplicadas são mostradas a seguir

$$\begin{aligned} & \textit{Engaste} \\ & \textit{em } \chi_1 = 0 : u_{1_0} = u_{2_0} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A malha escolhida é composta por elementos de formato tri-

angular, onde o número de subdivisões das arestas de cada elemento determina a malha. Por exemplo, na Figura 6 pode-se observar malhas com zero e 1 subdivisões, denominadas respectivamente, M1 e M2. Vale ressaltar que, a malha M1 é gerada a partir do software Ansys e a mesma será utilizada para fins comparativos no decorrer do trabalho. A malha de 2014 nós e 3286 elementos gerada no software Ansys será considerada como valores de referência/alvo, conforme observado na Figura 7 e chamada de “Ansys ref”. Para referência, a malha M1 do método FEM-HFS conta com 66 nós e 98 elementos, a malha M2 conta com 229 nós e 98 elementos e demais malhas geradas para análise podem ser observadas na Tabela 2.

Tabela 2: Discriminação das malhas utilizadas para análise para o problema de placa em L.

Malha	N° de nós	N° de elementos
M1	66	98
M2	229	98
M3	392	98
M4	555	98
M5	718	98
Ansys ref.	2014	3826

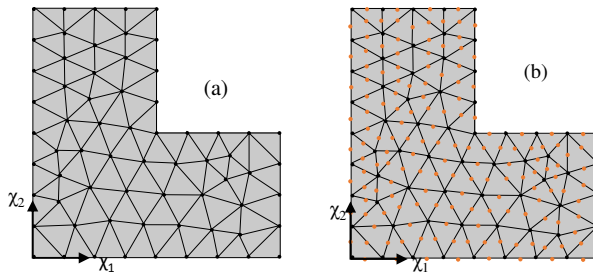


Figura 6: Malha triangular com: zero subdivisão na borda (a) M1; duas subdivisões (b) M2.

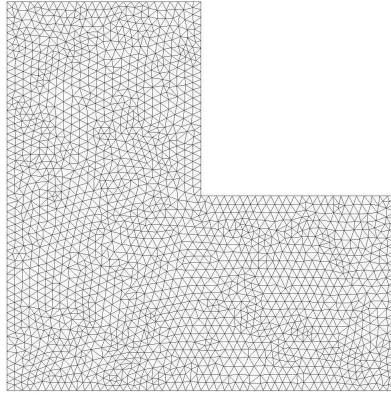


Figura 7: Malha Ansys ref.: 2014 nós e 3826 elementos, utilizada como resultados de referência.

Ressalta-se a utilização de uma grade uniforme de $npp \times npp$ para os pontos de plotagem, conforme observado na Figura 8 e que os pontos mostrados nos gráficos no decorrer deste trabalho referem-se apenas a pontos de amostras para adequar a legenda dos respectivos gráficos.

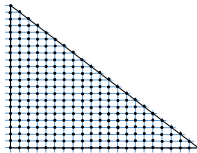


Figura 8: Exemplificação de aplicação dos pontos de plotagem com grade uniforme $npi \times npi$ utilizado neste trabalho aplicado a um elemento triangular genérico.

Nas Figuras 9 e 10 pode-se visualizar o comportamento do método FEM-HFS em relação a variação da quantidade de pontos de integração numéricos para o deslocamento u_1 e a tensão σ_{22} , respectivamente. Nota-se que tanto para os deslocamentos quanto para as tensões a quantidade de pontos de integração npi não interfere substancialmente nos resultados finais e por esse motivo para os seguintes

testes comparativos será adotado apenas $npi = 22$.

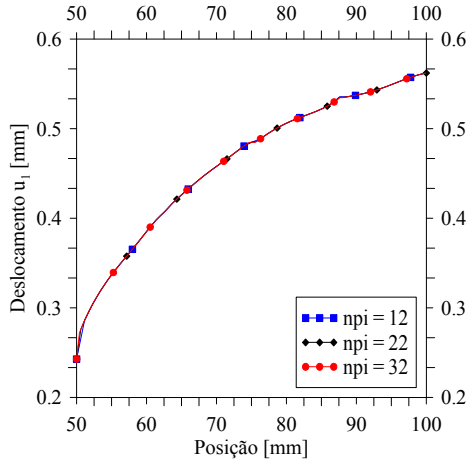


Figura 9: Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $\gamma = 5$, em relação a diferentes números de pontos de integração npi e $npp = 22$ aplicada a malha M1.

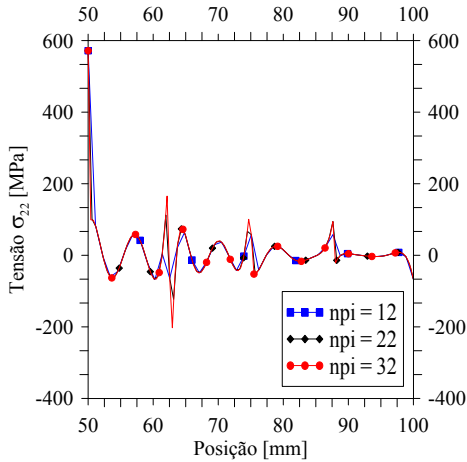


Figura 10: Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $\gamma = 5$, em relação a diferentes números de pontos de integração npi e $npp = 22$ aplicada a malha M1.

Nas Figuras 11 e 12 podem-se observar o comportamento dos deslocamentos u_1 e u_2 do método FEM-HFS mediante a alteração do parâmetro γ da equação (2.39), com $\gamma = 1$, $\gamma = 5$ e $\gamma = 10$. Nota-se que, como apontado por (WANG; QIN, 2010), devem-se evitar valores pequenos para γ , como por exemplo $\gamma = 1$, para evitar a singularidade das soluções fundamentais devido ao fato que o ponto de aplicação das soluções fundamentais se encontra próximo a se sobrepor aos pontos do contorno do elemento. A sobreposição ou seja, $\gamma = 0$ gera singularidade nas soluções fundamentais. Por este motivo, o método requer valores de $\gamma > 0$ para evitar tal singularidade bem como evitar valores pequenos para γ para não afetar na precisão do método.

