

Marcos Cardoso Fernandes

**MODELAGEM DA HISTERESE MAGNÉTICA
CONSIDERANDO LAÇOS MENORES E FENÔMENOS
VETORIAIS**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
para a obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Elétrica.

Orientador

Universidade Federal de Santa Cata-
rina: Prof. Dr. Jean Viane Leite

Coorientador

Universidade Federal de Santa Cata-
rina: Prof. Dr. João Pedro Assumpção
Bastos

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fernandes, Marcos Cardoso
Modelagem da histerese magnética considerando
laços menores e fenômenos vetoriais / Marcos Cardoso
Fernandes ; orientador, Jean Vianei Leite,
coorientador, João Pedro Assumpção Bastos, 2018.
91 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós
Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Método dos elementos
finitos. 3. histerese magnética. 4. materiais
magnéticos. 5. Modelo G. I. Leite, Jean Vianei. II.
Bastos, João Pedro Assumpção. III. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Marcos Cardoso Fernandes

**MODELAGEM DA HISTERESE MAGNÉTICA
CONSIDERANDO LAÇOS MENORES E FENÔMENOS
VETORIAIS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 21 de dezembro 2018.

Prof. Dr. Bartolomeu Uchôa Filho
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jean Viane Leite
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. João Pedro Assumpção Bastos
Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Nelson Sadowski
Universidade Federal de Santa Catarina

Diego Santos Greff
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado a todos que, de alguma maneira, seja direta ou indiretamente, contribuíram a ele.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãs, pela paciência e apoio.

Ao Professor João Pedro Assumpção Bastos, pela sugestão do tema e pelo suporte.

Ao Kleyton Hoffmann, pelas tantas conversas frutíferas e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Jean Viane Leite, pela orientação e conselhos no decorrer do trabalho.

À Thaís Campos de Oliveira, companheira e amiga em todos os momentos, pela paciência.

”A árvore que arranha o céu cresceu de ramo menor. O pagode mais elegante, com nove andares, elevou-se de um pequeno monte de terra. A jornada de mil milhas começou com um passo apenas.”
(Lao Tzu)

RESUMO

Neste trabalho, um modelo novo de histerese magnética escalar, chamado Modelo G - onde não há defasagem entre campo magnético e indução magnética - é analisado. Sendo o modelo, a princípio, concebido tendo-se o campo magnético como variável independente, são propostas algumas abordagens de inversão do modelo em questão, ou seja, com a indução magnética como variável independente, bem como, o respectivo acoplamento com o Método dos Elementos Finitos. São propostas alterações ao modelo de modo a descrever laços menores e, por último, o modelo é vetorizado.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, histerese magnética, materiais magnéticos, Modelo G.

ABSTRACT

In this work, a new scalar hysteresis model, called G Model - in which is assumed that there is no spatial angle between magnetic and induction fields - is analyzed. The model is conceived, at first, considering the magnetic field as its independent variable. Therefore, inversions of the model are proposed and the coupling of finite element method and the Model G as well. Some changes of the original model are proposed in order to properly describe minor loops and, at last, a vector generalization of the model is discussed.

Keywords: Finite element method, magnetic hysteresis, magnetic materials, G Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Campo externo H imposto	24
Figura 2	Variação da orientação do campo dentro do domínio	24
Figura 3	Curva de magnetização inicial	25
Figura 4	Exemplo de histerese magnética	27
Figura 5	Ângulos dos pontos a e b de uma curva $B(H)$	38
Figura 6	Trajeto magnético de a ao ponto b	39
Figura 7	Distâncias inferiores e superiores de um ponto c qualquer às curvas.	39
Figura 8	Variação do trajeto magnético para um pb variável e pa fixo	40
Figura 9	Variação do trajeto magnético para um pa variável e pb fixo	40
Figura 10	Caracterização do material	43
Figura 11	Fluxograma da primeira abordagem de inversão numérica	46
Figura 12	Fluxograma da segunda abordagem de inversão numérica	47
Figura 13	Pesquisa Binária aplicada à busca por H_{i+1}	48
Figura 14	Pesquisa Binária (Parte 1).	49
Figura 15	Pesquisa Binária (Parte 2).	50
Figura 16	H_{i+1} aproximado pela derivada do instante anterior	51
Figura 17	Curvas $B(H)$ por conjunto de pontos	51
Figura 18	Dimensões do circuito magnético	54
Figura 19	Resultados obtidos para a primeira inversão	55
Figura 20	Caso 1: corrente calculada e medida	56
Figura 21	Caso 1: corrente calculada e medida	56
Figura 22	Caso 1: indução magnética no meio da perna central calculada e medida	57
Figura 23	Caso 1: Curva $B(H)$ no meio da perna central	57
Figura 24	Caso 1: corrente calculada e medida para inversão analítica	58
Figura 25	Caso 1: indução magnética calculada e medida meio da perna central para inversão analítica	58
Figura 26	Caso 1: Curva $B(H)$ no meio da perna central para inversão analítica	59
Figura 27	Laço menor a partir de uma parábola imposta	61

Figura 28	Laço menor para o Modelo G direto	62
Figura 29	Laço menor para o Modelo G inverso	62
Figura 30	Número finitos de direções levada em conta pelo modelo	66
Figura 31	Curva $B_x(H_x)$	68
Figura 32	Curva $B_y(H_y)$	68
Figura 33	Problema escalar calculado com modelo vetorial	69
Figura 34	Loci de indução no ponto P do dispositivo supondo-se isotropia do material	70
Figura 35	Loci de indução no ponto P do dispositivo levando-se em conta a anisotropia do material	71
Figura 36	Circuito magnético excitado pelo circuito elétrico	89
Figura 37	Caminho magnético médio	89
Figura 38	Resultados para o modelo analítico do circuito	91

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	20
1.2	OBJETIVOS	20
1.2.1	OBJETIVO GERAL	20
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	21
2	CONCEITOS BÁSICOS E PREMISSAS	23
2.1	INTRODUÇÃO	23
2.2	MAGNETIZAÇÃO	23
2.3	PROCESSO DE MAGNETIZAÇÃO	25
2.4	HISTERESE MAGNÉTICA	26
2.5	PERDAS POR HISTERESE NO MATERIAL FERRO- MAGNÉTICO	27
2.6	HISTERESE VETORIAL	28
2.7	CONCLUSÃO	29
3	EQUAÇÕES DE CAMPO	31
3.1	INTRODUÇÃO	31
3.2	PROBLEMA MAGNETOSTÁTICO	31
3.3	MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	32
3.4	MÉTODO DE GALERKIN	33
3.5	APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS	35
3.6	CONCLUSÃO	35
4	MODELO G	37
4.1	INTRODUÇÃO	37
4.2	UM MODELO BASEADO EM EQUAÇÕES SIMPLES ..	37
4.3	CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS AO MODELO ..	42
4.4	CONCLUSÃO	43
5	INVERSÕES DO MODELO G	45
5.1	INTRODUÇÃO	45
5.2	INVERSÕES NUMÉRICAS	45
5.2.1	INVERSÃO NUMÉRICA COM PASSOS LAR- GOS DE ΔH	45
5.2.2	INVERSÃO NUMÉRICA COM PASSOS VARIÁVEIS DE ΔH	47
5.2.3	INVERSÃO NUMÉRICA BASEADA EM PES- QUISA BINÁRIA	48
5.3	INVERSÃO DA CURVA B(H) POR UM CONJUNTO DE PONTOS	50

5.4	INVERSÃO ANALÍTICA	52
5.5	RESULTADOS OBTIDOS	54
5.5.1	CASO DIDÁTICO	54
5.5.2	TEAM PROBLEM 32	55
5.6	CONCLUSÃO	60
6	MODELAGEM DE LAÇOS MENORES	61
6.1	INTRODUÇÃO	61
6.2	ALTERAÇÕES NO MODELO	61
6.3	CONCLUSÃO	63
7	MODELAGEM DE HISTERESE VETORIAL	65
7.1	INTRODUÇÃO	65
7.2	GENERALIZAÇÃO VETORIAL	65
7.2.1	TENSOR DE RELUTIVIDADE	66
7.2.2	RESULTADOS	67
7.3	REPRESENTAÇÃO DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS	70
7.4	CONCLUSÃO	72
8	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	75
	APÊNDICE A – ALGORITMOS DESENVOLVIDOS	79
	APÊNDICE B – RESULTADOS COM MÉTODO RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM	89

1 INTRODUÇÃO

Considerando a evolução humana, o eletromagnetismo é uma ciência recente. Todavia, é inconcebível de se imaginar a sociedade moderna, em seu dia-a-dia, sem associá-la diretamente ao uso extensivo de dispositivos eletromagnéticos que vão desde geradores de potência à instrumentação médica. Posto isto, surge, naturalmente, a necessidade de se estudar a modelagem do comportamento dos materiais envolvidos no funcionamento destes dispositivos. Entre eles, os ferromagnéticos desempenham um papel fundamental no funcionamento dos mesmos.

As equações de Maxwell, um grupo compacto de quatro equações acompanhadas de três relações constitutivas que fornecem informações sobre o meio material sob análise, permitem a descrição de fenômenos eletromagnéticos. Porém, é importante ressaltar que soluções analíticas são possíveis a casos simples, quando não há geometrias complexas. Partindo-se do fato de que a maioria dos dispositivos possuem geometrias complexas e não-linearidades, surge a necessidade de se estudar métodos numéricos, sendo o Método dos Elementos Finitos uma técnica consagrada pela literatura e muito utilizada na indústria.

Os materiais ferromagnéticos possuem muitas não-linearidades, além do aparecimento da histerese, ou seja, um atraso do fluxo magnético em relação ao campo. Em virtude disto, seu comportamento é objeto de estudo e busca-se sua representação através de métodos matemáticos de modo que se permitam simulações para os mais diversos fins.

A concepção de dispositivos eletromagnéticos depende fortemente da modelagem precisa dos materiais que os compõe, pois, conhecendo-se a distribuição de campos em todas as regiões do circuito magnético, determina-se, com precisão, o ponto de operação do material. Assim sendo, modelos de histerese são fundamentais para o projeto ótimo de dispositivos em geral.

A histerese magnética segue como objeto de estudo desde muito, em várias áreas do conhecimento, onde, dependendo da aplicação, tem-se modelos para representação de fenômenos macro e microscópicos. Em geral, os modelos macroscópicos são objeto de interesse no universo da Engenharia Elétrica.

1.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

No decorrer dos últimos anos, o MEF vem cada vez mais sendo utilizado em universidades, centros de pesquisa e indústrias com modelos de histerese acoplados. Tais modelos visam a modelagem da não linearidade de materiais magnéticos. Alguns modelos valem destaque, como, por exemplo, o modelo de Preisach que é um dos mais utilizados e vem sendo usado desde a sua proposição em 1935 (LEITE et al., 2006). Entre os modelos consagrados e bem conhecidos, o modelo de Jiles-Atherton, originário de considerações sobre o comportamento físico dos materiais, obteve grande aceitação devido ao seu equacionamento estabelecido em equações diferenciais, por demandar baixo esforços computacional (LEITE et al., 2006) e por demandar poucos parâmetros quando comparado ao modelo de Preisach.

Para os próximos anos, autores especulam que um provável desafio será a resolução das equações de Maxwell, seja em duas ou três dimensões, com relações constitutivas complexas descrevendo propriedades vetoriais de histerese (HOFFMANN, 2018).

Atualmente, no GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos), vem sendo desenvolvido um modelo escalar de histerese magnética, onde assume-se que não haja defasagem entre campo e indução magnética. Tal modelo é o ponto de partida para o desenvolvimento deste trabalho.

Muito embora as perdas em materiais magnéticos sejam compostas por três parcelas (perdas por correntes induzidas, excedentes e por histerese), este trabalho limita-se à modelagem da histerese magnética.

1.2 OBJETIVOS

Para o devido entendimento dos objetivos que norteiam este trabalho, parte-se de uma introdução geral do tema a ser estudado para, posteriormente, especificar-se as metas a serem atingidas ao longo do desenvolvimento do mesmo.

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma inversão para um modelo de histerese magnética com o intuito de acoplá-lo com o método dos elementos finitos (MEF) com formulação em potencial vetor

magnético. O modelo em questão, chamado Modelo G, originalmente concebido com o campo magnético como sua variável independente, deve ser invertido de modo que se possa admitir a indução magnética como variável independente. Além deste objetivo principal, serão sugerido mudanças ao modelo para que se possa, apropriadamente, descrever laços menores. Por fim, uma possível vetorização do modelo será discutida.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

As metodologias empregadas neste trabalho compreendem, particularmente:

- Revisão da teoria fundamental do ferromagnetismo;
- Apresentação do Modelo G;
- Proposição de metodologias que permitam a inversão do Modelo G;
- Modelagem de laços menores;
- Modelagem da histerese vetorial;
- Acoplamento do modelo com o Método dos Elementos Finitos.

2 CONCEITOS BÁSICOS E PREMISAS

2.1 INTRODUÇÃO

Os materiais ferromagnéticos são amplamente usados em dispositivos eletromagnéticos por conduzir o fluxo magnético convenientemente e, entre outras razões, pelo fato de ser possível estabelecer uma grande quantidade de fluxo magnético através da aplicação de uma pequena força magnetomotriz. Do ponto de vista fenomenológico, o comportamento dos materiais ferromagnéticos são descritos através das relações entre as grandezas \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} , respectivamente, indução magnética, campo magnético e magnetização (LEITE et al., 2002). Todavia, do ponto de vista da Engenharia Elétrica, tem-se por hábito relacionar \mathbf{B} e \mathbf{H} através de

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.1)$$

Onde μ , chamada de permeabilidade magnética, expressa a oposição do material à passagem de fluxo magnético. Geralmente, 2.1 é uma relação não linear, sobretudo quando se trata de materiais ferromagnéticos.

