

Lucas Farias Palma

**Estudos complementares sobre Otimização  
Topológica Multimaterial utilizando interpolação  
SIMP ordenada**

Dissertação de Mestrado submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Engenharia Civil.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Orientador: Dr. Otávio Augusto Alves da Silveira

Brasil  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Palma, Lucas Farias

Estudos complementares sobre Otimização Topológica  
Multimaterial utilizando interpolação SIMP ordenada  
/ Lucas Farias Palma ; orientador, Otávio Augusto  
Alves da Silveira , 2018.

124 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

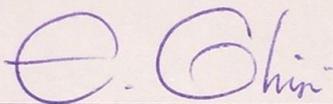
1. Engenharia Civil. 2. Otimização topológica. 3.  
Otimização Multimaterial. 4. SIMP ordenado. 5.  
Restrições de massa e custo. I. , Otávio Augusto  
Alves da Silveira. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil. III. Título.

Lucas Farias Palma

**Estudos complementares sobre Otimização  
Topológica Multimaterial utilizando interpolação  
SIMP ordenada**

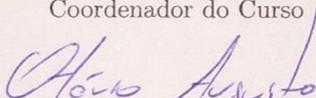
Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do  
Título de MESTRE em Engenharia Civil e aprovada em  
sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Enge-  
nharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 06 de Dezembro de 2018:



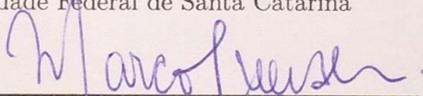
---

**Eneid Ghisi, Dr.**  
Coordenador do Curso



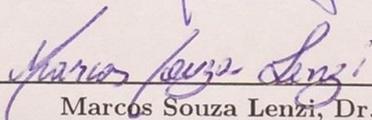
---

**Prof. Otávio Augusto Alves da Silveira, Dr.**  
(Orientador)  
Universidade Federal de Santa Catarina



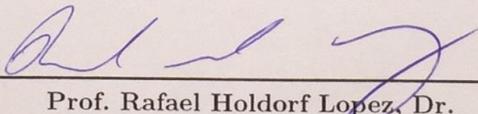
---

**Marco Antônio Luersen, Dr.**  
(Videoconferência)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná



---

**Marcos Souza Lenzi, Dr.**  
Universidade Federal de Santa Catarina



---

**Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr.**  
Universidade Federal de Santa Catarina



# Agradecimentos

À minha família. Agradeço muito a meus primeiros professores e grandes incentivadores, meus pais, Dijalma e Cássia, por todo amor, carinho e dedicação na criação de seus filhos. Aos meus irmãos, Luann e Lucian, obrigado pelo carinho, incentivo e momentos de riso solto e descontração.

Ao meu orientador, professor Otávio Silveira, agradeço pela paciência, compreensão, incentivo, cobrança e dedicação na realização deste trabalho. Certamente teria sido muito mais difícil sem a sua ajuda.

Aos professores Marco Luersen, Marcos Lenzi e Rafael Holdorf, obrigado pelas sugestões para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus amigos do Grupex, obrigado pela convivência diária, pelas sugestões, questionamentos e momentos de alegria e muito chimarrão.

Aos meus amigos de republica, Pedro, Isaque, Raí e Lu, obrigado pela amizade construída, por terem tornado os dias mais fáceis e mais alegres.

Aos meus grandes e velhos amigos de sempre, talvez vocês não saibam, mas mesmo de longe foram muito importantes pra que este trabalho fosse finalizado.

Ao CNPq pelo suporte financeiro à pesquisa.

À Universidade Federal de Santa Catarina, aos demais professores, servidores e colaboradores do PPGEC, que de uma forma ou de outra contribuíram na minha dissertação e formação como mestre em engenharia.



*"If you think about the voids instead of working with solid elements, the truth appears."*

— Robert Le Ricolais



# Resumo

Este trabalho consiste na aplicação da interpolação SIMP ordenada na Otimização Topológica Multimaterial, com o objetivo de realizar estudos complementares sobre o método verificando possíveis limitações neste tipo de abordagem. O problema de otimização topológica inicialmente é formulado para múltiplas fases material considerando restrições de massa e custo em problemas de minimização de flexibilidade estrutural. Como o método proposto não depende de variáveis adicionais para representar a seleção do material, o custo computacional é independente do número de materiais considerados e sua convergência, com as restrições citadas, será avaliada por meio do Critério de Ótimo. Em seguida, é analisada a presença de material intermediário na estrutura e, pela medida de material não discreto ser elevada, busca-se uma nova abordagem na otimização topológica multimaterial. Dessa forma, uma modificação do modelo material que melhor atende aos critérios de penalização da função objetivo é apresentada e os resultados, aliados a novas restrições de volume por material, são analisados por meio do Método das Assíntotas Móveis. A eficiência e capacidade das ferramentas apresentadas e propostas no trabalho são verificadas pela resolução de problemas estáticos de elasticidade para diferentes geometrias e condições de contorno.

**Palavras-chaves:** Otimização topológica, otimização multimaterial, SIMP ordenado, restrições de massa e custo.



# Abstract

This work consists in the application of ordered SIMP interpolation in the Multi-material Topology Optimization, with the aim of performing complementary studies on the method, verifying possible limitations in this type of approach. The topology optimization problem is initially formulated for multiple material phases considering mass and cost constraints on structural compliance minimization problems. As the proposed method does not depend on additional variables to represent the material selection, the computational cost is independent of the number of materials considered and its convergence, with the mentioned constraints, will be evaluated through the Optimum Criteria. Then, the presence of intermediate material in the structure is analyzed and, because the measurement of non-discreteness material is high, a new approach is sought in multi-material topology optimization. Thus, a modification of the material model that best meets the objective function penalty criteria is presented and the results, together with new volume constraints per material, are analyzed using the Method of Moving Asymptotes. The efficiency and capacity of the tools presented and proposed in the work are verified by solving static elastic problems for different geometries and boundary conditions.

**Keywords:** Topology optimization, multi-material optimization, ordered SIMP, mass and cost constraints.



# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell . . . . .	32
Figura 2.1 – Solução de um problema por diferentes aborda- gens de otimização: a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica.	40
Figura 2.2 – Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido. . . . .	41
Figura 2.3 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica. . . . .	45
Figura 2.4 – Efeito de diferentes valores de penalização. . .	47
Figura 2.5 – Representação da escala de cinza. . . . .	48
Figura 2.6 – O problema de instabilidade de tabuleiro. . .	49
Figura 2.7 – Refinamento da malha com: a) 2700 elementos; b) 4800 elementos; c) 17200 elementos. . . . .	51
Figura 2.8 – Representação do filtro de sensibilidades . . .	53
Figura 2.9 – Aproximação de funções MMA . . . . .	55
Figura 2.10 – Fluxograma do algoritmo. . . . .	56
Figura 3.1 – Interpolação SIMP ordenada multimaterial do módulo de elasticidade. . . . .	63
Figura 3.2 – Interpolação SIMP do custo para um material.	64
Figura 3.3 – Interpolação SIMP ordenada do custo. . . . .	65
Figura 4.1 – Geometrias e condições de contorno correspon- dentes . . . . .	70
Figura 4.2 – Topologia da ponte simétrica: a) Zhuo & Sai- tou (2017); b) resolução melhorada nesta dis- sertação. . . . .	74

Figura 5.1 – Estrutura de ponte. . . . .	77
Figura 5.2 – Estrutura de ponte sob restrição de massa. . .	78
Figura 5.3 – Estrutura de ponte sob restrições de massa e custo. . . . .	79
Figura 5.4 – Comparação da inicialização: (a) $\rho_e^0 = 0, 1$ ; (b) $\rho_e^0 = 0, 5$ ; (c) $\rho_e^0 = 0, 9$ utilizando o método SIMP ordenado. $\varepsilon_M = 0, 4$ e $\varepsilon_C = 0, 3$ . . . . .	82
Figura 5.5 – Influência de $\rho_0$ na convergência da função objetivo utilizando interpolação SIMP ordenada. 83	83
Figura 5.6 – Viga MBB . . . . .	83
Figura 5.7 – Instabilidade de tabuleiro na Viga MBB . . .	84
Figura 5.8 – Viga MBB . . . . .	84
Figura 5.9 – Viga engastada . . . . .	86
Figura 5.10 – Resoluções de malha aplicadas à viga engastada	87
Figura 6.1 – Curva de interpolação SIMP ordenada com $p = 3$ . . . . .	90
Figura 6.2 – Curva de interpolação SIMP ordenada com $p = 3$ . . . . .	91
Figura 6.3 – Comparação entre as curvas de interpolação multimaterial. . . . .	93
Figura 6.4 – Interpolações adotando intervalos diferentes.	93
Figura 6.5 – Efeitos de diferentes valores de $p$ nas curvas de interpolação. . . . .	94
Figura 6.6 – Estrutura de ponte para a interpolação pro- posta: $\rho_0 = 0, 5$ . . . . .	95
Figura 6.7 – Viga MBB para a interpolação proposta. . .	96
Figura 6.8 – Resoluções de malha aplicadas à viga engastada	97
Figura 7.1 – Topologias ótimas da Viga MBB obtidas com a interpolação SIMP ordenada. . . . .	104

Figura 7.2 – Topologias ótimas da Viga MBB obtidas com a interpolação proposta. . . . .	104
Figura 7.3 – Topologias ótimas da Viga engastada obtidas com as interpolações. . . . .	106
Figura 7.4 – Topologias ótimas da ponte simétrica obtidas com as interpolações. . . . .	107
Figura 7.5 – Evolução da convergência da função objetivo da estrutura de Ponte. . . . .	109
Figura 7.6 – Convergência das frações de volume por material.	109
Figura 7.7 – Funções objetivo dos Casos para a interpolação proposta . . . . .	110



# Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Propriedade normalizadas das quatro fases de material . . . . .	77
Tabela 5.2 – Presença de material intermediário considerando restrições de massa e custo . . . . .	80
Tabela 5.3 – Influência de $\rho_0$ na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada. . . . .	81
Tabela 5.4 – Influência de $r_{min}$ na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada. . . . .	85
Tabela 5.5 – Influência da malha de elementos finitos na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada. . . . .	87
Tabela 6.1 – Influência de $\rho_0$ na presença de material intermediário utilizando interpolação proposta: $\rho_0 = 0, 5$ . . . . .	96
Tabela 6.2 – Influência de $r_{min}$ na presença de material intermediário utilizando a interpolação proposta. . . . .	97
Tabela 6.3 – Influência da malha de elementos finitos na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada. . . . .	98
Tabela 7.1 – Propriedades do material e fração de volume prescritas para diferentes casos. . . . .	103
Tabela 7.2 – $M_{nd}(\%)$ considerando restrições de volume por material na Viga MBB. . . . .	105

Tabela 7.3 – $M_{nd}(\%)$ considerando restrições de volume por material na Viga engastada. . . . .	106
Tabela 7.4 – $M_{nd}(\%)$ considerando restrições de volume por material na estrutura de Ponte . . . . .	108

# Lista de Siglas

KKT	Condições de Karush-Kuhn-Tucker;
MEF	Método dos elementos finitos;
MMA	Método das assíntotas móveis;
OC	Critério de otimalidade;
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization.</i>



# Lista de Símbolos

## **Geral**

$A, B$	Grandeza física qualquer;
$A, B, C$	Materiais fictícios;
$C$	Custo do material;
$E$	Módulo de elasticidade;
$x, y, z$	Direção do sistemas de coordenadas global;
$i, j, k, m$	Índices diversos;
$\nu$	Coefficiente de Poisson;
$\partial$	Operador derivada parcial;

## **Otimização Topológica**

$\Omega$	Domínio de projeto;
$\Omega_D$	Região do domínio onde há presença de material;
$\Omega \setminus \Omega_D$	Região do domínio onde não há presença de material;
$\Gamma$	Contorno de $\Omega$ ;
$\mathbf{E}^0$	Tensor constitutivo de um material elástico isotrópico;
$\mathbf{E}$	Tensor constitutivo da estrutura obtida;

$E/E_0$	Taxa da rigidez relativa;
$\Theta(\mathbf{x})$	Função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada;
$\mathbf{x}$	Região ou ponto do domínio $\Omega$ ;
$p$	Expoente de penalização do método das densidades;
$\rho(\mathbf{x})$	Função da densidade do volume material;
$\rho_e$	Densidade para um elemento $e$ ;
$\rho_{\min}$	Densidade relativa mínima;
$\partial A/\partial \rho$	Sensibilidade da grandeza A em relação à pseudodensidade $\rho$ ;
$\partial \hat{A}/\partial \rho$	Sensibilidade obtida pelo filtro de sensibilidades;
$\hat{H}_i$	Fator de peso para o filtro de sensibilidades;
$r_{\min}$	Raio de filtragem para o filtro de sensibilidades;
$\Delta(e, i)$	Distância entre o centro do elemento $e$ e o centro de um elemento $i$ ;

### **Método dos Elementos Finitos**

$\mathbf{u}$	Vetor deslocamentos;
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global;
$\mathbf{F}$	Vetor de forças global;

$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez do elemento $e$ ;
$\mathbf{f}_e$	Vetor de forças atuando em cada nó do elemento $e$ ;
$N$	Número total de elementos na malha;
$t$	Espessura do elemento $e$ ;

### Otimização

$c$	Função objetivo (flexibilidade);
$f$	Fração de volume;
$L$	Lagrangeano;
$V$	Volume total do domínio;
$\bar{V}$	Volume atual do domínio;
$V_e$	Volume do elemento;
$V_0$	Volume inicial;
$\lambda$	Vetor de variáveis adjuntas;
$\varepsilon_M$	Fração de massa prescrita;
$\varepsilon_C$	Fração de custo prescrita;
$k$	Iteração;
$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$	Função de aproximação convexa do subproblema;
$L_j^{(k)}$	Assíntotas móveis inferiores;
$U_j^{(k)}$	Assíntotas móveis superiores;

$\alpha_j^{(k)}$	Limite inferior das restrições;
$\beta_j^{(k)}$	Limite superior das restrições;
$x_j^{\min}$	Limite artificial inferior;
$x_j^{\max}$	Limite artificial superior;

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>29</b>
1.1	Motivação . . . . .	29
1.2	Revisão histórica . . . . .	31
1.3	Objetivos . . . . .	36
1.3.1	Objetivos específicos . . . . .	37
1.4	Descrição do trabalho . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Otimização Topológica . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1	Métodos de otimização estrutural . . . . .	39
2.2	Formulação geral do problema de Otimização Topológica . . . . .	41
2.3	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> (SIMP) . . . . .	45
2.4	Aspectos numéricos e complicações . . . . .	48
2.4.1	Escala de cinza . . . . .	48
2.4.2	Instabilidade de tabuleiro . . . . .	49
2.4.3	Dependência de malha . . . . .	50
2.5	Filtro de sensibilidades . . . . .	51
2.6	Método das assíntotas móveis . . . . .	53
2.7	Implementação do algoritmo . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Otimização Topológica Multimaterial . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1	Formulação do Problema . . . . .	61
3.2	Esquema de Interpolação SIMP ordenada . . . . .	62
3.3	Métodos de Solução . . . . .	65
3.3.1	Análise de Sensibilidade . . . . .	65
3.3.2	Solução via Critério de Ótimo . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Metodologia . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1	Problemas acadêmicos abordados . . . . .	70

4.2	Avaliação da presença de material não-discreto . . .	72
4.3	Processo de geração de imagem da topologia . . .	73
<b>5</b>	<b>Aplicação da interpolação SIMP ordenada . . . . .</b>	<b>75</b>
5.1	Experimentos numéricos . . . . .	76
5.1.1	Estrutura de ponte . . . . .	77
5.1.1.1	Otimização considerando apenas restrição de massa . . . . .	78
5.1.1.2	Otimização considerando restrições de massa e custo . . . . .	78
5.1.1.3	Análise da presença de material intermediário . . . . .	79
5.1.1.4	Influência da densidade inicial . . . . .	81
5.1.2	Viga MBB . . . . .	82
5.1.2.1	Sensibilidade ao raio de filtragem . . . . .	83
5.1.3	Viga engastada . . . . .	86
5.2	Conclusão sobre a influência dos parâmetros . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Proposta de interpolação para redução de material intermediário . . . . .</b>	<b>89</b>
6.1	Efeitos da penalização na curva de interpolação SIMP ordenada . . . . .	89
6.2	Proposta de ajuste na função de interpolação . . . . .	92
6.3	Resultados . . . . .	95
6.4	Discussão . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Aplicação de restrições de volume por material . . . . .</b>	<b>101</b>
7.1	Descrição da abordagem . . . . .	102
7.2	Experimentos numéricos . . . . .	103
7.2.1	Topologias ótimas . . . . .	103
7.2.2	Função objetivo . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>111</b>
8.1	Conclusões . . . . .	111

8.2 Sugestões para trabalhos futuros . . . . . 114

**Referências . . . . . 117**



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A otimização topológica fornece a melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto prescrito, procurando onde colocar material (sólido) e onde não (vazio). Desde o artigo pioneiro de Bendsøe & Kikuchi (1988), a otimização topológica tem sido amplamente utilizada no projeto de componentes mecânicos e outras aplicações na engenharia, como termoelasticidade (PEDERSEN; PEDERSEN, 2012), escoamento de fluidos (AAGE *et al.*, 2008), acústica (WADBRO; BERGGREN, 2006), propagação de ondas (SIGMUND; JENSEN, 2003), projeto de estruturas aeroespaciais (STANFORD; BERAN, 2011), projeto de materiais multifuncionais (GUEST; PRÉVOST, 2007), sistemas multifísicos (QIAN; SIGMUND, 2013), dentre outros. Novos materiais e estruturas inteligentes também podem ser projetados utilizando o método, tendo como exemplo materiais celulares periódicos ultraleves, caracterizados por apresentarem compostos de células unitárias semelhantes a treliças (GUTH; LUERSEN; MUÑOZ-ROJAS, 2015). Recentemente, a técnica de otimização topológica vem sendo utilizada em aplicações biomédicas para projetar substitutos ósseos (SUTRADHAR *et al.*, 2010) e implantes biointegrados (LONG; HOLLISTER; GOLDSTEIN, 2012).

No entanto, a maioria dos problemas apresentados nestes trabalhos considera a presença de apenas um único material além do vazio. É desejável e interessante observar projetos com múltiplos materiais, isto é, múltiplas fases de material.

Do ponto de vista físico, o aspecto mais importante do problema de otimização topológica multimaterial é a representação dos tensores das propriedades do material em função das frações de volume locais e das propriedades físicas de cada fase específica. É comumente realizada utilizando interpolação de material (BENDSØE; SIGMUND, 1999), abordagens de homogeneização (BENDSØE; SIGMUND, 2003) ou médias dos limites superiores e inferiores de Hashin-Shtrikman (HS) (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Em se tratando de interpolação material, a escolha da função de interpolação é importante quando se considera a distribuição de múltiplas fases do material em um dado domínio de projeto. Por exemplo, no modelo popular *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) uma lei de potência é utilizada na interpolação em casos com um material, por outro lado, este tipo de interpolação não se comporta muito bem com a presença de materiais adicionais (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Existem diferentes formas de se fazer a otimização topológica multimaterial, porém a grande maioria tem um custo computacional elevado, pois em suas formulações o custo, ou o número de variáveis de projeto, depende do número de fases materiais.