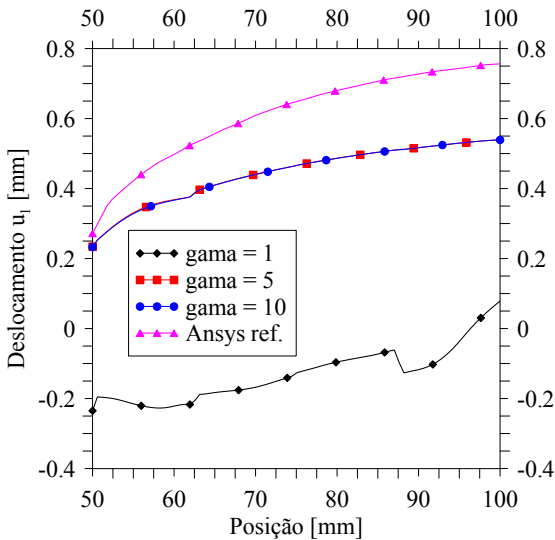


Figura 11: Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $n_{pp} = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1.

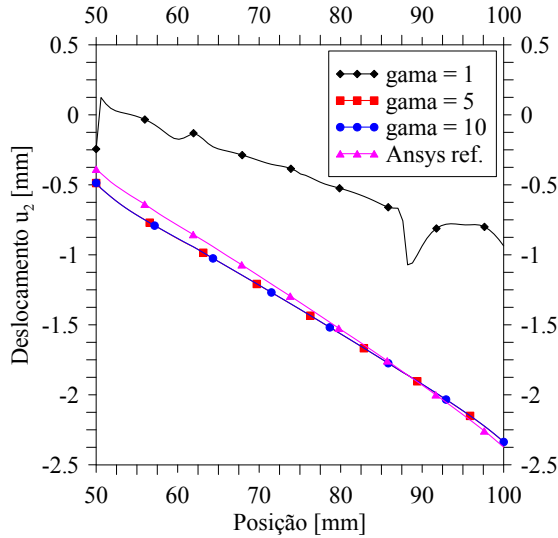


Figura 12: Comportamento do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $n_{pp} = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1.

Nas Figuras 13 e 14 podem-se verificar o comportamento das tensões σ_{11} e σ_{22} em relação a variação do parâmetro γ . Nota-se novamente o comportamento do método quanto ao uso de valores pequenos de γ . Na avaliação das tensões, verifica-se também que valores elevados de γ podem gerar instabilidade, conforme observado com $\gamma = 10$ para valores de σ_{11} na coordenada χ_1 próximas a 60 mm e 90 mm. Observa-se, uma pequena discrepância nos resultados próximos ao ponto de concentração de tensão $\chi_1 = 50$ mm e $\chi_2 = 50$ mm, que ocorre, principalmente devido a quantidade de elementos envolvidos na discretização do ponto e devido ao fato que, no contorno do modelo, as funções de aproximação, que governam o método, são as equação usuais do MEF, de primeiro grau vistas na equação (2.48). Os resultados para $\gamma = 5$ produzem valores em conformidade com a malha de referência do Ansys tanto para os deslocamentos u_1 e u_2 quanto para a tensão σ_{11} .

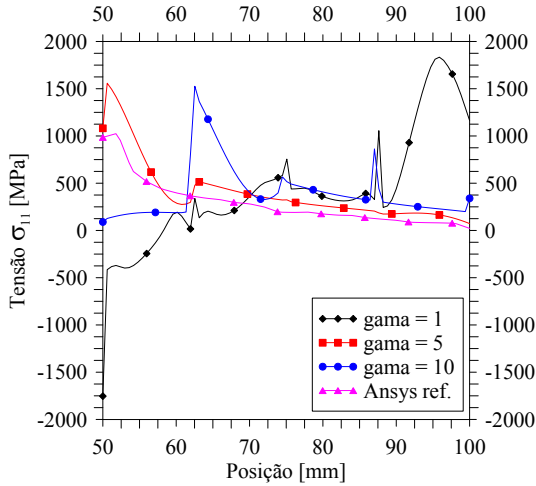


Figura 13: Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1.

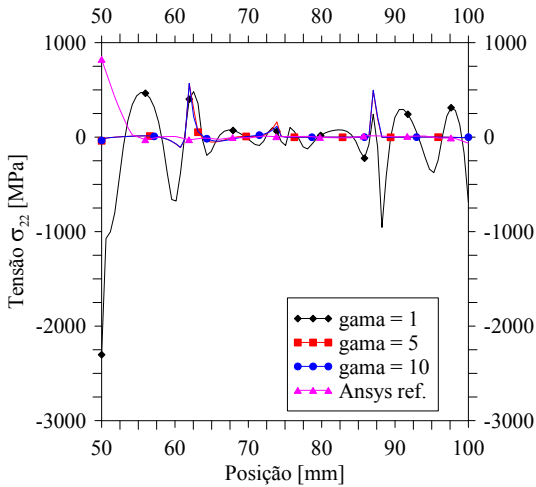


Figura 14: Comportamento da tensão σ_{22} na linha $\chi_2 = 50$ mm (A-B), com $npp = 22$, em relação a diferentes valores de γ aplicada a malha M1.

Nas Figuras 15 - 18 é possível observar o comportamento dos deslocamentos u_1 e u_2 e das tensões σ_{11} e σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ com $n_{pi} = 22$ para as malhas M1, M2 e M4. Observa-se que, apesar do método apresentar DOF inferior ao modelo de referência do Ansys, os resultados dos deslocamentos são muito próximos ao de referência, principalmente para u_2 . Nota-se uma perturbação de σ_{11} para a malha M4, principalmente nos pontos no contorno do modelo relacionadas as aproximações do *frame-field*.