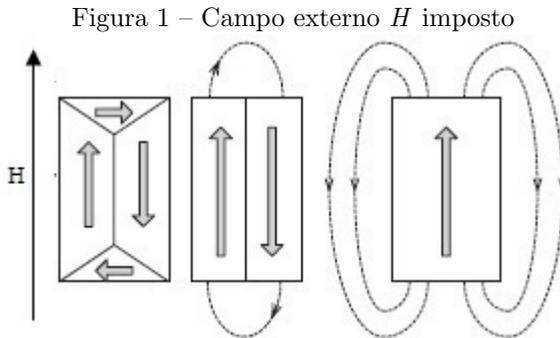
É de consenso na literatura que o fenômeno da histerese magnética se deve a variação na magnetização do material em termos dos movimentos dos planos de separação dos domínios (KOLTERMANN et al., 2001). Devido à existência de defeitos nos sólidos, os movimentos são impedidos até que seja fornecido energia suficiente para que a parede do domínio consiga se movimentar (KOLTERMANN et al., 2001).

2.2 MAGNETIZAÇÃO

Em materiais ferromagnéticos, existem, espontaneamente, pequenas regiões constituídas de pequenos dipolos. Cada domínio tem uma direção privilegiada de magnetização. Estes domínios podem estar orientados aleatoriamente de modo que o material seja composto de um grande número de áreas magnetizadas aleatoriamente. Muitos fatores influenciam no estado local de magnetização tais como: estrutura do grão, tamanho do grão, presença de impurezas, tensão local, e balanço energético (TUMANSKI, 2011).

Materiais magnéticos criam espontaneamente pequenas regiões com a mesma direção de magnetização (domínios de Weiss) de modo

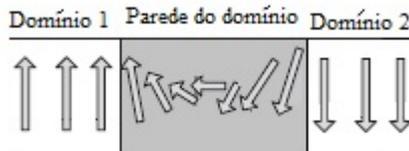
a assegurar o mínimo de energia livre (TUMANSKI, 2011). A figura 1 ilustra o processo de magnetização do material exposto a um campo externo, onde, no primeiro caso, a energia magnética está totalmente contida dentro do material. À medida que o campo externo aumenta, as paredes dos domínios com direção de magnetização próxima à direção do campo imposto tendem a se expandir.



Fonte:(TUMANSKI, 2011)

As paredes do domínio separam quaisquer domínios adjacentes. Estas paredes são consideravelmente finas, mais finas que $10\mu m$ (TUMANSKI, 2011). Dentro deste pequeno volume de material formado pelas paredes do domínio, os dipolos magnéticos elementares variam rapidamente de uma extremidade a outra, partindo de um alinhamento próximo ao de um domínio até se aproximar ao alinhamento do domínio adjacente. Supõe-se dois domínios adjacentes, de direções opostas de magnetização, a magnetização dentro da região formada pelas paredes do domínio irá variar conforme a figura 2.

Figura 2 – Variação da orientação do campo dentro do domínio



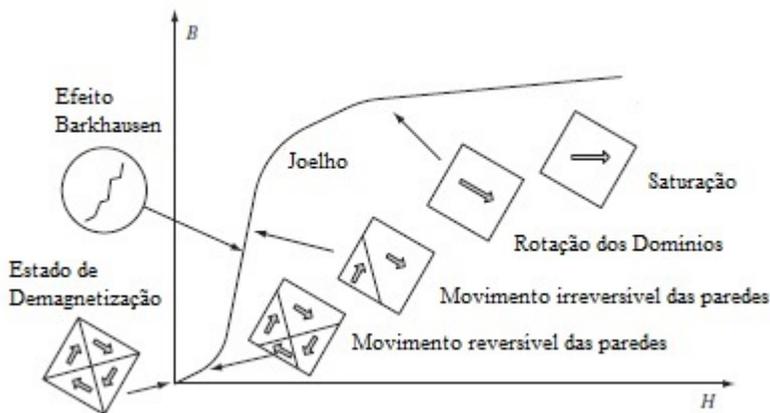
Fonte: (TUMANSKI, 2011)

2.3 PROCESSO DE MAGNETIZAÇÃO

A curva de magnetização representa a relação entre a indução magnética \mathbf{B} e o campo magnético \mathbf{H} .

O processo de magnetização pode ser dividido em partes características, conforme é ilustrado pela figura 3. Ao se aplicar um campo magnético de baixa intensidade, os domínios magnéticos cuja direção de magnetização espontânea mais se aproximam da direção do campo imposto começam a crescer e expandir, conforme a figura 3, sobre outros domínios. Para um campo de baixa intensidade, este processo é reversível.

Figura 3 – Curva de magnetização inicial



Fonte: (TUMANSKI, 2011)

A próxima parte da curva de magnetização consiste da região de maior permeabilidade. Nesta parte, o movimento das paredes do domínio são irreversíveis. Caso o campo externo seja removido, o material permanece parcialmente magnetizado devido à nova posição das paredes do domínio. Neste momento aparece o fenômeno da histerese magnética que consiste, basicamente, no bloqueio do movimento das paredes dos domínios magnéticos.

O movimento das paredes do domínio podem ser detectados por conta de seu deslocamento ser descontínuo, uma vez que eles saltam de uma posição fixa para outra. Estes movimentos irregulares mudam a magnetização (TUMANSKI, 2011) que, por sua vez, devido à lei de

Faraday, podem gerar pulsos de tensão em uma bobina enrolada em uma amostra do material exposta a um campo externo. Tal fenômeno é chamado de efeito *Barckhausen*. A curva nesta região não é suave.

Se o campo externo continuar a ser intensificado, acima da região da curva conhecida com *joelho*, o movimento das paredes dos domínios tendem a diminuir drasticamente e há uma predominância da rotação da direção de magnetização dos domínios magnéticos. A mudança do valor da indução magnética \mathbf{B} é muito pequena com o aumento da intensidade do campo magnético, chegando próximo ao ponto de saturação.

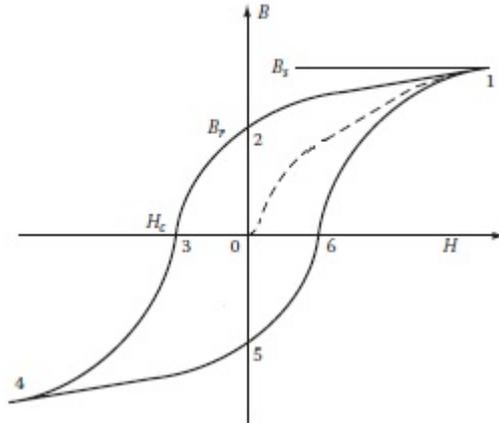
2.4 HISTERESE MAGNÉTICA

Devido aos movimentos irreversíveis das paredes dos domínios, quando excita-se o material com um campo magnético externo, partindo de um estado desmagnetizado, representado pelo ponto 0 da figura 4, e percorrendo a curva próxima da magnetização inicial, correspondente ao ponto 1, ao se remover o campo externo, o material apresenta indução remanente (ponto 2).

Ao continuar excitando o material com um campo externo em sentido oposto, pode-se desmagnetizar o material e chegar ao ponto conhecido como campo coercitivo (ponto 3). Caso o campo externo continue a crescer negativamente chega-se próximo à saturação negativa (ponto 4). Na hipótese de se continuar a variar o campo da posição de saturação negativa e, gradativamente, aumentá-lo até atingir a região próxima a saturação positiva, pode-se notar que a curva não retornará ao ponto inicial, mas fechará o laço no ponto 1.

Deve-se notar que ao se excitar o material com um campo de forma senoidal, mantendo-se a amplitude constante, a intensidade da indução magnética \mathbf{B} vai continuar a perseguir a curva indefinidamente. Todavia, o laço de histerese é diferente para cada valor de pico do campo magnético imposto, o que nos levaria à uma família de curvas de histerese.

Figura 4 – Exemplo de histerese magnética



Fonte: (TUMANSKI, 2011)

2.5 PERDAS POR HISTERESE NO MATERIAL FERROMAGNÉTICO

Um dado material exposto a um campo magnético H , variável e periódico com frequência f possui uma curva $B(H)$ que, dependendo do material, este ciclo de histerese pode variar de tamanho e forma, pode ser mais ou menos pronunciado.

Dependendo do material, estes ciclos possuem área interna grande, como é o caso de materiais duros, ou seja, de ímãs permanentes. Materiais doces, como chapas de ferro-silício, muito usadas em núcleos de dispositivos eletromagnéticos de uma maneira geral, possuem ciclos de pequenas áreas.

Com o campo H variável, admita-se, a título de exemplo, uma forma de onda senoidal, o material irá percorrer o ciclo de histerese. Isto significa, conforme apresentado nas seções anteriores, que os *domínios de Weiss* trocam suas polaridades magnéticas, alinhando-se com o campo externo, o que exige gasto de energia (BASTOS, 2012).

A densidade volumétrica de energia para um meio magnético que apresente saturação é dado por

$$W_V = \int_0^B H dB \quad (2.2)$$

Na hipótese de uma alimentação alternada, em um ciclo completo, a área total corresponde à área do ciclo de histerese, conforme a equação seguinte.

$$W_V = \oint_{\text{ciclo}} H dB \quad (2.3)$$

Por fim, a área do ciclo representa a densidade volumétrica de energia que deve ser fornecida ao material, em outras palavras, isto representa as perdas por histerese magnética em *Joules/m³* (BASTOS, 2012).

2.6 HISTERESE VETORIAL

Até o momento, referiu-se à histerese como um fenômeno escalar, porém deve-se ressaltar que a histerese magnética não se trata de um fenômeno puramente escalar. De fato, na maior parte do circuito magnético dos dispositivos tradicionais que contemplam a eletrotécnica, tem-se a presença de campos alternantes, ou seja, a direção do campo permanece a mesma, variando-se apenas em intensidade e sentido do campo magnético H e a indução B . Por outro lado, ainda que alimentados por tensões com forma de onda puramente senoidal, em virtude da geometria do dispositivo e do regime de operação do circuito magnético, pode haver, localmente, a presença de fluxos magnéticos rotativos. Neste caso, a indução magnética B não é paralela ao campo magnético H . Isto acontece, por exemplo, nas juntas "T" dos transformadores e na região da coroa, entre dois dentes do estator de máquinas girantes. Nestas regiões, as perdas no ferro são, geralmente, maiores que a média das observadas nas demais partes integrantes do circuito magnético (LEITE et al., 2006).

Em materiais isotrópicos sujeitos a campos rotacionais, o ângulo de defasagem entre a indução e campo magnético é constante, porém, em materiais anisotrópicos, o ângulo de defasagem varia ao longo de uma rotação. As perdas rotacionais estão associadas ao ângulo entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} , sendo este ângulo conhecido como ângulo de perda (ESPÍNDOLA et al., 2003).

Por último, destaca-se um comportamento interessante de materiais ferromagnéticos expostos a campos rotativos: em baixas induções, em que o material se encontra abaixo da saturação, a perda por histerese rotativa é em geral o maior que a perda para o material submetido a um campo alternante. Estas perdas aumentam até um valor máximo, porém, a partir deste ponto, decaem a zero na região de saturação

(LEITE et al., 2006).

2.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados, de maneira qualitativa, os fenômenos envolvidos na magnetização de um material ferromagnético clássico, bem como o surgimento da histerese magnética escalar. Foi também comentado sobre as perdas no material devido à histerese magnética bem como sobre o fenômeno da histerese vetorial.

3 EQUAÇÕES DE CAMPO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, desenvolve-se a formulação em duas dimensões do método dos elementos finitos de modo a propiciar o cálculo da distribuição de campos magnéticos levando-se em consideração o tensor de relutividade que contém a informação dos materiais presentes no domínio de cálculo.

3.2 PROBLEMA MAGNETOSTÁTICO

Tendo-se em mente que para se definir um campo vetorial é necessário conhecer seu divergente e seu rotacional, bem como dispor de uma relação constitutiva que traga consigo a informação do meio material em que o fenômeno físico é analisado, as equações que compõem a magnetostática, são:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.3)$$

Como $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, pode-se escrever, a partir de (3.1), que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.4)$$

onde \mathbf{A} corresponde ao potencial vetor magnético.

Em outras palavras, em um problema magnetostático, busca-se o campo magnético gerado por uma distribuição de corrente. Aplicando-se (3.4) na equação (3.3) e, posteriormente, aplicando-se (3.3) na (3.2), chega-se à forma forte da magnetostática, em três dimensões, que é dada por:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (3.5)$$

Na hipótese de que a corrente flua na direção do eixo z , tanto o campo magnético quanto a indução magnética terão componentes,

somente, nas direções dos eixos x e y . Pode-se solucionar esse tipo de problema de forma bidimensional, pois haverá simetria de translação, ou seja, o valor do campo magnético em um dado ponto, no plano xOy , é o mesmo para todo z . Desta forma, como o potencial vetor magnético é paralelo à densidade de corrente, terá apenas componentes em z . Assim sendo:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} \quad (3.6)$$

Aplicando-se o resultado de (3.6) em (3.5) e dando-se continuidade aos cálculos, tem-se:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} A & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \mathbf{k} = J \mathbf{k} \quad (3.7)$$

Por inspeção, nota-se que (3.7) pode ser interpretada como o divergente do gradiente de uma função escalar. Deste modo, chega-se à forma forte da magnetostática, em duas dimensões, que é dada por:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla A + J = 0 \quad (3.8)$$

Por fim, para facilitar a escrita da equação, pode-se ainda definir a relutividade como o inverso da permeabilidade ($\nu = \frac{1}{\mu}$). Desta forma, pode-se reescrever (3.8) como:

$$\nabla \cdot \nu \nabla A + J = 0 \quad (3.9)$$

3.3 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Sabendo-se que uma solução numérica não é exata e, portanto, possui resíduo, pode-se aplicar o método dos resíduos ponderados, que consiste em multiplicar o resíduo por uma função de ponderação W para forçar que este resíduo tenda a zero em todo o domínio de cálculo (BASTOS; SADOWSKI, 2003). Ou seja:

$$\int_{\Omega} WRd\Omega = \int_{\Omega} W[\nabla \cdot (\nu \nabla A) + J]d\Omega = 0. \quad (3.10)$$

Partindo-se do fato de que integral é um operador linear, a integral da soma é igual à soma das integrais, tem-se:

$$\int_{\Omega} W \nabla \cdot (\nu \nabla A) d\Omega + \int_{\Omega} W J d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Prossegue-se, no primeiro termo da equação precedente, empregando-se o conhecimento de operadores aplicados a duas funções. Como $W \nabla \mathbf{A} = \nabla W \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla W$, tem-se:

$$\int \nabla W \mathbf{A} d\Omega - \int \mathbf{A} \nabla W d\Omega, \quad (3.12)$$