A abordagem na otimização topológica mais desejada é aquela que oferece topologias mais detalhadas com custo computacional reduzido no processo de análise e otimização (PARK; SUTRADHAR, 2015). Em geral, um grande número de elementos finitos são necessários para obter uma melhor resolução da

estrutura em estudo, e assim, são necessárias estratégias para minimizar o custo computacional ao longo de todo o processo iterativo.

No presente trabalho será estudado uma nova abordagem em otimização topológica multimaterial proposta por Zuo & Saitou (2017) utilizando interpolação SIMP ordenada. O método de interpolação proposto garante a resolução de problemas de otimização topológica sem introduzir novas variáveis de projeto no problema. Para isso, são utilizadas funções de potência com coeficientes de escala e de translação para interpolar o módulo de elasticidade e as propriedades de custo para múltiplos materiais. A metodologia proposta pelo autor parece ser interessante, entretanto algumas questões podem ser melhor abordadas e começarão a ser tratadas nesta dissertação

## 1.2 Revisão histórica

Diversas referências apontam que o primeiro estudo em otimização topológica foi realizado por Maxwell<sup>1</sup> em 1869. O estudo consistia em calcular o campo de tensões mecânicas principais de uma força aplicada num ponto de domínio infinito sujeito a restrições de deslocamento em outros pontos. Obtidas as linhas de isotensão principais, a ideia básica então, era propor neste domínio uma estrutura formada por barras, em que cada barra estivesse alinhada com as direções principais de tensão calculadas no domínio. Assim, a estrutura ótima, em que o material fosse melhor aproveitado, seria aquela em que os elementos estariam sujeitos apenas a tração e compressão e sem a existência de

---

<sup>1</sup> Maxwell, J.C., Trans. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 26, p. 01-40, 1869.

momentos fletores. Em 1904, Michell<sup>2</sup> obteve resultados surpreendentes ao dar continuidade ao trabalho de Maxwell, determinando as condições necessárias para que uma estrutura formada por elementos de barra tivesse o mínimo volume material, respeitando relações de equilíbrio e restrições de tensão.

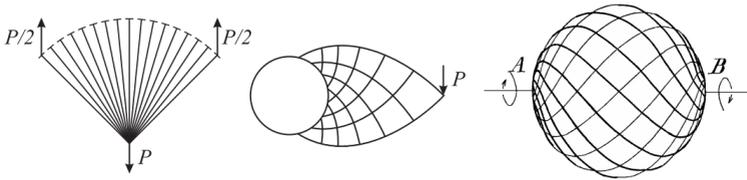


Figura 1.1 – Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell

Os trabalhos de Maxwell e Michell foram pouco apreciados por seus contemporâneos por serem considerados muito acadêmicos, sem grande aplicação prática, sendo referenciados apenas no fim da década de 1950, como no trabalho de Cox (1958)<sup>3</sup>. Nesta mesma época, com o surgimento dos primeiros computadores e com o aperfeiçoamento de métodos matriciais que vieram a tornar-se no método de elementos finitos (MEF) (ver Felippa (2001)), problemas práticos de otimização estrutural passaram a ser estudados usando a otimização paramétrica. Em sequência, Hemp (1973)<sup>4</sup> *apud* Rozvany & Lewiński (2012) estabeleceu critérios de otimização mais gerais que foram importantes para os trabalhos de Prager (1974) e Rozvany & Prager (1976),

<sup>2</sup> Michell, A. *The limits of economy of material in frame structures*, *Philosophical Magazine*, vol. 8(47), pp. 589-597, 1904.

<sup>3</sup> Cox, H. L., *The theory of design*, Aeronaut. Re. Council Rep. No. 19791, 1958.

<sup>4</sup> W. Hemp, *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1973.

que resolveram uma série de diferentes problemas de otimização topológica por meio de procedimentos analíticos baseados em critérios de otimalidade dando origem à teoria de *layout* ótimo.

Ainda assim, a otimização de *layout* não se mostrava suficientemente robusta na solução de problemas de projeto mais complexos. Numa tentativa de solucionar este problema, Cheng & Olhoff (1981), (1982) em seus estudos sobre otimização de espessura de placas sugeriram a relaxação do problema de projeto original através da introdução de um material composto, contendo uma microestrutura caracterizada pela presença de vazios (*porosidade*) (ver também Kohn & Strang (1986a), (1986b), (1986c)).

Baseados nestes trabalhos, Bendsøe & Kikuchi (1988), desenvolveram um método de homogeneização aplicado à relaxação do problema de otimização topológica de meios contínuos, dando início à popularização do método.

Mesmo com o método popularizado haviam complicações, como a ocasionada na solução do problema de distribuição de material em um domínio contínuo, onde a solução resultante era um material poroso de difícil interpretação e fabricação. Uma alternativa para contornar este problema é o modelo de parametrização material SIMP proposta por Bendsøe (1989).

Uma vez consolidada uma base matemática para a correta parametrização do material no domínio, outras contribuições relevantes surgem com os trabalhos de Sigmund (1994), (1997), que propõem filtros para suavizar a distribuição espacial das pseudo densidades, eliminando assim o fenômeno da instabilidade de tabuleiro ou *checkerboard*. Uma revisão sobre os métodos de filtragem é apresentada por Sigmund (2007).

Os conceitos de domínio fixo estendido de projeto e o

de microestruturas subótimas permitiram obter topologias bem definidas e com menos regiões de densidade intermediária, possibilitando a utilização do método de otimização topológica em áreas não clássicas de engenharia de estruturas desde a metade da década de 1990. Estes trabalhos podem ser revisados mais a fundo em Kirsch (1989), Eschenauer & Olhoff (2001) e Bendsøe & Sigmund (2003).

Uma questão interessante no contexto da otimização topológica é a possibilidade de utilizar vários materiais sob restrição de custo, volume ou peso para encontrar um melhor *design* em termos de desempenho da estrutura e/ou custo de fabricação.

Thomsen (1992) maximizou a rigidez integral de uma estrutura composta por um ou dois materiais isotrópicos utilizando a técnica de homogeneização. O material foi modelado por um composto de segundo grau usando a concentração e a orientação do composto como variáveis de projeto.

Sigmund (2001b) demonstrou que a otimização topológica é útil quando usada como uma ferramenta sistemática para o projeto de sistemas microeletromecânicos de dois materiais. O método de otimização foi ampliado para múltiplos materiais, introduzindo duas variáveis de projeto por elemento. Uma variável determina se há material no elemento ou não e a outra variável determina o tipo de material.

A interpolação das propriedades do material foi feita usando um esquema híbrido, onde a abordagem de lei de potência foi usada para interpolar entre vazio e material e uma média ponderada dos limites Hashin-Shtrikhman superior e inferior (Hashin & Shtrikhman (1963))<sup>5</sup> foram utilizados para interpolar entre os

---

<sup>5</sup> Hashin Z, Shtrikhman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics*

tipos de material.

Yin & Ananthasuresh (2001) propuseram um novo modelo de interpolação de material, denominado modelo de função de pico. Ao usar a função de pico e o método de critérios de ótimo, eles sintetizaram mecanismos compatíveis com múltiplos materiais com e sem a restrição de recursos materiais.

Jung & Gea (2006) propuseram um novo modelo multi-material para formular o problema de otimização topológica para a absorção de energia. Um modelo de material trifásico para otimização da topologia foi aplicado para acomodar dois objetivos de projeto conflitantes: *a)* Minimizar a flexibilidade média; e *b)* Maximizar a energia de deformação para absorção de energia.

Ramani (2010) apresentou um algoritmo que usa o material como uma variável discreta na otimização de topologia multi-material e, portanto, fornece uma alternativa aos métodos tradicionais usando interpolação de material e abordagens de nível. O algoritmo calcula pseudo-sensibilidades das funções objetivo e restrição para mudanças de material discreto. Estes são usados para classificar os elementos, com base em qual fração dos elementos são selecionados para a modificação do material durante a iteração do processo de otimização. Posteriormente, Ramani (2011) também introduziu uma abordagem heurística para lidar com as restrições baseada nos critérios de falha de material.

Tavakoli (2014) propôs um algoritmo para a solução de problemas de otimização topológica multi-material. O método apresentado baseia-se na divisão de um problema de otimização de topologia multifásica em uma série de subproblemas de opti-

zação de topologia de fase binária que são resolvidos parcialmente, de forma sequencial, usando otimização topológica de fase binária tradicional. O algoritmo apresentado fornece uma estrutura geral para estender otimização topológica de fase binária tradicional para a solução de problemas de otimização de topologia multi-fásica e possui características interessantes como: generalidade, simplicidade, eficiência, facilidade de implementação e herança das propriedades de convergência de seu solucionador interno de otimização.

Zuo & Saitou (2017), através de uma interpolação ordenada multimaterial, resolveu problemas de otimização topológica sem introduzir novas variáveis no problema. Para isso, utilizou funções de potência com coeficientes de escala e de translação para interpolar o módulo de elasticidade e as propriedades de custo para múltiplos materiais em relação às variáveis de densidade normalizadas. A vantagem do método proposto, além da simplicidade e facilidade em incorporar em qualquer código existente de material SIMP único, é que por não se basear em variáveis adicionais para representar a seleção do material, o custo computacional é independente do número de materiais considerados.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal realizar estudos complementares sobre Otimização Topológica Multimaterial utilizando interpolação SIMP ordenada proposta por Zuo & Saitou (2017).

Neste sentido, o modelo material proposto pelo autor será analisado verificando possíveis limitações e as topologias obti-

das serão observadas em relação a presença de elementos com densidades intermediárias.

### 1.3.1 Objetivos específicos

Dentro deste objetivo geral, podem-se destacar alguns objetivos específicos:

- Avaliar a influência dos parâmetros iniciais no processo de otimização topológica;
- Avaliar a influência de material intermediário nos resultados obtidos;
- Propor uma maneira para reduzir o percentual de material intermediário na estrutura;
- Validar a abordagem proposta aplicando restrições de volume por material.

## 1.4 Descrição do trabalho

A presente dissertação está estruturada em oito capítulos, sendo esta introdução o primeiro.

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos básicos relacionados à Otimização Topológica. Inicialmente são abordados os métodos de otimização estrutural e em seguida são apresentados os conceitos relativos ao método, como domínio fixo estendido e modelo material, e as complicações enfrentadas neste tipo de otimização.

O Capítulo 3 tem como objetivo apresentar a otimização topológica multimaterial. Inicialmente são apresentados trabalhos relacionados ao tema e, em seguida, é formulado o problema

comum à otimização topológica. Por fim, é exposto o método de interpolação SIMP ordenado proposto por Zuo & Saitou (2017).

O Capítulo 4 aborda a metodologia aplicada neste trabalho para a análise de exemplos numéricos encontrados na literatura. Nesta seção é apresentada a medida de material não-discreto utilizada para mensurar o percentual de material intermediário gerado pela relaxação do problema no processo de otimização.

No Capítulo 5 o método de interpolação SIMP ordenado é aplicado nos problemas citados no Capítulo 4, e é avaliada a influência dos parâmetros de inicialização nos resultados obtidos.

Numa busca por reduzir o material intermediário nas estruturas encontradas no Capítulo 5, no Capítulo 6 é realizado um ajuste no esquema de interpolação para redução do material intermediário.

O Capítulo 7 trata dos problemas com novas restrições de volume por material.

Por fim, o Capítulo 8 apresenta algumas conclusões referentes aos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Otimização Topológica

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos relacionados à otimização topológica. Inicialmente abordam-se os métodos de otimização estrutural e em seguida são apresentados conceitos teóricos relativos ao método, como domínio fixo estendido e modelo material. Por fim, são discutidas questões importantes que influenciam significativamente os resultados computacionais obtidos com o procedimento de distribuição de material.

### 2.1 Métodos de otimização estrutural

Basicamente, existem três diferentes abordagens que podem ser aplicadas no processo de otimização estrutural: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O método de otimização paramétrica busca definir inicialmente uma estrutura, mantendo suas condições de carregamento e restrições de grau de liberdade fixa. A Figura 2.1(a) pode ser usada como exemplo, em que a estrutura é discretizada com elementos de treliça, e pode-se utilizar um grupo de características geométricas como variáveis otimizáveis, como a área de seção transversal ou coordenadas geométricas. Tais variáveis podem

ser otimizadas respeitando determinadas restrições impostas ao problema como por exemplo, tensões máximas e deslocamentos limites.

No método de otimização de forma, os contornos externos e internos da estrutura são parametrizados por curvas do tipo *splines*, por exemplo, onde os parâmetros desta curva constituem as variáveis de projeto. Ou seja, são apenas alterados os contornos dos furos, não havendo criação de mais regiões com a presença de vazios na estrutura, mas apenas sua otimização, de tal forma que satisfaçam uma determinada função objetivo, por exemplo, maximização da rigidez, e conseqüentemente obtendo a forma ótima da estrutura. Nesse método, devido às formas complexas que podem ser obtidas, a análise é realizada utilizando-se métodos numéricos, e, como existem alterações da forma da estrutura durante o processo de otimização, a malha é distorcida, sendo necessário um remalhamento do domínio durante a otimização.

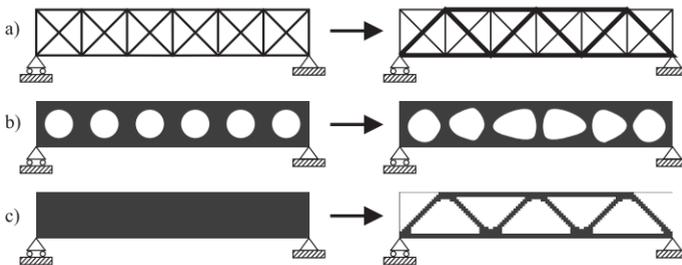


Figura 2.1 – Solução de um problema por diferentes abordagens de otimização: a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica.

Fonte: Bendsøe & Sigmund (2003)

No método de otimização topológica existe uma nova distri-

buição de material dentro de um domínio fixo de projeto, permitindo sua adição ou remoção. Ou seja, ao contrário da otimização de forma, este método permite determinar a presença de novos furos na estrutura, podendo reduzir a quantidade necessária de material, melhorando o seu desempenho. A otimização topológica é a mais genérica, sendo possível uma caracterização mais ampla da geometria da estrutura otimizada, tendo como resultado a localização e forma (a depender do refinamento da malha) dos furos. Assim, o número de variáveis de projeto neste método é geralmente grande, estando estas relacionadas ao refinamento da malha de elementos finitos.

## 2.2 Formulação geral do problema de Otimização Topológica

Para explicar a montagem do problema de otimização topológica para uma estrutura qualquer, considera-se um corpo ocupando um domínio  $\Omega$  em  $R^2$  estando sujeito a condições de contorno, conforme é mostrado na Figura 2.2

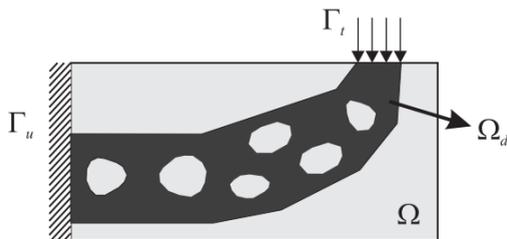


Figura 2.2 – Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido.

A Figura 2.2 ilustra o conceito de domínio do problema

de otimização topológica.  $\Omega$  é o espaço de geometria simples o qual corresponde à totalidade do domínio com volume, no qual o algoritmo de otimização topológica deve encontrar a estrutura ótima.

Segundo Bendsøe & Sigmund (2003) o problema de projeto ótimo pode ser definido como o problema de achar o melhor tensor constitutivo para um material isotrópico, sem alterar a característica reológica do material. A obtenção da forma ótima final é influenciada pelas condições de contorno e pela quantidade de material utilizado.

A formulação geral para o problema de otimização topológica pode ser escrita como mostrado no Problema (2.1)

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && c(\Theta(\mathbf{x})) \\
 &\text{Sujeito a} && \bar{V} \leq V \\
 &&& \bar{V} = \int_{\Omega} \Theta(\mathbf{x}) d\Omega \\
 &&& \mathbf{E} = \Theta(\mathbf{x}) \mathbf{E}^0, \quad \Theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_D \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_D, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde é  $c(\Theta(\mathbf{x}))$  uma função qualquer,  $\bar{V}$  corresponde ao volume atual,  $V$  é o volume total permitido para o subconjunto  $\Omega_d$ ,  $\mathbf{E}^0$  representa o tensor constitutivo de um material elástico isotrópico a partir do qual a estrutura será construída,  $\mathbf{E}$  representa o tensor constitutivo da estrutura obtida e  $\Theta(\mathbf{x})$  a fração de volume em cada ponto  $\mathbf{x}$  do material. Este problema é do tipo discreto (um problema 0-1) e consiste em se determinar em quais pontos do domínio  $\Omega$  haverá material e quais pontos estarão vazios dependendo da função objetivo e restrições impostas.

Segundo Rozvany (2001) a subclasse de problemas mais simples em otimização topológica é a distribuição ótima de um

material isotrópico que pode assumir a forma de um sólido ou vazio. Este tipo de problema, de variáveis discretas (0 - 1), envolve  $2^N$  soluções possíveis, onde  $N$  é o número de elementos finitos do problema discretizado.

A aproximação mais comumente usada para resolver o Problema (2.1) é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas pela modificação do tensor constitutivo do material de modo que este dependa continuamente de uma função a qual é interpretada como densidade do material ou função de densidade artificial, a qual passa a ser a variável de projeto (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Essencialmente, o método simula uma microestrutura que possa assumir valores intermediários, definindo o nível de relaxação do problema e permite o uso de algoritmos de solução que utilizam gradiente. O valor da propriedade efetiva do material  $\mathbf{E}$  em cada ponto do domínio é então definido em função da densidade do material  $\rho(\mathbf{x})$  conforme é mostrado no Problema (2.2):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && c(\boldsymbol{\rho}) \\ & \text{Sujeito a} && \bar{V} \leq V \\ & && \mathbf{E} = \rho(\mathbf{x})\mathbf{E}^0, \quad 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Devido ao fato dos problemas de otimização topológica serem do ponto de vista computacional de larga escala, as primeiras formulações empregadas para o problema foram escritas em termos de função objetivo e restrições simples, tais como a maximização da rigidez global (ou minimização da flexibilidade) sujeita a uma restrição de volume por exemplo. A flexibilidade é definido como um trabalho realizado por uma força ou equivalentemente como a energia elástica armazenada (GOURNAY, F.; ALLAIRE, G.; JOUVE, 2008). Este tipo de problema é geralmente resolvido pela discretização do domínio do projeto em

elementos finitos e fazendo a densidade artificial do material em cada elemento ser uma variável de projeto conforme é mostrado no Problema (2.3):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
 &\text{Sujeito a} && \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\
 &&& \frac{V(\boldsymbol{\rho})}{V_0} \leq f, \\
 &&& 0 < \rho_{min} \leq \rho_j \leq 1, \\
 &&& j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $c$  representa a flexibilidade a ser minimizada,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  são os deslocamentos e forças globais, respectivamente,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N \rho_j V_j$  e  $V_0$  são o volume de material e o volume do domínio estendido de projeto respectivamente,  $f$  é a fração de volume permitida para o projeto,  $\boldsymbol{\rho}$  é o vetor com as densidades de todos os elementos,  $\rho_{min}$  é um limite mínimo para o valor da densidade (para evitar o mau condicionamento da matriz de rigidez),  $N$  é o número de elementos usado para discretizar o domínio de projeto. Esta formulação tem a vantagem de apresentar os resultados com elementos de densidade intermediária.