A medida que os DOFs do modelo são incrementados, nota-se a suavização dos resultados das tensões σ_{11} e σ_{22} , evidenciadas principalmente no intervalo entre as coordenadas χ_1 próximas a 20 mm e 80 mm, devido, principalmente, a base auto-equilibradas das funções das soluções fundamentais, visto na equação (2.16).

Para aprimorar a avaliação do comportamento das diferentes malhas para os deslocamentos e tensões, será avaliado o erro relativo \mathbf{Er} entre os resultados de referência do Ansys mediante a equação

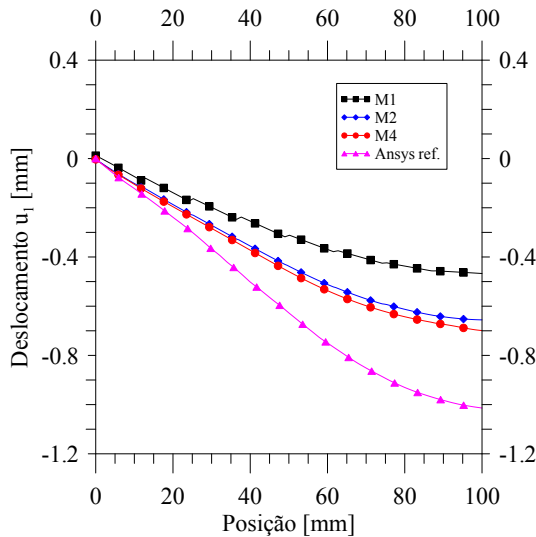


Figura 15: Comportamento do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4.

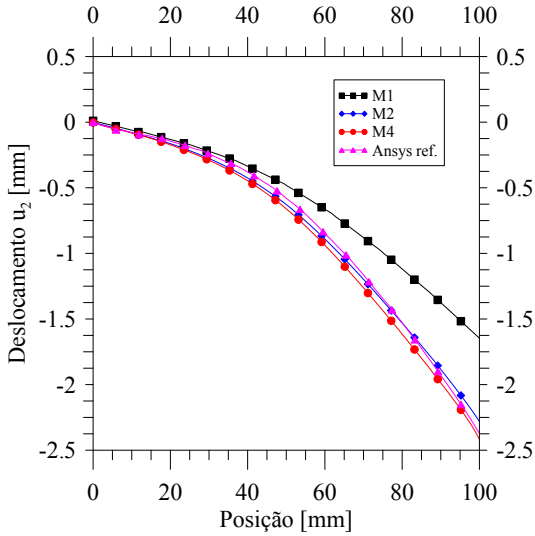


Figura 16: Comportamento do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4.

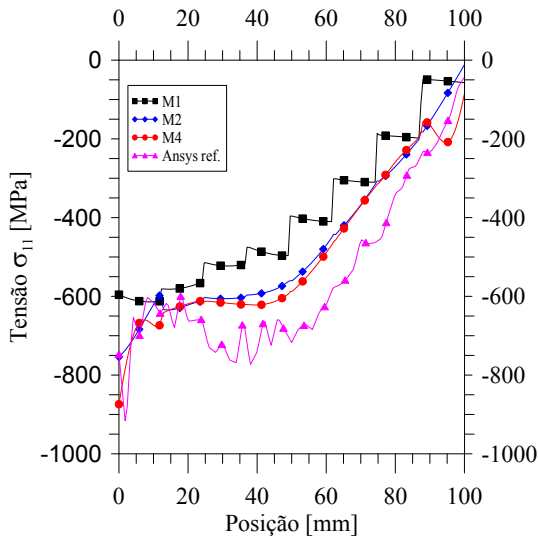


Figura 17: Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4.

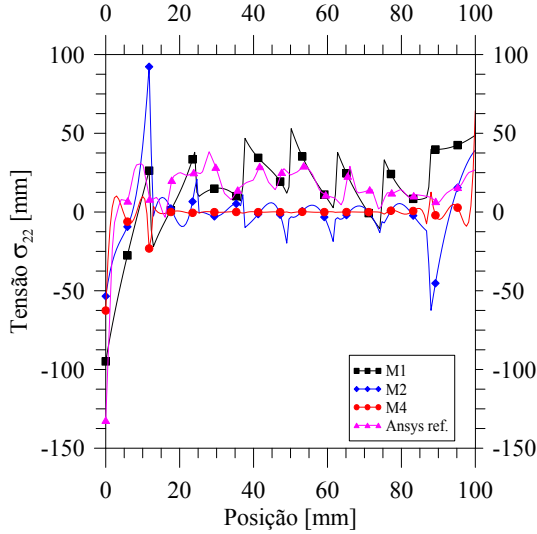


Figura 18: Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2 e M4.

$$\mathbf{Er}(\bar{x}) = \left\| \frac{X_{hibrido}(\bar{x}) - X_{ref.}(\bar{x})}{X_{ref.}(\bar{x})} \right\|. \quad (3.2)$$

onde $X_{hibrido}$ refere-se aos valores obtidos no método híbrido e X_{ref} são os valores alvos da malha de referência do Ansys.

Pode-se observar nas Figuras 19 - 22 o comportamento da diferença relativa dos deslocamentos e tensões ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm. Nota-se que o método híbrido apresenta valores consistentes para os deslocamentos, com média do erro inferior a 10% para u_2 e de 28% para u_1 . No que concerne a diferença relativa relacionada as tensões a média para σ_{11} é de 25% enquanto para σ_{22} a discrepância é maior, com média de 120%, incrementadas justamente pelas diferenças nas proximidades do contorno externo do modelo.

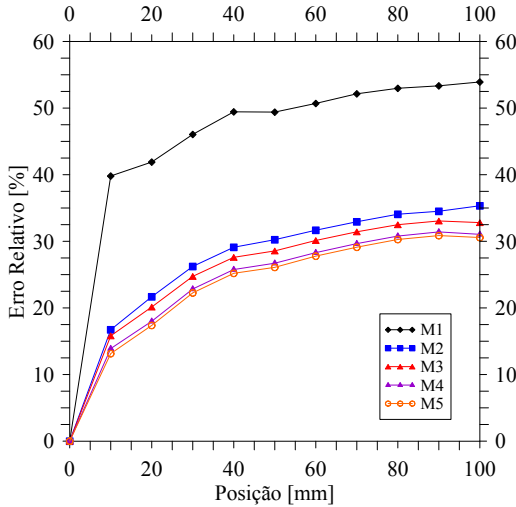


Figura 19: Comportamento do erro relativo do deslocamento u_1 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação às malhas M1, M2, M3, M4 e M5.