Onde $\mathbf{A} = \nu \nabla A$

Aplica-se o teorema da divergência no primeiro termo de (3.12), e obtém-se:

$$\int_{\Gamma} W \mathbf{A} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla W d\Omega. \quad (3.13)$$

O primeiro termo de (3.13), uma integração na fronteira do domínio de cálculo, é nulo, pois se têm, somente, condições de contorno de Dirichlet ou Neumann (BASTOS; SADOWSKI, 2003). Ao substituir-se (3.13) em (3.11), chega-se à forma fraca da magnetostática em duas dimensões que é dada por:

$$\int_{\Omega} (\nabla W \cdot \nu \nabla A) d\Omega = \int_{\Omega} W J d\Omega. \quad (3.14)$$

3.4 MÉTODO DE GALERKIN

Ao utilizar-se o método de Galerkin, que é um caso particular do método dos resíduos ponderados, iguala-se W , que corresponde a função de ponderação, às funções de interpolação, que aproximam o valor de A dentro de cada elemento do domínio discretizado, no caso, triângulos (BASTOS; SADOWSKI, 2003). O potencial A , em um ponto dentro de um elemento qualquer do domínio discretizado, é aproximado pela soma de funções de interpolação associadas a cada nó do elemento (BASTOS; SADOWSKI, 2003). Neste trabalho, foram empregados triângulos de

primeira ordem que, por sua vez, possuem três incógnitas e três funções de interpolação. Então, o potencial A pode ser escrito como a equação seguinte:

$$A(x, y) = N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 = \sum_{J=1}^3 N_J A_J, \quad (3.15)$$

onde N_j e A_j correspondem à função de interpolação associada ao nó j e ao potencial do nó j respectivamente. Obtém-se, ao aplicar (3.15) em (3.14):

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla W \cdot \sum_{J=1}^3 A_J \nabla N_J) d\Omega = \int_{\Omega} W J d\Omega. \quad (3.16)$$

Para cada elemento, dentro de um domínio discretizado, têm-se três incógnitas, e, para tal, deve-se usar três funções de ponderação para que se obtenha o número de equações necessário para a solução do problema. Igualando-se $W_i = N_i$, onde i varia de 1 a 3, pode-se escrever as equações associadas a cada elemento do domínio de cálculo, conforme a equação seguinte:

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla N_i \cdot \sum_{J=1}^3 A_J \nabla N_J) d\Omega = \int_{\Omega} N_i J d\Omega. \quad (3.17)$$

Novamente, pelo fato de a integral ser um operador linear, a integral da soma é a soma das integrais, tem-se:

$$\sum_{J=1}^3 A_J \int_{\Omega} (\nu \nabla N_i \cdot \nabla N_J) d\Omega = \int_{\Omega} N_i J d\Omega. \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ser expressa como um sistema de equações lineares e, consequentemente, expressa na forma matricial $[r][A]=[S]$, onde cada termo de $[r]$ e $[S]$, correspondem à:

$$r_{ij} = \int_{\Omega} (\nu \nabla N_i \cdot \nabla N_J) d\Omega, \quad (3.19)$$

$$S_i = \int_{\Omega} N_i J d\Omega. \quad (3.20)$$

3.5 APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Neste trabalho, foi usado o método de aproximações sucessivas para se levar em consideração a não-linearidade dos materiais ferromagnéticos. Cada nova aproximação dos potenciais A_i é calculada usando-se os potenciais da solução anterior A_{i-1} nos termos não-lineares de modo que estes termos se tornam lineares em A_i . Portanto, o problema se torna:

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}_{i-1})\mathbf{A}_i = \mathbf{S}. \quad (3.21)$$

3.6 CONCLUSÃO

O método dos elementos finitos mostra-se uma ferramenta poderosa, uma vez que aproxima equações diferenciais parciais em sistemas de equações lineares, permitindo que, mesmo em geometrias onde a solução analítica seja difícil ou mesmo impossível de se obter, se encontre uma solução aproximada. Essa solução vai ser tão precisa quanto a quantidade de elementos na malha e o grau de interpolação dentro de cada elemento. Porém, isso gera um compromisso entre precisão da solução e custo computacional, além do grau de dificuldade da implementação que ficou evidente neste trabalho.

Por último, esta seção limitou-se a apresentar a formulação em potencial vetor magnético, mas existem outras formulações possíveis como é o caso da formulação em potencial escalar magnético com campo fonte para a qual o modelo G original foi concebido.

4 MODELO G

4.1 INTRODUÇÃO

Modelos consagrados, tais como Jiles-Atherton e Preisach, são complexos e difíceis de se implementar. A complexidade destes modelos não se limita ao entendimento e implementação; a caracterização dos materiais demanda uma grande quantidade de dados experimentais. Sobre a caracterização dos materiais, pode-se dizer ainda que a variação e sensibilidade dos parâmetros não são intuitivas e de fácil visualização.

Diferentemente de modelos com uma abordagem fenomenológica, como é o caso do modelo de Jiles-Atherton, parte-se aqui para um tratamento puramente matemático da curva de histerese.

4.2 UM MODELO BASEADO EM EQUAÇÕES SIMPLES

O Modelo G demanda dados experimentais para caracterizar o material, porém, diferentemente de modelos tradicionais, apenas o laço externo de histerese é necessário, ou seja, o laço que alcança a saturação. Todas as outras informações, tais como magnetização inicial, laços menores e laços internos são representados a partir do laço externo (BASTOS et al., 2018).

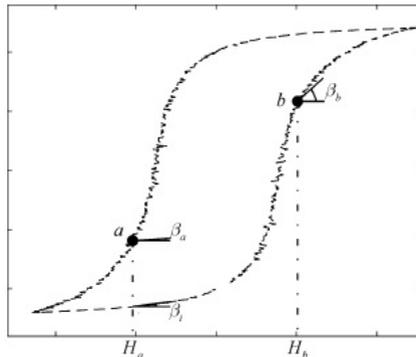
Uma vez que se obtenha, a partir de dados experimentais, a curva $B(H)$, pode-se separar o laço externo em duas partes: curva ascendente e curva descendente. Pode-se modelar o laço externo por curvas anisteréticas (sigmóides) (BASTOS et al., 2018) deslocadas, onde tal deslocamento corresponde ao campo coercitivo. Foram testadas, ao todo, sete curvas anisteréticas para este modelo, sendo as funções de Elliot, Elliot modificada, Langevin e exponencial as que obtiveram os melhores resultados (BASTOS et al., 2018). Todavia, vale ressaltar que, no presente trabalho, limitou-se ao uso da função de Elliot.

Em tais curvas, quando a indução magnética B é igual a zero, o campo magnético H é, igualmente zero. Contudo, quando se representa o laço externo, as curvas, conforme citado anteriormente, são deslocadas pelo campo coercitivo. Após a obtenção da curva $B(H)$, ou mesmo, ao fazer uso de um conjunto de pontos experimentais, pode-se aplicar o Modelo G.

A título de exemplo, lembrando que no Modelo G o campo magnético H é sua variável independente, considera-se que um incre-

mento de H é aplicado. A título de explanação, o estado magnético encontra-se, inicialmente, no ponto a . Para se chegar ao ponto b , é preciso que se determine o ângulo do ponto interno ao laço maior. A figura 5 ilustra o fato de o ângulo no ponto Ha , β_a ser um múltiplo de β_i , que corresponde ao ângulo de Ha na curva ascendente. Portanto, determina-se o fator pa tal que $\beta_a = pa\beta_i$. Pode-se, por exemplo, determinar o valor de pa , seja 0,3 (BASTOS et al., 2018). Igualmente, no ponto Hb , que corresponde a outra extremidade do percurso, o ângulo β_b será um múltiplo de β_i . Desta vez, mais próximo ao ângulo do campo Hb na curva ascendente. Neste ponto, pode-se arbitrar que pb seja 0,8 (BASTOS et al., 2018). Ou seja, conforme a curva interna evolui do ponto a e aproxima-se do ponto b , ilustrado pela figura 6, ela torna-se tangente à curva ascendente do laço externo. Aplica-se o mesmo raciocínio para a situação em que o campo H tenha um comportamento descendente.

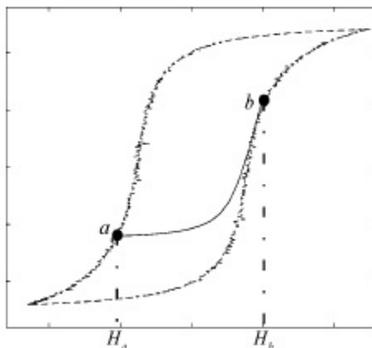
Figura 5 – Ângulos dos pontos a e b de uma curva $B(H)$



Fonte:(BASTOS et al., 2018)

O próximo passo consiste em determinar como o parâmetro p varia de pa a pb . Uma vez que o modelo prima pela simplicidade, assume-se que p varie linearmente. De modo a ilustrar como p varia, a curva interna do exemplo anterior será utilizada.

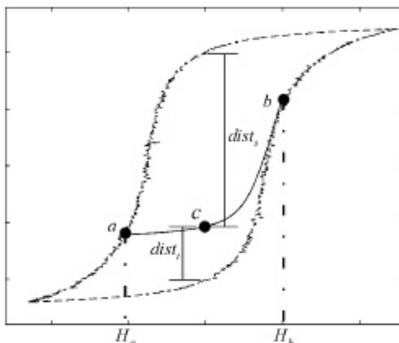
Pode-se determinar $dist_i$ e $dist_s$, que correspondem à distância inferior e superior em relação a um ponto c qualquer, a partir do laço externo que é constituído de duas curvas anisteréticas, mostrado na figura 7. Em um próximo momento, calcula-se di que corresponde à distância inferior normalizada em relação à soma das distâncias. No ponto a , $di = 1$, pois $dist_s = 0$. Já no ponto b , $di = 0$, pois $dist_i = 0$. Desta forma, pode-se estabelecer a variação de p através da função

Figura 6 – Trajeto magnético de a ao ponto b 

Fonte:(BASTOS et al., 2018)

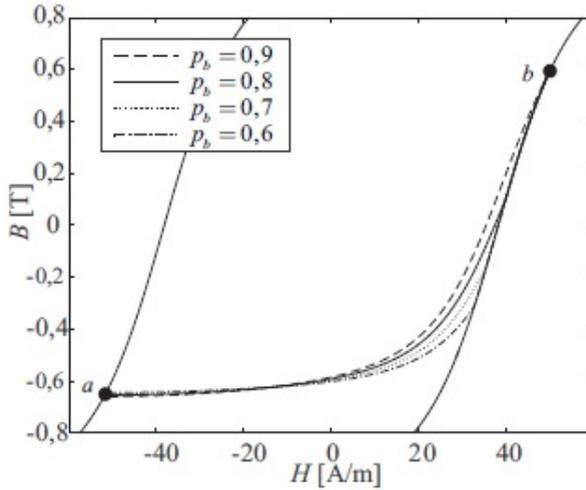
linear $p = (pa - pb)di + pb$. Para o ramo ascendente, o ângulo pode ser calculado como $\beta_p = \beta_i p^q$. O parâmetro q foi introduzido de modo a aumentar o grau de liberdade, de maneira a melhorar a fidelidade da representação do comportamento de diferentes materiais. Ressalta-se, porém, que, no presente trabalho, o parâmetro q foi mantido constante em 1.

A figura 8 mostra o comportamento da curva interna quando se fixa o parâmetro pa e varia-se pb . Com objetivo similar, a figura 9 ilustra o comportamento da curva interna quando se fixa pb e varia-se pa , mantendo-se $q = 1$.

Figura 7 – Distâncias inferiores e superiores de um ponto c qualquer às curvas

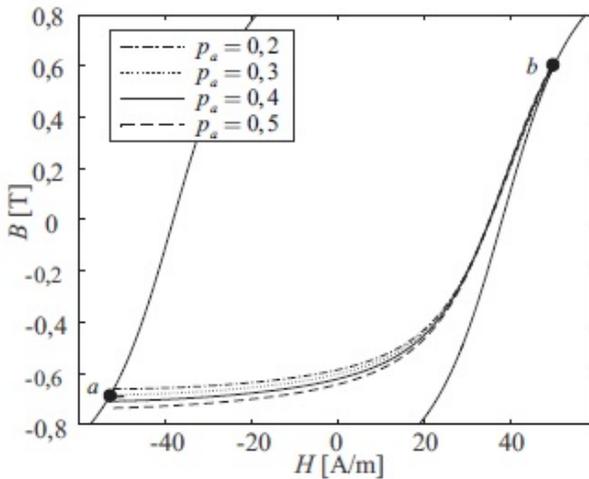
Fonte:(BASTOS et al., 2018)

Figura 8 – Variação do trajeto magnético para um p_b variável e p_a fixo



Fonte:(BASTOS et al., 2018)

Figura 9 – Variação do trajeto magnético para um p_a variável e p_b fixo



Fonte:(BASTOS et al., 2018)

Por fim, pode-se descrever o Modelo G na forma do algoritmo a seguir, para que possa ser utilizado em cálculo iterativo.

Data: $a, b, c, H_{coer}, H_i, H_{i+1}$ and B_i .