O procedimento típico de projeto estrutural utilizando a otimização topológica é apresentado na Figura 2.3. A aplicação de métodos numéricos se faz necessária na discretização do domínio de projeto no processo de solução de um problema de maximizar a rigidez global com uma restrição de quantidade de material. Este procedimento pode ser aplicado em problemas de otimização estrutural contínuos para vários tipos de função objetivo e restrições.

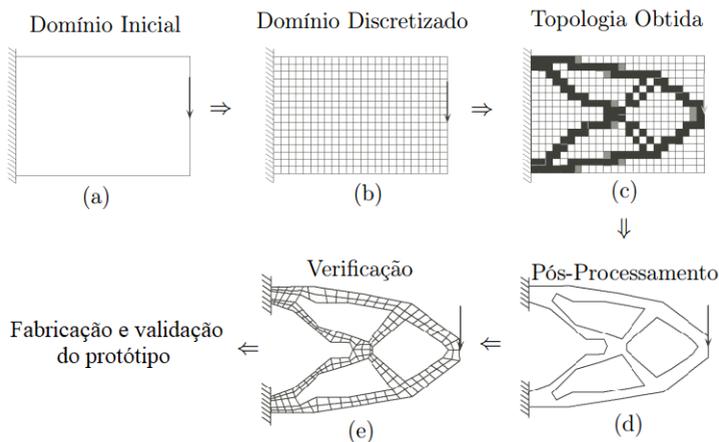


Figura 2.3 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.

### 2.3 *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*

O SIMP é uma aproximação do modelo de material para a solução do problema de otimização que penaliza as densidades intermediárias a fim de eliminá-las da estrutura final obtida. O termo foi sugerido por Rozvany, Zhou & Birker (1992) e também é chamado alternativamente de método da aproximação direta ou método da densidade artificial. Seu uso pode ser justificado pela sua simplicidade, por ser aplicável para qualquer combinação de restrições de projeto e por gerar formas com um menor custo de fabricação e do material para as formas obtidas em relação a outros métodos (ROZVANY, 2001).

Em geral, no SIMP, as propriedades do material são assumidas constantes dentro de cada elemento finito usado para discretizar o domínio do modelo e as variáveis de projeto são as densidades “artificiais” relativas do elemento. As propriedades

efetivas são modeladas como relativas à densidade do material elevado a uma potência vezes a propriedade do material sólido. Na Equação (2.4) é mostrada a parametrização do tensor constitutivo do material com o fator de penalização aplicado na densidade do material.

$$\mathbf{E}(\rho) = \rho^p \mathbf{E}^0 \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{E}^0$  representa o tensor constitutivo do material que é caracterizado pelo módulo de elasticidade do material  $E$  e pelo coeficiente de Poisson  $\nu$ ,  $p$  é o fator de penalização e  $\rho$  a densidade no elemento. Caso  $\rho = 0$  então  $\mathbf{E}(0) = 0$  e caso  $\rho = 1$  então  $\mathbf{E}(1) = \mathbf{E}^0$ , o que indica que um projeto final constituído apenas de densidades iguais a 0 e 1 têm um modelo físico representado por um material linear isotrópico.

Segundo Rozvany (2001), a penalização irá efetivamente suprimir valores de densidade intermediárias, porém se o problema for convexo, o mesmo se tornará não convexo e portanto o mínimo global não pode ser garantido. Estes resultados podem ser melhorados se nas primeiras iterações do algoritmo de solução for adotado um valor de  $p = 1$  e então ir aumentando o valor de  $p$  gradualmente. O ganho deste método consiste em uma estrutura final consistindo apenas de valores de densidade de 0 ou 1, ou seja, sólido e vazio. O resultado obtido é uma aproximação do resultado do problema discreto original antes da relaxação, o qual é o problema original de otimização topológica mostrado no Problema (2.1)

A Figura 2.4 exibe a relação da taxa rigidez relativa  $\mathbf{E}/\mathbf{E}_0$   $\times$  densidade de volume  $\rho$  para diferentes valores do expoente de penalização  $p$ , e claramente ilustra que o uso do modelo material SIMP forçará a topologia em direção aos valores limitantes  $\rho = 0$  (vazio) e  $\rho = 1$  (sólido).

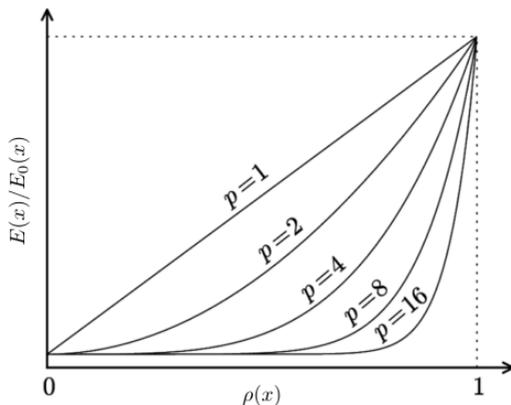


Figura 2.4 – Efeito de diferentes valores de penalização.

Independente do valor do coeficiente de Poisson usado para o material, vários trabalhos adotaram o valor de  $p$  igual a três para a penalização e buscaram resultados de estruturas apenas com valores de densidade 0 e 1. Como referência ver Duysinx & Sigmund (1998), Duysinx & Bendsoe (1998), Eschenauer & Olhoff (2001) e Rozvany & Lewiński (2012)

A aproximação do problema com o SIMP permite o uso de métodos de solução baseados na programação matemática. Segundo Sigmund (2001a), vários artigos resolveram o problema de otimização topológica como um problema de variáveis inteiras, entretanto, estes métodos podem se tornar mais complicados à medida que se aumenta a complexidade da função objetivo e das restrições. Em contrapartida, algoritmos de programação matemática são simples de se implementar e computacionalmente eficientes.

## 2.4 Aspectos numéricos e complicações

Nesta seção serão discutidos aspectos numéricos e complicações que precisam ser compreendidos e superados para que não comprometam a solução final do problema de otimização topológica.

### 2.4.1 Escala de cinza

A presença de materiais intermediários causa um problema conhecido na literatura como escala de cinza (Figura 2.5) e ocorre quando um problema é relaxado na tentativa de se contornar a não existência de solução do problema discreto (0 - 1). A relaxação proporciona a existência da solução ótima, no entanto, a presença de materiais intermediários tornará difícil a sua fabricação (YAMASAKI *et al.*, 2015).

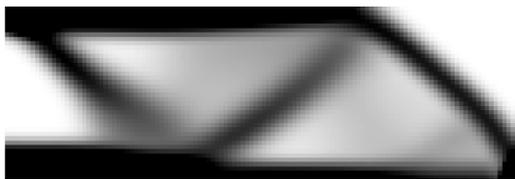


Figura 2.5 – Representação da escala de cinza.

Fonte: Sigmund (2001a)

Com o intuito de obter uma solução que possa ser fabricada procura-se recuperar o caráter discreto da distribuição de material, utilizando-se por exemplo, o índice de penalização  $p$  citado anteriormente no modelo material. Contudo, ao utilizar

valores muito altos para as penalizações desde o início do processo iterativo, retorna-se para os problemas da formulação discreta.

Uma alternativa para contornar o problema é o método da continuação das penalidades (BENDSØE; SIGMUND, 2003), que é feito ao longo do processo iterativo. Normalmente começa-se com um valor, por exemplo  $p = 1$ , e após convergir para a solução, o valor de  $p$  é aumentado, para então convergir à uma segunda solução. Este procedimento é repetido até que  $p$  atinja seu valor limite, que, em geral, é de  $p = 3$  ou  $p = 4$  (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001), (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Apesar deste procedimento apresentar bons resultados na maioria dos casos, este método é heurístico e não é possível provar a convergência deste ou mesmo que a solução final não apresentará escala de cinza (STOLPE; SVANBERG, 2001).

### 2.4.2 Instabilidade de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro é um problema recorrente em soluções obtidas pela otimização topológica, tendo como característica regiões onde elementos com material e sem material se encontram em forma de tabuleiro de xadrez, como mostrado na Figura 2.6

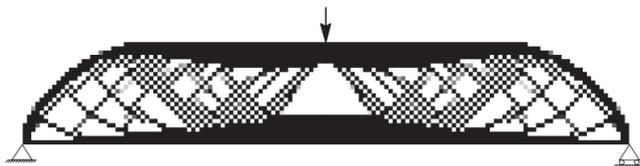


Figura 2.6 – O problema de instabilidade de tabuleiro.

Fonte: Bendsøe & Sigmund (2003)

Estudos como os de Rodrigues & Fernandes (1993), Díaz & Sigmund (1995) e Zhou, Shyy & Thomas (2001) indicam que este aspecto de tabuleiros de xadrez esta relacionada às características das aproximações de elementos finitos, e mais especificamente devido à má modelagem numérica que superestima a rigidez dos tabuleiros.

Segundo Bendsøe & Sigmund (2003), duas são as principais técnicas para evitar o problema de instabilidade de tabuleiro. A primeira seria o aumento da ordem do elemento finito utilizado, o que influenciaria diretamente no custo computacional e na malha utilizada. A segunda seria a utilização de métodos de filtragem ou de controle de gradientes das pseudo-densidades do domínio (SIGMUND, 2007).

### 2.4.3 Dependência de malha

A dependência de malha refere-se ao problema de não encontrar a mesma solução quando o domínio é discretizado usando diferentes densidades de malha.

Intuitivamente espera-se que quanto maior o refino da malha de elementos finitos, a topologia ótima deveria ser uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultado de uma malha mais grosseira

De acordo com Sigmund & Petersson (1998) o problema de dependência de malha pode ser dividido em duas categorias:

- Obtenção de topologias finais cada vez mais complexas a medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada.

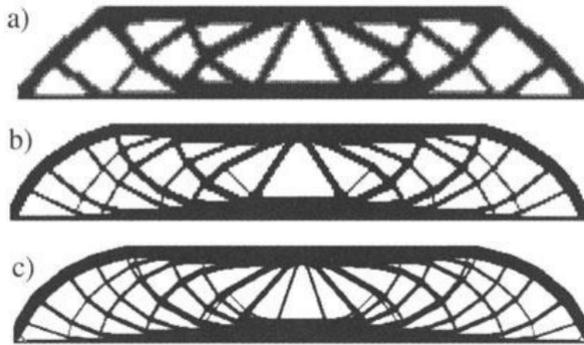


Figura 2.7 – Refinamento da malha com: a) 2700 elementos; b) 4800 elementos; c) 17200 elementos.

Fonte: Bendsøe & Sigmund (2003)

Neste caso, malhas mais refinadas produzem estruturas “melhores” (ou seja, com valores cada vez menores na função objetivo, se o problema for a minimização do volume) quando comparadas com estruturas geradas a partir de malhas menos refinadas;

- Obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo. Este problema aparece devido a não-unicidade da solução do problema discretizado.

## 2.5 Filtro de sensibilidades

O processo de otimização é realizado para as variáveis de projeto contínuas  $\rho_e$  em cada elemento do domínio, gerando muitas vezes o problema de instabilidade de tabuleiro. Este problema é resolvido usando técnicas de filtragem.

O filtro busca modificar a sensibilidade (taxa de variação da função objetivo ou restrições em relação a uma variável de projeto) de um elemento finito específico baseado em uma média ponderada das sensibilidades de elementos vizinhos e, demonstra eficiência na obtenção de independência em relação à malha em otimização topológica (SIGMUND, 1997), (1998), (2007). O método obtém resultados semelhantes a, por exemplo, métodos de restrição de gradientes, apesar da simples implementação.

A técnica funciona mediante a modificação da sensibilidade de alguma grandeza  $A$  em relação à uma pseudodensidade  $\rho_e$ , da seguinte forma (BENDSØE; SIGMUND, 2003):

$$\frac{\widehat{\partial A}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial A}{\partial \rho_i}, \quad (2.5)$$

onde  $\widehat{\partial A}/\partial \rho_e$  é a nova sensibilidade,  $N$  é o número total de elementos na malha e o fator de peso  $\widehat{H}_i$ , é escrito como

$$\widehat{H}_i = r_{min} - \Delta(e, i), \quad \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Nesta expressão, o operador  $\Delta(e, i)$  é definido como a distância entre o centro do elemento  $e$  e o centro de um elemento  $i$ . O fator peso  $\widehat{H}_i$  é zero fora da área do filtro do elemento  $e$ . Percebe-se que a sensibilidade converge para a sensibilidade original quando o raio de filtragem  $r_{min}$  vai a zero e que todas as sensibilidades são idênticas quanto  $r_{min}$  tende ao infinito.

A Figura 2.8 representa o filtro de sensibilidade em uma malha de elementos finitos. Como observado, quando o centroide do elemento está incluso no raio  $r_{min}$ , estes elementos serão abrangidos pelo filtro de sensibilidade (Figura 2.8(b)).

As sensibilidades ajustadas indicam a direção de descida para o ótimo no problema de otimização. Existem vários esque-

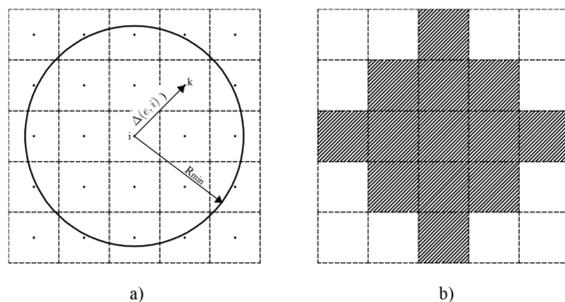


Figura 2.8 – Representação do filtro de sensibilidades

mas de atualização para as variáveis de projeto, podendo citar dois critérios existentes na literatura: o método baseado na condição de estacionaridade da função Lagrangeana, denominado Critério de Otimalidade (OC), e outro baseado numa classe de métodos de otimização com convergência global baseado em funções aproximadoras separadas conservativas convexas, conhecido como o Método das Assíntotas Móveis (MMA).

## 2.6 Método das assíntotas móveis

O MMA é um método desenvolvido especificamente para otimização estrutural proposto por Svanberg (1987).

A ideia por trás do MMA é aproximar a função objetivo e as restrições por meio de funções para as quais o mínimo pode ser encontrado eficientemente. Essas funções são escolhidas para serem separáveis e convexas, e surgem à partir de uma expansão em série de Taylor.

Dada a função objetivo ou uma restrição  $f(\mathbf{x})$ , as funções

de aproximação são dadas por

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_j^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_j^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \quad (2.7)$$

em que  $p_j^{(k)}$  e  $q_j^{(k)}$  são definidos como

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{\partial f}{\partial x_j} > 0 \text{ então } p_j^{(k)} &= (U_j - x_j^0)^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \text{ e } q_j^{(k)} = 0 \\ \text{se } \frac{\partial f}{\partial x_j} < 0 \text{ então } q_j^{(k)} &= -(x_j^0 - L_j)^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \text{ e } p_j^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

As variáveis  $U_j$  e  $L_j$  são as assíntotas para as funções de aproximação convexa, que se movem dependendo das iterações anteriores (daí o nome MMA). As assíntotas são dadas pelas relações

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} - x_j^{(k)} &= \gamma_j^{(k)} (L_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}) \\ U_j^{(k)} - x_j^{(k)} &= \gamma_j^{(k)} (U_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\gamma_j^{(k)}$  é um escalar definido por

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,7 & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0, \\ 1,2 & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0, \\ 1,0 & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, as assíntotas são afastadas do ponto de iteração atual se as duas iterações anteriores se moverem na mesma direção. Da mesma forma, as assíntotas são movidas para o ponto de iteração atual se as duas iterações anteriores se moverem em direções opostas e permanecem no lugar se, nas duas últimas iterações, o ponto  $\mathbf{x}$  não tiver se movido.

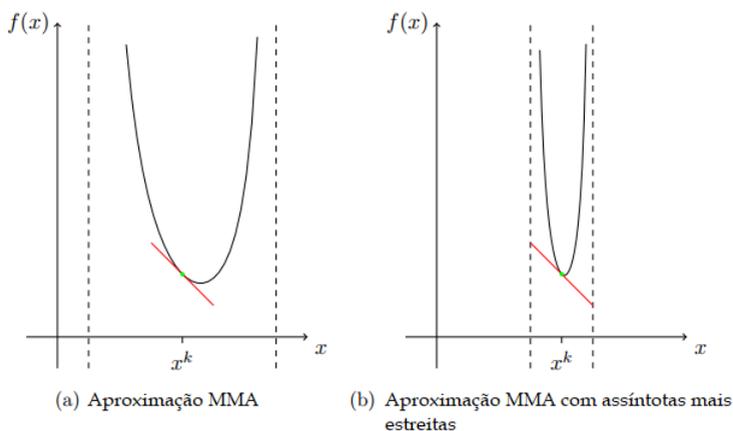


Figura 2.9 – Aproximação de funções MMA

A aproximação do subproblema das funções objetivo e restrições são fundamentadas em funções conservativas convexas e podem ser resolvidos usando um método de ponto interior (SVANBERG, 1987). A solução deste subproblema é usada como ponto de partida para o problema subsequente.

Se, no entanto, a solução do subproblema se torna inviável para o problema de otimização seguinte, ou na verdade o valor da função objetivo é aumentado, então as assíntotas correspondentes que estão se aproximando da função são comprimidas. Isso tem o efeito de tornar a função de aproximação mais convexa (Figura 2.9) e, assim, limitar a distância que qualquer variável pode mover ao longo dessa direção (SVANBERG, 2002).

O processo de formação e solução de subproblemas ocorre até que um ponto KKT seja atingido. O MMA tornou-se o método de otimização padrão de fato a ser utilizado na solução de problemas de otimização topológica (BENDSØE; SIGMUND,

2003).

## 2.7 Implementação do algoritmo

Por fim, o algoritmo de otimização topológica tem sua forma padrão descrita de acordo com o fluxograma mostrado na Figura 2.10.