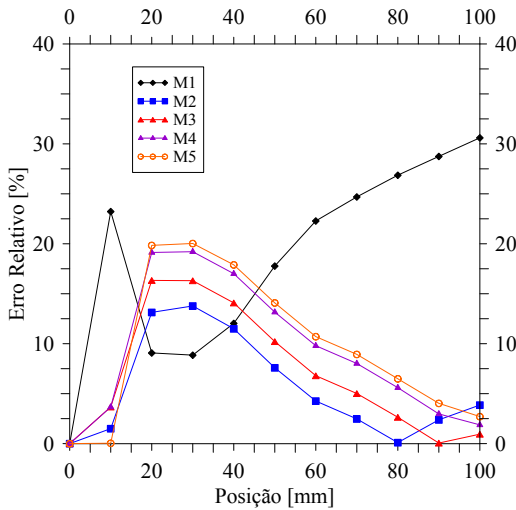


Figura 20: Comportamento do erro relativo do deslocamento u_2 ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $npp = 22$, em relação às malhas M1, M2, M3, M4 e M5.

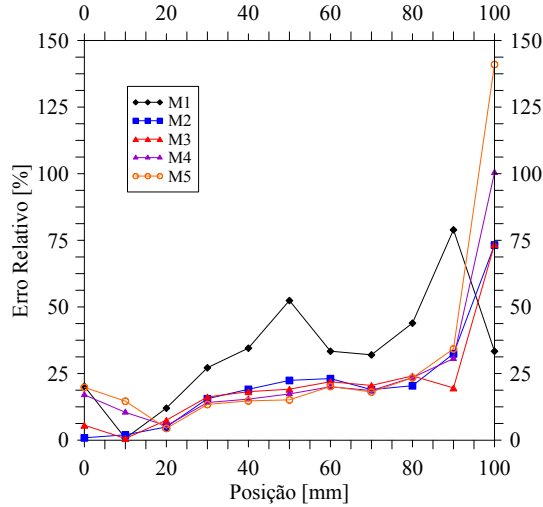


Figura 21: Comportamento do erro relativo da tensão σ_{11} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3, M4 e M5.

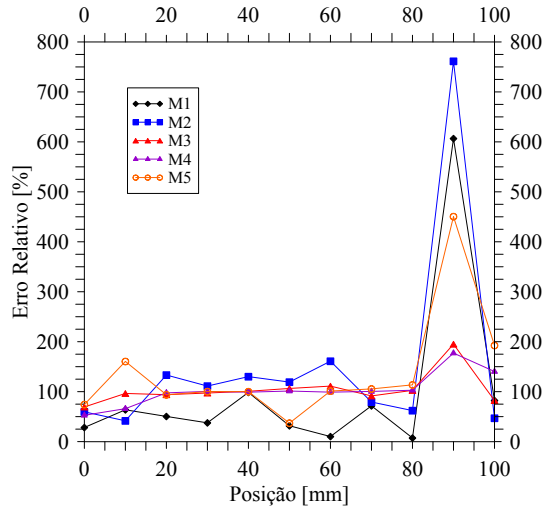


Figura 22: Comportamento do erro relativo da tensão σ_{22} ao longo da linha $\chi_2 = 0$ mm (C-D), com $n_{pp} = 22$, em relação as malhas M1, M2, M3, M4 e M5.

3.2 MODELO DE PLACA ORTOTRÓPICA FINITA COM FURO CIRCULAR

Neste exemplo será avaliado o comportamento das tensões e o fator de concentração de tensão de uma placa ortotrópica quadrada sobre carregamento unidirecional p na direção χ_1 , contendo um furo circular no seu centro, problema típico de concentração de tensão. O modelo físico do problema pode ser observado na Figura 23. Os parâmetros da placa em análise podem ser observados na Tabela 3.

Tabela 3: Propriedades e características geométricas da lâmina ortotrópica da placa quadrada com furo central.

Módulo de elasticidade - E_1	20	GPa
Módulo de elasticidade - E_2	45	GPa
Módulo de elasticidade cisalh. - G_{12}	4	GPa
Coefficiente Poisson - ν_{12}	0.25	
Espessura - h	2	mm
Carga distribuída - p	100	MPa
Comprimento e largura - a, b	100	mm
Diâmetro do furo - d	10	mm

As condições de contorno aplicadas são mostradas a seguir, onde rotações foram desconsideradas e devido a dupla simetria do problema. Apenas um quadrante da placa será analisado com as devidas condições de contorno

Engaste

$$\text{em } \chi_1 = 0 : u_{2_0} = 0. \quad (3.3)$$

$$\text{em } \chi_2 = 0 : u_{1_0} = 0.$$

A malha escolhida é composta por elementos triangulares lineares, onde o número de subdivisões das arestas de cada elemento

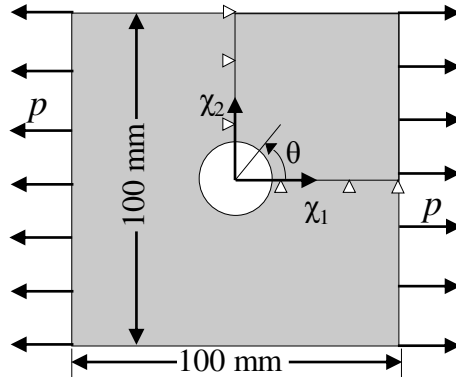


Figura 23: Modelo físico de uma placa quadrada finita (100 mm x 100 mm) com furo central, $d = 10$ mm e carregamento unidirecional uniforme $p = 100$ MPa.

determina a malha, como apresentada na Figura 6 (b) do exemplo anterior. As características das malhas testadas podem ser observadas na Tabela 4. A malha do modelo físico discretizada pode ser observada na Figura 24, bem como a malha Ansys de referência na Figura 26.