Result: B_{i+1} .

begin

 /* Choose p_a, p_b e q */

if $(H_{i+1} - H_i) > 0$ **then**

 | $i_{asc} = 1$

else

 | $i_{asc} = 0$

end

$dist_i = f(H_{i+1} - H_{coer}) - B_i$

$dist_s = f(H_{i+1} + H_{coer}) - B_i$

if $(dist_i * dist_s) > 0$ **then**

 | $icr = 1$

else

 | $icr = 0$

end

if $icr == 1$ **then**

if $i_{asc} == 1$ **then**

 | $B_{i+1} = f(H_{i+1} - H_{coer})$

else

 | $B_{i+1} = f(H_{i+1} + H_{coer})$

end

else

if $i_{asc} == 1$ **then**

 | $d_i = |dist_i| / (|dist_i| + |dist_s|)$

 | $p = (p_a - p_b) / d_i + p_b$

 | $\beta_i = df(H_{i+1} - H_{coer}) / dh$

 | $\beta_p = \beta_i p^q$

else

 | $d_s = |dist_s| / (|dist_i| + |dist_s|)$

 | $p = (p_a - p_b) / d_s + p_b$

 | $\beta_i = df(H_{i+1} + H_{coer}) / dh$

 | $\beta_p = \beta_s p^q$

end

 | $B_{i+1} = \beta_p (H_{i+1} - H_i) + B_i$

end

end

Algoritmo 1: Modelo G

4.3 CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS AO MODELO

O primeiro passo para se utilizar o Modelo G consiste em caracterizar o material determinando-se os melhores parâmetros a serem usados nas equações analíticas que descrevem curvas anisotrópicas. Para tal, apenas um ramo da curva experimental é necessário, seja ascendente ou descendente, devido ao fato dos ramos serem simétricos (HOFFMANN et al., a). Além disso, é necessário que se centralize a curva na origem, subtraindo-se ou somando-se, cada ponto pelo valor do campo coercitivo. Como mencionado anteriormente, este trabalho limitou-se a usar a função de Elliot. A função de Elliot, por sua vez possui três parâmetros, a , b e d .

$$f(h) = \frac{ah}{d + b|h|} \quad (4.1)$$

onde, derivando-se em relação ao campo, chega-se à 4.2

$$\frac{df(h)}{dh} = \frac{ad}{(d + b|h|)^2} \quad (4.2)$$

Os parâmetros que serão utilizados no Modelo G são definidos a partir de um sistema linear utilizando-se dois pontos experimentais conhecidos, (H_1, B_1) e (H_2, B_2) . Pode-se substituir os pontos em 4.1,

$$B_1 = \frac{aH_1}{d + b|H_1|} \quad (4.3)$$

e

$$B_2 = \frac{aH_2}{d + b|H_2|} \quad (4.4)$$

ou seja, $B_1d + bB_1|H_1| = aH_1$ e $B_2d + bB_2|H_2| = aH_2$ que pode ser colocado na forma matricial, conforme 4.5, onde impõe-se um valor para d .

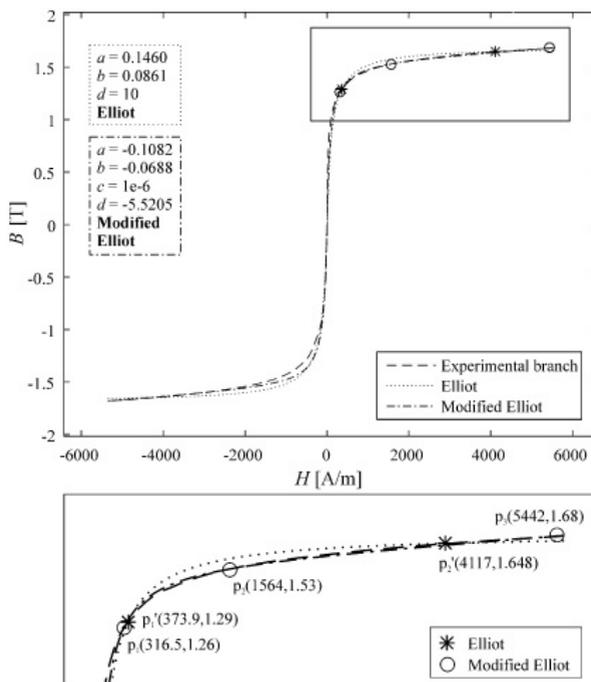
$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} H_1 & -B_1|H_1| \\ H_2 & -B_2|H_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Diferentes valores de d não mudam o comportamento final da função. Identicamente, resultados semelhantes seriam obtidos caso se isolassem outros parâmetros da função (HOFFMANN et al., a). Para que se evite comportamento não físico em altos valores H que ultrapassam a região modelada, deve-se pegar um ponto distante na zona de saturação

para que se garanta que a função represente corretamente os dados experimentais em uma vasta gama de valores de H (HOFFMANN et al., a). O método simplex de Nelder-Mead pode ser usado para se otimizar a busca pelos parâmetros (HOFFMANN et al., a).

A figura 10, ilustra um exemplo de caracterização do material para o Modelo G.

Figura 10 – Caracterização do material



Fonte:(BASTOS et al., 2018)

4.4 CONCLUSÃO

O Modelo G mostrou-se uma ferramenta de modelagem de histerese magnética robusta, de fácil tratamento e que permite sua implementação em um curto espaço de tempo. Devido a sua simplicidade, o modelo é de fácil entendimento e permite que possam ser feitas alterações de acordo com a aplicação.

5 INVERSÕES DO MODELO G

5.1 INTRODUÇÃO

Para ser usado com a formulação em potencial vetor magnético, faz-se necessário que haja uma inversão do Modelo G. Todavia, como a função de Elliot não admite inversa, eis a principal contribuição deste trabalho: desenvolver métodos de inversão do Modelo G levando-se em conta o compromisso de precisão, velocidade e custo computacional.

Foram desenvolvidas cinco abordagens diferentes com o propósito de se inverter o Modelo G. Então, este capítulo é dividido, onde as cinco primeiras partes são destinadas a apresentação dos modelos e, por último, os resultados obtidos.

5.2 INVERSÕES NUMÉRICAS

As abordagens de inversões numéricas desenvolvidas para este trabalho partem de um raciocínio comum: calcular o valor atual do campo magnético H_{i+1} através de uma busca com tentativas sucessivas, que partem do valor do instante anterior do campo, H_i . Deve-se proceder comparando a indução magnética B , correspondente ao campo H de uma dada tentativa com o valor de B_{i+1} imposto a ser alcançado. Os algoritmos apresentados nesta seção convergem quando a indução, correspondente ao campo de uma dada tentativa encontra-se dentro de uma margem de tolerância conforme será detalhado mais adiante.

5.2.1 INVERSÃO NUMÉRICA COM PASSOS LARGOS DE ΔH

A primeira abordagem consiste, simplesmente, em dar passos de ΔH largos em relação ao passo de cálculo da simulação, para, logo que o valor da indução magnética B correspondente ao campo H da tentativa atual encontrar-se dentro de uma margem de tolerância, ou, se ultrapassado, aproximar-se o valor corrente de H assumindo-se que o par (H, B) da última tentativa pertença a mesma reta que a indução B imposta. Desta forma, obtém-se o valor atual de H através da seguinte expressão:

$$H_{(i+1)} = H_t \left(\frac{B_{i+1}}{B_t} \right). \quad (5.1)$$

Onde H_t e B_t são o par (H, B) da última tentativa.

A margem de tolerância citada é definida por

$$\| |B_{i+1}| - |B_t| \| < \delta, \quad (5.2)$$

em que δ , para todas as inversões numéricas, foi adotado o valor de 10^{-5} . O propósito é de se trabalhar com o menor erro possível, porém, destaca-se que se pode usar valores de erro maiores, como 10^{-3} com bons resultados e sem problemas de divergência.

O fluxograma da figura 11 a seguir ilustra como essa abordagem pode ser implementada.

Figura 11 – Fluxograma da primeira abordagem de inversão numérica

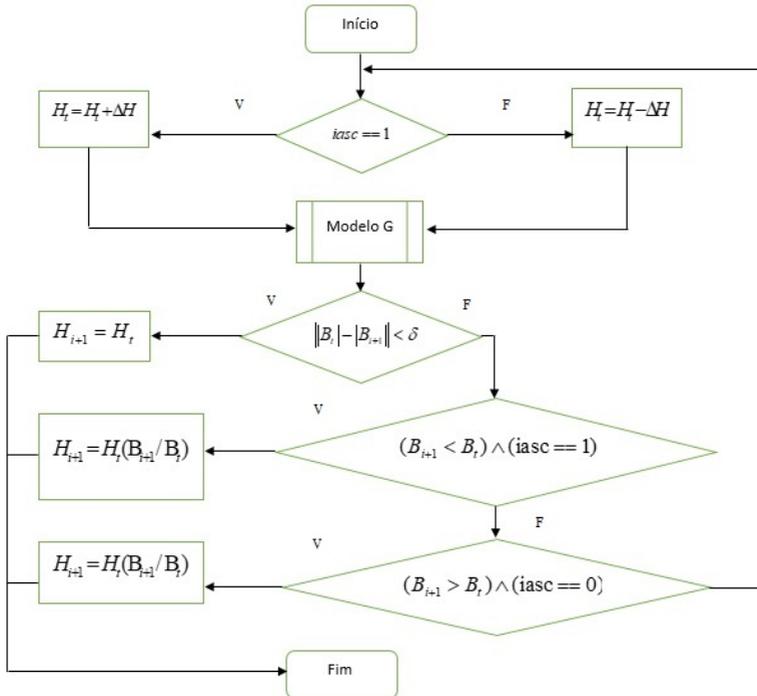
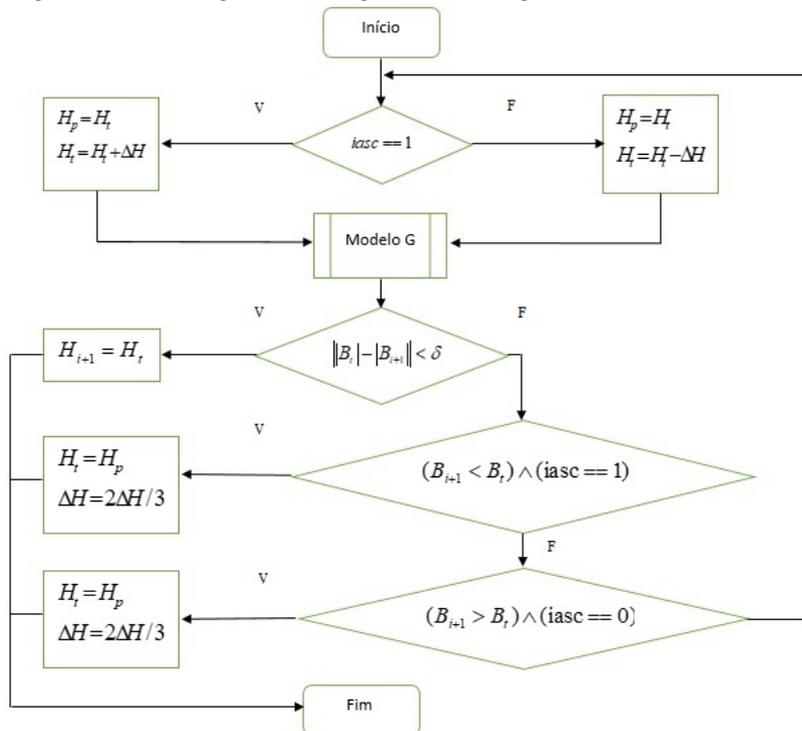


Figura 12 – Fluxograma da segunda abordagem de inversão numérica



5.2.2 INVERSÃO NUMÉRICA COM PASSOS VARIÁVEIS DE ΔH

Após a primeira etapa do trabalho, buscou-se alternativas de melhorar o tempo de cálculo. Então, em um segundo momento, adotou-se a estratégia de dar passos mais largos que da primeira abordagem, diminuindo-se a largura do passo a cada vez que o valor de indução de interesse for ultrapassado. A convergência é alcançada quando o passo cair dentro do intervalo de tolerância definido anteriormente. Conseguiu-se com esta abordagem um diminuição significativa do tempo total de cálculo.

A figura 12, da mesma forma, apresenta o fluxograma desta abordagem.

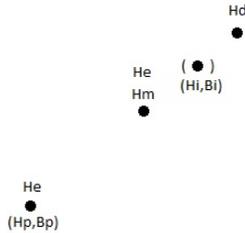
5.2.3 INVERSÃO NUMÉRICA BASEADA EM PESQUISA BINÁRIA

Por último, com o objetivo puramente de tornar a inversão do modelo G mais rápida, buscou-se alternativas para se otimizar a varredura de valores dentro de um intervalo. Optou-se aqui por aplicar pesquisa binária na varredura.

Para encontrar o novo valor de campo magnético a partir do valor atual da indução magnética, separou-se o algoritmo em duas partes. Na primeira etapa, dá-se passos largos, com o objetivo de cercar o valor de interesse entre um limite superior e inferior. Após o valor de interesse estar cercado, trabalha-se com a média dos extremos deste intervalo. Caso a média esteja abaixo do valor de interesse, o valor médio, obtido nesta iteração, adicionado de um incremento passa a ser o limite inferior. Já para a situação em que a média esteja acima do valor buscado, o limite superior passa a ser a média do valor obtido da última iteração menos um decremento. Desta forma, cerca-se o valor de interesse rapidamente, onde, no que diz respeito a tempo de cálculo, foi o que teve o melhor desempenho.

A figura 13 demonstra a essência desta abordagem. Já as figuras 14 e 15 apresentam o fluxograma para esta inversão, em duas partes.

Figura 13 – Pesquisa Binária aplicada à busca por H_{i+1}



Como dito anteriormente, a figura 13 retrata a essência do método que consiste no seguinte: H_m , campo magnético fruto da média entre os extremos, H_d e H_e (limite à direita e à esquerda), fica abaixo do valor buscado H_i , campo correspondente a indução (B_i) imposta. Logo, H_m se torna o novo limite à esquerda, H_e , onde o processo se repete devendo-se efetuar a média entre os extremos e verificar uma das três possibilidades possíveis que consiste em ficar abaixo do valor buscado, ou acima deste valor, ou, por fim, dentro do intervalo de tolerância representado pelos parênteses. No caso, a próxima média ficaria dentro

do intervalo de tolerância o que significaria que o algoritmo convergiu.

Por último deve-se definir um caso particular inerente à busca binária. Quando, na hipótese de que os extremos se cruzem, ou seja, $H_e > H_d$, impõe-se um valor do campo magnético atual, igualando à última média calculada $H_{i+1} = H_m$.

Um detalhe a se destacar: quando acoplado com o MEF, deve-se definir um critério de parada, pois, eventualmente, por conta de ruído numérico, ou por pouca, ou nenhuma diferença entra a indução do instante anterior para o instante atual, o algoritmo fica buscando indefinidamente em volta do valor desejado. Desta forma, limitando-se a busca para n tentativas, pode-se chegar a bons resultados sem problemas de divergência.