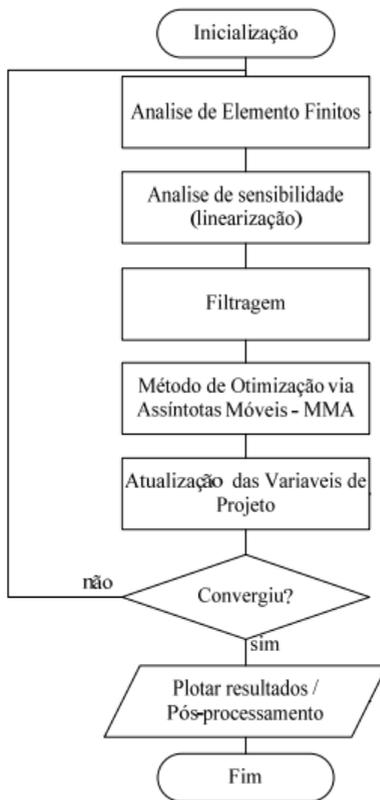


Figura 2.10 – Fluxograma do algoritmo.

Em geral, os algoritmos de otimização seguem os passos a seguir:

1. Resolver as equações que regem o problema;
2. Cálculo de sensibilidades e filtragem dos dados;
3. Atualizar as variáveis de projeto utilizando o MMA (ou outro atualizador das variáveis de projeto);
4. Se algum critério de parada não é atendido, voltar ao passo inicial usando novas variáveis de projeto.

O critério de parada geralmente está relacionado às alterações das variáveis de projeto na última iteração. O algoritmo converge quando a maior alteração em todas as variáveis de projeto é menor que 1% em cada elemento sobre o domínio (SIGMUND, 2001a), (ANDREASSEN *et al.*, 2011).



## Capítulo 3

# Otimização Topológica Multimaterial

No capítulo anterior foi estabelecida a base teórica do método de otimização topológica necessária para o desenvolvimento de pesquisas neste campo de estudo. Agora, serão apresentados trabalhos que motivaram o modelo de interpolação multimaterial proposto por Zuo & Saitou (2017), passando pelos aspectos vantajosos e desvantajosos de cada um deles.

Como extensão da metodologia SIMP abordada no capítulo anterior, Bendsøe & Sigmund (2003) propõem um esquema de interpolação para três fases de material, considerando duas fases sólidas e uma de vazio material. Duas variáveis de projeto são necessárias para descrever o modelo de material trifásico. Geralmente, tal extensão do método SIMP para materiais de  $m$ -fases requer  $(m - 1)$  variáveis de projeto para cada elemento finito. É fácil observar que à medida que o valor de  $m$  aumenta a formulação da função de interpolação tende a tornar-se muito complexa, e além disso, com o aumento das variáveis de projeto o custo computacional aumentará consideravelmente.

De maneira alternativa Yin & Ananthasuresh (2001) utilizaram uma função de pico no método SIMP para lidar com problemas de otimização topológica multimaterial.

Este modelo facilita a inclusão de múltiplos materiais no problema sem que seja necessário o aumento das variáveis de projeto. Há uma flexibilidade considerável para controlar a seleção e a separação do material ao longo do processo de otimização, mas isso pode ser justificado pelo fato da metodologia apresentar um problema conhecido como *zero slope* na curva de interpolação. Este problema é caracterizado pela ausência de curvatura na curva de interpolação e pode gerar dificuldades na busca pelo valor ótimo da função objetivo, já que todas as etapas do processo iterativo em busca do valor ideal dependem da inclinação do ponto local na curva e assim, este método pode ter dificuldade realizar a transição de uma fase de material para outra. Os autores procuram contornar este problema sugerindo o ajuste gradual dos parâmetros no modelo para criar múltiplos picos, de modo que a solução final se aproxime de materiais puros, evitando a presença de valores intermediários.

Uma outra abordagem foi a proposta por Tavakoli (2014), (2014). Em seu estudo o algoritmo de fase ativa foi proposto com base na separação de um problema de otimização topológica multifásica em uma série de subproblemas de otimização topológica de fase binária. Os subproblemas são resolvidos de maneira sequencial utilizando SIMP de fase binária tradicional visto no Capítulo 2. A metodologia é interessante, entretanto recai no mesmo problema citado anteriormente enfrentado por Bendsoe & Sigmund (2003), em que o custo computacional do subproblema de otimização de fase binária  $m(m - 1)/2$  mostrou-se elevado.

Um esquema de interpolação material semelhante ao SIMP foi aplicado na otimização topológica multimaterial de seções transversais de vigas laminadas (BLASQUES, 2014),(2012), mas este método também apresentou custo computacional elevado em

virtude da necessidade de variáveis de projeto para cada elemento finito no domínio.

As abordagens anteriores para otimização topológica multimaterial são baseadas em técnicas de homogeneização/SIMP, e como foi visto, o fato de trabalhar com múltiplos materiais aumenta consideravelmente o custo computacional.

Na interpolação multimaterial SIMP ordenada proposta por Zuo & Saitou (2017), a densidade do material é considerada como a variável de projeto independente e escolhida a partir de um intervalo contínuo de valores de densidade discreta dos materiais candidatos. As outras propriedades (módulo de elasticidade e custo), são consideradas funções contínuas em relação à densidade, obtidas pela interpolação dos respectivos valores para cada material candidato. Segundo o autor, por não se basear em variáveis adicionais para representar a seleção do material, o custo computacional será independente do número de materiais considerados e isto é um dos objetivos a serem verificados nesta dissertação. Em seguida será realizada a descrição do método.

### 3.1 Formulação do Problema

Considerando múltiplos materiais com as três propriedades: densidade, módulo de elasticidade e custo, o problema de otimização topológica para minimizar a flexibilidade da estrutura com restrições de massa estrutural e custo, pode ser formulado como

$$\text{minimizar } c = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^N E_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} E_e = E_e(\rho_e); & M = \sum_{e=1}^N V_e \rho_e; & M \leq \varepsilon_M M_0; \\ C_e = C_e(\rho_e); & C = \sum_{e=1}^N V_e \rho_e C_e; & C \leq \varepsilon_C C_0, \\ \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}; \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $V_e$  é o volume (área em 2D) do  $e$ -ésimo elemento,  $M_0$  e  $C_0$  são a massa e o custo do domínio totalmente preenchido com densidade  $\rho_e = 1$ , e  $\varepsilon_M$  e  $\varepsilon_C$  são as frações prescritas da massa e do custo, respectivamente.

### 3.2 Esquema de Interpolação SIMP ordenada

O método SIMP ordenado utiliza uma função de interpolação multimaterial definida por partes, na qual as densidades são organizadas em ordem crescente e são normalizadas, de modo que a maior densidade  $\rho_{\max}$  valha 1. Assim,

$$\rho^i = \rho_T^i / \rho_{\max} \quad i = [1, \dots, m], \quad (3.3)$$

sendo  $m$  a quantidade de fases de material.

Aplicando a densidade normalizada (3.3) no modelo SIMP clássico para um material a função de potência é estendida para construir a interpolação ordenada do módulo de elasticidade de múltiplos materiais, como mostra a Figura 3.1.

Introduzindo o coeficiente de escala  $A_E$  e o coeficiente de translação  $B_E$ , a função de potência estendida pode ser escrita como

$$E_e(\rho_e) = A_E \rho_e^p + B_E, \quad (3.4)$$

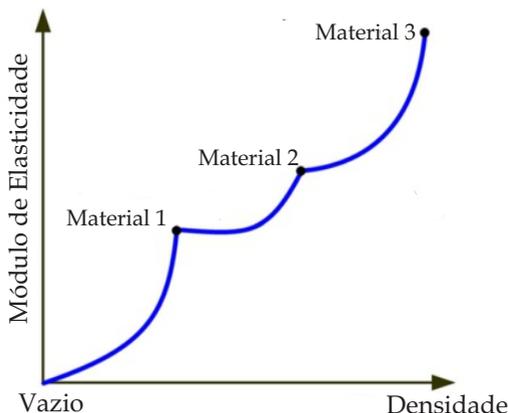


Figura 3.1 – Interpolação SIMP ordenada multimaterial do módulo de elasticidade.

Fonte: Adaptado de Zuo & Saitou (2017)

em que  $A_E$  e  $B_E$  para  $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$  são dados por

$$A_E = \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p} \quad \text{e} \quad B_E = E_i - A_E \rho_i^p, \quad (3.5)$$

e  $E_i$  e  $E_{i+1}$  são o módulo de elasticidade do material ordenado  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente.

A relação entre o custo e a densidade normalizada deve refletir a preferência por menor custo e menor massa. Assim, a interpolação ordenada do custo para múltiplos materiais será semelhante à mostrada na Figura 3.2, em que  $E_e$  e  $C_e$  são o módulo de elasticidade do material e o custo do  $e$ -ésimo elemento, respectivamente, interpolados por  $\rho_e$  utilizando (3.4).

Analisando a Figura 3.2(a) nota-se que um comportamento similar da curva de interpolação do módulo de elasticidade visto,

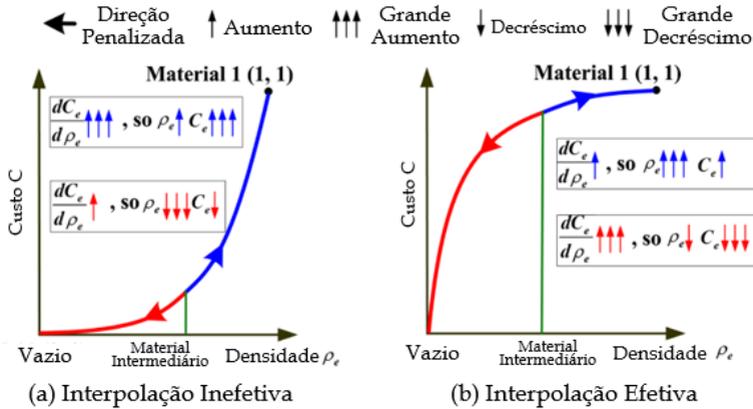


Figura 3.2 – Interpolação SIMP do custo para um material.

Fonte: Adaptado de Zuo & Saitou (2017)

na Figura 3.1, torna a interpolação do custo para um material inefetiva. Observa-se que quando a reposta da sensibilidade do custo aumenta muito a densidade do elemento tem um pequeno acréscimo e, em contrapartida, o custo tem um aumento considerável. Por outro lado, quando o aumento da variação do custo no elemento em direção à região penalizada tem um leve acréscimo o valor da densidade do elemento tem uma queda brusca e o valor do custo para este elemento diminui pouco.

Uma estratégia para solucionar este problema é obtida simplesmente substituindo o fator de penalização  $p$  por  $1/p$  na equação (3.4), obtendo assim a curva ilustrada na Figura 3.2(b). Agora, quando a variação do custo do elemento é penalizada e tende a se aproximar do vazio (0,0) a densidade do elemento diminui e o custo cai consideravelmente, isto é

$$C_e(\rho_e) = AC\rho^{(1/p)} + BC, \quad \rho_e \in [\rho_{\min}, 1] \quad \text{e} \quad p > 1 \quad (3.6)$$

onde os coeficientes  $A_C$  e  $B_C$  para  $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$  são dados por

$$A_C = \frac{C_i - C_{i+1}}{\rho_i^{(1/p)} - \rho_{i+1}^{(1/p)}} \quad \text{e} \quad B_C = C_i - A_C \rho_i^{(1/p)}, \quad (3.7)$$

e  $C_i$  e  $C_{i+1}$  são o custo do material ordenado  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente.

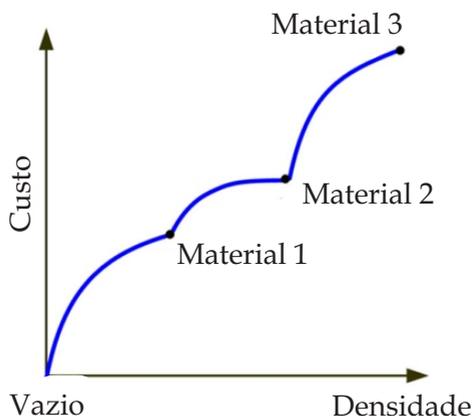


Figura 3.3 – Interpolação SIMP ordenada do custo.

Fonte: Adaptado de Zuo & Saitou (2017)

### 3.3 Métodos de Solução

#### 3.3.1 Análise de Sensibilidade

De acordo com Bendsøe & Sigmund (2003), a sensibilidade da flexibilidade  $c$  é dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -\frac{dE_e(\rho_e)}{d\rho_e} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e, \quad (3.8)$$

onde a derivada do módulo de elasticidade com respeito à densidade variável é obtida através da Equação (3.4), resultando em

$$\frac{dE_e(\rho_e)}{d\rho_e} = A_E p \rho_e^{p-1}. \quad (3.9)$$

A sensibilidade da massa  $M$  resulta no volume  $V_e$  do elemento

$$\frac{\partial M}{\partial \rho_e} = V_e, \quad (3.10)$$

enquanto que, a sensibilidade do custo pode ser formulada como

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = V_e C_e + V_e \rho_e \frac{dC_e(\rho_e)}{d\rho_e}, \quad (3.11)$$

onde a derivada do custo do elemento com relação à densidade normalizada é

$$\frac{dC_e(\rho_e)}{d\rho_e} = A_C p \rho_e^{p-1}. \quad (3.12)$$

### 3.3.2 Solução via Critério de Ótimo

Em primeiro lugar, a condição necessária de otimalidade para (3.1) que emprega o esquema de interpolação SIMP multimaterial ordenado deve ser derivada. A condição de otimalidade de KKT para este problema pode ser formalmente interpretada como ponto da seguinte função Lagrangeana em relação às densidades e multiplicadores. Assim

$$\begin{aligned} L = c + \lambda_{\mathbf{u}}(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{P}) + \lambda_M(M - \varepsilon_M M_0) + \lambda_C(C - \varepsilon_C C_0) \\ + \sum_{e=1}^N \lambda_e^+(\rho_e - 1) + \sum_{e=1}^N \lambda_e^-(\rho_{min} - \rho_e), \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  $\lambda_{\mathbf{u}}$ ,  $\lambda_M$ ,  $\lambda_C$ ,  $\lambda_e^+$  e  $\lambda_e^-$  são os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições da equação de equilíbrio, restrição de massa, restrição de custo e restrições da variável de projeto,

respectivamente. Usando o procedimento padrão (BENDSØE; SIGMUND, 2003), a condição ótima em relação à densidade do elemento é derivada como

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} + \lambda_M \frac{\partial M}{\partial \rho_e} + \lambda_C \frac{\partial C}{\partial \rho_e} + \lambda_e^+ + \lambda_e^- = 0, \quad (3.14)$$

com as condições de comutação (*switching conditions*)

$$\lambda_e^+ \geq 0, \quad \lambda_e^- \geq 0, \quad \lambda_e^+(\rho_e - 1) = 0, \quad \lambda_e^-(\rho_{min} - \rho_e) = 0. \quad (3.15)$$

Se os limites das restrições da variável de projeto não estiverem ativas ( $\rho_{min} < \rho_e < 1$ ), então os multiplicadores correspondentes são iguais a zero e a equação (3.14) é simplificada, resultando em

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} + \lambda_M \frac{\partial M}{\partial \rho_e} + \lambda_C \frac{\partial C}{\partial \rho_e} = 0, \quad (3.16)$$

podendo também ser escrita como

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda_M \frac{\partial M}{\partial \rho_e} + \lambda_C \frac{\partial C}{\partial \rho_e}} = 1. \quad (3.17)$$

No critério de ótimo,  $B_e$  na equação (3.17) serve diretamente como o coeficiente de iteração responsável pela atualização das variáveis de projeto. Para expressar convenientemente, o esquema de iteração é definido como:

$$OC(B_e^{(n)}, \rho_e^{(n)}) \begin{cases} L_e^{(n)} & \text{se } \rho_e^{(n)}(B_e^{(n)})^\eta \leq L_e^{(n)} \\ \rho_e^{(n)}(B_e^{(n)})^\eta & \text{se } L_e^{(n)} < \rho_e^{(n)}(B_e^{(n)})^\eta < U_e^{(n)} \\ U_e^{(n)} & \text{se } U_e^{(n)} \leq \rho_e^{(n)}(B_e^{(n)})^\eta, \end{cases} \quad (3.18)$$

em que  $n$  é o número de iterações,  $\eta$  é o coeficiente de amortecimento numérico,  $L_e^{(n)}$  e  $U_e^{(n)}$  são os limites inferior e superior da

variável  $\rho_e^{(n)}$ , determinados por:

$$\begin{aligned} L_e^{(n)} &= \max(\rho_{\min}, \rho_e^{(n)} - move^{(n)}) \\ U_e^{(n)} &= \min(1, \rho_e^{(n)} + move^{(n)}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo  $move^{(n)}$  um limite de movimentação positivo e dependente da iteração, isto é:

$$move^{(n)} = \min(\alpha^{(n)} move^{(0)}, m_{\min}). \quad (3.20)$$

## Capítulo 4

# Metodologia

Neste capítulo a metodologia aplicada nesta dissertação para avaliar os problemas de otimização topológica multimaterial é apresentada. A primeira seção refere-se aos experimentos acadêmicos abordados para analisar os problemas recorrentes ao processo de otimização, vistos no Capítulo 2. Aliado a esta seção, é abordada a medida de material não-discreto proposta por Sigmund (2007) para estimar o percentual de material intermediário em toda a estrutura, e como o mesmo foi adaptado para ser empregado na otimização topológica multi-material.

Em seguida, o método SIMP ordenado é aplicado nestes problemas para analisar a presença de material intermediário e sua influência nas topologias e funções objetivo obtidas. Sua influência é examinada mediante a avaliação dos parâmetros iniciais, como: resolução de malha, densidade, domínio de projeto, restrições aplicadas, etc. Logo depois, é proposta um ajuste na função de interpolação para redução de material não-discreto na estrutura. Por fim, são alteradas as restrições dos problemas e o método de atualização das variáveis de projeto, substituindo as restrições de massa e custo prescritas por restrições de volume por material e o Critério de Ótimo pelo MMA.

Um notebook Intel Core i7-6500 CPU @ 2.50 GHz e 8 GB RAM é utilizado como recurso computacional neste estudo.

#### 4.1 Problemas acadêmicos abordados

Os exemplos de estruturas analisados neste trabalho são vistos na Figura 4.1 e são considerados com espessura de 1mm, assim sendo aplicada a hipótese do estado plano de tensões (ZIENKIEWICZ, 2005).