Tabela 4: Discriminação das malhas utilizadas para análise para o problema de placa com furo central.

Malha	Nº de nós	Nº de elementos
M1	69	107
M2	244	107
Ansys	69	107
Ansys ref.	394	707

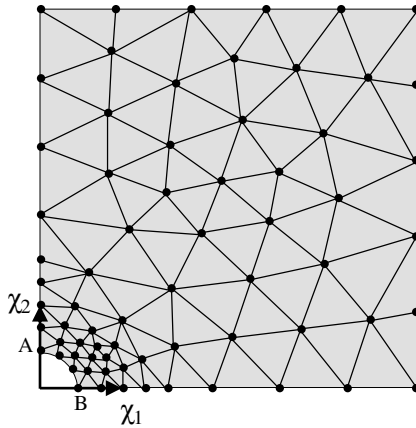


Figura 24: Malha triangular M1 em análise da placa quadrada com furo central.

Em um material ortotrópico, na presença de um furo circular, carregado com uma tensão σ_∞ agindo a uma distância considerável e com um ângulo ϕ segundo o eixo longitudinal principal, o material tende a encontrar um novo estado de equilíbrio, originando uma concentração de tensão em torno do furo. O fator de concentração de tensão em torno do furo circular pode ser calculado como sugerido por (LEKHNITSKII; TSAI; CHERON, 1968) como sendo

$$K_t = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_\infty} = \frac{E_\theta}{E_1} \left\{ \begin{array}{l} [-\cos^2 \phi + (\kappa + \eta) \sin^2 \phi] \kappa \cos^2 \theta \\ + [(1 + \eta) \cos^2 \phi - \kappa \sin^2 \phi] \sin^2 \theta \\ - \eta(1 + \kappa + \eta) \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

onde σ_θ é a tensão tangencial em torno do furo, θ é o ângulo onde se pretende obter o estado de tensões em torno do furo, E_θ é o módulo de elasticidade da camada anisotrópica na direção θ e por fim, κ e η são constantes adimensionais, onde os seus valores são obtidos por

$$\kappa = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad (3.5)$$

$$\eta = \sqrt{2 \left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_{12} \right) + \frac{E_1}{G_{12}}}. \quad (3.6)$$

Em materiais ortotrópicos, a distribuição da tensão não será simétrica em relação ao plano de ação da força aplicada. Somente será simétrica em relação ao centroide do fur (LEKHNITSKII; TSAI; CHERON, 1968). Na Figura 25 pode-se observar um exemplo da distribuição de tensão em torno de um furo quando uma força é aplicada com um ângulo de $\theta = 45^\circ$ em relação as direções principais.

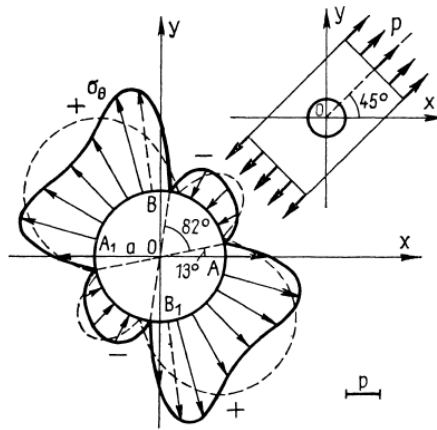


Figura 25: Distribuição das tensões principais em torno de um furo circular com carga aplicada a $\theta = 45^\circ$ em relação as direções principais. Fonte: (LEKHNITSKII; TSAI; CHERON, 1968)

Em casos em que o ângulo de aplicação da força θ coincide com os ângulos das direções principais ou seja, $\phi = 0$, obtêm-se da Equação (3.4) a tensão máxima como sendo

$$\sigma_\theta = p \frac{E_\theta}{E_1} \cdot [-\kappa \cos^2 \theta + (1 + \eta) \sin^2 \theta]. \quad (3.7)$$

Neste caso, a distribuição das tensões será simétrica em relação as direções principais χ_1 e χ_2 e a tensão máxima (σ_{θ_A}) e tensão mínima (σ_{θ_B}) serão dadas por

$$\sigma_{\theta_A} = p(1 + \eta). \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\theta_B} = -\frac{p}{\kappa}, \quad (3.9)$$

Nas Figuras 27 e 28 podem-se observar o comportamento das tensões σ_{11} e σ_{22} ao longo da linha $\chi_1 = 0$ mm para as malhas M1, M2 e Ansys. Nota-se a partir da malha M1, que os resultados das tensões são próximos aos do modelo Ansys de referência bem como o valor do fator de concentração de tensão $K_t = 3,32$ teóricos obtidos mediante a Equação (3.4) no ponto de máximo $(x,y)=(0;5)$ (LEKHNITSKII; TSAI; CHERON, 1968). Vale ressaltar que a valor de concentração de tensão obtido para material ortotrópico diferencia-se do valor de concentração para materiais isotrópicos indicado na literatura como $K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{\infty}}$ onde a tensão máxima equivalente é considerada $\sigma_{max} = 3 \cdot \sigma_{nom}$, onde a tensão nominal é

$$\sigma_{nom} = \left(\frac{b}{b-d} \right) \sigma_{\infty}. \quad (3.10)$$

Tabela 5: Fator de concentração de tensão K_t no ponto $(x,y)=(0;5)$ para diferentes propriedades de material e malhas.