Figura 14 – Pesquisa Binária (Parte 1)

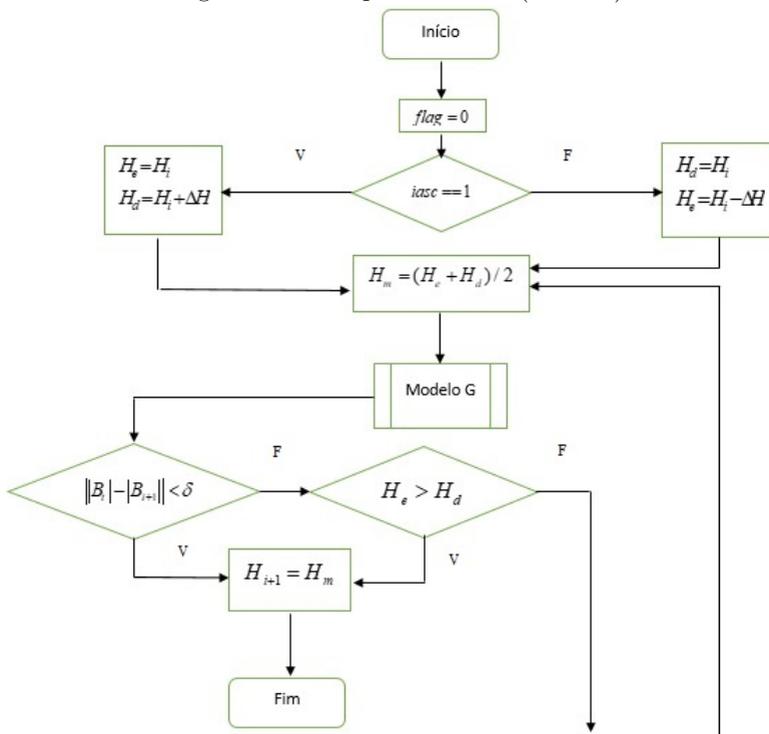
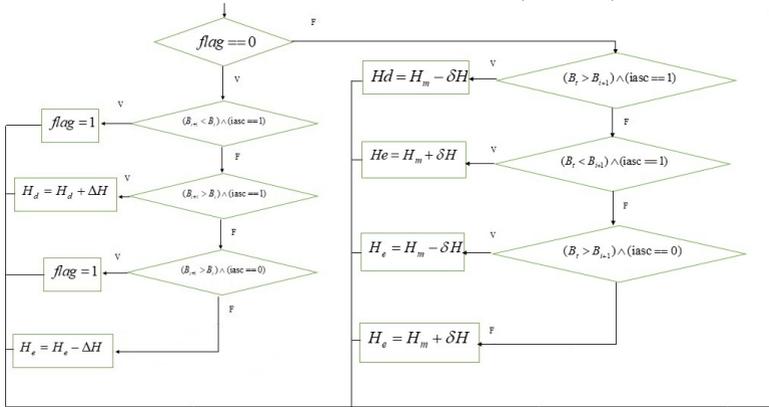


Figura 15 – Pesquisa Binária (Parte 2)



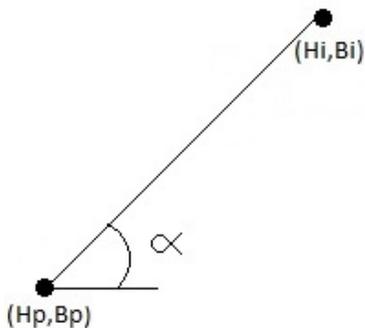
Deve-se destacar que ΔH corresponde a passos largos, que podem ser da ordem de $1A/m$, ou $2A/m$, por exemplo, de modo a cercar o valor desejado rapidamente. Já δH correspondem a pequenos passos, algo da ordem $10^{-5}A/m$ para auxiliar na convergência.

5.3 INVERSÃO DA CURVA $B(H)$ POR UM CONJUNTO DE PONTOS

Outra possibilidade seria entrar com um conjunto de pontos, para o caso de algum material que não possa ser descrito propriamente pela função de Elliot e também com o objetivo de melhorar o tempo de cálculo das abordagens numéricas.

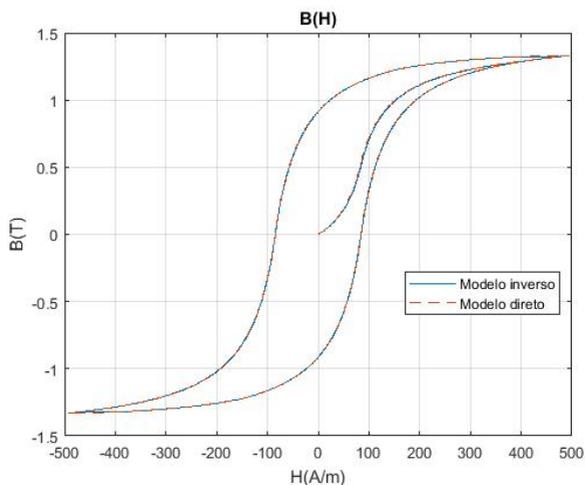
A inversão não é imediata. É necessário, para se calcular pontos internos ao laço maior, se aproximar a derivada do instante atual tendo posse da derivada do instante anterior, conforme figura 16 ilustra de forma qualitativa, bem como calcular $dist_i$ e $dist_s$ a partir de H_i .

Figura 16 – H_{i+1} aproximado pela derivada do instante anterior



A figura 17 mostra as curvas $B(H)$ calculadas usando-se o mesmo conjunto de pontos para o Modelo G direto e inverso. O direto foi excitado com uma onda senoidal de $495A/m$ de pico. O inverso foi excitado com uma onda de $1.325T$ de pico. Para ambos $p_a = 0,3$ e $p_b = 0,8$.

Figura 17 – Curvas $B(H)$ por conjunto de pontos



O cálculo de $dist_i$ e $dist_s$ a partir de o campo do instante anterior e o cálculo de pontos internos à curva permitem, por fim, se chegar a

um tratamento que possibilite uma inversão analítica ao Modelo G.

5.4 INVERSÃO ANALÍTICA

A inversão por conjunto de pontos possibilitou que se chegasse a uma inversão analítica do Modelo G. Tendo posse da derivada do instante anterior, conforme ilustra a figura 16, pode-se calcular $dist_i$ e $dist_s$ a partir de H_i , o que permite proceder com o algoritmo do modelo G mantendo a simplicidade do método. Fazendo-se uso da equação 5.3, em que ν_i corresponde à relatividade no instante anterior, pode-se fazer uma inversão do modelo como mostra o algoritmo 2.

$$H_{i+1} = \nu_i(B_{i+1} - B_i) + H_i \quad (5.3)$$

Este algoritmo permite calcular H_{i+1} tanto para pontos internos à curva quanto para pontos pertencentes ao laço maior a partir da equação de Elliot.

Com esta abordagem, permite-se uma inversão de fácil entendimento, aplicação e acoplamento ao MEF de modo que se mantenha a proposta original do modelo em se trabalhar com equações simples.

Naturalmente, devido ao fato de que não se passa por um processo de busca pelo ponto desejado, esta abordagem de inversão demanda um tempo total de cálculo menor do que as inversões numéricas citadas anteriormente.

Data: $a, b, c, H_{coer}, B_i, B_{i+1}$ and H_i .

Result: H_{i+1} .

begin

```

/* Choose  $p_a, p_b$  e  $q$  */
if  $(B_{i+1} - B_i) > 0$  then
  |  $i_{asc} = 1$ 
else
  |  $i_{asc} = 0$ 
end
 $dist_i = f(H_i - H_{coer}) - B_i$ 
 $dist_s = f(H_i + H_{coer}) - B_i$ 
if  $(dist_i * dist_s) > 0$  then
  |  $icr = 1$ 
else
  |  $icr = 0$ 
end
if  $icr == 1$  then
  | if  $i_{asc} == 1$  then
  | |  $H_{i+1} = (dH/df(H_i - H_{coer}))(B_{i+1} - B_i) + H_i$ 
  | else
  | |  $H_{i+1} = (dH/df(H_i + H_{coer}))(B_{i+1} - B_i) + H_i$ 
  | end
else
  | if  $i_{asc} == 1$  then
  | |  $d_s = |dist_s|/(|dist_i| + |dist_s|)$ 
  | |  $p = (p_a - p_b)/d_i + p_b$ 
  | |  $\beta_i = df(H_i - H_{coer})/dH$ 
  | |  $\beta_p = \beta_i p^q$ 
  | else
  | |  $d_i = |dist_i|/(|dist_i| + |dist_s|)$ 
  | |  $p = (p_a - p_b)/d_s + p_b$ 
  | |  $\beta_i = df(H_i + H_{coer})/dH$ 
  | |  $\beta_p = \beta_s p^q$ 
  | end
  |  $H_{i+1} = (1/\beta_p)(B_{i+1} - B_i) + H_i$ 
end
end

```

Algoritmo 2: Modelo G Inverso

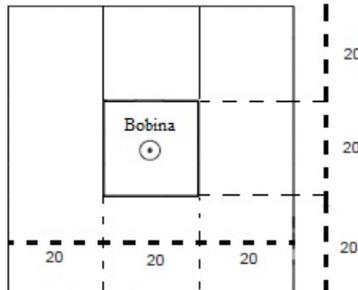
5.5 RESULTADOS OBTIDOS

Dois problemas foram utilizados como referência. Primeiramente, utilizou-se um caso didático do capítulo 8, seção 8.7.4 do livro *Magnetic materials and 3D finite element modeling*. Num segundo momento, utilizou-se o *Team problem 32* para o teste de convergência.

5.5.1 CASO DIDÁTICO

Este caso consiste de um núcleo de dimensões, em milímetros, ilustradas na figura 18 e uma bobina com resistência $R = 0,7\Omega$, 100 espiras, alimentação co-senoidal com $12V$ de pico e frequência de $50Hz$.

Figura 18 – Dimensões do circuito magnético



O material possui as seguintes características:

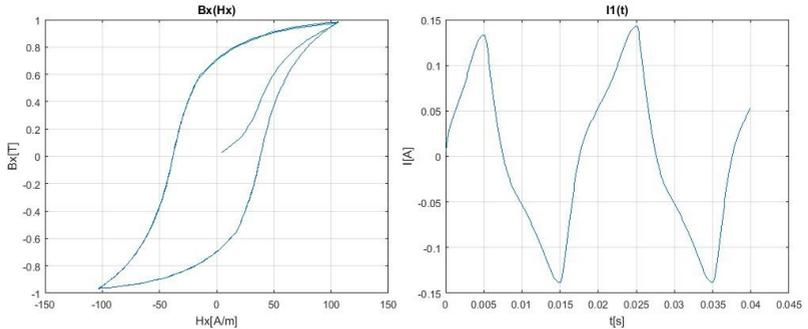
- Campo coercitivo $H_{coer} = 38,1755$;
- $a = 0,2528$;
- $b = 0,1674$;
- $d = 69,44$.

Com as inversões acopladas ao Método dos Elementos Finitos acompanhada de uma malha de 401 elementos, passo de cálculo de 10^{-4} segundos e usando-se uma mesma máquina para calcular as simulações em todas as abordagens, obteve-se bons resultados para $p_a = 0,3$ e

$p_b = 0,68$ nas inversões numéricas, e $p_a = 0,4$ e $p_b = 0,67$ para a inversão analítica.

Diferenciando-se, basicamente, no tempo de convergência, os resultados obtidos foram visualmente idênticos, conforme mostrado na figura 19.

Figura 19 – Resultados obtidos para a primeira inversão



O tempo total de cada simulação, para cada método de inversão, foi de:

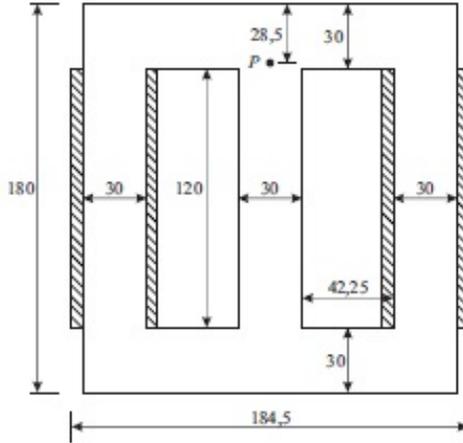
- 20 minutos para primeira inversão;
- 4 minutos para a segunda inversão;
- 49 segundos para a terceira inversão;
- Aproximadamente 18 segundos para a inversão analítica.

5.5.2 TEAM PROBLEM 32

De modo a se testar a convergência, utilizou-se o caso 1 do *Team Problem 32* (BOTTAUSCIO et al., 2004) para a inversão analítica e a terceira abordagem numérica.

O dispositivo consiste de um núcleo ferromagnético, feito de um pacote de 5 lâminas de $0,48\text{mm}$ de espessura que, por sua vez, é equipado com bobinas destinadas à medição da indução magnética local na junta T e no centro das colunas. A figura 20 mostra o dispositivo analisado.

Figura 20 – Caso 1: corrente calculada e medida



Com uma malha de 930 elementos, com fonte de alimentação de $13,5V$, bobinas de 90 espiras cada ligadas em série, onde cada bobina possui resistência de $0,32\Omega$, com resistência adicional de $11,1\Omega$ passo de cálculo de 10^{-4} , para a inversão numérica baseada em pesquisa binária, obteve-se as curvas de corrente, indução magnética e laço de histerese apresentadas pelas figuras 21, 22 e 23.