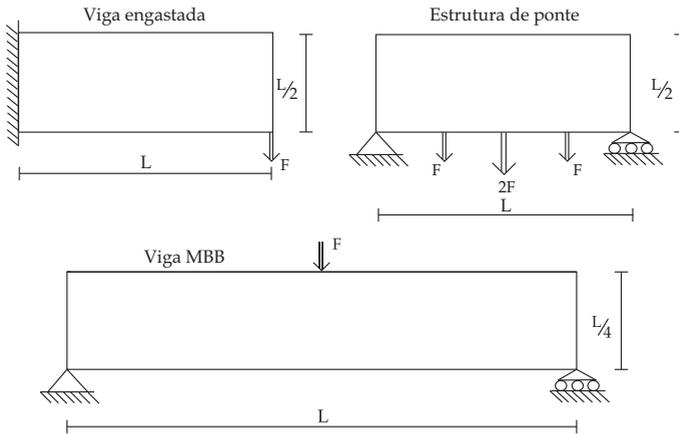


Figura 4.1 – Geometrias e condições de contorno correspondentes

Os domínios estendidos de projeto são assumidos retangulares para simplificar a aplicação da malha, possibilitando a discretização por elementos finitos quadrados de mesmo tamanho. O elemento finito utilizado para a discretização do modelo é o elemento bilinear (ver (COOK *et al.*, 2002), (CHANDRUPATLA; HORTON; BRIEN, 2012)).

Os três problemas frequentemente utilizados na literatura abordados neste trabalho são a viga engastada, a estrutura de ponte e a viga MBB. A carga  $F$  mostrada na figura é igual a 1N em todos os casos analisados. Para minimizar o custo computacional, é considerada simetria no domínio e nas cargas

nas estrutura de ponte e na viga MBB (os resultados apresentados, entretanto, estão relacionados ao domínio completo).

Os parâmetros de otimização atribuídos ao código são: densidade inicial, fator de penalização, resolução de malha, número de iterações, raio do filtro de sensibilidades e frações de massa e custo prescritas, além dos vetores de módulo de Young e Custo.

Para cada elemento da malha inicialmente é atribuído um valor de densidade relativa adimensional o qual é a variável de projeto do problema. À princípio, o mesmo valor de densidade de projeto é atribuído a cada elemento finito.

O fator de penalização  $p$  é exposto na Seção 2.3. A influência deste parâmetro na curva de interpolação multimaterial será explorada no Capítulo 6.

O número de iterações é o critério de parada do processo de otimização. O número está diretamente ligado à topologia gerada. Quanto maior o número de iterações mais detalhada tende a ser a topologia final da estrutura.

A aplicação de métodos de filtragem é abordada na Seção 2.5 e representa uma maneira de evitar instabilidades numéricas mediante a relaxação do problema. A experimentação mostra que com o aumento do raio do filtro, os resultados são menos detalhados, proporcionando um projeto final mais compacto e com menos regiões vazias (YAMASAKI *et al.*, 2015). Como característica, apresentam proporções maiores de escala de cinza e, conseqüentemente, maior presença de material intermediário entre as fases material, que é o objeto principal de análise dessa dissertação.

## 4.2 Avaliação da presença de material não-discreto

A fim de obter uma proposta confiável para o cálculo de material intermediário na otimização topológica sem alto custo computacional, buscou-se na literatura uma maneira para analisar os valores das variáveis de projeto correspondentes a cada elemento finito no domínio.

Sigmund (2007) propõe uma maneira de avaliar se um projeto otimizado convergiu para uma solução discreta:

$$M_{nd} = \frac{\sum_{e=1}^n 4\rho_e(1 - \rho_e)}{n} \times 100\%. \quad (4.1)$$

Se uma topologia ótima é totalmente discreta,  $M_{nd} = 0\%$ , por outro lado, se a topologia apresentar cor intermediária entre as definidas (0-1),  $M_{nd} = 100\%$ . Assim, a medida pode ser chamada de medida de não discrição ( $M_{nd}$ ).

Estendendo a análise da  $M_{nd}$  para a otimização topológica multimaterial, é necessário avaliar a presença de material intermediário em cada intervalo de interpolação. Para isso, neste trabalho, o vetor que contém as variáveis de projeto  $\rho_e$  inicialmente é analisado.

Os valores das densidades são identificados e classificados de acordo com o intervalo de interpolação a que pertencem. Uma vez que o intervalo é selecionado, é avaliado o percentual de cada material presente naquele elemento finito. Se o valor de  $\rho_e$  corresponder a um dos valores dos extremos do intervalo de interpolação  $M_{nd} = 0\%$ . O processo então é repetido para todos os elementos do domínio e o valor final da  $M_{nd}$  naquele intervalo é obtido conforme a Equação 4.1.

### 4.3 Processo de geração de imagem da topologia

Os resultados do processo de otimização topológica consistem em vetores de variáveis de projeto com valores contínuos a serem interpretados. Neste caso, existem vários campos de fração de volume referentes a materiais distintos, que devem ser ilustrados em um único gráfico. Para isso, é necessário converter a matriz de densidades dos elementos em uma imagem apropriada para os dados gerados.

Zuo & Saitou (2017) não se preocuparam em apresentar uma imagem adequada para os resultados obtidos e as topologias geradas em seu trabalho não são conclusivas quanto a presença de material intermediário.

O processo de geração de imagem precisa então de uma abordagem que represente, de fato, as densidades presentes nos elementos finitos na imagem. A implementação é feita de maneira similar à análise de material não discreto.

São identificados os intervalos de interpolação e é analisada a presença de cada material no elemento. Assim, é aplicado o percentual da mistura de cores no elemento, gerando cores intermediárias entre as cores pré-estabelecidas.

A implementação em MATLAB dessa função é feita conforme Tavakoli & Mohseni (2014), e possibilita avaliar visualmente a presença de material entre duas fases materiais.

A Figura 4.2 ilustra a topologia ótima obtida com nova resolução de imagem. A presença de material intermediário é observada nas regiões de transição entre os materiais pré-estabelecidos.

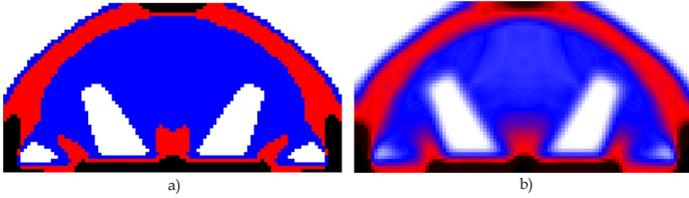


Figura 4.2 – Topologia da ponte simétrica: a) Zhuo & Saitou (2017); b) resolução melhorada nesta dissertação.

## Capítulo 5

# Aplicação da interpolação SIMP ordenada

O algoritmo da interpolação SIMP ordenada é apresentado a seguir.

---

### Algoritmo 1: Algoritmo SIMP Ordenado

---

**Result:** Projeto final  
 $\rho^0$  projeto inicial;  
**while** *convergência não for atendida do*  
     $\bar{E}(\rho), \bar{C}(\rho)$  propriedades interpoladas;  
     $u(t)$  análise estrutural via MEF;  
     $c(\rho) = f(u(t), \rho(t))$  cálculo da função objetivo;  
     $dc(\rho) = f(u(t), \rho(t))$  cálculo da derivada da função objetivo;  
     $\bar{dc}(c) = f(dc(\rho), dc_N(\rho))$  sensibilidade filtrada;  
    **while** *restrições não forem atendidas do*  
         $\rho(t+1) = f(\rho(t), dc(t));$   
    **end**  
    Avaliação da  $M_{nd}(\%)$ ;  
**end**

---

Como mencionado no Capítulo 3, as variáveis de projeto estão relacionadas às propriedades e, portanto, à resposta dada por meio da função de interpolação. O algoritmo de otimização possui

dois *loops* iterativos. O *loop* externo monitora a convergência do projeto a ser otimizado, e o *loop* interno verifica o cumprimento das restrições. A resposta  $u$  é uma função da variável de projeto  $\rho$  em cada iteração  $t$ .

O algoritmo trabalha com os três vetores de propriedades do material para cada fase considerada:  $\rho$ ,  $\mathbf{E}$ , e  $\mathbf{C}$ . Os vetores são normalizados e o vetor de densidades físicas conduz o processo de otimização. Os outros dois vetores são ordenados de modo que cada material tenha sua propriedade correspondente à mesma posição em cada vetor.

## 5.1 Experimentos numéricos

A interpolação SIMP ordenada é aplicada nos problemas clássicos da otimização topológica apresentados no capítulo anterior.

As alterações referentes à imagem da topologia gerada são empregadas para proporcionar um caráter qualitativo aos dados obtidos utilizando a medida de material não discreto. A presença de material intermediário é avaliada mediante a variação de alguns dos parâmetros de inicialização.

Para análise dos problemas apresentados, serão avaliados os seguintes parâmetros:

- frações de massa e custo prescritas  $\varepsilon_M$  e  $\varepsilon_C$ ;
- densidade inicial  $\rho_0$ ;
- raio de filtragem  $r_{min}$ ;
- resolução de malha.

As características dos materiais fictícios abordados no processo de otimização podem ser observadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedade normalizadas das quatro fases de material

Nome	Densidade	Módulo de Elasticidade	Custo	Cor
Vazio	0	0	0	Branco
A	0,4	0,2	0,5	Azul
B	0,7	0,6	0,8	Vermelho
C	1,0	1,0	1,0	Preto

### 5.1.1 Estrutura de ponte

O primeiro exemplo analisado é a estrutura de ponte. Para todos os casos analisados neste exemplo foram consideradas 130 iterações e malha com  $50 \times 50$  elementos, adotando simetria, para que os resultados possam ser verificados de acordo com Zuo & Saitou (2017). O raio do filtro de sensibilidades nas Seções 5.1.1.1 e 5.1.1.2 é  $r_{min} = 2$ .

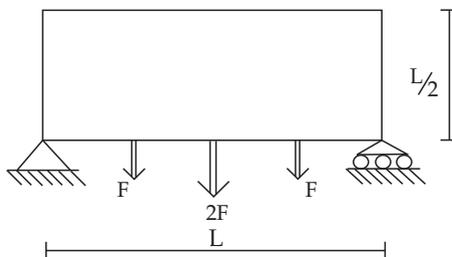


Figura 5.1 – Estrutura de ponte.

### 5.1.1.1 Otimização considerando apenas restrição de massa

Neste primeiro momento, apenas a restrição de massa  $\varepsilon_M$  é considerada ( $\varepsilon_C = 1$ ). A Figura 5.2 mostra a evolução das soluções considerando  $\varepsilon_M = 0,4$  para quatro casos diferentes de combinação dos materiais, considerando o vazio: (a) A, B e C; (b) B e C; (c) A e C; e (d) apenas o material C. Em todos os casos a restrição de massa é satisfeita. Os resultados mostram que a estrutura feita com apenas o material C atingiu o melhor valor da função objetivo dentre todos os casos. Isso acontece devido ao material C possuir a maior razão rigidez-densidade ( $E/\rho$ ) dentre todos os os materiais apresentados na Tabela 5.1.

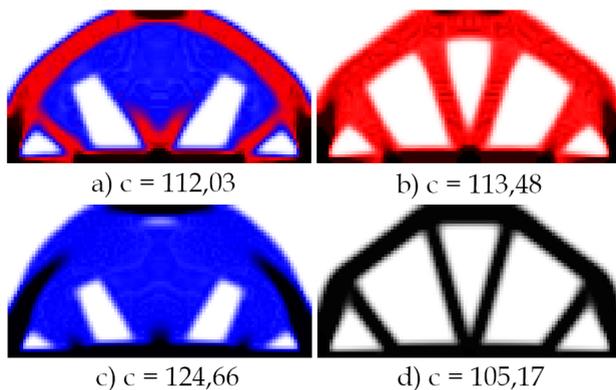


Figura 5.2 – Estrutura de ponte sob restrição de massa.

### 5.1.1.2 Otimização considerando restrições de massa e custo

Nos materiais A, B e C, o material C possui a maior razão rigidez-densidade ( $E/\rho$ ) e a menor razão custo-densidade ( $C/\rho$ ), por outro lado, o material A possui a menor razão rigidez-densidade e maior razão custo-densidade. Aparentemente, o ma-

terial C é superior ao material A. Todavia, se as restrições de massa e custo são consideradas, materiais inferiores, como A e B, também podem desempenhar um papel importante no processo de otimização.

A Figura 5.3 mostra os resultados obtidos considerando  $\varepsilon_M = 0,4$  e  $\varepsilon_C = 0,3$  para os mesmos materiais estabelecidos na Tabela 5.1.

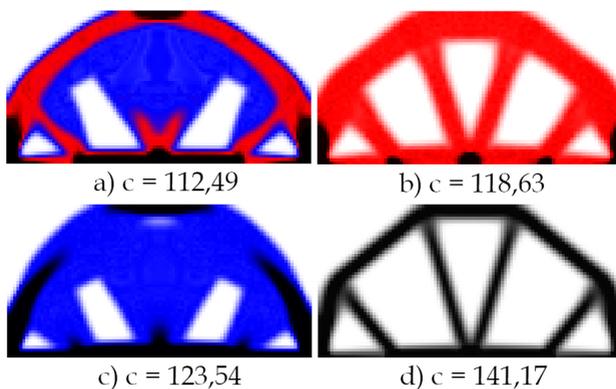


Figura 5.3 – Estrutura de ponte sob restrições de massa e custo.

Os exemplos numéricos demonstram que os materiais com menor razão rigidez-densidade e maior razão custo-densidade desempenham um papel importante na otimização quando as restrições de massa e custo são consideradas.

### 5.1.1.3 Análise da presença de material intermediário

Os valores da presença de material intermediário obtidos nas Seções 5.1.1.1 e 5.1.1.2 são mostrados na Tabela 5.2. Com exceção ao Caso 4 considerando restrições de massa e custo, a

inclusão de uma restrição referente ao custo reduziu a presença de material intermediário.<sup>1</sup>

Observa-se que a redução do material intermediário influencia diretamente na função objetivo. O material não discreto possui difícil interpretação e impossibilidade de manufatura, além de afetar a rigidez da estrutura.

Tabela 5.2 – Presença de material intermediário considerando restrições de massa e custo

Restrição	Casos	Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
		Vazio - A	A - B	B - C	
$\varepsilon_M$	1	12,27	12,87	7,04	112,03
	2		25,75	7,04	113,48
	3	13,96		10,15	124,66
	4			18,08	105,17
$\varepsilon_M$ e $\varepsilon_C$	1	12,79	12,68	4,80	112,49
	2		24,10	2,63	118,63
	3	13,42		9,79	123,54
	4			25,58	141,17

Outro ponto que deve ser notado é que em todo primeiro intervalo de interpolação dos casos propostos a presença de material intermediário é alta. Ocampo (2017) concluiu em seu trabalho que em situações considerando restrições de massa os projetos tem preferência por usar o vazio o mínimo possível. O vazio então é substituído pelo seguinte material mais leve, a fim de melhorar o desempenho mecânico da estrutura.

<sup>1</sup> No Caso 4 considerando restrições de custo, o valor da restrição de massa não é atingido. Neste caso  $\varepsilon_C$  impede que  $\varepsilon_M$  atinja seu valor máximo permitido.

## 5.1.1.4 Influência da densidade inicial

Para investigar a influência do valor inicial da variável de projeto nos resultados da otimização, três valores iniciais de  $\rho_e^0$  são testados na otimização da estrutura de ponte:  $\rho_e^0 = 0, 1, \rho_e^0 = 0, 5$  e  $\rho_e^0 = 0, 9$ . O raio do filtro de sensibilidades para estes casos é  $r_{min} = 3$ .

A evolução das soluções durante o processo de otimização é apresentada na Figura 5.4. É notado que os valores de  $\rho_e^0$  possuem maior influência na topologia nos estágios iniciais do processo de otimização, enquanto que a solução para todos os casos tende a estabilizar após 40 iterações (Figura 5.5), com diferenças mínimas após isso.

Na Tabela 5.3 a influência de  $\rho_0$  é escrita em função da malha de elementos finitos utilizada para discretizar o problema. São apresentados o número de elementos finitos contidos em cada intervalo de interpolação e o percentual do quanto destes elementos apresentam valores intermediários.

Tabela 5.3 – Influência de  $\rho_0$  na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada.

$\rho_0$	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
0,1	2782	1526	692	16,98	16,95	5,68	118,75
0,5	2788	1558	654	19,28	17,78	5,07	118,77
0,9	2798	1648	554	17,63	17,82	4,44	114,92

Novamente é observado que a presença de material intermediário é elevada. Vale ressaltar que o raio do filtro de sensibilidades foi variado entre as Seções 5.1.1.2 e 5.1.1.4, se mostrando um parâmetro importante a ser considerado na otimização topológica. A próxima estrutura será utilizada para analisar a presença de material intermediário considerando  $r_{min}$  como principal parâmetro

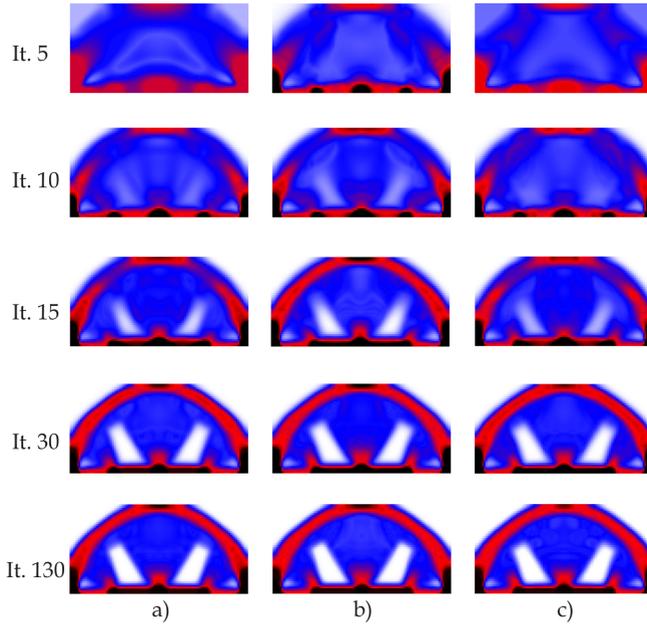


Figura 5.4 – Comparação da inicialização: (a)  $\rho_e^0 = 0,1$ ; (b)  $\rho_e^0 = 0,5$ ; (c)  $\rho_e^0 = 0,9$  utilizando o método SIMP ordenado.  $\varepsilon_M = 0,4$  e  $\varepsilon_C = 0,3$ .

de avaliação.

### 5.1.2 Viga MBB

A viga Messerschmidt-Bölkow-Blohm (MBB) é um dos casos mais estudados na otimização topológica. É composta de uma viga bi-apoiada com uma carga  $F = 1N$  aplicada no centro de sua face superior.