Propriedades dos materiais				Híbrido		Ansys	
E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	M1	M2	Ansys	Ansys ref.
20	45	4	0.25	3,52	4,21	2,57	3,86
70	40	7	0.25	3,33	4,68	1,96	3,22
120	60	4	0.25	4,25	4,12	1,88	3,4
38	22	7,8	0.25	3,01	4,79	1,9	3,08

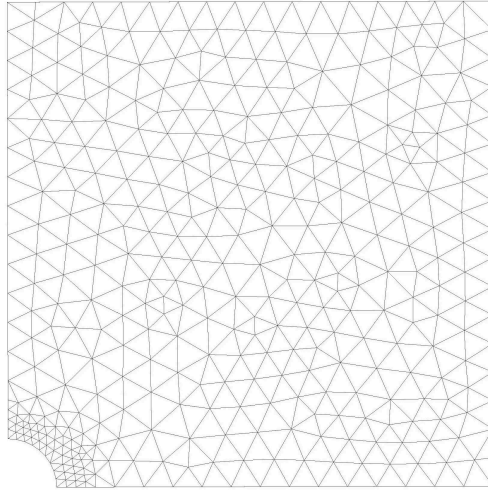


Figura 26: Malha de referência Ansys com 394 nós e 707 elementos, com refino localizado no contorno do furo.

Nota-se que o método FEM-HFS apresenta valores de tensão σ_{11} com melhor precisão que o modelo do Ansys com o mesmo número DOF. As tensões σ_{11} e σ_{22} apresentaram comportamento próximo ao comportamento teórico, que indica a tensão máxima no ponto de intersecção do eixo χ_2 e o contorno do furo (Ponto A - $(x,y)=(0;5)$) e tensão mínima no ponto de intersecção do eixo χ_1 e o contorno do furo (Ponto B - $(x,y)=(5;0)$).

Na Tabela 5 podem-se observar os valores do fator de concentração de tensão K_t para 4 diferentes materiais e duas diferentes malhas para o método FEM-HFS bem como para o modelo do Ansys, conforme os dados da Tabela 4. Nota-se que os valores do fator de concentração de tensão para a malha M1 apresenta valor próximo ao valor de referência, com erro relativo na ordem de 6%, 0,3%, 28% e 9,3% para os 4 diferentes materiais, respectivamente. Enquanto a malha Ansys com mesmo número de DOF de M1 apresenta erros relativos na ordem de 22,5%, 40,9%, 43,3% e 42,7%, respectivamente.

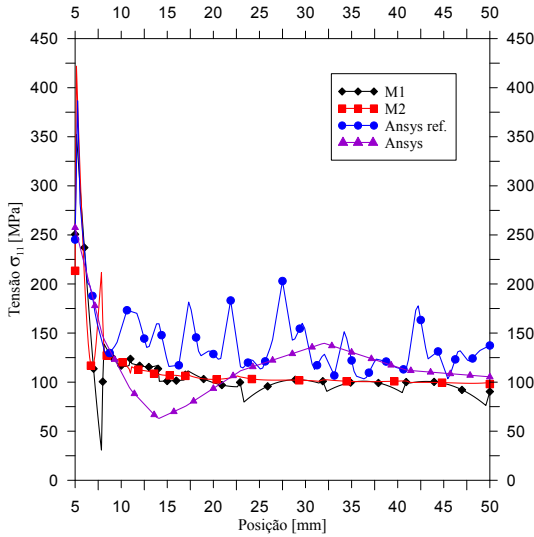


Figura 27: Comportamento da tensão σ_{11} ao longo da linha de $\chi_1 = 0$ mm, com $\gamma = 5$ e $npp = 22$, para malha M1, M2, Ansys e Ansys ref.

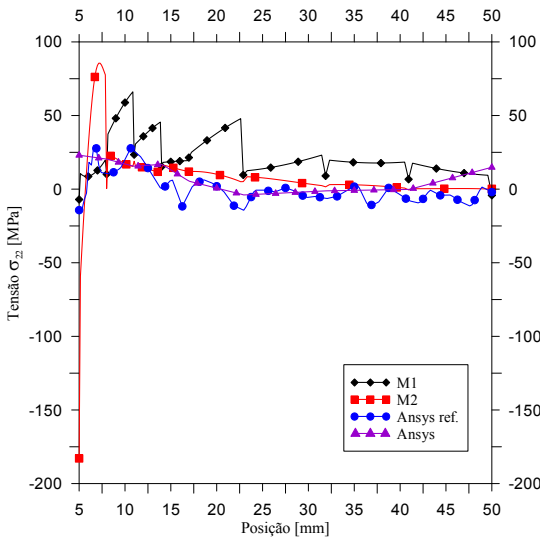


Figura 28: Comportamento da tensão σ_{22} ao longo da linha de $\chi_1 = 0$ mm, com $\gamma = 5$ e $npp = 22$, para malha M1, M2, Ansys e Ansys ref..

4 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi implementar o modelo de estado plano de tensões por meio do Método de Elementos Finitos Híbrido com aproximação via solução fundamental (FEM-HFS), para modelagem de placa de material ortotrópico simétrico, sob carregamento em flexão de membrana para pequenas deformações e deslocamentos e, analisar problemas de concentração de tensões. Visou-se usar a implementação para investigar os resultados de deslocamento, os efeitos da continuidade dos campos de tensão e a convergência do método. Para tal, foi utilizada a linguagem FORTRAN e bibliotecas de dados disponíveis no GRANTE. Finalmente, realizaram-se testes com resultados de referência obtidos no Ansys[®].

Os resultados levam a concluir que:

A formulação discretizada para FEM-HFS mostrou-se capaz de obter os campos de deslocamentos e tensões, para estimativa de campos de tensão de materiais ortotrópicos, apesar da impossibilidade de validar o código através de resultados analíticos dos problemas selecionados.

Conforme indicado por Wang and Qin (2010), foi constatado que o método apresenta problemas para γ pequenos e/ou igual a zero, devido a proximidade do ponto de singularidade das funções fundamentais.

Um ponto a se destacar é o potencial do método apontado pelos resultados obtidos. Uma vez que apenas funções de aproximações lineares foram utilizadas para a aproximação nos contornos, *frame field*, os resultados sugerem que o uso de funções de aproximação de maior ordem nos contornos possa ser benéfico.