Figura 21 – Caso 1: corrente calculada e medida

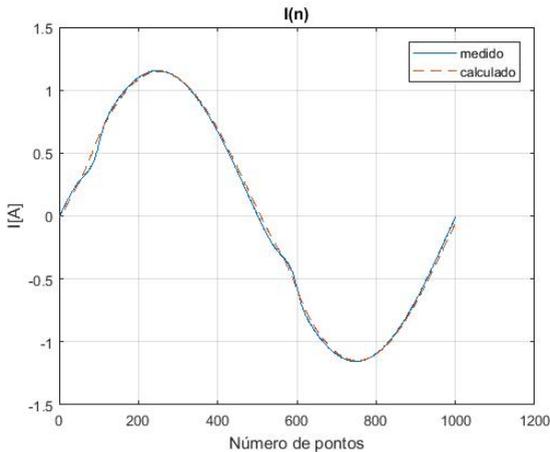


Figura 22 – Caso 1: indução magnética no meio da perna central calculada e medida

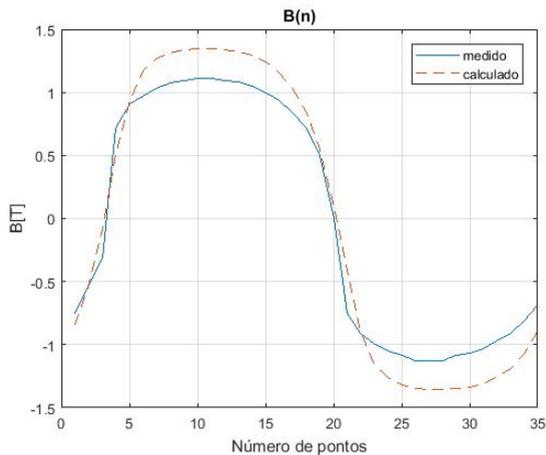
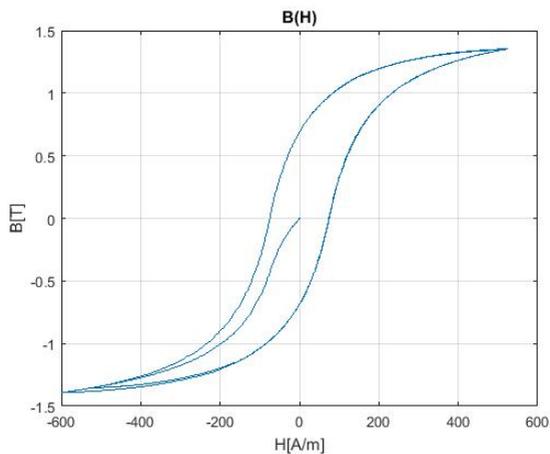


Figura 23 – Caso 1: Curva $B(H)$ no meio da perna central



Já para a inversão analítica, usando-se a mesma malha, as curvas adquiridas são mostradas nas figuras 24, 25 e 26.

Figura 24 – Caso 1: corrente calculada e medida para inversão analítica

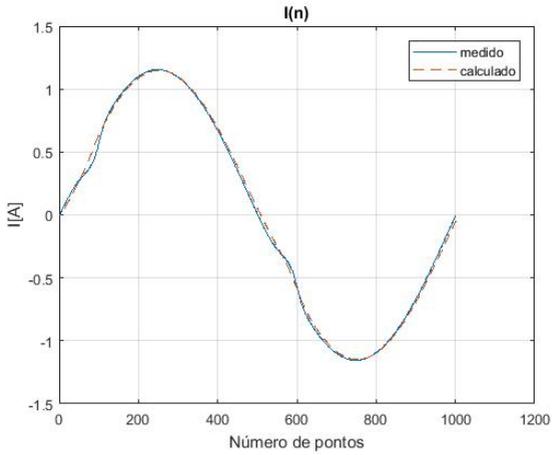


Figura 25 – Caso 1: indução magnética calculada e medida meio da perna central para inversão analítica

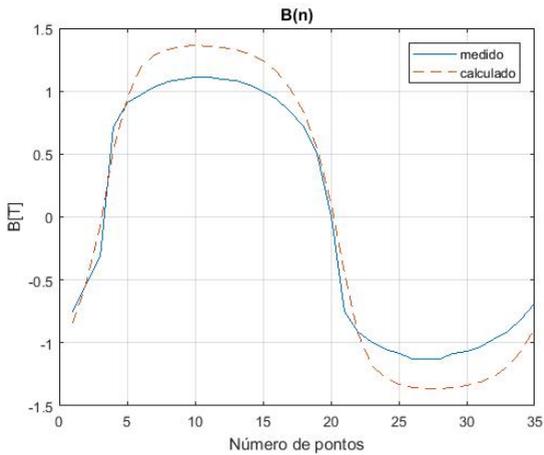
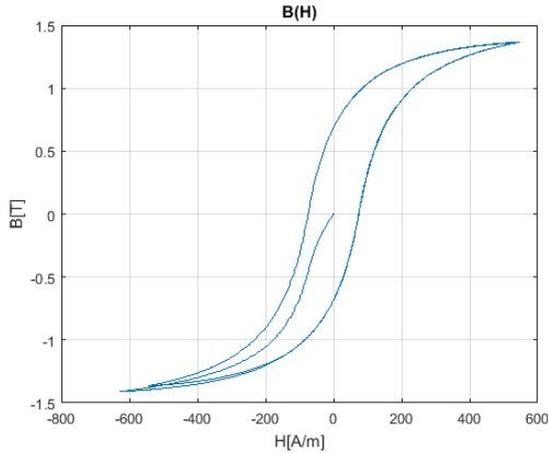


Figura 26 – Caso 1: Curva $B(H)$ no meio da perna central para inversão analítica



De acordo com as simulações efetuadas no decorrer do trabalho, notou-se que a estabilidade está diretamente relacionada com o passo de cálculo, tensão imposta, valor de resistência, frequência e densidade de elementos na malha.

Quanto ao passo de cálculo, a inversão numérica demonstrou-se mais robusta podendo-se variar, para o caso 1 do Team Problem 32, o passo de cálculo de 10^{-4} até 2×10^{-3} . Já a inversão analítica, por aproximar a derivada do instante atual pela derivada do ponto anterior, pode-se variar o passo de cálculo de 10^{-4} até 8×10^{-4} com bons resultados para uma malha refinada.

O Modelo G também mostrou-se hábil para o cálculo da distribuição de campos tanto com malhas refinadas quanto esparsas. Todavia, para malhas esparsas e passo de cálculo largo, as inversões numéricas mostraram-se mais robustas que a inversão analítica.

No que diz respeito a tempo de cálculo, a inversão analítica foi mais rápida do que as inversões numéricas mesmo quando a comparação de tempo de simulação é feita entre passos de cálculo de largura diferente, ou seja, comparando-se o tempo de simulação utilizando-se a inversão analítica, com determinado passo de cálculo, com o tempo de simulação das inversões numéricas com passo de cálculo mais largo.

Embora, de maneira geral, as inversões numéricas tenham se mostrado mais robustas, tendo uma tendência menor a divergir, pode-se facilmente melhorar a convergência e qualidade dos resultados com a

inversão analítica dividindo-se em pequenos passos, dentro do modelo, partindo da indução magnética do instante precedente para a atual imposta de maneira mais suave.

5.6 CONCLUSÃO

As inversões desenvolvidas neste trabalho demonstraram-se estáveis e seguras para serem usadas, valendo-se destacar que, apesar de lentas, as inversões numéricas tem menor susceptibilidade a divergir devido ao uso da permeabilidade magnética, porém são muito mais lentas que a inversão analítica. Para o caso de presença de harmônicas na fonte, pode-se dividir o passo de cálculo entre a indução magnética do passo anterior para o passo atual em pequenos passos de modo a aumentar a estabilidade do modelo.

6 MODELAGEM DE LAÇOS MENORES

6.1 INTRODUÇÃO

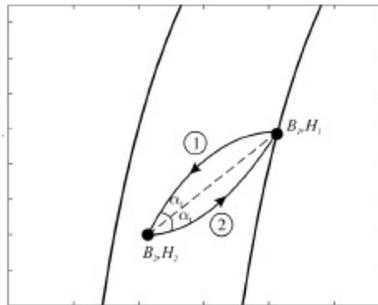
O Modelo G não consegue, naturalmente, modelar laços menores (BASTOS et al., 2018). Todavia, com alterações convenientes ao modelo, pode-se passar a descrevê-los ao se salvaguardar o histórico magnético da simulação.

6.2 ALTERAÇÕES NO MODELO

Com os parâmetros $iasc$ e icr pode-se determinar a presença de laços menores em uma simulação. Quando se detecta uma reversão ao se percorrer o laço externo, salva-se o ponto em questão. Após, caso haja uma nova reversão em um ponto interno da curva, detecta-se o laço menor. Neste momento, a proposta é sair do modelo e, de posse dos dois pontos citados mais a derivada de chegada, determinar a equação de uma parábola. A ideia é que se imponha a parábola até o momento que a curva encoste no laço externo, a partir de onde o modelo volta a controlar o comportamento do material.

No entanto, deve-se atentar para o caso de haver ângulos negativos. A figura 27 ilustra o fundamento destas alterações.

Figura 27 – Laço menor a partir de uma parábola imposta

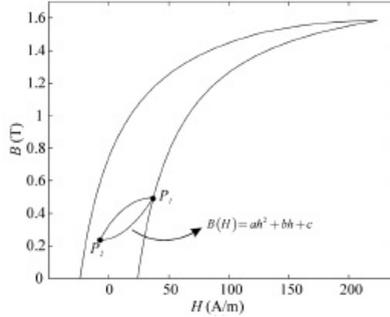


Fonte:(BASTOS et al., 2018)

No modelo direto, B_{i+1} seria obtido através de uma equação de parábola como ilustra a figura 28. Contudo, para o modelo inverso

deve-se chegar ao valor de H_{i+1} através da equação 5.3, em que ν_i corresponde ao inverso da derivada da equação da parábola.

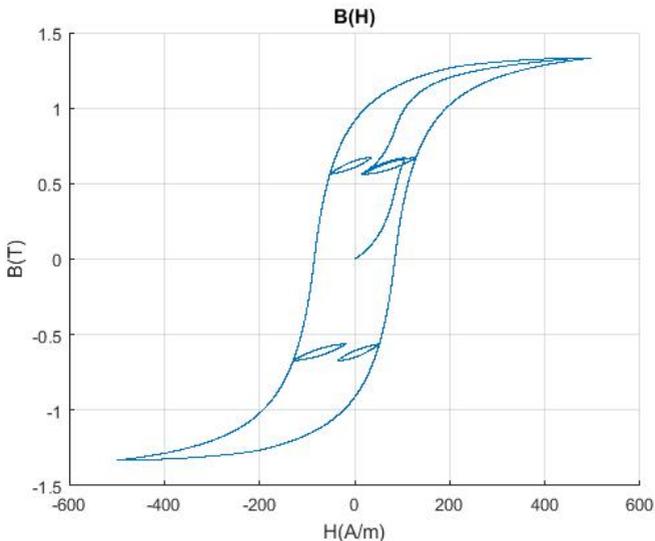
Figura 28 – Laço menor para o Modelo G direto



Fonte:(BASTOS et al., 2018)

Para um material arbitrário, com parâmetros $a = 1,8962$, $b = 1,2549$, $c = 69,44$, $H_{coer} = 84,567 A/m$, $p_a = 0,23$, $p_b = 0,7$, excitados com uma fonte senoidal com $1,33T$ de amplitude e frequência de $10Hz$ obteve-se o resultado da figura 29

Figura 29 – Laço menor para o Modelo G inverso



Ressalta-se, porém, que para acoplá-lo com o Método dos Elementos Finitos, deve-se salvar o histórico magnético, além das *flags iasc* e *icr* de cada elemento da malha de cálculo. Isto implica em alto uso de memória. No apêndice deste trabalho, encontra-se o algoritmo, em linguagem Matlab, para a modelagem de laços menores.

6.3 CONCLUSÃO

Mostrou-se neste capítulo que é possível modelar laços menores, usando-se o Modelo G, mas, para tal, deve-se salvaguardar o histórico magnético de cada elemento de uma malha, o que implica num alto custo computacional.

7 MODELAGEM DE HISTERESE VETORIAL

7.1 INTRODUÇÃO

Em alguns casos e determinadas regiões do domínio de cálculo, existe a presença de campos rotacionais, como é o caso das juntas T de transformadores. Para que se possa descrever devidamente este fenômeno, uma vetorização do Modelo G, que é um modelo originalmente escalar, foi proposta.

7.2 GENERALIZAÇÃO VETORIAL

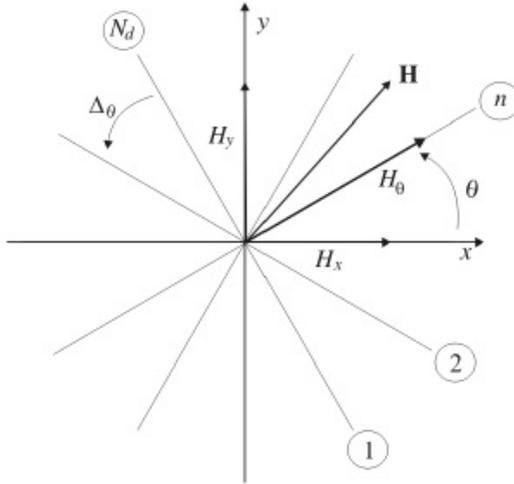
Um modelo vetorial de histerese consegue descrever o comportamento do material magnético exposto a campos rotacionais. Deve-se ressaltar, todavia, que tal modelo deve reduzir-se ao modelo escalar quando o material é excitado por campos alternantes, ou seja, a direção do campo permanece a mesma ao longo do tempo, variando-se, apenas, a amplitude e o sentido do campo. Mayergoyz propôs uma generalização com superposição do modelo escalar para algumas direções do espaço (HOFFMANN et al., b). A saída do modelo é obtida através da 7.1, onde θ_0 é o ângulo de integração inicial, \mathbf{e}_θ é o versor na direção θ e $f_\theta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta)$ é a projeção escalar do campo na direção θ .

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta_0}^{\frac{\pi}{2} + \theta_0} \mathbf{e}_\theta f_\theta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta) d\theta \quad (7.1)$$

Uma vez que o número de direções usadas N_d são finitas e igualmente espaçadas, pode-se aproximar 7.1, conforme ilustra a figura 30 por

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\pi} \Delta\theta \sum_{n=1}^{N_d} \mathbf{e}_{\theta_n} f_\theta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{\theta_n}) \quad (7.2)$$

Figura 30 – Número finitos de direções levada em conta pelo modelo



Fonte:(LEITE et al., 2006)

Onde $\Delta\theta$ é o ângulo discretizado dado por $\frac{\pi}{N_d}$ e o ângulo θ_n é dado por

$$\theta_n = \frac{(n-1)\pi}{N_d}. \quad (7.3)$$

A projeção da indução magnética em uma direção θ qualquer é obtida através da projeção de suas componentes usando-se:

$$B_\theta = B_x \cos\theta + B_y \sin\theta \quad (7.4)$$

onde B_x e B_y são os componentes da indução magnética \mathbf{B}

O conjunto de equações apresentado compõem uma abordagem para a vetorização do Modelo G. Vale ressaltar que as considerações anteriormente citadas valem para o modelo direto.