Neste exemplo a influência do  $r_{min}$  é avaliada utilizando

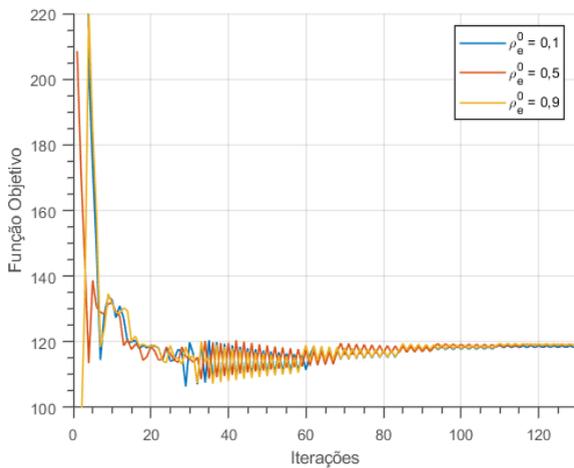


Figura 5.5 – Influência de  $\rho_0$  na convergência da função objetivo utilizando interpolação SIMP ordenada.

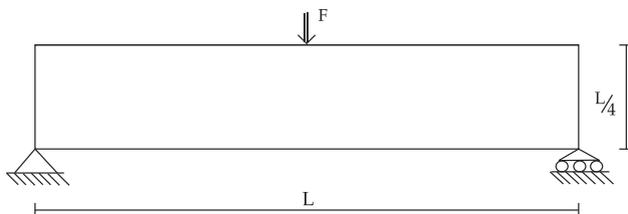


Figura 5.6 – Viga MBB

uma malha fina, com resolução de  $200 \times 100$  elementos,  $\rho_0 = 0,5$ ,  $\varepsilon_M = 0,4$  e  $\varepsilon_C = 0,3$ .

#### 5.1.2.1 Sensibilidade ao raio de filtragem

Métodos de filtragem são aplicados para regularizar a topologia do problema e evitar instabilidades numéricas, como a

instabilidade de tabuleiro apresentada na Figura 5.7.

Os filtros de vizinhança são os escolhidos para a análise numérica desta dissertação. A vizinhança é obtida por meio da definição de um raio em torno do elemento. Geralmente esses filtros são aplicados sobre as sensibilidades ou pseudo densidades dos elementos, embora outras grandezas também possam ser filtradas (CARDOSO; FONSECA, 2003).

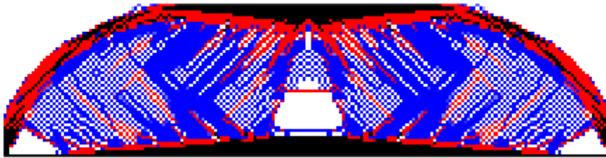


Figura 5.7 – Instabilidade de tabuleiro na Viga MBB

Para analisar a influência do valor do  $r_{min}$  na topologia, função objetivo e material intermediário, foram adotados diferentes tamanhos do raio de filtragem. A Figura 5.8 apresenta as

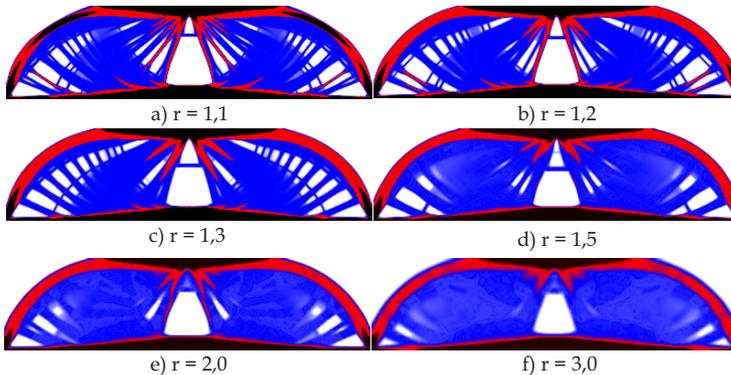


Figura 5.8 – Viga MBB

topologias obtidas com a variação deste parâmetro.

É notado que a topologia final varia conforme aumento do raio do filtro. Valores menores de  $r_{min}$  resultam em uma microestrutura mais detalhada utilizando estes métodos de filtragem.

A Tabela 5.4 quantifica o acréscimo de material intermediário à medida que o raio aumenta.

Tabela 5.4 – Influência de  $r_{min}$  na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada.

$r_{min}$	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
1,1	11564	4439	3997	8,80	2,08	0,84	109,58
1,2	10155	5565	4280	9,08	3,39	1,51	110,11
1,3	10558	5301	4141	8,62	3,70	1,67	110,51
1,5	13626	3158	3216	17,18	5,59	5,26	116,12
2,0	13541	3542	2917	21,65	8,09	6,44	120,11
3,0	13622	3753	2625	28,11	10,49	6,89	125,06

Aliados à Figura 5.8, os dados da Tabela 5.4 indicam que o aumento do raio gera uma maior escala de cinza na estrutura e o aumento do material intermediário. A distribuição de mais material, com menor rigidez, nas regiões onde o raio atua proporcionam o aumento da deformação global da estrutura.

Outro ponto a ser destacado da atuação dos filtros está relacionado ao contato entre os materiais. É notado que quando o procedimento é aplicado na estrutura, a distribuição do material é ordenada conforme a rigidez de cada elemento apresentado na Tabela 5.1.

O material de cor preta, por possuir maior rigidez, é distribuído nas extremidades da topologia onde há maior concentração de tensões, correspondentes aos apoios e pontos de aplicação da carga (com exceção à Figura 5.8 a), em que o raio é o mínimo adotado). É observado que este material interage apenas com o material de rigidez vizinha, representado pelo material de cor

vermelha, e não apresenta interação com os demais. O mesmo ocorre para os outros materiais. A interação ocorre apenas com os materiais vizinhos nos intervalos de interpolação.

Por outro lado, por meio de observação da Figura 5.7, nota-se a interação entre materiais de rigidezes diferentes das estabelecidas pelo intervalo de interpolação quando o método de filtragem não é aplicado.

Sigmund (2007) alega que filtros de vizinhança espacial modificam as pseudo densidades dos elementos (e consequentemente a sua rigidez), através da aplicação de um operador que depende dos valores de pseudo densidades presentes em uma vizinhança em torno do elemento. Uma discussão importante é a conservação do volume contido na vizinhança antes e depois da atuação do filtro.

### 5.1.3 Viga engastada

O exemplo da viga engastada é utilizado para o estudo do material intermediário na estrutura conforme a variação da malha de elementos finitos aplicada.

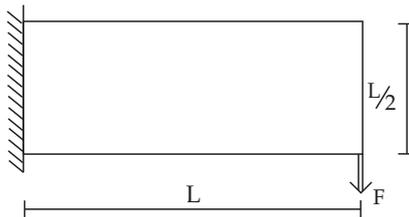


Figura 5.9 – Viga engastada

A Figura 5.10 apresenta as topologias obtidas com configurações de malha cada vez mais refinadas. Neste exemplo

$\varepsilon_M = 0,3$ ,  $\varepsilon_C = 0,25$  e  $r_{min} = 1,5$ .

Observa-se que as topologias não são muito diferentes entre si, entretanto, a diferença apresentada devido ao nível de detalhamento das malhas proporciona variações da distribuição de materiais com rigidezes diferentes na estrutura.

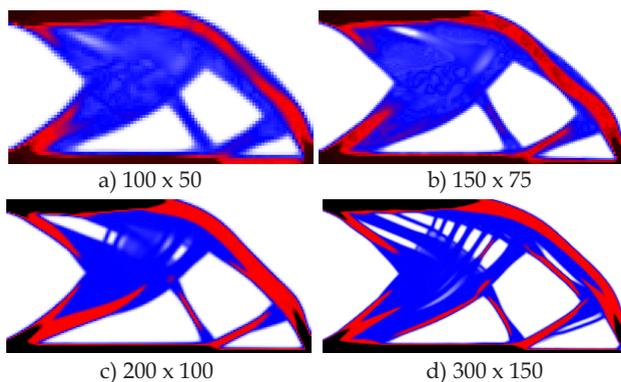


Figura 5.10 – Resoluções de malha aplicadas à viga engastada

Essa variação é quantificada na Tabela 5.5. O maior refino da malha proporciona ao processo de otimização a capacidade de distribuir material mais rígido na estrutura, criar vazios na mesma e ainda assim diminuir o valor da função objetivo.

Tabela 5.5 – Influência da malha de elementos finitos na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada.

Malha	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
100 × 50	3653	793	554	18,66	8,02	8,41	148,55
150 × 75	7789	1688	1773	13,47	7,89	7,13	139,17
200 × 100	13550	3108	3342	7,86	4,42	1,42	128,19
300 × 150	28361	9282	7357	7,65	4,21	1,22	127,86

A presença de material intermediário, como observado, é diminuída à medida utiliza-se uma malha com refinamento maior.

## 5.2 Conclusão sobre a influência dos parâmetros

O estudo sobre a influência da variação dos parâmetros de otimização é importante para avaliar como cada um deles modifica o resultado individualmente. Todos os parâmetros juntos têm papel importante na obtenção da topologia ótima.

Sendo assim, como o resultado depende de todos os parâmetros juntos, é difícil estabelecer os valores de todos os parâmetros para se obter o resultado, podendo existir soluções com melhores resultados que esses apresentados neste trabalho.

Todavia, algo a ser observado é que, nesta interpolação, a presença de material intermediário é contornada apenas com raios pequenos e malhas cada vez mais refinadas, podendo elevar o custo computacional de todo procedimento de análise.

No próximo Capítulo é proposta uma alteração na interpolação multi-material para redução de material intermediário global da estrutura.

## Capítulo 6

# Proposta de interpolação para redução de material intermediário

Com a intenção de obter uma proposta confiável para o cálculo do percentual de material intermediário na estrutura sem altos custos computacionais e sem alterar o algoritmo de interpolação SIMP ordenada propõe-se, neste capítulo, uma pequena alteração na expressão de interpolação multimaterial.

Para essa alteração, é proposto um ajuste na interpolação multimaterial, fundamentada numa modificação dos coeficientes de escala e translação da função interpoladora, para que o fator de penalização atue de maneira efetiva em todos os trechos de interpolação.

A seguir será discutido o efeito da penalização  $p$  na interpolação multimaterial.

### 6.1 Efeitos da penalização na curva de interpolação SIMP ordenada

Como já mencionado, a penalização  $p$  atua na função de interpolação aproximando os valores de densidades intermediárias

devido à relaxação do problema para os valores discretos pré-estabelecidos e, portanto, proporcionará a criação de estruturas mais distintas entre as fases de material.

Em se tratando do método de interpolação multimaterial SIMP ordenado, Zuo & Saitou (2017) apontam que quando a densidade normalizada se aproxima de  $(0, 0)$  a taxa de diminuição do módulo de Young é pequena (Figura 6.1). Em contrapartida, ao se aproximar do valor sólido  $(1, 1)$ , a taxa de aumento do módulo de elasticidade se torna grande. Essa relação reflete a preferência por maior rigidez e menor massa, ao mesmo tempo que desestimula a convergência para valores intermediários de densidades normalizadas. Mas, como visto no capítulo anterior, o valor da presença de material intermediário em toda a estrutura demonstra ser grande neste método de interpolação.

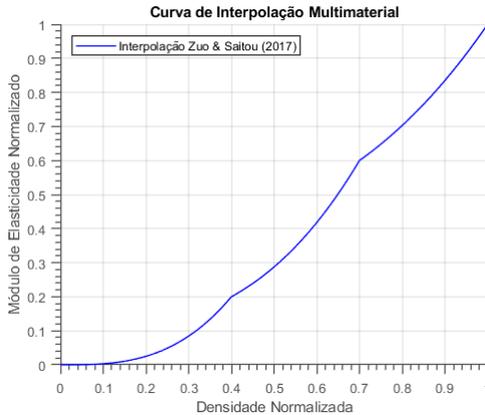


Figura 6.1 – Curva de interpolação SIMP ordenada com  $p = 3$ .

A Figura 6.1 ilustra a curva de interpolação SIMP ordenada.

A função de interpolação, no primeiro trecho, apresenta um

comportamento exponencial. Este comportamento é adequado, considerando  $p > 1$ . Todavia, nos trechos seguintes da interpolação o gráfico não apresenta a curvatura característica deste tipo de função.

Para ficar mais claro, na Figura 6.2 são adotados intervalos proporcionais entre as densidades e o módulo de elasticidade normalizados.

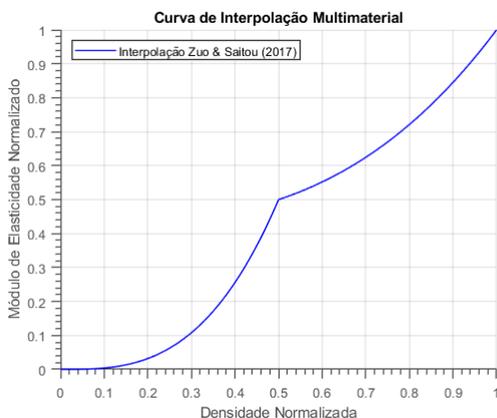


Figura 6.2 – Curva de interpolação SIMP ordenada com  $p = 3$ .

É facilmente observado que a inclinação da curva é diferente entre os dois trechos, indicando que a penalização não atua da mesma forma nos dois intervalos. Este, como será visto, é um dos motivos do percentual elevado de material intermediário na estrutura.

Na seção seguinte é proposto um ajuste nos coeficientes de escala e translação na interpolação SIMP ordenada, com o objetivo de redução do percentual de material intermediário na estrutura.

## 6.2 Proposta de ajuste na função de interpolação

Introduzindo os coeficientes de escala  $A_E$  e  $B_E$  e os coeficientes de translação  $C_E$  e  $D_E$  a função de potência estendida para o módulo de elasticidade  $E$  pode ser escrita como

$$E_e(\rho_e) = A_E(B_E(\rho_e) - C_E)^p + D_E, \quad (6.1)$$

em que  $A_E$ ,  $B_E$ ,  $C_E$  e  $D_E$  para  $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$  são dados por

$$A_E = E_{i+1} - E_i, \quad B_E = \frac{1}{\rho_{i+1} - \rho_i}, \quad C_E = \rho_i \quad \text{e} \quad D_E = E_i. \quad (6.2)$$

Os coeficientes  $A_E$  e  $B_E$  na Equação (3.4) atuam como coeficientes de escala e translação na posição do eixo das ordenadas, entretanto, em se tratando de uma análise gráfica em duas dimensões são necessários mais dois coeficientes para o ajuste da função na posição do eixo das abscissas. A nova curva de interpolação multimaterial com a adição dos dois novos parâmetros é ilustrada de maneira comparativa na Figura 6.3.

É observado que com a inclusão dos novos coeficientes na função, o parâmetro  $p$  é mais eficaz nos intervalos de transição entre materiais em comparação com Zuo & Saitou (2017) (Figura 6.5).

Outro ponto a ser notado por meio das Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 é que as duas interpolações possuem exatamente o mesmo comportamento no primeiro trecho, indicando que a presença de material intermediário neste trecho, nos resultados obtidos, tende a apresentar resultados semelhantes.

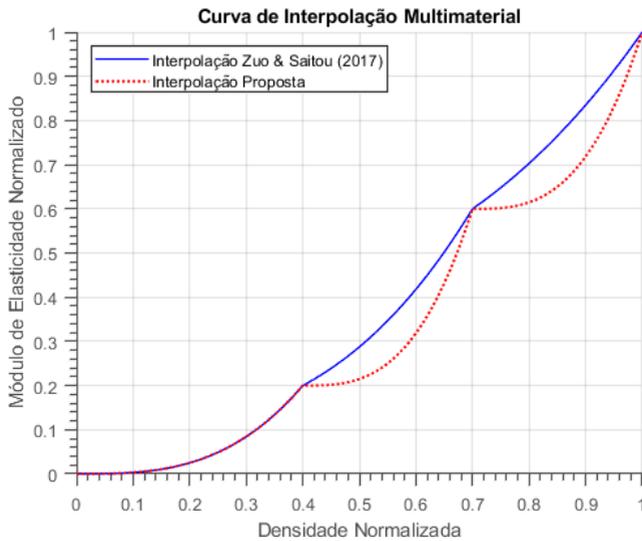


Figura 6.3 – Comparação entre as curvas de interpolação multimaterial.

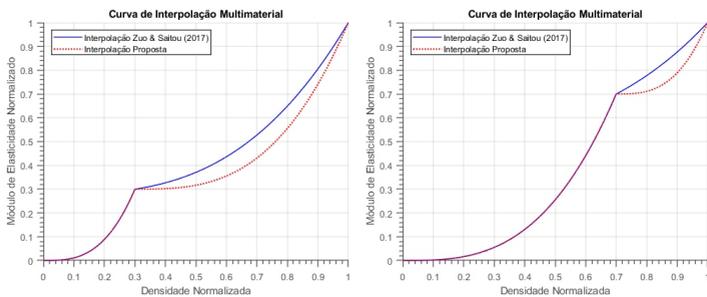


Figura 6.4 – Interpolações adotando intervalos diferentes.

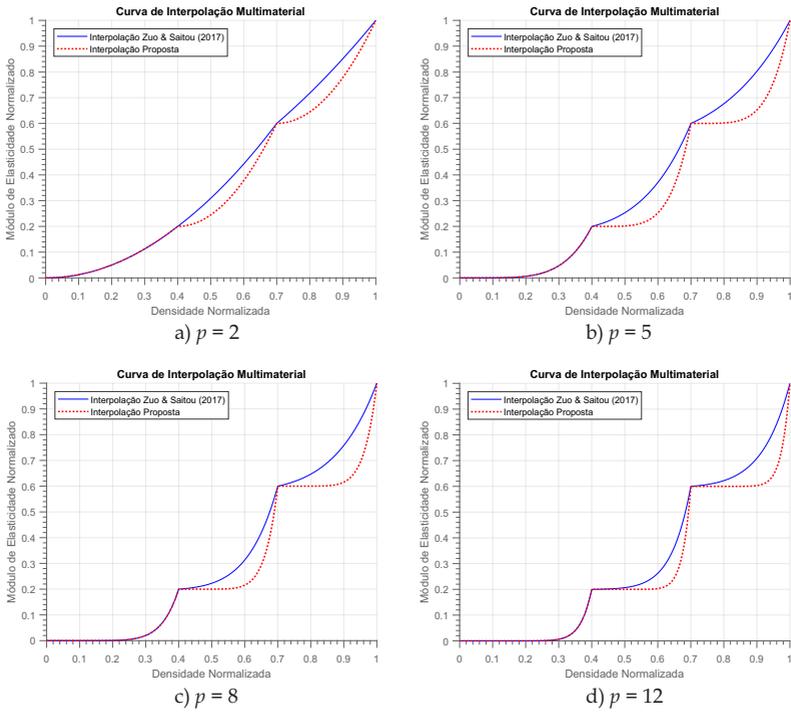


Figura 6.5 – Efeitos de diferentes valores de  $p$  nas curvas de interpolação.

### 6.3 Resultados

Nesta seção os casos abordados no Capítulo 5 serão reproduzidos utilizando a interpolação proposta neste capítulo, de modo a avaliar as alterações geradas nas topologias, funções objetivo e medida de material não discreto. Os testes estão sujeitos às mesmas condições iniciais adotadas anteriormente.