REFERÊNCIAS

- BARCELLOS, C. S.; MENDONÇA, P. T. R.; DUARTE, C. A. A C k continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. *Comput. Mech.*, v. 44, n. 3, p. 377–393, 2009.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. *Basic Principles and Applications*. 1. ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. *Boundary element techniques in engineering*. 1. ed. London: Bytterworth & Co. Ltd, 1980.
- CHOO, Y. S.; CHOI, N.; LEE, B. C. A new hybrid-Trefftz triangular and quadrilateral plate elements. *Appl. Math. Model.*, Elsevier Inc., v. 34, n. 1, p. 14–23, 2010.
- GARCIA, O.; FANCELLO, E. a.; BARCELLOS, C. S. D.; DUARTE, C. A. hp-Clouds in Mindlin's thick plate model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 47, p. 1381–1400, 2000.
- JIROUSEK, J. Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 14, n. 1, p. 65–92, 1978.
- JIROUSEK, J. Hybrid Trefftz plate bending elements with p method capabilities. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 24, n. 7, p. 1367–1393, 1987.
- JIROUSEK, J.; GUEX, L. The hybrid Trefftz finite element model and its application to plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, n. 4, p. 651–693, 1986.
- JIROUSEK, J.; LEON, N. A powerful finite element for plate bending. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 12, n. 1, p. 77–96, 1977.
- JIROUSEK, J.; WRÓBLEWSKI, A.; SZYBIŃSKI, B. A new 12 DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, n. 15, p. 2619–2638, 1995.
- LEKHNITSKII, S.; TSAI, S.; CHERON, T. *Anisotropic plates*. 2. ed. New York: Gordon and Breach Science, 1968. 534 p.

- MENDONÇA, P. T. R. *Materiais compostos e estruturas-sanduiche: projeto e analise*. Barueri: Editora Manole, 2005.
- QIN, Q. H. Hybrid Trefftz finite-element approach for plate bending on an elastic foundation. *Appl. Math. Model.*, v. 18, n. 6, p. 334–339, 1994.
- QIN, Q.-H. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*. Boston: WITPress, 2000. 296 p.
- QIN, Q.-H.; WANG, H. *MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods*. 1. ed. London: Taylor & Francis, 2008. 464 p.
- RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. *J. Compos. Mater.*, v. 4, n. 1, p. 36–61, 1970.
- TREFFTZ, E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *International Kongress für Technische Mechanik*, p. 131–137, 1926.
- WANG, H.; QIN, Q. H. Hybrid FEM with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation. *Acta Mech. Solida Sin.*, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, v. 22, n. 5, p. 487–498, 2009.
- WANG, H.; QIN, Q.-H. Fundamental-solution-based finite element model for plane orthotropic elastic bodies. *Eur. J. Mech. - A/Solids*, v. 29, n. 5, p. 801–809, 2010.

**APÊNDICE A - Procedimento computacional para
formulação da matriz conectividade híbrida e fluxo de
cálculos do FEM-HFS**

Muitos problemas de engenharia expressos na forma diferencial ou na forma integral são resolvidos unicamente via aproximações numéricas, devido a complexidade para a derivação teórica. A técnica largamente utilizada para resolver estes problemas é Método de Elementos Finitos (MEF) a qual caracteriza-se por discretizar o domínio do problema bem como o contorno da região a ser avaliada.

No presente trabalho, a discretização do problema matemático de FEM-HFS desenvolveu-se em FORTRAN, linguagem esta, desenvolvida a partir da década de 1950 e utilizada até os dias atuais em muitas aplicações onde se faz necessário uma alta velocidade de execução. Esta discretização do problema matemático para uma linguagem de programação não é trivial, uma vez que problemas como de acoplamentos das funções diferenciais podem vir a surgir devido a não linearidade geométrica, além da necessidade de desenvolver um código robusto.

Como apresentado na Seção 2.4 de discretização do problema em elementos finitos, no FEM-HFS dois campos de deslocamentos são assumidos, assim computacionalmente necessita-se desenvolver duas linhas de cálculo, ou seja, duas malhas a serem acopladas. Na Figura 29 pode-se observar a necessidade de acoplamento das malhas do FEM-HFS, onde: (a) refere-se a um modelo geométrico triangular genérico, (b) decomposição do modelo geométrico em uma malha triangular usual de FEM e (c) decomposição do modelo geométrico em uma malha triangular com uma subdivisão aplicável ao FEM-HFS.

Não é trivial a gerar a malha híbrida para uma geometria qualquer, uma vez que para o método MEF bem como para FEM-HFS faz-se necessário geral a matriz conectividade dos elementos do modelo. Para tal, foi desenvolvida a rotina "creARESTA1" que para cada aresta de cada elemento, utilizando os dados de conectividade da malha original do MEF, as coordenadas dos nós, a quantidade de elementos, gera a nova matriz conectividade da malha híbrida, (29).

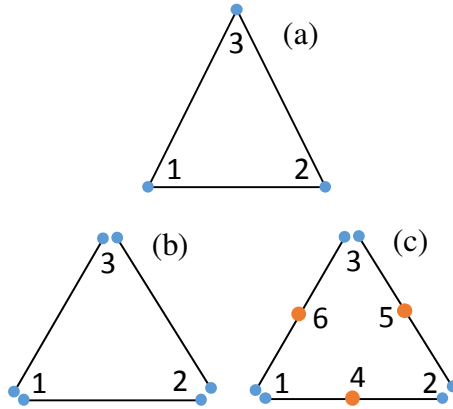


Figura 29: Ilustração da decomposição do modelo geométrico (a) em uma malha triangular usual de FEM (b) e em uma malha aplicável a FEM-HFS (c).

A.1 MATRIZ CONECTIVIDADE HÍBRIDA DOS NOVOS NÓS INTERNOS AS ARESTAS DOS ELEMENTOS

Para o desenvolvimento da matriz de conectividade híbrida faz-se necessário considerar as seguintes nomenclaturas:

- $nelem$ = número total de elementos;
- $nmos$ = número total de nós da malha original do MEF;
- $coor$ = coordenadas nodais da malha original MEF.
- $nmax$ = número máximo de subdivisões das arestas;
- $ndiv$ = número de subdivisões das arestas;
- $NNOShibr$ = número total de nós na malha, incluindo os novos nós híbridos;
- $COORhibr(3, NNOShibr)$ = coordenadas dos nós híbridos;
- $IELEhibr(nelem, 3 \times nmax)$ = matriz conectividade da malha híbrida.