7.2.1 TENSOR DE RELUTIVIDADE

Uma vez que no Método dos Elementos Finitos estamos interessados em retornar o tensor de relutividade para que possa ser acoplado à matriz global do sistema, pode-se, ao se derivar 7.2 em relação ao campo magnético, conforme 7.5, obtê-lo.

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{B}} = \frac{d}{d\mathbf{B}} \left(\frac{2}{\pi} \Delta_\theta \sum_{n=1}^{N_d} \mathbf{e}_\theta f_\theta \right) \quad (7.5)$$

Como a derivada é um operador linear, a derivada da soma é igual a soma das derivadas. Logo,

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{B}} = \frac{2}{\pi} \Delta_\theta \sum_{n=1}^{N_d} \mathbf{e}_\theta \frac{df_\theta}{d\mathbf{B}}. \quad (7.6)$$

Sendo $\frac{df_\theta}{d\mathbf{B}} = \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial B_x}, \frac{\partial f_\theta}{\partial B_y} \right)$. Fazendo-se uso da regra da cadeia, chega-se à 7.7.

$$\frac{df_\theta}{d\mathbf{B}} = \frac{df_\theta}{dB_\theta} \frac{dB_\theta}{d\mathbf{B}}, \quad (7.7)$$

Posto isto, substituindo-se 7.7 em 7.6, chega-se à expressão 7.8 que permite de se obter o tensor de relatividade diferencial.

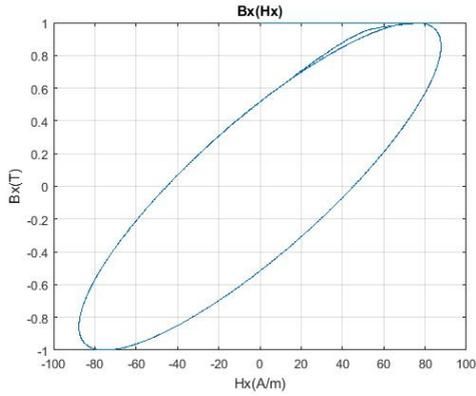
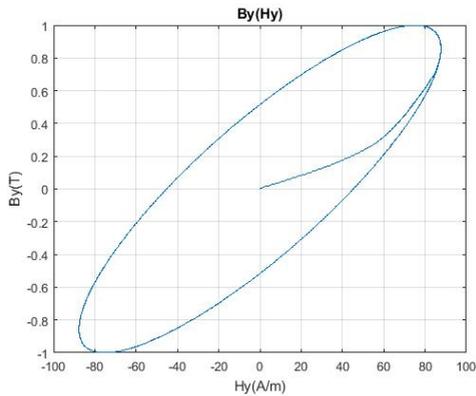
$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{B}} = \frac{2}{\pi} \Delta_\theta \sum_{n=1}^{N_d} \frac{df_\theta}{dB_\theta} (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta^T) \quad (7.8)$$

Por fim, para acoplar o método apresentado com o MEF, deve-se armazenar em memória o histórico magnético de cada direção de cada elemento da malha, ou seja, para N_d direções de discretização espacial, deve-se, para cada elemento, guardar o histórico magnético de todas as direções consideradas.

7.2.2 RESULTADOS

De modo a demonstrar o desempenho do método, utilizou-se $N_d = 30$ para toda as simulações.

Para um material hipotético, com alimentação co-senoidal em x , de amplitude de $1T$, e senoidal em y , com $1T$ de amplitude, de frequência de $60Hz$, $p_a = 0,3$, $p_b = 0,8$, $a = 0,2528$, $b = 0,1674$, $d = 6,119$ e $H_{coer} = 38,1755$ obteve-se as curvas de loci mostradas nas figuras 31 e 32.

Figura 31 – Curva $B_x(H_x)$ Figura 32 – Curva $B_y(H_y)$ 

Ao longo dos testes notou-se que para um número de direções maiores que 13 há pouca ou nenhuma diferença visual na qualidade dos resultados. Para obter, visualmente, os resultados apresentados pelas figuras 31 e 32, o tempo total simulação, para um passo de cálculo de 10^{-4} segundos, foi:

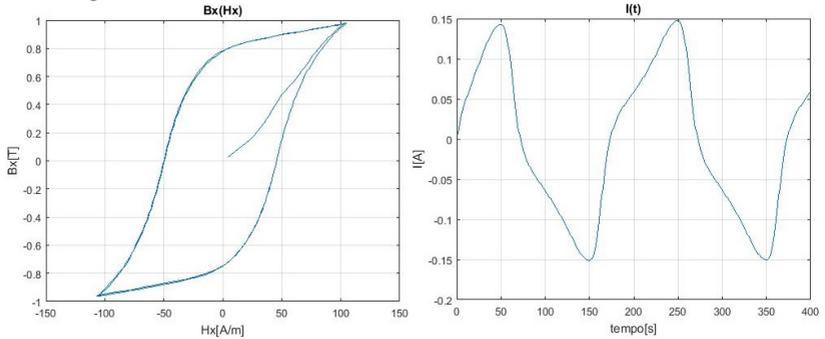
- 0,0955 segundos para 15 direções;
- 0,1095 segundos para 20 direções;
- 0,1270 segundos para 25 direções;

- 0,1442 segundos para 30 direções.

Porém, foram consideradas 30 direções nos cálculos ao longo do capítulo com o objetivo de garantir bons resultados.

Para se comprovar que este método recai naturalmente em um modelo escalar, volta-se ao problema da seção 8.7.4 encontrado em *Magnetic Materials and 3D Finite Element Modeling*. A figura 33 mostra os resultados obtidos utilizando-se a mesma malha que foi aplicada no capítulo 5 e passo de cálculo de 10^{-4} segundos.

Figura 33 – Problema escalar calculado com modelo vetorial

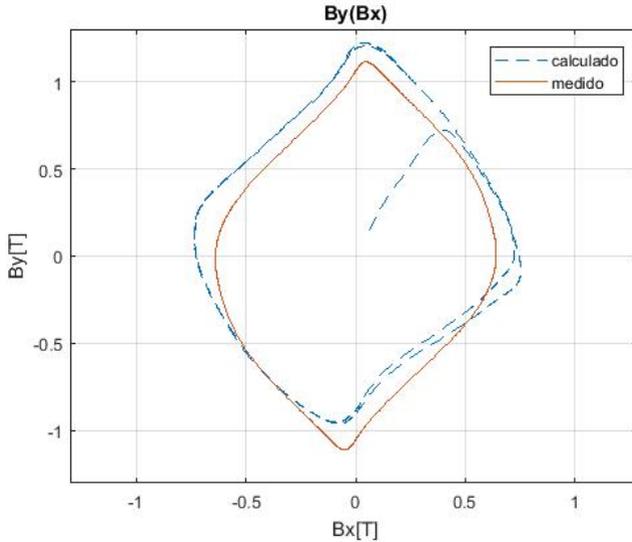


Com um tempo total de simulação de 25 segundos pode-se observar na 33, que o campo coercitivo é ligeiramente superior ao obtido com as simulações com o modelo escalar.

Como o principal foco deste capítulo é modelar materiais excitados por campos rotacionais, o caso 3 do *TEAM Problem 32* foi usado como referência. A figura 34, obtida no ponto P da figura 20, mostra o resultado obtido supondo-se que o material seja isotrópico, com os parâmetros do eixo y para uma malha de 1300 elementos.

O terceiro caso consiste de uma fonte de alimentação de 14,5V, frequência de 10Hz, onde cada bobina possui igualmente 90 espiras e são alimentadas uma com tensão senoidal, enquanto a outra cossenoidal. As resistências das bobinas são as mesmas do caso 1, $0,32\Omega$ cada com uma resistência adicional em cada bobina de $11,1\Omega$.

Figura 34 – Loci de indução no ponto P do dispositivo supondo-se isotropia do material



Os parâmetros do material usado nesta simulação são: $a = 0,146$, $b = 0,0861$, $c = 10$, $H_{coer} = 61,9$, $p_a = 0,3$ e $p_b = 0,8$.

Nota-se que há uma leve assimetria na curva, atribuída, em princípio, por uma distorção da malha de cálculo, mas o método proposto descreve a curva medida com uma boa fidelidade.

7.3 REPRESENTAÇÃO DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

Para incluir a representação de materiais anisotrópicos em qualquer direção, uma ferramenta válida é a *orientation distribution function* (ODF) (HOFFMANN et al., b). Esta abordagem faz uso de dados experimentais obtidos em três direções 0° , 45° e 90° . Com ODF, o campo magnético pode ser computado a partir da influência das três direções citadas.

$$H = H_0 + H_1 \cos 2\theta + H_2 \cos 4\theta \quad (7.9)$$

Os coeficientes de 7.9 são dados por

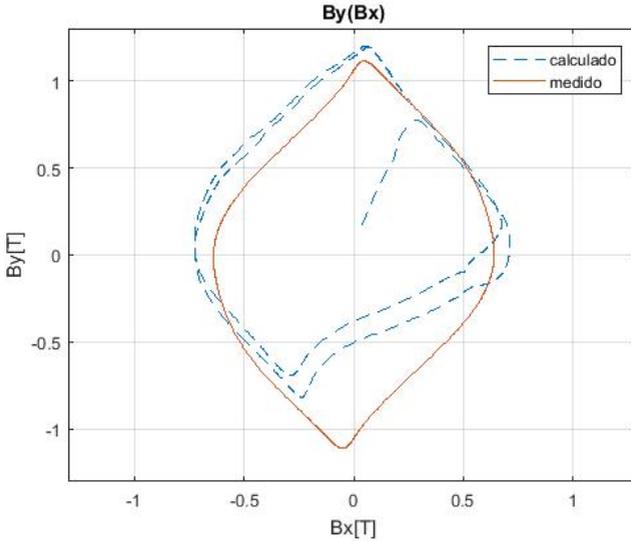
$$\begin{aligned} H_0 &= 0.25[H(0^\circ) + H(90^\circ) + 2H(45^\circ)] \\ H_1 &= 0.5[H(0^\circ) - H(90^\circ)] \\ H_2 &= 0.25[H(0^\circ) + H(90^\circ) - 2H(45^\circ)] \end{aligned} \quad (7.10)$$

(HOFFMANN et al., b).

Da mesma forma que na seção anterior, substituindo-se 7.9 em 7.2, pode-se obter o tensor de relutividade ao se derivar em relação a \mathbf{H} .

Por fim, obteve-se para o caso 3 do *TEAM Problem 32*, o resultado apresentado pela figura 35.

Figura 35 – Loci de indução no ponto P do dispositivo levando-se em conta a anisotropia do material



Para esta simulação foram usadas as curvas de 0° , 30° e 90° . Isso se deve ao fato do material de referência não possuir a curva de 45° . Os parâmetros da curva de 0° são: $a = 0,146$, $b = 0,0861$, $c = 10$, $H_{coer} = 61,9$, $p_a = 0,3$ e $p_b = 0,8$.

Já os parâmetros da curva de 30° são dados por: $a = 0,2571$, $b = 0,1662$, $c = 10$, $H_{coer} = 65,9$, $p_a = 0,3$ e $p_b = 0,8$.

Por último, os parâmetros da curva de 90° são: $a = 0,115$, $b = 0,0679$, $c = 10$, $Hcoer = 79,4$, $p_a = 0,3$ e $p_b = 0,65$.

Mais uma vez, notou-se uma assimetria, desta vez mais acentuada na curva calculada devido, ou à distorção da malha, ou à caracterização do material em uma ou mais direções.

7.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo é mostrado que, através do trabalho de Mayergoyz, pode-se vetorizar o Modelo G de modo a recair, naturalmente, em um caso escalar, bem como descrever satisfatoriamente a presença de campos rotacionais na malha de cálculo. Adicionalmente, o método ODF pode agregar as características de materiais anisotrópicos à modelagem destes fenômenos

8 CONCLUSÃO

O objetivo geral desta dissertação de mestrado foi o estudo da inversão do Modelo G.

O Modelo G mostrou ser de fácil entendimento, aplicação e, devido a isto, permite que, em pouco tempo, possa ser implementado e acoplado com o Método dos Elementos Finitos. Justamente devido a esta simplicidade, pode-se, sem grandes esforços, fazer alterações ao modelo de modo a descrever laços menores, bem como generalizar o modelo para o caso vetorial.

As inversões numéricas, apesar de lentas, mostraram-se bastante estáveis, pois aplica-se, indiretamente, o Modelo G original tendo o campo magnético H como variável independente, ou seja, com o uso da permeabilidade magnética. Isto permite que possam ser usados passos largos nas simulações.

Ao se discretizar a função de Elliot, é possível achar uma solução para a inversão analítica. Para o caso de que algum material que não possa ser descrito de maneira apropriada por uma função analítica, pode-se usar um conjunto de pontos experimentais na simulação.

A inversão analítica, mais rápida, é uma excelente alternativa para o uso da formulação em potencial vetor com o Método dos Elementos Finitos. Deve-se ressaltar porém, que, diferentemente das inversões numéricas, a inversão analítica não permite que sejam usados passos largos em simulações sem distorcer o resultado ou mesmo divergir.

Pode-se, ao salvar o histórico magnético de cada elemento da malha de cálculo, descrever laços menores.

E ao se fazer uso do trabalho de Mayergoyz, pode-se generalizar o Modelo G escalar para um modelo vetorial. Materiais anisotrópicos podem ser levados em consideração com o uso do método ODF.

Ao longo do trabalho, evidenciou-se que a dificuldade não se limita à inversão do modelo, mas ao acoplamento com o MEF, onde muitas vezes deve-se fazer ajustes aos modelos propostos de modo a torná-los mais estáveis e melhorar a convergência dos cálculos de uma simulação.

Quanto à estabilidade de cálculo, o modelo G mostrou-se estável tanto para malhas refinadas quanto para esparsas.