O exemplo da estrutura de ponte apresentou uma redução considerável do percentual de material intermediário. Porém, como é visto na Figura 6.6 houve um aumento no percentual de material A em toda a estrutura.

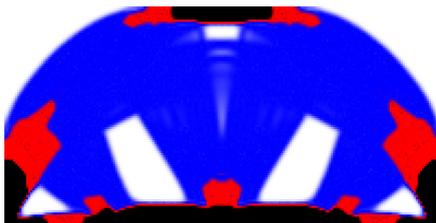


Figura 6.6 – Estrutura de ponte para a interpolação proposta:  $\rho_0 = 0,5$ .

A topologia da estrutura de ponte com  $\rho_0 = 0,5$  apresenta um aumento de 15,56% da presença de material A nos elementos finitos utilizados na discretização do problema, por outro lado o percentual de material intermediário referente a este intervalo foi reduzido em 3,72%. Os dados se mostram ainda melhores quando analisados os intervalos seguintes.

Como visto, a inclinação da curva interpolação SIMP ordenada é menos acentuada após o primeiro intervalo, proporcionando acréscimo de material intermediário. Com a nova interpolação há uma diminuição 12,5% de material não-discreto no

segundo intervalo e 3,2% no terceiro, resultando numa redução total de 21,68% em toda a estrutura.

Os dados referentes aos outros valores de densidade inicial podem ser vistos na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Influência de  $\rho_0$  na presença de material intermediário utilizando interpolação proposta:  $\rho_0 = 0, 5, 0,9$ .

$\rho_0$	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
0,1	2934	1226	840	12,23	5,35	1,20	125,43
0,5	3302	1010	688	13,30	5,28	1,87	125,14
0,9	3172	1154	674	12,04	5,32	1,37	126,97

Em se tratando da variação do raio do filtro de sensibilidades as topologias obtidas para a Viga MBB são observadas na Figura 6.7.

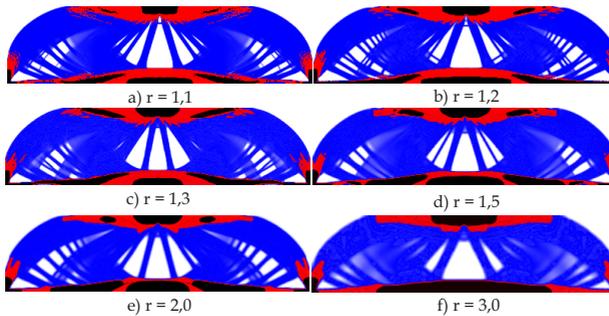


Figura 6.7 – Viga MBB para a interpolação proposta.

Valores menores do  $r_{min}$  resultam em microestruturas detalhadas, entretanto as topologias geradas não são consideradas ideais do ponto de vista de projeto. A presença de material azul é muito elevada, ainda assim, os dados apresentados na Tabela

6.2 são mais atrativos quando comparados à interpolação SIMP ordenada.

Tabela 6.2 – Influência de  $r_{min}$  na presença de material intermediário utilizando a interpolação proposta.

$r_{min}$	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
1,1	11740	5933	2327	8,34	0,41	0,42	123,15
1,2	12074	5462	2464	10,1	0,62	0,49	121,46
1,3	15400	2293	2307	18,22	2,21	1,74	129,24
1,5	14720	2604	2676	17,71	2,41	1,97	126,01
2,0	13061	4022	2917	12,73	2,34	1,32	123,14
3,0	14699	2517	2784	23,49	4,23	4,63	133,76

A variação da malha foi o parâmetro que demonstrou o maior aspecto qualitativo das topologias geradas com a interpolação proposta, deixando evidente o problema de dependência de malha inerente à otimização topológica.

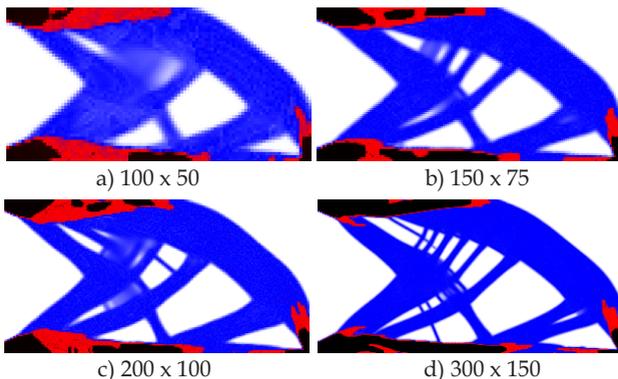


Figura 6.8 – Resoluções de malha aplicadas à viga engastada

Malhas mais refinadas, como visto na Figura 6.8, resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de

um modelo resultante de uma malha mais grosseira. É evidente também que a manutenção de  $r_{min}$  baixo proporciona topologias mais detalhadas com quantidade de elementos finitos elevada.

O processo de otimização demonstrou capacidade em distribuir o material mais rígido na estrutura, criar uma maior quantidade vazios e ainda assim diminuir o valor da função objetivo e presença de material intermediário na estrutura, como visto na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Influência da malha de elementos finitos na presença de material intermediário utilizando interpolação SIMP ordenada.

Malha	Elementos por Intervalo			Material Intermediário (%)			$f_{obj}$
	Vazio - A	A - B	B - C	Vazio - A	A - B	B - C	
100 × 50	4157	479	364	26,36	3,91	2,82	178,56
150 × 75	9161	1008	1081	14,18	1,57	1,5	158,88
200 × 100	15871	2335	1794	13,28	2,21	1,84	160,20
300 × 150	31922	7963	5115	7,44	0,97	0,53	149,84

## 6.4 Discussão

A proposta de ajuste de interpolação mostrou ser eficaz na redução de material intermediário na estrutura. Por outro lado, acredita-se que as restrições de massa e custo influenciam consideravelmente na presença de material referente ao primeiro intervalo de interpolação. É interessante buscar alternativas para que este problema não aconteça, seja alterando os valores das restrições ou estabelecendo limites de volume por material no domínio.

No próximo capítulo são aplicadas restrições de volume por material. Acredita-se que esta abordagem se mostra mais

flexível, uma vez que permite decidir as frações de material de acordo com as várias considerações de projeto e não apenas o custo.



## Capítulo 7

# Aplicação de restrições de volume por material

Na abordagem binária tradicional na otimização topológica, uma restrição de volume é utilizada para que a função objetivo seja limitada pela quantidade de material que pode ser distribuída na estrutura. A abordagem multimaterial deve modificar essa restrição de volume ou implementar uma segunda restrição para limitar não apenas a quantidade de material a ser usada, mas também favorecer a seleção de outros materiais.

É evidente que o material mais rígido oferece o melhor desempenho possível, e a estrutura tenderá a usar somente esse material, retornando a uma solução binária. Tavakoli & Mohseni (2014), Zhou & Wang (2007) e Lieu & Lee (2017) utilizaram uma restrição de fração de volume por material, enquanto Zuo & Saitou (2017), como visto, introduziram dois parâmetros adicionais na caracterização dos materiais: densidade e custo. Deixando as considerações de custo fora da análise ( $\varepsilon_C = 1$ ), os primeiros trabalhos restringem o volume e o segundo a massa. Ambas propostas são válidas e têm suas vantagens de acordo com considerações de projeto.

## 7.1 Descrição da abordagem

Nesta seção, uma restrição de volume por material é arbitrariamente utilizada, como em Tavakoli & Mohseni (2014), Lieu & Lee (2017) e Zhou & Wang (2007), de modo que o usuário indica em um vetor normalizado os volumes desejados de cada fase. Esta abordagem oferece maior flexibilidade ao projetista uma vez que permite decidir as frações de acordo com várias considerações e não apenas o custo.

Inicialmente o código base foi alterado para trabalhar com frações de volume por material. Estas frações de volume por material são definidas e impostas ao código por meio de uma matriz correspondente ao percentual de cada material presente na topologia final da estrutura.

A cada iteração é gerada uma matriz auxiliar para receber os valores de densidades físicas  $\rho$  presentes na estrutura e agrupá-las de acordo com os intervalos de interpolação definidos por meio das densidades normalizadas.

A restrição de volume por material, então, analisa essa matriz auxiliar e é aplicada no problema com base no vetor de frações de volume  $\mathbf{f}$  estabelecidas no início da análise, de modo que:

$$\sum_{e=1}^n V_e \rho_e \leq \mathbf{f} \sum_{e=1}^n V_e. \quad (7.1)$$

Uma vez que as restrições são verificadas, os valores de volume material e sensibilidades são atualizados e utilizados no processo de otimização das variáveis de projeto por meio do MMA.

## 7.2 Experimentos numéricos

Nesta seção, o comportamento das interpolações discutidas nesta dissertação é avaliado quando são impostas restrições de volume no problema. Serão avaliadas as topologias, funções objetivo e a presença de material intermediário, considerando três fases materiais: dois materiais sólidos e o vazio.

As propriedades do material e frações de volume correspondentes aos testes realizados nesta etapa do trabalho estão listadas na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Propriedades do material e fração de volume prescritas para diferentes casos.

Problema teste	$E$	$f$	Malha	Caso
Viga MBB	$[10^{-9} \ 0,5 \ 1,0]$	$[0,5 \ 0,3 \ 0,2]$	$100 \times 50$	1
			$150 \times 75$	2
			$200 \times 100$	3
	$[10^{-9} \ 1,0 \ 2,0]$	$[0,6 \ 0,25 \ 0,15]$	$200 \times 100$	4
Viga engastada	$[10^{-9} \ 0,5 \ 1,0]$	$[0,5 \ 0,3 \ 0,2]$	$100 \times 50$	5
			$200 \times 100$	6
	$[10^{-9} \ 1,0 \ 2,0]$	$200 \times 100$	7	
Estrutura de ponte	$[10^{-9} \ 1,0 \ 2,0]$	$[0,55 \ 0,2 \ 0,25]$	$200 \times 200$	8
	$[10^{-9} \ 2,0 \ 4,0]$	$[0,6 \ 0,25 \ 0,15]$	$200 \times 200$	9

O número de iterações é o parâmetro de parada do processo de otimização, e foram estabelecidas 250 iterações como valor padrão para análise dos casos numéricos.

### 7.2.1 Topologias ótimas

Foram obtidas as topologias ótimas dos 9 casos apresentados na seção anterior. Eles serão analisados de modo comparativo entre as interpolações abordadas nesta dissertação, de acordo

com cada estrutura em estudo.

As Figuras 7.1 e 7.2 apresentam os primeiro 4 casos, referentes à Viga MBB. As frações de volume por material, módulos de Young e resolução de malha foram apresentadas na Tabela 7.1. O raio  $r_{min} = 1,3$  neste primeiro momento.

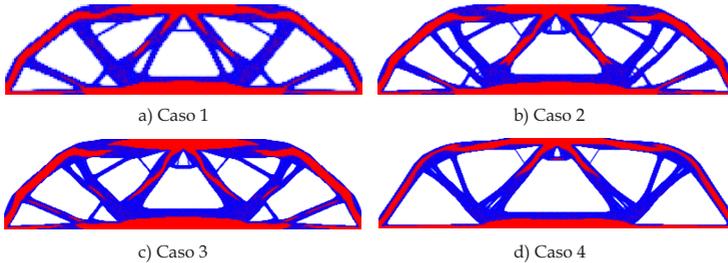


Figura 7.1 – Topologias ótimas da Viga MBB obtidas com a interpolação SIMP ordenada.

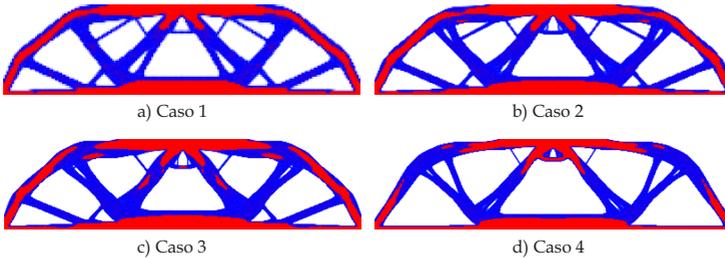


Figura 7.2 – Topologias ótimas da Viga MBB obtidas com a interpolação proposta.

É notado que não há grandes diferenças entre as topologias que definem a distribuição de material sólido nos casos. No entanto, é observado que nas estrutura geradas por meio da interpolação SIMP ordenada há mais regiões em cor vermelha, correspondente ao material com rigidez maior, principalmente

nas regiões centrais onde ocorre a distribuição de tensão gerada pela força aplicada.

Este fato foi abordado no Capítulo 6, onde foi mostrado que a penalização não atuava de maneira adequada a partir do segundo intervalo de interpolação, proporcionando o aparecimento de material intermediário entre as fases materiais, como é visto na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 –  $M_{nd}(\%)$  considerando restrições de volume por material na Viga MBB.

	Casos	Elementos por Intervalo		Material Intermediário (%)		
		Vazio - A	A - B	Vazio - A	A - B	Total
Zuo(2017)	1	3088	1912	5,6	12,54	18,14
	2	6995	4255	5,68	11,57	17,25
	3	12296	7704	4,89	11,81	16,70
	4	13823	6177	3,75	10,36	14,11
Proposta	1	3139	1861	5,94	10,07	16,01
	2	7059	4191	5,92	9,82	15,74
	3	12446	7544	5,28	9,53	14,81
	4	13940	6060	3,77	8,33	12,10

A segunda estrutura a ser observada é a Viga engastada, referente aos Casos 5, 6 e 7. As topologias obtidas estão representadas na Figura 7.3.

Novamente, as topologias são semelhantes, com poucas diferenças em virtude da presença de mais material vermelho nas estruturas geradas a partir da interpolação SIMP ordenada. Na Tabela 7.3 é apresentado o percentual de material não discreto referente à estes casos.

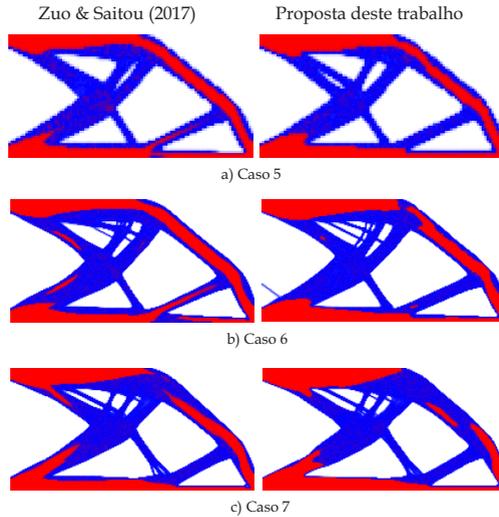


Figura 7.3 – Topologias ótimas da Viga engastada obtidas com as interpolações.

Tabela 7.3 –  $M_{nd}(\%)$  considerando restrições de volume por material na Viga engastada.

		Casos	Elementos por Intervalo		Material Intermediário (%)		
			Vazio - A	A - B	Vazio - A	A - B	Total
Zuo (2017)	5	3119	1881	5,94	11,87	17,81	
	6	12283	7717	4,75	11,59	16,34	
	7	12639	7631	4,68	11,21	15,89	
Pro- posta	5	3135	1865	5,54	9,88	15,42	
	6	12507	7493	5,10	9,04	14,14	
	7	12575	7425	4,83	9,23	14,06	

A fim de investigar a influência das frações de volume em topologias otimizadas os próximos casos são examinados para diferentes restrições de volume. As topologias obtidas dos Casos 8 e 9, referentes à estrutura de Ponte simétrica são mostradas na

Figura 7.4.

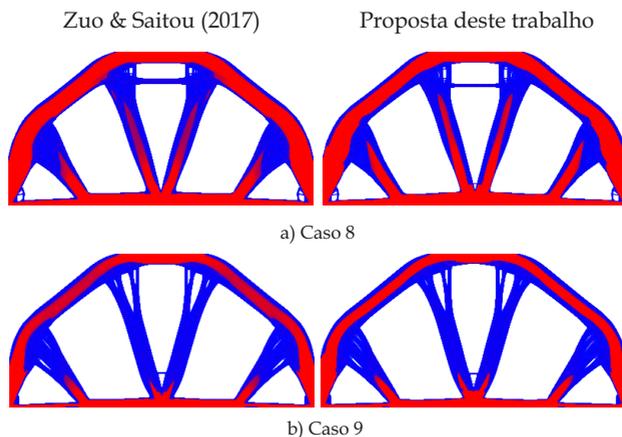


Figura 7.4 – Topologias ótimas da ponte simétrica obtidas com as interpolações.

A restrição em relação a cada fase é dada na Tabela 7.1. Para o Caso 8, o vazio é fixado em 55% do domínio, o material mais rígido ocupa outros 25% e, o material de rigidez intermediária às duas fases citadas, os outros 20%. Fica claro que a topologia otimizada obtida e os valores da função objetivo, que é abordada na seção seguinte, são sensíveis à mudança das restrições e propriedades do material, embora a diferença das frações de volume em todas as fases em comparação ao Caso 9 seja pequena.

No Caso 9 a topologia obtida por meio de Zuo & Saitou (2017) novamente demonstra a presença de material intermediário maior do que a interpolação proposta neste trabalho, e os dados são quantificados na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 –  $M_{nd}(\%)$  considerando restrições de volume por material na estrutura de Ponte

		Casos	Elementos por Intervalo		Material Intermediário (%)		
			Vazio - A	A - B	Vazio - A	A - B	Total
Zuo	2017	8	24791	15209	2,40	9,10	11,5
		9	27338	12662	2,56	10,89	13,45
Pro- posta		8	25374	14626	3,01	6,17	9,18
		9	28459	11541	4,12	5,93	10,05

### 7.2.2 Função objetivo

Como pode ser visto, embora as soluções ótimas sejam obtidas para diferentes resoluções de malha, a distribuição de material para cada uma das fases parte do princípio de distribuir o material com rigidez maior nos pontos dos apoios e nas regiões de aplicação das forças, enquanto que o material de rigidez intermediária (azul) é posicionado principalmente nas regiões que desempenham o papel de reforço na estrutura.

A Figura 7.5 mostra a evolução da função objetivo e as topologias obtidas em 5, 25, 50, 100, 200 e 250 iterações. Verifica-se que a medida que as restrições passam a serem atendidas (Figura 7.6), a convergência da função objetivo torna-se consistente.

Ao passo que as restrições são atendidas as topologias tomam forma, e a partir disso a evolução da estrutura se dá pela penalização e eliminação de material intermediário. É visto na Figura 7.5 que nas iterações iniciais há mistura entre o material azul e vermelho, com aspecto roxo, e com a evolução do processo de otimização este material não discreto é largamente reduzido.

A Figura 7.7 ilustra o gráfico de convergência para os Casos da interpolação proposta.