□ noi = nó em análise;

A sequência dos nós no elemento foi considerada como:

- Nó de vértice do início da aresta 1 do elemento, seguido dos novos nós dentro da aresta 1;
- Nó de vértice do início da aresta 2 do elemento, seguido dos novos nós dentro da aresta 2;
- Nó de vértice do início da aresta 3 do elemento, seguido dos novos nós dentro da aresta 3.

Para entender melhor o procedimento toma-se como exemplo um modelo com número de total de nós $nnos = 50$ na malha original do MEF de elementos de 3 nós. Considera-se que se esteja no ponto de criar a aresta 2 e seus nós internos. Então os nós internos assumirão os números $(nnos+1), (nnos+2), \dots$

$(nnos+nnax-1)$. Assim, considerando $nnax = 3$, os nós internos de números serão considerados os nós números 51 e 52 na malha híbrida. Esses nós são igualmente espaçados na aresta, e são criados a partir do nó 1 da aresta. O nó 1 da aresta é arbitrado durante a geração, e independe dos elementos triangulares que a partilham. A conectividade do elemento vizinho também é feita, incluindo os novos nos na aresta comum, como pode ser observado na Figura 30 .

Assim, a nova conectividade em *IELEhibr* é feita com a seguinte ordem dos nós locais:

- No I , nós internos da aresta 1 (nós 1,2,...,nnax-1)
- No J , nós internos da aresta 2 (nós 1,2,...,nnax-1)
- No K , nós internos da aresta 3 (nós 1,2,...,nnax-1)
- Total de nós por elementos = $3 \times nnax$.

Então cada aresta tem $ndiv + 1$ nós, ou seja, os 2 nós extremos mais $ndiv - 1$ internos.

As coordenadas dos nós híbridos são geradas a partir do número de subdivisões das arestas $ndiv$ e as coordenadas nodais da malha original do MEF *coor*, seguindo as seguintes etapas:

1. Comprimento de uma aresta qualquer NO-NO2:
 - $compX = coor(1,NO2) - coor(1,NO)$;
 - $compY = coor(2,NO2) - coor(2,NO)$;

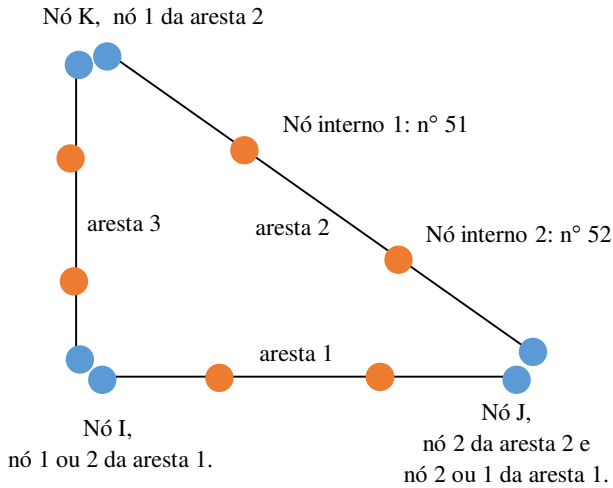


Figura 30: Modelo de geração dos nós internos da malha híbrida aplicável ao FEM-HFS.

- $compr = \sqrt{compX^2 + compY^2}$;
2. Comprimento do intervalo entre dois nós na aresta em analisada:
 - $delta = \frac{compr}{ndiv}$;
 - $fat = \frac{delta}{compr}$;
 - $delX = fat \times compX$;
 - $delY = fat \times compY$;
 3. Verifica se a aresta é a 1,2 ou 3 do elemento NE.
 4. Gera os nós internos na aresta:
 - se $ndiv \geq 1$ então:
 - $COORhibr(1, NNOShibr) = coor(1, NO) + noi \times delX$;
 - $COORhibr(2, NNOShibr) = coor(2, NO) + noi \times delY$;
 - $COORhibr(3, NNOShibr) = coor(3, NO)$;

A.2 FLUXO DE CÁLCULOS DA FORMULAÇÃO HÍBRIDA

O fluxo de cálculo para obtenção dos deslocamentos global do sistema mediante a formulação híbrida pode ser dividido em três principais blocos: (1) processamento da malha original do MEF, (2) processamento da malha híbrida e (3) resultados do sistema global.

1. A partir de uma malha original do MEF:
 - Gerar nova malha híbrida;
 - Gerar nova matriz de conectividade;
 - Gerar dados do centroide geométrico de cada elemento;
2. Para cada elemento do modelo:
 - Gerar dados de colocação dos pontos de fonte;
 - Gerar matriz de aproximação via solução fundamental (\mathbf{N}_e)
 - Gerar matriz de aproximação usual do MEF ($\tilde{\mathbf{N}}_e$)
 - Gerar matriz de deformabilidade interna do elemento (\mathbf{H}_e)
 - Gerar matriz \mathbf{G}_e ;
 - Gerar vetor força nodal \mathbf{g}_e
 - Gerar matriz rigidez elementar \mathbf{K}_e ;
3. Para solução global:
 - Sobrepor as contribuições elementares no sistema global de fora usual do MEF, gerando as equações de equilíbrio:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{g} \quad (\text{A.1})$$

- Obtidas as soluções do sistema (*frame*), identificar a contribuição de cada elemento \mathbf{D}_e e \mathbf{g}_e ;
- Resolver a Equação (2.53) a fim de obter os coeficientes incógnitos \mathbf{c}_e ;
- Com os valores dos coeficientes incógnitos, recuperar os movimentos de corpo rígido (2.63);
- Gerar os deslocamentos do sistema (2.57)
- Cálculo das deformações e tensões;