No que diz respeito a trabalhos futuros, sugere-se métodos que melhorem a convergência e diminuam o tempo de simulação, o estudo do acoplamento da modelagem de laços menores ao MEF e, mais importante, um estudo de um modelo vetorial que dispense a necessidade

de discretização espacial.

Pode-se, embora fuja do escopo do trabalho, fazer um acoplamento magnetomecânico do modelo para uma abordagem multifísica.

REFERÊNCIAS

- BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática**. [S.l.]: Ed. da UFSC, 2012.
- BASTOS, J. P. A. et al. A new and robust hysteresis modeling based on simple equations. **IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS MAG**, IEEE, v. 54, n. 3, p. 1–4, 2018.
- BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Electromagnetic modeling by finite element methods**. [S.l.]: CRC press, 2003.
- BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Magnetic materials and 3D finite element modeling**. [S.l.]: CRC press, 2013.
- BINARY search algorithm. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_search_algorithm>. Acesso em: 7 abr. 2018.
- BOTTAUSCIO, O. et al. Description of team problem: 32 a test-case for validation of magnetic field analysis with vector hysteresis. **Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, Turin, Italy, Tech. Rep**, p. 1–5, 2004.
- ESPÍNDOLA, A. A. d. et al. **Avaliação das perdas magnéticas em dispositivos submetidos a campos magnéticos rotacionais**. Tese (Doutorado), 2003.
- HOFFMANN, K. **Modelagem Numérica de Histerese Ferromagnética acoplada ao Método dos Elementos Finitos 3D: Proposição do Modelo G e aprimoramento da técnica de Jiles-Atherton**. Tese (Doutorado), 2018.
- HOFFMANN, K. et al. Hysteresis g model coupled with fem: performance and convergence.
- HOFFMANN, K. et al. Vector hysteresis g model applied to anisotropic materials.
- JILES, D.; ATHERTON, D. Theory of ferromagnetic hysteresis. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, v. 61, n. 1, p. 48 – 60, 1986. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304885386900661>>.

JILES, D. C.; ATHERTON, D. L. Theory of the magnetisation process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effect. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 17, n. 6, p. 1265, 1984. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0022-3727/17/i=6/a=023>>.

KOLTERMANN, P. I. et al. **Cálculo de campos magnéticos considerando histerese**. Tese (Doutorado), 2001.

LEITE, J. V. et al. **Análise de modelos diferenciais de histerese magnética considerando laços menores de indução**. Dissertação (Mestrado), 2002.

LEITE, J. V. et al. **Contribuição à modelagem vetorial da histerese magnética**. Tese (Doutorado), 2006.

RIGHI, L. A. et al. **Modelagem das perdas em dispositivos eletromagnéticos**. Tese (Doutorado), 2000.

TUMANSKI, S. **Handbook of magnetic measurements**. [S.l.]: CRC press, 2011.

APÊNDICE A – ALGORITMOS DESENVOLVIDOS

Esta seção é dedicada à apresentação de alguns algoritmos desenvolvidos neste trabalho, com enfoque nas inversões do Modelo G. Todos os algoritmos apresentados encontram-se em linguagem MATLAB.

Primeiramente, apresenta-se o algoritmo de inversão numérica através de passos largos:

```

for i=1:(length(t)-1)
Ht = H(i);

if (B(i+1)-B(i))>0
iasc = 1;
else
iasc = 0;
end

while(1)

if iasc == 1
Ht = Ht + deltah;
else
Ht = Ht - deltah;
end

disti = (a*(Ht-Hcoer))/(d+b*abs((Ht-Hcoer))) - B(i)
;
dists = (a*(Ht+Hcoer))/(d+b*abs((Ht+Hcoer))) - B(i)
;

if(disti*dists)>0
icr = 1; %external point
else
icr = 0; %internal point
end

if icr == 1
%ponto pertencente ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
Bt = (a*(Ht-Hcoer))/(d+b*abs((Ht-Hcoer)));
else
%Ramo descendente%

```

```

Bt = (a*(Ht+Hcoer))/(d+b*abs((Ht+Hcoer)));
end
else
%Ponto interno ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
di = abs(disti)/(abs(disti)+abs(dists));
betai = (a*d)/((b*abs((Ht-Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*di+pb;
betap = betai*p;
else
%Ramo descendente%
ds = abs(dists)/(abs(disti)+abs(dists));
betas = (a*d)/((b*abs((Ht+Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*ds+pb;
betap = betas*p;
end
Bt = betap*(Ht-H(i))+B(i);
end

bteste = teste(abs(B(i+1)),abs(Bt),tol);

if (bteste == 1)
H(i+1) = Ht;
break;
elseif(B(i+1)<Bt) && (iasc == 1)
H(i+1) = Ht*(B(i+1)/Bt);
break;
elseif(B(i+1)>Bt) && (iasc == 0)
H(i+1) = Ht*(B(i+1)/Bt);
break;
end
end
end

```

O algoritmo de inversão numérica relacionado à segunda abordagem, com passos variáveis, é apresentado:

```

for i=1:(length(t)-1)
Ht = H(i);

```

```

if (B(i+1)-B(i))>0
iasc = 1;
else
iasc = 0;
end

while(1)

if iasc == 1
Hp = Ht;
Ht = Ht + deltah;
else
Hp = Ht;
Ht = Ht - deltah;
end

disti = (a*(Ht-Hcoer))/(d+b*abs((Ht-Hcoer))) - B(i)
;
dists = (a*(Ht+Hcoer))/(d+b*abs((Ht+Hcoer))) - B(i)
;

if(disti*dists)>0
icr = 1; %external point
else
icr = 0; %internal point
end

if icr == 1
%ponto pertencente ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
Bt = (a*(Ht-Hcoer))/(d+b*abs((Ht-Hcoer)));
else
%Ramo descendente%
Bt = (a*(Ht+Hcoer))/(d+b*abs((Ht+Hcoer)));
end
else
%Ponto interno ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
di = abs(disti)/(abs(disti)+abs(dists));

```

```

betai = (a*d)/((b*abs((Ht-Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*di+pb;
betap = betai*p;
else
%Ramo descendente%
ds = abs(dists)/(abs(disti)+abs(dists));
betas = (a*d)/((b*abs((Ht+Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*ds+pb;
betap = betas*p;
end
Bt = betap*(Ht-H(i))+B(i);
end

bteste = teste(abs(B(i+1)),abs(Bt),tol);

if (bteste == 1)
H(i+1) = Ht;
break;
end

if(B(i+1)<Bt) && (iasc == 1)
Ht = Hp;
deltah = 2*deltah/3;
end

if(B(i+1)>Bt) && (iasc == 0)
Ht = Hp;
deltah = 2*deltah/3;
end
end
end

```

O algoritmo a seguir, baseado em pesquisa binária, apesar de longo, demonstrou-se mais rápido que as demais abordagens numéricas.

```

for i=1:(length(t)-1)

if(B(i+1)-B(i))>0
iasc = 1;
else
iasc = 0;

```

end

```

if iasc == 1
He = H(i);
Hd = H(i) + 2;
else
He = H(i) - 2;
Hd = H(i);
end

```

while(1)

```
Hm = (He + Hd)/2;
```

```

disti = (a*(Hm-Hcoer))/(d+b*abs((Hm-Hcoer))) - B(i)
;
dists = (a*(Hm+Hcoer))/(d+b*abs((Hm+Hcoer))) - B(i)
;

```

```

if(disti*dists)>0
icr = 1; %external point%
else
icr = 0; %internal point%
end

```

```

if icr == 1
%ponto pertencente ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
Bt = (a*(Hm-Hcoer))/(d+b*abs((Hm-Hcoer)));
else
%Ramo descendente%
Bt = (a*(Hm+Hcoer))/(d+b*abs((Hm+Hcoer)));
end
else
%Ponto interno ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente%
di = abs(disti)/(abs(disti)+abs(dists));
betai = (a*d)/((b*abs((Hm-Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*di+pb;

```

```

betap = betai*p;
else
%Ramo descendente%
ds = abs(dists)/(abs(disti)+abs(dists));
betas = (a*d)/((b*abs((Hm+Hcoer))+d)^2);
p = (pa-pb)*ds+pb;
betap = betas*p;
end
Bt = betap*(Hm-H(i))+B(i);
end

bteste = teste(abs(B(i+1)),abs(Bt),tol);

if (bteste == 1)
H(i+1) = Hm;
break;
elseif(He>Hd)
H(i+1) = Hm;
end

if(flag == 0)
%busca pelo limite superior no eixo ascendente%
if (iasc == 1) && (B(i+1)<Bt)
flag = 1;
elseif (iasc == 1) && (B(i+1)>Bt)
Hd = Hd + 1;
%busca pelo limite inferior no eixo descendente%
elseif(iasc == 0) && (B(i+1)>Bt)
flag = 1;
elseif(iasc == 0) && (B(i+1)<Bt)
He = He - 1;
end
else
if(iasc == 1) && (Bt<B(i+1))
He = Hm + deltah;
elseif(iasc == 1) && (Bt>B(i+1))
Hd = Hm - deltah;
elseif(iasc == 0) && (Bt>B(i+1))
Hd = Hm - deltah;
elseif(iasc == 0) && (Bt<B(i+1))
He = Hm + deltah;

```

```

elseif (He>Hd)
H(i+1) = Hm*(B(i+1)/Bt);
end

end

end
flag = 0;
end

```

Por último, apresenta-se a inversão analítica do Modelo G no algoritmo.

```

for i=1:(length(t)-1)

if (B(i+1)-B(i))>0
iasc = 1;
else
iasc = 0;
end

Binf = (a*(H(i)+Hcoer))/(d+b*abs((H(i)+Hcoer)));
Bsup = (a*(H(i)-Hcoer))/(d+b*abs((H(i)-Hcoer)));

disti = Binf - B(i);
dists = Bsup - B(i);

if (disti*dists)>0
icr = 1; %external point
else
icr = 0; %internal point
end

if icr == 1
%ponto pertencente ao laço maior%
if iasc == 1
%Ramo ascendente
H(i+1) = ((b*abs((H(i)-Hcoer))+d)^2)/(a*d)*(B(i+1)-
B(i))+H(i);
else
%Ramo descendente%

```

$$H(i+1) = ((b * \mathbf{abs}((H(i) + H_{coer})) + d)^2) / (a * d) * (B(i+1) - B(i)) + H(i);$$

end

else

%Ponto interno ao laço maior%

if iasc == 1

%Ramo ascendente%

$$ds = \mathbf{abs}(dists) / (\mathbf{abs}(disti) + \mathbf{abs}(dists));$$

$$p = (pa - pb) * ds + pb;$$

$$betas = (a * d) / ((b * \mathbf{abs}((H(i) - H_{coer})) + d)^2);$$

$$betap = betas * p;$$

else

%Ramo descendente%

$$di = \mathbf{abs}(disti) / (\mathbf{abs}(disti) + \mathbf{abs}(dists));$$

$$p = (pa - pb) * di + pb;$$

$$betai = (a * d) / ((b * \mathbf{abs}((H(i) + H_{coer})) + d)^2);$$

$$betap = betai * p;$$

end

$$H(i+1) = (1 / betap) * (B(i+1) - B(i)) + H(i);$$

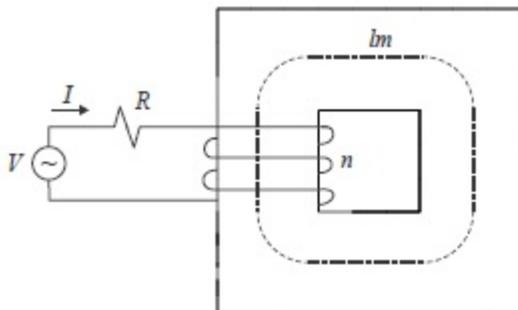
end

end

**APÊNDICE B – RESULTADOS COM MÉTODO
RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM**

A estrutura do caso didático, abordado no capítulo 5, foi resolvida para um modelo analítico. Para tal, considera-se o circuito magnético alimentado pelo circuito elétrico da figura 36.

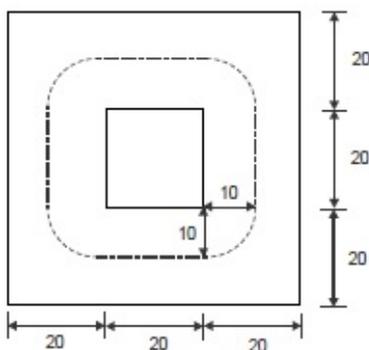
Figura 36 – Circuito magnético excitado pelo circuito elétrico



Fonte:(BASTOS; SADOWSKI, 2013)

O caminho magnético médio estimado do núcleo é denotado por l_m , mostrado na figura . O valor calculado de l_m é dado por $l_m = 4 \times 20 + 2\pi \times 10$.

Figura 37 – Caminho magnético médio



Fonte:(BASTOS; SADOWSKI, 2013)

Aplicando-se a lei de Ampère e considerando que o campo magnético seja linear e constante no circuito, tem-se:

$$H_m = \frac{nI}{l_m} \quad (\text{B.1})$$

onde n é o número de espiras da bobina e I é a corrente elétrica. A equação do circuito elétrico é dada por

$$V = RI + n \frac{d\phi}{dt} = RI + nS \frac{dB}{dt} \quad (\text{B.2})$$

em que R é a resistência elétrica e S é a seção transversal do núcleo. Isolando-se I da equação B.1, obtém-se $I = Hl_m/n$. Então, equação B.2 pode ser reescrita em termos de variável de estado, como

$$\frac{dB}{dt} = \left(\frac{1}{nS} \right) \left[V - \left(\frac{Hl_m}{n} \right) R \right] \quad (\text{B.3})$$

O método numérico aplicado, como sugere o título do apêndice, é o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, que é composto pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Para um passo de cálculo de 10^{-4} segundos, obteve-se, conforme a figura 38, resultados visualmente idênticos, diferenciando-se entre si no tempo de convergência:

- Primeira inversão em **1,079** segundos;
- Segunda inversão em **0,425** segundos;
- Terceira inversão em **0,0575** segundos;
- Inversão analítica em **0,0205** segundos.

Figura 38 – Resultados para o modelo analítico do circuito