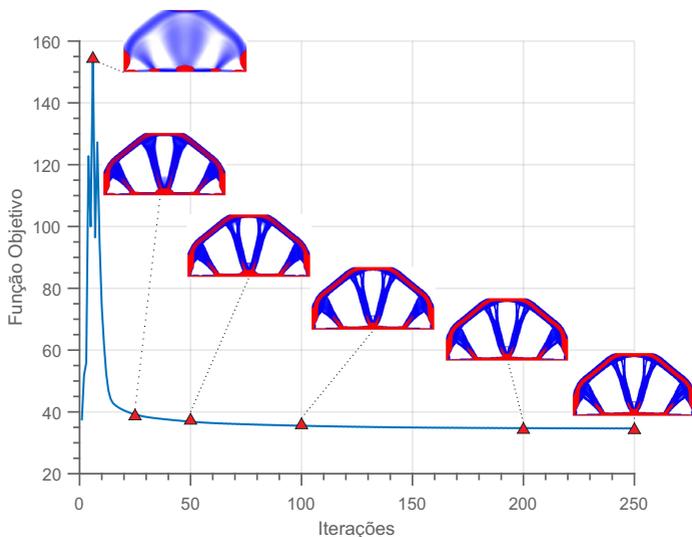


Figura 7.5 – Evolução da convergência da função objetivo da estrutura de Ponte.

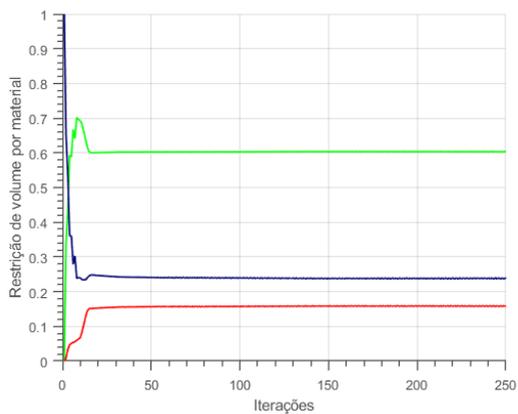


Figura 7.6 – Convergência das frações de volume por material.

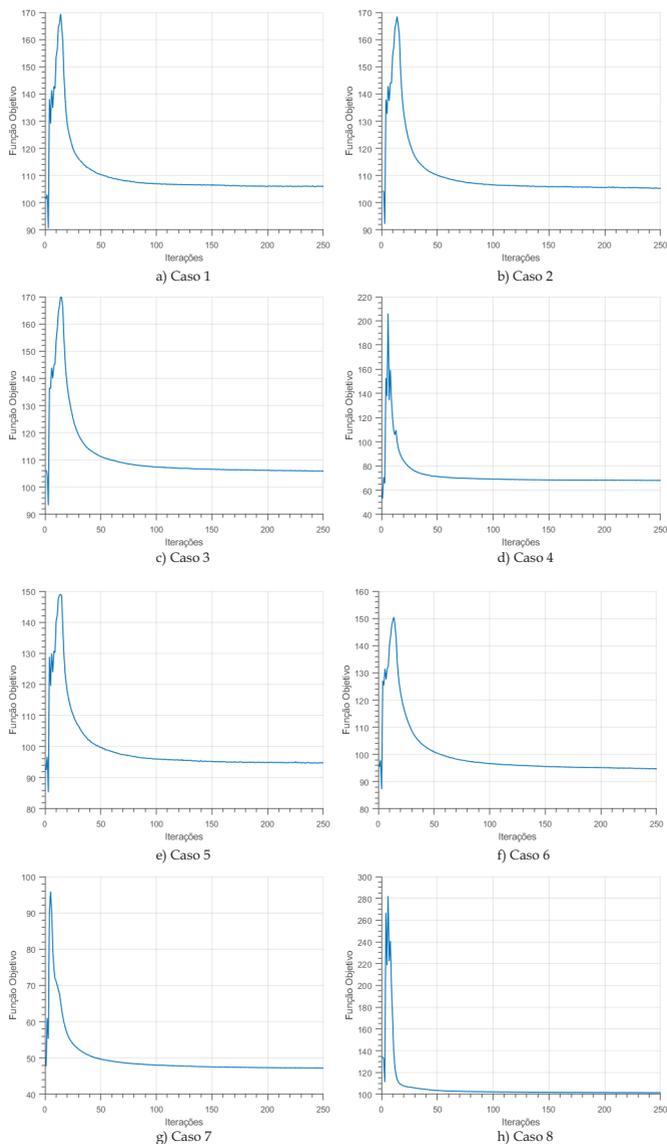


Figura 7.7 – Funções objetivo dos Casos para a interpolação proposta

## Capítulo 8

# Considerações Finais

### 8.1 Conclusões

Este trabalho apresentou um estudo em otimização topológica multimaterial, com o objetivo de realizar análises complementares sobre o método de interpolação SIMP ordenada proposto por Zuo & Saitou (2017). O problema de projeto foi formulado como um problema de otimização em que a função objetivo era a minimização da flexibilidade da estrutura utilizando materiais com rigidez e custo distintos, considerando restrições de massa e de custo.

O método de interpolação SIMP ordenada para otimização multimaterial não se baseia em variáveis adicionais para representar a seleção do material, tornando o custo computacional independente do número de materiais considerados. Entretanto, a presença de material intermediário devido à relaxação do problema no processo de otimização demonstra ser elevada, resultando em topologias de difícil interpretação e que não são atrativas do aspecto de projeto.

Para investigar a efetividade do método, situações numéricas disponíveis na literatura foram discretizadas utilizando elementos finitos, e para avaliar a presença de material intermediário nas estruturas foi adotada a medida de material não-discreto

proposta por Sigmund (2007).

Adicionalmente, analisou-se a influência dos parâmetros iniciais na presença de material intermediário, bem como nas topologias e funções objetivo obtidas. Além disso, ao longo do desenvolvimento do trabalho foram idealizados objetivos secundários. O primeiro era propor um ajuste na interpolação multimaterial para redução de material intermediário em toda estrutura e, em seguida, foi considerada a aplicação de restrições de volume por material para avaliar o comportamento das estruturas e da presença de material não-discreto. Os dois foram cumpridos.

O primeiro ponto observado no estudo foi alta presença de material intermediário em toda a estrutura, principalmente no primeiro intervalo de interpolação. Notou-se que em situações considerando restrições de massa, os projetos tinham preferência por usar o vazio o mínimo possível. Deste modo, o vazio era substituído pelo seguinte material mais leve para melhorar o desempenho mecânico da estrutura. Isso ficou claro na Seção 5.1.1 em que foram propostas situações com diferentes combinações de materiais. Independente da combinação, o primeiro intervalo de interpolação apresentava maior percentual de material intermediário em todos os casos em que a restrição de custo de material foi considerada.

Quanto ao raio de filtragem, observou-se que raios maiores proporcionam distribuição de mais material com menor rigidez nas áreas em que o raio atua, além de estabelecerem uma ordem de contato entre os materiais. Foi visto, em situações com instabilidade de tabuleiro, que era possível o contato entre o material mais rígido e o menos rígido dentro do domínio, entretanto, a atuação do raio estabelece uma ordem de interação entre os materiais de acordo com sua rigidez. É interessante ressaltar

que, pela metodologia ser recente, é necessário o estudo e aplicação de novos métodos de filtragem e projeção para analisar este comportamento e como ele influencia na presença de material não-discreto.

As diferentes malhas utilizadas nos exemplos numéricos mostraram que a presença de material intermediário é diminuída à medida em são utilizadas malhas mais refinadas aliadas a raios menores.

Em relação aos objetivos secundários, foi proposto um ajuste na função de interpolação multimaterial, que consistia numa modificação dos coeficientes de escala e translação da função interpoladora. Deste modo, percentual de material intermediário decaiu em todos os exemplos quando comparados aos resultados obtidos anteriormente. Todavia, a presença do material de menor rigidez cresceu na estrutura quando analisado o número de elementos finitos correspondentes a cada intervalo de material, tornando as topologias ainda menos atrativas do aspecto de projeto. Para solucionar este problema foi proposta uma nova abordagem nas restrições, adotando restrições de volume para cada um dos materiais.

Nesta nova abordagem, foram adotados três fases materiais (considerando o vazio). Como era de se esperar, a limitação de material reduziu consideravelmente a presença de material no primeiro intervalo de interpolação, proporcionando topologias ótimas que podem ser comparadas a diversos trabalhos da literatura.

Para fins de avaliação foram testadas diferentes frações de volume, módulos de elasticidade e resoluções de malha nos exemplos. Ficou clara a sensibilidade das topologias e funções objetivo a esses parâmetros, mesmo com as mudanças nas frações de volume sendo pequenas.

De modo geral, foram atingidos os objetivos de avaliação e redução de material intermediário na estrutura com as medidas adotadas no processo de desenvolvimento desse trabalho. Vale salientar que a interpolação proposta se mostrou mais efetiva que a interpolação de Zuo & Saitou (2017) nos exemplos considerados, porém, há um grande número de possibilidades existentes para melhora.

## 8.2 Sugestões para trabalhos futuros

Nesta dissertação, foi discutido como abordar a presença de material intermediário numa estrutura e proposto um modelo material para reduzir a presença deste material indesejado. Neste trabalho, portanto, é fornecido um passo para a introdução e desenvolvimento de métodos de interpolação aliados a otimização no campo de engenharia de estruturas. Há, no entanto, muito espaço para investigar novos métodos e abordagens para muitos outros problemas e formulações. Por exemplo, métodos podem ser implementados para lidar com mais restrições e possivelmente restrições não-lineares, como restrições de tensão, entre outras possibilidades. Essa seção apresenta alguns tópicos possíveis para pesquisas futuras.

A discussão é limitada ao problema de minimização de flexibilidade de estruturas bidimensionais simples presentes na literatura. Futuros trabalhos devem ser feitos para responder questões envolvendo problemas mais complexos, como o de mecanismos flexíveis.

As formulações propostas neste trabalho e a de Zuo & Saitou (2017) usam a abordagem de penalização material SIMP e filtros baseados em gradiente (filtro de sensibilidade e densidade).

---

Adicionalmente, o domínio é discretizado utilizando um modelo padrão de elementos finitos, geralmente utilizado para propósitos acadêmicos. A implementação final dos exemplos abordados neste trabalho pode ser feita utilizando malhas mais gerais, bem como diferentes técnicas de suavização para evitar instabilidade de tabuleiro, como os filtros de projeção propostos nos trabalhos de Xu, Cai & Cheng (2010) e Guest, Asadpoure & Ha (2011).

É particularmente interessantes estender a análise feita neste trabalho para ser capaz de lidar com restrições não-lineares e, assim, avaliar os métodos propostos a aplicações reais e práticas, como o feito em Ramani (2011) e Li & Kim (2018).



# Referências

AAGE, N.; POULSEN, T. H.; GERSBORG-HANSEN, A.; SIGMUND, O. Topology optimization of large scale stokes flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 35, n. 2, p. 175–180, 2008. 29

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 43, n. 1, p. 1–16, 2011. 57

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989. 33

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71, p. 197–224, 1988. 29, 33

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, v. 69, n. 9-10, p. 635–654, 1999. 30

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization Theory, Methods, and Applications*. 2nd. ed. Denmark: Springer, 2003. 370 p. 30, 34, 39, 40, 42, 43, 49, 50, 51, 52, 56, 59, 60, 65, 67

BLASQUES, J. P. Multi-material topology optimization of laminated composite beams with eigenfrequency constraints. *Composite Structures*, v. 111, n. 1, p. 45–55, 2014. 60

BLASQUES, J. P.; STOLPE, M. Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections. *Composite Structures*, v. 94, n. 11, p. 3278–3289, 2012. 60

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. Complexity control in the topology optimization of continuum structures. *Journal of the*

*Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 25, n. 3, p. 293–301, 2003. ISSN 1678-5878. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-58782003000300012&lng=en&nrn](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782003000300012&lng=en&nrn)>. 84

CHANDRUPATLA, T. R.; HORTON, M. J.; BRIEN, P. V. O. *Introduction to Finite*. New York: Pearson, 2012. 518 p. ISBN 9780132162746. 70

CHENG, K.-T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal-design of solid elastic plates. *Solids Structures*, v. 17, p. 305–323, 1981. 33

CHENG, K.-T.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. *Solids Structures*, v. 18, p. 153–169, 1982. 33

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. W. *Concept and Applications of Finite Element Analysis*. Fourth ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2002. 733 p. 70

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, v. 10, n. 1, p. 40–45, 1995. 50

DUYSINX; BENDSOE. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 43, n. 1, p. 1453 – 1478, 1998. ISSN 00457949. 47

DUYSINX; SIGMUND. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. n. 1, p. 1501–1509, 1998. 47

ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. *Applied Mechanics Reviews*, v. 54, n. 4, p. 331, 2001. 34, 47, 49

FELIPPA, C. A. A historical outline of matrix structural analysis: A play in three acts. *Computers and Structures*, v. 79, n. 14, p. 1313–1324, 2001. 32

- GOURNAY, F.; ALLAIRE, G.; JOUVE, F. Shape and topology optimization of the robust compliance via the level set method. v. 14, n. Umr 7641, p. 43–70, 2008. 43
- GUEST, J. K.; ASADPOURE, A.; HA, S. H. Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 44, n. 4, p. 443–453, 2011. ISSN 1615147X. 115
- GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H. Design of maximum permeability material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 4-6, p. 1006–1017, 2007. ISSN 00457825. 29
- GUTH, D. C.; LUERSEN, M. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Optimization of three-dimensional truss-like periodic materials considering isotropy constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 52, n. 5, p. 889–901, 2015. 29
- JUNG, D.; GEA, H. C. Design of an energy-absorbing structure using topology optimization with a multimaterial model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 32, n. 3, p. 251–257, 2006. 35
- KIRSCH, U. Optimal Topologies of Structures. *Applied Mechanics Reviews*, v. 42, n. 8, p. 223, 1989. 34
- KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 39, n. 2, p. 139–182, 1986. 33
- KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 39, n. 2, p. 139–182, 1986. 33
- KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, III. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 39, n. 3, p. 353–377, 1986. 33

- LI, D.; KIM, I. Y. Multi-material topology optimization for practical lightweight design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, n. 2014, p. 1–14, 2018. 115
- LIEU, Q. X.; LEE, J. A multi-resolution approach for multi-material topology optimization based on isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier B.V., v. 323, p. 272–302, 2017. 101, 102
- LONG, J. P.; HOLLISTER, S. J.; GOLDSTEIN, S. A. A paradigm for the development and evaluation of novel implant topologies for bone fixation: In vivo evaluation. *Journal of Biomechanics*, Elsevier, v. 45, n. 15, p. 2651–2657, 2012. 29
- OCAMPO, J. S. *Multi material topology optimization with hybrid cellular automata*. 89 p. Tese (Doutorado) — Purdue University, 2017. 80
- PARK, J.; SUTRADHAR, A. A multi-resolution method for 3D multi-material topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier B.V., v. 285, p. 571–586, 2015. 30
- PEDERSEN, P.; PEDERSEN, N. L. Interpolation/penalization applied for strength design of 3D thermoelastic structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 45, n. 6, p. 773–786, 2012. 29
- PRAGER, W. A note on discretized michell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 3, n. 3, p. 349–355, 1974. 32
- QIAN, X.; SIGMUND, O. Topological design of electromechanical actuators with robustness toward over- and under-etching. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier B.V., v. 253, p. 237–251, 2013. 29
- RAMANI, A. A pseudo-sensitivity based discrete-variable approach to structural topology optimization with multiple materials.

*Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 6, p. 913–934, 2010. 35

RAMANI, A. Multi-material topology optimization with strength constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 43, n. 5, p. 597–615, 2011. 35, 115

RODRIGUES, H. C.; FERNANDES, P. Topology optimization of linear elastic structures subjected to thermal loads. in *M.P. Bendsoe & C. A. Mota Soares (eds), Topology Design of Structures*, v. 227, p. 437–450, 1993. 50

ROZVANY, G. I. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 90–108, 2001. 42, 45, 46

ROZVANY, G. I.; PRAGER, W. Optimal design of partially discretized grillages. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 24, n. 2-3, p. 125–136, 1976. 32

ROZVANY, G. I. N.; LEWIŃSKI, T. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Udine: Springer, 2012. 471 p. 32, 47

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, v. 4, n. 3-4, p. 250–252, 1992. 45

SIGMUND, O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, n. 17, p. 2313–2329, 1994. 33

SIGMUND, O. On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997. 33, 52

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001. 47, 48, 57

- SIGMUND, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part II: Two-material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 49-50, p. 6605–6627, 2001. 34
- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 33, n. 4-5, p. 401–424, 2007. 33, 50, 52, 69, 72, 86, 111
- SIGMUND, O.; JENSEN, J. S. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 361, n. 1806, p. 1001–1019, 2003. 29
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998. 50, 52
- STANFORD, B.; BERAN, P. Conceptual Design of Compliant Mechanisms for Flapping Wings with Topology Optimization. *AIAA Journal*, v. 49, n. 4, p. 855–867, 2011. 29
- STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 22, n. 2, p. 116–124, 2001. 49
- SUTRADHAR, A.; PAULINO, G. H.; MILLER, M. J.; NGUYEN, T. H. Topological optimization for designing patient-specific large craniofacial segmental bone replacements. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 107, n. 30, p. 13222–13227, 2010. 29
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n. 2, p. 359–373, 1987. 53, 55

- SVANBERG, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 12, n. 2, p. 555–573, 2002. 55
- TAVAKOLI, R. Multimaterial topology optimization by volume constrained Allen-Cahn system and regularized projected steepest descent method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier B.V., v. 276, p. 534–565, 2014. 35, 60
- TAVAKOLI, R.; MOHSENI, S. M. Alternating active-phase algorithm for Multimaterial Topology Optimization problems: A 115-line MATLAB implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 49, n. 4, p. 621–642, 2014. 60, 73, 101, 102
- THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. *Structural Optimization*, v. 5, n. 1-2, p. 108–115, 1992. 34
- WADBRO, E.; BERGGREN, M. Topology optimization of an acoustic horn. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 1-3, p. 420–436, 2006. ISSN 00457825. 29
- XU, S.; CAI, Y.; CHENG, G. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 4, p. 495–505, 2010. ISSN 1615147X. 115
- YAMASAKI, S.; KAWAMOTO, A.; NOMURA, T.; FUJITA, K. Applications of a Consistent Grayscale-free Topology Optimization Method to Industrial Design Problems. n. June, p. 3–8, 2015. 48, 71
- YIN, L.; ANANTHASURESH, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 23, n. 1, p. 49–62, 2001. 35, 59

ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 152–158, 2001. 50

ZHOU, S.; WANG, M. Y. Multimaterial structural topology optimization with a generalized Cahn-Hilliard model of multiphase transition. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 33, n. 2, p. 89–111, 2007. ISSN 1615147X. 101, 102

ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 6th. ed. Oxford: Elsevier, 2005. 749 p. 70

ZUO, W.; SAITOU, K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 55, n. 2, p. 477–491, 2017. 31, 36, 38, 59, 61, 63, 64, 65, 73, 77, 90, 92, 101, 107, 111, 114